

Estadística

# Contents

<b>1</b>	<b>Estadística Descriptiva</b>	<b>2</b>
1.1	Introducción	2
<b>2</b>	<b>Muestreo</b>	<b>3</b>
2.1	Modelos estadísticos	3
2.2	Estadísticos muestrales	6
2.3	Momentos	6
2.4	Resultados de convergencias	8
2.5	Estadísticos ordenados	14
2.6	Ejercicios	16
<b>3</b>	<b>Reducción de Datos</b>	<b>20</b>
3.1	Teorema de Factorización de Fisher	20
3.2	Ejemplos de Factorización de Fisher	21
3.3	Estadístico minimal suficiente	23
3.4	Teorema de caracterización de estadísticos minimales suficientes	24
3.5	Familia exponencial $k$ -paramétrica	26
3.6	Estadísticos Ancilarios y Completos	28

# 1 Estadística Descriptiva

## 1.1 Introducción

El Cálculo de Probabilidades proporciona una Teoría Matemática que permite analizar las propiedades de los Experimentos Aleatorios

”La velocidad del movimiento caótico de las moléculas de un gas sigue una distribución normal de parámetros...”

”La vida de un determinado tipo de componente eléctrica tiene distribución exponencial de media...”

Construir un Espacio Probabilístico que sirva de Modelo Estadístico asociado a una determinada Variable Aleatoria real para la Deducción de Consecuencias

Para tratar de averiguar si una moneda está trucada no hay mejor procedimiento que lanzarla un buen número de veces y verificar si estadísticamente los resultados obtenidos confirman o invalidan la hipótesis  $p = 0.5$ , siendo  $p$  la probabilidad de cara. Desde el Cálculo de Probabilidades sólo se podrá actuar en función del parámetro  $p$  sin alcanzar soluciones numéricas

Disponer de un Conjunto de Observaciones del fenómeno considerado (en lugar de un espacio probabilístico totalmente especificado) hace abandonar los dominios del Cálculo de Probabilidades para introducirse en el terreno de la Estadística Matemática o Inferencia Estadística, cuya finalidad es obtener información sobre la Ley de Probabilidad de dicho fenómeno a partir del Análisis e Interpretación de las observaciones recolectadas

Estadística Descriptiva o Análisis de Datos: Recolección de la Información y su Tratamiento Numérico

Métodos Estadísticos e Inferencia Estadística: Conjunto de Técnicas que utilizan la Información para construir Modelos Matemáticos en situaciones prácticas de incertidumbre y Análisis e Interpretación de las observaciones como método para obtener conclusiones sobre la Ley de Probabilidad del fenómeno en estudio

Inferencia Frecuentista e Inferencia Bayesiana  
Modelos Estadísticos Paramétricos y No Paramétricos

Estimación Puntual: Pronóstico de un determinado parámetro de la distribución mediante un único valor numérico

Estimación por Intervalo: Intervalo numérico de valores en el que se pueda afirmar razonablemente que varía el parámetro en cuestión

Contraste de Hipótesis: Corroborar o Invalidar una determinada afirmación acerca de la distribución del fenómeno estudiado.

Concepto de Población y Muestra Aleatoria

## 2 Muestreo

### 2.1 Modelos estadísticos

#### Definición 2.1.1 [Modelo Estadístico]

Sea  $(\omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espacio de probabilidad asociado a un experimento aleatorio  $\mathcal{E}$ , una variable aleatoria observable  $X : \omega \rightarrow \mathbb{R}$  y su espacio medible asociado  $(\chi, \mathcal{B})$ .

Un **modelo estadístico** es una terna  $(\chi, \mathcal{B}, F)$ , donde:

- $\chi$  es el espacio donde la variable aleatoria  $X$  toma valores.
- $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra asociada a  $\chi$ . Generalmente se toma que  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ .
- $F$  es el conjunto de todas las posibles funciones de distribución que podemos considerar sobre  $\mathcal{B}$ .

#### Definición 2.1.2 [Modelo Estadístico Paramétrico]

Un **modelo estadístico paramétrico** es, al igual que el anterior, una terna  $(\chi, \mathcal{B}, F)$ , pero en este caso  $F$  depende de un parámetro  $\theta$  desconocido.

Se define  $F = \{F_\theta : \theta \in \Theta\}$ , donde  $\Theta$  es el espacio paramétrico, es decir, el conjunto de todos los posibles valores que puede tomar  $\theta$  para que  $F_\theta$  sea una función de distribución. De forma general se tiene que  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$ .

Además se tienen dos enfoques según cómo se tome el comportamiento de  $\theta$ :

- **Enfoque frecuentista:**  $\theta$  es un valor fijo pero desconocido.
- **Enfoque bayesiano:**  $\theta$  es una variable aleatoria.

#### Ejemplo

1. Sea  $X$  una variable aleatoria con distribución  $N(\theta, 1)$ , donde  $\theta$  es un parámetro desconocido. Entonces, el modelo estadístico asociado a este experimento es  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, F_\theta, \theta)$ , donde  $F_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}$ . En este caso  $\Theta = \mathbb{R}$ .
2. Sea  $X$ -variable aleatoria con distribución *Bernouilli*, de parámetro  $\theta$ . Entonces en este caso, el modelo estadístico asociado es  $(\{0, 1\}, \mathcal{B}, F_\theta, \theta)$ , donde  $F_\theta(x) = \theta^x(1 - \theta)^{1-x}$ . En este caso  $\Theta = [0, 1]$ .

#### Definición 2.1.3 [Muestra aleatoria simple]

Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) entonces a dicho conjunto se le conoce como **muestra aleatoria simple** de tamaño  $n$ .

Por tanto tenemos que el modelo estadístico asociado es una terna  $(\chi, \mathcal{B}, F)$ , donde:

- $\chi = \mathbb{R}^n$ .
- $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ .
- $F = \{F_\theta^n : \theta \in \Theta\}$ , donde  $\Theta$  es el espacio paramétrico, donde:

$$F_\theta^n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_\theta(x_i)$$

**Definición 2.1.4** [Función de Distribución Empírica]

Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  m.a.s.  $(n) \sim X$  y denotemos por  $(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})$  a la muestra ordenada de menor a mayor.  $\forall x \in \mathbb{R}$  fijo definimos la función distribución empírica como la variable aleatoria

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(X_i)$$

Observemos que

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < X_{(1)} \\ \frac{k}{n} & \text{si } X_{(k)} < x < X_{(k+1)}, k = 1, \dots, n-1 \\ 1 & \text{si } x \geq X_{(n)} \end{cases}$$

Dada una realización particular de la muestra  $(x_1, \dots, x_n)$ ,  $F_n(x)$  es una función de distribución asociada a una variable aleatoria discreta que toma valores  $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$  con función de masa  $(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n})$

**Ejemplo**

Supongamos que tenemos una muestra aleatoria ordenada de tamaño  $n = 5$  :

$$x_{(1)} = 2, x_{(2)} = 3, x_{(3)} = 5, x_{(4)} = 7, x_{(5)} = 9.$$

Entonces, por como se define la FDE  $F_n(x) = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 I_{(-\infty, x]}(X_i)$ , tenemos que:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ \frac{1}{5} & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ \frac{2}{5} & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ \frac{3}{5} & \text{si } 5 \leq x < 7 \\ \frac{4}{5} & \text{si } 7 \leq x < 9 \\ 1 & \text{si } x \geq 9 \end{cases}$$

De manera que cada vez que  $x$  alcanza un valor de la muestra, la función de distribución empírica aumenta en  $\frac{1}{n} = 0,2$ .

**Proposición 2.1.1** [Propiedades de la Función de Distribución Empírica]

Sea una muestra aleatoria  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de una variable aleatoria  $X$  con función de distribución  $F(x)$ . Definimos la función de distribución empírica como:

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \chi_{(-\infty, x]}(X_i)$$

donde  $\chi_{(-\infty, x]}(X_i)$  es la función indicadora que toma el valor 1 si  $X_i \leq x$  y 0 en caso contrario.

1. **Interpretación probabilística:** La función indicadora  $\chi_{(-\infty, x]}(X_i)$  sigue una distribución Bernoulli con parámetro  $F(x)$ , es decir:

$$\chi_{(-\infty, x]}(X_i) \sim \text{Bernoulli}(F(x))$$

Por tanto también podemos afirmar que:

$$\chi_{(-\infty, x]}(X_i) \sim \text{Bin}(1, F(x))$$

Además, la suma de estas variables sigue una distribución binomial:

$$\sum_{i=1}^n \chi_{(-\infty, x]}(X_i) \sim \text{Bin}(n, F(x))$$

2. **Esperanza y varianza:** Para un valor fijo de  $x$ , se cumple que:

$$E[F_n(x)] = F(x)$$

lo que indica que  $F_n(x)$  es un estimador insesgado de  $F(x)$ . La varianza está dada por:

$$V[F_n(x)] = \frac{F(x)(1 - F(x))}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

3. **Convergencia:**

(a) **Convergencia casi segura:**

$$F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} F(x)$$

(b) **Convergencia en distribución:** Se cumple la normalidad asintótica:

$$\frac{F_n(x) - F(x)}{\sqrt{\frac{F(x)(1-F(x))}{n}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 1)$$

4. **Intervalo de confianza para  $F(x)$ :** Dada una realización particular de la muestra  $(x_1, \dots, x_n)$ , se puede construir un intervalo de confianza asintótico para  $F(x)$  de nivel  $1 - \alpha$ :

$$IC_{1-\alpha}(F(x)) = \left( F_n(x) - \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}, F_n(x) + \frac{z_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}} \right)$$

donde  $z_{\alpha/2}$  es el cuantil de la distribución normal estándar.

