Hoja 1: Ejercicio 7

Ejercicios de análisis amortizado

Diego Rodríguez Cubero

UCM

17 de septiembre de 2025

Contenidos

Enunciado del problema

Ejercicio 7

Dado un vector $b[0..n-1]$ de enteros mayores que 1, llamado de bases, un vector $v[0..n-1]$ con $0 \leq v[i] < b[i]$, para todo i, representará el valor de un contador expresado en bases b, siendo $v[0]$ la cifra menos significativa. El valor del contador viene dado por el sumatorio $\sum_{i=0}^{n-1} \left(v[i] \cdot \prod_{j=0}^{i-1} b[j] \right)$. Implementa la operación `incr`, que incrementa el contador en una unidad, admitiéndose que cuando el contador tenga su valor máximo, $\forall i \in 0..n-1,\ v[i] = b[i] - 1$, al incrementarlo pase a valer 0, o sea $\forall i \in 0..n-1,\ v[i] = 0$. Demuestra con cualquiera de los métodos vistos en clase, que el coste amortizado de la operación `incr` está en $O(1)$.

Planteamiento

Definicion

Se determina una cota superior de la secuencia entera $T(n)$ para n operaciones. El coste medio por operación es $T(n)/n$.

Conociendo esta definicion, para resolver este problema, debemos calcular $T(n)$ sumando los costes de cada operacion, para despues dividirlo entre n y asi obtener el coste amortizado.
Lo haremos mediante un metodo similar al del contador binario visto en clase, pero adaptado a bases arbitrarias, por lo que calcularemos el coste amortizado de la operacion aproximando la cantidad de veces que se reinicia cada cifra del contador.

Planteamiento

Definición

El contador generalizado en bases b se comporta de la siguiente forma:
Al incrementar, se suma 1 a la cifra menos significativa, y si se alcanza el máximo en esa posición, se reinicia a 0 y se incrementa la siguiente cifra, y así sucesivamente.

Por tanto, el coste real de la operacion `incr` es 1 mas el numero de cifras que se reinician a 0.

Ejemplos visuales

Op.	**Contador**	**Coste real**
1	(0,0,0)	1
2	(1,0,0)	1
3	(2,0,0)	1
4	(0,1,0)	2
5	(1,1,0)	1
6	(2,1,0)	1
7	(0,0,1)	3
8	(1,0,1)	1
9	(2,0,1)	1
10	(0,1,1)	2
11	(1,1,1)	1
12	(2,1,1)	1
13	(0,0,0)	3
...	...	...

Cuadro: Ejemplo de incrementos en un contador con $b = (3, 2, 2)$

Op.	Contador	Coste real
1	(0,0,0)	1
2	(1,0,0)	1
3	(0,1,0)	2
4	(1,1,0)	1
5	(0,2,0)	2
6	(1,2,0)	1
7	(0,3,0)	2
8	(1,3,0)	1
9	(0,0,1)	3
10	(1,0,1)	1
11	(0,1,1)	2
12	(1,1,1)	1
13	(0,2,1)	2
14	(1,2,1)	1
15	(0,3,1)	2
16	(1,3,1)	1
...	...	...

Cuadro: Ejemplo de incrementos en un contador con $b = (2, 4, 2)$

Resolución: Método del potencial

Definimos una función potencial $\Phi(v)$ como el número de cifras distintas de 0 en el contador v. Cada vez que incrementamos, el coste real es igual al número de cifras que se ponen a 0 más 1 (la cifra que se incrementa sin reiniciar).
El coste amortizado de una operación es:

$$\hat{c} = c + \Phi(v') - \Phi(v)$$

donde c es el coste real, v el estado antes de la operación y v' después.

Cálculo del coste amortizado

Cuando se incrementa el contador:

- Se ponen a 0 k cifras (las menos significativas), y se incrementa la siguiente (k puede ser 0 si no hay acarreo).
- El coste real es $k + 1$.
- La función potencial disminuye en $k - 1$ (pues se ponen a 0 k cifras y una pasa de 0 a 1).

Por tanto:

$$\hat{c} = (k + 1) + (1 - k) = 2$$

Así, el coste amortizado es 2 para cualquier operación `incr`, es decir, $O(1)$.

Conclusión

Hemos demostrado que, para un contador en bases arbitrarias, la operación `incr` tiene coste amortizado $O(1)$ usando el método del potencial. Esto significa que, aunque algunas operaciones puedan requerir reiniciar varias cifras, el coste promedio por operación sigue siendo constante.