Année 2018

QCM DE MATHÉMATIQUES

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

Ces questions ont été écrites par Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari de l'université de Lille.

Ce travail a été effectué dans le cadre d'un projet Liscinum porté par l'université de Lille et Unisciel.

Table des matières

Première partie

Algèbre

Logique – Raisonnement

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

1 Logique – Raisonnement | 100

`Cours ● Logique et raisonnements`
`Vidéo ■ Logique`
`Vidéo ■ Raisonnements`
`Fiche d'exercices ♦ Logique, ensembles, raisonnements`

1.1 Logique | Facile | 100.01

Question 1

Soit P une assertion vraie et Q une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] P ou Q
- ☐ [Faux] P et Q
- ☐ [Faux] non(P) ou Q
- ☐ [Vrai] non$(P$ et $Q)$

Explications: P ou Q est vraie. Comme P et Q est fausse alors non$(P$ et $Q)$ est vraie.

Question 2

Par quoi peut-on compléter les pointillés pour avoir les deux assertions vraies ?

$$x \geqslant 2 \quad \dots \quad x^2 \geqslant 4 \qquad\qquad |y| \leqslant 3 \quad \dots \quad 0 \leqslant y \leqslant 3$$

- ☐ [Faux] $\Longleftarrow$ et $\Longrightarrow$
- ☐ [Faux] $\Longrightarrow$ et $\Longrightarrow$
- ☐ [Faux] $\Longleftarrow$ et $\Longrightarrow$
- ☐ [Vrai] $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$

Explications: Si $x \geqslant 2$ alors $x^2 \geqslant 4$, la réciproque est fausse. Si $0 \leqslant y \leqslant 3$ alors $|y| \leqslant 3$, la réciproque est fausse.

Question 3

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x \geqslant 0$
- ☐ [Vrai] $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 - n \geqslant 0$
- ☐ [Vrai] $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x^3 - x| \geqslant 0$
- ☐ [Vrai] $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \quad n^2 - 3 \geqslant 0$

Explications: Attention, $x^2 - x$ est négatif pour $x = \frac{1}{2}$ par exemple !

Question 4
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\exists x > 0 \quad \sqrt{x} = x$
- ☐ [Faux] $\exists x < 0 \quad \exp(x) < 0$
- ☐ [Faux] $\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 = 17$
- ☐ [Vrai] $\exists z \in \mathbb{C} \quad z^2 = -4$

Explications: Oui il existe $x > 0$ tel que $\sqrt{x} = x$, c'est $x = 1$.

Question 5
Un groupe de coureurs C chronomètre ses temps : $t(c)$ désigne le temps (en secondes) du coureur c. Dans ce groupe Valentin et Chloé ont réalisé le meilleur temps de 47 secondes. Tom est déçu car il est arrivé troisième, avec un temps de 55 secondes. À partir de ces informations, quelles sont les assertions dont on peut déduire qu'elles sont vraies ?

- ☐ [Vrai] $\forall c \in C \quad t(c) \geqslant 47$
- ☐ [Faux] $\exists c \in C \quad 47 < t(c) < 55$
- ☐ [Vrai] $\exists c \in C \quad t(c) > 47$
- ☐ [Faux] $\forall c \in C \quad t(c) \leqslant 55$

Explications: Comme Tom est troisième, il n'existe pas de c tel que $47 < t(c) < 55$.

Question 6
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] La négation de "$\forall x > 0 \quad \ln(x) \leqslant x$" est "$\exists x \leqslant 0 \quad \ln(x) \leqslant x$".
- ☐ [Vrai] La négation de "$\exists x > 0 \quad \ln(x^2) \neq x$" est "$\forall x > 0 \quad \ln(x^2) = x$".
- ☐ [Faux] La négation de "$\forall x \geqslant 0 \quad \exp(x) \geqslant x$" est "$\exists x \geqslant 0 \quad \exp(x) \leqslant x$".
- ☐ [Faux] La négation de "$\exists x > 0 \quad \exp(x) > x$" est "$\forall x > 0 \quad \exp(x) < x$".

Explications: La négation de "$\forall x > 0 \quad P(x)$" est "$\exists x > 0 \quad \text{non}(P(x))$". La négation de "$\exists x > 0 \quad P(x)$" est "$\forall x > 0 \quad \text{non}(P(x))$".

1.2 Logique | Moyen | 100.01

Question 7
Soit P une assertion fausse, Q une assertion vraie et R une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Q et (P ou R)
- ☐ [Faux] P ou (Q et R)
- ☐ [Vrai] non(P et Q et R)
- ☐ [Vrai] (P ou Q) et (Q ou R)

Explications: Il y a 8 possibilités à tester à chaque fois, selon que P, Q, R soient vraies ou fausses.

Question 8
Soient P et Q deux assertions. Quelles sont les assertions toujours vraies (que P et Q soient vraies ou fausses) ?

- ☐ [Faux] P et non(P)
- ☐ [Vrai] non(P) ou P
- ☐ [Faux] non(Q) ou P
- ☐ [Vrai] (P ou Q) ou (P ou non(Q))

Explications: On appelle une tautologie une assertion toujours vraie. C'est par exemple le cas de "non(P) ou P", si P est vraie, l'assertion est vraie, si P est fausse, l'assertion est encore vraie !

Question 9
Par quoi peut-on compléter les pointillés pour avoir une assertion vraie ?

$$|x^2| < 5 \quad \ldots \quad -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

- ☐ [Vrai] $\Longleftarrow$
- ☐ [Vrai] $\Longrightarrow$
- ☐ [Vrai] $\Longleftrightarrow$
- ☐ [Faux] Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Explications: C'est une équivalence, donc en particulier les implications dans les deux sens sont vraies !

Question 10
À quoi est équivalent $P \implies Q$?

- ☐ [Faux] non(P) ou non(Q)
- ☐ [Faux] non(P) et non(Q)
- ☐ [Vrai] non(P) ou Q
- ☐ [Faux] P et non(Q)

Explications: La définition (à connaître) de "$P \implies Q$" est "non(P) ou Q".

Question 11
Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\forall x \in]0,+\infty[\quad \exists y \in \mathbb{R} \qquad y = f(x)$
- ☐ [Faux] $\exists x \in]0,+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad y = f(x)$
- ☐ [Vrai] $\exists x \in]0,+\infty[\quad \exists y \in \mathbb{R} \qquad y = f(x)$
- ☐ [Faux] $\forall x \in]0,+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad y = f(x)$

Explications: L'ordre des "pour tout" et "il existe" est très important.

Question 12
Le disque centré à l'origine de rayon 1 est défini par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\forall x \in [-1,1] \quad \forall y \in [-1,1] \qquad (x,y) \in D$
- ☐ [Vrai] $\exists x \in [-1,1] \quad \exists y \in [-1,1] \qquad (x,y) \in D$
- ☐ [Vrai] $\exists x \in [-1,1] \quad \forall y \in [-1,1] \qquad (x,y) \in D$
- ☐ [Vrai] $\forall x \in [-1,1] \quad \exists y \in [-1,1] \qquad (x,y) \in D$

Explications: Faire un dessin permet de mieux comprendre la situation !

1.3 Logique | Difficile | 100.01

Question 13
On définit l'assertion "ou exclusif", noté "xou" en disant que "P xou Q" est vraie lorsque P est vraie, ou Q est vraie, mais pas lorsque les deux sont vraies en même temps. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si "P ou Q" est vraie alors "P xou Q" aussi.
- ☐ [Vrai] Si "P ou Q" est fausse alors "P xou Q" aussi.
- ☐ [Vrai] "P xou Q" est équivalent à "(P ou Q) et (non(P) ou non(Q))"
- ☐ [Faux] "P xou Q" est équivalent à "(P ou Q) ou (non(P) ou non(Q))"

Explications: Commencer par faire la table de vérité de "P ou Q".

Question 14
Soient P et Q deux assertions. Quelles sont les assertions toujours vraies (que P, Q soient vraies ou fausses) ?

- ☐ [Vrai] $(P \implies Q)$ ou $(Q \implies P)$
- ☐ [Vrai] $(P \implies Q)$ ou (P et non(Q))
- ☐ [Vrai] P ou $(P \implies Q)$
- ☐ [Faux] $(P \iff Q)$ ou (non(P) $\iff$ non(Q))

Explications: Tester les quatre possibilités selon que P, Q sont vraies ou fausses.

Question 15
À quoi est équivalent $P \Longleftarrow Q$?