### Teorema 2.1.1 [de Glivenko-Cantelli]

Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  m.a.s.(n)  $\sim X$  con función de distribución empírica  $F_n(x)$  y sea  $F(x)$  la función de distribución de  $X$ , es decir, de la población total. Entonces se cumple que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(w : \sup_x |F_n(x) - F(x)| < \epsilon) = 1, \forall \epsilon > 0$$

### Corolario 2.1.1

El Teorema de Glivenko-Cantelli permite realizar una técnica estadística denominada **método de sustitución (Plug-In)** la cual se basa en la sustitución de parámetros desconocidos por sus estimaciones sobre una muestra. Por ejemplo:

1. Se puede estimar la media poblacional  $\mu$  por la media muestral  $\bar{X} = \int x dF_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ .

2. Se puede estimar la varianza poblacional  $\sigma^2$  por la varianza muestral  $S^2 = \int (x - \bar{x}) dF_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sigma_n^2$ .

## 2.2 Estadísticos muestrales

### Definición 2.2.1 [Estadístico muestral]

Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  m.a.s.(n)  $\sim X$  y sea  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  medible (integrable), bien definida y no dependiente de parámetros desconocidos, se le llama **estadístico muestral**

### Ejemplo

Desacamos los siguientes estadísticos muestrales:

1. Media muestral  $T(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}$
2. Cuasivarianza muestral  $T(X_1, \dots, X_n) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = S_n^2$
3.  $T(X_1, \dots, X_n) = (\bar{X}, S_n^2)$

## 2.3 Momentos

Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  m.a.s.(n) de  $X$ ,  $\mu = E[X]$  y  $\sigma = \sqrt{V(X)}$ .

### Definición 2.3.1 [Momento Muestral]

Se define el momento muestral de orden  $k$  respecto al origen como

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

y el momento muestral de orden  $k$  respecto a la media como

$$b_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k$$

### Observación 2.3.1

- El momento muestral de orden 1 respecto al origen es la media muestral ( $a_1 = \bar{X}$ ).
- El momento muestral de orden 2 respecto a la media es la varianza muestral ( $b_2 = \sigma_n^2$ ).

### Definición 2.3.2 [Momento Poblacional]

Se define el momento poblacional de orden  $k$  respecto al origen como

$$\alpha_k = E[X^k]$$

y el momento poblacional de orden  $k$  respecto a la media como

$$\beta_k = E[(X - \mu)^k]$$

### Observación 2.3.2

- El momento poblacional de orden 1 respecto al origen es la media poblacional ( $\alpha_1 = \mu$ ).
- El momento poblacional de orden 2 respecto a la media es la varianza poblacional ( $\beta_2 = \sigma^2$ ).

### Proposición 2.3.1 [Propiedades asintóticas de los momentos muestrales]

Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  m.a.s.( $n$ ) de  $X \sim N(\mu, \sigma)$ , entonces se cumple que:

1. Momentos muestrales respecto al origen:

(a)

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} \alpha_k = E[X^k]$$

(b)

$$\bar{X} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} \mu \quad (\text{Ley Fuerte de Kintchine, } \mu < \infty)$$

2. Momentos muestrales respecto a la esperanza/media:

(a)

$$b_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} \beta_k = E[(X - \mu)^k]$$

(b)

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} \sigma^2$$

(c)

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c.s.} \sigma^2$$

### Propiedades asintóticas de los momentos muestrales

$$\sqrt{n} \frac{a_k - \alpha_k}{\sqrt{a_{2k} - a_k^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z \sim N(0, 1)$$

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z \sim N(0, 1), \quad \sigma = \sqrt{E[X^2] - \mu^2}$$

(Teorema Central del Límite de Levy-Lindeberg,  $\mu < \infty, \sigma < \infty$ )

$$\sqrt{n} \frac{b_k - \beta_k}{\sqrt{\beta_{2k} - \beta_k^2 - 2k\beta_{k-1}\beta_{k+1} + k^2\beta_{k-1}^2\beta_2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z \sim N(0, 1)$$



$$\sqrt{n} \frac{\sigma_n^2 - \sigma^2}{\sqrt{\beta^4 - \sigma^4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} Z \sim N(0, 1)$$

## 2.4 Resultados de convergencias

### Teorema 2.4.1 [de Slutsky]

Si  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$  y  $Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} a$  entonces

1.  $Y_n X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} aX$
2.  $X_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X + a$
3.  $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \frac{X}{a}$  siempre que  $a \neq 0$

### Lema 2.4.1

Si  $\{a_n\}$  es una sucesión de constantes con  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  y  $a$  es un número fijo tal que

$$a_n (X_n - a) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X$$

entonces para cualquier función  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  con derivada continua y no nula en  $a$  se tiene que

$$a_n (g(X_n) - g(a)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} g'(a)X$$

### Ejemplo

Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  m.a.s.  $(n)$  de  $X \sim N(\mu, \sigma)$ , se pide calcular la distribución de la media muestral:

Tenemos que  $\varphi_X(t) = e^{it\mu - \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \implies$

$$E[e^{\bar{X}}] = \varphi_{\bar{X}}(t) = E\left[e^{it\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i}\right] = \varphi_{\sum_{i=1}^n X_i}\left(\frac{t}{n}\right) = \left(\varphi_X\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n = e^{it\mu - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}t^2}.$$

Por lo tanto  $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

### Ejemplo

Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria  $X \sim N(0, \sigma)$ . La función de densidad de  $X$  es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}$$

Calculemos la distribución de  $a_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$

Definimos la variable estandarizada:

$$Z_i = \frac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1).$$

Entonces, la suma de los cuadrados sigue una distribución chi-cuadrado:

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi_n^2.$$

La distribución chi-cuadrado con  $n$  grados de libertad es un caso particular de la distribución Gamma:

$$\chi_n^2 \sim \text{Gamma} \left( a = \frac{1}{2}, p = \frac{n}{2} \right).$$

Donde: -  $a = \frac{1}{2}$  es el \*\*parámetro de forma\*\*. -  $p = \frac{n}{2}$  es el \*\*parámetro de escala\*\*.  
La función de densidad de la suma de cuadrados es:

$$f_{\sum_{i=1}^n Z_i^2}(y) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} y^{n/2-1} e^{-y/2}.$$

Como  $X_i^2 = \sigma^2 Z_i^2$ , al tomar la media muestral obtenemos:

$$a_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \sigma^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2.$$

Sustituyendo la distribución Gamma de la suma de  $Z_i^2$ , se tiene:

$$a_2 \sim \text{Gamma} \left( a = \frac{n}{2\sigma^2}, p = \frac{n}{2} \right).$$

Para muestras grandes, usando el \*\*Teorema Central del Límite\*\*, la variable estandarizada:

$$\sigma^2 \sqrt{\frac{n}{2\sigma^2}} (a_2 - \sigma^2)$$

converge en distribución a una normal estándar:

$$N(0, 1).$$

Este resultado es fundamental en inferencia estadística, ya que muestra que la varianza muestral puede aproximarse por una normal para muestras grandes.

#### Lema 2.4.2

Si  $Y \sim \text{Gamma}(a, p)$ , entonces  $T = 2aY \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2}, p)$ .

*Demostración.* Sabemos que la función de densidad de probabilidad de una variable aleatoria  $Y$  que sigue una distribución Gamma con parámetros  $a$  y  $p$  es:

$$f_Y(y) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} e^{-ay} y^{p-1}, \quad y \geq 0.$$

Ahora, definimos la variable  $T$  como  $T = 2aY$ , lo que implica que  $Y = \frac{1}{2a}T$ . Usamos el cambio de variable para encontrar la función de densidad de probabilidad de  $T$ . El jacobiano de este cambio es:

$$J = \left| \frac{dY}{dT} \right| = \frac{1}{2a}.$$

Por lo tanto, la función de densidad de probabilidad de  $T$  se obtiene sustituyendo en la fórmula general para el cambio de variable:

$$f_T(t) = f_Y\left(\frac{1}{2a}t\right) \cdot \frac{1}{2a}.$$

Sustituyendo la expresión de  $f_Y(y)$ , obtenemos:

$$f_T(t) = \frac{a^p}{\Gamma(p)} e^{-a(\frac{1}{2a}t)} \left(\frac{1}{2a}t\right)^{p-1} \cdot \frac{1}{2a}.$$

Simplificando, tenemos:

$$f_T(t) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^p}{\Gamma(p)} e^{-\frac{1}{2}t} t^{p-1}, \quad t \geq 0.$$

Esta es precisamente la función de densidad de una distribución Gamma con parámetros  $(\frac{1}{2}, p)$ , lo que demuestra que  $T \sim \text{Gamma}(\frac{1}{2}, p)$ .  $\square$

### Ejemplo

Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  una m.a.s.(n) de  $X \sim N(0, \sigma)$ . Entonces, la función de densidad es:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Se pide calcular la distribución de

$$a_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

Tipificando las variables aleatorias  $X_i$  como:

$$Z_i = \frac{X_i}{\sigma} \sim N(0, 1),$$

se tiene que

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi_n^2 \equiv \text{Gamma}\left(a = \frac{1}{2}, p = \frac{n}{2}\right)$$

La función de densidad de esta suma es:

$$f_{\sum_{i=1}^n Z_i^2}(y) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{y}{2}} y^{\frac{n}{2}-1}$$

Dado que

$$a_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2,$$

definimos el cambio de variable

$$J = \frac{n}{\sigma^2}.$$

Por lo tanto, la función de densidad de  $a_2$  es:

$$f_{a_2}(t) = f_{\sum_{i=1}^n Z_i^2}\left(\frac{n}{\sigma^2}t\right) \frac{n}{\sigma^2} = \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{n}{2\sigma^2}t} t^{\frac{n}{2}-1}.$$

Por lo tanto,

$$a_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \text{Gamma}\left(a = \frac{2\sigma^2}{n}, p = \frac{n}{2}\right).$$

Finalmente, bajo el límite

$$\sigma^2 \sqrt{\frac{n}{2}} (a_2 - \sigma^2) \xrightarrow{d} N(0, 1) \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

**Teorema 2.4.2** [de Fisher]

Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  una m.a.s.  $(n)$  de  $X \sim N(\mu, \sigma)$ , con  $\mu$  y  $\sigma$  desconocidos. Se cumple que:

1. La media muestral y la varianza muestral:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

son variables aleatorias independientes.

