

# 基于含参微分方程模型的高压油管压力控制

## 摘 要

如何通过控制高压油泵与喷油嘴的工作方案, 来保证高压油管内油压稳定, 是许多燃气机控制策略中的重要问题. 本文通过对高压油管及高压油泵的结构进行研究, 分析工作过程中各构件内燃油压力变化, 建立了多构件间压力变化微分方程组. 对控制过程中的压力变化进行数值模拟, 确定了不同工作条件下调节阀与活塞的工作策略, 保证了在各类工作条件下高压油管内压力维持稳定, 为实际测试提供了参考.

**对于问题一:** 通过分析高压油管内压力的变化, 利用微元法并结合质量守恒等式, 得到了关于管内燃油密度的微分方程; 再结合压力与密度的关系, 得到了高压油管内压力变化的微分方程模型. 根据弹性模量随压力的变化规律, 我们在**半对数坐标下进行线性插值**, 进而计算出密度与压力之间的分段函数关系. 对微分方程的离散与求解利用**显式差分格式**, 再根据最终稳定中位压力与打开时长的近似正相关趋势, 利用二分法粗搜索单向阀打开时长; 最终在二分法结果附近用小步长细搜索, 得到合适的单向阀单次打开时长为 **0.2846ms**. 用相似的方法分别得到了在  $2s, 5s, 10s$  内升压到  $150\text{MPa}$  的合适单次打开时长 **0.9183ms, 0.7562ms, 0.7511ms**. 其后, 若要将压力稳定在  $150\text{MPa}$ , 合适的打开时长为 **0.7523ms**.

**对于问题二:** 通过分析高压油泵的工作规律, 以及压力与密度关系, 得到了关于高压油管、高压油泵内燃油压力的微分方程组; 由于油管和油泵容积差异大, 导致方程组出现了**刚性问题**, 通过**修正后的显式欧拉格式**, 在加细离散步长的同时节约了部分计算量, 另外, 通过**磨光算子光滑控制函数**, 与修正格式共同有效的**避免了数值计算中的震荡情况**. 通过二分法寻找到最优的凸轮角速度为 **0.0275rad/ms**.

**对于问题三:** 对于新增的喷油嘴, 仅需在原有微分方程组中增加一出油项. 以凸轮角速度控制进油、两个喷油嘴的工作时间相位差控制喷油. 网格化搜索到使得压力在  $100\text{MPa}$  附近波动最小的凸轮角速度和工作相位差分别为 **0.05492rad/ms, 60ms**. 对于再新增的减压阀, 在前微分方程组中再增加一出油项. 以减压阀开启阈值控制减压阀. 固定喷油嘴工作相位差, 网格化搜索得到最佳凸轮角速度为 **0.0555rad/ms**, 减压阀阈值为 **102.5MPa**. 运用减压阀后压力波动比之前减少了约 20%.

在问题的求解中, 通过在合适解附近的细搜索, 分析了结果对参数的敏感性; 通过对格式修正的调整, 分析了结果对数值格式的敏感性.

最终, 对本文所建立的模型进行了讨论分析, 提出了进一步改进建议.

**关键词:** 含参微分方程 刚性问题 压力控制

# 1 问题重述

许多燃气机中会有高压油管的结构. 燃油会通过高压油泵进入高压油管, 再由喷油嘴喷出. 由于燃油进出的间歇性会导致高压油管内燃油量的变化, 从而引起高压油管压力变化, 使得喷出的燃油量出现偏差, 所以需要合理设计燃油进出高压油管的策略, 以保证高压油管内压力的稳态平衡.

要求对下面三个问题进行分析建模:

1. 高压油泵提供恒定压力, 喷油嘴工作情况稳定. 已知高压油管的长度、内径和初始压力, 供油处单向阀 A 口径, 高压油泵提供的压力, 供油处单向阀工作间歇时间, 以及喷油嘴 B 的工作情况. 对以下两种任务给出供油处单向阀的工作时长:
  - (a) 使高压油管内压力基本稳定在初始压力.
  - (b) 在一定时间内时高压油管内压力调整并稳定在指定压力.
2. 高压油泵由凸轮驱动柱塞, 柱塞将燃油压入高压油管. 已知柱塞腔内径, 柱塞运动范围, 凸轮形状, 单向阀 A 开启标准, 喷油嘴喷嘴结构和工作情况. 在问题 1 给出的相关数据下确定凸轮角速度, 以保证高压油管内压力稳定.
3. 调整高压油管结构:
  - (a) 在问题 2 的基础上添加一个相同的喷油嘴 C, 给出喷油和供油的策略使高压油管内燃油压力稳定.
  - (b) 再加入已知口径的单向减压阀 D, 给出高压油泵和减压阀的控制方案使高压油管内燃油压力稳定.

# 2 问题分析

问题的核心在于建立油管内压力的变化模型. 在给定油管体积、密度与压力的变化关系以及燃油进出流量计算公式的条件下, 我们结合质量守恒式, 容易建立相应的微分方程模型, 并进行求解.

## 2.1 问题一: 高压油泵提供稳定压力的情况

问题一给定了高压油泵提供压力, 以及喷油嘴的喷油速率. 可以通过微元法, 将时间分割为小段, 在每一个小时时间段内, 考虑燃油的进出体积与密度, 通过质量守恒可得到关于管内燃油密度的微分方程. 结合燃油压力变化量与密度变化量的关系, 可将其转化为关于管内压力的微分方程.

然而由于题目所给的弹性模量与压力为离散数值对, 我们只能通过拟合或插值补充缺失数据. 在经过分析后, 选择先将弹性模量指数化, 再进行线性插值的方式来补充缺失数据.

任务 a 要求, 通过调整高压油泵单向阀单次开放时间, 来实现稳定高压油管内压力于指定压力. 通过显式欧拉格式离散微分方程求解, 在给定单向阀单次开放时间, 可得到压力随时间的变化情况. 给定指标量, 再通过二分法查找结合定性分析, 即可得到稳定压力的最优参数.

任务 b 为任务 a 拓展, 在指定时间内到达指定压力, 可类似于问题 a 通过二分查找得到最优参数.

## 2.2 问题二：凸轮运动控制高压油泵且针阀控制喷油嘴的情况

与问题一假设的高压油泵提供稳定压力相比, 此处由凸轮运动控制高压油泵会使得单向阀 A 处的压力不恒定, 出油口油量也由针阀抬起高度和高压油管内压力决定. 凸轮极角与极径为离散数值对, 通过线性插值可以得到表达出以凸轮角速度为参数的柱塞运动方程. 同样可利用质量守恒式, 类似于问题一可建立对高压油泵压力的微分方程模型.

针阀高度实际上控制的是出油有效面积, 因此问题一所得方程修改进油 A 端压力项与喷油嘴出油流量项即可得到关于高压油管压力的微分方程模型.

将高压油泵与高压油管内压力变化模型联立, 即得到关于高压油管压力与高压油泵压力的微分方程组. 这里由于高压油泵与高压油管**体积悬殊**, 其压力变化率相差很大, 为**刚性系统**. 在离散求解时我们针对刚性问题修正了显式欧拉格式, 减小了数值震荡, 从而使得方程数值解更为可靠. 此外 A 端压力与油管压力相近时, 解析解可能剧烈震荡, 导致数值求解时需要取极小的时间步长才能缓解数值不稳定的情况, 甚至无法缓解. 通过定性分析**增加约束条件与磨光控制算子**, 我们优化减小了数值震荡, 最终得到了较为可靠的数值解. 其角速度参数优化搜索方式同问题一.

## 2.3 问题三：调整高压油管结构后的情况

对于任务 a, 高压油管有一个进口单向阀 A 和两个出口喷油嘴 B、喷油嘴 C. 此时除了凸轮的角速度, 喷油嘴 B 和喷油嘴 C 的工作相位差也会对压力造成影响. 在模型中增加一个出油项, 并引入两个喷油嘴的工作时间相位差为新的参数, 得到双参数微分方程组. 调整喷油和供油策略即是寻找到合适的 B、C 喷油嘴工作相位差和凸轮角速度, 使得高压油管内压力长期稳定.

对于任务 b, 高压油管有一个进口单向阀 A 和三个出口喷油嘴 B、喷油嘴 C、单向减压阀 D. 根据资料, 减压阀会根据阀前压力, 自动调整阀内结构, 使阀后压力保持恒定[1]. 考虑到实际应用, 我们可给减压阀 D 一个开启压力阈值. 当高压油管内的压力超过该阈值时, 减压阀开启. 题目中要求给出高压油泵和减压阀的控制方案即给出凸轮角速

度和减压阀的开启压力阈值. 可以在任务 a 确定的 B、C 喷油嘴工作相位差进行解答.

### 3 模型假设与符号

#### 3.1 模型假设

1. 凸轮边缘, 针阀运动曲线, 弹性模量随压力的变化曲线是足够光滑的.
2. 在某一燃油体系中, 除了阀门等控制流动的部件外, 压力的平衡是可以立即达到的, 也即在阀门两侧的燃油分别是均匀的.
3. 单向减压阀 D 外部低压燃油的压力恒定, 喷油嘴外环境压力恒定.

#### 3.2 符号约定

模型中所用符号的含义以及单位见表 1.

### 4 模型建立

#### 4.1 高压油泵提供稳定压力的模型

根据注 1., 燃油的压力  $P$  与其密度  $\rho$  之间的关系为

$$\frac{dP}{E(P)} = \frac{d\rho}{\rho}. \quad (1)$$

在小段时间  $\Delta t$  上分析高压油管的燃油进出情况. 设高压油管内体积为  $V$ , 初始时高压油管内燃油密度为  $\rho_1$ , 高压油泵在单向阀 A 处提供的压力为  $P_A$ , 对应燃油密度为  $\rho_A$ , 单向阀 A 处单位时间内的流量为  $Q_A$ , 喷油嘴 B 处单位时间的流量为  $Q_B$ . 在经过  $\Delta t$  之后, 高压油管内的燃油密度为  $\rho$ . 由质量守恒可以得到

$$\rho_1 V + \rho_A Q_A \Delta t - \rho Q_B \Delta t = \rho V,$$

整理得到

$$(\rho - \rho_1)V = (\rho_A Q_A - \rho Q_B)\Delta t.$$

令  $\Delta t$  趋于零可得

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{V}(Q_A \rho_A - Q_B \rho). \quad (2)$$

考虑到由 (1) 可以用压力  $P$  表示密度  $\rho$ , 将 (1) 带入 (2) 得到高压油管内压力变化的微分方程

$$\frac{dP}{dt} = \frac{E(P)}{\rho(P)V}[Q_A \rho_A - Q_B \rho(P)]. \quad (3)$$

表 1: 符号约定

符号	含义	单位
$P$	高压油管内燃油压力	MPa
$t$	时间	ms
$E$	弹性模量	MPa
$\rho$	高压油管内燃油密度	mg/mm <sup>3</sup>
$Q_i$ ( $i$ 可取 $A, B, C, D$ )	单位时间内通过 $i$ 处的流量, $i$ 可取 $A, B, C, D$	mm <sup>3</sup> /ms
$\rho_A$	柱塞腔内燃油密度	mg/mm <sup>3</sup>
$P_A$	柱塞腔内燃油压力	MPa
$C$	流量系数	
$S_i$ ( $i$ 可取 $A, B, C, D$ )	$i$ 处有效流通面积, $i$ 可取 $A, B, C, D$	mm <sup>2</sup>
$T$	单向阀 A 的工作时长	ms
$t_0$	单向阀 A 的间歇时长	ms
$\Phi_T$	带参数 $T$ 的控制函数	
$V_1$	柱塞运动到最高点时柱塞腔残留体积	mm <sup>3</sup>
$d$	柱塞直径	mm
$r$	凸轮极径	mm
$r_{max}$	凸轮极径最大值	mm
$\omega$	凸轮角速度	rad/ms
$f_\omega$	带参数 $\omega$ 的函数, 自变量为时间, 因变量为凸轮极径	
$\Phi_A$	压力控制单向阀 A 时的控制函数	
$P_e$	喷油嘴外环境的压力	MPa
$d_0$	喷油嘴针阀直径	mm
$d_1$	喷油嘴喷口直径	mm
$\theta$	密封座半角	
$h$	喷油嘴针阀升程	mm
$\Phi_D$	压力控制单向阀 D 时的控制函数	
$\phi$	喷油嘴 B 和喷油嘴 C 的工作相位差	ms
$P_{low}$	单向减压阀 D 外部低压燃油压力	MPa
$P_{bar}$	单向减压阀 D 开始工作燃油压力阈值	MPa

(3) 中  $Q_B$  是关于时间的函数, 由题目所给数据可得. 根据题目中注 2., 当单向阀 A 打开时, 单位时间内从此处进入高压油管的流量为  $CS_A\sqrt{\frac{2(P_A-P)}{\rho_A}}$ , 其中  $C$  为流量系数、 $S_A$  为小孔面积. 单向阀打开或关闭受控制函数  $\Phi_T$  控制.  $\Phi_T$  是一个参数为  $T$ 、周期为  $T+t_0$  的周期函数, 其中  $t_0$  为单向阀工作后的间歇时长.  $\Phi_T$  具体表示为

$$\Phi_T(t) = \mathbb{1}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n(T+t_0), n(T+t_0)+T]} \quad (4)$$

得到  $Q_A$  的表达式为

$$Q_A = CS_A\sqrt{\frac{2(P_A-P)}{\rho_A}}\Phi_T. \quad (5)$$

综合上述的 (1),(3),(4),(5) 得到参数为单向阀 A 工作时长  $T$ , 高压油泵提供稳定压

力时, 高压油管内压力变化模型为

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \frac{E(P)}{\rho V} [Q_A \rho_A - Q_B \rho], \\ \frac{dP}{E(P)} = \frac{d\rho}{\rho}, \\ Q_A = C S_A \sqrt{\frac{2(P_A - P)}{\rho_A}} \Phi_T, \\ \Phi_T(t) = \mathbb{1}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n(T+t_0), n(T+t_0)+T]} \end{cases} \quad (6)$$

## 4.2 凸轮控制高压油泵时且针阀控制喷油嘴的模型

凸轮控制高压油泵的部分是一个变容量容器压力变化模型. 设柱塞直径为  $d$ , 柱塞运动到最高点时柱塞腔内剩余体积为  $V_1$ , 凸轮边缘最长极径为  $r_{max}$ . 在小时间段  $\Delta t$  上分析, 设初始时凸轮固定点到柱塞的距离  $r_1$ , 即为此刻竖直向上的凸轮极径, 初始时柱塞腔内燃油密度为  $\rho_{A0}$ , 单位时间内通过单向阀 A 的流量为  $Q_A$ . 经过时间  $\Delta t$  后, 设柱塞腔内燃油密度为  $\rho'_A$ , 凸轮固定点到柱塞的距离为  $r_2$ .

