

Домашняя работа №2

Арслан Хабутдинов

1 Центральная предельная теорема

Теорема 1.1 (Линдберга). Пусть $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$ — независимые случайные величины, $E\xi_k < +\infty$, $\forall k$ обозначим $m_k = E\xi_k$, $\sigma_k^2 = D\xi_k > 0$; $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$; $D_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$ и $F_k(x)$ функция распределения ξ_k . Пусть выполняется условие Линдберга, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x-m_k| > \varepsilon D_n\}} (x - m_k)^2 df_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), n \rightarrow \infty$.

2 Гауссовские случайные векторы

Определение 1. Случайный вектор $\vec{\xi} \sim (m, \Sigma)$ — гауссовский, если его характеристическая функция $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \exp(i(\vec{m}, \vec{t} - \frac{1}{2}(\Sigma \vec{t}, \vec{t})))$, $\vec{m} \in \mathbb{R}^n$, Σ — симметричная неотрицательно определенная матрица.

Определение 2. Случайный вектор $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$ — гауссовский, если он представляется в следующем виде: $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{b}$, где $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \text{Mat}_{(n \times m)}$ и $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ — независимы и $\eta_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Определение 3. Случайный вектор $\vec{\xi}$ — гауссовский, если $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ случайная величина, $(\vec{\lambda}, \vec{\xi})$ имеет нормальное распределение.

Теорема 2.1 (об эквивалентности определений гауссовских векторов). Предыдущие три определения эквивалентны.

3 Астрономия

Задача 1. Загадочный круг

Установите астрономический азимут восхода звезды ϵ СМа ($6^{\text{h}} 58^{\text{m}} 38^{\text{s}}$, $-28^{\circ} 58'$) при наблюдении из самой северной равноудалённой от Санкт-Петербурга ($59^{\circ} 57'$ с. ш., $30^{\circ} 19'$ в. д.) и Красной Поляны ($43^{\circ} 41'$ с. ш., $40^{\circ} 11'$ в. д.) точки земной поверхности. Атмосферой пренебрегите, Земля — шар.

Задача 2. Бейрут

В какой момент по истинному солнечному времени 1 сентября Регул ($\alpha_1 = 10^{\text{h}} 9^{\text{m}}$, $\delta_1 = 11^{\circ} 53'$) и Шератан ($\alpha_2 = 11^{\text{h}} 15^{\text{m}}$, $\delta_2 = 15^{\circ} 20'$) находятся на одном альмукантарате в Бейруте ($\delta = 33^{\circ} 53'$)?

Задача 3. К Сатурну!

Космический корабль запустили с поверхности Земли к Сатурну по наиболее энергетически выгодной траектории. При движении по орбите корабль пролетел мимо астероида-тройнца (624) Гектор.

Определите большую полуось и эксцентриситет полученной орбиты, скорость старта с поверхности Земли, а также угол между направлением на Солнце и на Сатурн в момент старта корабля. Орбиты планет считать круговыми. Оцените относительную скорость корабля и астероида в момент сближения.

Задача 4. Н II

Обратным эффектом Комптона (ОЭК) называют явление рассеяния фотона на ультрарелятивистском свободном электроне, при котором происходит перенос энергии от электрона к фотону. Рассмотрите ОЭК для фотонов реликтового излучения. При какой энергии электронов в направленном пучке рассеянное излучение можно будет зарегистрировать на фотоприемнике?

4 Отзывы

♡ Мне нравится этот интенсивный курс.

♣ Он организован так, что порой не обойтись без подорожника.

★ Материал увлекательный, 5 L^AT_EX звезд!