2. Sus distribuciones son:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

3. La siguiente variable aleatoria sigue una distribución  $t$  de Student:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}.$$

*Demostración.*

1.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ y } S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \text{ son independientes } \iff X_i - \bar{X} \text{ y } \bar{X} \text{ son independientes}$$

$\implies$  Veamos la independencia a través de la covarianza:  $Cov(X_i - \bar{X}, \bar{X}) = 0$ ?

$$\begin{aligned} Cov(X_i - \bar{X}, \bar{X}) &= E[(X_i - \bar{X})\bar{X}] - E[X_i - \bar{X}]E[\bar{X}] = E[(X_i - \bar{X})\bar{X}] - (E[X_i] - E[\bar{X}])E[\bar{X}] = \\ &= E[(X_i - \bar{X})\bar{X}] - (\mu - \mu)\mu = E[X_i \cdot \bar{X}] - E[\bar{X}^2] = E[X_i \cdot \bar{X}] - (V[\bar{X}] + E[\bar{X}]^2) = E[X_i \cdot \bar{X}] - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \\ &= E\left[\frac{1}{n}X_1 \cdot X_i + \dots + \frac{1}{n}X_i^2 + \dots + \frac{1}{n}X_n \cdot X_i\right] - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \\ &= \frac{1}{n}(E[X_1 X_i] + \dots + E[X_n X_i]) + \frac{1}{n}E[X_i^2] - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \\ &= \frac{n-1}{n}(\mu^2) + \frac{1}{n}(\sigma^2 + \mu^2) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2\right) = \\ &= \frac{n-1}{n}\mu^2 + \frac{\mu^2}{n} - \mu^2 + \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} = 0 \implies \\ Cov(X_i - \bar{X}, \bar{X}) &= 0 \implies \text{son independientes} \end{aligned}$$

2. Denotemos por

$$S_{n+1}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n+1} (X_i - \bar{X}_{n+1})^2.$$

Demostremos que:

$$nS_{n+1}^2 = (n-1)S_n^2 + (X_{n+1} - \bar{X}_n)^2 \frac{n}{n+1}.$$

Desarrollando la expresión:

$$\begin{aligned} nS_{n+1}^2 &= \sum_{i=1}^{n+1} (X_i - \bar{X}_{n+1})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n ((X_i - \bar{X}_n) + (\bar{X}_n - \bar{X}_{n+1}))^2 + (X_{n+1} - \bar{X}_{n+1})^2 \\ &= (n-1)S_n^2 + n(\bar{X}_n - \bar{X}_{n+1})^2 + (X_{n+1} - \bar{X}_{n+1})^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^n 2(X_i - \bar{X}_n)(\bar{X}_n - \bar{X}_{n+1}). \end{aligned}$$

Como  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n) = 0$ , el término cruzado se anula y obtenemos:

$$nS_{n+1}^2 = (n-1)S_n^2 + n(\bar{X}_n - \bar{X}_{n+1})^2 + (X_{n+1} - \bar{X}_{n+1})^2.$$

En este último paso, se desarrollan los cuadrados y se aplica la definición de la media muestral:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \implies n\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i.$$

Ahora, utilizando la relación:

$$\bar{X}_{n+1} = \frac{n\bar{X}_n + X_{n+1}}{n+1} \implies X_{n+1} - \bar{X}_{n+1} = \frac{(n+1)X_{n+1} - n\bar{X}_n - X_{n+1}}{n+1},$$

obtenemos:

$$\begin{aligned} nS_{n+1}^2 &= (n-1)S_n^2 + (X_{n+1} - \bar{X}_n)^2 \frac{n}{(n+1)^2} + (X_{n+1} - \bar{X}_n)^2 \frac{n^2}{(n+1)^2} \\ &= (n-1)S_n^2 + (X_{n+1} - \bar{X}_n)^2 \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

Así, hemos obtenido el resultado deseado.

**\*\*Distribución de la razón estandarizada:\*\*** Ahora veamos que:

$$\left( \frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sigma \sqrt{\frac{n+1}{n}}} \right)^2 \sim \chi_1^2.$$

Usamos las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}
X_{n+1} &\sim N(\mu, \sigma), \\
\bar{X}_n &\sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right), \\
X_{n+1} - \bar{X}_n &\sim N\left(0, \sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}\right).
\end{aligned}$$

En este desarrollo se ha usado que en las distribuciones normales, se restan las medias y se suman las varianzas. Por lo tanto, la variable estandarizada es:

$$\left(\frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\right) \sim N(0, 1) \sim \chi_1^2.$$

**\*\*Prueba por inducción:\*\*** Consideremos el caso base, con  $n = 2$ :

$$\begin{aligned}
\frac{S_2^2}{\sigma^2} &= \frac{1}{\sigma^2} ((X_1 - \bar{X}_2)^2 + (X_2 - \bar{X}_2)^2) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left( \left( X_1 - \frac{X_1 + X_2}{2} \right)^2 + \left( X_2 - \frac{X_1 + X_2}{2} \right)^2 \right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left( \frac{1}{4}(X_1 - X_2)^2 + \frac{1}{4}(X_2 - X_1)^2 \right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{2} (X_2 - X_1)^2.
\end{aligned}$$

Como hemos demostrado antes,

$$\left(\frac{X_2 - X_1}{\sigma\sqrt{2}}\right)^2 \sim \chi_1^2.$$

**\*\*Hipótesis de inducción:\*\*** Para  $n - 1$  supongamos que

$$\frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2.$$

Aplicando la fórmula demostrada:

$$\frac{nS_{n+1}^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} + \left(\frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\right)^2.$$

Como los dos términos a la derecha son independientes, y

$$\frac{X_{n+1} - \bar{X}_n}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}} \sim \chi_1^2,$$

obtenemos la suma de dos variables chi-cuadrado:

$$\chi_{n-1}^2 + \chi_1^2 \sim \chi_n^2.$$

**\*\*Conclusión:\*\*** Por inducción, se ha demostrado que

$$\frac{nS_{n+1}^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2.$$

3. Se deduce de los anteriores

□

## 2.5 Estadísticos ordenados

### Definición 2.5.1 [Estadísticos ordenados]

Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  una m.a.s.  $(n)$  de  $X$ . Podemos ordenar los valores de menor a mayor. A éstos se les llama estadísticos ordenados y se denotan por  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ . Sus funciones de distribución y densidad son:

$$F_{X_{(n)}}(x) = F(x)^n \implies f_{X_{(n)}}(x) = \frac{\partial}{\partial x}(F(x)^n) = nF(x)^{n-1}f(x)$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = 1 - (1 - F(x))^n \implies f_{X_{(1)}}(x) = \frac{\partial}{\partial x}(1 - (1 - F(x))^n) = n(1 - F(x))^{n-1}f(x)$$

$$F_{X_{(r)}}(x) = P\left(\sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(X_i) \geq r\right) = P(\text{Bin}(n, F(x)) \geq r) = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} F(x)^j (1 - F(x))^{n-j} \implies$$

$$f_{X_{(r)}}(x) = \binom{n}{r} r F(x)^{r-1} (1 - F(x))^{n-r} f(x)$$

$$f_{(X_{(r)}, X_{(s)})}(x, y) = \frac{n!}{(r-1)!(s-r-1)!(n-s)!} F(x)^{r-1} (F(y) - F(x))^{s-r-1} (1 - F(y))^{n-s} f(x) f(y)$$

$$f_{(X_{(1)}, \dots, X_{(n)})}(y_1, \dots, y_n) = n! \prod_{j=1}^n f(y_j) \text{ si } y_1 < \dots < y_n$$

### Ejemplo

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una muestra aleatoria simple de una distribución uniforme en  $(0, 1)$ , es decir:

$$X_1, X_2, \dots, X_n \stackrel{i.i.d.}{\sim} U(0, 1)$$

La función de distribución acumulada de una variable uniforme en  $(0, 1)$  es:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Ordenando la muestra de menor a mayor, los estadísticos ordenados se denotan como  $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ . Se quiere encontrar la función de densidad de estos valores ordenados.

Para el máximo,  $X_{(n)}$ , se tiene que su función de distribución es:

$$P(X_{(n)} \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \dots, X_n \leq x)$$

Dado que los datos son independientes, esto se factoriza como:

$$P(X_{(n)} \leq x) = F(x)^n = x^n, \quad 0 < x < 1$$

Derivando se obtiene la función de densidad:

$$f_{X_{(n)}}(x) = \frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}, \quad 0 < x < 1$$

Es decir,  $X_{(n)} \sim \text{Beta}(n, 1)$ .

Para el mínimo,  $X_{(1)}$ , la función de distribución se obtiene como:

$$P(X_{(1)} \leq x) = 1 - P(X_{(1)} > x) = 1 - P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x)$$

Por independencia,

$$P(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x) = (1 - F(x))^n = (1 - x)^n$$

Por lo que,

$$P(X_{(1)} \leq x) = 1 - (1 - x)^n, \quad 0 < x < 1$$

Derivando se obtiene la densidad:

$$f_{X_{(1)}}(x) = n(1 - x)^{n-1}, \quad 0 < x < 1$$

De manera general, para el  $r$ -ésimo estadístico ordenado, su densidad es:

$$f_{X_{(r)}}(x) = \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} x^{r-1} (1-x)^{n-r}, \quad 0 < x < 1$$

lo que implica que  $X_{(r)} \sim \text{Beta}(r, n - r + 1)$ .