根据质量守恒我们可以得到

$$\rho'_A [V_1 + (r_{max} - r_2) \pi (\frac{d}{2})^2] = \rho_{A0} [V_1 + (r_{max} - r_1) \pi (\frac{d}{2})^2] - \rho_{A0} Q_A \Delta t,$$

整理一下得到

$$[V_1 + r_{max} \pi (\frac{d}{2})^2] (\rho'_A - \rho_{A0}) - \pi (\frac{d}{2})^2 (\rho'_A r_2 - \rho_{A0} r_1) = -\rho_{A0} Q_A \Delta t.$$

再将  $\Delta t \rightarrow 0$ , 得到

$$[V_1 + r_{max} \pi (\frac{d}{2})^2] d\rho_A - \pi (\frac{d}{2})^2 d(\rho_A r) = -\rho_A Q_A dt. \quad (7)$$

根据附件 1. 凸轮边缘曲线数据, 引入参数变量凸轮角速度  $\omega$ , 我们可以得到参数为  $\omega$  时凸轮固定点到柱塞的距离关于时间的函数

$$r = f_\omega(t). \quad (8)$$

在理论分析时由假设 1, 函数  $f_\omega(t)$  可导. 将函数  $r = f_\omega(t)$  带入 (7), 得到

$$[V_1 + (r_{max} - r) \pi (\frac{d}{2})^2] d\rho_A - \pi (\frac{d}{2})^2 \rho_A f'_\omega dt = -\rho_A Q_A dt,$$

整理得到柱塞腔内燃气密度变化微分方程

$$\frac{d\rho_A}{dt} = \frac{\rho_A [\pi (\frac{d}{2})^2 f'_\omega - Q_A]}{V_1 + (r_{max} - r) \pi (\frac{d}{2})^2}. \quad (9)$$

再由 (1) 带入 (9), 得到柱塞腔内燃气压力变化微分方程

$$\frac{dP_A}{dt} = \frac{E(P_A)[\pi(\frac{d}{2})^2 f'_\omega - Q_A]}{V_1 + (r_{max} - r)\pi(\frac{d}{2})^2}. \quad (10)$$

相比 (6) 中的  $Q_A$ , 当前模型  $Q_A$  的控制函数需要调整为

$$\Phi_A(t) = \mathbb{1}_{\{P_A > P\}}, \quad (11)$$

其中  $P$  为高压油管内的燃油压力. 因此  $Q_A$  调整为

$$Q_A = CS_A \sqrt{\frac{2(P_A - P)}{\rho_A}} \Phi_A \quad (12)$$

高压油管中的压力变化仍满足 (3), 其中  $Q_A$  为 (12). 由于喷油嘴 B 的针阀运动引起喷油嘴 B 的有效喷口面积  $S_B$  变化,  $Q_B$  表示为

$$Q_B = CS_B \sqrt{\frac{2(P - P_e)}{\rho}}, \quad (13)$$

其中  $P_e$  表示喷油嘴 B 外环境的压力, 在运用模型中可以用标准大气压代替.  $S_B$  与针阀升程  $h$  有关, 设喷油嘴针阀直径为  $d_0$ , 喷口直径为  $d_1$ , 密封座圆锥半角为  $\theta$ , 针阀升程为  $h$ . 根据示意图 1, 针阀与密封座的空隙面积为  $\pi[(\frac{d_0}{2 \tan \theta} + h) \tan \theta]^2 - \pi(\frac{d_0}{2})^2$ , 喷口面积为

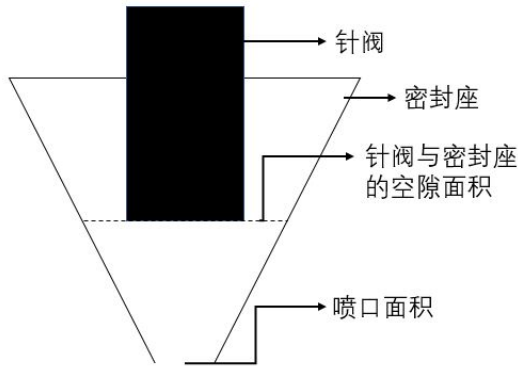


图 1: 喷油嘴 B 针阀上升示意图

$\pi(\frac{d_1}{2})^2$ , 喷油嘴 B 的有效喷口面积应为两者之中的最小值, 故喷油嘴 B 的有效喷口面积为

$$S_B = \min\{\pi[(\frac{d_0}{2 \tan \theta} + h) \tan \theta]^2 - \pi(\frac{d_0}{2})^2, \pi(\frac{d_1}{2})^2\}. \quad (14)$$

结合 (3),(8),(10),(11),(11),(12),(13),(14), 可以得到参数为凸轮角速度  $\omega$ , 凸轮控制

高压油泵且针阀控制喷油嘴时, 高压油管内压力变化的模型

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \frac{E(P)}{\rho V} [Q_A \rho_A - Q_B \rho], \\ \frac{dP_A}{dt} = \frac{E(P_A) [\pi(\frac{d}{2})^2 f'_\omega - Q_A]}{V_1 + (r_{max} - r) \pi(\frac{d}{2})^2}, \\ \frac{dP}{E(P)} = \frac{d\rho}{\rho}, \\ r = f_\omega(t), \\ Q_A = C S_A \sqrt{\frac{2(P_A - P)}{\rho_A}} \Phi_A, \\ \Phi_A(t) = \mathbb{1}_{\{P_A > P\}}, \\ Q_B = C S_B \sqrt{\frac{2(P - P_e)}{\rho}}, \\ S_B = \min\{\pi[(\frac{d_0}{2 \tan \theta} + h) \tan \theta]^2 - \pi(\frac{d_0}{2})^2, \pi(\frac{d_1}{2})^2\}. \end{cases} \quad (15)$$

### 4.3 调整高压油管结构后的模型

#### 4.3.1 增加喷油嘴 C

增加一个喷油嘴 C 即在 (3) 中增加了一个出油项. 设喷油嘴 C 的喷口面积为  $S_C$ , 单位时间通过喷油口 C 的流量为  $Q_C$ . 喷油嘴 B、C 的喷油规律相同, 可以刻画为  $S_B$  和  $S_C$  在时间上相差一个相位差  $\phi$ , 表示为

$$S_C(t) = S_B(t + \phi). \quad (16)$$

结合 (15) 得到参数为凸轮角速度  $\omega$  和喷油嘴工作相位差  $\phi$  的高压油管压力变化微分模型

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \frac{E(P)}{\rho V} [Q_A \rho_A - Q_B \rho - Q_C \rho], \\ \frac{dP_A}{dt} = \frac{E(P_A) [\pi(\frac{d}{2})^2 f'_\omega - Q_A]}{V_1 + (r_{max} - r) \pi(\frac{d}{2})^2}, \\ \frac{dP}{E(P)} = \frac{d\rho}{\rho}, \\ r = f_\omega(t), \\ Q_A = C S_A \sqrt{\frac{2(P_A - P)}{\rho_A}} \Phi_A, \\ \Phi_A(t) = \mathbb{1}_{\{P_A > P\}}, \\ Q_B = C S_B \sqrt{\frac{2(P - P_e)}{\rho}}, \\ S_B = \min\{\pi[(\frac{d_0}{2 \tan \theta} + h) \tan \theta]^2 - \pi(\frac{d_0}{2})^2, \pi(\frac{d_1}{2})^2\}, \\ Q_C = C S_C \sqrt{\frac{2(P - P_e)}{\rho}}, \\ S_C(t) = S_B(t + \phi). \end{cases} \quad (17)$$



### 4.3.2 增加喷油嘴 C、单向减压阀 D

在问题分析中提出了对单向减压阀 D 的控制可以是选择一个开启压力阈值  $P_{bar}$ , 当高压油管内燃油压力超过阈值后, 减压阀 D 开启. 减压阀外部为低压燃油, 由假设 3, 设减压阀外燃油压力为定值  $P_{low}, P_{low} < P_{bar}$ . 设单位时间通过单向减压阀 D 的流量为  $Q_D$ . 类比  $D_A, Q_D$  中包含控制函数

$$\Phi_D(t) = \mathbb{1}_{\{P > P_{bar}\}}.$$

结合 (17) 得到此时的高压油管内燃油压力变化微分模型

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dt} = \frac{E(P)}{\rho V} [Q_A \rho_A - Q_B \rho - Q_C \rho - Q_D \rho], \\ \frac{dP_A}{dt} = \frac{E(P_A) [\pi (\frac{d}{2})^2 f'_\omega - Q_A]}{V_1 + (r_{max} - r) \pi (\frac{d}{2})^2}, \\ \frac{dP}{E(P)} = \frac{d\rho}{\rho}, \\ r = f_\omega(t), \\ Q_A = C S_A \sqrt{\frac{2(P_A - P)}{\rho_A}} \Phi_A, \\ \Phi_A(t) = \mathbb{1}_{\{P_A > P\}}, \\ Q_B = C S_B \sqrt{\frac{2(P - P_e)}{\rho}}, \\ S_B = \min \{ \pi [(\frac{d_0}{2 \tan \theta} + h) \tan \theta]^2 - \pi (\frac{d_0}{2})^2, \pi (\frac{d_1}{2})^2 \}, \\ Q_C = C S_C \sqrt{\frac{2(P - P_e)}{\rho}}, \\ S_C(t) = S_B(t + \phi). \\ Q_D = C S_D \sqrt{\frac{2(P - P_{low})}{\rho}} \Phi_D, \\ \Phi_D(t) = \mathbb{1}_{P > P_{bar}}. \end{array} \right. \quad (18)$$

## 5 模型应用

### 5.1 问题一求解

#### 5.1.1 离散格式

为了数值求解我们需要在时间尺度上离散 (6) 中的第一式. 在离散时需要得到  $P$  与  $\rho$  的相互表示, 为此我们先处理 (1).

通过附件 3, 我们可以获得  $P \in [0, 200]$  且单位间隔为 0.5 情况下  $E$  的值, 为获取缺失数据点, 我们对其进行插值处理.

$P$  与  $E, \ln E$  的关系如图 2(a) 蓝色曲线所示, 可见  $P$  与  $E$  有明显的非线性关系. 在对  $E$  取对数后, 近乎线性关系, 但最小二乘拟合后还原为  $P$ - $E$  关系效果不好, 见 2(a) 红色曲线. 因此我们考虑对  $P$  与  $\ln E$  进行分段线性插值, 其效果见 2(a) 黑色点所示.

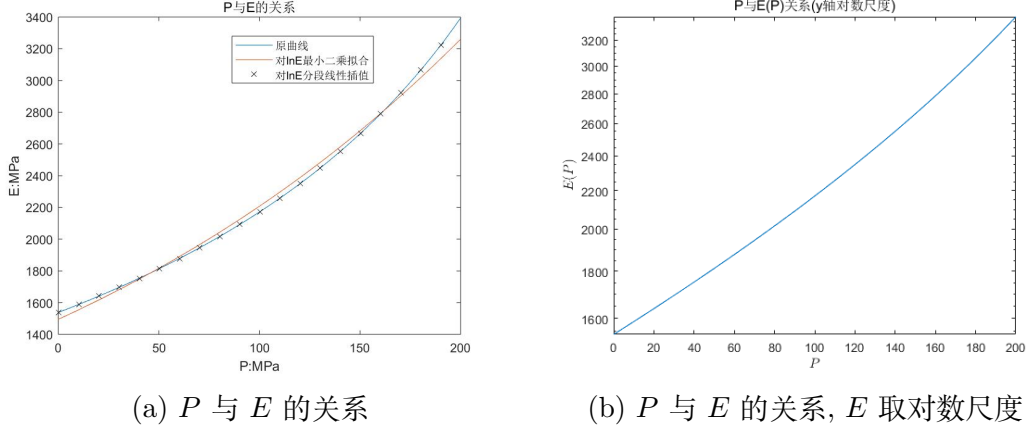


图 2:  $P$  与  $E, \ln E$  的关系

在区间  $[P_1, P_2]$  上, 线性插值方程为

$$\frac{\ln E - \ln E_1}{\ln E_2 - \ln E_1} = \frac{P - P_1}{P_2 - P_1}$$

记  $C_1 = \frac{\ln E_2 - \ln E_1}{P_2 - P_1}$ ,  $C_2 = -P_1 \cdot C_1 + \ln E_1$ .

