

Hoja 3: Ejercicio 8

Ejercicios de montículos

Diego Rodríguez Cubero

UCM

21 de octubre de 2025

- 1 Enunciado
- 2 Representación en un vector
- 3 Altura del montículo k-ario
- 4 Conclusión

Ejercicio 8

Un montículo k-ario es como un montículo binario pero los nodos internos tienen k hijos en lugar de 2. ¿Cómo se representaría un montículo k-ario en un vector? ¿Cuál es la altura de un montículo k-ario de n elementos en términos de n y k ?

Idea para la representación en un vector

- En un montículo k-ario, cada nodo tiene k hijos.
- La raíz del montículo se encuentra en la posición 0 del vector.
- Las posiciones del vector se llenan siguiendo un recorrido por niveles del árbol.
- La altura h tendrá capacidad para k^{h-1} nodos.

Ejemplo de arbol 3-ario

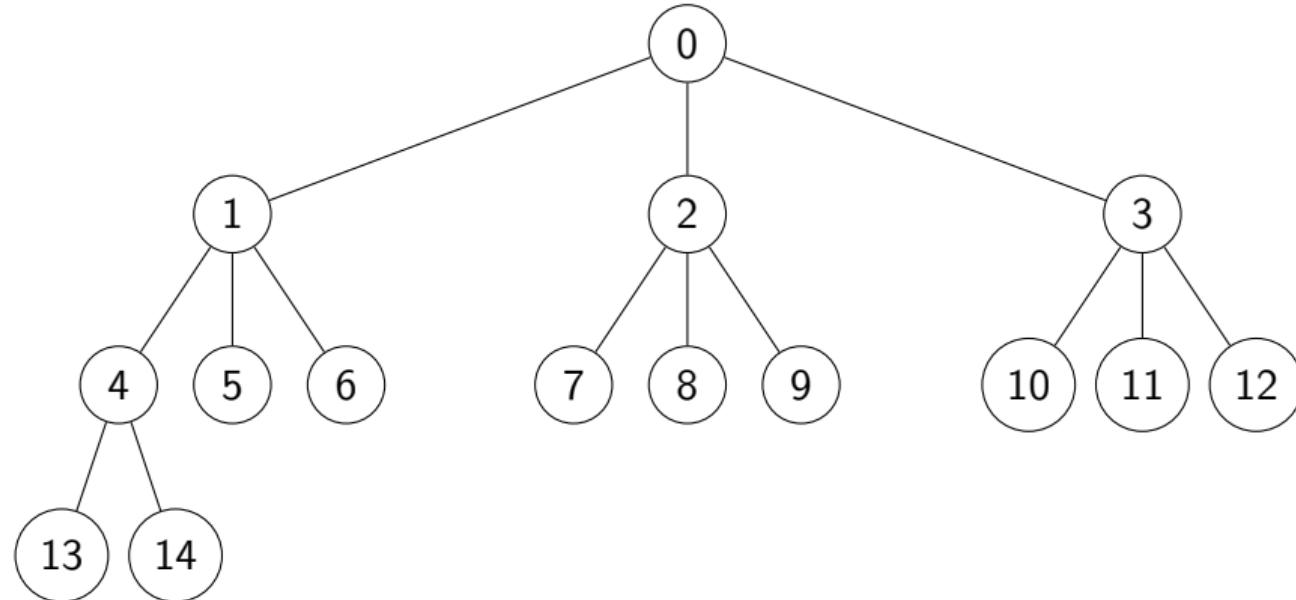


Figura: Ejemplo de un montículo 3-ario representado en un vector

$$V = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]$$

Representación en un vector

$$V = [0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]$$

Siendo el elemento i -ésimo del vector, el m nodo de la altura h (empezando por la altura 0 y el nodo 0 en cada altura):

$$h = \min\{d \mid \sum_{j=0}^d k^j > i\}$$

$$m = i - \sum_{j=0}^{h-1} k^j$$

Por ejemplo, tomando el elemento en la posición $i = 11$:

$$h = \min\{d \mid \sum_{j=0}^d 3^j > 11\} = 2, \quad m = 11 - (1 + 3) = 11 - 4 = 7$$

Representación en un vector: Cálculo de padres e hijos

Si tenemos un nodo en la posición i del vector, sus hijos y padre se calculan de la siguiente manera, usando inducción para buscar al primer hijo, luego se suman los siguientes hijos que son consecutivos:

- Sea nuestra hipótesis de inducción que la fórmula para encontrar al primer hijo es:

$$\text{hijo}_1(i) = ki + 1$$

- Caso base $i = 0$:

$$\text{hijo}_1(0) = k \cdot 0 + 1 = 1$$

Que es correcto, ya que el primer hijo de la raíz (posición 0) está en la posición 1.

Representación en un vector: Cálculo de padres e hijos (cont.)

- Paso inductivo: Supongamos que la fórmula es correcta para un nodo en la posición i . Entonces, para el nodo en la posición $i + 1$:

$$\text{hijo}_1(i + 1) = k(i + 1) + 1 = ki + k + 1$$

Esto es correcto ya que el nodo i tendrá sus hijos en las posiciones desde $ki + 1$ hasta $ki + k$, por lo que el siguiente nodo $i + 1$ tendrá sus hijos desde $ki + k + 1$ hasta $k(i + 1) + k$, cumpliendo la fórmula.

- El resto de hijos se encuentran en las posiciones:

$$\text{hijo}_j(i) = ki + j, \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, k$$

Así, hemos demostrado que la fórmula para encontrar a los hijos de un nodo en un montículo k -ario es correcta.

Cálculo de la altura del montículo k-ario

Si tenemos un montículo k -ario con n elementos, la altura h del montículo se puede calcular observando que la cantidad total de nodos hasta la altura h es como mucho:

$$\sum_{j=0}^h k^j = \frac{k^{h+1} - 1}{k - 1}$$

Para encontrar la altura en función de n y k , necesitamos que esta suma sea al menos n , siendo h el menor entero que cumple esta condición:

$$\frac{k^{h+1} - 1}{k - 1} \geq n$$

Despejando h , obtenemos:

$$k^{h+1} \geq n(k - 1) + 1 \implies h + 1 \geq \log_k(n(k - 1) + 1) \implies h \geq \log_k(n(k - 1) + 1) - 1$$

$$h = \min\{z \in \mathbb{Z} \mid h \geq \log_k(n(k - 1) + 1) - 1\}$$

Conclusión

Podemos representar un montículo k -ario en un vector llenando los nodos por niveles, y la altura del montículo con n elementos se puede calcular usando la fórmula derivada anteriormente. Además, hemos demostrado cómo calcular las posiciones de los hijos de un nodo dado su índice en el vector.

Todo esto resulta ser muy similar a los montículos binarios, pero adaptado a la estructura k -aria sustituyendo el 2 por k en las fórmulas correspondientes, con algunos ajustes necesarios.