La densidad conjunta del mínimo y el máximo de la muestra es:

$$f_{X_{(1)}, X_{(n)}}(x, y) = n(n-1)(y-x)^{n-2}, \quad 0 < x < y < 1$$

Esto muestra cómo la distribución de los estadísticos ordenados sigue distribuciones beta en función de la posición del orden estadístico dentro de la muestra.

Con lo obtenido, calculemos la distribución del rango muestral:  $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ :

Sea el cambio de variable

$$\left. \begin{array}{l} R = X_{(n)} - X_{(1)} \\ H = \frac{X_{(n)} + X_{(1)}}{2} \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_{(n)} = H + \frac{R}{2} \\ X_{(1)} = H - \frac{R}{2} \end{array}$$

Dado que estamos intentando calcular un cambio de variable aleatoria, necesitamos calcular el jacobiano de la transformación. En este caso, el jacobiano es:

$$J = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial X_{(1)}}{\partial H} & \frac{\partial X_{(1)}}{\partial R} \\ \frac{\partial X_{(n)}}{\partial H} & \frac{\partial X_{(n)}}{\partial R} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right| = 1.$$

Además, dado que  $X_{(i)}$  son variables aleatorias uniformes en  $(0, 1)$ , tenemos que:

$$0 < X_{(1)} = H - \frac{R}{2} < 1 \quad 0 < X_{(n)} = H + \frac{R}{2} < 1 \implies \frac{R}{2} < H < 1 - \frac{R}{2}$$

Entonces por el Teorema de la Transformación de Variables, la densidad conjunta de  $R$  y  $H$  es:

$$g_{(R,H)}(r, h) = f_{(X_{(1)}, X_{(n)})} \left( h - \frac{r}{2}, h + \frac{r}{2} \right) = 1 - n(n-1)r^{n-2}$$

Para obtener la densidad de  $R$ , se integra la densidad conjunta respecto a  $H$ :

$$f_R(r) = \int_0^1 g_{(R,H)}(r, h) dh = \int_0^1 1 - n(n-1)r^{n-2} dh = h - n(n-1)r^{n-2}h \Big|_0^1 = 1 - n(n-1)r^{n-2}$$

Entonces, la densidad de  $R$  es:

$$f_R(r) = 1 - n(n-1)r^{n-2} \sim \text{Beta}(n-1, 2)$$



### Ejemplo

Sea  $(X_1, \dots, X_n)$  una muestra aleatoria simple (m.a.s.) de tamaño  $n$  de una variable aleatoria  $X$ , cuya función de distribución es

$$F(x) = P(X \leq x).$$

Se desea calcular la distribución de las variables

$$U = F(X) \quad \text{y} \quad U_R = F(X_{(r)}).$$

Para la variable  $U$ , tenemos:

$$G_U(u) = P(U \leq u) = P(F(X) \leq u) = P(X \leq F^{-1}(u)).$$

Utilizando la propiedad de la función de distribución inversa, se obtiene:

$$F(F^{-1}(u)) = u, \quad 0 < u < 1.$$

Por lo tanto,

$$U = F(X) \sim U(0, 1).$$

Ahora, para la distribución de  $U_R$ :

$$G_{U_R}(u) = P(U_R \leq u) = P(F(X_{(r)}) \leq u) = P(X_{(r)} \leq F^{-1}(u)).$$

Esto es equivalente a la función de distribución del estadístico ordenado:

$$F_{X_{(r)}}(F^{-1}(u)) = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} F(F^{-1}(u))^j (1 - F(F^{-1}(u)))^{n-j}.$$

Reescribiendo en términos de  $u$ :

$$G_{U_R}(u) = \sum_{j=r}^n \binom{n}{j} u^j (1 - u)^{n-j}.$$

Por lo tanto, el estadístico ordenado de orden  $r$  asociado a la muestra aleatoria sigue la distribución

$$U_R = F(X_{(r)}),$$

donde la población original  $U = F(X)$  sigue una distribución uniforme en el intervalo  $(0, 1)$ .

## 2.6 Ejercicios

**Ejercicio 2.1.** Sea  $X$  una población de *Bernoulli*( $p = \frac{1}{2}$ ) y se consideran todas las m.a.s. posibles de tamaño 3. Para cada muestra calcúlese  $\bar{X}$ ,  $s^2$ ,  $\mu y S^2$  y determínese sus distribuciones en el muestreo.

*Solución:*

Muestras	$\bar{X}$	$s^2$	P
(0,0,0)	0	0	1/8
(0,0,1)	1/3	1/3	1/8
(0,1,0)	1/3	1/3	1/8
(0,1,1)	2/3	1/3	1/8
(1,0,0)	1/3	1/3	1/8
(1,0,1)	2/3	1/3	1/8
(1,1,0)	2/3	1/3	1/8
(1,1,1)	1	0	1/8

**Distribución de  $\bar{X}$  y  $s^2$ :**

$\bar{x}$	0	1/3	2/3	1
$P$	1/8	3/8	3/8	1/8

$s^2$	0	1/3
$P$	1/4	3/4

□

**Ejercicio 2.2.** De una población con media  $\mu$  desconocida y varianza 1, se toma una m.a.s. de tamaño  $n$ . ¿Cuál debe ser éste para que la media muestral diste en valor absoluto de la media de la población menos que 0,5, con una probabilidad mayor o igual que 0,95?

*Solución:*

El enunciado nos pide es averiguar la  $n$  suficiente para que se cumpla que  $P(|\bar{X} - \mu| < 0.5) \geq 0.95 \iff P(-0.5 < \bar{X} - \mu < 0.5) \geq 0.95$ .

Sabemos que  $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{1}{n})$ . Por lo que para solucionarlo, haremos uso de la Desigualdad de Chebushev, la cual afirma que:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad \forall k > 0$$

Aplicando la desigualdad a nuestro caso, obtenemos que  $k = 0.5$  y  $\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Por lo que:

$$P(|\bar{X} - \mu| \leq 0.5) \geq 0.95 \iff P(|\bar{X} - \mu| > 0.5) \leq 0.05 \implies \begin{cases} \frac{1}{k^2} = 0.05 \\ \frac{k}{\sqrt{n}} = 0.5 \end{cases} \implies n \geq 80$$

□

**Ejercicio 2.3.** Dada una m.a.s. de tamaño  $n$ , calcúlese la distribución de la media muestral  $\bar{X}$  cuando la población es:

1. Bernouilli
2. Gamma
3. Exponencial

*Solución:*

1. **Bernouilli:** Si  $X \sim Bernouilli(p) \implies \sum_{i=1}^n X_i = S_n \sim Bin(n, p) \implies \bar{X} = \frac{S_n}{n} \implies P(\bar{X} = w) = P(S_n = nw) = \binom{n}{nw} p^{nw} (1-p)^{n(1-w)}$
2. **Gamma:** Si  $X \sim Gamma(a, b) \implies \varphi_X(t) = (1 - \frac{it}{a})^{-b} \implies \varphi_{S_n}(t) = E[e^{i \frac{t}{n} \sum_{i=1}^n X_i}] = E[e^{i \frac{t}{n} X_1}] \dots E[e^{i \frac{t}{n} X_n}] = [\varphi(\frac{t}{n})]^n = (1 - \frac{it}{an})^{-nb} \implies \bar{X} \sim Gamma(na, nb)$

3. **Exponencial:** Es un caso particular del apartado anterior dado que  $X \sim Exponencial(\theta) = Gamma(\theta, 1) \implies \bar{x} \sim Gamma(n\theta, n)$ .

□

**Ejercicio 2.4.** Dada una sucesión  $\{X_n\}$  de variables aleatorias independientes con distribución  $N(0, 1)$  y un entero positivo  $k$  se define:

$$F_{k,m} = \left( \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i^2 \right) / \left( \frac{1}{m} \sum_{i=k+1}^{k+m} X_i^2 \right)$$

Pruébese que

$$F_{k,m} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \frac{1}{k} X$$

donde  $X \sim \chi_k^2$ .

*Solución:* Por las propiedades de las distribuciones normales, tenemos que:

$$X_i \sim N(0, 1) \implies X_i^2 \sim \chi_1^2 \implies \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi_n^2$$

De esta manera podemos ver los sumandos como el calculo de la media muestral:

$$\bar{X} = \frac{1}{m} \sum_{i=k+1}^{k+m} \chi_1^2 \implies$$

Por la Ley Fuerte de los Grandes Números tenemos que

$$\bar{X} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} E[\chi_1^2] = 1$$

Finalmente como el segundo sumatorio  $\sum_{i=1}^k X_i^2$  se mantiene constante (pues sólo se está modificando  $k$ ) tenemos que, por el Teorema de Slutsky,

$$F_{k,m} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \frac{1}{k} \chi_k^2$$

□

**Ejercicio 2.5.** Demuéstrese que para una m.a.s. de tamaño  $n$  tales que

$$P(X = x_i) = p_i \forall i \in \mathbb{N}$$

se cumple que la distribución del estadístico ordenado  $X_{(k)}$  es discreta y viene dada por:

$$P(X_{(k)} \leq x_i) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (F(x_j))^j (1 - F(x_j))^{n-j}$$

$$P(X_{(k)} = x_i) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} [(F(x_j))^j (1 - F(x_i))^{n-j} - F(x_{i-1})^j (1 - F(x_{i-1}))^{n-j}]$$