则有

$$E = e^{C_1 P + C_2}, \quad P \in [P_1, P_2]. \quad (19)$$

因此, 对于每一段  $P \in [P_1, P_2]$ , 结合 (1), (19), 我们有

$$\frac{dP}{e^{C_1 P + C_2}} = \frac{d\rho}{\rho},$$

积分可得

$$\rho(P) = \exp\left(-\frac{1}{C_1}(e^{-C_1 P - C_2} - C)\right), \quad (20)$$

其中  $C = e^{-C_1 P_0 - C_2} + C_1 \ln \rho_0$ , 每一段的  $P_0, \rho_0$  由题中已给初值  $P = 100, \rho = 0.850$  通过迭代计算 (20) 得到.

然后在时间尺度上离散 (3), 通过显式欧拉差分格式 [2] 得到

$$P_{t+\Delta t} - P_t = \Delta t \left[ \frac{E(P_t)}{\rho(P_t)V} (Q_{A,t} \rho_A - Q_{B,t} \rho(P_t)) \right], \quad (21)$$

其中  $P_{t+\Delta t}$  表示  $t + \Delta t$  时刻高压油管内燃油压力,  $P_t$  表示  $t$  时刻高压油管内燃油压力,  $Q_{A,t}$  表示  $Q_A$  在  $t$  时刻的值,  $Q_{B,t}$  表示  $Q_B$  在  $t$  时刻的值. 因此, 结合 (4), (5), (19),

(20), (21), 我们可以得到可进行数值计算的离散差分格式

$$\begin{cases} P_{t+\Delta t} - P_t = \Delta t \left[ \frac{E(P_t)}{\rho(P_t)V} (Q_{A,t}\rho_A - Q_{B,t}\rho(P_t)) \right], \\ \rho(P_t) = \exp\left(-\frac{1}{C_1}(e^{-C_1 P_t - C_2} - C)\right), \\ E(P_t) = e^{C_1 P_t + C_2}, \\ Q_{A,t} = C S_A \sqrt{\frac{2(P_A - P_t)}{\rho_A}} \Phi_T, \\ \Phi_T(t) = \mathbb{1}_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n(T+t_0), n(T+t_0)+T]}. \end{cases} \quad (22)$$

$Q_B$  可以由题目所给数据得到表达式

$$Q_B = \begin{cases} 100(t - 100n) & t \in [100n, 100n + 0.2), \\ 20 & t \in [100n + 0.2, 100n + 2.2), \\ -100(t - 100n) + 240 & t \in [100n + 2.2, 100n + 2.4), \\ 0 & t \in [100n + 2.4, 100(n + 1)), \end{cases} \quad n \in \mathbb{N},$$

其中  $Q_B$  的单位为  $\text{mm}^3/\text{ms}$ ,  $t$  的单位为  $\text{ms}$ .

### 5.1.2 算法思路 and 结果

针对**任务 a**, 为刻画压力在较长时间段的稳定, 我们选取 50s 为测试时间段. 以 0.01ms 为步长, 计算出高压油管内的燃油压力.

考虑到最终的平均压力与工作周期  $T$  大致有正相关趋势, 我们首先用二分法进行做粗搜索, 得到单向阀 A 工作时间  $T$  的可能值. 考虑到喷油嘴 B 的完整工作周期为 100ms, 我们取测试时间段最后 2s 的压力作为参考.

参考信息可以选取最后 2s 压力的平均值, 或者最后 2s 压力最大值和最小值的均值. 考虑到单向阀 A 和喷油嘴 B 的共同作用可能会使得高压油管内压力呈现某种周期变化, 2s 不能恰好包含整数个周期, 计算出的平均值不能很好地表示出均值, 因此我们以最后 2s 的  $\frac{1}{2}(P_{\max} + P_{\min})$  为参考值.

通过二分法快速找出使得参考值落在  $[99\text{MPa}, 101\text{MPa}]$  的  $T$ . 经过 MATLAB 计算我们得该值为 0.2846ms. 在  $T = 0.2846$  时压力的变化结果如图 3所示.

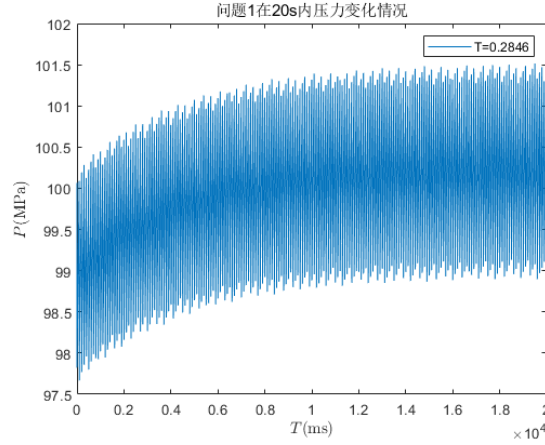


图 3: 问题 1 中压力在 20s 下的变化情况

再以 0.2846ms 为中心, 0.0010ms 为半径进行细搜索得到可能区间. 取参考时间段最后 2s 压力的平均值、最大值和最小值, 得到图 4. 该区间所得压力平均值、最大值和最小值都在 100MPa 附近, 可将 **0.2846ms** 作为可行解.

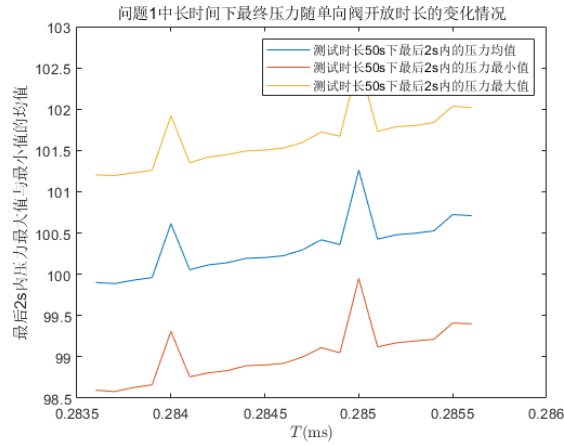
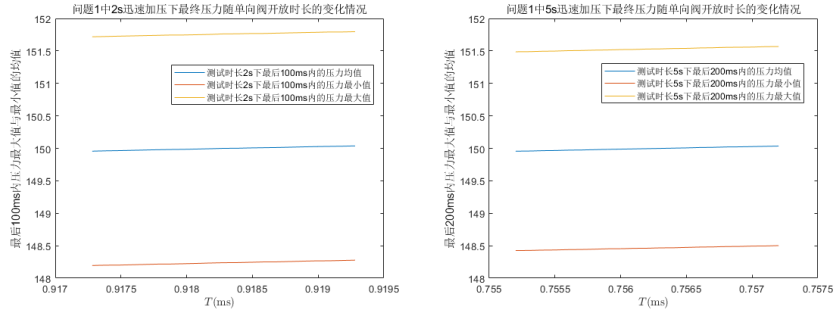


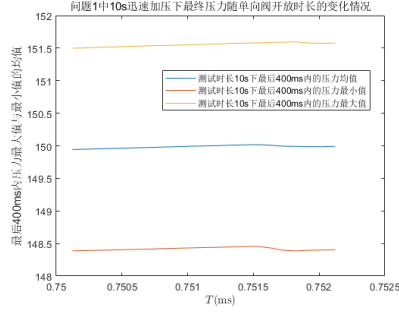
图 4

针对**任务 b**, 同以上思路, 以 2s 为测试时间段. 以 0.01ms 为离散格式时间步长, 算出高压油管内燃油压力. 粗搜索得到使最后 100ms 的  $\frac{1}{2}(P_{max} + P_{min})$  落在  $[(150 - 1.5)\text{MPa}, (150 + 1.5)\text{MPa}]$  的  $T$ . 经过 MATLAB 计算我们得该值为 0.9183ms. 对于 5s 和 10s 为测试时间段的情形, 只需将参考时间分别更改为最后 200ms 和最后 400ms 即可, 得到可能的  $T$  分别为 0.7562ms, 0.7511ms.

细化得到的结果, 可视化为图 5. 从图中可以看出 **0.9183ms, 0.7562ms, 0.7511ms** 可分别作为  $s$  使得高压油管内燃油压力经过 2s, 5s, 10s 从 100 MPa 升到 150 MPa 的可行  $T$ .



(a) 2s 达到 150MPa 的可行  $T$  (b) 5s 达到 150MPa 的可行  $T$



(c) 10s 达到 150MPa 的可行  $T$

图 5

在高压油管内燃油压力达到 150 MPa 后, 需要调整单向阀 A 的工作时间  $T$ , 以保持压力稳定. 此时的计算方法同任务 a 相同, 只需把初始高压油管内燃油压力从 100 MPa 改为 150 MPa, 粗搜索的目标区间从 [99MPa, 100MPa] 改为 [(150 - 1.5)MPa, (150 + 1.5)MPa]. 经过 MATLAB 计算, 参考图 6 得到可行解为 **0.7523ms**.

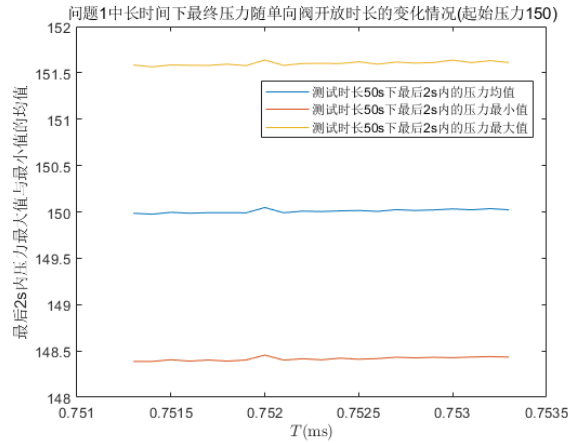


图 6

## 5.2 问题二求解

### 5.2.1 离散格式的初步建立

为了求解微分方程组 (15), 我们同样对其进行数值离散处理. 类似 (21), 我们可以得到 (15) 中第一式的离散格式

$$P_{t+\Delta t} - P_t = \Delta t \left[ \frac{E(P_t)}{\rho(P_t)V} (Q_{A,t}\rho_{A,t} - Q_{B,t}\rho(P_t)) \right]. \quad (23)$$

而对于 (15) 中第二式, 我们同样对其离散, 可以得到离散格式

$$P_{A,t+\Delta t} - P_{A,t} = \Delta t \cdot \frac{E(P_{A,t})[\pi(\frac{d}{2})^2 \hat{f}_{\omega,t} - Q_{A,t}]}{V_1 + (r_{max} - r_{\omega,t})\pi(\frac{d}{2})^2}, \quad (24)$$

其中

$$\hat{f}_{\omega,t} = \frac{r_{\omega,t+\frac{\tau}{2}} - r_{\omega,t-\frac{\tau}{2}}}{\tau}$$

为利用中心差商得到的近似.

因此, 结合 (8), (11), (12), (13), (19), (20), (23), (24), 我们得到了初步的离散格式 (下文将对其修正)

$$\begin{cases} P_{t+\Delta t} - P_t = \Delta t \left[ \frac{E(P_t)}{\rho(P_t)V} (Q_{A,t}\rho_{A,t} - Q_{B,t}\rho(P_t)) \right], \\ P_{A,t+\Delta t} - P_{A,t} = \Delta t \cdot \frac{E(P_{A,t})[\pi(\frac{d}{2})^2 \hat{f}_{\omega,t} - Q_{A,t}]}{V_1 + (r_{max} - r_{\omega,t})\pi(\frac{d}{2})^2}, \\ \rho(P_t) = \exp(-\frac{1}{C_1}(e^{-C_1 P_t - C_2} - C)), \quad (\text{对 } \rho_A, P_A \text{ 也成立}) \\ E(P_t) = e^{C_1 P_t + C_2}, \quad (\text{对 } P_A \text{ 也成立}) \\ r_t = f_{\omega}(t), \\ Q_{A,t} = C S_A \sqrt{\frac{2(P_{A,t} - P_t)}{\rho_{A,t}}} \Phi_{A,t}, \\ \Phi_{A,t} = \mathbb{1}_{\{P_A > P\}}, \\ Q_{B,t} = C S_{B,t} \sqrt{\frac{2(P_t - P_e)}{\rho_t}}. \end{cases} \quad (25)$$

### 5.2.2 格式的修正

#### 1. 针对刚性问题的修正

计算 (25), 即计算一个右端非线性的常微分方程组的离散格式. 由于实际问题中高压油管与高压油泵体积差异悬殊, 可能为**刚性系统**, 进而在取一般的差分步长时可能造成数值不稳定.

