1 Центральная предельная теорема

Теорема 1.1 (Линдеберга)**.** *Пусть* $\{\xi_k\}_{k\geqslant 1}$ *— независимые случайные величины,* $\mathsf{E}\xi_k^2 < +\infty \ \forall k$*. Обозначим* $m_k = \mathsf{E}\xi_k$*,* $\sigma_k^2 = \mathsf{D}\xi_k > 0$*;* $S_n = \sum_{i=0}^n \xi_i$*;* $\mathsf{D}_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$ *и* $F_k(x)$ *— функция распределения* ξ_k*. Пусть выполнено условие Линдеберга:*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{\mathsf{D}_n^2} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\{x:|x-m_k|>\varepsilon \mathsf{D}_n\}} (x-m_k)^2 \, dF_k(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Тогда $\frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{\sqrt{\mathsf{D}S_n}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1), n \to \infty$*.*

2 Гауссовские случайные векторы

Определение 1. *Случайный вектор* $\vec{\xi} \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$ *— гауссовский, если его характеристическая функция* $\varphi_\xi(\vec{t}) = \exp\left(i(\vec{m},\vec{t}) - \frac{1}{2}(\Sigma\vec{t},\vec{t})\right)$*,* $\vec{m} \in \mathbb{R}^n$*,* Σ *— симметричная неотрицательно определенная матрица.*

Определение 2. *Случайный вектор* $\vec{\xi}$ *— гауссовский, если он представляется в следующем виде:* $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{b}$*, где* $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$*,* $A \in \mathrm{Mat}\,(m \times n)$ *и* $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_m)$ *— независимые и распределенные* $\mathcal{N}(0,1)$*.*

Определение 3. *Случайный вектор* $\vec{\xi}$ *— гауссовский, если* $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$ *случайная величина* $(\vec{\lambda}, \vec{\xi})$ *имеет нормальное распределение.*

Теорема 2.1 (Об эквивалентности определений гауссовских векторов)**.** *Предыдущие три определения эквивалентны.*

3 Задачи по астрономии

Задача 3.1. H II

Предположим, что за пределами солнечного круга кривая вращения Галактики плоская, параметр плато $v = 240$ км/с. Пусть известно, что диск нейтрального водорода простирается до галактоцентрического расстояния $R_{\max} = 50$ кпк. Мы наблюдаем облако нейтрального водорода на галактической долготе $l = 140°$. Оцените минимально возможное значение лучевой скорости этого облака.

Задача 3.2. Бейрут

В какой момент по истинному солнечному времени 1 сентября Регул ($\alpha_1 = 10^{\mathrm{h}}\,9^{\mathrm{m}}, \delta_1 = 11°\,53'$) и Шератан ($\alpha_2 = 11^{\mathrm{h}}, 5^{\mathrm{m}}, \delta_2 = 15°\,20'$) находятся на одном альмукантрате в Бейруте ($\varphi = 33°53'$)?

Задача 3.3. Dark Matters

В некотором скоплении галактик содержится 70 спиральных и 30 эллиптических галактик. Известно, что абсолютная звездная величина эллиптических галактик равна -20, соотношение масса-светимость составляет $15\mathfrak{M}_\odot/L_\odot$. У спиральных галактик в данном скоплении максимальная скорость вращения составляет 210 км/с, соотношение масса-светимость — $5\mathfrak{M}_\odot/L_\odot$.

Оцените долю темной материи внутри скопления, если масса межгалактического газа на порядок превышает массу галактик, а типичные скорости галактик в скоплении составляют 1000 км/с. Размер скопления составляет 7 Мпк. Абсолютная звёздная величина Млечного Пути — -20.9.

Задача 3.4. Антипланеты

Лупа и Пупа живут на антипланетах, обращающихся вокруг звезды с массой $M_* \simeq 10M_\odot$ по эллиптической орбите с фокальным параметром $p = 0.3$ а. е. и эксцентриситетом $e = 0.72$. Как и полагается антипланетам, время от времени звезда находится точно между ними; в этот момент X истинная аномалия ν планеты Пупы составляет 237°.

Однажды кто-то опять все перепутал, и центральная звезда бесследно исчезла в момент X, уменьшив модули скоростей планет в 217 раз. Установите, с каким периодом T планеты бедных астрономов будут обращаться в отсутствие звезды. Известно, что планеты относятся к классу горячих Юпитеров с массой $M \simeq M_{♃}$.

Задача 3.5. К Сатурну!

Космический корабль запустили с поверхности Земли к Сатурну по наиболее энергетически выгодной траектории. При движении по орбите корабль пролетел мимо астероида-троянца (624) Гектор.

Определите большую полуось и эксцентриситет полученной орбиты, скорость старта с поверхности Земли, а также угол между направлением на Солнце и на Сатурн в момент старта корабля. Орбиты планет считать круговыми. Оцените относительную скорость корабля и астероида в момент сближения.

4 Отзыв

✓ Полезные домашки, позволяющие разобраться с материалом и сразу использовать много показанных функций и тонкостей на лекции

× Многовато домашки за раз, возможно стоит давать меньшими порциями (касается конкретно этого задания)

× Было вообще ничего не понятно про окружение и счетчики, было мало примеров на эту тему. Было бы хорошо показать, как это делать, на лекции (какой-нибудь аналог домашней работы)