Hoja 3: Ejercicio 4

Ejercicios de monticulos

Diego Rodríguez Cubero

UCM

22 de Octubre de 2025

Contenidos

Enunciado del problema

Ejercicio 4

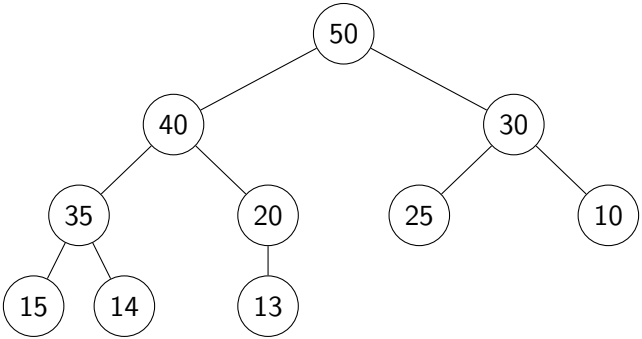
Diseñar un algoritmo que compruebe si un vector V [1..n] es un montículo de máximos y determinar su complejidad temporal.

Definición de montículo de máximos

Definición

Un montículo de máximos es un arbol binario semicompleto (todos los niveles llenos excepto posiblemente el último, que se llena de izquierda a derecha), que ademas cumple que su raiz es mayor que las de sus hijos, los cuales a su vez son monticulos de máximos.
Esto ultimo es equivalente a decir que cada nodo es mayor que sus descendientes.

Ejemplo de montículo de máximos



$$V = [50,\ 40,\ 30,\ 35,\ 20,\ 25,\ 10,\ 15,\ 14,\ 13]$$

Esta representación como vector se obtiene recorriendo el árbol por niveles, por lo que el primer elemento del nivel h se encuentra en la posición $2^h - 1$ del vector, y esta seguido por el resto de elementos del nivel.

Idea del ejercicio

$$V = [50,\ 40,\ 30,\ 35,\ 20,\ 25,\ 10,\ 15,\ 14,\ 13]$$

Primero es importante notar que si un nodo esta en la posición i del vector, sus hijos estarán en las posiciones $2i + 1$ y $2i + 2$

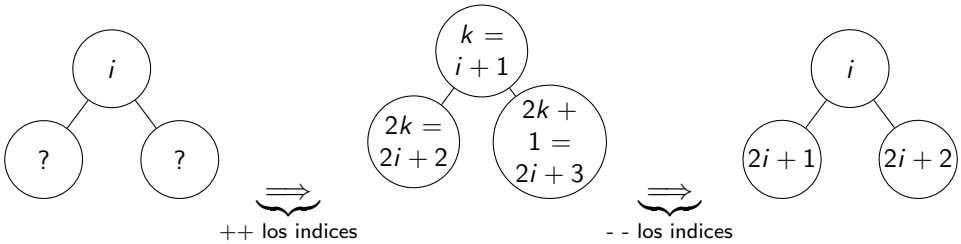
Por ejemplo el elemento 40 que esta en la posición 1 tiene como hijos a los elementos 35 y 20 que están en las posiciones 3 y 4 respectivamente.

Asumimos que el arbol es semicompleto, y por tanto el vector no tiene ningún "hueco".

Usaremos esto para recorrer todos los nodos que tienen hijos y comprobar que sean mayores que ellos.

Notación importante

Por comodidad en el algoritmo, llamaremos $i = 0$ a la raiz del árbol, y los hijos de cada nodo i estarán en las posiciones $2i + 1$ y $2i + 2$.
Esto se deduce de la notación empleada en clase donde los hijos del nodo k están en las posiciones $2k$ y $2k + 1$, pero aquí el vector empieza en la posición 0 en lugar de la 1.



Algoritmo

Listing 1: Función para comprobar si un vector es un montículo de máximos

```
bool esMonticuloMaximos(int V[], int n) {
    for (int i = 0; i <= (n - 2) / 2; i++) { // Recorremos nodos con hijos
        int izq = 2 * i + 1; // Hijo izquierdo
        int der = 2 * i + 2; // Hijo derecho
        if (izq < n && V[i] < V[izq]) {
            return false; // Violación de la propiedad del montículo
        }
        if (der < n && V[i] < V[der]) {
            return false; // Violación de la propiedad del montículo
        }
    }
    return true; // Es un montículo de máximos
}
```

Ejemplo de ejecución

- Sea $V = [50, 40, 30, 35, 20, 25, 10, 15, 14, 13]$ y $n = 10$.
- Iteramos desde $i = 0$ hasta $(n - 2)/2 = 4$ (incluido).
- Comprobamos cada nodo con sus hijos.

Paso $i = 0$

$$V = [50, 40, 30, 35, 20, 25, 10, 15, 14, 13]$$

- Como $i = 0 \implies$ hijos en $2 * 0 + 1 = 1$ y $2 * 0 + 2 = 2$
- $V[0] = 50$
- Hijos: $V[1] = 40$, $V[2] = 30$
- $50 > 40$ y $50 > 30$ (cumple)

Paso $i = 1$

$$V = [50, 40, 30, 35, 20, 25, 10, 15, 14, 13]$$

- Como $i = 1 \implies$ hijos en $2 * 1 + 1 = 3$ y $2 * 1 + 2 = 4$
- $V[1] = 40$
- Hijos: $V[3] = 35$, $V[4] = 20$
- $40 > 35$ y $40 > 20$ (cumple)

Paso $i = 2$

$$V = [50, 40, 30, 35, 20, 25, 10, 15, 14, 13]$$

- Como $i = 2 \implies$ hijos en $2 * 2 + 1 = 5$ y $2 * 2 + 2 = 6$
- $V[2] = 30$
- Hijos: $V[5] = 25$, $V[6] = 10$
- $30 > 25$ y $30 > 10$ (cumple)

Paso $i = 3$

$$V = [50, 40, 30, 35, 20, 25, 10, 15, 14, 13]$$

- Como $i = 3 \implies$ hijos en $2 * 3 + 1 = 7$ y $2 * 3 + 2 = 8$
- $V[3] = 35$
- Hijos: $V[7] = 15$, $V[8] = 14$
- $35 > 15$ y $35 > 14$ (cumple)

Paso $i = 4$

$$V = [50, 40, 30, 35, 20, 25, 10, 15, 14, 13]$$

- Como $i = 4 \implies$ hijos en $2 * 4 + 1 = 9$ y $2 * 4 + 2 = 10$
- $V[4] = 20$
- Hijos: $V[9] = 13$, $V[10]$ no existe $(10 \geq n = 10)$
- $20 > 13$ (cumple)

Complejidad temporal

- El bucle for itera desde $i = 0$ hasta $(n-2)/2$, lo que implica $\frac{n}{2} - 1$ iteraciones, es decir, $O(n)$ iteraciones.
- En cada iteración, se realizan un número constante de operaciones (comparaciones y asignaciones), todas ellas de tiempo $O(1)$, al tener vectores que nos permiten acceso directo a sus elementos.
- Por lo tanto, el tiempo total del algoritmo es la suma del tiempo de todas las iteraciones:

$$T(n) = \sum_{i=0}^{(n-2)/2} O(1) = O(n)$$

- Por lo tanto, la complejidad temporal total del algoritmo es $O(n)$.

Conclusión

- Hemos diseñado un algoritmo eficiente para comprobar si un vector representa un montículo de máximos.
- El algoritmo recorre todos los nodos con hijos y verifica la propiedad del montículo en tiempo lineal $O(n)$.