我们通过对 (24) 进行修正来避免这样的问题. 我们对其进行额外的加细

$$P_{A,t+\frac{(j+1)\Delta t}{k}} - P_{A,t+\frac{j\Delta t}{k}} = \frac{\Delta t}{k} \cdot \frac{E(P_{A,t+\frac{j\Delta t}{k}})[\pi(\frac{d}{2})^2 \hat{f}_{\omega,t+\frac{j\Delta t}{k}} - Q_{A,t+\frac{j\Delta t}{k}}]}{V_1 + (r_{max} - r_{\omega,t+\frac{j\Delta t}{k}})\pi(\frac{d}{2})^2}, \quad j = 0, \dots, (k-1), \quad (26)$$

其中  $k$  为加细的程度, 在我们的计算中取  $k$  约为 40-100. 由此可知此方法在减少步长时节约了约一半的计算量. 经过修正后的格式与原格式的波动差异如图 7 所示, 图中  $\Delta t = 0.01, k = 100$ , 且其中  $\Delta P_A = P_{A,t+\Delta t} - P_{A,t}$ . 可见修正后明显减少了数值误差带来的波动.

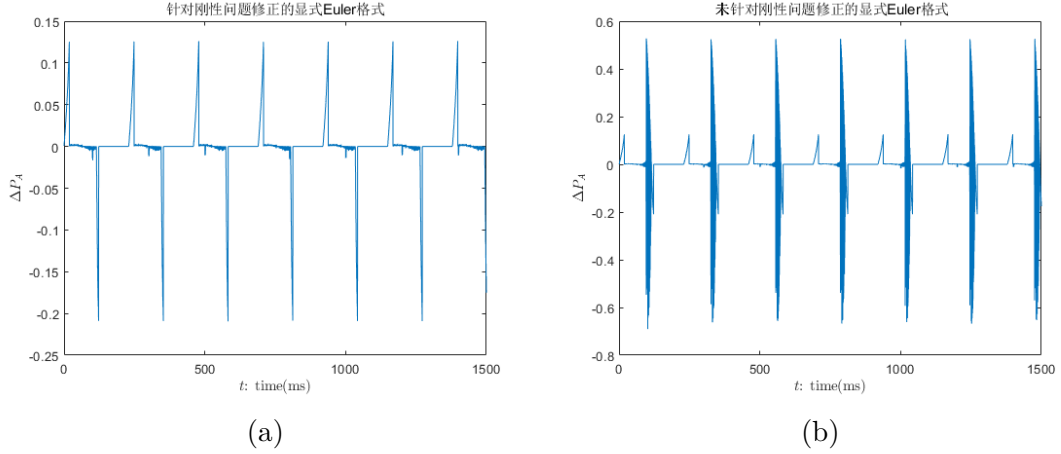


图 7: 针对刚性问题修正前后的波动对比

## 2. 针对柱塞补充低压燃油的修正

在柱塞运动到下止点时, 低压燃油会充满柱塞腔, 将  $P_A$  补充至 0.5MPa. 因此在 (26) 中  $P_A$  需要一定的修正. 我们将其修正为

$$P_{A,t+\frac{(j+1)\Delta t}{k}} = \max\left\{P_{A,t+\frac{j\Delta t}{k}} + \frac{\Delta t}{k} \cdot \frac{E(P_{A,t+\frac{j\Delta t}{k}})[\pi(\frac{d}{2})^2 \hat{f}_{\omega,t+\frac{j\Delta t}{k}} - Q_{A,t+\frac{j\Delta t}{k}}]}{V_1 + (r_{max} - r_{\omega,t+\frac{j\Delta t}{k}})\pi(\frac{d}{2})^2}, 0.5\right\}, \quad j = 0, \dots, (k-1). \quad (27)$$

这样的修正是合理的. 在步长足够小 (0.01 足矣) 时,  $P_A$  的单步变化量不超过  $\Delta t \cdot \max_t(\Delta P_t) \ll (100 - 0.5)$ . 因此当下一步即将触发低压燃油补充修正时  $P_A$  已远小于 100MPa, 单向阀必然关闭. 且直到柱塞再次向上运动前都会保持  $P_A = 0.5$ MPa.

## 3. 对于控制函数的光滑

控制函数的不光滑也会使得数值结果出现不稳定的震荡, 具体表现为在连续的几个时间步长内单向阀开闭导致流量大小不连续, 进而带来数值计算的误差. 我们使

用磨光算子光滑控制函数. 光滑后的控制函数为

$$\hat{\Phi} = \begin{cases} \frac{1}{1+100^{P-P_A}}, & P \geq P_A, \\ 0, & P < P_A. \end{cases} \quad (28)$$

光滑后的控制函数不会给我们的计算结果带来很大的误差, 在  $\omega = 0.0275$  (此为第二问结果, 将在下一节展示) 下通过对是否使用光滑后的控制函数进行结果的差异分析, 如图 8所示. 误差不超过 0.01MPa, 因此是可行的.

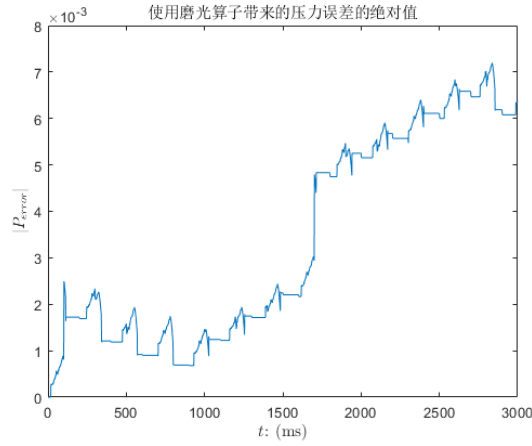


图 8: 使用磨光算子带来的压力的误差大小

### 5.2.3 问题二结果

数值模拟结果如图 9所示. 我们选取均值在 100MPa 附近且最大最小值相差较小的点作为最优参数, 合适的选取结果为  $\omega = 0.0275\text{rad/ms}$ . 这个参数下的压力变化情况如图 10所示.

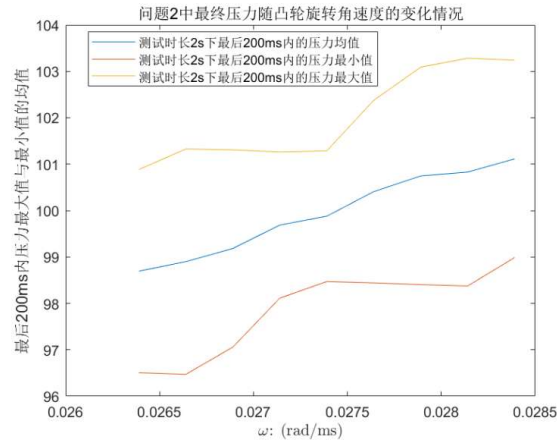


图 9: 最终压力随角速度的变化情况



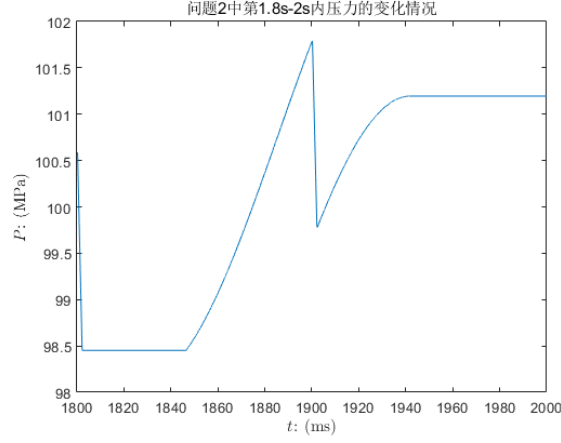


图 10: 压力在 1.8-2s 内的变化情况

### 5.3 问题三求解

#### 5.3.1 离散格式的建立

在增加喷油嘴及增加减压阀后, 除在 (25) 中第一式增加一项带相位差的排出量与另一项减压阀带来的排出量外其余类似, 不再赘述. 针对第 1, 2 小问, (25) 中第一式分别修改为

$$P_{t+\Delta t} - P_t = \Delta t \left[ \frac{E(P_t)}{\rho(P_t)V} (Q_{A,t}\rho_{A,t} - Q_{B,t}\rho(P_t) - Q_{C,t,\phi}\rho(P_t)) \right]. \quad (29)$$

$$P_{t+\Delta t} - P_t = \Delta t \left[ \frac{E(P_t)}{\rho(P_t)V} (Q_{A,t}\rho_{A,t} - Q_{B,t}\rho(P_t) - Q_{C,t}\rho(P_t) - Q_{D,t,P_{bar}}\rho(P_t)) \right]. \quad (30)$$

无需差分式分别同 (17), (18), 不再赘述.

#### 5.3.2 问题三任务 1 结果

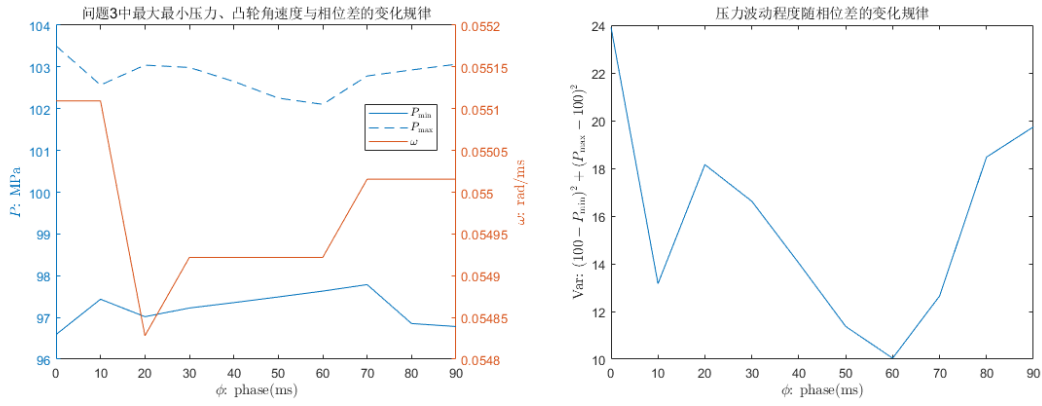
由于单个喷油嘴的工作周期为 100ms, 考虑在相位差不同值下寻找使得在运行 5s 下使最后 500ms 的  $\frac{1}{2}(P_{max} + P_{min})$  尽可能接近 100MPa 的  $\omega$ . 运行结果如图 11所示. 可见压力波动程度 (见图 11b中 y 轴) 在  $\phi$  为 50, 60, 70(ms) 的时候较小, 因此, 取  $\phi = 60(\text{ms})$  时, 可以尽可能的使压力的最大, 最小值接近 100MPa, 此时  $\omega = 0.05492\text{rad/ms}$ .

#### 5.3.3 问题三任务 2 结果

在加入单向减压阀 D 后, 减压阀仅在压力超过某个阈值  $P_{bar}$  时工作, 因此我们网格搜索部分合适的  $P_{bar}$  值, 再根据  $P_{bar}$  值确定最佳的  $\omega$  值. 结果如 2所示.

当  $P_{bar} \leq 101\text{MPa}$  时, 由于单向阀迅速减压使得  $\frac{1}{2}(P_{max} + P_{min})$  难以维持稳定在 100MPa(二分法搜索导致  $P > 200$ , 超出可用数据范围), 故表中给出了 101.5MPa 以上的结果, 由 11a可知最大压力不会超过 103MPa, 因此表中仅给至 103MPa.

当  $P_{bar}$  接近 100MPa 时, 可见  $\omega$  急剧上升, 这是由于为了维持稳定在 100MPa 附近, 高压油管与油泵不断在低压油路间压油、放油, 为了避免不必要的浪费, 此处可取



(a)  $P_{max}, P_{min}, \omega$  随  $\phi$  的变化规律

(b) 压力最大波动程度随  $\phi$  的变化规律

图 11: 问题 3.1 结果

$P_{bar} = 102.5\text{MPa}$ , 相应的  $\omega = 0.0555\text{rad/ms}$ . 极大极小偏差与不使用减压阀相比减少了约 20%.

表 2: 问题三任务 2 结果

$P_{bar}$ (MPa)	$\omega$ (rad/ms)	$P_{max}$ (MPa)	$P_{min}$ (MPa)	$(100 - P_{min})^2 + (P_{max} - 100)^2$ (MPa)
101.5	0.0928	101.5024	98.6226	4.1545
102	0.0812	102.0021	97.9450	8.2317
102.5	0.0555	102.1798	97.8983	9.1687
103	0.0550	102.5328	97.3849	13.2539

## 6 模型评价

### 6.1 模型优点及创新

1. 模型建立时全面地考虑了燃油压力、密度、体积等变化的相互作用, 有充分的理论分析过程, 模型建立可靠.
2. 基础的高压油管压力变化模型较为简单, 可根据出油和进油结构的更改合理调整, 应用扩展能力强.
3. 针对出现的刚性问题提出了修正后的显式欧拉格式, 减小了数值振荡以及计算量, 使所得计算结果更为可靠.

### 6.2 模型不足及改进建议

1. 由于题目中高压油管和高压油泵的容积都较小, 为计算方便模型忽略了燃油在容器内的扩散时间. 如需将该模型应用到其他不能忽略液体扩散时间的情况, 需要对模型补充液体扩散方程.

2. 刚体系统的计算我们对显式欧拉格式进行一定修正进行数值求解, 但其时间步长的比例我们设为定值. 可以 Rosenbrock 类型的算法自适应调整步长, 来进一步优化数值求解过程. 还可以采用 ode23 这类数值格式来得到更高精度的数值结果.
3. 考虑到实际生活中减压阀对压力的测量会出现误差, 导致开启时间与预设不同, 本模型未考虑此影响. 可以考虑对减压阀开启阈值增加随机扰动, 得到更符合实际的最优参数.

