基于 KMV 模型中小微企业信贷决策分析

摘　　要

本文围绕中小微企业信贷决策问题，先介绍了几何布朗运动、伊藤公式、Black-Scholes 公式的定义与推导；然后通过三者引出评估企业违约概率的模型——KMV 模型，并结合中国市场的实际情况对 KMV 模型中的参数及统计量进行调整，得到符合中国市场的、适用于中小微企业的修正 KMV 模型；最后以我国 302 家非上市公司为样本，采用修正 KMV 模型对所选公司的违约距离进行估计，并采用多元线性回归方法做出信贷决策分析。

结果显示，通过 KMV 模型计算后得到的违约距离能较好得反映企业信用，违约距离越小的企业信用越高，银行为了贷款收益的稳定性，往往会对信用评级高的企业发放更多贷款，对信用评级低的企业发放少量贷款甚至不发放贷款。同时，为了防止潜在的企业客户流失，在银行贷款年利率处于 5.05% 时能获得最大收益。

关键词：中小微企业，KMV 模型，多元线性回归，信贷决策

Analysis of credit decision of MSMEs based on KMV model

ABSTRACT

This paper focuses on the credit decision problem of Micro, Small and Medium Enterprises(MSMEs). Firstly, it introduces the definition and derivation of geometric Brownian motion, Ito's formula and Black-Scholes formula. Secondly, the KMV model, the model for assessing the default probability of enterprises is introduced, and its parameters are adjusted according to the actual situation of the Chinese market. Finally, the adjusted KMV model is used to estimate the default distance of the selected companies, the 302 non-listed companies in China, and a multiple linear regression method is used to make credit decision analysis.

The results show that the default distance calculated by the adjusted KMV model can greatly reflect the creditworthiness of enterprises, the smaller the default distance, the higher the creditworthiness of enterprises. Banks tend to issue more loans to enterprises with high credit ratings. On the contrary, a small amount or even no loans to enterprises with low credit ratings. At the same time, in order to prevent from the loss of potential business customers, the maximum benefit is obtained when the annual interest rate of bank loans is at 5.05%.

Keywords: MSMEs, KMV model, Multiple linear regression, credit decision

目　　录

第一章　中国信贷市场背景综述 …… 1

第二章　KMV 模型和修正的 KMV 模型 …… 3

2.1 Black-Scholes 期权定价公式 …… 3

2.1.1 布朗运动的数学定义 …… 3

2.1.2 用几何布朗运动描述股价 …… 4

2.1.3 伊藤公式 …… 5

2.1.4 Black-Scholes 期权定价公式 …… 6

2.2 KMV 的基本模型 …… 7

2.3 针对中国中小微企业的模型调整 …… 11

第三章　基于 KMV 模型的信贷决策分析实例 …… 13

3.1 数据处理 …… 13

3.2 KMV 模型应用 …… 14

3.3 建立收益函数与贷款策略分析 …… 16

3.4 结论 …… 19

第四章　总结与展望 …… 20

4.1 全文总结 …… 20

4.2 当代大学生对中小微企业绿色信贷展望 …… 20

参考文献 …… 20

致谢 …… 22

第一章　中国信贷市场背景综述

2022 年 9 月 7 日召开的国务院常务会议指出“必须以更强紧迫感夯实经济恢复基础，引导银行增加对中小微企业首贷、信用贷、续贷、中长期贷款等”[1]。此前召开的国务院常务会议部署实施稳经济一揽子政策的接续政策措施，也提出要持续释放贷款市场报价利率改革和传导效应，降低企业融资和个人消费信贷成本；出台措施支持民营企业发展和投资；提出以“绿色信贷”作为最主要的融资渠道来应对环境和社会风险。

2022 年，中国绿色金融市场规模已经跃居世界前列。其中，绿色信贷作为绿色金融体系中成熟度最高的产品，一直保持着蓬勃发展的势头。绿色信贷在多方面发挥着积极作用。一方面，作为贯彻落实”双碳”战略、实现金融支持实体经济的关键举措，绿色信贷有助于实现资源节约型、环境友好型社会，是实现社会可持续发展的有力金融杠杆。另一方面，绿色信贷还有助于实现绿色经济、低碳经济、循环经济，防范环境和社会风险，提升项目和企业自身的环境和社会表现 [6]。

在中国经济向高质量发展转型、人民对环境质量的要求日益提高、绿色发展成为核心战略的背景下，绿色信贷将成为市场实现低碳发展，应对环境和社会风险的重要融资渠道。因此，把握住绿色信贷，决策好绿色信贷是当前中国金融市场的首要任务之一。当前，经济总体延续恢复态势，通过加大对民营企业和中小微企业的信贷支持，可以稳定市场主体，并在保就业、保民生等方面有重大意义。

近年来中国高校对绿色信贷的话题也有过讨论。2020 年全国大学生数学建模竞赛中 C 题围绕中小微企业的信贷决策问题展开了讨论，给出了 302 家无信贷记录企业的相关数据和贷款利率与客户流失率关系的 2019 年统计数据，要求学生建立数学模型并给出相应的信贷策略 [7]。笔者此前与其他两位同学合作参与了该题目，但由于竞赛时间短，以及数学基础较差的缘故并没有深入对该问题进行研究，因此本文将对当时的竞赛思路和模型建立的逻辑进行重新梳理和扩展，以题目中给出的数据为蓝本，采用修正的 KMV 模型对 302 家中小微企业的违约距离进行估计、实证分析、并给出信贷决策，旨在对中国中小微企业绿色信贷所面临的债务风险给出自己的量化方法，并提出针对性的建议。

KMV 模型由美国旧金山市的 KMV 公司于 1997 年提出，主要通过衡量公司的市场风险、财务健康状况以及债务特征来预测公司债务违约的概率，以评估企业的债务违约风险 [12]。其核心思想是通过引入公司股价的波动性、市场风险和财务健康状况等因素，对公司违约风险进行定量化的评估。模型将公司的负债和资产视为期权的权利和义务，利用期权定价理论中的 Black-Scholes 期权定价

公式和伊藤公式，计算公司的违约概率 [8]。其中，公司股价的波动性被视为公司市场风险的度量，市场风险被用于估计公司负债和资产的价值波动，而财务健康状况则通过公司财务指标的历史数据来反映。

