

# Домашняя работа №2

Арслан Хабутдинов

## 1 Центральная предельная теорема

**Теорема 1.1** (Линдберга). Пусть  $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$  — независимые случайные величины,  $E\xi_k < +\infty$ ,  $\forall k$  обозначим  $m_k = E\xi_k$ ,  $\sigma_k^2 = D\xi_k > 0$ ;  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ;  $D_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$  и  $F_k(x)$  функция распределения  $\xi_k$ . Пусть выполняется условие Линдберга, то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x-m_k| > \varepsilon D_n\}} (x - m_k)^2 df_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда  $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), n \rightarrow \infty$ .

## 2 Гауссовские случайные векторы

**Определение 1.** Случайный вектор  $\vec{\xi} \sim (m, \Sigma)$  — гауссовский, если его характеристическая функция  $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \exp(i(\vec{m}, \vec{t}) - \frac{1}{2}(\Sigma \vec{t}, \vec{t}))$ ,  $\vec{m} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma$  — симметричная неотрицательно определенная матрица.

**Определение 2.** Случайный вектор  $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$  — гауссовский, если он представляется в следующем виде:  $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{b}$ , где  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \text{Mat}_{(n \times m)}$  и  $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m)$  — независимы и  $\eta_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

**Определение 3.** Случайный вектор  $\vec{\xi}$  — гауссовский, если  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$  случайная величина,  $(\vec{\lambda}, \vec{\xi})$  имеет нормальное распределение.

**Теорема 2.1** (об эквивалентности определений гауссовских векторов). Предыдущие три определения эквивалентны.

## 3 Астрономия

### Задача 1. Загадочный круг

Установите астрономический азимут восхода звезды  $\epsilon$  СМа ( $6^{\text{h}} 58^{\text{m}} 38^{\text{s}}$ ,  $-28^{\circ} 58'$ ) при наблюдении из самой северной равноудалённой от Санкт-Петербурга ( $59^{\circ} 57'$  с. ш.,  $30^{\circ} 19'$  в. д.) и Красной Поляны ( $43^{\circ} 41'$  с. ш.,  $40^{\circ} 11'$  в. д.) точки земной поверхности. Атмосферой пренебрегите, Земля — шар.

### Задача 2. Бейрут

В какой момент по истинному солнечному времени 1 сентября Регул ( $\alpha_1 = 10^{\text{h}} 9^{\text{m}}$ ,  $\delta_1 = 11^{\circ} 53'$ ) и Шератан ( $\alpha_2 = 11^{\text{h}} 15^{\text{m}}$ ,  $\delta_2 = 15^{\circ} 20'$ ) находятся на одном альмукантарате в Бейруте ( $\delta = 33^{\circ} 53'$ )?

### Задача 3. К Сатурну!

Космический корабль запустили с поверхности Земли к Сатурну по наиболее энергетически выгодной траектории. При движении по орбите корабль пролетел мимо астероида-тройнца (624) Гектор.

Определите большую полуось и эксцентриситет полученной орбиты, скорость старта с поверхности Земли, а также угол между направлением на Солнце и на Сатурн в момент старта корабля. Орбиты планет считать круговыми. Оцените относительную скорость корабля и астероида в момент сближения.

### Задача 4. Н II

Обратным эффектом Комптона (ОЭК) называют явление рассеяния фотона на ультрарелятивистском свободном электроне, при котором происходит перенос энергии от электрона к фотону. Рассмотрите ОЭК для фотонов реликтового излучения. При какой энергии электронов в направленном пучке рассеянное излучение можно будет зарегистрировать на фотоприемнике?

## 4 Отзывы

♡ Мне нравится этот интенсивный курс.

♣ Он организован так, что порой не обойтись без подорожника.

★ Материал увлекательный, 5 L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X звезд!