## 参考文献

- [1] 河海大学《水利大辞典》编辑修订委员会. 水利大辞典:[M]. 上海: 上海辞书出版社,2015-10.
- [2] 陈文斌, 程晋, 吴新明, 李立康. 微分方程数值解:[M]. 上海: 复旦大学出版社,2014-08.
- [3] 姜启源, 谢金星, 叶俊. 数学模型 (第五版):[M]. 北京: 高等教育出版社,2018-05.

## A 附录

代码使用说明: 在全部代码文件夹下放入三个附件数据, 运行的主程序为 solve1 solve4.m;  
另外部分图像由 figure\_P\_to\_E.m 画出.

代码列表

t\_to\_r.m

time\_to\_height.m

solve4.m

solve3.m

solve2.m

solve1.m

Q\_out\_1.m

Q\_function.m

p\_to\_rho.m

p\_to\_E.m

p\_d\_function4.m

p\_d\_function3.m

p\_d\_function2.m

pA\_d\_function4.m

pA\_d\_function3.m

pA\_d\_function2.m

height\_to\_S.m

generate\_Cs.m

figure\_P\_E.m

Explicit\_Euler4.m

Explicit\_Euler3.m

Explicit\_Euler2\_2.m

Explicit\_Euler2.m

explicit\_Euler1.m

d\_function1.m

control\_function4\_2.m

control\_function4.m

control\_function3.m

control\_function2.m

Control\_Function1.m

Binary\_search.m

## B 代码

time\_to\_height.m

```
1 function h = time_to_height(t, C3, C4)
2
3 % 基于插值生成的在给定区间上的时间与升程的函数关系
4 t_main = floor(t / 0.01);
5 % add 1 to match the index of C3, C4.
6 t_main = mod(t_main, 10000) + 1;
7 t = mod(t, 100);
8 if t_main ≥ 246
9 h = 0;
10 else
11 h = C3(t_main) * t + C4(t_main);
12 end
13
14 end
```

t\_to\_r.m

```
1
2 function r = t_to_r(t, w, theta0, C5, C6)
3 theta = t * w + theta0;
4 % 基于插值生成的在给定区间上的角度与极径的函数关系
5 theta = mod(theta, 2*pi);
6 theta_main = floor(theta / 0.01) + 1;
7 if theta_main == 629
8 theta_main = 628;
9 end
10 % add 1 to match the index of C5, C6.
11 r = C5(theta_main) .* theta + C6(theta_main);
12
13 end
```

solve4.m

```
1 clear;
2 % 流量系数
3 C_flow = 0.85;
4 % 油管体积
5 V = 500 * pi * (10 / 2)^2;
6 % 油泵最小剩余油量
```

```

7     V1 = 20;
8     % A 处面积
9     A = pi * (1.4 / 2)^2;
10    % 油泵底直径
11    dA = 5;
12    % 油管初始压力
13    p0 = 100;
14    % 油泵初始压力
15    pA0 = 0.5;
16    % 大气压力
17    p_e = 0.1;
18    % 初始角度
19    theta0 = pi;
20    % 回复压力
21    pA_min = 0.5;
22    % 最大极径
23    R_max = 7.239;
24    % 计算起止时间与步长
25    a = 0; b = 2 * 1000; step = 0.01;
26    % 优化参数 omega
27    % omega = 0.0175 * pi;
28    % 参数 phase (ms)
29    phase = 60;
30    % 用于判断平均值的最终时长(ms)
31    last_time = 500;
32
33    % 插值系数
34    [C, C1, C2, C3, C4, C5, C6] = generate_Cs();
35    % 弹性模量关于压力的函数E(p)
36    E = @(p)p_to_E(p, C1, C2);
37    % 密度关于压力的函数rho(p)
38    rho = @(p)p_to_rho(p, C, C1, C2);
39    % 输入和输出的流量函数Q(C, A, Δp, rho)
40    Q_in = @Q_function;
41    Q_out = @Q_function;
42    % 输入侧控制函数phi(pA, p)
43    phi = @control_function4;
44    % 低压油路排出孔的面积控制函数S_phi2(p, p_low)
45    S_phi2 = @(p, p_low)control_function4_2(p, p_low, A);
46    % 输出侧面积函数S_B(t)
47    S_B = @(t)height_to_S(time_to_height(t, C3, C4));
48    % 凸轮极径函数t_to_R(t, w, theta0)
49    t_to_R = @(t, w, theta_0)t_to_r(t, w, theta_0, C5, C6);
50
51    % [pA, pAp] = Explicit_Euler4(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_phi2, ...

```

```

    S_B, t_to_R, ...
52 % omega, C_flow, R_max, V, V1, dA, A, p0, pA0, p_e, theta0, phase, ...
    p_bar, pA_min, a, b, step);

53
54
55 p_bars = 101.5:0.5:103;
56 omegas = zeros(4, 1);
57 maxs = zeros(4, 1);
58 mins = zeros(4, 1);
59
60 % P_{bar}    \omega    P_{\max}    P_{\min}    (100-P_{\min})^2 + ...
    (P_{\max} - 100)^2
61 % 101.5      0.0928      101.5024      98.6226      4.1545
62 % 102        0.0812      102.0021      97.9450      8.2317
63 % 102.5      0.0555      102.1798      97.8983      9.1687
64 % 103        0.0550      102.5328      97.3849      13.2539
65
66 for i=1:4
67     p_bar = p_bars(i);
68     pAp = @(omega) Explicit_Euler4(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_phi2, ...
        S_B, t_to_R, ...
69     omega, C_flow, R_max, V, V1, dA, A, p0, pA0, p_e, theta0, phase, ...
        p_bar, pA_min, a, b, step);
70     means = @(omega) calculate_last_medium(pAp, omega, last_time/step);
71     final_omega = Binary_search(means, 0.0500, 0.3000, 100, 1e-4);
72     omegas(i) = final_omega;
73     maxs(i) = calculate_last_max(pAp, final_omega, last_time/step);
74     mins(i) = calculate_last_min(pAp, final_omega, last_time/step);
75 end
76
77 %%
78 p_bar = p_bars(i);
79 pAp = @(omega) Explicit_Euler4(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_phi2, ...
    S_B, t_to_R, ...
80 omega, C_flow, R_max, V, V1, dA, A, p0, pA0, p_e, theta0, phase, ...
    p_bar, pA_min, a, b, step);
81 means = @(omega) calculate_last_medium(pAp, omega, last_time/step);
82 final_omega = Binary_search(means, 0.0500, 0.3000, 100, 1e-4);
83 omegas(i) = final_omega;
84 maxs(i) = calculate_last_max(pAp, final_omega, last_time/step);
85 mins(i) = calculate_last_min(pAp, final_omega, last_time/step);
86
87
88 function result = calculate_last_medium(p, T, last_number)
89 [tau, p_list] = p(T);

```

```

90     p_list = p_list(length(p_list) - last_number: length(p_list));
91     result = (max(p_list) + min(p_list)) / 2;
92     end
93     function result = calculate_last_max(p, T, last_number)
94         [¬, p_list] = p(T);
95         p_list = p_list(length(p_list) - last_number: length(p_list));
96         result = max(p_list);
97     end
98     function result = calculate_last_min(p, T, last_number)
99         [¬, p_list] = p(T);
100        p_list = p_list(length(p_list) - last_number: length(p_list));
101        result = min(p_list);
102    end

```

solve3.m

```

1      clear;
2      % 流量系数
3      C_flow = 0.85;
4      % 油管体积
5      V = 500 * pi * (10 / 2)^2;
6      % 油泵最小剩余油量
7      V1 = 20;
8      % A 处面积
9      A = pi * (1.4 / 2)^2;
10     % 油泵底直径
11     dA = 5;
12     % 油管初始压力
13     p0 = 100;
14     % 油泵初始压力
15     pA0 = 0.5;
16     % 大气压力
17     p_e = 0.1;
18     % 初始角度
19     theta0 = pi;
20     % 回复压力
21     pA_min = 0.5;
22     % 最大极径
23     R_max = 7.239;
24     % 计算起止时间与步长
25     a = 0; b = 5 * 1000; step = 0.01;
26     % 优化参数 omega
27     % omega = 0.0175 * pi;
28     % 优化参数 phase (ms)

```



```

29     phase = 60;
30     % 用于判断平均值的最终时长(ms)
31     last_time = 500;
32
33     % 插值系数
34     [C, C1, C2, C3, C4, C5, C6] = generate_Cs();
35     % 弹性模量关于压力的函数E(p)
36     E = @(p)p_to_E(p, C1, C2);
37     % 密度关于压力的函数rho(p)
38     rho = @(p)p_to_rho(p, C, C1, C2);
39     % 输入和输出的流量函数Q(C, A, Δp, rho)
40     Q_in = @Q_function;
41     Q_out = @Q_function;
42     % 输入侧控制函数phi(pA, p)
43     phi = @control_function3;
44     % 输出侧面积函数S_B(t)
45     S_B = @(t)height_to_S(time_to_height(t, C3, C4));
46     % 凸轮极径函数t_to_R(t, w, theta0)
47     t_to_R = @(t, w, theta_0)t_to_r(t, w, theta_0, C5, C6);
48
49
50     % phases = 0:10:90;
51     % omegas = zeros(10, 1);
52     % maxs = zeros(10, 1);
53     % mins = zeros(10, 1);
54     %
55     % for i=1:10
56     %     phase = phases(i);
57     %     p = @(omega)Explicit_Euler3(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_B, ...
58         %         t_to_R, ...
59         %         omega, C_flow, R_max, V, V1, dA, A, p0, pA0, p_e, ...
60         %         theta0, phase, pA_min, a, b, step);
61     %     means = @(omega)calculate_last_medium(p, omega, ...
62         %         last_time/step);
63     %     final_omega = Binary_search(means, 0.040, 0.070, 100, 1e-4);
64     %     omegas(i) = final_omega;
65     %     maxs(i) = calculate_last_max(p, final_omega, last_time/step);
66     %     mins(i) = calculate_last_min(p, final_omega, last_time/step);
67     % end
68     %
69     % figure(1); hold on;
70     % yyaxis left;
71     % plot(0:10:90, mins);
72     % plot(0:10:90, maxs);
73     % ylabel('$P$: MPa', 'Interpreter', 'Latex')

```

```

71 % yyaxis right;
72 % plot(0:10:90, omegas);
73 % ylabel('$\omega$: rad/ms', 'Interpreter', 'Latex')
74 %
75 % ll = legend('$P_{\min}$', '$P_{\max}$', '$\omega$');
76 % set(ll, 'Interpreter', 'Latex');
77 % xlabel('$\phi$: phase(ms)', 'Interpreter', 'Latex');
78 % title('问题3中最大最小压力、凸轮角速度与相位差的变化规律');
79 %
80 % figure(2); plot(0:10:90, (100-mins_safe).^2 + (maxs_safe-100).^2);
81 %
82 % xlabel('$\phi$: phase(ms)', 'Interpreter', 'Latex');
83 % ylabel('Var: $(100 - P_{\min})^2 + (P_{\max}-100)^2$', ...
    'Interpreter', 'Latex')
84 % title('压力波动程度随相位差的变化规律')
85 %
86
87 % 输出示例结果
88
89 % b = 2000;
90 % p = @(omega) Explicit_Euler3(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_B, ...
    t_to_R, ...
91 %     omega, C_flow, R_max, V, V1, dA, A, p0, pA0, p_e, ...
    theta0, phase, pA_min, a, b, step);
92 % [pA, pp] = p(0.05493);
93 % figure(3);
94 % plot(0.01:0.01:2000, pp(1:2000*100))
95 % xlabel('$t$: time(ms)', 'Interpreter', 'Latex')
96 % ylabel('$P$: MPa', 'Interpreter', 'Latex')
97 % title('压力随时间的变化图像')
98 % lll = legend('$\omega = 0.05493$, $\phi=60$');
99 % set(lll, 'Interpreter', 'Latex');
100
101
102 function result = calculate_last_medium(p, T, last_number)
103     [tau, p_list] = p(T);
104     p_list = p_list(length(p_list) - last_number: length(p_list));
105     result = (max(p_list) + min(p_list)) / 2;
106 end
107 function result = calculate_last_max(p, T, last_number)
108     [tau, p_list] = p(T);
109     p_list = p_list(length(p_list) - last_number: length(p_list));
110     result = max(p_list);
111 end
112 function result = calculate_last_min(p, T, last_number)

```

```

113     [¬, p_list] = p(T);
114     p_list = p_list(length(p_list) - last_number: length(p_list));
115     result = min(p_list);
116     end

```

solve2.m

```

1     %clear;
2     % 流量系数
3     C_flow = 0.85;
4     % 油管体积
5     V = 500 * pi * (10 / 2)^2;
6     % 油泵最小剩余油量
7     V1 = 20;
8     % A 处面积
9     A = pi * (1.4 / 2)^2;
10    % 油泵底直径
11    dA = 5;
12    % 油管初始压力
13    p0 = 100;
14    % 油泵初始压力
15    pA0 = 0.5;
16    % 大气压力
17    p_e = 0.1;
18    % 初始角度
19    theta0 = pi;
20    % 回复压力
21    pA_min = 0.5;
22    % 最大极径
23    R_max = 7.239;
24    % 计算起止时间与步长
25    a = 0; b = 3 * 1000; step = 0.01;
26
27    % 插值系数
28    [C, C1, C2, C3, C4, C5, C6] = generate_Cs();
29    % 弹性模量关于压力的函数E(p)
30    E = @(p)p_to_E(p, C1, C2);
31    % 密度关于压力的函数rho(p)
32    rho = @(p)p_to_rho(p, C, C1, C2);
33    % 输入和输出的流量函数Q(C, A, Δp, rho)
34    Q_in = @Q_function;
35    Q_out = @Q_function;
36    % 输入侧控制函数phi(pA, p)
37    phi = @control_function2;