KMV 模型作为本文的重点模型，会在后续第三章详细讲解其推导过程并给出在中国金融背景下的修正模型，这是本文的重点之一；接着在第四章进行实例应用，给出企业债务违约风险的判定规则，并进行信贷策略分析。

由于 KMV 模型是在几何布朗运动、伊藤公式、Black-Scholes 期权定价公式作为理论工具的基础上，结合公司财务健康状况和市场风险等因素，评估公司债务违约风险的模型。而且，三者作为近 70 年全世界金融研究中使用率最高，效果最好的模型，它们在金融市场的建模和定价中也发挥着重要作用，也是财经类院校的学生最需要弄懂并掌握的内容。因此笔者总结了对大学阶段金融数学中几何布朗运动、伊藤公式、Black-Scholes 期权定价公式的理解和领会，并在第二章对它们进行介绍和推导。

章节内容概述：

第一章：简要介绍了中国绿色信贷市场的背景以及 KMV 模型，并对文章结构进行简要梳理。

第二章：介绍几何布朗运动、伊藤公式、Black-Scholes 期权定价公式及其推导逻辑，为后文说明 KMV 模型的优势以及推导 KMV 模型做铺垫。

第三章：利用第二章介绍的几何布朗运动、伊藤公式、Black-Scholes 期权定价公式推导出评估企业违约概率的模型——KMV 模型，并根据中国金融市场背景对该模型做出调整，得到适应中国中小微企业和金融市场的修正后的 KMV 模型。

第四章：应用修正后的 KMV 模型对实际案例进行信贷决策分析，给出企业的信用评级和信贷决策。

第五章：总结本文的工作以及优缺点，并展望了中国未来中小微企业的绿色信贷发展。

第二章　KMV 模型和修正的 KMV 模型

本章将先简单介绍几何布朗运动、伊藤公式、Black-Scholes 期权定价公式等基础概念，然后推导评估企业违约概率的模型——KMV 模型，并根据中国金融市场背景对该模型做出调整，得到适应中国中小微企业和金融市场的修正后的 KMV 模型。

2.1　Black-Scholes 期权定价公式

2.1.1　布朗运动的数学定义

Black-Scholes 期权定价公式，顾名思义，是对期权进行定价的公式。期权作为一种金融衍生品，可以看做是关于股票价格的函数。而股票价格的变动是一种无规则运动，因此，在介绍 Black-Scholes 期权定价公式之前，必须对同样是无规则运动的布朗运动有一定了解。

以时域上的一维布朗运动为例介绍布朗运动：布朗运动是微小粒子随着时间变化在流体中做的连续的无规则运动 [2]。

下图为在时域 $t \in [0, 1]$ 上的一维布朗运动。

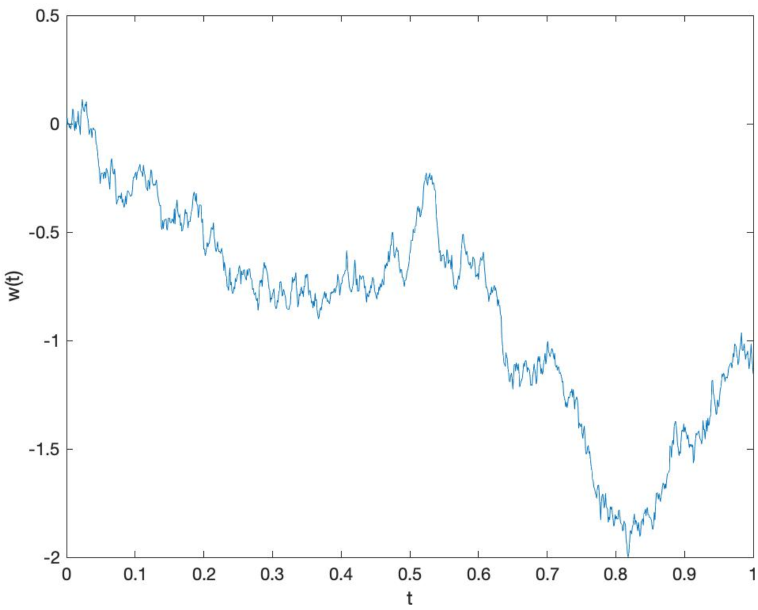

图 2.1　时域上的一维布朗运动

从图中可以看出，布朗运动在时域上的走势和股票价格随时间的走势非常

相似，从上世纪初便有不少数学家与经济学家利用布朗运动来分析股票和期权的价格。

定义 2.1 (参考 [2] 的定义 7.1) 一维布朗运动 $(B_t)_{t\geq 0}$ 是关于时间 t 的一个随机过程，它满足:

1.$B_0=0$。

2.$(B_t)_{t\geq 0}$ 几乎处处连续，即映射 $t\to B_t$ 是连续的。

3.(独立增量性) 设时间 t 和 s 满足 $t>s$，增量 B_t-B_s 独立于时间 s 前的过程 $(B_u)_{0\leq u\leq s}$。

4.(平稳性) 设时间 t 和 s 满足 $t>s$，增量 B_t-B_s 服从均值为 0，方差为 $t-s$ 的正态分布。

由布朗运动的独立增量性可知，布朗运动是一个马尔科夫过程，即该过程在任意 t 时刻之后的位置仅和 t 时刻的位置有关，与 t 之前的历史轨迹无关 [4]。换句话说，该过程的当前值就包含了对其未来做预测所需的全部信息。

2.1.2 用几何布朗运动描述股价

现在，考虑给布朗运动 B_t 加上一个仅和时间 t 有关的漂移项 μt，以及一个尺度参数 σ，便得到一个带漂移的布朗运动 X_t，记作 $X_t=\mu t+\sigma B_t$ 。

由布朗运动的平稳性可知，X_t 在任意长度 t 内的分布满足均值为 μt，方差为 $\sigma^2 t$ 的正态分布。考虑无穷小量的形式，上式写作:

$$dX_t=\mu dt+\sigma dB_t. \tag{2.1}$$

其中 dB_t 表示布朗运动在一个无穷小的时间间隔内的变化。

因为股票的价格不能是负数，而 X_t 以及 B_t 的取值随着时间 t 的变化可以是负数，所以 X_t 并不是描述股价运动的很好的选择。

但是，由于股票价格的随机性，股票的收益率也是随机的，因此股票的收益率也可以看做是布朗运动，并且由于股票价格有正有负，因此 X_t 可以被用来描述股票的收益率 [4]。

