Métodos Algorítmicos en Resolución de Problemas II

Grado en Ingeniería Informática

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Hoja de ejercicios 4 — Curso 2025–2026

Ejercicios de complejidad computacional

Ejercicio 1 Consideremos el problema de determinar si un grafo no dirigido con n vértices contiene un camino de longitud al menos 2.

1. Mediante el método del adversario, demostrar que cualquier algoritmo que resuelva este problema tiene un coste en $\Omega(n^2)$ en el peor caso si está restringido a realizar preguntas de la forma "¿Existe una arista entre los vértices i y j?". (Por ejemplo, si el grafo se representa mediante una matriz de adyacencia.)
2. Demostrar que, sin embargo, este problema se puede resolver en tiempo $O(n)$ si el algoritmo puede preguntar en cada vértice por la lista de sus vértices adyacentes.

Ejercicio 2 Utilizar el método del adversario para demostrar que cuando todos los elementos de un vector son distintos no es posible localizar la mediana con certeza sin mirar a cada elemento. Por otro lado, mostrar con un ejemplo que este no es el caso si los elementos no son distintos.

Ejercicio 3 Demostrar que las reducciones Turing-polinómicas son transitivas. Sean A, B y C tales que $A \leq^T B$ y $B \leq^T C$; demostrar que $A \leq^T C$. Repetir la demostración para $\leq^p$ con la restricción de que A, B y C sean problemas de decisión.

Ejercicio 4 Encontrar dos problemas de decisión sencillos, X e Y, tales que $X \leq^T Y$ pero $X \not\leq^p Y$.

Ejercicio 5 Decimos que dos problemas A y B son Turing-equivalentes si $A \leq^T B$ y $B \leq^T A$. Demostrar que el problema de encontrar una asignación que satisfaga una fórmula booleana es Turing equivalente en tiempo polinómico al problema de decidir si tal asignación existe.

Ejercicio 6 Demostrar que la versión de decisión del problema del viajante es Turing-equivalente en tiempo polinómico a la versión de optimización.

Ejercicio 7 Sean los tres problemas siguientes:

1. PDC: Dado un grafo G y un natural n, ¿existe un cliqué de tamaño n en G?
2. POC: Dado un grafo G, encontrar el tamaño del mayor cliqué en G.
3. PC: Dado un grafo G, encontrar un cliqué de tamaño máximo en G.

Demostrar que los tres problemas son Turing-equivalentes en tiempo polinómico.

Ejercicio 8 Sean los tres problemas siguientes:

1. PDCV: Dado un grafo G y un número natural k, ¿existe una cobertura de tamaño k en G?
2. POCV: Dado un grafo G, encontrar el tamaño de la menor cobertura de vértices en G.
3. PCV: Dado un grafo G, encontrar una cobertura de vértices de tamaño mínimo en G.

Demostrar que los tres problemas son Turing-equivalentes en tiempo polinómico.

Ejercicio 9 Sean los tres problemas siguientes:

1. PDCI: Dado un grafo G y un natural k, ¿existe un conjunto independiente de tamaño k en G?
2. POCI: Dado un grafo G, encontrar el tamaño del mayor conjunto independiente en G.

3. PCI: Dado un grafo G, encontrar un conjunto independiente de tamaño máximo en G.

Demostrar que los tres problemas son Turing-equivalentes en tiempo polinómico.

Ejercicio 10 El problema de la **Suma** consiste en decidir, dados un vector de enteros $A[1..n]$ y un valor S, si podemos encontrar un subconjunto I del conjunto de índices del vector tal que la suma de los correspondientes elementos del mismo sea S, es decir, $\sum_{i \in I} A[i] = S$.

El problema de la **Partición** de un vector de enteros $A[1..n]$ consiste en decidir si podemos separar los elementos del vector en dos partes disjuntas que sumen lo mismo. O sea, nos preguntamos si existen I_1 e I_2 con $I_1 \cup I_2 = \{1, \ldots, n\}$ e $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ tales que $\sum_{i \in I_1} A[i] = \sum_{i \in I_2} A[i]$.

Suponiendo demostrado que **Suma** es NP-completo, demostrar que **Partición** también lo es.

Ejercicio 11 Dados los naturales $b_1, \ldots, b_m, E$ y k, el problema **Envasar** consiste en decidir si es posible dividir los b_i en un número menor o igual que k de subconjuntos disjuntos tales que la suma de los elementos de cada subconjunto sea a lo sumo E.

1. Sabiendo que **Partición** es NP-completo, demostrar que **Envasar** también lo es.
2. Es más, aún fijado un $k > 1$ cualquiera a priori, el correspondiente problema k-**Envasar**, sigue siendo NP-completo. Demostrarlo.

