Домашнее задание №2

Мумладзе Максимелиан

5 ноября 2018 г.

Часть I

Конспект по теории вероятностей

1 Центральная предельная теорема

Теорема 1.1 (Линдеберга). *Пусть* $\{\xi_k\}_{k\geq 1}$ *— независимая случайная величина,* $\mathsf{E}\xi_k^2 < +\infty\ \forall k$, *обозначим* $m_k = \mathsf{E}\xi_k$, $\delta_k^2 = \mathsf{D}\xi_k > 0$, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_k$; $D_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \delta_k^2$ *и* $F_k(x)$ *— функция распределения* ξ_k. *Пусть выполняется условие Линдеберга, то есть*

$$\forall \varepsilon > 0\ \frac{1}{\mathsf{D}_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\left\{x : |x - m_k| > \varepsilon \mathsf{D}_n\right\}} (x - m_k)^2 \, dF_k(x) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0.$$

Тогда $\frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{\sqrt{\mathsf{D}S_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1), n \to \infty.$

2 Гауссовские случайные векторы

Определение 1. Случайный вектор $\vec{\xi} \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$ — гауссовский, если его характеристическая функция $\varphi\xi(\vec{t}) = \exp\left(i(\vec{m}, \vec{t}) - \frac{1}{2}(\Sigma\vec{t}, \vec{t})\right), \vec{m} \in \mathbb{R}^n$, Σ — симметрично неотрицательно определенная матрица.

Определение 2. Случайный вектор $\vec{\xi}$ — гауссовский, если он представляется в следующем виде: $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{b}$, где $\vec{b} \in \mathbb{R}^n, A \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ и $\vec{\eta} = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ — независимый и $\sim \mathcal{N}(0,1)$.

Определение 3. Случайный вектор $\vec{\xi}$ — гауссовский, если $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ случайный вектор $(\vec{\lambda}, \vec{\xi})$ имеет нормальное распределение.

Теорема 2.1 (Об эквивалентности определений гауссовских векторов)**.** *Предоставлено три определения эквивалентности.*

Часть II
Задачи

3 Задачи по астрономии

Задача 1. «Бейрут»
В какой момент по истинному солнечному времени 1 сентября Регул ($\alpha_1 = 10^{\mathrm{h}}\, 9^{\mathrm{m}}, \delta_1 = 11^\circ\, 53'$) и Шертан ($\alpha_2 = 11^{\mathrm{h}}\, 15^{\mathrm{m}}, \delta_2 = 15^\circ\, 20'$) находятся на одном альмукантарате в Бейруте ($\varphi = 33^\circ\, 53'$)?

Задача 2. «К Сатурну!»
Космический корабль запустили с поверхности Земли к Сатурну по наиболее энергетически выгодной траектории. При движении по орбите корабль пролетел мимо астероида–троянца (624) Гектор.

Определите большую полуось и эксцентриситет полученной орбиты, скорость старта с поверхности Земли, а также угол между направлением на Солнце и на Сатурн в момент старта корабля. Орбиты планет считать круговыми. Оцените относительную скорость корабля и астероида в момент сближения.

Задача 3. «Dark Matters»
В некотором скоплении галактик содержится 70 спиральных и 30 эллиптических галактик. Известно, что абсолютная величина галактик равна −20, соотношение масса–светимость составляет $15\,\mathfrak{M}_\odot/L_\odot$. У спиральных галактик в данном скоплении максимальная скорость вращения составляет 210 км/с, соотношение масса–светимость — $5\,\mathfrak{M}_\odot/L_\odot$.

Оцените долю тёмной материи внутри скопления, если масса межгалактического газа на порядок превышает массу галактик, а типичные скорости галактик составляют 1000 км/с. Размер скопления составляет 7 Мпк. Абсолютная звёздная величина Млечного Пути — -20.9.

Задача 4. «Обратный комптон–эффект»
Обратным эффектом Комптона (ОЭК) называют явление рассеяния фотона на ультрарелятивистском свободном электроне свободном электроне, при котором происходит перенос энергии от электрона к фотону. Рассмотрите ОЭК для фотонов реликтового излучения. При какой энергии электронов в направленном пучке рассеянное излучение можно будет зарегистрировать на фотоприёмнике?

Часть III

И еще кое-что...

4 Отзыв

- ♭ Отличный курс.
- ℵ Организация на высшем уровне. Единственное — хотелось бы, чтобы занятия проводились только в одной аудитории, постоянно не переезжая.
- ℑ Качество материала тоже очень хорошее. Видно, что человек усердно работает.
- ⊙ То же самое про преподношение.