假设 S_t 为股票的价格，dS_t 为股价在无穷小的时间间隔内的变化量，则这段时间间隔内的股票收益率可以用 $\frac{dS_t}{S_t}$ 表示，因此有

$$\frac{dS_t}{S_t}=\mu dt+\sigma dB_t. \tag{2.2}$$

将左式分母上的 S_t 乘到方程右侧，得到关于股价 S_t 的随机微分方程:

$$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dB_t. \tag{2.3}$$

满足上述(2.3)式关于股价 S_t 的随机微分方程称之为是一个几何布朗运动。

由布朗运动的平稳性可知，股票价格的收益率 $\frac{dS_t}{S_t}$ 在任意长度 t 内服从均值为 μt，方差为 $\sigma^2 t$ 的正态分布，而根据投资市场的经验事实证明，股票价格的连续复利收益率近似服从于正态分布；又由布朗运动的独立增量性可知，股票价格的收益率 $\frac{dS_t}{S_t}$ 的变动是一个马尔可夫过程，即股票价格 S_t 是一个马尔科夫过程 [2]。也就是说股票的当前价格 S_t 就包含了对其未来做预测所需的全部信息，这与弱有效市场假说相符 [3]。因此(2.3)式所描述的关于股价 S_t 的几何布朗运动是一个在金融数学领域有强大应用价值的工具。

当然，为了使用(2.3)式对股价 S_t 进行分析，必须能够求解它。然而传统的微积分方法对它无能为力，这是因为布朗运动的无规则性，其轨迹处处没有切线。也就是说，S_t 随时间变化虽然连续，但它处处不可微分。这时，需要一些全新的微积分方法来解决这个问题了。

2.1.3 伊藤公式

上文说到，传统的微积分手段不能计算一个处处不可微分的函数方程，因此需要一种新的工具去求解(2.3)式。在这里引入伊藤公式，伊藤公式作为日本数学家伊藤清提出的伊藤积分重点内容，是求解布朗运动的重要工具 [5]。

定理 2.1 (伊藤公式) 设 $f_t = f(S_t, t)$，f 是二元可微函数，若随机过程 S_t 适合微分方程

$$dS_t = \mu\left(S_t, t\right) dt + \sigma\left(S_t, t\right) dB_t.$$

则

$$\begin{aligned} df_t &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(S_t, t\right)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} dS_t \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\left(S_t, t\right)\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(S_t, t\right)\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\right) dt + \sigma\left(S_t, t\right)\frac{\partial f}{\partial S} dB_t. \end{aligned} \tag{2.4}$$

证明:

具体证明过程详见 [3] 第四章。 □

为了能够求解股价 S_t，我们令 $f = \ln S_t$，并令

$$\mu(S_t, t) = \mu S_t, \qquad \sigma(S_t, t) = \sigma S_t.$$

对 df 使用伊藤公式(2.4)，有

$$d\ln S_t = \left(\frac{\partial \ln S_t}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial \ln S_t}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 \ln S_t}{\partial S^2}\right) dt + \sigma S_t \frac{\partial \ln S_t}{\partial S} dB_t. \tag{2.5}$$

化简得到：

$$d\ln S_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB_t. \tag{2.6}$$

由布朗运动的定义 (2.1) 可知，在任何时间 t 内，$\ln S_t$ 的变化符合正态分布：

$$\ln S_t \sim \mathcal{N}\left(\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right).$$

通过对(2.6)两边积分，再对等式两边取指数，得到股价 S_t 随时间变化的解析式：

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right\}. \tag{2.7}$$

2.1.4 Black-Scholes 期权定价公式

根据伊藤公式(2.4)，因为我们可以把期权 $C = C(S_t, t)$ 是关于股票价格 S_t 的函数，代入(2.4)式可得：

$$dC = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \mu\left(S_t, t\right)\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2\left(S_t, t\right)\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt + \sigma\left(S_t, t\right)\frac{\partial C}{\partial S}dB_t. \tag{2.8}$$

在过去金融数学发展的五十年间，Paul Samuelson 通过(2.2)式及(2.8)式，研究出了看涨期权的定价问题 [13]，并经由 Fischer Black 和 Myron Scholes 进行完善 [10]，得到了风险中性定价理论下的欧式看涨期权价格表达式：

$$C = e^{-rt}\mathbb{E}[\max(S_t - K, 0)]. \tag{2.9}$$

上式表明，欧式看涨期权的价格在行权日 t 的期望价值为 $\mathbb{E}[\max(S_t - K, 0)]$，其中 S_t 为股票在 t 时刻的价格，K 为行权价。期权的折现率也可以用无风险收益率 r 来表示，股价 S_t 的期望收益率也等于无风险收益率 r。因此其计算公式可以表述为如下定理：

定理 2.2 (参考 [3] 的 5.2 节) 设 $C(S_t, t)$ 是看涨期权的期权价格，S_t 是股价，K 是行权价，T 是期权的到期时间，则有

$$C(S_t, t) = S_t N\left(d_1\right) - Ke^{-r(T-t)}N\left(d_2\right). \tag{2.10}$$

其中：

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_t}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \tag{2.11}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \tag{2.12}$$

这里 $N(x)$ 称为标准正态分布的累积概率分布函数：

$$N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{\omega^2}{2}}d\omega. \tag{2.13}$$

证明：

具体证明过程详见 [3] 第五章。 □

在 Black-Scholes 公式(2.10)中，N 代表了标准正态分布的累积密度函数，因此 $N(d_1)$ 和 $N(d_2)$ 就代表两个概率。$N(d_1)$ 可以理解为看欧式看涨期权价格 $C(S_t,t)$ 对标的股票价格 S_t 的变化的敏感程度。而 $N(d_2)$ 表示在风险中性世界中期权被行权的概率，即 $\mathrm{P}(S_t>K)$，详见 [4]。