Ejercicio 12 Tenemos un conjunto de números naturales cualesquiera $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Nuestra tarea, dadas sendas cantidades S y T con $S < T$, será escoger un subconjunto de valores que en total sumen una cantidad V que cumpla $S \leq V < T$). Llamamos **Intervalo** al problema de decidir si esto es posible.

1. Demostrar que **Intervalo** es un problema NP-completo.
2. Complicamos ahora un poco el problema. Para cada $M > 0$ definimos un problema M-**Intervalo** que, dado un conjunto de naturales $\{v_1, \ldots, v_n\}$ y las cantidades S y T que cumplen $T - S \geq M$, decide si existe un subconjunto de $\{v_1, \ldots, v_n\}$ que sumen una cantidad cualquiera V tal que $S \leq V < T$.

   Aunque la tarea es aparentemente más fácil, demostrar que todo problema M-**Intervalo** sigue siendo NP-completo.

Sugerencia: Usar en ambos casos como problema de referencia NP-completo el problema **Suma**.

Ejercicio 13 Nos dan una secuencia $x_1, \ldots, x_n$ de n números naturales cuyo orden no podremos alterar. Interesa decidir si es posible intercalar entre cada dos de ellos los signos $+$ o $-$, de manera que el valor de la expresión resultante, evaluada de izquierda a derecha, y sin ningún tipo de precedencia entre sus operadores, sea finalmente 0. Por ejemplo, dada la secuencia $8, 2, 4, 3, 1$ podríamos en este caso obtener 0 así: $8 - 2 - 4 - 3 + 1 = 6 - 4 - 3 + 1 = 2 - 3 + 1 = -1 + 1 = 0$.

Mostrar por medio de una reducción sencilla de alguno de los problemas NP-completos conocidos, que a pesar de su aparente simplicidad, el problema planteado también es NP-completo.

Ejercicio 14 Decimos que dos problemas de decisión A y B son p-equivalentes si $A \leq^p B$ y $B \leq^p A$. Demuestra que los tres problemas siguientes sobre grafos no dirigidos $\langle V, A \rangle$ son p-equivalentes:

PDCI (Problema de Decisión del Conjunto Independiente): determinar si un grafo tiene un conjunto independiente de tamaño al menos k. Un conjunto independiente es un subconjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que cada arista de A incide como mucho en un vértice de V'.

PDC (Problema de Decisión del Cliqué): determinar si un grafo tiene un cliqué (subgrafo completo) que contenga al menos k vértices.

PDCV (Problema de Decisión de la Cobertura de Vértices): determinar si un grafo tiene una cobertura de tamaño como mucho k. Una cobertura es un subconjunto de vértices $V' \subseteq V$ tal que si $\langle u, v \rangle \in A$, entonces $u \in V'$ o $v \in V'$ (o ambos).

Ejercicio 15 Dado un grafo no dirigido G, el problema del camino hamiltoniano PCH consiste en determinar si en dicho grafo existe un camino abierto que pasa una sola vez por cada vértice del mismo, y el problema del ciclo hamiltoniano $PDCH$ en saber si partiendo de un vértice cualquiera podemos recorrer todos los vértices del grafo y volver al origen sin pasar dos veces por ninguno de ellos. Demostrar que PCH y $PDCH$ son p-equivalentes.

Ejercicio 16 Dada una familia de conjuntos finitos $F = \{S_1, \ldots, S_n\}$, no necesariamente disjuntos, y dado un k, $1 \leq k \leq n$, el problema del *SET-COVER* consiste en decidir si existe una subfamilia $F' = \{S_{i_1}, \ldots, S_{i_{k'}}\}$, $F' \subseteq F$, de tamaño $k' \leq k$, que cubra F. Se entiende por ello que la unión de todos los conjuntos de F' ha de coincidir con la unión de todos los conjuntos de F. Sabiendo que el problema de la cobertura de vértices es NP-completo, demostrar que *SET-COVER* también lo es.

Ejercicio 17 Dado un conjunto finito S de objetos, una familia de conjuntos $F = \{S_1, \ldots, S_n\}$, todos ellos subconjuntos de S, y un número natural k, el problema de decisión del *hitting set* consiste en saber si existe un subconjunto $H \subseteq S$, de cardinal a lo sumo k, que tenga intersección no vacía con todos los conjuntos S_i de la familia F.

Sabemos que los problemas de decisión del *Cliqué*, de la *Cobertura de vértices* y del *Conjunto independiente* son NP-completos. Demostrar a partir de alguno de estos problemas que el problema del *hitting set* también lo es.