```

```

38 % 输出侧面积函数S_B(t)
39 S_B = @(t)height_to_S(time_to_height(t, C3, C4));
40 % 凸轮极径函数t_to_R(t, w, theta0)
41 t_to_R = @(t, w, theta_0)t_to_r(t, w, theta_0, C5, C6);
42
43
44
45 % 优化参数 omega
46 % omega = 0.0275;
47
48
49 % [pA1, p1] = Explicit_Euler2(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_B, ...
    t_to_R, ...
50 % omega, C_flow, R_max, V, V1, dA, A, p0, pA0, p_e, theta0, ...
    pA_min, a, b, step);
51 % [pA2, p2] = Explicit_Euler2_2(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_B, ...
    t_to_R, ...
52 % omega, C_flow, R_max, V, V1, dA, A, p0, pA0, p_e, theta0, ...
    pA_min, a, b, step);
53
54
55 % 用于判断平均值的最终时长(ms)
56 last_time = 300;
57 p = @(omega)Explicit_Euler2_2(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_B, ...
    t_to_R, ...
58 omega, C_flow, R_max, V, V1, dA, A, p0, pA0, p_e, theta0, pA_min, ...
    a, b, step);
59
60
61 %% 优化参数 omega
62 % omega = 0.0275;
63 % [pA1, p1] = p(omega); % 需要修改磨光算子control_function.
64 % [pA2, p2] = p(omega);
65 % plot(0:0.01:3000, abs(p1-p2))
66 % xlabel('$t$: (ms)', 'Interpreter', 'latex');
67 % ylabel('$|P_{error}|$', 'Interpreter', 'Latex')
68 % title('使用磨光算子带来的压力误差的绝对值')
69 % figure(2);
70 % plot(1800:0.01:2*1000, p1(180001:200001))
71 % ylabel('$P$: (MPa)', 'Interpreter', 'Latex');
72 % xlabel('$t$: (ms)', 'Interpreter', 'Latex')
73 % title('问题2中第1.8s-2s内压力的变化情况')
74
75 means = @(omega)calculate_last_medium(p, omega, last_time/step);
76 final_omega = Binary_search(means, 0.0270, 0.0280, 100, 1e-4);

```

```

77
78
79
80     step_draw = 0.0002;
81     omega_draw = final_omega - step_draw * 10;
82     maxs = zeros(11, 1);
83     mins = zeros(11, 1);
84     for i = 0:10
85
86         omega = omega_draw + step_draw * i;
87         % 微分方程模型右端项f(p, t)
88         [pA, p] = Explicit_Euler2_2(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_B, t_to_R, ...
89         omega, C_flow, R_max, V, V1, dA, A, p0, pA0, p_e, theta0, pA_min, ...
90         a, b, step);
91         mins(i+1) = min(p((b-last_time)/step:b/step));
92         maxs(i+1) = max(p((b-last_time)/step:b/step));
93     end
94     TT = omega_draw: step_draw: omega_draw+step_draw*10;
95     plot(TT, (mins + maxs) / 2, TT, mins, TT, maxs); hold on;
96     legend('测试时长3s下最后300ms内的压力均值', ...
97     '测试时长3s下最后300ms内的压力最小值', ...
98     '测试时长3s下最后300ms内的压力最大值');
99
100     xlabel('$\omega$: (rad/ms)', 'Interpreter', 'latex');
101     ylabel('最后300ms内压力最大值与最小值的均值');
102     title('问题2中最终压力随凸轮旋转角速度的变化情况');
103     hold off;
104
105     % figure(1);
106     % plot(0.01:0.01:1500, (pA2(2:150001) - pA2(1:150000))); hold on;
107     % xlabel('$t$: time(ms)', 'Interpreter', 'Latex');
108     % ylabel('$\Delta P_A$', 'Interpreter', 'Latex');
109     % title('针对刚性问题修正的显式Euler格式')
110     % figure(2);
111     % plot(0.01:0.01:1500, (pA1(2:150001) - pA1(1:150000))); hold on;
112     % xlabel('$t$: time(ms)', 'Interpreter', 'Latex');
113     % ylabel('$\Delta P_A$', 'Interpreter', 'Latex');
114     % title('{\bf 未}针对刚性问题修正的显式Euler格式')
115
116
117     function result = calculate_last_medium(p, T, last_number)
118         [tau, p_list] = p(T);
119         p_list = p_list(length(p_list) - last_number: length(p_list));
120         result = (max(p_list) + min(p_list)) / 2;

```

solve1.m

```

1      clear;
2      % 起始时间t0
3      t0=0;
4      % A口恒定压力160MPa
5      pA=160;
6      % 高压油管内体积
7      V=pi*(10/2)^2*500;
8      % 流量系数
9      C_flow = 0.85;
10     % 小口直径
11     d = 1.4;
12     % 输出流量函数Q_out(t)
13     Q_out = @Q_out_1;
14     % 输入流量函数Q_in(C, A, Δp, rho)
15     Q_in = @Q_function;
16     % C, C1, C2为用于计算弹性模量和任意压力密度下用的插值系数
17     [C,C1,C2] = generate_Cs();
18     % 弹性模量关于压力的函数E(p)
19     E = @(p)p_to_E(p,C1,C2);
20     % 密度关于压力的函数rho(p)
21     rho = @(p)p_to_rho(p,C,C1,C2);
22     % 高压油管内起始压力
23     p0 = 100;
24     % 数值计算边界(ms)
25     a = 0; b = 50 * 1000;
26     % 数值计算步长(ms)
27     step = 0.01;
28     % 用于判断平均值的最终时长(ms)
29     last_time = 2000;
30
31
32     % T = 0.2846;
33     % p = explicit_Euler1(E, rho, Q_in, Q_out, T, t0, pA, V, C_flow, ...
        d, p0, a, b, step);
34     % plot(0.01:0.01:20000, p(1:20*1000*100));
35     % xlabel('$T$(ms)', 'Interpreter', 'latex');
36     % ylabel('$P$(MPa)', 'Interpreter', 'Latex');
37     % legend('T=0.2846');
38     % title('问题1在20s内压力变化情况');
39

```

```

40 % p = @(T)explicit_Euler(E, rho, Q_in, Q_out, T, t0, pA, V, ...
    C_flow, d, p0, a, b, step);
41 % means = @(T)calculate_last_medium(p, T, last_time/step);
42 %
43 % final_T = Binary_search(means, 0.2, 0.8, 150, 1e-4);
44
45 % 100 -> 150 in 2s T in [0.9182, 0.9184]
46 % 100 -> 150 in 5s T in [0.7560, 0.7562]
47 % 100 -> 150 in 10s T in [0.7509, 0.7511]
48 % 100 -> 100 in 50s T in [0.2831, 0.2851]
49 % 150 -> 150 in 50s T in [0.7519, 0.7525]
50 step_draw = 0.0001;
51 % T_draw = final_T - step_draw * 10;
52 T_draw = 0.7513;
53
54
55 maxs = zeros(21, 1);
56 mins = zeros(21, 1);
57 for i = 0:20
58
59 T = T_draw + step_draw * i;
60 % 微分方程模型右端项f(p, t)
61 p = explicit_Euler1(E, rho, Q_in, Q_out, T, t0, pA, V, C_flow, d, ...
    p0, a, b, step);
62 mins(i+1) = min(p((b-last_time)/step:b/step));
63 maxs(i+1) = max(p((b-last_time)/step:b/step));
64 end
65 TT = T_draw: step_draw: T_draw+step_draw*20;
66 plot(TT, (mins + maxs) / 2, TT, mins, TT, maxs); hold on;
67 % legend('测试时长2s下最后100ms内的压力均值', ...
    '测试时长2s下最后100ms内的压力最小值', ...
    '测试时长2s下最后100ms内的压力最大值');
68 % legend('测试时长5s下最后200ms内的压力均值', ...
    '测试时长5s下最后200ms内的压力最小值', ...
    '测试时长5s下最后200ms内的压力最大值');
69 % legend('测试时长10s下最后400ms内的压力均值', ...
    '测试时长10s下最后400ms内的压力最小值', ...
    '测试时长10s下最后400ms内的压力最大值');
70 legend('测试时长50s下最后2s内的压力均值', ...
    '测试时长50s下最后2s内的压力最小值', ...
    '测试时长50s下最后2s内的压力最大值');
71
72 xlabel('$T$(ms)', 'Interpreter', 'latex');
73
74 % ylabel('最后100ms内压力最大值与最小值的均值');

```

```

75 % ylabel('最后200ms内压力最大值与最小值的均值');
76 % ylabel('最后400ms内压力最大值与最小值的均值');
77 ylabel('最后2s内压力最大值与最小值的均值');
78
79 % title('问题1中2s迅速加压下最终压力随单向阀开放时长的变化情况');
80 % title('问题1中5s迅速加压下最终压力随单向阀开放时长的变化情况');
81 % title('问题1中10s迅速加压下最终压力随单向阀开放时长的变化情况');
82 % ...
    title('问题1中长时间下最终压力随单向阀开放时长的变化情况(起始压力100)');
83 title('问题1中长时间下最终压力随单向阀开放时长的变化情况(起始压力150)');
84
85 hold off;
86
87 function result = calculate_last_medium(p, T, last_number)
88 p_list = p(T);
89 p_list = p_list(length(p_list) - last_number: length(p_list));
90 result = (max(p_list) + min(p_list)) / 2;
91 end

```

Q\_out\_1.m

```

1 function y = Q_out_1(t)
2 % Q_OUT 给定时间t返回此时的流出流量
3 % t: 单位ms,
4 %
5
6 t = mod(t, 100);
7 if t ≤ 0.2
8 y = t * 100;
9 else
10 if t ≤ 2.2
11 y = 20;
12 else
13 if t ≤ 2.4
14 y = 20 - 100 * (t - 2.2);
15 else
16 y = 0;
17 end
18 end
19 end
20 end

```

Q\_function.m



```

1      function y = Q_function(C, A, d_p, rho)
2      % 返回在压力差下产生的单位时间内的流量
3      % C: const = 0.85
4      % A: 小口面积, 单位: mm^3
5      % d_p: 压力差, 单位: MPa
6      % rho: 高压侧液体密度, 单位: mg/mm^3
7
8      y = C * A * sqrt(2 * (d_p) / rho);
9
10     end

```

pA\_d\_function4.m

```

1      function y = pA_d_function4(E, rho, phi, Q_out, R, ...
2      R_max, V1, C_flow, A, dA, ps, t)
3      % 用于包装 dp/dt=f(p,t) 右侧函数所有带参项的函数
4      % E: 弹性模量函数E(p)
5      % rho: 密度函数rho(p)
6      % phi: 控制单向阀开关的函数phi(pA, p)
7      % Q_out: 返回出油口的有效面积值
8      % R: 半径关于t的函数 R(t)
9      % V1: 最小剩余油量
10     % C_flow: 流量系数, const = 0.85
11     % A: 高压油泵小口面积
12     % dA: 高压油泵直径
13     % t: 自变量时间
14     p = ps(1);
15     pA = ps(2);
16     r_step = 1e-5;
17     % if pA < pA_min
18     %     y = (pA_min - pA) / step;
19     % else
20     y = E(pA) * (pi * (dA/2)^2 * ...
21     (R(t+r_step/2) - R(t-r_step/2)) / r_step - ...
22     phi(pA, p) * ...
23     Q_out(C_flow, A, pA-p, rho(pA)) ...
24     ) / ...
25     (V1 + pi * (dA/2)^2 * (R_max-R(t)));
26     % end
27     end

```

pA\_d\_function3.m

```

1  function y = pA_d_function3(E, rho, phi, Q_out, R, ...
2  R_max, V1, C_flow, A, dA, ps, t)
3  % 用于包装 dp/dt=f(p,t) 右侧函数所有带参项的函数
4  % E: 弹性模量函数E(p)
5  % rho: 密度函数rho(p)
6  % phi: 控制单向阀开关的函数phi(pA, p)
7  % Q_out: 返回出油口的有效面积值
8  % R: 半径关于t的函数 R(t)
9  % V1: 最小剩余油量
10 % C_flow: 流量系数, const = 0.85
11 % A: 高压油泵小口面积
12 % dA: 高压油泵直径
13 % t: 自变量时间
14 p = ps(1);
15 pA = ps(2);
16 r_step = 1e-5;
17 % if pA < pA_min
18 %     y = (pA_min - pA) / step;
19 % else
20 y = E(pA) * (pi * (dA/2)^2 * ...
21 (R(t+r_step/2) - R(t-r_step/2)) / r_step - ...
22 phi(pA, p) * ...
23 Q_out(C_flow, A, pA-p, rho(pA)) ...
24 ) / ...
25 (V1 + pi * (dA/2)^2 * (R_max-R(t)));
26 % end
27 end