2.2 KMV 的基本模型

KMV 模型是美国旧金山市 KMV 公司于上世纪末建立的一种用于估计贷款企业违约概率 ψ_P（Default Probability）的信贷模型。该模型的基本观点是，在企业债务面值 D 给定的情况下，银行的贷款信用风险，即信贷风险，由该企业的资产价值决定。但是，由于企业的资产价值无法在市场中进行交易，所以其市场价值无法直接观测到。因此，KMV 模型从另一侧面看待信贷风险的问题，从贷款企业所有者的角度考虑贷款归还的问题，通过估计借款企业违约概率帮助贷款银行评估企业的信用风险 [12]，并指导相应的风险管理决策。

传统估计企业违约概率 ψ_P 的方法通常使用信用评级的历史数据。然而，这种方法存在一些缺点，包括信用评级更新较慢，且由于债券流动性较差，历史数据不能准确反映相应企业的违约概率 ψ_P。

相比传统方法，KMV 模型更加灵活地反映了企业实际违约概率的情况。它基于 Black-Scholes 模型，将企业股权价值 E_t 视为一个欧式看涨期权，并使用股票价格来估计违约概率 ψ_P。即，将企业股权价值 E_t 看作是企业所有者持有一份以企业债务面值 D 为行权价格，以企业的资产价值 V_t 为标的物的欧式看涨期权。因此公司资产价值 V_t 可以看做是 Black-Scholes 公式(2.10)中的股票价格 S_t，而企业债务面值 D 可以看做是行权价 K。有：

$$V_t=S_t,\qquad D=K. \tag{2.14}$$

表 2.1　　KMV 模型的符号约定

变量符号	意义	单位
V_0	企业当前的资产价值	万元
V_t	企业在 t 时刻的资产价值	万元
E_0	企业当前的股票价值	万元
E_t	企业在 t 时刻的股票价值	万元
D	企业债务面值	万元
σ_V	企业资产价值的波动率	
σ_E	股票价值的波动率	
r	无风险利率	
T	债务期限	
$N(d_n)$	正态分布的累积分布函数(2.13), 其中 $n = 1, 2$	
ψ_D	违约距离	
ψ_P	违约概率	
H_0	中小微企业的回归市场价值	万元
σ_H	中小微企业回归市场价值波动率	
P	营业利润	万元
χ_S	流动负债	万元
χ_L	非流动负债	万元

由上文介绍可以看出 KMV 模型用来评估信贷风险的基本思路：当企业当前的资产价值 V_0 低于企业所需清偿的债务 D 时，企业可能会发生违约 [11]。而为了评估企业实际的违约概率 ψ_P，则通过违约距离 ψ_D（Distance to Default）和企业违约数据库的分析得到。通过违约距离 ψ_D 来反映企业的资产价值的期望值与违约点 ψ_O（Default Point）之间的距离，违约距离越大 ψ_D 则说明企业发生违约的可能性越小；反之可能性较大。

估计企业违约概率 ψ_P 有以下三个步骤：估计企业资产价值 V_0 和资产价值波动率 σ_V；计算违约距离 ψ_D；估计违约概率 ψ_P。由于不能直接观测到 V_0 和 σ_V，因此需要从它们与公司当前的股票价值 E_0、股权市场价值波动率 σ_E 以及企业债务面值 D 之间的关系中推导得出。

1. 估计企业资产市场价值 V_0 和波动率 σ_V

因为公司的股票价值 S_t 可以看做是一个欧式看涨期权，因此公司在 t 时刻

的股票价值可设为

$$E_t = \max\left(V_t - D, 0\right).$$

由 Black-Scholes 公式(2.10)，S_t 是股票价格，V_t 是资产价值，D 是债务面值，T 是债务期限，有

$$E_t = V_t N\left(d_1\right) - D\mathrm{e}^{-r(T-t)} N\left(d_2\right). \tag{2.15}$$

其中，

$$d_1 = \frac{\ln\left(V_0/D\right) + \left(r + \sigma_V^2/2\right)\left(T-t\right)}{\sigma_V \sqrt{T-t}}, \tag{2.16}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T-t}. \tag{2.17}$$

因为企业的股票价值 E_t 以及资产价值 V_t 服从几何布朗运动，由 2.2 节，可以用如下形式的微分方程描述 dV_t 与 dE_t：

$$dV_t = rV_t dt + \sigma_V V_t dB_t \tag{2.18}$$

与

$$dE_t = rE_t dt + \sigma_E E_t dB_t. \tag{2.19}$$

因为企业的股票价值 E_t 是资产价值 V_t 的函数 ($E_t = f(V_t, t)$)，由公式(2.4)可知：

$$dE_t = \left(\frac{\partial E}{\partial t} + rV_t \frac{\partial E}{\partial V} + \frac{1}{2}\sigma_V^2 V_t^2 \frac{\partial^2 E}{\partial V^2}\right) dt + \sigma_V V_t \frac{\partial E}{\partial V} dB_t. \tag{2.20}$$

联立(2.18)~(2.20)，化简得到企业股票价值波动率 σ_E 和企业资产价值波动率 σ_V 之间的关系式：

$$\sigma_E E_0 = N\left(d_1\right) \sigma_V V_0. \tag{2.21}$$

此时联立(2.15) $\sim$ (2.17)、(2.21)：

$$\begin{cases} \sigma_E E_0 = N\left(d_1\right) \sigma_V V_0, \\ E_0 = V_0 N\left(d_1\right) - D\mathrm{e}^{-r(T-t)} N\left(d_2\right), \\ d_1 = \dfrac{\ln\left(V_0/D\right) + \left(r + \sigma_V^2/2\right)\left(T-t\right)}{\sigma_V \sqrt{T-t}}, \\ d_2 = d_1 - \sigma_V \sqrt{T-t}. \end{cases} \tag{2.22}$$