- ☐ [Vrai] non(Q) ou P
- ☐ [Faux] non(Q) et P
- ☐ [Faux] non(P) ou Q
- ☐ [Faux] non(P) et Q

Explications: La définition (à connaître) de "$P \implies Q$" est "non(P) ou Q".

Question 16

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \exp(x) - 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\forall x, x' \in \mathbb{R} \qquad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$
- ☐ [Vrai] $\forall x, x' \in \mathbb{R} \qquad x \neq x' \Longleftarrow f(x) \neq f(x')$
- ☐ [Faux] $\forall x, x' \in \mathbb{R} \qquad x \neq x' \implies (\exists y \in \mathbb{R} \quad f(x) < y < f(x'))$
- ☐ [Vrai] $\forall x, x' \in \mathbb{R} \qquad f(x) \times f(x') < 0 \implies x \times x' < 0$

Explications: Dessiner le graphe de f pour mieux comprendre ! Même si $f(x) \neq f(x')$ cela ne veut pas dire que $f(x) < f(x')$, l'inégalité pourrait être dans l'autre sens.

Question 17

On considère l'ensemble

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } y \geqslant \sqrt{x}\right\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\forall y \geqslant 0 \quad \exists x \in [0,1] \qquad (x, y) \in E$
- ☐ [Vrai] $\exists y \geqslant 0 \quad \forall x \in [0,1] \qquad (x, y) \in E$
- ☐ [Faux] $\forall x \in [0,1] \quad \exists y \geqslant 0 \qquad (x, y) \notin E$
- ☐ [Faux] $\forall x \in [0,1] \quad \forall y \geqslant 0 \qquad (x, y) \notin E$

Explications: Faire un dessin de l'ensemble E.

Question 18

Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ une fonction. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] La négation de "$\forall x > 0 \quad \exists y > 0 \quad y \neq f(x)$" est "$\exists x > 0 \quad \exists y > 0 \quad y = f(x)$".
- ☐ [Faux] La négation de "$\exists x > 0 \quad \forall y > 0 \quad y \times f(x) > 0$" est "$\forall x > 0 \quad \exists y > 0 \quad y \times f(x) < 0$".
- ☐ [Faux] La négation de "$\forall x, x' > 0 \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$" est "$\exists x, x' > 0 \quad x = x'$ et $f(x) = f(x')$".
- ☐ [Vrai] La négation de "$\forall x, x' > 0 \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$" est "$\exists x, x' > 0 \quad x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$".

Explications: La négation du "$\forall x > 0 \quad \exists y > 0 \ldots$" commence par "$\exists x > 0 \quad \forall y > 0$. La négation de "$f(x) = f(x') \implies x = x'$" est "$f(x) = f(x')$ et $x \neq x'$".

1.4 Raisonnement | Facile | 100.03, 100.04

Question 19

Je veux montrer que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier, quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Quelles sont les démarches possibles ?

- ☐ [Faux] Montrer que la fonction $x \mapsto x(x+1)$ est paire.
- ☐ [Vrai] Séparer le cas n pair, du cas n impair.
- ☐ [Faux] Par l'absurde, supposer que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un réel, puis chercher une contradiction.
- ☐ [Faux] Le résultat est faux, je cherche un contre-exemple.

Explications: Séparer le cas n pair, du cas n impair. Dans le premier cas, on peut écrire $n = 2k$ (avec $k \in \mathbb{N}$), dans le second cas $n = 2k+1$, puis calculer $\frac{n(n+1)}{2}$.

Question 20

Je veux montrer par récurrence l'assertion $H_n : 2^n > 2n-1$, pour tout entier n assez grand. Quelle étape d'initialisation est valable ?

- ☐ [Faux] Je commence à $n = 0$.
- ☐ [Faux] Je commence à $n = 1$.
- ☐ [Vrai] Je commence à $n = 2$.
- ☐ [Vrai] Je commence à $n = 3$.

Explications: L'initialisation peut commencer à n'importe quel entier $n_0 \geqslant 2$.

Question 21

Je veux montrer par récurrence l'assertion $H_n : 2^n > 2n-1$, pour tout entier n assez grand. Pour l'étape d'hérédité je suppose H_n vraie, quelle(s) inégalité(s) dois-je maintenant démontrer ?

- ☐ [Vrai] $2^{n+1} > 2n+1$
- ☐ [Faux] $2^n > 2n-1$
- ☐ [Faux] $2^n > 2(n+1)-1$
- ☐ [Faux] $2^n + 1 > 2(n+1)-1$

Explications: H_{n+1} s'écrit $2^{n+1} > 2(n+1)-1$, c'est-à-dire $2^{n+1} > 2n+1$.

Question 22

Chercher un contre-exemple à une assertion du type "$\forall x \in E$ l'assertion $P(x)$ est vraie" revient à prouver l'assertion :

- ☐ [Faux] $\exists! x \in E$ l'assertion $P(x)$ est fausse.
- ☐ [Vrai] $\exists x \in E$ l'assertion $P(x)$ est fausse.
- ☐ [Faux] $\forall x \notin E$ l'assertion $P(x)$ est fausse.
- ☐ [Faux] $\forall x \in E$ l'assertion $P(x)$ est fausse.

Explications: Un contre-exemple, c'est trouver un x qui ne vérifie pas $P(x)$. (Rien ne dit qu'il est unique.)

1.5 Raisonnement | Moyen | 100.03, 100.04

Question 23
J'effectue le raisonnement suivant avec deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \times g(x) = 0$$

$$\implies \forall x \in \mathbb{R} \quad \big(f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0\big)$$

$$\implies \big(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0\big) \text{ ou } \big(\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 0\big)$$

- ☐ [Faux] Ce raisonnement est valide.
- ☐ [Faux] Ce raisonnement est faux car la première implication est fausse.
- ☐ [Vrai] Ce raisonnement est faux car la seconde implication est fausse.
- ☐ [Faux] Ce raisonnement est faux car la première et la seconde implication sont fausses.

Explications: On ne peut pas distribuer un "pour tout" avec un "ou".

Question 24
Je souhaite montrer par récurrence une certaine assertion H_n, pour tout entier $n \geqslant 0$. Quels sont les débuts valables pour la rédaction de l'étape d'hérédité ?

- ☐ [Faux] Je suppose H_n vraie pour tout $n \geqslant 0$, et je montre que H_{n+1} est vraie.
- ☐ [Faux] Je suppose H_{n-1} vraie pour tout $n \geqslant 1$, et je montre que H_n est vraie.
- ☐ [Vrai] Je fixe $n \geqslant 0$, je suppose H_n vraie, et je montre que H_{n+1} est vraie.
- ☐ [Faux] Je fixe $n \geqslant 0$ et je montre que H_{n+1} est vraie.

Explications: La récurrence a une rédaction très rigide. Sinon on raconte vite n'importe quoi !

Question 25
Je veux montrer que $e^x > x$ pour tout x réel avec $x \geqslant 1$. L'initialisation est vraie pour $x = 1$, car $e^1 = 2,718\ldots > 1$. Pour l'hérédité, je suppose $e^x > x$ et je calcule :

$$e^{x+1} = e^x \times e > x \times e \geqslant x \times 2 \geqslant x + 1.$$

Je conclus par le principe de récurrence. Pour quelles raisons cette preuve n'est pas valide ?

- ☐ [Faux] Car il faudrait commencer l'initialisation à $x = 0$.
- ☐ [Vrai] Car x est un réel.
- ☐ [Faux] Car l'inégalité $e^x > x$ est fausse pour $x \leqslant 0$.
- ☐ [Faux] Car la suite d'inégalités est fausse.

Explications: La récurrence c'est uniquement avec des entiers !

Question 26
Pour montrer que l'assertion "$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 > 3n - 1$" est fausse, quels sont les arguments valables ?

- ☐ [Faux] L'assertion est fausse, car pour $n = 0$ l'inégalité est fausse.
- ☐ [Vrai] L'assertion est fausse, car pour $n = 1$ l'inégalité est fausse.

- ☐ [Vrai] L'assertion est fausse, car pour $n = 2$ l'inégalité est fausse.
- ☐ [Vrai] L'assertion est fausse, car pour $n = 1$ et $n = 2$ l'inégalité est fausse.

Explications: C'est faux pour $n = 1$ et $n = 2$, mais bien sûr, un seul cas suffit pour que l'assertion soit fausse.

