

# Hoja 1: Ejercicio 7

## Ejercicios de análisis amortizado

Diego Rodríguez Cubero

UCM

24 de septiembre de 2025

# Contenidos

- 1 Enunciado del problema
- 2 Planteamiento
- 3 Resolución
- 4 Implementación
- 5 Conclusión

## Ejercicio 7

Dado un vector  $b[0..n-1]$  de enteros mayores que 1, llamado de bases, un vector  $v[0..n-1]$  con  $0 \leq v[i] < b[i]$ , para todo  $i$ , representará el valor de un contador expresado en bases  $b$ , siendo  $v[0]$  la cifra menos significativa. El valor del contador viene dado por el sumatorio  $\sum_{i=0}^{n-1} \left( v[i] \cdot \prod_{j=0}^{i-1} b[j] \right)$ . Implementa la operación `incr`, que incrementa el contador en una unidad, admitiéndose que cuando el contador tenga su valor máximo,  $\forall i \in 0..n-1$ ,  $v[i] = b[i] - 1$ , al incrementarlo pase a valer 0, o sea  $\forall i \in 0..n-1$ ,  $v[i] = 0$ . Demuestra con cualquiera de los métodos vistos en clase, que el coste amortizado de la operación `incr` está en  $O(1)$ .

## Definición

El contador generalizado en bases  $b$  se comporta de la siguiente forma:

Al incrementar, se suma 1 a la cifra menos significativa, y si se alcanza el máximo en esa posición, se reinicia a 0 y se incrementa la siguiente cifra, y así sucesivamente.

Por tanto, el coste real de la operacion `incr` es 1 mas el numero de cifras que se reinician a 0.

## Definicion: Método del potencial

Igual que el método de contabilidad, pero guardando el prepago como “potencial” de la estructura de datos en su conjunto, en lugar de asignarlo a elementos concretos de la misma.

Conociendo esta definicion, debemos calcular el coste amortizado de la operacion `incr` definiendo una funcion potencial adecuada.

Op.	Contador	Coste real
1	(0,0,0)	1
2	(1,0,0)	1
3	(2,0,0)	1
4	(0,1,0)	2
5	(1,1,0)	1
6	(2,1,0)	1
7	(0,0,1)	3
8	(1,0,1)	1
9	(2,0,1)	1
10	(0,1,1)	2
11	(1,1,1)	1
12	(2,1,1)	1
13	(0,0,0)	3
...	...	...

**Cuadro:** Ejemplo de incrementos en un contador con  $b = (3, 2, 2)$

Op.	Contador	Coste real
1	(0,0,0)	1
2	(1,0,0)	1
3	(0,1,0)	2
4	(1,1,0)	1
5	(0,2,0)	2
6	(1,2,0)	1
7	(0,3,0)	2
8	(1,3,0)	1
9	(0,0,1)	3
10	(1,0,1)	1
11	(0,1,1)	2
12	(1,1,1)	1
13	(0,2,1)	2
14	(1,2,1)	1
15	(0,3,1)	2
16	(1,3,1)	1
...	...	...

Cuadro: Ejemplo de incrementos en un contador con  $b = (2, 4, 2)$

# Resolución: Método del potencial

Definimos una función potencial  $\Phi(D_i)$  como el número de cifras distintas de 0 en el contador tras la  $i$ -ésima operación. Sea  $D_{i-1}$  el estado antes de la operación  $i$  y  $D_i$  el estado después. Comprobemos las propiedades de la función potencial:

- $\Phi(D_0) = 0$ , ya que el contador comienza en 0.
- $\Phi(D_i) \geq \Phi(D_0) = 0$  para todo  $i$ , ya que el número de cifras distintas de 0 no puede ser negativo.
- En particular,  $\Phi(D_n) \geq \Phi(D_0) = 0$ .



# Cálculo del coste amortizado

Aplicando el método, el coste amortizado de la operación  $i$  es:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

donde  $c_i$  es el coste real de la operación  $i$ .

# Cálculo del coste amortizado

Cuando se incrementa el contador:

- Se ponen a 0  $k$  cifras (las menos significativas), y se incrementa la siguiente ( $k$  puede ser 0 si no hay acarreo).
- El coste real es  $k + 1$ .
- La función potencial disminuye en  $k - 1$  (pues se ponen a 0  $k$  cifras y una pasa de 0 a 1).

Por tanto:

$$\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = \Phi(D_{i-1}) - k + 1 - \Phi(D_{i-1}) = 1 - k$$

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = (k + 1) + (1 - k) = 2$$

Así, el coste amortizado es 2 para cualquier operación `incr`, es decir,  $O(1)$ .

# Implementación en C++

```
void incr(vector<int>& v, const vector<int>& b) {  
    int n = v.size();  
    v.resize(n); /* Nos aseguramos de que el tamaño del número coincide con el  
de las bases, esto se puede omitir si al crear el vector ya tienen el mismo  
tamaño*/  
    for (int i = 0; i < n; i++) {  
        v[i]++;  
        if (v[i] < b[i]) { // Si no hay acarreo  
            break; // Hemos llegado a una cifra que no requiere acarreo  
        }  
        v[i] = 0; // Reiniciamos la cifra y continuamos con el acarreo  
    }  
}
```

# Conclusión

Hemos demostrado que, para un contador en bases arbitrarias, la operación `incr` tiene coste amortizado  $O(1)$  usando el método del potencial. Esto significa que, aunque algunas operaciones puedan requerir reiniciar varias cifras, el coste promedio por operación sigue siendo constante.