通过求解(2.22)可以得出企业当前的资产市价值 V_0 和波动率 σ_V 的值，通过这两

个量便可在后续计算出违约距离 ψ_D。由于该微分方程组包含两个累积分布函数，难以得出其解析解，因此在后续实证部分将使用 Matlab 对其进行求解 [11]。

2. 计算违约距离 ψ_D

KMV 模型的原理表示：企业资产价值 V_0 小于债务面额 D 时会发生违约。因此可以设定违约点：ψ_O 用于表示企业可能发生违约的临界值，其数值就是债务面额 D 的数值。但因为非流动负债 χ_L 不用立刻偿还，因此在实际的金融信贷问题中，通常将违约点 ψ_O 设为流动负债 χ_S 与非流动负债 χ_L 一半的和，公式如下：

$$\psi_O = \chi_S + 0.5 \times \chi_L.$$

根据 KMV 模型，违约距离可写成

$$\psi_D = \frac{V_0 - \psi_O}{V_0 \sigma_V}. \tag{2.23}$$

3. 估计违约概率 ψ_P

假设企业未来市场价值围绕企业资产市场的均值呈正态分布，且资产价值服从于几何布朗运动，并令布朗运动 $B_t = \sqrt{t}\varepsilon$，其中 ε 是一个正态分布 [9]，由(2.7)有

$$V_t = V_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)t + \sigma_V B_t\right\}. \tag{2.24}$$

则违约概率 ψ_P：$P\{V_t < D\}$ 可以写成：

$$\begin{aligned}
P\{V_t < D\} &= P\left\{V_0 \exp\left\{\left(r - \frac{\sigma_V^2}{2}\right)t + \sigma_V\sqrt{t}\varepsilon\right\} < D\right\} \\
&= P\left\{\varepsilon < \frac{\ln\frac{D}{V_0} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)(T-t)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}\right\} \\
&= P\left\{\varepsilon < \sigma_V\sqrt{T-t} - d_1\right\} \\
&= P\{\varepsilon < -d_2\} = N(-d_2).
\end{aligned} \tag{2.25}$$

有：

$$P\{V_t < D\} = N(-d_2). \tag{2.26}$$

因此违约概率 ψ_P

$$\psi_P:\ P\left\{V_t < D\right\} = N\left(-d_2\right). \tag{2.27}$$

违约距离 ψ_D 越小，违约概率 ψ_P 就越大，公司违约的概率也就越大；违约距离 ψ_D 越大，违约概率 ψ_P 就越小，公司违约的概率也就越小。

综上，我们得到了 KMV 模型计算企业违约概率的全部方程，如下所示：

$$\begin{cases} \sigma_E E_0 = N\left(d_1\right)\sigma_V V_0, \\ E_0 = V_0 N\left(d_1\right) - D\mathrm{e}^{-r(T-t)} N\left(d_2\right), \\ d_1 = \dfrac{\ln\left(V_0/D\right) + \left(r + \sigma_V^2/2\right)\left(T-t\right)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}, \\ d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{T-t}, \\ \psi_D = \dfrac{V_0 - \psi_O}{V_0\sigma_V}, \\ P\left\{V_t < D\right\} = N\left(-d_2\right). \end{cases} \tag{2.28}$$

2.3 针对中国中小微企业的模型调整

考虑到中国信用风险的发展，用经典的 KMV 模型来评价中国金融市场的违约风险是不有效的。

首先，经典 KMV 模型是基于美国金融市场的大量实证研究，美国金融市场已经非常成熟，虽然我国金融市场发展势头良好，但与美国市场相比仍有不小的差距；主要原因在于我国缺乏违约时间的统计数据，也没有完善的企业信用数据库，缺乏必要的违约概率 ψ_P 计算信息 [16]。

其次，由于本文所研究的中国中小微企业大多为非上市公司，在金融市场并没有发行股票，因此如何评估其股权价值和股权价值波动率需要进一步的讨论。

因此，本文对经典的 KMV 模型进行了修正，得到了适应中国中小微企业和资本市场的 KMV 模型，从而更好地服务于中国的金融市场。

1. 对判定变量进行更改

由于我国金融市场历史较短，还没有建立针对中小微企业的历史违约数据库，缺少将违约距离 ψ_D 转化为违约概率 ψ_P 的历史违约率。因此针对中小微企业仅计算到它们的违约距离 ψ_D 为止，用违约距离 ψ_D 的大小来判定公司的信用风险大小。

即，以违约距离 ψ_D 的计算结果(2.23)作为企业信用评级以及进行信贷决策的参考数据。

2. 以回归股权价值 H_0 代替股权价值 E_0

由于中小微企业未上市，无法计算公司的股权市场价值 E_0，所以将采用回归股权价值 H_0 将其代替。

对中小微企业的回归股权价值 H_0 采用多元回归方法进行计算：因为企业股权价值 S_0 与营业利润 P 呈正相关，与企业的流动负债 χ_S 和非流动负债 χ_L 呈反相关，能够较为全面的反映公司的市值水平。所以我将通过 WIND 终端按不同行业对上市公司进行分类汇总，收集它们的营业利润 P、流动负债 χ_S 和非流动负债 χ_L、股权市场价值 E_0 四项数据。然后建立中小微企业关于流动负债 χ_S 和非流动负债 χ_L 和营业利润 P 的多元线性回归方程，求解出它们的回归股权价值 H_0：

$$H_0 = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 \chi_S + \beta_3 \chi_L + \varepsilon. \tag{2.29}$$

其中，β_0、β_1、β_2、β_3 为回归参数，ε 为残差项。

通过将 WIND 的上市公司数据带入回归方程求解出回归参数，然后将中小微企业对应的流动负债 χ_S、非流动负债 χ_L 和营业利润 P 回代入回归方程，得到中小微企业的回归股权价值 H_0。

3. 以回归股价波动率 σ_H 代替股价波动率 σ_E

通过上一步将回归股权价值 H_0 代替股权价值 E_0 后，很自然地，我们可以用回归股价波动率 σ_H 代替股价波动率 σ_E。如果记近三年的回归股权价值 H_0 的平均值为 $\overline{H_0}$，则中小微企业的回归股价波动率 σ_H 可记为：

$$\sigma_H = (\frac{H_0 - \overline{H_0}}{\overline{H_0}})^2. \tag{2.30}$$

综上，修正后的 KMV 模型为：

$$\begin{cases} \sigma_H H_0 = N\left(d_1\right)\sigma_V V_0, \\ H_0 = V_0 N\left(d_1\right) - D\mathrm{e}^{-r(T-t)} N\left(d_2\right), \\ d_1 = \dfrac{\ln\left(V_0/D\right) + \left(r + \sigma_V^2/2\right)\left(T-t\right)}{\sigma_V\sqrt{T-t}}, \\ d_2 = d_1 - \sigma_V\sqrt{T-t}, \\ \psi_D = \dfrac{V_0 - \psi_O}{V_0\sigma_V}, \\ \sigma_H = (\dfrac{H_0 - \overline{H_0}}{\overline{H_0}})^2. \end{cases} \tag{2.31}$$

