Ex 0.1. *Mudança de base.* Considere a TL $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida da

$$A\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y \\ x + y + z \end{bmatrix} \tag{1}$$

com coordenadas respeito à bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$. Escreva a matriz que representa A

1. Respeito às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^3$
2. Respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$ e à base $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\}$ de $\mathbb{R}^2$.
3. Respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$ e à base $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Ex 0.2. *Mudança de base II.* Sejam $\{e_1, e_2\}$ os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$. Consideramos a TL $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida da

$$T(e_1) = e_1 - e_2,\ T(e_2) = 2e_2 + e_1. \tag{2}$$

Escreva a matriz que representa T

1. Respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$
2. Respeito à base $\{e_1 - e_2, e_1 + \frac{1}{2}e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Ex 0.3. *Autovalores e autovetores.* Calcule autovalores e autovetores das matrizes

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Ex 0.4. *Matrizes diagonalizáveis.* Qual entre as matrizes do exercićio precedente são diagonalizáveis?

Ex 0.5. *Respostas multiplas.*

1. Consideramos a matriz $R = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Entre as seguintes afirmações qual é correta?
   A. $\det(R) = 1$
   B. $\dim[Im(R)] = 1$
   C. $\dim[N(R)] = 2$
   D. R possui somente autovalores positívos

2. Considere as matrizes $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   Qual entre estas afirmações é verdadeira?
   A. Existem duas bases de $\mathbb{R}^2$ respeito às quais P e Q representam a mesma TL
   B. Não existem duas bases de $\mathbb{R}^2$ respeito às quais P e Q representam a mesma TL
   C. P e Q são inversíveis
   D. Os autovalores de Q são 0 e 1.

3. Seja $L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ a matriz que representa uma TL respeito à base de $\mathbb{R}^2$: $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\}$.
   Quanto vale em coordenadas respeito à base canônica de $\mathbb{R}^2$ o resultado da multiplicação: $L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$?
   A. $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$
   B. $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$
   C. $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$
   D. $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

4. Qual é o polinômio caracteristico da matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}? \tag{4}$$

   A. $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 3$
   B. $\lambda^4 - 3\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda - 3$
   C. $\lambda^4 + \lambda^3 - 3$
   D. $\lambda^4 - \lambda^3 + \lambda^2 - 4$

5. Considere a matriz $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Qual entre as seguintes afirmações está correta?
   A. $\dim[Im(P)] = 2$
   B. $\dim[N(P)] = 2$
   C. P é diagonalizável
   D. P não é diagonalizável

6. Assine verdadeiro ou falso

   - Se A é inversível, então A é diagonalizável

- Se A é diagonalizável, então A é inversiível
- Se v é autovetor de A com autovalor 2, então $3v$ é autovetor de A com autovalor 6
- Se v é autovetor de A com autovalor 2, então $3v$ é autovetor de A com autovalor 2

7. Quais são os autovetores LI da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

   A. $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$

   B. $\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$

   C. $\{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$

   D. Somente $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

8. Seja $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$, qual é a matriz da mudançã de base da base $\mathcal{B}$ base canônica de $\mathbb{R}^2$?

   A. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

   B. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   C. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   D. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

9. Seja $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$, qual é a matriz da mudançã de base da base canônica de $\mathbb{R}^2$ à base $\mathcal{B}$?

   A. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

   B. $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   C. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

   D. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

10. Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{C}$ à base canônica. Denotamos com M a matriz da mudança de base da base $\mathcal{B}$ à base $\mathcal{C}$. Se A é a matriz que representa uma TL respeito à base $\mathcal{B}$,

qual é a matriz que representa a TL respeito à base canônica de $\mathbb{R}^n$?

A. $M^{-1}AM$
B. MAM^{-1}
C. A
D. MAM