Ex 0.1. *Vetores no espaço.* Considere os vetores no espaço $\mathbb{R}^3$

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ w = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \ u = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

1. Calcule $v + 2w$
2. Calcule $v \times w$
3. Calcule o ângulo entre v e w
4. Estabeleça se u pertence ao subespaço gerado por v e w
5. Exiba dois vetores que não pertencem ao subespaço gerado por v e w
6. Determine a equação cartesiana do plano gerado por v e w
7. Estabeleça se os vetores v, w e u formam um conjunto LI.
8. Complete o conjunto dos vetores v, w e u, incluindo um quarto vetor em maneira que o novo conjunto gere $\mathbb{R}^3$.

Ex 0.2. *Sistemas lineares, combinações lineares, independência linear*

1. Para quais valores do parâmetro real λ, o sistema de equações

$$\begin{cases} x + 2\lambda y - \lambda z = y \\ 2x + 2y - z = 0 \\ x + \lambda y - z = 0 \end{cases} \tag{2}$$

possui infinitas soluções? Resolva o sistema linear se $\lambda = 3/2$.

2. Para quais valores do parâmetro real λ, o vetor

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

resulta uma CL de $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$. Se $\lambda = 0$, os vetores v, u e w são LI? Se $\lambda = 0$, os vetores v, u e w formam uma base de $\mathbb{R}^4$?

3. Escreva a matrix $d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ como CL das matrizes $a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ e $c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Em quantas maneiras diferentes podemos escrever d como CL de a, b e c?

4. Verfique que os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}^4$ s ao LI

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}. \tag{4}$$

   Complete os conjuntos de três vetores acima à uma base de $\mathbb{R}^4$.

5. Quais entre os seguintes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ são LI

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} \right\}, \quad \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \right\} \tag{5}$$

Ex 0.3. *Espaços vetorias, bases, dimensão*

1. Considere o conjunto de matrizes 2×2 com elementos reais

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ tal que } a + b + c = 0 \right\}. \tag{6}$$

   Mostre que V é um subespaço vetorial do espaço das matrizes 2×2 com elementos reais. Ache uma base para V e calcule a dimensão deste subespaço vetorial.

2. Considere em $\mathbb{R}^3$ o conjunto dos vetores

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \text{ tal que } x_1 = x_2 \right\}. \tag{7}$$

   Mostre que V é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ Ache uma base para V e calcule a dimensão deste subespaço vetorial.

3. Qual é a dimensão do espaço vetorial dos polinômios $p(x)$ de grau menor ou igual 3 tais que $p(0) = 0$? Ache uma base para este espaço vetorial.

4. Monstre que o conjunto das matrizes 3×3 com a soma dos elementos na diagonal principal ($a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0$) e na diagonal secundária nula ($a_{13} + a_{22} + a_{31} = 0$) forma um espaço vetorial. Exiba uma base para este espaço vetorial e determine a dimensão dele.

5. Considere os vetores $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ com coordenadas que satisfazem as duas equações

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \tag{8}$$

- Demostre que estes vetores formam um espaço vetorial
- Escreva a forma mais geral para os vetores de $\mathbb{R}^4$, cujas coordenadas satisfazem as equações (8)
- Determine uma base para o espaço vetorial que contem todos os vetores, cujas coordenadas satisfazem as equações (8)
- Qual é a dimensão deste espaço vetorial e porqué?

Ex 0.4. *Respostas multiplas*

1. Considere os seguintes conjuntos de vetores em $\mathbb{R}^3$.

$$C_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},\ C_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\},\ C_3 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},$$
$$C_4 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\},\ C_5 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   Quais entre estes conjuntos são linearmente independentes (LI)?
   A. Somente C_3
   B. C_3 e C_4
   C. C_1 e C_2
   D. C_1, C_2 e C_3
   E. Os primeiros quatros conjuntos.

2. Considere ainda os conjuntos de vetores C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5. Quais são um sistema de geradores para $\mathbb{R}^3$?
   A. C_3 e C_4
   B. Somente C_3
   C. C_1 e C_3
   D. C_3 e C_5
   E. C_3, C_4 e C_5

3. Considere ainda os conjuntos de vetores C_1, C_2, C_3, C_4 e C_5. Quais são uma base para $\mathbb{R}^3$?
   A. Somente C_3
   B. Somente C_4
   C. C_3 e C_4
   D. C_3, C_4 e C_5
   E. Nenhum destes conjuntos é uma base

4. Qual destes subconjunto **não** é um subespaço vetorial do espaço vetorial das matrizes 2×2?
   A. As matrizes 2×2 com traço nulo (soma dos elementos na diagonal igual zero)
   B. As matrizes 2×2 com primeira coluna igual à segunda linha
   C. As matrizes 2×2 com todos os elementos iguais
   D. As matrizes 2×2 com todos os elementos pares
   E. As matrizes 2×2 simétricas: com elementos $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2$.