第三章　基于 KMV 模型的信贷决策分析实例

结合 2020 年全国大学数学建模大赛的题目背景以及当下我国金融市场的信贷背景，我们假定某银行对所有确定要放贷的企业最少贷款 10 万元，最多贷款 100 万元，贷款期限为 1 年。在此背景下分析银行的收益目标以及信贷策略。现有 302 家无信贷记录企业的数据及其发票数据和贷款利率与客户流失率关系的 2019 年统计数据[1]，其中 302 家企业的企业代码为 E124-E425。现将利用修正的 KMV 模型对 302 家还未上市的中小微企业进行信用分析，给出信用评级，然后建立银行的收益函数，最后给出该银行在信贷总额为 10000 万元时的信贷策略。

3.1　数据处理

第一步　对 302 家企业根据 WIND 终端上的行业分类进行分类，将 302 家公司分为 14 类企业。然后对 WIND 终端内的行业数据进行汇总，收集上市公司营业利润 P、股权价值 E_0、流动负债 χ_S 和非流动负债 χ_L 等数据。

整理后结果如下表所示：

表 3.1　　302 家中小微企业行业分类表

行业类别	企业个数	利润 P	总流动负债 χ_S	总非流动负债 χ_L
采矿业	11	7,731.38	6509.42	3883.83
水电热生产和供应业	48	22,311.84	5505.08	1266.17
房地产业	5	23,875.71	71411.64	23676.04
建筑业	59	14,094.65	51009.48	16075.24
交通运输、仓储和邮政业	9	11,161.06	1464.09	668.28
居民服务、修理和其他服务业	1	6,517.90	690.91	383.78
科学研究和技术服务业	24	5,262.72	1205.48	313.96
农、林、牧、渔业	3	13,908.58	2146.77	547.56
批发和零售业	53	10,793.74	6782.5	1962.58
环境和公共设施管理业	3	4,499.22	2206.35	1266.73
文化、体育和娱乐业	7	10,804.68	2446.36	554.85
软件和信息技术服务业	9	12,487.72	3237.87	661.75
制造业	43	16,348.12	6354.12	1114.08
租赁和商务服务业	27	3,412.57	778.17	126.62

[1] 数据来源于 2020 年全国大学生数学建模竞赛 C 题

第二步　通过 (3.12) 式建立营业利润 P、股权市场价值 E_0、流动负债 χ_S 和非流动负债 χ_L 的多元线性回归方程，求解参数。

第三步　将 302 家公司的营业利润 P、流动负债 χ_S 和非流动负债 χ_L 的数据带入上述回归方程，利用(2.29)求解出中小微企业的回归股权价值 H_0。

第四步　通过(2.30)计算回归股价波动率 σ_H。

数据处理结果如下：

表 3.2　数据计算结果（节选）

企业代号	回归市场价值 H_0	波动率 σ_H
E134	2319.29	0.0133
E140	1462.59	0.2978
E159	1279.97	0.8842
E188	2141.36	0.5577
E190	4738.21	0.2979
E211	1452.31	0.4805
E234	1752.46	1.3446
E257	3088.43	1.8241
...	...	...

3.2　KMV 模型应用

将上一步计算得到的公司市值 H_0 和波动率 σ_H 代入修正后的 KMV 模型(2.31)，其中市场无风险利率 r 采用中国人民银行于 2019 年 9 月 12 日发行的一年期政府国债的利率：$r = 0.02541$[15]。经 Matlab 编程求解得到资产价值 V_0 以及资产波动率 σ_V。

进一步的，通过流动负债 χ_S 及非流动负债 χ_L 计算出违约点 ψ_O，并将求出的资产价值 V_0 以及资产波动率 σ_V 代入(2.23)得到违约距离 ψ_D。

数据处理结果如下：

表 3.3　KMV 模型计算结果（节选）

企业代号	违约点 ψ_O	违约距离 ψ_D
E134	831.63	26.64
E140	1137.93	19.30
E159	1211.07	15.33
E188	1534.95	16.73
E190	1984.91	21.58
E211	1439.28	13.32
E234	1051.45	10.98
E257	2969.15	8.69
……	……	……

为了方便后续对中小微企业公司进行信贷策略分析，这里对违约距离 ψ_D 进行了量化处理。根据违约距离 ψ_D 的定义：违约距离 ψ_D 越大，表示企业信用情况越好，违约风险越低；反之，违约距离 ψ_D 越小，则表示企业信用情况越差，违约风险越大。这里我们设置违约距离 $\psi_D > 18$ 为 A 级，$\psi_D \in (13, 18]$ 为 B 级，$\psi_D \in (6, 13]$ 为 C 级，$\psi_D \in (0, 6]$ 为 D 级。最终得到的 A 级、B 级、C 级、D 级的评级比例如下图所示 [17]。

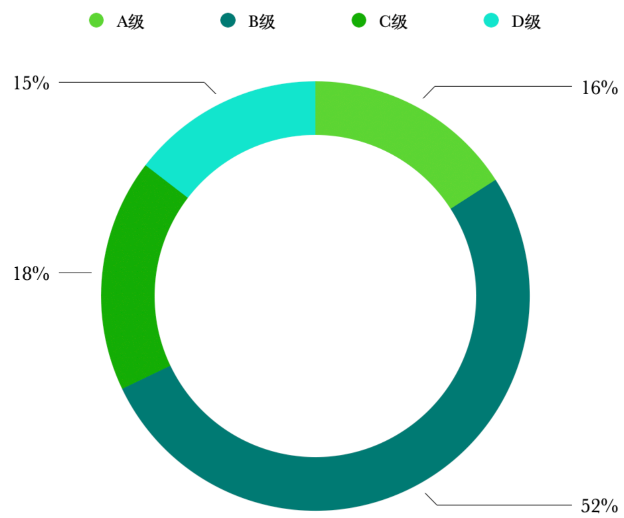

图 3.1　评级比例

3.3 建立收益函数与贷款策略分析

表 3.4　收益函数的符号约定

变量符号	意义	单位
I	银行收入	万元
Q	贷款额度	万元
R_w	客户流失率	
R_l	贷款年利率	

本节将根据中小微企业的信用评级，建立银行的收益函数，并给出该银行在信贷总额为 10000 万元时的信贷策略。银行收益函数的建立由以下三步骤构成[14]。

步骤一：决定对评级为 D 的企业不发放贷款

通过上一节对违约距离 ψ_D 的计算，以违约距离 ψ_D 为判定条件：若违约距离 $\psi_D \in (0,6]$，则表明该企业极有可能违约或无法偿清贷款，从而造成银行收益的不稳定，因此不对评级为 D 的企业发放贷款。