*Solución:* Sea una m.a.s.  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Sea entonces el conjunto de variables aleatorias

$$I_j = \begin{cases} 1, & \text{si } X_j \leq x \\ 0, & \text{si } X_j > x \end{cases} \implies I_j \sim \text{Bernouilli}$$

con una probabilidad  $P(I_j = 1) = P(X_j \leq x) = F_j(x)$

Al ser variables aleatorias independientes con distribución Bernouilli, se cumple que

$$\sum_{j=1}^n I_j = S \sim \text{Bin}(n, F(x))$$

Nos piden calcular que  $P(X_{(k)} \leq x_i)$ , lo cual es equivalente a que nos pregunten la probabilidad de que haya al menos  $k$  valores menores o iguales a  $x_i$ :  $P(S \geq k)$ . Por lo que podemos escribir:

$$P(S \geq k) = P(X_{(k)} \leq x_i) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} (F(x_i))^j (1 - F(x_i))^{n-j}$$

Finalmente, nos queda sólo calcular la probabilidad de que  $P(X_{(k)} = x_i)$  pero esto es igual a hacer:

$$P(X_{(k)} = x_i) = P(X_{(k)} \leq x_i) - P(X_{(k)} \leq x_{i-1})$$

□

### 3 Reducción de Datos

#### Definición 3.0.1 [Estadístico suficiente]

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  el espacio probabilístico asociado a un experimento aleatorio  $\mathcal{E}$ , una variable aleatoria observable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y su modelo estadístico asociado  $(\chi, \mathcal{B}, F_\theta)_{\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^t}$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , y  $(X_1, \dots, X_n)$  m.a.s.  $(n) \sim X$

$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un estadístico suficiente para  $\theta$  cuando  $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$  se cumple que:

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | T = t) \text{ no depende de } \theta \quad \forall t \in \mathbb{R}^m$$

#### Ejemplo

Sabiendo que  $X \sim \text{Bin}(1, \theta)$ , veamos si se cumple que el estadístico  $T = \sum_{i=1}^n X_i$  es suficiente para  $\theta$ . Tenemos que:

$$X_i \sim \text{Bin}(1, \theta) \implies T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, \theta)$$

Para saber si un estadístico es suficiente necesitamos además la función de distribución de la muestra, que en este caso:

$$X_i \sim \text{Bin}(1, \theta) \equiv \text{Bernoulli}(\theta) \\ \implies P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1 - \theta)^{1-x_i} = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n$$

Para ver si es suficiente, necesitamos calcular la probabilidad condicionada de la muestra dado el estadístico, que en este caso es:

$$P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n | \sum_{i=1}^n X_i = t) = \frac{P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{P(\sum_{i=1}^n X_i = t)} = \frac{\theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i}}{\binom{n}{t} \theta^t (1 - \theta)^{n-t}} = \frac{1}{\binom{n}{t}}$$

### 3.1 Teorema de Factorización de Fisher

#### Teorema 3.1.1 [de Factorización de Fisher (Caracterización de estadísticos suficientes)]

$T = T(X_1, \dots, X_n) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un estadístico suficiente para  $\theta$  si y sólo si existen funciones reales positivas  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g_\theta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $f_\theta(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n) g_\theta(T(x_1, \dots, x_n))$ , donde  $f_\theta(x_1, \dots, x_n)$  es la función de densidad o de masa de la muestra

*Demostración.* Esta demostración se desarrolla tomando el caso en el que  $X$  sea una v.a. discreta.

- $(\Rightarrow)$  : Supongamos que  $T$  es suficiente, entonces como la distribución de la muestra condicionada al estadístico no depende de  $\theta$ , podemos escribir:

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n | t) = \frac{f_\theta(x_1, \dots, x_n)}{f_\theta(t)} \text{ es independiente de } \theta$$

$$\implies f_\theta(x_1, \dots, x_n) = f_\theta(t) \cdot f_\theta(x_1, \dots, x_n | t) \implies$$

Simplemente tomamos  $h(x_1, \dots, x_n) = f_\theta(t)$  y  $g_\theta(t) = f_\theta(x_1, \dots, x_n | t)$

- $(\Leftarrow)$  : Supongamos que  $f_\theta(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n) \cdot g_\theta(T(x_1, \dots, x_n))$ , entonces:

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n | T(x_1, \dots, x_n) = t) = \frac{f_\theta(x_1, \dots, x_n)}{f_\theta(t)} = \frac{f_\theta(x_1, \dots, x_n)}{\sum_{(y_1, \dots, y_m) : T(y_1, \dots, y_m) = t} f_\theta(y_1, \dots, y_n)} =$$

$$= \frac{h(x_1, \dots, x_n) \cdot g_\theta(t)}{\sum_{(y_1, \dots, y_m): T(y_1, \dots, y_m)=t} h(y_1, \dots, y_m) \cdot g_\theta(t)} = \frac{h(x_1, \dots, x_n)}{\sum_{(y_1, \dots, y_m): T(y_1, \dots, y_m)=t} h(y_1, \dots, y_m)}$$

La cual es una expresión no dependiente de  $\theta$ , por lo que  $T$  es suficiente.

□

### Proposición 3.1.1

Si  $T$  es suficiente para  $\theta$  y  $S$  es una biyección, entonces  $S(T)$  es suficiente para  $\theta$

### Proposición 3.1.2

Si  $T$  es suficiente para  $\theta$  y  $S$  es una función medible (en estadística-integrable), entonces  $S(T)$  es suficiente para  $\theta$

### Proposición 3.1.3

Sea  $X$  variable aleatoria, con  $\sigma$  y  $\delta$  parámetros, entonces si  $T_1$  es suficiente para  $\sigma$  y  $T_2$  es suficiente para  $\delta \iff T = (T_1, T_2)$  es suficiente para  $(\sigma, \delta)$

## 3.2 Ejemplos de Factorización de Fisher

### Ejemplo

Veamos si  $\theta$  es un parámetro suficiente para el ejemplo anterior, utilizando la Factorización de Fisher. Como  $X \sim \text{Bin}(1, \theta) \equiv \text{Bernoulli}(\theta)$ , tenemos que la función de verosimilitud es:

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1 - \theta)^{1-x_i} \cdot I_{\{0,1\}}(x_i),$$

donde  $I_{\{0,1\}}(x_i)$  es la función indicadora que asegura que  $x_i \in \{0, 1\}$ . Esto se puede escribir como:

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n I_{\{0,1\}}(x_i).$$

Por lo que tomando  $h(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n I_{\{0,1\}}(x_i)$  y  $g_\theta(T(x_1, \dots, x_n)) = \theta^t (1 - \theta)^{n-t}$ , tenemos que  $T = \sum_{i=1}^n X_i$  es un estadístico suficiente para  $\theta$ .

### Ejemplo

Sea  $X \sim \text{Poisson}(\theta)$  veamos si el estadístico  $T = \sum_{i=1}^n X_i$  es suficiente para  $\theta$ . Calculemos primero la función de densidad asociada a la muestra:

$$X_i \sim \text{Poisson}(\theta) \implies f_{x_i}(x_i) = \frac{e^{-\theta} \theta^{x_i}}{x_i!} \implies f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta} \theta^{x_i}}{x_i!} = e^{-n\theta} \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!}$$

Por lo que tomando  $h(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{x_i!}$  y  $g_\theta(T(x_1, \dots, x_n)) = e^{-n\theta} \theta^t$  demostramos que  $T(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$  es un estadístico suficiente para  $\theta$

### Ejemplo

3 Si  $T = T(X_1, \dots, X_n)$  es suficiente para  $\theta$  entonces cualquier biyección  $S = S(T)$  también es suficiente para  $\theta$

NO LO ENTIENDO, PREGUNTAR

### Ejemplo

Supongamos que tenemos un estadístico  $T$  suficiente para el parámetro  $\theta$  y una biyección  $S$ , demostremos que  $S(T)$  también es suficiente para  $\theta$

Por el Teorema de Caracterización de Fisher tenemos que:

$$f_{\theta}(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n) \cdot g_{\theta}(T(x_1, \dots, x_n))$$

para alguna función  $h$  y  $g_{\theta}$

$$\iff f_{\theta}(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n) \cdot g_{\theta}(S^{-1}(S(T(x_1, \dots, x_n))))$$

$$\iff f_{\theta}(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n) \cdot g'_{\theta}(S(T(x_1, \dots, x_n))) \implies$$

Entonces por el Teorema de Caracterización de Fisher,  $S(T)$  es suficiente para  $\theta$

### Ejemplo

Veamos si  $T = \bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i$  es suficiente para  $\mu$  si  $X \sim N(\mu, \sigma_0)$  con  $\sigma_0$  conocida:

$$X_i \sim N(\mu, \sigma_0) \implies f_{\mu}(x) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x-\mu)^2}$$

$$\implies T = \bar{X} \implies f_{\mu}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2}(x_i-\mu)^2} = \left( \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}$$

$\implies$  Tomando  $h(x_1, \dots, x_n) = \left( \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} \right)^n$  y  $g_{\mu}(T(x_1, \dots, x_n)) = e^{-\frac{1}{2\sigma_0^2} \sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}$ , tenemos que  $T = \bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i$  es suficiente para  $\mu$

### Ejemplo

Sea el estadístico  $T = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$  suficiente para  $\theta = (\mu, \sigma)$  si  $X \sim N(\mu, \sigma)$  con  $\mu$  y  $\sigma$  desconocidas. Veamos si  $(\bar{X}, S_n^2)$  también es suficiente para  $\theta$ :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad S_n^2 = \frac{1}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right) \implies$$

$$\text{Sea la biyección } S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ dada por } S(x, y) = \left( \frac{1}{n}x, \frac{1}{n-1} \left( y - \frac{1}{n}x^2 \right) \right) \implies$$

$$S(T) = \left( \sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2 \right) = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 \right) = (\bar{X}, S_n^2)$$

Entonces por el Teorema de Caracterización de Fisher,  $(\bar{X}, S_n^2)$  es suficiente para  $\theta$