1.6 Raisonnement | Difficile | 100.03, 100.04

Question 27

Le raisonnement par contraposée est basé sur le fait que "$P \implies Q$" est équivalent à :

- ☐ [Faux] "non(P) $\implies$ non(Q)".
- ☐ [Vrai] "non(Q) $\implies$ non(P)".
- ☐ [Faux] "non(P) ou Q".
- ☐ [Faux] "P ou non(Q)".

Explications: La contraposée de "$P \implies Q$" est "non(Q) $\implies$ non(P)".

Question 28

Par quelle phrase puis-je remplacer la proposition logique "$P \Longleftarrow Q$" ?

- ☐ [Vrai] "P si Q"
- ☐ [Faux] "P seulement si Q"
- ☐ [Faux] "Q est une condition nécessaire pour obtenir P"
- ☐ [Vrai] "Q est une condition suffisante pour obtenir P"

Explications: C'est plus facile si on comprend que "$P \Longleftarrow Q$", c'est "$Q \implies P$", autrement dit "si Q est vraie, alors P est vraie".

Question 29

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] La négation de "$P \implies Q$" est "non(Q) ou P"
- ☐ [Vrai] La réciproque de "$P \implies Q$" est "$Q \implies P$"
- ☐ [Faux] La contraposée de "$P \implies Q$" est "non(P) $\implies$ non(Q)"
- ☐ [Faux] L'assertion "$P \implies Q$" est équivalente à "non(P) ou non(Q)"

Explications: Il faut revenir à la définition de "$P \implies Q$" qui est "non(P) ou Q".

Question 30

Je veux montrer que $\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$ par un raisonnement par l'absurde. Quel schéma de raisonnement est adapté ?

- ☐ [Vrai] Je suppose que $\sqrt{13}$ est rationnel et je cherche une contradiction.
- ☐ [Faux] Je suppose que $\sqrt{13}$ est irrationnel et je cherche une contradiction.
- ☐ [Faux] J'écris $13 = \frac{p}{q}$ (avec p, q entiers) et je cherche une contradiction.

- ☐ [Vrai] J'écris $\sqrt{13} = \frac{p}{q}$ (avec p, q entiers) et je cherche une contradiction.

Explications: Par l'absurde on suppose que $\sqrt{13} \in \mathbb{Q}$, c'est-à-dire que c'est un nombre rationnel, autrement dit qu'il s'écrit $\frac{p}{q}$, avec p, q entiers. Voir la preuve que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Ensembles, applications

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

2 Ensembles, applications | 100, 101, 102

Cours ● Ensembles et applications
Vidéo ■ Ensembles
Vidéo ■ Applications
Vidéo ■ Injection, surjection, bijection
Vidéo ■ Ensembles finis
Vidéo ■ Relation d'équivalence
Fiche d'exercices ♦ Logique, ensembles, raisonnements
Fiche d'exercices ♦ Injection, surjection, bijection
Fiche d'exercices ♦ Dénombrement

2.1 Ensembles, applications | Facile | 100.02, 101.01, 102.01, 102.02

Question 31
Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+8)^2 = 9^2\}$. Sous quelle forme peut-on encore écrire l'ensemble A ?

- ☐ [Faux] $A = \{1\}$
- ☐ [Faux] $A = \varnothing$
- ☐ [Faux] $A = \{-17\}$
- ☐ [Vrai] $A = \{1, -17\}$

Explications: Les éléments de A sont les solutions de l'équation $(x+8)^2 = 9^2$, c'est-à-dire 1 et -17.

Question 32
Soit $E = \{a, b, c\}$. Quelle écriture est correcte ?

- ☐ [Faux] $\{a\} \in E$
- ☐ [Faux] $a \subset E$
- ☐ [Vrai] $a \in E$
- ☐ [Faux] $\{a, b\} \in E$

Explications: Le symbole "$\in$" traduit l'appartenance d'un élément à un ensemble et le symbole "$\subset$" traduit l'inclusion d'un ensemble dans un autre.

Question 33
Soit $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$ et $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. Cochez la bonne réponse :

- ☐ [Faux] $A = B$
- ☐ [Faux] $A \subset B$
- ☐ [Vrai] $A \in C$
- ☐ [Faux] $A \subset C$

Explications: Le symbole "∈" traduit l'appartenance d'un élément à un ensemble et le symbole "⊂" traduit l'inclusion d'un ensemble dans un autre.

Question 34
Soit $A = [1, 3]$ et $B = [2, 4]$. Quelle est l'intersection de A et B ?

- ☐ [Faux] $A \cap B = \varnothing$
- ☐ [Vrai] $A \cap B = [2, 3]$
- ☐ [Faux] $A \cap B = [1, 4]$
- ☐ [Faux] $A \cap B = A$

Explications: L'ensemble $A \cap B$ est formé des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.

Question 35
Soit $A = [-1, 3]$ et $B = [0, 4]$. Cochez la bonne réponse :

- ☐ [Faux] $A \cup B = \varnothing$
- ☐ [Faux] $A \cup B = [0, 3]$
- ☐ [Faux] $A \cup B = [-1, 0]$
- ☐ [Vrai] $A \cup B = [-1, 4]$

Explications: L'ensemble $A \cup B$ est formé des éléments qui sont dans A ou dans B.

Question 36
Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$. Cochez la bonne réponse :

- ☐ [Faux] $\{a, 1\} \in A \times B$
- ☐ [Faux] $\{(a, 1)\} \in A \times B$
- ☐ [Vrai] $(a, 1) \in A \times B$
- ☐ [Faux] $\{a, 1\} \subset A \times B$

Explications: Les éléments de l'ensemble $A \times B$ sont les couples dont la première composante est dans A et la seconde est dans B.

Question 37
On désigne par C_n^k le nombre de choix de k éléments parmi n. Combien fait $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} (-1)^k \mathrm{C}_{100}^k$?

- ☐ [Faux] 100
- ☐ [Vrai] 0
- ☐ [Faux] 101
- ☐ [Faux] 5000

Explications: Le binôme de Newton donne $0 = (1-1)^{100} = \sum_{k=0}^{100} (-1)^k C_{100}^k$.

Question 38

On désigne par C_n^k le nombre de choix de k éléments parmi n. Combien fait $\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k$?

- ☐ [Faux] 10
- ☐ [Faux] 100
- ☐ [Vrai] 1024
- ☐ [Faux] 50

Explications: Le binôme de Newton donne $\sum_{k=0}^{10} C_{10}^k = (1+1)^{10} = 2^{10} = 1024$.

Question 39

On considère l'application $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ définie par

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 4, \quad f(4) = 2.$$

Quelle est la bonne réponse ?

- ☐ [Faux] $f^{-1}(\{2\}) = \{1\}$
- ☐ [Faux] $f^{-1}(\{2\}) = \{3\}$
- ☐ [Faux] $f^{-1}(\{2\}) = \{4\}$
- ☐ [Vrai] $f^{-1}(\{2\}) = \{1,4\}$

Explications: L'ensemble $f^{-1}(\{2\})$ est formé des éléments qui ont une image égale à 2.

Question 40

On considère l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n+1.$$

Quelle est la bonne réponse ?

- ☐ [Faux] f est surjective et non injective.
- ☐ [Vrai] f est injective et non surjective.
- ☐ [Faux] f est bijective.
- ☐ [Faux] f n'est ni injective ni surjective.

Explications: Si $f(n_1) = f(n_2)$ alors $n_1 = n_2$, donc f est injective. Par contre, $f(n) = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{N}$. Donc f n'est pas surjective.

2.2 Ensembles, applications | Moyen | 100.02, 101.01, 102.02, 102.02

Question 41

Soit A et B deux ensembles. L'écriture $A \subsetneq B$ signifie que A est inclus dans B et que $A \neq B$. On suppose que $A \cap B = A \cup B$. Que peut-on dire de A et B ?

- ☐ [Faux] $A \subsetneq B$
- ☐ [Faux] $B \subsetneq A$
- ☐ [Faux] $A \neq B$
- ☐ [Vrai] $A = B$

Explications: Si $A \cap B = A \cup B$ alors $A \subset A \cup B = A \cap B \subset B$, c'est-à-dire $A \subset B$. On vérifie de même que $B \subset A$. Donc $A = B$.

Question 42

Soit A une partie d'un ensemble E telle que $A \neq E$. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $A \cap \overline{A} = E$
- ☐ [Vrai] $A \cap \overline{A} = \varnothing$
- ☐ [Vrai] $A \cup \overline{A} = E$
- ☐ [Faux] $A \cup \overline{A} = A$

Explications: S'il existe $x \in E$ tel que $x \in A \cap \overline{A}$ alors ($x \in A$ et $x \notin A$). Ceci est absurde. Donc $A \cap \overline{A} = \varnothing$. De même $x \in E \Rightarrow (x \in A$ ou $x \notin A)$. Donc que $E \subset A \cup \overline{A} \subset E$.