步骤二：估计客户流失率

因为银行贷款年利率与客户流失率有关的统计数据属于离散数据，所以针对不同信誉评级的客户，对其银行信贷年利率 R_l，与客户流失率 R_w 的关系进行回归。以信誉评级为 A 级的企业为例：绘制贷款年利率 R_l 与客户流失率 R_w 的散点图像，如下图所示：

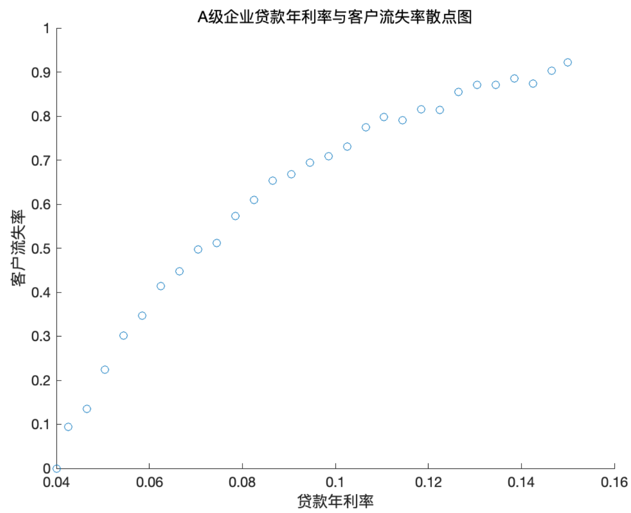

图 3.2　A 级企业贷款年利率与客户流失率的散点图

根据散点图的形状，和各种回归方程之间的比较，建立以下函数：

$$R_w = \ln(\beta_1 \times R_l + \beta_0). \tag{3.1}$$

针对不同信誉评级的企业，分别建立对应的客户流失率 R_w 和贷款年利率 R_l 的回归方程并求解，得：

表 3.5　　客户流失率 R_w 和贷款年利率 R_l 的回归结果

企业评级	β_1	β_0	R^2
A	13.23503	0.65595	0.96294267
B	12.55728	0.64879	0.97194086
C	12.69822	0.62033	0.97787802

其中 R^2 为回归检验得到的决定系数，因为 R^2 的值接近 1，能够较好符合数据的真实情况。

由此，我们得到了不同评级企业的关于客户流失率 R_w 和贷款年利率 R_l 的关系式。在贷款年利率 R_l 处于 $[0.04, 0.15]$ 区间内，且客户流失率 R_w 随贷款年利率 R_l 的增大而增大，因为贷款年利率 R_l 与银行收益 I 呈正相关，客户流失率 R_w 与银行收益 I 呈反相关，银行的收益函数可以写成：

$$I = Q \times R_l \times (1 - R_w). \tag{3.2}$$

其中，$R_l \in [0.04, 0.15]$。

步骤三：违约距离 ψ_D 参与银行收益函数的计算

因为企业的违约距离 ψ_D 与违约概率 ψ_P 呈反相关：违约距离 ψ_D 越小，违约概率 ψ_P 越大，一旦企业违约，那么银行的收益会变得不可控；反之，违约距离 ψ_D 越大，违约概率 ψ_P 越小，那么银行的收益会变得更稳定。

所以为了使银行收益 I 更稳定，我们取所有评级为 A 级和 B 级企业的违约距离均值 $\overline{\psi_D}$ 作为基准量，只要该企业的违约距离 ψ_D 大于均值 $\overline{\psi_D}$，则判断该企业违约概率不大，银行收益稳定；反之，若该企业的违约距离 ψ_D 小于均值 $\overline{\psi_D}$，则判断该企业有概率违约，会造成银行收益的不稳定，在银行收益函数中添加不稳定项 $\psi_D/\overline{\psi_D}$，同时规定 A 级企业的贷款额度不得低于 85 万元；B 级企业的贷款额度不得高于 85 万元，不得低于 50 万元；C 级企业的贷款额度不得高于 50 万元。

最终，添加不稳定项后的银行收益函数可以写为：

$$I = \begin{cases} Q \times R_l \times (1 - R_w), & \overline{\psi_D} < \psi_D, \\ Q \times R_l \times (1 - R_w) \times \dfrac{\psi_D}{\overline{\psi_D}}, & \overline{\psi_D} \geq \psi_D. \end{cases} \tag{3.3}$$

其中，$R_l \in [0.04, 0.15]$。

最佳的信贷策略要在银行贷款额度总和为 10000 万元时，使得银行收益 I 最大，即

$$\max_{Q_i} I \tag{3.4}$$

s.t.

$$\begin{cases} \sum_i Q_i \leq 10000, \\ 0.04 \leq R_l \leq 0.15. \end{cases} \tag{3.5}$$

最终得到每个公司的贷款额度，如下表所示：

表 3.6　信贷决策（节选）

企业代号	信用评级	贷款年利率 R_l	客户流失率 R_w	贷款额度 Q	银行收益 I
E134	A	5.05%	22.46%	100.00	3.916
E140	A	5.05%	22.46%	100.00	3.916
E159	B	5.05%	20.65%	71.11	2.585
E188	B	5.05%	20.65%	77.94	2.691
E190	A	5.05%	22.46%	100.00	3.916
E211	B	5.05%	20.65%	80.12	2.652
E234	C	5.05%	18.13%	44.39	1.935
E257	C	5.05%	18.13%	35.08	0.850
···	···	···	···	···	···
总计	···	···	···	10000.00	337.081