Ejercicio 18 Se han de realizar n tareas, cada una de las cuales tarda tiempo t_i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) en ejecutarse; si se completa antes de un plazo p_i, se obtiene un beneficio b_i, y en caso contrario 0. Dados los t_i, p_i, b_i y un beneficio B, el problema *PLANIFICACIÓN* consiste en determinar si hay una forma de elegir las tareas para conseguir un beneficio igual o superior a B. Demostrar que el problema *PLANIFICACIÓN* es NP-completo, utilizando el problema de decisión de la mochila.

Ejercicio 19 El problema *COMMON_SUBGRAPH* consiste en, dados dos grafos $G = (V_G, A_G)$ y $H = (V_H, A_H)$ y un entero $k > 0$, determinar si G y H tienen subgrafos G' y H' que son isomorfos y con al menos k vértices. Se pide demostrar que el problema *COMMON_SUBGRAPH* es NP-completo sabiendo que el problema de decisión del cliqué, *CLIQUE*, lo es.

Que G y H tienen subgrafos isomorfos quiere decir que existen $G' = (V_{G'}, A_{G'})$, $H' = (V_{H'}, A_{H'})$ subgrafos de G y H, es decir:

- $V_{G'} \subseteq V_G$ y $V_{H'} \subseteq V_H$,
- $A_{G'} = A_G \cap (V_{G'} \times V_{G'})$ y $A_{H'} = A_H \cap (V_{H'} \times V_{H'})$,

y una biyección $f : V_{G'} \to V_{H'}$ tal que:

- $(u, v) \in A_{G'} \iff (f(u), f(v)) \in A_{H'}$

Ejercicio 20 El problema de decisión *SPARSE-SUBGRAPH* consiste en: dado un grafo no dirigido $G = (V_G, A_G)$ y dos números naturales a y b, determinar si G tiene un subgrafo G' con a vértices y a lo sumo b aristas. Se pide demostrar que *SPARSE-SUBGRAPH* es NP-completo utilizando alguno de los problemas NP-completos vistos en clase.

Que G' es subgrafo de G quiere decir que $G' = (V_{G'}, A_{G'})$ tal que:

- $V_{G'} \subseteq V_G$
- $A_{G'} = A_G \cap (V_{G'} \times V_{G'})$

Ejercicio 21 Dado un grafo G y un número k, el problema de decisión del coloreado de un grafo, llamado *COLOREADO*, consiste en determinar si se pueden colorear los vértices del grafo con a lo sumo k colores de forma que dos vértices adyacentes no estén coloreados con el mismo color. El problema *COLOREADO* es NP-completo.

Dado un grafo G y un número k, el problema de decisión de la cobertura con cliqués, llamado *CLIQUE-COVER*, consiste en determinar si el conjunto de vértices de G se puede particionar en a lo sumo k conjuntos (disjuntos) de vértices, cada uno de los cuales constituye un cliqué en G. Demostrar que *CLIQUE-COVER* es NP-completo utilizando el problema *COLOREADO*.

Ejercicio 22 El problema k-*AR* consiste en determinar si un grafo no dirigido G tiene un árbol de recubrimiento de grado menor o igual que k, es decir, tal que cada nodo del árbol tiene a lo sumo k adyacentes pertenecientes al árbol.

- Demuestra que el problema 2-*AR* es NP-completo utilizando el problema de decisión del ciclo hamiltoniano *PDCH*.
- Demuestra que para todo k, el problema k-*AR* se reduce polinómicamente al problema $(k+1)$-*AR*.

Ejercicio 23 El problema *CLIQUE+CI* consiste en, dado un grafo no dirigido $G = (V, E)$ y un natural K, determinar si existen en G un cliqué con al menos K vértices y un conjunto independiente con al menos K vértices. Demostrar que *CLIQUE+CI* es NP-completo.

Ejercicio 24 El problema *ISO_SUBGRAPH* consiste en dados dos grafos $G = (V_G, A_G)$ y $H = (V_H, A_H)$, determinar si G tiene un subgrafo isomorfo a H. Se pide demostrar que el problema *ISO_SUBGRAPH* es NP-completo sabiendo que el problema de decisión del cliqué, *CLIQUE*, lo es.

Que G tiene un subgrafo isomorfo a H quiere decir que existe un grafo $G' = (V_{G'}, A_{G'})$ que es subgrafo de G, es decir:

- $V_{G'} \subseteq V_G$
- $A_{G'} = A_G \cap (V_{G'} \times V_{G'})$

y una biyección $f : V_{G'} \to V_H$ tal que:

- $(u, v) \in A_{G'} \iff (f(u), f(v)) \in A_H$