### Ejemplo

Si  $X \sim U(0, \theta)$ , veamos si el estadístico  $T = (X_{(1)}, X_{(n)})$  es suficiente para  $\theta$ :

$$X \sim U(0, \theta) \implies f_{\theta}(x) = \frac{1}{\theta} \cdot I_{(0, \theta)}(x) \implies f_{\theta}(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \cdot I_{(0, \theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \cdot I_{(0, \theta)}(X_{(1)}) \cdot I_{(0, \theta)}(X_{(n)})$$

$$\Rightarrow \text{Tomando } h(x_1, \dots, x_n) = 1 \text{ y } g_\theta(T(x_1, \dots, X_n)) = \frac{1}{\theta^n} I_{(0, \theta)}(X_{(1)}) \cdot I_{(0, \theta)}(X_{(n)})$$

### Ejemplo

Si  $X \sim U(0, \theta)$ , veamos si el estadístico  $T = X_{(n)}$  es suficiente para  $\theta$ :

$$\begin{aligned} X \sim U(0, \theta) &\Rightarrow f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \cdot I_{(0, \theta)}(x) \Rightarrow f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \cdot I_{(0, \theta)}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \cdot I_{(0, \theta)}(X_{(n)}) \\ &\Rightarrow \text{Tomando } h(x_1, \dots, x_n) = 1 \text{ y } g_\theta(T(x_1, \dots, X_n)) = \frac{1}{\theta^n} I_{(0, \theta)}(X_{(n)}) \end{aligned}$$

### Ejemplo

Si  $X \sim U(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2})$ , veamos si el estadístico  $T = (X_{(1)}, X_{(n)})$  es suficiente para  $\theta$ :

$$\begin{aligned} X \sim U(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2}) &\Rightarrow f_\theta(x) = \frac{1}{\theta} \cdot I_{(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2})}(x) \\ &\Rightarrow f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \cdot I_{(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2})}(x_i) = \frac{1}{\theta^n} \cdot I_{(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2})}(X_{(1)}) \cdot I_{(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2})}(X_{(n)}) \\ &\Rightarrow \text{Tomando } h(x_1, \dots, x_n) = 1 \text{ y } g_\theta(T(x_1, \dots, X_n)) = \frac{1}{\theta^n} I_{(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2})}(X_{(1)}) \cdot I_{(-\frac{\theta}{2}, \frac{\theta}{2})}(X_{(n)}) \end{aligned}$$

## 3.3 Estadístico minimal suficiente

### Definición 3.3.1 [Órbita]

Dado un estadístico  $T = T(X_1, \dots, X_n)$ , se define  $A_t = \{(x_1, \dots, x_n) \in \chi^n : T(x_1, \dots, x_n) = t\}$  como la órbita de  $t$ .

### Ejemplo

Dado un m.a.s. de tamaño  $n = 3$ , definimos el rango muestral como  $T(x_1, x_2, x_3) = (x_{\max}, x_{\min})$ . Si por ejemplo tomamos el resultado  $t = 5$  definimos la órbita de  $t = 5$  al conjunto  $A_5 = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^3 : \max(x_1, x_2, x_3) - \min(x_1, x_2, x_3) = 5\}$  cuyos elementos podrían ser por ejemplo:

- $(2, 3, 7) \in A_5$  ( $7 - 2 = 5$ )
- $(10, 12, 15) \in A_5$  ( $15 - 10 = 5$ )
- $(-1, 4, -5) \notin A_5$  ( $4 - (-6) = 10 \neq 5$ )

### Definición 3.3.2 [Partición Inducida]

Dado un estadístico  $T = T(X_1, \dots, X_n)$ , se define  $K_T = \{A_t : t \in \mathbb{R}^m\}$  como la partición inducida por  $T$ .

### Ejemplo

Sea una muestra aleatoria simple de tamaño  $n = 2$  tal que el espacio muestral de cada una de las variables aleatorias es  $\chi = \{1, 2, 3\}$  y definimos el estadístico  $T(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)$ . Entonces, podemos definir algunas órbitas de  $T$ :



- $A_2 = \{(1, 1), (2, 0), (0, 2)\}$
- $A_3 = \{(1, 2), (2, 1)\}$
- $A_4 = \{(2, 2)\}$
- $A_5 = \{(3, 2), (2, 3)\}$
- ...

Así, una partición inducida por  $T$  sería  $K_T = \{A_2, A_3, A_4, A_5, \dots\}$

### Proposición 3.3.1

*Se dice que  $K_T$  es suficiente si y sólo si  $T$  es suficiente*

### Proposición 3.3.2

*Dado dos estadísticos  $T = T(X_1, \dots, X_n)$  y  $S = S(X_1, \dots, X_n)$ , se dice que  $K_S$  es una subpartición de  $K_T$  si y solo si:*

$$\forall B \in K_S, \exists A \in K_T \text{ tal que } B \subset A.$$

*En este caso, se dice que  $K_T$  es una partición menos fina que  $K_S$ .*

### Definición 3.3.3 [Estadístico Minimal Suficiente]

*Un estadístico  $T$  es minimal suficiente si su partición asociada es suficiente y es la menos fina  $\equiv$  más gruesa entre todos los estadísticos.*

$$\begin{cases} \text{Más fina} \implies \text{Más clases} \implies \text{Más detallada} \\ \text{Más gruesa} \implies \text{Menos clases} \implies \text{Agrupa más elementos} \end{cases}$$

*Alternativamente, lo podemos definir como que dado un estadístico suficiente  $T$ , se dice minimal suficiente cuando  $\forall T'$  suficiente,  $\exists \varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  medible (integrable) tal que  $T' = \varphi(T)$*

*Demostración.* Demostración de la equivalencia de las definiciones:

- ( $\Rightarrow$ ): Sea  $S$  suficiente, si  $S(x_1, \dots, x_n) = S(y_1, \dots, y_n) = s \implies (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in B_s$  (Órbita de  $S$ )  $\implies \exists A_t \in K_T : B_s \subset A_t \implies T(x_1, \dots, x_n) = T(y_1, \dots, y_n) = t \implies \exists \psi : \psi(S) = T$  y  $T$  es suficiente.
- ( $\Leftarrow$ ): Sea  $S$  suficiente y  $\psi : \psi(S) = T \implies T$  es suficiente y si  $S(x_1, \dots, x_n) = S(y_1, \dots, y_n) = s \implies T(x_1, \dots, x_n) = \psi(S(x_1, \dots, x_n)) = \psi(S) = \psi(S(y_1, \dots, y_n)) = T(y_1, \dots, y_n) \implies B_s \subset A_{\psi(S)} \implies K_S$  es una subpartición de  $K_T$ .

□

## 3.4 Teorema de caracterización de estadísticos minimales suficientes

**Definición 3.4.1** [Relación de equivalencia minimal suficiente]

Sean  $(x_1, \dots, x_n)$  y  $(y_1, \dots, y_n)$  muestras, definimos la relación de equivalencia minimal suficiente como:

$$(x_1, \dots, x_n)R(y_1, \dots, y_n) \iff \frac{f_\theta(x_1, \dots, x_n)}{f_\theta(y_1, \dots, y_n)} \text{ es independiente de } \theta$$

Esta definición lo que trata de indicar es que ambas muestras del mismo suceso, aportan la misma información sobre el parámetro  $\theta$ .

**Teorema 3.4.1** [Teorema de caracterización de estadísticos minimales (Lehmann-Scheffé)]

A cada clase de equivalencia anterior le asignamos un valor  $t$  y definimos un estadístico  $T = T(X_1, \dots, X_n)$  tal que  $\frac{f_\theta(x_1, \dots, x_n)}{f_\theta(y_1, \dots, y_n)}$  es independiente de  $\theta$  cuando  $T(x_1, \dots, x_n) = T(y_1, \dots, y_n) = t$ . Entonces,  $T$  es minimal suficiente para  $\theta$ .

*Demostración.* Supongamos la suficiencia de  $T$  para demostrar su minimalidad:

Sea  $S = S(X_1, \dots, X_n)$  suficiente y  $(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in B_S \implies$

$$\frac{f_\theta(x_1, \dots, x_n)}{f_\theta(y_1, \dots, y_n)} = \frac{h(x_1, \dots, x_n)g_\theta(s)}{h(y_1, \dots, y_n)g_\theta(s)} = \frac{h(x_1, \dots, x_n)}{h(y_1, \dots, y_n)} \text{ independiente de } \theta$$

$\implies \exists t : (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \in A_t \implies K_S$  es una subpartición de  $K_T$ .

