

1 Центральная предельная теорема

Теорема 1.1 (Линдберга). Пусть $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ — независимые случайные величины, $E\xi_k^2 < +\infty \forall k$, обозначим $m_k = E\xi_k$, $\delta_k^2 = D\xi_k > 0$: $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$; $D_n^2 = \sum_{k=1}^n \delta_k^2$ и $F_k(x)$ — функция распределения ξ_k . Пусть выполнено условие Линдберга, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x-m_k| > \varepsilon D_n\}} (x - m_k)^2 dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), n \rightarrow \infty$.

2 Гауссовские случайные векторы

Определение 1. Случайный вектор $\vec{\xi}$ — гауссовский, если его характеристическая функция $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \exp(i(\vec{m}, \vec{t}) - \frac{1}{2}(\Sigma \vec{t}, \vec{t}))$, $\vec{m} \in \mathbb{R}^n$, Σ — симметрическая неотрицательно определенная матрица.

Определение 2. Случайный вектор $\vec{\xi}$ — гауссовский, если он представляется в следующем виде: $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{b}$, где $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \text{Mat}(n \times m)$ и $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ — независимые и $\mathcal{N}(0, 1)$.

Определение 3. Случайный вектор $\vec{\xi}$ — гауссовский, если $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ случайная величина $(\vec{\lambda}, \vec{\xi})$ имеет нормальное распределение.

Теорема 2.1 (об эквивалентности определений гауссовских векторов). Предыдущие три определения эквивалентны.

3 Задачи по астрономии

1. Dark Matters

В некотором скоплении галактик содержится 70 спиральных и 30 эллиптических галактик. Известно, что абсолютная звездная величина эллиптических галактик равна -20 , соотношение масса—светимость составляет $15M_{\odot}/L_{\odot}$. У спиральных галактик в данном скоплении максимальная скорость вращения составляет 210 км/с, соотношение масса—светимость — $5M_{\odot}/L_{\odot}$.

Оцените долю темной материи внутри скопления, если масса межгалактического газа на порядок превышает массу галактик, а типичные

скорости галактик в скоплении составляют 1000 км/с. Размер скопления составляет 7 Мпк. Абсолютная звёздная величина Млечного Пути — -20.9 .

2. Бейрут

В какой момент по истинному солнечному времени 1 сентября Регул ($\alpha_1 = 10^{\text{h}} 9^{\text{m}}, \delta_1 = 11^\circ 53'$) и Шератан ($\alpha_2 = 11^{\text{h}} 15^{\text{m}}, \delta_2 = 15^\circ 20'$) находятся на одном альмукантарате в Бейруте ($\varphi = 33^\circ 53'$).

3. Н II

Предположим, что за пределами солнечного круга кривая вращения галактики плоская, параметр плато $v = 240$ км/с. Пусть известно, что диск нейтрального водорода на галактической долготе $l = 140^\circ$. Оцените минимально возможное значение лучевой скорости этого облака.

4. Обратный комптон-эффект

Обратным эффектом Комптона (ОЭК) называют явление рассеяния фотона на ультрарелятивистском свободном электроне, при котором происходит перенос энергии от электрона к фотону. Рассмотрите ОЭК для фотонов реликтового излучения. При какой энергии электронов в направленном пучке рассеянное излучение можно будет зарегистрировать на фотоприёмнике?

4 Отзыв

- ◇ Курс интересный и полезный
- ◇ Хотелось бы побольше примеров использования новых команд