```

pA\_d\_function2.m

```

1  function y = pA_d_function2(E, rho, phi, Q_out, R, ...
2  R_max, V1, C_flow, A, dA, ps, t)
3  % 用于包装 dp/dt=f(p,t) 右侧函数所有带参项的函数
4  % E: 弹性模量函数E(p)
5  % rho: 密度函数rho(p)
6  % phi: 控制单向阀开关的函数phi(pA, p)
7  % Q_out: 返回出油口的有效面积值
8  % R: 半径关于t的函数 R(t)
9  % V1: 最小剩余油量
10 % C_flow: 流量系数, const = 0.85
11 % A: 高压油泵小口面积
12 % dA: 高压油泵直径
13 % t: 自变量时间
14 p = ps(1);

```

```

15     pA = ps(2);
16     r_step = 1e-5;
17     % if pA < pA_min
18     %     y = (pA_min - pA) / step;
19     % else
20     y = E(pA) * (pi * (dA/2)^2 * ...
21     (R(t+r_step/2) - R(t-r_step/2)) / r_step - ...
22     phi(pA, p) *...
23     Q_out(C_flow, A, pA-p, rho(pA)) ...
24     ) / ...
25     (V1 + pi * (dA/2)^2 * (R_max-R(t)));
26     % end
27     end

```

p\_to\_rho.m

```

1     function rho = p_to_rho(p, C, C1, C2)
2     % 基于插值生成的在给定区间上的压力与密度的函数关系
3
4     p_main = floor(p / 0.5) + 1;
5     if p == 200
6     p_main = 400;
7     end
8     % add 1 to match the C, C1, C2 index.
9     % p_rem = mod(p, 0.5);
10    if any(p_main > 400)
11    throw(MException('MATLAB:myError', 'p is getting bigger than 200'));
12    end
13    rho = exp(-1/C1(p_main) .* (exp(-C1(p_main) .* p - C2(p_main)) - ...
14           C(p_main)));
14    end

```

p\_to\_E.m

```

1     function E = p_to_E(p, C1, C2)
2     % 基于插值生成的在给定区间上的压力与弹性模量的函数关系
3     p_main = floor(p/0.5) + 1;
4     if p == 200
5     p_main = 400;
6     end
7     % add 1 to match the index of C1, C2.
8     if any(p_main > 400)
9     throw(MException('MATLAB:myError', 'p is getting bigger than 200'));
10    end

```

```

11     E = exp(C1(p_main) .* p + C2(p_main));
12     end

```

p\_d\_function4.m

```

1     function y = p_d_function4(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_phi2, S_B, ...
2     p_e, pA_min, V, C_flow, A, phase, p_bar, ps, t)
3     % 用于包装 dp/dt=f(p,t) 右侧函数所有带参项的函数
4     % E: 弹性模量函数E(p)
5     % rho: 密度函数rho(p)
6     % Q_in: 输入流量函数Q_in(C, A, Δp, rho)
7     % Q_out: 输出流量函数Q_out(C, A, Δp, rho)
8     % phi: 控制单向阀开关的函数phi(pA, p)
9     % S_B: 给定t 返回出油口有效面积S_B(t)
10
11     % p_e: 大气压力
12     % V: 高压油管内体积
13     % C_flow: 流量系数, const = 0.85
14     % A: 油泵小孔面积
15     % t: 自变量时间
16
17     p = ps(1);
18     pA = ps(2);
19
20     y = E(p) / rho(p) / V * ( ...
21     Q_in(C_flow, A, pA-p, rho(pA)) * ...
22     rho(pA) * phi(pA, p) - ...
23     (Q_out(C_flow, S_B(t), p-p_e, rho(p)) + ...
24     Q_out(C_flow, S_B(t+phase), p-p_e, rho(p)) + ...
25     Q_out(C_flow, S_phi2(p, p_bar), p-pA_min, rho(p))) * rho(p));
26     end

```

p\_d\_function3.m

```

1     function y = p_d_function3(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_B, ...
2     p_e, V, C_flow, A, phase_t, ps, t)
3     % 用于包装 dp/dt=f(p,t) 右侧函数所有带参项的函数
4     % E: 弹性模量函数E(p)
5     % rho: 密度函数rho(p)
6     % Q_in: 输入流量函数Q_in(C, A, Δp, rho)
7     % Q_out: 输出流量函数Q_out(C, A, Δp, rho)
8     % phi: 控制单向阀开关的函数phi(pA, p)
9     % S_B: 给定t 返回出油口有效面积S_B(t)
10

```

```

11 % p_e: 大气压力
12 % V: 高压油管内体积
13 % C_flow: 流量系数, const = 0.85
14 % A: 油泵小孔面积
15 % t: 自变量时间
16
17 p = ps(1);
18 pA = ps(2);
19
20 y = E(p) / rho(p) / V * ( ...
21 Q_in(C_flow, A, pA-p, rho(pA)) * ...
22 rho(pA) * phi(pA, p) - ...
23 (Q_out(C_flow, S_B(t), p-p_e, rho(p)) + Q_out(C_flow, ...
    S_B(t+phase_t), p-p_e, rho(p))) * rho(p));
24 end

```

p\_d\_function2.m

```

1 function y = p_d_function2(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_B, ...
2 p_e, V, C_flow, A, ps, t)
3 % 用于包装 dp/dt=f(p,t) 右侧函数所有带参项的函数
4 % E: 弹性模量函数E(p)
5 % rho: 密度函数rho(p)
6 % Q_in: 输入流量函数Q_in(C, A, Δ_p, rho)
7 % Q_out: 输出流量函数Q_out(C, A, Δ_p, rho)
8 % phi: 控制单向阀开关的函数phi(pA, p)
9 % S_B: 给定t 返回出油口有效面积S_B(t)
10
11 % p_e: 大气压力
12 % V: 高压油管内体积
13 % C_flow: 流量系数, const = 0.85
14 % A: 油泵小孔面积
15 % t: 自变量时间
16
17 p = ps(1);
18 pA = ps(2);
19
20 y = E(p) / rho(p) / V * ( ...
21 Q_in(C_flow, A, pA-p, rho(pA)) * ...
22 rho(pA) * phi(pA, p) - ...
23 Q_out(C_flow, S_B(t), p-p_e, rho(p)) * rho(p));
24 end

```

height\_to\_S.m

```

1
2     function S = height_to_S(height)
3     %HEIGHT_TO_S 计算燃油流出面积
4     %height 为抬高的高度
5     S_d = pi * 0.7^2;
6     tan_alpha = tan(9/180*pi);
7     l_h = height + 1.25/tan_alpha;
8     S_h = pi * (l_h*tan_alpha)^2 - pi*(2.5/2)^2;
9     S = min(S_h,S_d);
10    end

```

generate\_Cs.m

```

1     function [C, C1, C2, C3, C4, C5, C6] = generate_Cs()
2     % 读入数据，根据附件系数生成插值系数，C, C1, C2, C3, C4, C5, ...
3     % C6含义同论文公式中字母.
4
5     B = xlsread("附件3-弹性模量与压力.xlsx");
6     p = B(1:401, 1);
7     E = B(1:401, 2);
8
9     C1 = (log(E(2:401)) - log(E(1:400))) ./ (p(2:401) - p(1:400));
10    C2 = -p(1:400) .* C1 + log(E(1:400));
11
12    p_100 = 100;
13    rho_100 = 0.85;
14
15    C = zeros(400, 1);
16    p0 = p_100;
17    rho0 = rho_100;
18    for i=200:400
19        C(i) = exp(-C1(i) * p0 - C2(i)) + C1(i) * log(rho0);
20        p0 = p0 + 0.5;
21        rho0 = exp(-1/C1(i) * (exp(-C1(i)*p0-C2(i)) - C(i)));
22    end
23
24    p0 = p_100;
25    rho0 = rho_100;
26    for i=199:-1:1
27        C(i) = exp(-C1(i) * p0 - C2(i)) + C1(i) * log(rho0);
28        p0 = p0 - 0.5;
29        rho0 = exp(-1/C1(i) * (exp(-C1(i)*p0-C2(i)) - C(i)));
30    end

```

```

31
32     A = xlsread("附件2-针阀运动曲线.xlsx");
33     t = 0:0.01:2.45;
34     t = t';
35     h = zeros(246, 1);
36     h(1:45) = A(1:45, 2);
37     h(46:201) = 2;
38     h(202:246) = A(1:45, 5);
39
40     C3 = (h(2:246) - h(1:245)) ./ (t(2:246) - t(1:245));
41     C4 = -C3 .* t(1:245) + h(1:245);
42
43     D = xlsread("附件1-凸轮边缘曲线.xlsx");
44     theta = [0:0.01:6.27, 2*pi];
45     theta = theta';
46     r = zeros(629, 1);
47     r(1:628) = D(1:628, 2);
48     r(629) = D(1, 2);
49
50     C5 = (r(2:629) - r(1:628)) ./ (theta(2:629) - theta(1:628));
51     C6 = -C5 .* theta(1:628) + r(1:628);
52
53     end

```

figure\_P\_E.m

```

1     B = xlsread("附件3-弹性模量与压力.xlsx");
2     P = B(:,1);
3     E = B(:,2);
4     log_E = log(E);
5     P_ = [ones(length(P),1),P];
6     b = regress(log_E, P_);
7     [C, C1, C2, C3, C4, C5, C6] = generate_Cs();
8     P1 = 0.25:10:200;
9     linear_logE = arrayfun(@(p)p_to_E(p,C1, C2),P1);
10
11     plot(P, E, P, exp(b(1)+b(2)*P), P1, linear_logE, 'xk')
12     legend('原曲线','对lnE最小二乘拟合','对lnE分段线性插值')
13     xlabel('P:MPa')
14     ylabel('E:MPa')
15     title('P与E的关系')

```

Explicit\_Euler4.m

```

1      function [pA, p]= Explicit_Euler4(E, rho, Q_in, Q_out, phi, ...
      S_phi2, S_B, t_to_R, ...
2      omega, C_flow, R_max, V, V1, dA, A, p0, pA0, p_e, theta0, phase, ...
      p_bar, pA_min, a, b, step)
3      %EXPLICIT_EULER2 显式欧拉解du/dt = f(u,t)
4      % E: 弹性模量函数E(p)
5      % rho: 密度函数rho(p)
6      % Q_in: 输入流量函数Q_in(C, A, Δ_p, rho)
7      % Q_out: 输出流量函数Q_out(C, A, Δ_p, rho)
8      % phi: 控制单向阀开关的函数phi(pA, p)
9      % S_B: 给定t 返回出油口有效面积S_B(t)
10     % t_to_R: 给定alpha=t*w+theta0, 返回r t_to_R(t, w, theta0)
11     % omega: 角速度 R(t)的参数
12     % C_flow: 流体系数
13     % R_max: 最大极径
14     % V: 油管体积
15     % V1: 油塞残余容积
16     % dA: 油塞的直径
17     % A: 输入口A处面积
18     % p0: 油管初始压力
19     % pA0: 油塞初始压力
20     % p_e: 大气压力
21     % theta0: 初始的角度
22     % epsilon: 与2pi的容许误差(在误差范围内则向活塞填充燃油)
23     % pA_min: 低压燃油压力 若与2*pi差值绝对值小于容许误差 则pA = pA_min
24     % [a,b]: 求解区间
25     % step: 时间步长
26
27     N = floor(abs(b-a) / step);
28     p = zeros(N+1, 1);
29     pA = zeros(N+1, 1);
30     p(1) = p0;
31     pA(1) = pA0;
32     R = @(t)t_to_R(t, omega, theta0);
33
34     f_p = @(ps, t)p_d_function4(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_phi2, S_B, ...
      ...
35     p_e, pA_min, V, C_flow, A, phase, p_bar, ps, t);
36
37     f_pA = @(ps, t)pA_d_function4(E, rho, phi, Q_out, R, ...
38     R_max, V1, C_flow, A, dA, ps, t);
39
40
41     Rs = zeros(N+1, 1);

```



```

42     f_ps = zeros(N+1, 1);
43     f_pAs = zeros(N+1, 1);
44
45     for i = 1:N
46         t = step * (i-1) + a;
47
48         Rs(i+1) = R(t);
49
50         p(i+1) = p(i) + step * f_p([p(i); pA(i)], t);
51         f_ps(i+1) = (p(i+1) - p(i)) / step;
52
53         pA_h = pA(i);
54         times = 40;
55         for j=0:times-1
56             pA_h = max(pA_h + step / times * f_pA([p(i); pA_h], t + j * step / ...
57                 times), pA_min);
58         end
59         pA(i+1) = pA_h;
60         f_pAs(i+1) = (pA(i+1) - pA(i)) / step;
61
62         % pA(i+1) = max(pA(i) + step * f_pA([p(i); pA(i)], t), pA_min);
63
64         if p(i+1) < 0 || pA(i+1) < 0
65             throw(MException('MATLAB:myError', 'P<0'));
66         end
67     end
68 end

```

Explicit\_Euler3.m

```

1     function [pA, p]= Explicit_Euler3(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_B, ...
2         t_to_R, ...
3         omega, C_flow, R_max, V, V1, dA, A, p0, pA0, p_e, theta0, phase, ...
4         pA_min, a, b, step)
5     %EXPLICIT_EULER2 显式欧拉解du/dt = f(u,t)
6     % E: 弹性模量函数E(p)
7     % rho: 密度函数rho(p)
8     % Q_in: 输入流量函数Q_in(C, A, Δ_p, rho)
9     % Q_out: 输出流量函数Q_out(C, A, Δ_p, rho)
10    % phi: 控制单向阀开关的函数phi(pA, p)
11    % S_B: 给定t 返回出油口有效面积S_B(t)
12    % t_to_R: 给定alpha=t*w+theta0,返回r t_to_R(t, w, theta0)
13    % omega: 角速度 R(t)的参数