Ahora demostremos la suficiencia de  $T$  en el caso discreto:

Si  $T(x_1, \dots, x_n) = t$ ,

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n | t) = \frac{f_\theta(x_1, \dots, x_n)}{f_\theta(t)} = \frac{f_\theta(x_1, \dots, x_n)}{\sum_{(y_1, \dots, y_n) : T(y_1, \dots, y_n) = t} f_\theta(y_1, \dots, y_n)} = \frac{1}{\sum_{(y_1, \dots, y_n) \in A_t} \frac{f_\theta(y_1, \dots, y_n)}{f_\theta(x_1, \dots, x_n)}}$$

que es independiente de  $\theta \implies T$  es suficiente. □

**Ejemplo**

Veamos si el estadístico  $T = \sum_{i=1}^n X_i$  es minimal suficiente para  $\theta$  si  $X \sim \text{Bin}(1, \theta)$

$$X \sim \text{Bin}(1, \theta) \equiv \text{Bernoulli}(\theta) \implies f_\theta(x) = \theta^x (1 - \theta)^{1-x} \cdot I_{\{0,1\}}(x) \implies$$

$$\implies f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \theta^{x_i} (1 - \theta)^{1-x_i} \cdot I_{\{0,1\}}(x_i) = \theta^{\sum_{i=1}^n x_i} (1 - \theta)^{n - \sum_{i=1}^n x_i} \cdot \prod_{i=1}^n I_{\{0,1\}}(x_i)$$

$\implies$  Sean dos muestras m.a.s. de tamaño  $= n$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  y  $(y_1, \dots, y_n)$ , entonces:

$$\frac{f_\theta(x_1, \dots, x_n)}{f_\theta(y_1, \dots, y_n)} = \left( \frac{\theta}{1 - \theta} \right)^{\sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n y_i} \text{ es independiente de } \theta \text{ si } \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i$$

**Observación 3.4.1**

Recordemos que  $\forall T'$  suficiente  $\exists \varphi : \varphi(T) = T'$ , por lo que  $T$  es minimal suficiente

### Ejemplo

Sea  $f_\theta(x) = e^{-(x+\theta)} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x)$

$$\implies f_\theta(x_1, \dots, x_n) = e^{-\sum_{i=1}^n (x_i + \theta)} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x_1) \cdot \dots \cdot I_{(\theta,\infty)}(x_n) = e^{-\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\theta} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)})$$

Entonces, por el Teorema de Factorización de Fisher, tenemos que:

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) = h(x_1, \dots, x_n) \cdot g_\theta(T(x_1, \dots, x_n)) \implies \begin{cases} h(x_1, \dots, x_n) = e^{-\sum_{i=1}^n x_i} \\ g_\theta(T(x_1, \dots, x_n)) = e^{-n\theta} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)}) \end{cases}$$

Ahora sean dos muestras m.a.s. de tamaño  $n$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  y  $(y_1, \dots, y_n)$ , entonces, tenemos que ver qué expresión hace que el cociente de las funciones de densidad sea independiente de  $\theta$ :

$$\frac{f_\theta(x_1, \dots, x_n)}{f_\theta(y_1, \dots, y_n)} = \frac{e^{-\sum_{i=1}^n x_i} e^{-n\theta} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)})}{e^{-\sum_{i=1}^n y_i} e^{-n\theta} \cdot I_{(\theta,\infty)}(y_{(1)})} = \frac{e^{-\sum_{i=1}^n x_i} \cdot I_{(\theta,\infty)}(x_{(1)})}{e^{-\sum_{i=1}^n y_i} \cdot I_{(\theta,\infty)}(y_{(1)})}$$

$$\implies \text{esta expresión es independiente de } \theta \iff X_{(1)} = Y_{(1)} \implies$$

$$\implies \text{el estadístico } T = X_{(1)} \text{ es minimal suficiente para } \theta$$

### 3.5 Familia exponencial $k$ -paramétrica

#### Definición 3.5.1 [Familia exponencial $k$ -paramétrica]

Una distribución  $X$  pertenece a la familia exponencial  $k$ -paramétrica si su función de densidad o de masa, se puede expresar como:

$$f_\theta(x) = c(\theta) \cdot h(x) \cdot e^{\sum_{j=1}^k q_j(\theta) T_j(x)}$$

donde:

- $c(\theta)$  es una función sólo de  $\theta$
- $h(x)$  es una función sólo de  $x$
- $q_j(\theta)$  son funciones de  $\theta$ , conocidas como parámetros naturales
- $T_j(x)$  son funciones de  $x$  llamadas estadísticos naturales
- $k$  es el número de parámetros de la familia
- $\theta$  es el parámetro de la familia

Esto implica a su vez, que si tenemos una m.a.s., la función de densidad conjunta se puede expresar como:

$$f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_\theta(x_i) = (c(\theta))^n \prod_{i=1}^n h(x_i) e^{\sum_{j=1}^k q_j(\theta) T_j(x_i)} = (c(\theta))^n \cdot h(x_1, \dots, x_n) \cdot e^{\sum_{j=1}^k q_j(\theta) (\sum_{i=1}^n T_j(x_i))}$$

#### Teorema 3.5.1

Sean  $\theta_1, \dots, \theta_k \in \Theta \subset \mathbb{R}^\ell$  tales que los vectores  $c_r = (q_1(\theta_r), \dots, q_k(\theta_r))$ ,  $r = 1, \dots, k$  son linealmente independientes, entonces el estadístico natural suficiente de la familia exponencial  $k$ -paramétrica es

*Demostración.* Sean dos muestras  $x = (x_1, \dots, x_n)$  e  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , entonces:

$$\frac{f_\theta(x_1, \dots, x_n)}{f_\theta(y_1, \dots, y_n)} = \frac{c(\theta)^n \cdot h(x_1, \dots, x_n) \cdot e^{\sum_{j=1}^k q_j(\theta) \sum_{i=1}^n T_j(x_i)}}{c(\theta)^n \cdot h(y_1, \dots, y_n) \cdot e^{\sum_{j=1}^k q_j(\theta) \sum_{i=1}^n T_j(y_i)}} = \frac{h(x_1, \dots, x_n)}{h(y_1, \dots, y_n)} \cdot e^{\sum_{j=1}^k q_j(\theta) (\sum_{i=1}^n [T_j(x_i) - T_j(y_i)])}$$

Lo cual es una expresión independiente de  $\theta \iff$

$$\iff \sum_{j=1}^k q_j(\theta) \left( \sum_{i=1}^n [T_j(x_i) - T_j(y_i)] \right) = 0 \iff \sum_{i=1}^n [T_j(x_i) - T_j(y_i)] = 0, \forall j = 1, \dots, k$$

Lo cual implica que el sistema homogéneo  $\sum_{i=1}^n [T_j(x_i) - T_j(y_i)] = 0, \forall j = 1, \dots, k$  sólo admite la solución  $T_j(x_i) - T_j(y_i) = 0, \forall j = 1, \dots, k \implies (T_1(x_1), \dots, T_k(x_n))$  es minimal  $\square$

### Ejemplo

Veamos si el estadístico  $T = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$  es minimal suficiente para  $\theta = (\mu, \sigma)$  si  $X \sim N(\mu, \sigma)$  con  $\mu$  y  $\sigma$  desconocidas.

Una distribución perteneciente a la familia 2-paramétrica exponencial es de la forma:

$$\begin{aligned} f_\theta(x) &= c(\theta)h(x)e^{q_1(\theta)T_1(x)+q_2(\theta)T_2(x)} \implies \\ \implies X \sim N(\mu, \sigma) &\implies f_\theta(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2} \implies f_\theta(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2} \\ &= \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i^2} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}\sum_{i=1}^n x_i} \implies \\ \text{tomando } &\begin{cases} c(\theta) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \\ h(x) = 1 \\ q_1(\theta) = -\frac{1}{2\sigma^2} \\ q_2(\theta) = \frac{\mu}{\sigma^2} \\ T_1(x) = \sum_{i=1}^n X_i^2 \\ T_2(x) = \sum_{i=1}^n x_i \end{cases} \end{aligned}$$

La distribución normal pertenece a la familia exponencial 2-paramétrica. Ahora veamos si el estadístico  $T$  es minimal suficiente:

Si tomamos como vectores paramétricos  $\theta_1 = (0, 1)$  y  $\theta_2 = (1, 1)$ , entonces los vectores  $c_1 = (q_1(\theta_1), q_2(\theta_1)) = (0, -\frac{1}{2})$  y  $c_2 = (q_1(\theta_2), q_2(\theta_2)) = (1, -\frac{1}{2})$  son linealmente independientes  $\implies T$  es minimal suficiente

Ahora veamos si el estadístico  $T = (\bar{X}, S_n^2)$  también es minimal suficiente:

Sabemos que:

$$S_n^2 = \frac{n}{n-1} \left( \sum_{i=1}^n X_i^2 - n\bar{X}^2 \right)$$

$$\implies \text{Sea la transformación } S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ dada por } S(x, y) = \left( \frac{1}{n}x, \frac{1}{n-1} \left( y - \frac{1}{n}x^2 \right) \right) \implies$$

Analicemos la transformación inversa:

$$W = nF, \quad Z = \frac{n-1}{n}G + nF^2$$

$$J = \begin{vmatrix} n & 0 \\ 2nF & \frac{n-1}{n} \end{vmatrix} = n-1 \neq 0 \text{ si } n \geq 2$$

Por lo que como  $S$  es una biyección, y  $T$  es minimal suficiente, entonces la imagen de  $T$  por  $S$  también es minimal suficiente  $S(T) = (\bar{X}, S_n^2)$

### Proposición 3.5.1

En las familias  $k$ -paramétricas exponenciales, es decir, aquellas de la forma:

$$f_{\theta}(x) = c(\theta)h(x)e^{q(\theta)T(x)}$$

El estadístico  $T(x)$  es suficiente.

## 3.6 Estadísticos Ancilarios y Completos

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  el espacio probabilístico asociado a un experimento aleatorio  $\mathcal{E}$ , una variable aleatoria observable  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  y su modelo estadístico asociado  $(\chi, \mathcal{B}, F_{\theta})_{\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^{\ell}}$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , y  $(X_1, \dots, X_n)$  m.a.s.  $(n) \sim X$

El estadístico  $U = U(X_1, \dots, X_n)$  es ancilario para  $\theta$  si su distribución en el muestreo es independiente de  $\theta$

Ejercicio Si  $(X_1, \dots, X_n)$  es una m.a.s.  $(n)$  de  $X \sim N(\mu, \sigma_0)$ ,  $\sigma_0$  conocida, entonces  $U(X_1, \dots, X_n) = X_1 - X_2 \sim N(0, \sigma_0\sqrt{2})$  es un estadístico ancilario para  $\mu$

La familia de distribuciones de probabilidad  $\{G_{\theta}(y_1, \dots, y_m)\}_{\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^{\ell}}$  es completa sí y sólo sí para cualquier función real  $h(y_1, \dots, y_m)$  con  $h(Y_1, \dots, Y_m)$  medible y tal que  $E_{\theta}[h(Y_1, \dots, Y_m)] = 0, \forall \theta \in \Theta$ , se sigue que  $h(Y_1, \dots, Y_m) \stackrel{CS}{=} 0$

## Estadísticos Ancilarios y Completos (continuación)

Ejercicio La familia de distribuciones de probabilidad  $\text{Bin}(n, \theta)$  es completa

Sea  $Y \sim \text{Bin}(n, \theta)$ ,

$$E_{\theta}[h(Y)] = \sum_{i=1}^n h(i) \binom{n}{i} \theta^i (1-\theta)^{n-i} =$$

$$(1-\theta)^n \sum_{i=1}^n h(i) \binom{n}{i} \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^i = 0, \forall \theta \in (0, 1),$$

que es un polinomio de grado  $n$  en  $\frac{\theta}{1-\theta} \in (0, \infty)$ , luego para que sea nulo, ha de ser  $h(i) = 0, \forall i = 1, \dots, n$ .