Question 43

Soient A, B deux parties d'un ensemble E. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Quelle est la bonne réponse ?

- ☐ [Faux] $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- ☐ [Vrai] $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- ☐ [Faux] $\overline{A \cup B} = A \cap B$
- ☐ [Faux] $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup B$

Explications: D'abord $x \in A \cup B \iff (x \in A$ ou $x \in B)$. Les lois de De Morgan donnent donc que $(x \notin A \cup B) \iff (x \notin A$ et $x \notin B)$, c'est-à-dire $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Question 44

Soient A, B deux parties d'un ensemble E. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Quelle est la bonne réponse ?

- ☐ [Faux] $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- ☐ [Faux] $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap B$
- ☐ [Vrai] $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- ☐ [Faux] $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap B$

Explications: D'abord $x \in A \cap B \iff (x \in A \text{ et } x \in B)$. Les lois de De Morgan donnent donc que $(x \notin A \cap B) \iff (x \notin A \text{ ou } x \notin B)$, c'est-à-dire $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Question 45
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. On note $\mathscr{P}(E_n)$ l'ensemble des parties de E_n. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $\mathscr{P}(E_2) = \{\{1\}, \{2\}\}$
- ☐ [Vrai] $\mathscr{P}(E_2) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, E_2\}$
- ☐ [Faux] $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E_n)) = n$
- ☐ [Vrai] $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E_n)) = 2^n$

Explications: Le nombre de parties à k éléments de E_n est C_n^k et le nombre de toutes les parties de E_n est $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k = (1+1)^n = 2^n$.

Question 46
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1.$$

Quelle est la bonne réponse ?

- ☐ [Faux] $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- ☐ [Faux] $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$
- ☐ [Faux] $f(\mathbb{R}) =]1, +\infty[$
- ☐ [Vrai] $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$

Explications: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 1$. Donc $f(\mathbb{R}) \subset [1, +\infty[$. Réciproquement, tout $y \in [1, \infty[$ admet un antécédent. Donc $[1, +\infty[\subset f(\mathbb{R})$.

Question 47
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1.$$

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] $f^{-1}([1,5]) = [-2,2]$
- ☐ [Vrai] $f^{-1}([0,5]) = [-2,2]$
- ☐ [Faux] $f^{-1}([1,5]) = [0,2]$
- ☐ [Faux] $f^{-1}([0,5]) = [0,2]$

Explications: D'une part, $x \in f^{-1}([1,5]) \iff f(x) \in [1,5] \iff x^2 \leqslant 4$. D'autre part, $x \in f^{-1}([0,5]) \iff f(x) \in [0,5] \iff x^2 \leqslant 4$. Donc $f^{-1}([1,5]) = f^{-1}([0,5]) = [-2,2]$.

Question 48
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(\pi x).$$

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] $f(\{0,2\}) = \{1\}$
- ☐ [Faux] $f(\{0,2\}) = \{0\}$
- ☐ [Faux] $f([0,2]) = [1,1]$
- ☐ [Vrai] $f([0,2]) = [-1,1]$

Explications: D'abord, $f(0) = f(2) = 1$. Mais, f est décroissante sur $[0,1]$ et est croissante sur $[1,2]$ avec $f(1) = -1$. Dessiner le graphe de f !

Question 49
On considère l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] $f^{-1}(\{0\}) = \{(0,0)\}$
- ☐ [Faux] $f^{-1}(\{1\}) = \{(1,0)\}$
- ☐ [Faux] $f^{-1}(\{0\}) = \{(0,1)\}$
- ☐ [Vrai] $f^{-1}(\{1\})$ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1

Explications: D'abord, $x^2 + y^2 = 0 \iff (x,y) = (0,0)$. Par ailleurs, l'ensemble des solutions (x,y) de $x^2 + y^2 = 1$ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

Question 50
On considère l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ f(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

Quelle est la bonne réponse ?

- ☐ [Faux] f n'est pas bijective.
- ☐ [Faux] f est bijective et $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$.
- ☐ [Vrai] f est bijective et $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.
- ☐ [Faux] f est bijective et $f^{-1}(x) = \dfrac{-x+1}{-x-2}$.

Explications: Tout $y \neq 1$ admet un unique antécédent qui s'écrit $x = \dfrac{2y+1}{y-1} \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Donc f est bijective et $f^{-1}(y) = \dfrac{2y+1}{y-1}$.

2.3 Ensembles, applications | Difficile | 100.02, 101.01, 102.01, 102.02

Question 51
Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 1\}$ et $B = \{(t+1, 2t+1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Que peut-on dire de A et B ?

- ☐ [Faux] $A \subsetneq B$
- ☐ [Faux] $B \subsetneq A$
- ☐ [Faux] $A \neq B$
- ☐ [Vrai] $A = B$

Explications: D'abord, $2(t+1) - (2t+1) = 1$. Donc $B \subset A$. Réciproquement, pour tout $(x, y) \in A$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x = t+1$ et donc $y = 2t+1$. D'où $(x, y) \in B$.

Question 52
Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Soient A, B deux sous-ensembles de E. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- ☐ [Faux] $f(A \cup B) \subsetneq f(A) \cup f(B)$
- ☐ [Faux] $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- ☐ [Vrai] $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Explications: On a : $y \in f(A \cup B) \iff \exists x \in A \cup B,\ y = f(x) \iff (\exists x \in A,\ y = f(x))$ ou $(\exists x \in B,\ y = f(x)) \iff (y \in f(A)$ ou $y \in f(B))$. Par ailleurs, si $y \in f(A \cap B)$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$. Donc $y \in f(A)$ et $y \in f(B)$, c'est-à-dire $y \in f(A) \cap f(B)$.

Question 53
Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Soit A un sous-ensemble de E. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $A = f^{-1}(f(A))$
- ☐ [Vrai] $A \subset f^{-1}(f(A))$
- ☐ [Faux] $f^{-1}(f(A)) \subset A$
- ☐ [Faux] $f^{-1}(f(A)) = E \setminus A$

Explications: Pour tout $x \in A$, on a $f(x) \in f(A)$, donc $x \in f^{-1}(f(A))$.

Question 54
Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Soit B un sous-ensemble de F. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $B = f(f^{-1}(B))$
- ☐ [Faux] $B \subset f(f^{-1}(B))$
- ☐ [Vrai] $f(f^{-1}(B)) \subset B$
- ☐ [Faux] $f(f^{-1}(B)) = F \setminus B$

Explications: Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Donc il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Mais, $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$. Donc $y = f(x) \in B$.

Question 55

Soit E un ensemble et $A \subset E$ avec $A \neq E$. Comment choisir $X \subset E$ de sorte que

$$A \cap X = A \quad \text{et} \quad A \cup X = E\ ?$$

- ☐ [Faux] $X = A$
- ☐ [Vrai] $X = E$
- ☐ [Faux] $X = \varnothing$
- ☐ [Faux] X n'existe pas

Explications: Par définition $A \cap X = A \Rightarrow A \subset X$ et $A \cup X = E \Rightarrow \overline{A} \subset X$. C'est-à-dire $A \cup \overline{A} \subset X$.

Question 56

Soit E un ensemble et $A \subset E$ avec $A \neq E$. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Comment choisir $X \subset E$ de sorte que

$$A \cap X = \varnothing \quad \text{et} \quad A \cup X = E\ ?$$

- ☐ [Faux] $X = A$
- ☐ [Faux] $X = E$
- ☐ [Faux] $X = \varnothing$
- ☐ [Vrai] $X = \overline{A}$

Explications: $\{A, X\}$ est une partition de E, donc $X = \overline{A}$.

Question 57

Soit E un ensemble à n éléments et $a \in E$. On note $\mathscr{P}_a(E)$ l'ensemble des parties de E qui contiennent a. Quel est le cardinal de $\mathscr{P}_a(E)$?

- ☐ [Faux] $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_a(E)) = n - 1$
- ☐ [Faux] $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_a(E)) = n$
- ☐ [Vrai] $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_a(E)) = 2^{n-1}$
- ☐ [Faux] $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_a(E)) = 2^n$

Explications: Les éléments de $\mathscr{P}_a(E)$ sont de la forme $\{a\} \cup A$ où $A \subset E \setminus \{a\}$. Donc $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_a(E)) = \mathrm{Card}(\mathscr{P}(E \setminus \{a\})) = 2^{n-1}$.

