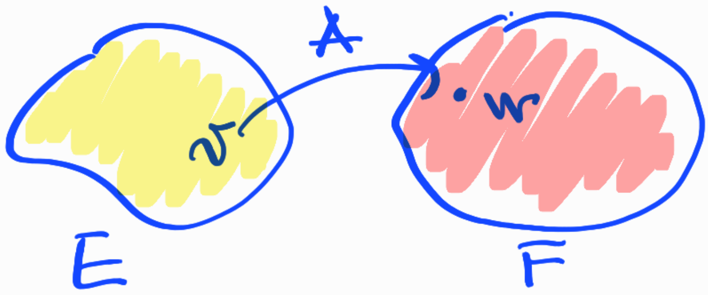
Aula 11: Transformações lineares

Def: Suponhamos que A seja uma função entre dois espaços vetoriais E e F.

$$A: E \longrightarrow F$$
$$v \longmapsto A(v) = w$$



A é uma transformação linear quando:

(i) $\forall v, u \in E \quad A(v+u) = A(v) + A(u)$

(ii) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in E \quad A(\lambda v) = \lambda \cdot A(v)$

Resultado fundamental da teoria das transformações lineares:

"Se conheço como uma TL age sobre os vetores de uma base de E, então conheço como transformam todos os vetores do espaço vetorial E"

Se $\{v_1 \ldots v_n\}$ é uma base de E e $v \in E$

é a CL: $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$

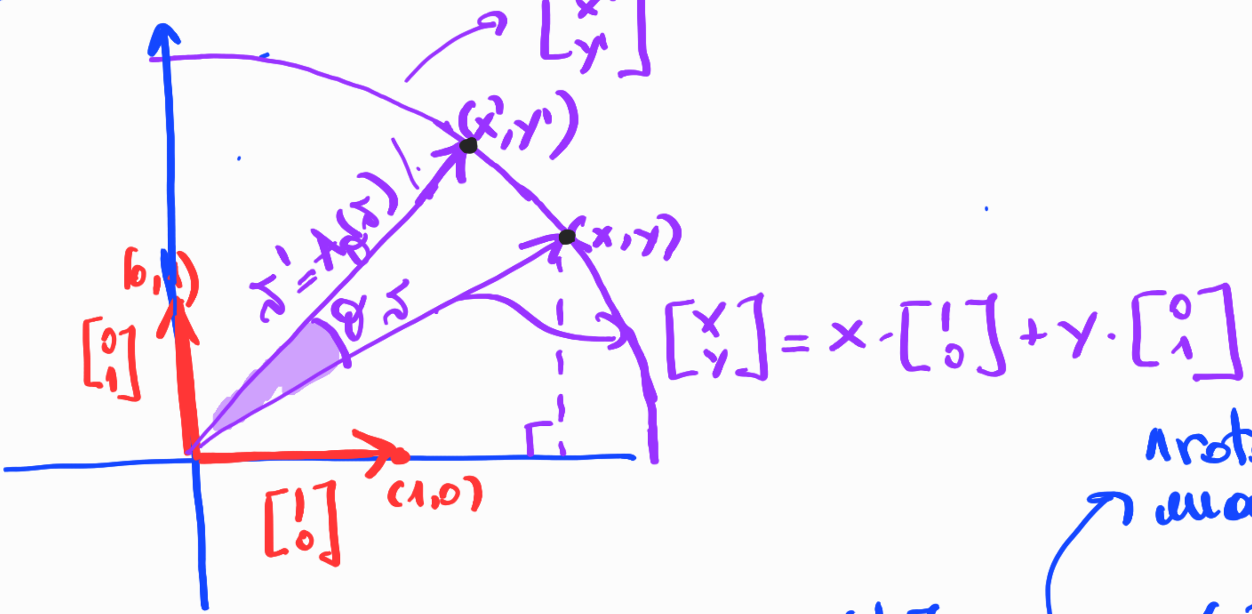
$$A(v) = A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) =$$