Por lo tanto  $h(Y) \stackrel{CS}{=} 0$

Ejercicio La familia de distribuciones de probabilidad  $N(0, \theta)$  no es completa

Sea  $Y \sim N(0, \theta)$  y  $h(Y) = Y$ , entonces  $E_{\theta}[h(Y)] = E_{\theta}[Y] = 0 \forall \theta > 0$ , sin embargo  $h(Y) = Y$  no es idénticamente nula c.s.

## Estadísticos Ancilarios y Completos (continuación)

El estadístico  $T = T(X_1, \dots, X_n)$  es completo sí y sólo sí su distribución en el muestreo es una familia de distribuciones de probabilidad completa

Ejercicio Si  $X \sim \text{Bin}(1, \theta)$ ,  $T = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bin}(n, \theta)$  es completo

Ejercicio Si  $X \sim N(\theta, \theta)$ ,  $T = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$  no es completo Indicación:  $h(T) = (2(\sum_{i=1}^n X_i)^2 - (n+1)\sum_{i=1}^n X_i^2)$

Ejercicio Si  $S = S(X_1, \dots, X_n)$  es suficiente y completo, entonces es minimal suficiente Indicación: Demostrar que si  $T = T(X_1, \dots, X_n)$  es minimal suficiente, entonces  $S \stackrel{CS}{=} E[S | T]$  y por lo tanto  $S$  es función de  $T$

## Estadísticos Ancilarios y Completos (continuación)

**Teorema 2** El estadístico natural  $(\sum_{i=1}^n T_1(X_i), \dots, \sum_{i=1}^n T_k(X_i))$  de la familia de distribuciones exponencial  $k$ -paramétrica,  $\left\{ f_\theta(x) = c(\theta)h(x)e^{\sum_{j=1}^k q_j(\theta)T_j(x)} \right\}_{\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^e}$ , es completo si la imagen de la aplicación  $q = (q_1(\theta), \dots, q_k(\theta)) : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^k$  contiene un rectángulo abierto de  $\mathbb{R}^k$

**Observación** Si  $X \sim N(\theta, \theta)$ ,  $q = (q_1(\theta), q_2(\theta)) = (\frac{1}{\theta}, -\frac{1}{2\theta^2}) \Rightarrow q_2(\theta) = -\frac{1}{2}q_1(\theta)^2, \forall \theta > 0$ , que es una rama de parábola, y que por lo tanto no contiene ningún abierto de  $\mathbb{R}^2$

## Estadísticos Ancilarios y Completos (continuación)

**Teorema de Basu** Si  $T = T(X_1, \dots, X_n)$  es un estadístico suficiente y completo y  $U = U(X_1, \dots, X_n)$  es un estadístico ancilar, entonces  $T$  y  $U$  son independientes

**Demostración**  $T = T(X_1, \dots, X_n)$  es un estadístico suficiente  $\Rightarrow f(x_1, \dots, x_n | t)$  es independiente de  $\theta \Rightarrow f(u | t) = \sum_{(x_1, \dots, x_n) : U(x_1, \dots, x_n) = u} f(x_1, \dots, x_n | t)$  es independiente de  $\theta$  Además, como  $T = T(X_1, \dots, X_n)$  es un estadístico completo y la función  $h(t) = f(u | t) - f(u)$  tiene media 0,  $\forall \theta$ , respecto a la distribución de  $T \sim f_\theta(t) \Rightarrow f(u | t) \stackrel{cs}{=} f(u)$

**Ejercicio** Si  $X \sim U(0, \theta)$ , entonces  $X_{(n)}$  y  $\frac{X_{(1)}}{X_{(n)}}$  son independientes

## Principios de reducción de datos

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$  el espacio probabilístico asociado a un experimento aleatorio  $\mathcal{E}$ , una variable aleatoria observable  $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  y su modelo estadístico asociado  $(\chi, \mathcal{B}, F_\theta)_{\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^e}$ ,  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , y  $(X_1, \dots, X_n)$  m.a.s.  $(n) \sim X$

## Principio de verosimilitud

La idea es considerar la distribución de probabilidad de la muestra, no como función de  $(x_1, \dots, x_n)$  sino como función del parámetro  $\theta$  desconocido

Supuesto que se ha observado un valor muestral  $(x_1, \dots, x_n)$ , la función de  $\theta$  definida mediante  $L(\theta | x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n | \theta)$ , se llama función de verosimilitud, siendo  $f(x_1, \dots, x_n | \theta)$  la función de densidad o de masa de la muestra

## Principios de reducción de datos (continuación)

Si  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$  son dos puntos muestrales, tales que existe una constante  $c(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  verificando que  $L_1(\theta | \mathbf{x}) = c(\mathbf{x}, \mathbf{y})L_2(\theta | \mathbf{y})$ , entonces la evidencia estadística que suministran ambos puntos debe ser idéntica

Dos aspectos son importantes en esta definición. El primero es que la evidencia estadística se toma en un sentido amplio y no se define, así puede ser ésta, un estadístico muestral, un estadístico suficiente, un intervalo de confianza, etc. El segundo es que las dos funciones de verosimilitud no tienen por qué estar obligatoriamente definidas en el mismo espacio muestral. Realmente la evidencia estadística depende del experimento bajo estudio  $E$  y del punto observado y debe expresarse como  $Ev(E, \mathbf{x}), E = (\chi^n, f(\mathbf{x} | \theta))_{\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^e}$

## Principios de reducción de datos (continuación)

Ejercicio  $Ev(E_1, t) = Ev(E_2, n)$ , si

$$E_1 = (\{0, 1, \dots, n\}, \text{Bin}(n, \theta))_{\theta \in (0,1)}, f(t | \theta) = \binom{n}{t} \theta^t (1 - \theta)^{n-t}$$

$$E_2 = (\mathbb{N}, \text{BN}(t, \theta))_{\theta \in (0,1)}, g(n | \theta) = \binom{n-1}{t-1} \theta^t (1 - \theta)^{n-t}$$

Ejercicio Los procedimientos bayesianos, por estar basados en la distribución de probabilidad final o a posteriori, satisfacen el principio de verosimilitud, ya que si  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$  satisfacen el principio de verosimilitud, entonces  $\pi_1(\theta | \mathbf{x}) = \pi_2(\theta | \mathbf{y})$

## Principio de suficiencia

En un experimento  $E = (\chi^n, f(\mathbf{x} | \theta))_{\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^\ell}$ , si  $T = T(\mathbf{X})$  es un estadístico suficiente para  $\theta$  y se tiene que  $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y})$ , entonces  $Ev(E, \mathbf{x}) = Ev(E, \mathbf{y})$

## Principios de reducción de datos (continuación)

### Principio de condicionalidad

Dados dos experimentos  $E_1 = (\chi^n, f_1(\mathbf{x} | \theta))_{\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^\ell}$  y  $E_2 = (\chi^m, f_2(\mathbf{y} | \theta))_{\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^\ell}$ , y el lanzamiento de una moneda al aire representado por la v.a.  $J$  tal que  $P(J = 1) = P(J = 2) = \frac{1}{2}$ , si  $E = (\chi^n \cup \chi^m \times \{1, 2\}, f(\mathbf{x}, j | \theta))_{\theta \in \Theta}$  es el experimento mixto representado por la v.a.  $(Z, J)$  tal que  $Z = \begin{cases} X & \text{si } J = 1 \\ Y & \text{si } J = 2 \end{cases}$ ,  $f(\mathbf{x}, 1 | \theta) = \frac{1}{2} f_1(\mathbf{x} | \theta)$ ,  $f(\mathbf{y}, 2 | \theta) = \frac{1}{2} f_2(\mathbf{y} | \theta)$  entonces  $Ev(E, (\mathbf{x}, 1)) = Ev(E_1, \mathbf{x})$  y  $Ev(E, (\mathbf{y}, 2)) = Ev(E_2, \mathbf{y})$

El principio de condicionalidad dice algo bastante intuitivo: mecanismos aleatorios que no dependan del valor a determinar  $\theta$ , no proporcionan evidencia sobre él (aleatorización en los contrastes de hipótesis para conseguir un test de tamaño determinado)

## Teorema de Birnbaum

### El principio de verosimilitud es equivalente a los principios de suficiencia y condicionalidad

Observación El Teorema de Birnbaum es importante desde el punto de vista de los fundamentos de la Estadística. Muchos de los procedimientos estadísticos usuales violan el principio de verosimilitud, en concreto los procedimientos que se basan en la distribución en el muestreo de un estadístico pueden hacerlo. Por ejemplo, si se pasa de un modelo binomial a uno binomial negativo, la función de masa cambia y por lo tanto los IC pueden cambiar. Sin embargo, a la luz del teorema, esto significa contradecir el principio de suficiencia, que es compartido por toda aproximación a la inferencia, o el principio de condicionalidad, que parece bastante aséptico. El teorema de Birnbaum constituye uno de los motivos por los que el principio de verosimilitud no es universalmente aceptado, a pesar de que como se verá, la función de verosimilitud posee muchas buenas propiedades estadísticas