Question 58

On note C_n^k le nombre de choix de k éléments parmi n. Combien fait $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} (-1)^k 2^{-k} \mathrm{C}_{100}^k$?

- ☐ [Faux] 0
- ☐ [Vrai] 2^{-100}
- ☐ [Faux] 2^{100}
- ☐ [Faux] 100

Explications: Utiliser le binôme de Newton, $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \mathrm{C}_{100}^k \left(-\frac{1}{2}\right)^k = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{1}{2^{100}}$.

Question 59
Soit E un ensemble à n éléments et $A \subset E$ une partie à $p < n$ éléments. On note $\mathscr{H}(E)$ l'ensemble des parties de E qui contiennent un et un seul élément de A. Quel est le cardinal de $\mathscr{H}(E)$?

- ☐ [Vrai] $\mathrm{Card}(\mathscr{H}(E)) = p2^{n-p}$
- ☐ [Faux] $\mathrm{Card}(\mathscr{H}(E)) = p$
- ☐ [Faux] $\mathrm{Card}(\mathscr{H}(E)) = p2^{p}$
- ☐ [Faux] $\mathrm{Card}(\mathscr{H}(E)) = p2^{n}$

Explications: Si $A = \{a_1, \dots, a_p\}$, les éléments de $\mathscr{H}(E)$ sont de la forme $\{a_i\} \cup B$, où $a_i \in A$ et $B \subset E \backslash A$. Donc $\mathrm{Card}(\mathscr{H}(E)) = \mathrm{Card}(A) \times \mathrm{Card}(\mathscr{P}(E \setminus A)) = p2^{n-p}$.

Question 60
Soit $f : [-1,1] \to [-1,1]$ l'application définie par

$$\forall x \in [-1,1],\ f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Quelle sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] f est injective mais non surjective.
- ☐ [Faux] f est surjective mais non injective.
- ☐ [Faux] f n'est ni injective ni surjective.
- ☐ [Vrai] f est bijective et $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

Explications: Soit $y \in [-1,1]$. On a $f(x) = y \iff yx^2 - 2x + y = 0$. On résout dans $[-1,1]$ cette équation, d'inconnue x. Si $y = 0$, on aura $x = 0$ et si $y \neq 0$, on calcule $\Delta = 4(1-y^2) \geqslant 0$ et donc

$$x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y} = \frac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1,1] \text{ car } \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \notin [-1,1].$$

Ainsi tout $y \in [-1,1]$ admet un unique antécédent $x = \dfrac{y}{1+\sqrt{1-y^2}} \in [-1,1]$. Donc f est bijective et $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{1+\sqrt{1-y^2}}$.

Polynômes

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

3 Polynômes – Fractions rationnelles | 105

Cours ● Polynômes
Vidéo ■ Définitions
Vidéo ■ Arithmétique des polynômes

Vidéo ■ Racine d'un polynôme, factorisation
Vidéo ■ Fractions rationnelles
Fiche d'exercices ♦ Polynômes
Fiche d'exercices ♦ Fractions rationnelles

3.1 Polynômes | Facile | 105.05

Question 61
Soit $P(X) = 2X^5 + 3X^2 + X$ et $Q(X) = 3X^2 - 2X + 3$. Quelles sont les assertions vraies concernant le polynôme produit $P(X) \times Q(X)$?

- ☐ [Faux] Le coefficient dominant est 5.
- ☐ [Vrai] Le coefficient du monôme X^3 est -3.
- ☐ [Faux] Le coefficient du terme constant est 3.
- ☐ [Vrai] Le produit est la somme de 7 monômes ayant un coefficient non nuls.

Explications: $P(X) \times Q(X) = 6X^7 - 4X^6 + 6X^5 + 9X^4 - 3X^3 + 7X^2 + 3X$.

Question 62
Soit $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2$ et $Q(X) = X^3 - X + 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Le polynôme $P(X) \times Q(X)$ est de degré 9.
- ☐ [Faux] Le coefficient du monôme X^2 dans le produit $P(X) \times Q(X)$ est 3.
- ☐ [Vrai] Le polynôme $P(X) + Q(X)$ est de degré 3.
- ☐ [Faux] Le polynôme $P(X) - Q(X)$ est de degré 3.

Explications: $P(X) \times Q(X) = X^6 - 3X^5 - X^4 + 6X^3 - 3X^2 - 2X + 2$, $P(X) + Q(X) = 2X^3 - 3X^2 - X + 3$, $P(X) - Q(X) = -3X^2 + X + 1$.

Question 63
Soient $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes unitaires de degré $n \geqslant 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $P + Q$ est un polynôme de degré n.
- ☐ [Faux] $P - Q$ est un polynôme de degré n.
- ☐ [Vrai] $P \times Q$ est un polynôme de degré $n + n = 2n$.
- ☐ [Faux] P/Q est un polynôme de degré $n - n = 0$.

Explications: Le quotient de deux polynômes n'est pas un polynôme.

3.2 Polynômes | Moyen | 105.05

Question 64
Soit P un polynôme de degré $\geqslant 2$. Quelles sont les assertions vraies, quel que soit le polynôme P ?

- ☐ [Vrai] $\deg(P(X) \times (X^2 - X + 1)) = \deg P(X) + 2$
- ☐ [Faux] $\deg(P(X) + (X^2 - X + 1)) = \deg P(X)$
- ☐ [Faux] $\deg(P(X)^2) = (\deg P(X))^2$

- ☐ [Vrai] $\deg(P(X^2)) = 2\deg P(X)$

Explications: On a la formule $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$ mais, il n'y a pas de formule pour la somme, car $\deg(P+Q)$ peut être strictement plus petit que $\deg P$ et $\deg Q$.

Question 65
Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On associe le polynôme dérivé : $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.

- ☐ [Faux] Le polynôme dérivé de $P(X) = X^5 - 2X^2 + 1$ est $P'(X) = 5X^4 - 2X$.
- ☐ [Faux] Le seul polynôme qui vérifie $P'(X) = 0$ est $P(X) = 1$.
- ☐ [Vrai] Si $P'(X)$ est de degré 7, alors $P(X)$ est de degré 8.
- ☐ [Faux] Si le coefficient constant de P est nul, alors c'est aussi le cas pour P'.

Explications: Le polynôme dérivé s'obtient comme si on dérivait la fonction $X \mapsto P(X)$.

3.3 Polynômes | Difficile | 105.05

Question 66
Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. À ce polynôme P on associe un nouveau polynôme Q, défini par $Q(X) = P(X - \frac{a_{n-1}}{n})$.
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si $P(X) = X^2 + 3X + 1$ alors $Q(X) = X^2 - 2X$.
- ☐ [Vrai] Si $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2$ alors $Q(X) = X^3 - 3X$.
- ☐ [Faux] Le coefficient constant du polynôme Q est toujours nul.
- ☐ [Vrai] Le coefficient du monôme X^{n-1} de Q est toujours nul.

Explications: Cette transformation est faite afin que le coefficient du monôme X^{n-1} de Q soit toujours nul.

Question 67
Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On associe le polynôme dérivé : $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Si P est de degré $n \geqslant 1$ alors P' est de degré $n-1$.
- ☐ [Faux] Si $P'(X) = nX^{n-1}$ alors $P(X) = X^n$.
- ☐ [Vrai] Si $P' = P$ alors $P = 0$.
- ☐ [Faux] Si $P' - Q' = 0$ alors $P - Q = 0$.

Explications: C'est comme pour les primitives, il ne faut pas oublier la constante : Si $P' = Q'$ alors $P = Q + c$.

Question 68
Soit $A(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Soit $B(X) = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$. Soit $C(X) = A(X) \times B(X) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k X^k$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $c_k = a_k b_k$

- ☐ [Vrai] $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$
- ☐ [Faux] $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_i$
- ☐ [Vrai] $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

Explications: La formule (à connaître) est

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

3.4 Arithmétique des polynômes | Facile | 105.01, 105.02

Question 69
Soient A, B deux polynômes, avec B non nul. Soit $A = B \times Q + R$ la division euclidienne de A par B.

- ☐ [Vrai] Un tel Q existe toujours.
- ☐ [Vrai] S'il existe, Q est unique.
- ☐ [Vrai] On a toujours $\deg Q \leqslant \deg A$.
- ☐ [Faux] On a toujours $\deg Q \leqslant \deg B$.

Explications: La division euclidienne $A = B \times Q + R$ existe toujours, Q et R sont uniques et bien sûr $\deg Q \leqslant \deg A$.