$$= A(\alpha_1 v_1) + A(\alpha_2 v_2) + \dots + A(\alpha_n v_n) =$$

$$= \alpha_1 A(v_1) + \alpha_2 A(v_2) + \dots \alpha_n A(v_n)$$

Exemplo: Rotações em $\mathbb{R}^2$

① Escolho a base canônica de $\mathbb{R}^2$

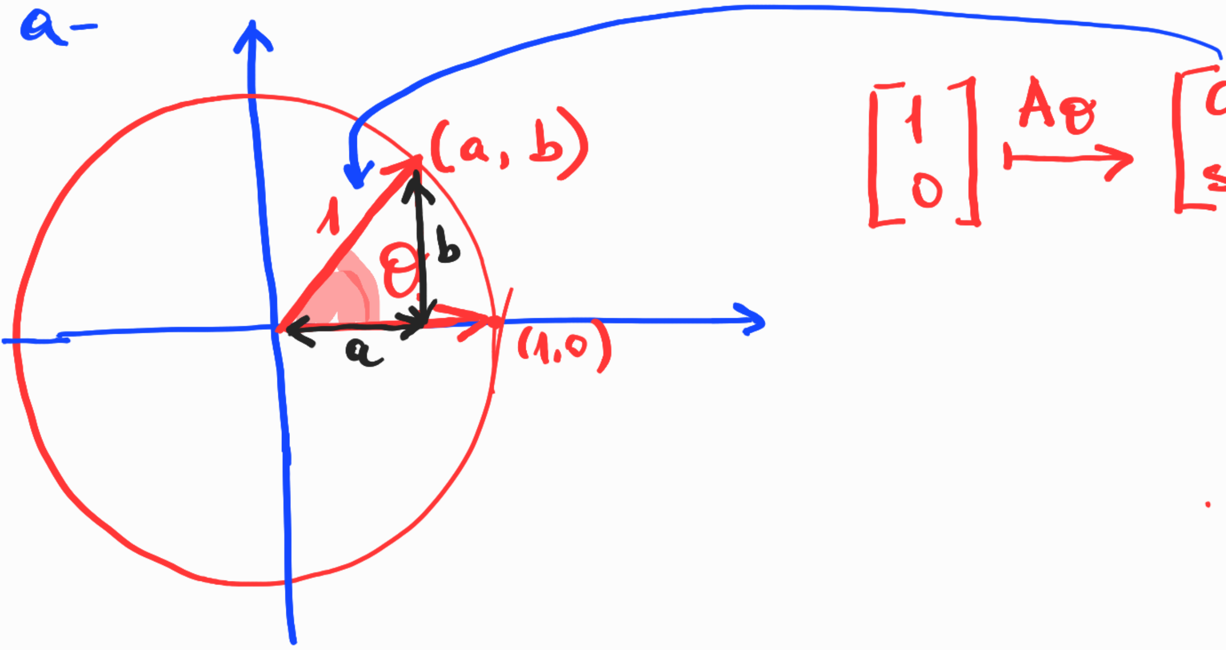


"rotação de ângulo θ"

② Queremos escrever $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$ como função de $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

③ Ideia: Tentamos antes de ver como uma rotação transforme os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^2$

a-

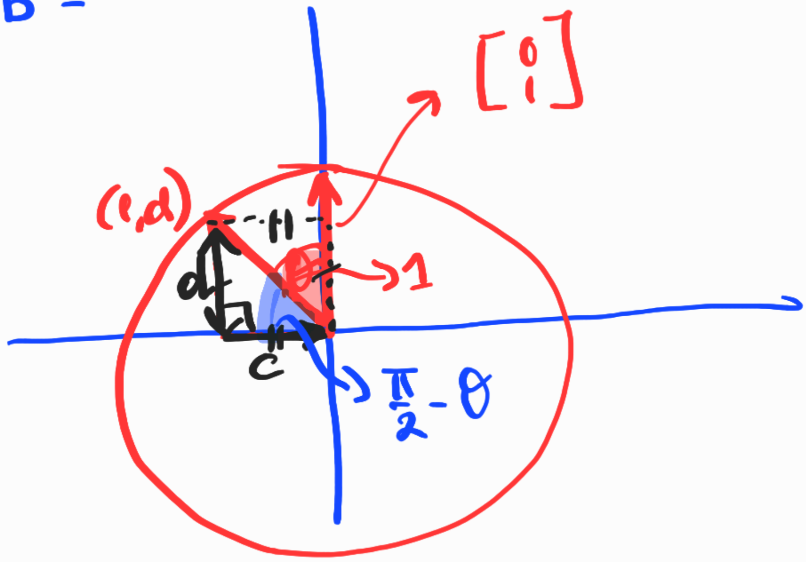


$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \xmapsto{A_\theta} \begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix}$$

$a = \cos\theta$

$b = \sin\theta$

b -



$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \xmapsto{A_\theta} \begin{bmatrix}-\sin\theta\\ \cos\theta\end{bmatrix}$$

$d = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$c = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$

(4) Agora podemos escrever como transforma um qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ depois de uma rotação de um ângulo θ:

$$v \in \mathbb{R}^2 = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$A_\theta(v) = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_\theta\left(x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A_\theta\left(x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A_\theta\left(y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = x \cdot A_\theta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + y \cdot A_\theta\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$$

Ou seja:

$$\boxed{\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}}$$

Podemos escrever esta transformação em forma de matriz:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = v' \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = v$$

a primeira coluna da matriz é $A_\theta\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

a segunda coluna da matriz é $A_\theta\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$