进一步计算各个评级的贷款额度的均值和方差：

表 3.7　决策分析

信用评级	额度均值 (万元)	额度方差 (万元)
A	100.00	0
B	77.29	19.63
C	38.05	68.39
D	不发放贷款	不发放贷款

3.4　结论

由数据结果可见，信用评级为 A 的企业都拿到了满额的 100 万元贷款。

随着违约距离 ψ_D 减小，当为评级为 B 的企业发放贷款额度时，由于违约距离 ψ_D 逐渐小于违约距离均值 $\overline{\psi_D}$，它们的贷款额度不能拿满 100 万元，而是随着它们违约距离 ψ_D 的减小，所获得的贷款额度相应减少，最终 B 级企业的贷款额度均值为 77.29 万元，方差为 19.63，符合增强银行收益稳定性的策略。

而随着违约距离 ψ_D 进一步减小，信用评级为 C 级的企业将获得少量的贷款，贷款额度的均值只有 38.05 万元，并且有着高达 68.39 的方差，这表明 C 级企业的贷款额度波动较大，基于收益稳定性的需求，此时银行的收益较少。

根据步骤一，不对信用评级为 D 的企业发放贷款。

第四章　总结与展望

4.1 全文总结

本文围绕中小微企业的信贷决策问题，先后介绍了几何布朗运动、伊藤公式、Black-Scholes 公式的定义与推导，由此引出了评估企业违约概率的模型——KMV 模型；随后结合中国市场的实际情况对 KMV 模型中的参数及统计量进行调整，得到适用于中小微企业的修正 KMV 模型；并在最后进行实例分析：以我国 302 家非上市公司为样本，采用修正 KMV 模型对所选公司的违约距离进行估计，并做出信贷决策分析。

结果显示，通过 KMV 模型计算后得到的违约距离能较好得反映企业信用，违约距离越小的企业信用越高，银行为了贷款收益的稳定性，往往会对信用评级高的企业发放更多贷款，对信用评级低的企业发放少量贷款甚至不发放贷款。同时，为了防止潜在的企业客户流失，在银行贷款年利率处于 5.05% 时能获得最大收益。

本文优缺点如下：

1. 修正的 KMV 模型尝试性的给出了未上市的、无信贷记录的中小微企业的信贷评估方法，为未来中国市场绿色信贷提供了新的量化思路。

2. 在给出收益函数时充分考虑了贷款年利率与客户流失率、企业评级与违约距离的相互关系，有充分的理论分析过程，模型建立可靠。

3. 针对银行收益稳定性的讨论不够深入，可以考虑对不同评级的企业贷款额度增加随机扰动，得到更一般的信贷决策。

4. 考虑到实际生活中，为方便对企业信贷的额度进行计算，很少以百位数进行结算，本模型未考虑此影响。可以考虑优化贷款额度的计算方式，得到更符合实际的最优参数。

4.2 当代大学生对中小微企业绿色信贷展望

绿色金融正热门。中小微企业的绿色信贷作为一种可持续金融工具不仅对企业和金融机构具有重要意义，同时对财经院校的学生也有着深远的指导作用。

了解中小微企业的绿色信贷问题不仅有助于我们增加绿色金融意识，了解绿色金融对环境和社会的积极影响，更重要的是能够引导我们在未来的职业生涯中更加注重环保和可持续发展。另外，绿色金融和绿色信贷作为当前和未来金融业的重要方向，可以帮助我们了解绿色金融相关的行业趋势，从而使得我们在就业市场中具备竞争力，为我们的职业发展拓展更多的选择和机会。衷心祝愿中小微企业能够在绿色金融领域获得更多的政策支持，推动绿色经济的发展。

参考文献

[1] 郝瑀然, 2022. 扩大对民企和小微信贷支持[EB/OL]. http://www.gov.cn/zhengce/2022-09/25/content_5711769.htm.

[2] 何萍, 2017. 随机过程[M]. 上海: 上海财经大学出版社.

[3] 姜礼尚, 2016. 期权定价的数学模型和方法（第二版）[M]. 北京: 高等教育出版社.

[4] 马雷克 · 凯宾斯基、托马斯 · 札斯特温尼克, 2018. 金融数学——金融工程引论[M]. 北京: 中国人民大学出版社.

[5] 吴览、黄海、何洋波, 2018. 金融数学引论[M]. 北京: 北京大学出版社.

[6] 杨鹤, 2021. 服务科技创新，推动绿色发展——信贷投放继续保重点优结构[EB/OL]. http://www.gov.cn/xinwen/2022-01/05/content_5666453.htm.

[7] 佚名, 2020. 2020 年高教社杯全国大学生数学建模竞赛赛题[EB/OL]. http://www.mcm.edu.cn/html_cn/node/10405905647c52abfd6377c0311632b5.html.

[8] BABBS S H, NOWMAN K B, 1999. Kalman filtering of generalized vasicek term structure models[J]. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 34: 115 - 130.

[9] BARMISH B R, PRIMBS J A, 2011. On arbitrage possibilities via linear feedback in an idealized brownian motion stock market[J]. IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, 2011: 2889-2894.

[10] BLACK F, SCHOLES M S, 1973. The pricing of options and corporate liabilities[J]. Journal of Political Economy, 81: 637 - 654.

[11] CHEN Y, CHU G, 2014. Estimation of default risk based on KMV model—an empirical study for chinese real estate companies[J]. Journal of Financial Risk Management, 3: 40-49.

[12] NIE Y, 2022. Research on China’s green finance credit risk measurement based on improved KMV model — credit risk assessment of new energy automobile industry[J]. BCP Business & Management, 27: 292-300.

[13] SAMUELSON P A, 1954. The pure theory of public expanditure[J]. The Review of Economics and Statistics, 36 :387-389.

[14] XIAO-L S, 2013. Study on calculation of credit risks based on KMV model in China's internet finance[J]. Journal of Beijing University of Posts and Telecommunications, 15(6): 75-81.

[15] ZHANG R, SHI R, LI C, 2021. Local government debt risk measurement and early warning structural system building — research based on KMV and topsis models[J]. E3S Web of Conferences, 235: 02039.

[16] ZHANG S, LI Q, WANG D, 2010. Global financial crisis's impact on the credit risk of logistics companies: Comparative analysis between China and us with KMV model[J]. 2010 International Conference on Management of e-Commerce and e-Government, 2010: 116-121.

[17] ZHANG Y, SHI B, 2016. Non-tradable shares pricing and optimal default point based on hybrid KMV models: Evidence from China[J]. Knowl. Based Syst., 110: 202-209.