Question 70
Soient A, B deux polynômes, avec B non nul. Soit $A = B \times Q + R$ la division euclidienne de A par B.

- ☐ [Vrai] Un tel R existe toujours.
- ☐ [Vrai] S'il existe, R est unique.
- ☐ [Faux] On a toujours $\deg R < \deg A$ (ou bien R est nul).
- ☐ [Vrai] On a toujours $\deg R < \deg B$ (ou bien R est nul).

Explications: La division euclidienne $A = B \times Q + R$ existe toujours, Q et R sont uniques et par définition de la division euclidienne R est nul ou bien $\deg R < \deg B$.

Question 71
Soient $A(X) = 2X^4 + 3X^3 - 8X^2 - 2X + 1$ et $B(X) = X^2 + 3X + 1$. Soit $A = BQ + R$ la division euclidienne de A par B.

- ☐ [Faux] Le coefficient du monôme X^2 de Q est 1.
- ☐ [Faux] Le coefficient du monôme X de Q est 3.
- ☐ [Faux] Le coefficient du monôme X de R est 2.
- ☐ [Vrai] Le coefficient constant de R est 2.

Explications: Faire le calcul ! $Q(X) = 2X^2 - 3X - 1$, $R(X) = 4X + 2$.

3.5 Arithmétique des polynômes | Moyen | 105.01, 105.02

Question 72

Soient $A(X) = X^6 - 7X^5 + 10X^4 + 5X^3 - 23X^2 + 5$ et $B(X) = X^3 - 5X^2 + 1$. Soit $A = BQ + R$ la division euclidienne de A par B.

- ☐ [Faux] Le coefficient du monôme X^2 de Q est 0.
- ☐ [Vrai] Le coefficient du monôme X de Q est 0.
- ☐ [Faux] Le coefficient du monôme X de R est -1.
- ☐ [Vrai] Le coefficient constant de R est 1.

Explications: Faire le calcul ! $Q(X) = X^3 - 2X^2 + 4$, $R(X) = -X^2 + 1$.

Question 73

Soient $A(X) = X^4 - 2X^3 - 4X^2 + 2X + 3$ et $B(X) = X^4 - 2X^3 - 3X^2$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Notons D le pgcd de A et B. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $X - 1$ divise D.
- ☐ [Vrai] $X + 1$ divise D.
- ☐ [Vrai] $D(X) = (X - 3)(X + 1)$.
- ☐ [Faux] $D(X) = (X - 3)(X + 1)^2$.

Explications: $A(X) = (X-3)(X+1)^2(X-1)$, $B(X) = X^2(X-3)(X+1)$, le pgcd est $D = (X-3)(X+1)$.

Question 74

Quelles sont les affirmations vraies pour des polynômes de $\mathbb{R}[X]$?

- ☐ [Faux] Le pgcd de $(X-1)^2(X-3)^3(X^2+X+1)^3$ et $(X-1)^2(X-2)(X-3)(X^2+X+1)^2$ est $(X-1)^2(X-3)(X^2+X+1)$.
- ☐ [Faux] Le ppcm de $(X-1)^2(X-3)^3(X^2+X+1)^3$ et $(X-1)^2(X-2)(X-3)(X^2+X+1)^2$ est $(X-1)^2(X-2)(X-3)^3(X^2+X+1)^2$.
- ☐ [Vrai] Le pgcd de $(X-1)^2(X^2-1)^3$ et $(X-1)^4(X+1)^5$ est $(X-1)^4(X+1)^3$.
- ☐ [Vrai] Le ppcm de $(X-1)^2(X^2-1)^3$ et $(X-1)^4(X+1)^5$ est $(X-1)^5(X+1)^5$.

Explications: Le pgcd s'obtient en prenant le minimum entre les exposants, le ppcm en prenant le maximum. Attention $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$.

3.6 Arithmétique des polynômes | Difficile | 105.01, 105.02

Question 75

Soit A un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Soit B un polynôme de degré $m \geqslant 1$, avec $m \leqslant n$. Soit $A = B \times Q + R$ la division euclidienne de A par B. On note $q = \deg Q$ et $r = \deg R$ (avec $r = -\infty$ si $R = 0$). Quelles sont les assertions vraies (quelque soient A et B) ?

- ☐ [Vrai] $q = n - m$
- ☐ [Vrai] $r < m$
- ☐ [Faux] $r = 0 \implies A$ divise B.
- ☐ [Faux] $n = mq + r$

Explications: On a $\deg R < \deg B$. Il ne faut pas confondre $R = 0$ et $r = 0$. En plus $\deg(A) = \deg(B \times Q) = \deg(A) + \deg(Q)$.

Question 76
Soit $n \geqslant 2$. Soit $A(X) = X^{2n} + X^{2n-2}$. Soit $B(X) = X^n + X^{n-1}$. Soit $A = BQ + R$ la division euclidienne de A par B.

- ☐ [Vrai] Le coefficient de X^n de Q est 1.
- ☐ [Faux] Le coefficient de X^{n-1} de Q est 1.
- ☐ [Vrai] Le coefficient de X^{n-2} de Q est 2.
- ☐ [Vrai] R est constitué d'un seul monôme.

Explications: $Q(X) = X^n - X^{n-1} + 2X^{n-2} - 2X^{n-3} + \cdots$. $R(X) = \pm 2X^{n-1}$.

Question 77
Soit $A(X) = X^4 - X^2$. Soit $B(X) = X^2 + X - 2$. Soit D le pgcd de A et B dans $\mathbb{R}[X]$.

- ☐ [Faux] $D(X) = 1$
- ☐ [Vrai] Il existe $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = X - 1$.
- ☐ [Vrai] Il existe $u \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Au + BV = X - 1$.
- ☐ [Faux] Il existe $U \in \mathbb{R}[X]$ et $v \in \mathbb{R}$ tels que $AU + Bv = X - 1$.

Explications: $A(X) = X^2(X-1)^2$, $B(X) = (X-1)(X+2)$, $D(X) = X - 1$. $U(X) = -\frac{1}{4}$, $V(X) = \frac{1}{4}(X^2 - X + 2)$ donnent $AU + BV = D$.

3.7 Racines, factorisation | Facile | 105.03

Question 78
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 8. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] P admet exactement 8 racines réelles (comptées avec multiplicité).
- ☐ [Faux] P admet au moins une racine réelle.
- ☐ [Vrai] P admet au plus 8 racines réelles (comptées avec multiplicité).
- ☐ [Faux] P admet au moins 8 racines réelles (comptées avec multiplicité).

Explications: Il y a au plus $\deg P$ racines réelles (comptées avec multiplicité).

Question 79
Soit $P(X) = X^7 - 5X^5 - 5X^4 + 4X^3 + 13X^2 + 12X + 4$.

- ☐ [Vrai] -1 est une racine de P.
- ☐ [Faux] 0 est une racine de P.
- ☐ [Faux] 1 est une racine de P.
- ☐ [Vrai] 2 est une racine de P.

Explications: Calculer $P(\alpha)$. En fait $P(X) = (X-2)^2(X+1)^3(X^2+X+1)$.

Question 80
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] $2X^2+3X+1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
- ☐ [Vrai] $2X^2-3X+2$ est irréductible sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $2X^2-X+3$ est irréductible sur $\mathbb{C}$.
- ☐ [Faux] X^3+X^2+X+4 est irréductible sur $\mathbb{R}$.

Explications: Sur $\mathbb{C}$ les irréductibles sont de degré 1. Sur $\mathbb{R}$ ils sont de degré 1, ou bien de degré 2 à discriminant strictement négatif.

3.8 Racines, factorisation | Moyen | 105.03

Question 81
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $2n+1$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] P peut admettre une racine complexe, qui ne soit pas réelle.
- ☐ [Vrai] P admet au moins une racines réelle.
- ☐ [Faux] P admet au moins deux racines réelles (comptées avec multiplicités).
- ☐ [Vrai] P peut avoir $2n+1$ racines réelles distinctes.

Explications: Il y a au plus $\deg P$ racines réelles (comptées avec multiplicité). Mais ici le degré est impair, donc P admet au moins une racine réelle.

Question 82
Soit $P(X) = X^6+4X^5+X^4-10X^3-4X^2+8X$.

- ☐ [Faux] -1 est une racine double.
- ☐ [Faux] 0 est une racine double.
- ☐ [Vrai] 1 est une racine double.
- ☐ [Faux] -2 est une racine double.

