

# 1 Центральная предельная теорема

**Теорема 1.1** (Линдберга). Пусть  $\{\xi_k\}_{k \geq 1}$  — независимые случайные величины,  $\forall k \ E\xi_k^2 < +\infty$ , обозначим  $m_k = E\xi_k$ ,  $\sigma_k^2 = D\xi_k > 0$ ;  $S_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$ ;  $D_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$  и  $F_k(x)$  — функция распределения  $\xi_k$ . Пусть выполнено условие Линдберга, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \frac{1}{D_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{\{x: |x-m_k| > \varepsilon D_n\}} (x - m_k)^2 dF_k(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Тогда:  $\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{DS_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), n \rightarrow \infty$

## 2 Гауссовские случайные векторы

**Определение 1.** Случайный вектор  $\vec{\xi} \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$  — гауссовский, если его характеристическая функция  $\varphi_{\vec{\xi}}(\vec{t}) = \exp(i(\vec{m}, \vec{t}) - \frac{1}{2}(\Sigma \vec{t}, \vec{t}))$ ,  $\vec{m} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma$  — симметричная неотрицательно определенная матрица.

**Определение 2.** Случайный вектор  $\vec{\xi}$  — гауссовский, если он представляется в следующем виде:  $\vec{\xi} = A\vec{\eta} + \vec{b}$ , где  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ ,  $A \in \text{Mat}(n \times m)$  и  $\vec{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_m) \sim \mathcal{N}(0, 1)$  и независимы.

**Определение 3.** Случайный вектор  $\vec{\xi}$  — гауссовский, если  $\forall \lambda \in \mathbb{R}^n$  случайный вектор  $(\vec{\lambda}, \vec{\xi})$  имеет нормальное распределение.

**Теорема 2.1** (Об эквивалентности определений гауссовского вектора). Предыдущие три определения эквивалентны.

## 3 Задачи по астрономии

### Задача 3.1 Венера из Петербурга

Параметры орбиты Венеры: большая полуось  $a = 0.7$  а.е., эксцентриситет  $e = 0$ , наклон к плоскости эклиптики  $i = 3^\circ.5$ . Найдите максимально возможную высоту Венеры над горизонтом при наблюдении из Петербурга.

### Задача 3.2 Освещение Марса

В далеком будущем для освещения участка поверхности Марса на ареллоцентрическую (с центром в центре Марса) стационарную орбиту был

выведен спутник с массой, равной 1 тонне, на котором был установлен постоянно работающий прожектор мощностью 10 МВт, узкий луч которого был направлен вниз, на поверхность Марса. Однако оказалось, что для того, чтобы спутник с прожектором совершал один оборот ровно за одни марсианские сутки (24 часа 37 минут), радиус его орбиты необходимо уменьшить по сравнению с обычным радиусом стационарной орбиты. Насколько потребовалось уменьшить радиус орбиты?

### **Задача 3.3 Найдите массу**

Анализ спектра звезды позволил определить ее эффективную температуру  $T$  и ускорение силы тяжести на поверхности  $g$ . Из наблюдений известны также видимая звездная величина звезды  $m$  и годичный параллакс  $p$  (в угловых секундах). Как, имея эти данные, определить массу звезды?

### **Задача 3.4 Масса облака**

Облако в межзвездной среде, состоящее из атомарного водорода, имеет максимальную лучевую концентрацию атомов  $3 \cdot 10^{26} \text{ см}^{-2}$  (количество атомов, находящихся в «столбе» с основанием  $1 \text{ см}^2$ ). Облако имеет форму шара, плотность газа в облаке везде одинакова. При наблюдении облака на длине волны 21 см обнаружилось, что ширина спектральной линии составляет 0.1 мм. Оцените массу облака.

## **4 Отзывы**

- а) В общих чертах это очень хороший и полезный курс
- б) Возможно, имеет смысл делать больше примеров для сложных команд (или сразу более сложные примеры)
- с) Также, наверное, будет полезно делать отдельно шпаргалку со всеми командами, ибо презентации достаточно объемные.
- д) В плане организации и преподаваемого материала все замечательно