1 Теория вероятностей

1.1 Центральная предельная теорема

Теорема 1 (Линдеберга). *Пусть* $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ *— независимые случайные величины,* $\forall\, k\;\; \mathsf{E}\,\xi_k < +\infty$. *Обозначим* $m_k = \mathsf{E}\,\xi_k$, $\sigma_k^2 = \mathsf{D}\,\xi_k > 0$, $S_n = \sum\limits_{i=0}^{n} \xi_i$, $D_n^2 = \sum\limits_{k=0}^{n} \sigma_k^2$ *и* $F_k(x)$ *— функция распределения* ξ_k. *Пусть выполнено условие Линдеберга, то есть*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\{x\colon |x-m_k|>\varepsilon D_n\}} (x-m_k)^2 dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Тогда $\dfrac{S_n - \mathsf{E}\,S_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0,1)$, $n \to \infty$.

1.2 Гауссовские случайные векторы

Определение. Случайный вектор $\vec{\xi} \sim \mathcal{N}(\text{т. } \Sigma)$ — гауссовский, если его характеристическая функция $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \exp(i(\vec{m}, \vec{t}) - \frac{1}{2}(\Sigma\vec{t}, \vec{t}))$, $\vec{m} \in \mathbb{R}^n$, Σ — симметричная неотрицательно определенная матрица.

Определение. Случайный вектор $\vec{\xi}$ — гауссовский, если он представляется в следующем виде: $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{b}$, где $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathrm{Mat}(n \times m)$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ — независимый, $\eta \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Определение. Случайный вектор $\vec{\xi}$ — гауссовский, если $\forall\, \vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ случайная величина $(\vec{\lambda}, \vec{\xi})$ имеет нормальное распределение.

Теорема 1 (об эквивалентности определений гауссовских векторов). *Предыдущие три определения эквивалентны.*

2 Задачи по астрономии

Задача 2.1. Обратный комптон-эффект

Обратным эффектом Комптона (ОЭК) называют явление рассеивания фотона на ультрарелятивистском свободном электроне, при котором происходит перенос энергии от электрона к фотону. Рассмотрите ОЭК для фотонов реликтового излучения. При какой энергии электронов в направленном пучке рассеяное излучение можно будет зарегистрировать на фотоприёмнике?

Задача 2.2. К Сатурну!

Космический корабль запустили с поверхности Земли к Сатурну по наиболее энергетически выгодной траектории. При движении по орбите корабль пролетел мимо астероида–троянца (624) Гектор.

Определите большую полуось и эксцентриситет полученной орбиты, скорость старта с поверхности Земли, а также угол между направлением на Солнце и на Сатурн в момент старта корабля. Орбиты планет считать круговыми. Оцените относительную скорость корабля и астероида в момент сближения.

Задача 2.3. Dark Matters

В некотором скоплении галактик содержится 70 спиральных и 30 эллиптических галактик. Известно, что абсолютная звездная величина эллиптических галактик равна –20, соотношение масса–светимость составляет $15\mathfrak{M}_\odot/L_\odot$. У спиральных галактик в данном скоплении максимальная скорость вращения составляет 210 км/с, соотношение масса–светимость — $5\mathfrak{M}_\odot/L_\odot$.

Оцените долю темной материи внутри скопления, если масса межгалактического газа на порядок превышает массу галактик, а типичные скорости галактик в скоплении составляют 1000 км/с. Размер скопления составляет 7 Мпк. Абсолютная звёздная величина Млечного Пути — –20.9.

Задача 2.4. H II

Предположим, что за пределами солнечного круга кривая вращения Галактики плоская, параметр плато $v = 240$ км/с. Пусть известно, что диск нейтрального водорода простирается до галактоцентрического расстояния $R_max = 50$ кпк. Мы наблюдаем облако нейтрального водорода на галактической долготе $l = 140^\circ$. Оцените максимально возможное значение лучевой скорости этого облака.

3 Отзыв

- ☻ Курс мне нравится (инаяе бы я на него не продолжал ходить).
- ☻ Организация курса на достаточно высоком уровне.
- ☻ Хорошая подборка материала, но иногда не хватает иллюстративных примеров.