Explications: Pour une racine double il faut $P(a) = 0$, $P'(a) = 0$ et $P''(a) \neq 0$. En fait $P(X) = X(X+2)^3(X-1)^2$.

3.9 Racines, factorisation | Difficile | 105.03

Question 83
Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré n.

- ☐ [Vrai] P peut avoir des racines dans $\mathbb{R}$, mais pas dans $\mathbb{Q}$.
- ☐ [Vrai] Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une racine de P, alors $\bar{z}$ aussi.
- ☐ [Faux] Les facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{Q}$ sont de degré 1 ou 2.

☐ [Faux] Les racines réelles de P sont de la forme $\alpha + \beta\sqrt{\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$.

Explications: Sur $\mathbb{Q}$ les facteurs irréductibles peuvent être de n'importe quel degré.

Question 84
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] a racine de $P \iff X - a$ divise P.
- ☐ [Vrai] a racine de P de multiplicité $\geqslant k \iff (X-a)^k$ divise P.
- ☐ [Faux] a racine de P de multiplicité $\geqslant k \iff P(a) = 0$, $P'(a) = 0$, ..., $P^{(k)}(a) = 0$.
- ☐ [Vrai] La somme des multiplicités des racines est $\leqslant n$.

Explications: a racine de P de multiplicité $\geqslant k \iff (X-a)^k$ divise $P \iff P(a) = 0$, $P'(a) = 0$, ..., $P^{(k-1)}(a) = 0$.

3.10 Fractions rationnelles | Facile | 105.04

Question 85
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] Les éléments simples sur $\mathbb{C}$ sont de la forme $\frac{a}{X-\alpha}$, $a, \alpha \in \mathbb{C}$.
- ☐ [Faux] Les éléments simples sur $\mathbb{C}$ sont de la forme $\frac{a}{(X-\alpha)^k}$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$.
- ☐ [Vrai] Les éléments simples sur $\mathbb{R}$ peuvent être de la forme $\frac{a}{(X-\alpha)^k}$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Les éléments simples sur $\mathbb{R}$ peuvent être de la forme $\frac{aX+b}{X-\alpha}$, $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$.

Explications: Sur $\mathbb{C}$ les éléments simples sont de la forme $\frac{a}{(X-\alpha)^k}$, $a, \alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Sur $\mathbb{R}$ les éléments simples sont de la forme $\frac{a}{(X-\alpha)^k}$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ ou bien $\frac{aX+b}{(X^2+\alpha X+\beta)^k}$, $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$ avec $X^2 + \alpha X + \beta$ sans racines réelles.

Question 86
Soient $P(X) = X - 1$, $Q(X) = (X+1)^2(X^2+X+1)$. On décompose la fraction $F = \frac{P}{Q}$ sur $\mathbb{R}$.

- ☐ [Vrai] La partie polynomiale est nulle.
- ☐ [Faux] Il peut y avoir un élément simple $\frac{a}{X-1}$.
- ☐ [Faux] Il peut y avoir un élément simple $\frac{a}{X+1}$ mais pas $\frac{a}{(X+1)^2}$.
- ☐ [Vrai] Il peut y avoir un élément simple $\frac{aX+b}{X^2+X+1}$ mais pas $\frac{aX+b}{(X^2+X+1)^2}$.

Explications: $\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{X-1}{(X+1)^2(X^2+X+1)} = \frac{-1}{X+1} + \frac{-2}{(X+1)^2} + \frac{X+2}{X^2+X+1}$.

3.11 Fractions rationnelles | Moyen | 105.04

Question 87
Soit $\frac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle. On note $E(X)$ sa partie polynomiale (appelée aussi partie entière).

- ☐ [Vrai] Si $\deg P < \deg Q$ alors $E(X) = 0$.

- ☐ [Vrai] Si $\deg P \geqslant \deg Q$ alors $\deg E(X) = \deg P - \deg Q$.
- ☐ [Faux] Si $P(X) = X^3 + X + 2$ et $Q(X) = X^2 - 1$ alors $E(X) = X + 1$.
- ☐ [Vrai] Si $P(X) = X^5 + X - 2$ et $Q(X) = X^2 - 1$ alors $E(X) = X^3 + X$.

Explications: La partie entière s'obtient comme le quotient de la division euclidienne de P par Q.

Question 88

Soit $P(X) = 3X$ et $Q(X) = (X-2)(X-1)^2(X^2 - X + 1)$. On écrit

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{dX+e}{X^2-X+1}.$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Faux] En multipliant par $X-2$, puis en évaluant en $X=2$, j'obtiens $a=1$.
- ☐ [Vrai] En multipliant par $(X-1)^2$, puis en évaluant en $X=1$, j'obtiens $c=-3$.
- ☐ [Vrai] En multipliant par X, puis en faisant tendre $X \to +\infty$, j'obtiens la relation $a+b+d=0$.
- ☐ [Faux] En évaluant en $X=0$, j'obtiens la relation $a+b+c+e=0$.

Explications: $\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{3X}{(X-2)(X-1)^2(X^2-X+1)} = \frac{2}{X-2} + \frac{-3}{X-1} + \frac{-3}{(X-1)^2} + \frac{X+1}{X^2-X+1}$.

3.12 Fractions rationnelles | Difficile | 105.04

Question 89

Soit $F(X) = \dfrac{1}{(X^2+1)X^3}$. On écrit

$$F(X) = \frac{a}{X} + \frac{b}{X^2} + \frac{c}{X^3} + \frac{dX+e}{X^2+1}.$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $c=1$
- ☐ [Faux] $b=1$
- ☐ [Faux] $a=1$
- ☐ [Vrai] $e=0$

Explications: On profite que F est impaire pour déduire $b=0$, $e=0$. $F(X) = \dfrac{1}{(X^2+1)X^3} = \frac{-1}{X} + \frac{1}{X^3} + \frac{X}{X^2+1}$.

Question 90

Soit $F(X) = \dfrac{X-1}{X(X^2+1)^2}$. On écrit

$$F(X) = \frac{a}{X} + \frac{bX+c}{X^2+1} + \frac{dX+e}{(X^2+1)^2}.$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ [Vrai] $a=-1$

- ☐ [Faux] $d = 0$ et $e = 0$
- ☐ [Faux] $b = 0$ et $c = 0$
- ☐ [Faux] $b = 0$ et $d = 0$

Explications: $F(X) = \dfrac{1}{X(X^2+1)^2} = \frac{-1}{X} + \frac{X}{X^2+1} + \frac{X+1}{(X^2+1)^2}$.

Nombres complexes

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

4 Nombres complexes | 104

Cours ● Nombres complexes
Vidéo ■ Les nombres complexes, définitions et opérations
Vidéo ■ Racines carrées, équation du second degré
Vidéo ■ Argument et trigonométrie
Vidéo ■ Nombres complexes et géométrie
Fiche d'exercices ♦ Nombres complexes

4.1 Écritures algébrique et géométrique | Facile | 104.01

Question 91
Soit $z = (1-2i)^2$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $z = 5 - 4i$
- ☐ [Vrai] $z = -3 - 4i$
- ☐ [Faux] Le conjugué de z est : $\overline{z} = 3 + 4i$.
- ☐ [Vrai] Le module de z est 5.

Explications: On développe $(1-2i)^2$. Si $z = a + ib, a, b \in \mathbb{R}, \overline{z} = a - ib$ et $|z|^2 = a^2 + b^2$.

Question 92
Soit $z = \frac{i+1}{1-i\sqrt{3}}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- ☐ [Vrai] $z\overline{z} = \frac{1}{2}$
- ☐ [Vrai] Un argument de z est : $\frac{7\pi}{12}$.
- ☐ [Faux] Le conjugué de z est : $\overline{z} = \frac{i-1}{1+i\sqrt{3}}$.

Explications: On applique les formules : $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $|z|^2 = z\overline{z}$ et $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg z_1 - \arg z_2\ [2\pi]$.

Question 93
Soit z un nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{4}$. L'écriture algébrique de z est :

- ☐ [Faux] $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$
- ☐ [Vrai] $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
- ☐ [Faux] $z = 2 + 2i$
- ☐ [Faux] $z = 2 - 2i$

Explications: $z = 2(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Question 94
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $e^{i\theta} \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

- ☐ [Faux] $\theta = 0$
- ☐ [Faux] $\theta = 2\pi$
- ☐ [Faux] $\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- ☐ [Vrai] $\theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Explications: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ et $\sin\theta = 0$ si et seulement si $\theta = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Question 95
Soit θ un réel. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$
- ☐ [Faux] $\cos^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$
- ☐ [Vrai] $\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$
- ☐ [Faux] $\sin^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$

Explications: On peut appliquer les formules d'Euler, ou utiliser la formule d'addition du cosinus.