```

```

12 % C_flow: 流体系数
13 % R_max: 最大极径
14 % V: 油管体积
15 % V1: 油塞残余容积
16 % dA: 油塞的直径
17 % A: 输入口A处面积
18 % p0: 油管初始压力
19 % pA0: 油塞初始压力
20 % p_e: 大气压力
21 % theta0: 初始的角度
22 % epsilon: 与2pi的容许误差(在误差范围内则向活塞填充燃油)
23 % pA_min: 低压燃油压力 若与2*pi差值绝对值小于容许误差 则pA = pA_min
24 % [a,b]: 求解区间
25 % step: 时间步长
26
27 N = floor(abs(b-a) / step);
28 p = zeros(N+1, 1);
29 pA = zeros(N+1, 1);
30 p(1) = p0;
31 pA(1) = pA0;
32 R = @(t)t_to_R(t, omega, theta0);
33
34 f_p = @(ps, t)p_d_function3(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_B, ...
35 p_e, V, C_flow, A, phase, ps, t);
36
37 f_pA = @(ps, t)pA_d_function3(E, rho, phi, Q_out, R, ...
38 R_max, V1, C_flow, A, dA, ps, t);
39
40
41 Rs = zeros(N+1, 1);
42 f_ps = zeros(N+1, 1);
43 f_pAs = zeros(N+1, 1);
44
45 for i = 1:N
46 t = step * (i-1) + a;
47
48 Rs(i+1) = R(t);
49
50 p(i+1) = p(i) + step * f_p([p(i); pA(i)], t);
51 f_ps(i+1) = (p(i+1) - p(i)) / step;
52
53 pA_h = pA(i);
54 times = 40;
55 for j=0:times-1
56 pA_h = max(pA_h + step / times * f_pA([p(i); pA_h], t + j * step / ...

```

```

        times), pA_min);
57 end
58 pA(i+1) = pA_h;
59 f_pAs(i+1) = (pA(i+1) - pA(i)) / step;
60
61 % pA(i+1) = max(pA(i) + step * f_pA([p(i); pA(i)], t), pA_min);
62
63 if p(i+1) < 0 || pA(i+1) < 0
64     throw(MException('MATLAB:myError', 'P<0'));
65 end
66
67 end
68 end

```

## Explicit\_Euler2.m

```

1 function [pA, p]= Explicit_Euler2(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_B, ...
    t_to_R, ...
2 omega, C_flow, R_max, V, V1, dA, A, p0, pA0, p_e, theta0, pA_min, ...
    a, b, step)
3 %EXPLICIT_EULER2 显式欧拉解du/dt = f(u,t)
4 % E: 弹性模量函数E(p)
5 % rho: 密度函数rho(p)
6 % Q_in: 输入流量函数Q_in(C, A, Δ_p, rho)
7 % Q_out: 输出流量函数Q_out(C, A, Δ_p, rho)
8 % phi: 控制单向阀开关的函数phi(pA, p)
9 % S_B: 给定t 返回出油口有效面积S_B(t)
10 % t_to_R: 给定alpha=t*w+theta0,返回r t_to_R(t, w, theta0)
11 % omega: 角速度 R(t)的参数
12 % C_flow: 流体系数
13 % R_max: 最大极径
14 % V: 油管体积
15 % V1: 油塞残余容积
16 % dA: 油塞的直径
17 % A: 输入口A处面积
18 % p0: 油管初始压力
19 % pA0: 油塞初始压力
20 % p_e: 大气压力
21 % theta0: 初始的角度
22 % epsilon: 与2pi的容许误差(在误差范围内则向活塞填充燃油)
23 % pA_min: 低压燃油压力 若与2*pi差值绝对值小于容许误差 则pA = pA_min
24 % [a,b]: 求解区间
25 % step: 时间步长
26

```

```

27     N = floor(abs(b-a) / step);
28     p = zeros(N+1, 1);
29     pA = zeros(N+1, 1);
30     p(1) = p0;
31     pA(1) = pA0;
32     R = @(t)t_to_R(t, omega, theta0);
33
34     f_p = @(ps, t)p_d_function2(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_B, ...
35     p_e, V, C_flow, A, ps, t);
36
37     f_pA = @(ps, t)pA_d_function2(E, rho, phi, Q_out, R, ...
38     R_max, V1, C_flow, A, dA, ps, t);
39
40
41     Rs = zeros(N+1, 1);
42     f_ps = zeros(N+1, 1);
43     f_pAs = zeros(N+1, 1);
44
45     for i = 1:N
46         t = step * (i-1) + a;
47
48
49         Rs(i+1) = R(t);
50
51
52         p(i+1) = p(i) + step * f_p([p(i); pA(i)], t);
53         f_ps(i+1) = (p(i+1) - p(i)) / step;
54
55
56         pA(i+1) = max(pA(i) + step * f_pA([p(i); pA(i)], t), pA_min);
57         f_pAs(i+1) = (pA(i+1) - pA(i)) / step;
58
59         if p(i+1) < 0 || pA(i+1) < 0
60             throw(MException('MATLAB:myError', 'P<0'));
61         end
62
63     end
64 end

```

Explicit\_Euler2\_2.m

```

1     function [pA, p]= Explicit_Euler2_2(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_B, ...
2         t_to_R, ...
        omega, C_flow, R_max, V, V1, dA, A, p0, pA0, p_e, theta0, pA_min, ...

```

```

    a, b, step)
3  %EXPLICIT_EULER2 显式欧拉解 $du/dt = f(u,t)$ 
4  % E: 弹性模量函数E(p)
5  % rho: 密度函数rho(p)
6  % Q_in: 输入流量函数Q_in(C, A,  $\Delta p$ , rho)
7  % Q_out: 输出流量函数Q_out(C, A,  $\Delta p$ , rho)
8  % phi: 控制单向阀开关的函数phi(pA, p)
9  % S_B: 给定t 返回出油口有效面积S_B(t)
10 % t_to_R: 给定 $\alpha=t*w+\theta_0$ , 返回r t_to_R(t, w,  $\theta_0$ )
11 % omega: 角速度 R(t)的参数
12 % C_flow: 流体系数
13 % R_max: 最大极径
14 % V: 油管体积
15 % V1: 油塞残余容积
16 % dA: 油塞的直径
17 % A: 输入口A处面积
18 % p0: 油管初始压力
19 % pA0: 油塞初始压力
20 % p_e: 大气压力
21 % theta0: 初始的角度
22 % epsilon: 与 $2\pi$ 的容许误差(在误差范围内则向活塞填充燃油)
23 % pA_min: 低压燃油压力 若与 $2*\pi$ 差值绝对值小于容许误差 则 $pA = pA_{min}$ 
24 % [a,b]: 求解区间
25 % step: 时间步长
26
27 N = floor(abs(b-a) / step);
28 p = zeros(N+1, 1);
29 pA = zeros(N+1, 1);
30 p(1) = p0;
31 pA(1) = pA0;
32 R = @(t)t_to_R(t, omega, theta0);
33
34 f_p = @(ps, t)p_d_function2(E, rho, Q_in, Q_out, phi, S_B, ...
35 p_e, V, C_flow, A, ps, t);
36
37 f_pA = @(ps, t)pA_d_function2(E, rho, phi, Q_out, R, ...
38 R_max, V1, C_flow, A, dA, ps, t);
39
40
41 Rs = zeros(N+1, 1);
42 f_ps = zeros(N+1, 1);
43 f_pAs = zeros(N+1, 1);
44
45 for i = 1:N
46     t = step * (i-1) + a;

```

```

47
48
49     Rs(i+1) = R(t);
50
51     p(i+1) = p(i) + step * f_p([p(i); pA(i)], t);
52     f_ps(i+1) = (p(i+1) - p(i)) / step;
53
54     pA_h = pA(i);
55     times = 40;
56     for j=0:times-1
57         pA_h = max(pA_h + step / times * f_pA([p(i); pA_h], t + j * step / ...
            times), pA_min);
58     end
59     pA(i+1) = pA_h;
60     f_pAs(i+1) = (pA(i+1) - pA(i)) / step;
61
62
63     if p(i+1) < 0 || pA(i+1) < 0
64         throw(MException('MATLAB:myError', 'P<0'));
65     end
66
67 end
68 end

```

## Explicit\_Euler1.m

```

1     function p = explicit_Euler1(E, rho, Q_in, Q_out, T, t0, pA, V, ...
2         C_flow, d, p0, a, b, step)
3     % 显式Euler方法求解dp/dt=f(p,t)
4     % f: 函数句柄
5     % p0: 初值
6     % a, b: 数值计算边界
7     % step: 步长
8     % p: N+1 x 1向量, 为p(a + step * i), i=0,...,N的值.
9     N = floor(abs(b-a) / step);
10    p = zeros(N+1, 1);
11    p(1) = p0;
12    % 创建控制函数
13    phi = @(t)Control_Function1(T, t0, t);
14    % 创建f函数
15    f = @(p, t)d_function1(E, rho, Q_in, Q_out, phi, pA, V, C_flow, d, ...
16        p, t);
17    for i = 1:N
18        p(i+1) = p(i) + step * f(p(i), step * (i-1));
19    end

```

```

17     end
18     end

```

d\_function1.m

```

1     function y= d_function1(E, rho, Q_in, Q_out, phi, pA, V, C, d, p, t)
2     % 用于包装 dp/dt=f(p,t) 右侧函数所有带参项的函数
3     % E: 弹性模量函数E(p)
4     % rho: 密度函数rho(p)
5     % Q_in: 输入流量函数Q_in(C, A, Δ_p, rho)
6     % Q_out: 输出流量函数Q_out(t)
7     % phi: 输入流量周期控制函数phi_T(t), 关于参数T
8     % pA: A口恒定压力
9     % V: 高压油管内体积
10    % C: 流量系数, const = 0.85
11    % d: 小口直径
12    % p: 因变量压力
13    % t: 自变量时间
14
15    y = E(p) / rho(p) / V * ( ...
16    Q_in(C, pi*(d/2)^2, pA-p, rho(p)) * ...
17    rho(pA) * phi(t) - Q_out(t) * rho(p));
18    end

```

Control\_Function1.m

```

1     function y = Control_Function1(T,t0,t)
2     %给定参数T,初始时间t0,返回时间t时的值,时间单位为ms
3     %为一个二值函数0、1表示控制阀门的开关
4     if t≤t0
5         y=0;
6     else
7         if mod(t - t0 ,T+10)<T
8             y=1;
9         else
10            y=0;
11        end
12    end
13    end

```

control\_function4.m

```

1     function y = control_function4(pA, p)

```

```

2      % 控制函数phi
3      % 当 $p_A \geq p$ 时返回 1表示单向阀打开，当 $p_A < p$ 时返回0表示单向阀关闭
4      % pA 油泵压力 p管内压力
5      if pA ≥ p
6          y = round(1/(1+100^(p-pA)), 3);
7      else
8          y = 0;
9      end
10     end

```

control\_function4\_2.m

```

1      function y = control_function4_2(p, p_low, S)
2      % 控制函数S_phi2
3      % 当 $p \geq p_{low}$ 时返回 S表示单向阀打开，否则返回0表示单向阀关闭
4      % S为面积
5      if p ≥ p_low
6          y = round(1/(1+100^(p-pA)), 3);
7          y = S;
8      else
9          y = 0;
10     end
11
12     end

```

control\_function3.m

```

1      function y = control_function3(pA, p)
2      % 控制函数phi
3      % 当 $p_A \geq p$ 时返回 1表示单向阀打开，当 $p_A < p$ 时返回0表示单向阀关闭
4      % pA 油泵压力 p管内压力
5      if pA ≥ p
6          y = round(1/(1+100^(p-pA)), 3);
7      else
8          y = 0;
9      end
10
11     end

```

control\_function2.m

```

1      function y = control_function2(pA, p)
2      % 控制函数phi

```



```

3      % 当 $p_A \geq p$ 时返回 1表示单向阀打开，当 $p_A < p$ 时返回0表示单向阀关闭
4      % pA 油泵压力 p管内压力
5      if pA ≥ p
6          y = round(1/(1+100^(p-pA)), 3);
7          % y = 1;
8      else
9          y = 0;
10     end
11
12     end

```

Binary\_search.m

```

1      function x= Binary_search(f,a,b,y,epsilon)
2      % 返回 $f(x)=target\_y$ 在指定区间内的一个近似解
3      % f为单变量函数,[a,b]为搜索区间, ...
4          target_y为目标函数值,epsilon为最小容许误差
5      f_a=f(a);
6      f_b=f(b);
7      if (f_a-y) * (f_b-y) > 0
8          throw(MException('MATLAB:myError','wrong interval'));
9      else
10         while 1
11             disp(strcat('searching ', string(a), '→', string(b), '...'));
12             mid = (a+b)/2;
13             f_mid = f(mid);
14             if (b-a) < epsilon
15                 x = mid;
16                 break
17             else
18                 if (f_a - y) * (f_mid - y) < 0
19                     b = mid;
20                 else
21                     a = mid;
22                     f_a = f_mid;
23                 end
24             end
25         end
26
27     end

```