1 Центральная предельная теорема

Теорема 1.1 (Линдеберга)**.** *Пусть* $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ *— независимые случайные величины,* $\mathsf{E}\xi_k^2 < +\infty\ \forall k$*. Обозначим* $m_k = \mathsf{E}\xi_k$*,* $\sigma_k^2 = \mathsf{D}\xi_k > 0$*;* $S_n = \sum_{i=0}^n \xi_i$*;* $\mathsf{D}_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$ *и* $F_k(x)$ *— функция распределения* ξ_k*. Пусть выполнено условие Линдеберга:*

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \frac{1}{\mathsf{D}_n^2}\sum_{k=1}^n \int\limits_{\{x:|x-m_k|>\varepsilon\mathsf{D}_n\}} (x-m_k)^2\, dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Тогда $\frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{\sqrt{\mathsf{D}S_n}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1), n\to\infty$*.*

2 Гауссовские случайные векторы

Определение 1. *Случайный вектор* $\vec{\xi} \sim \mathcal{N}(m,\Sigma)$ *— гауссовский, если его характеристическая функция* $\varphi_\xi(\vec{t}) = \exp\left(i(\vec{m},\vec{t}) - \frac{1}{2}(\Sigma\vec{t},\vec{t})\right)$*,* $\vec{m}\in\mathbb{R}^n$*,* Σ *— симметричная неотрицательно определенная матрица.*

Определение 2. *Случайный вектор* $\vec{\xi}$ *— гауссовский, если он представляется в следующем виде:* $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{b}$*, где* $\vec{b}\in\mathbb{R}^n$*,* $A \in \mathrm{Mat}\,(m\times n)$ *и* $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_m)$ *— независимые и распределенные* $\mathcal{N}(0,1)$*.*

Определение 3. *Случайный вектор* $\vec{\xi}$ *— гауссовский, если* $\forall\lambda\in\mathbb{R}^n$ *случайная величина* $(\vec{\lambda},\vec{\xi})$ *имеет нормальное распределение.*

Теорема 2.1 (Об эквивалентности определений гауссовских векторов)**.** *Предыдущие три определения эквивалентны.*