Hoja 1: Ejercicio 3

Ejercicios de análisis amortizado

Diego Rodríguez Cubero

UCM

20 de septiembre de 2025

Contenidos

Enunciado del problema

Ejercicio 3

Se realiza una secuencia de n operaciones sobre una estructura de datos. La operación i-ésima tiene un coste igual a i si i es una potencia de 2 y, en caso contrario, igual a 1. Utilizar el método de agregación para determinar el coste amortizado de las operaciones.

Planteamiento

Definicion: Método de agregación

Se determina una cota superior de la secuencia entera $T(n)$ para n operaciones. El coste medio por operación es $T(n)/n$.

Conociendo esta definicion, para resolver este problema, debemos calcular $T(n)$ sumando los costes de cada operacion, para despues dividirlo entre n y asi obtener el coste amortizado.

Ejemplo visual

Operación (i)	**Coste**
1	1
2	**2**
3	1
4	**4**
5	1
6	1
7	1
8	**8**
...	...

Cuadro: Coste de las primeras operaciones

Resolución: Método de agregación

Primero calculemos $T(n)$:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n} C[i]$$

Donde:

$$C[i] = \begin{cases} i & \text{si } i \text{ es potencia de 2} \\ 1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Separación de la suma

Para ello, dividamos la suma en dos partes: las operaciones que son potencias de 2 y las que no lo son.

$$T(n) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ no es potencia de } 2}}^{n} 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \text{ es potencia de } 2}}^{n} i = \underbrace{P(n)}_{\text{no potencias de } 2} + \underbrace{Q(n)}_{\text{potencias de } 2}$$

Desarrollo de los sumatorios

Podemos acotar $P(n)$ y $Q(n)$:

- $P(n) \leq n$
  Como mucho haremos n operaciones, de las cuales no todas son potencias de 2, por lo que el coste total de estas operaciones (todas de coste constante $O(1)$) no puede superar n, así obtenemos el coste de todas estas operaciones.
  Así, $P(n) \in O(n)$.
- $Q(n) \leq 2n$
  Esta desigualdad se puede probar trivialmente por induccion sobre la serie $\sum_{k=0}^{m} 2^k = 2^{m+1} - 1$. Siendo m el mayor exponente de 2 tal que $2^m \leq n$. Por lo que el coste total de las operaciones que son potencias de 2 no puede superar $2n \geq 2^{m+1} \geq \sum_{k=0}^{m} 2^k$.
  Así, $Q(n) \in O(n)$.

Cota final del coste total

Sumando ambas cotas, obtenemos:

$$T(n) = P(n) + Q(n) \leq n + 2n = 3n$$

Por lo tanto, el coste amortizado por operación es:

$$\frac{T(n)}{n} \leq \frac{3n}{n} = 3$$

Así, el coste amortizado de cada operación es $O(1)$.

Conclusión

En este ejercicio hemos analizado el coste amortizado de una secuencia de operaciones sobre una estructura de datos. Utilizando el método de agregación, hemos llegado a la conclusión de que el coste amortizado por operación es $O(1)$, lo que implica que, a pesar de que algunas operaciones pueden ser costosas, el coste promedio se mantiene constante.