Ex 0.1. *Bases (Ainda...).* Escreva uma base para os seguintes espaços vetoriais.

1. Os espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$
2. O espaço vetorial dos polinômios de grau até 2 (indicado as seguir com $P_2(x)$)
3. O espaço vetorial dos polinômios de grau até 3 (indicado a seguir com $P_3(x)$)
4. O espaço vetorial das matrizes 2×2 (indicado a seguir com $M(2 \times 2)$)

Ex 0.2. *Transformações lineares (Definição).* Conisdere as seguintes transformações. Estabeleça quais são lineares (TL) e discuta qual (ou quais) entre propriedades que definem uma TL falha (ou falham) quando não forem.

1. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xy \\ y \end{bmatrix}$$
2. $A : M(2 \times 2) \to \mathbb{R}^2$ tal que
$$A\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$
3. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que
$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = x - y + 2z$$
4. $A : M(2 \times 2) \to \mathbb{R}$ tal que
$$A\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$
5. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+1 \\ y+1 \end{bmatrix}$$

Ex 0.3. *Respostas multiplas (Teoria geral das transformações lineares)*

1. Seja $A : E \to F$, come E e F espaços vetoriais uma transformação. Entre as seguintes afirmações qual é correta?
   A. Se $A(0_E) = 0_F$, então A é linear
   B. Se $A(\lambda v) = \lambda A(v)$, para todos $\lambda \in \mathbb{R}$ e $v \in E$, então A é linear
   C. Se A é linear transforma vetores LI de E em vetores LI de F
   D. Se A é linear com $A(3v) = 6$ e $A(w) = 4$, resulta $A(2v - w) = 0_F$

2. Considere a transformação linear $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida da

$$\begin{cases} x' = 3x + y \\ y' = -x \end{cases}$$

. Qual entre estas afirmações é verdadeira?
   A. A transformção mapeia a reta $y = x$ na reta $y = -\frac{1}{4}x$
   B. A transfomação é uma rotação
   C. A transformação mapeia um triângulo de área 1 em um triângulo de área 2
   D. A transformaõo mapeia a reta $y = x$ na reta $y = 3x$

3. Considere a transformação linear $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - 2x_3 \\ x_1 - x_2 + x_4 \end{bmatrix}$$

. Qual é a matriz $[T]$que representa a transformação linear T respeito as bases canônicas de $\mathbb{R}^4$ e $\mathbb{R}^2$?
   A.
$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   B.
$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$
   C.
$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
   D.
$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Consideramos uma transormação linear $A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Sabe-se que $A\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $A\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Qual é a matriz $[A]$ que representa A respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$?
   A.
$$[A] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

B.

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

C.

$$[A] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

D.

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Considere no plano o ponto de coordenadas $P = (3, 1)$ Qual é o ponto obtido espelhando P respeito à reta $y = 2x$?
   A. $P' = (-1, 2)$
   B. $P' = (-1, 3)$
   C. $P' = (-1, -3)$
   D. $P' = (2, -3)$

6. Quantas transformações lineares do plano em si mesmo mapeiam um triangulo com um vertice na origem em um outro triangulo com vertice na origem?
   A. Depende dos triangulos considerados
   B. Uma
   C. Duas
   D. Três

7. $A : E \to F$ é uma transformação linear sobrejetiva, quanto vale $\dim[Im(A)]$?
   A. 0
   B. $\dim F$
   C. $\dim E$
   D. depende da dimensão do nucleo da transformação linear

8. $A : E \to F$ é uma transformação linear injetiva, quanto vale $\dim[N(A)]$?
   A. 0
   B. $\dim F$
   C. $\dim E$
   D. depende da dimensão do nucleo da transformação linear

9. Seja A uma transformação linear injetiva $A : P_2(x) \to P_3(x)$, onde $P_2(x)$ e $P_3(x)$ são os espaços vetoriais dos polinômios de grau até 2 e até 3 na varíavel x. Quanto vale $\dim(Im(A))$?
   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 4

10. Consideramos a transformação linear $L : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^{10}$. Sabe-se que $\dim[Im(L)] = 3$. Quanto vale $\dim[N(L)]$?

A. Depende da transformação considerada
B. 2
C. 5
D. 7

11. Considere a TL $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$A\left(\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ A\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ A\left(\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$$

. O que podemos concluir?
A. A transformação é injetiva mas não é sobrejetiva
B. A transformação é injetiva mas não é sobrejetiva
C. A transformação é injetiva e sobrejetiva
D. Nenhuma das precendetes respostas é correta.

12. Considere uma transformação linear $A : E \to F$. Qual entre as seguintes afirmações é correta?
A. Se $\dim E > \dim F$, a transformação não pode ser sobrejetiva
B. Se $\dim[Im(A)] > \dim[N(A)]$ a transformação é sobrejetiva
C. Se $\dim E > \dim F$ a transformação não pode ser injetiva
D. Se $\dim E = \dim F$ a transformação é injetiva e sobrejetiva, ou seja inversível

Ex 0.4. *Cálculo do Nucleo e da Imagem de uma TL.* Determine uma base para o nucleo e a imagem das transformações lineares seguintes. Discuta quais são injetivas e/ou sobrejetivas e verifique o teorema do nucleo e da imagem.

1. $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que
$$A\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x-y\\2z\end{bmatrix}$$

2. $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que
$$A\left(\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}x+y\\x-y\\y\\x\end{bmatrix}$$

3. $A : P_2(x) \to M(2\times 2)$ tal que
$$A(ax^2+bx+c) = \begin{bmatrix}a & b\\b & c\end{bmatrix}$$

4. $A : P_2(x) \to \mathbb{R}^2$ tal que
$$A(p(x)) = \begin{bmatrix}p(0)\\p(1)\end{bmatrix}$$

(Obs: $p(x)$ é um polinômio de segundo grau).

Ex 0.5. *Matriz de uma TL.* Se não o fez antes, escreva as matrizes que representam as transformações lineares do Ex.0.4 respeito às bases que escolheou no Ex. 0.1.

Ex 0.6. Ache uma transformação linear L de $\mathbb{R}^3$ em si mesmo tal que:

- Uma base para $Im(L)$ é dada por $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- Uma base para $N(L)$ é dada pelos vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ex 0.7. Ache uma transformação linear L de $\mathbb{R}^3$ em si mesmo tal que:

- Uma base para $Im(L)$ é dada pelos vetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
- Uma base para $N(L)$ é dada por $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$