Hoja 1: Ejercicio 7

Ejercicios de análisis amortizado

Diego Rodríguez Cubero

UCM

22 de septiembre de 2025

Contenidos

Enunciado del problema

Ejercicio 7

Dado un vector $b[0..n-1]$ de enteros mayores que 1, llamado de bases, un vector $v[0..n-1]$ con $0 \leq v[i] < b[i]$, para todo i, representará el valor de un contador expresado en bases b, siendo $v[0]$ la cifra menos significativa. El valor del contador viene dado por el sumatorio $\sum_{i=0}^{n-1} \left(v[i] \cdot \prod_{j=0}^{i-1} b[j] \right)$. Implementa la operación `incr`, que incrementa el contador en una unidad, admitiéndose que cuando el contador tenga su valor máximo, $\forall i \in 0..n-1,\ v[i] = b[i] - 1$, al incrementarlo pase a valer 0, o sea $\forall i \in 0..n-1,\ v[i] = 0$. Demuestra con cualquiera de los métodos vistos en clase, que el coste amortizado de la operación `incr` está en $O(1)$.

Planteamiento

Definición

El contador generalizado en bases b se comporta de la siguiente forma:
Al incrementar, se suma 1 a la cifra menos significativa, y si se alcanza el máximo en esa posición, se reinicia a 0 y se incrementa la siguiente cifra, y así sucesivamente.

Por tanto, el coste real de la operacion `incr` es 1 mas el numero de cifras que se reinician a 0.

.

Planteamiento

Definicion: Método del potencial

Igual que el método de contabilidad, pero guardando el prepago como "potencial" de la estructura de datos en su conjunto, en lugar de asignarlo a elementos concretos de la misma.

Conociendo esta definicion, debemos calcular el coste amortizado de la operacion `incr` definiendo una funcion potencial adecuada.

Ejemplos visuales

Op.	Contador	Coste real
1	(0,0,0)	1
2	(1,0,0)	1
3	(2,0,0)	1
4	(0,1,0)	2
5	(1,1,0)	1
6	(2,1,0)	1
7	(0,0,1)	3
8	(1,0,1)	1
9	(2,0,1)	1
10	(0,1,1)	2
11	(1,1,1)	1
12	(2,1,1)	1
13	(0,0,0)	3
...	...	...

Cuadro: Ejemplo de incrementos en un contador con $b = (3, 2, 2)$

Op.	Contador	Coste real
1	(0,0,0)	1
2	(1,0,0)	1
3	(0,1,0)	2
4	(1,1,0)	1
5	(0,2,0)	2
6	(1,2,0)	1
7	(0,3,0)	2
8	(1,3,0)	1
9	(0,0,1)	3
10	(1,0,1)	1
11	(0,1,1)	2
12	(1,1,1)	1
13	(0,2,1)	2
14	(1,2,1)	1
15	(0,3,1)	2
16	(1,3,1)	1
...	...	...

Cuadro: Ejemplo de incrementos en un contador con $b = (2, 4, 2)$

Resolución: Método del potencial

Definimos una función potencial $\Phi(D_i)$ como el número de cifras distintas de 0 en el contador tras la i-ésima operación. Sea D_{i-1} el estado antes de la operación i y D_i el estado después. Comprobemos las propiedades de la función potencial:

- $\Phi(D_0) = 0$, ya que el contador comienza en 0.
- $\Phi(D_i) \geq \Phi(D_0) = 0$ para todo i, ya que el número de cifras distintas de 0 no puede ser negativo.
- En particular, $\Phi(D_n) \geq \Phi(D_0) = 0$.

Cálculo del coste amortizado

Aplicando el método, el coste amortizado de la operación i es:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

donde c_i es el coste real de la operación i.

Cálculo del coste amortizado

Cuando se incrementa el contador:

- Se ponen a 0 k cifras (las menos significativas), y se incrementa la siguiente (k puede ser 0 si no hay acarreo).
- El coste real es $k + 1$.
- La función potencial disminuye en $k - 1$ (pues se ponen a 0 k cifras y una pasa de 0 a 1).

Por tanto:

$$\Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = \Phi(D_{i-1}) - k + 1 - \Phi(D_{i-1}) = 1 - k$$

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = (k + 1) + (1 - k) = 2$$

Así, el coste amortizado es 2 para cualquier operación `incr`, es decir, $O(1)$.

Conclusión

Hemos demostrado que, para un contador en bases arbitrarias, la operación `incr` tiene coste amortizado $O(1)$ usando el método del potencial. Esto significa que, aunque algunas operaciones puedan requerir reiniciar varias cifras, el coste promedio por operación sigue siendo constante.