Question 96
Soit θ un réel. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\cos(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$
- ☐ [Vrai] $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
- ☐ [Vrai] $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$
- ☐ [Faux] $\sin(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

Explications: On peut appliquer la formule de Moivre, ou utiliser les formules d'addition du cosinus et du sinus.

4.2 Écritures algébrique et géométrique | Moyen | 104.01

Question 97
Soit $z = \frac{(1-i)^{10}}{(1+i\sqrt{3})^4}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $|z| = 2$
- ☐ [Faux] $|z| = \frac{1}{2}$
- ☐ [Vrai] $\arg z = \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$
- ☐ [Faux] $\arg z = -\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$

Explications: On applique les formules : $|\frac{z_1^n}{z_2^m}| = \frac{|z_1|^n}{|z_2|^m}$ et $\arg(\frac{z_1^n}{z_2^m}) = n\arg z_1 - m\arg z_2\,[2\pi]$.

Question 98

Soit $z = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\phi - i\sin\phi}$, $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $|z| = 2$
- ☐ [Vrai] $\arg z = \theta + \phi\,[2\pi]$
- ☐ [Vrai] $z = \cos(\theta + \phi) + i\sin(\theta + \phi)$
- ☐ [Vrai] $|z| = 1$

Explications: Utiliser l'écrire trigonométrique et la formule : $\frac{e^{i\theta}}{e^{-i\phi}} = e^{i(\theta+\phi)}$.

Question 99

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors, $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2$ est égal à :

- ☐ [Faux] $|z_1|^2 + |z_2|^2$
- ☐ [Faux] $|z_1|^2 - |z_2|^2$
- ☐ [Vrai] $2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$
- ☐ [Faux] $2|z_1|^2 - 2|z_2|^2$

Explications: Utiliser : $|z|^2 = z\overline{z}$.

Question 100

Soit θ un réel. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\cos^3\theta = \frac{1}{8}(\cos(3\theta) + 3\cos\theta)$
- ☐ [Vrai] $\cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos(3\theta) + 3\cos\theta)$
- ☐ [Vrai] $\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin(3\theta))$
- ☐ [Faux] $\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta + \sin(3\theta))$

Explications: On peut appliquer les formules d'Euler.

Question 101

Soit θ un réel. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\cos(5\theta) = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$
- ☐ [Faux] $\cos(5\theta) = \cos^5\theta + 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$
- ☐ [Faux] $\sin(5\theta) = 5\cos^4\theta\sin\theta + 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$
- ☐ [Vrai] $\sin(5\theta) = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$

Explications: On peut appliquer la formule de Moivre.

4.3 Écritures algébrique et géométrique | Difficile | 104.01

Question 102

Par définition, si $x, y \in \mathbb{R}$, $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.
Soit $z = e^{e^{i\theta}}$, où θ est un réel. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $|z| = 1$
- ☐ [Vrai] $|z| = e^{\cos\theta}$
- ☐ [Faux] $\arg z = \theta\,[2\pi]$
- ☐ [Vrai] $\arg z = \sin\theta\,[2\pi]$

Explications: $z = e^{\cos\theta + i\sin\theta} = e^{\cos\theta} \cdot e^{i\sin\theta}$. Donc $|z| = e^{\cos\theta}$ et $\arg z = \sin\theta\,[2\pi]$.

Question 103

Soit $z = 1 + e^{i\theta}, \theta \in]-\pi, \pi[$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $|z| = 2$
- ☐ [Vrai] $|z| = 2\cos(\frac{\theta}{2})$
- ☐ [Vrai] $\arg z = \frac{\theta}{2}\,[2\pi]$
- ☐ [Faux] $\arg z = \theta\,[2\pi]$

Explications: $z = e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}) = 2\cos(\frac{\theta}{2})e^{i\frac{\theta}{2}}$. Comme $\theta \in]-\pi, \pi[$, $\cos(\frac{\theta}{2}) > 0$. On déduit que : $|z| = 2\cos(\frac{\theta}{2})$ et $\arg z = \frac{\theta}{2}\,[2\pi]$.

Question 104

Soit $z = e^{i\theta} + e^{i\phi}, \theta, \phi \in \mathbb{R}$ tels que $-\pi < \theta - \phi < \pi$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $|z| = 2$
- ☐ [Vrai] $|z| = 2\cos(\frac{\theta-\phi}{2})$
- ☐ [Faux] $\arg z = \theta + \phi\,[2\pi]$
- ☐ [Vrai] $\arg z = \frac{\theta+\phi}{2}\,[2\pi]$

Explications: $z = e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}(e^{i\frac{\theta-\phi}{2}} + e^{i\frac{\phi-\theta}{2}}) = 2\cos(\frac{\theta-\phi}{2})e^{i\frac{\theta+\phi}{2}}$. Comme $\theta - \phi \in]-\pi, \pi[$, $\cos(\frac{\theta-\phi}{2}) > 0$. On déduit que : $|z| = 2\cos(\frac{\theta-\phi}{2})$ et $\arg z = \frac{\theta+\phi}{2}\,[2\pi]$.

Question 105

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n} \sin(kx)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $S_1 = \cos(\frac{nx}{2}) \cdot \frac{\sin(\frac{n+1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$
- ☐ [Faux] $S_1 = \sin(\frac{nx}{2}) \cdot \frac{\sin(\frac{n+1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$
- ☐ [Vrai] $S_2 = \sin(\frac{nx}{2}) \cdot \frac{\sin(\frac{n+1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$
- ☐ [Faux] $S_2 = \cos(\frac{nx}{2}) \cdot \frac{\sin(\frac{n+1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$

Explications: On calcule la somme géométrique $\sum_{k=0}^{n} e^{ikx} = \sum_{k=0}^{n}(e^{ix})^k = \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}}(e^{-i\frac{(n+1)x}{2}} - e^{i\frac{(n+1)x}{2}})}{e^{i\frac{x}{2}}(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}})} = e^{i\frac{nx}{2}} \cdot \frac{\sin(\frac{n+1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$; puis, la partie réelle et imaginaire de cette somme.

4.4 Équations | Facile | 104.02, 104.03, 104.04

Question 106
Les racines carrées de i sont :

- ☐ [Faux] $\frac{1+i}{2}$ et $-\frac{1+i}{2}$
- ☐ [Vrai] $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$
- ☐ [Faux] $e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $e^{\frac{-i\pi}{4}}$
- ☐ [Vrai] $e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $-e^{\frac{i\pi}{4}}$

Explications: On résoud dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Question 107
On considère l'équation : (E) : $z^2 + z + 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Les solutions de (E) sont : $z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- ☐ [Vrai] Les solutions de (E) sont : $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.
- ☐ [Vrai] Les solutions de (E) sont : $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$.
- ☐ [Vrai] Si z est une solution de (E), alors $|z| = 1$.

Explications: Les solutions complexes d'une équation du second degré $az^2+bz+c = 0$ sont $z_1 = \frac{-b+\delta}{2a}$ et $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Question 108
Les racines cubiques de $1+i$ sont :

- ☐ [Faux] $z_k = \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}, k = 0, 1, 2$
- ☐ [Vrai] $z_k = \sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}, k = 0, 1, 2$
- ☐ [Vrai] $z_k = \sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{12}-\frac{2k\pi}{3})}, k = 0, 1, 2$
- ☐ [Faux] $z_k = \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{\pi}{12}-\frac{2k\pi}{3})}, k = 0, 1, 2$

Explications: On résoud l'équation : $z^3 = 1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Question 109
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-2| = 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $z = 3$
- ☐ [Faux] $z = 1$
- ☐ [Vrai] $z = 2 + e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$
- ☐ [Vrai] Le point du plan d'affixe z appartient au cercle de rayon 1 et de centre le point d'affixe 2.

Explications: $|z-2| = 1$, donc $z - 2 = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

4.5 Équations | Moyen | 104.02, 104.03, 104.04

Question 110

On considère l'équation : (E) : $z^2 - 2iz - 1 - i = 0$, $z \in \mathbb{C}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Le discriminant de l'équation est : $\Delta = 8 + 4i$.
- ☐ [Vrai] Le discriminant de l'équation est : $\Delta = 4i$.
- ☐ [Faux] les solutions de (E) sont : $z_1 = \frac{\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})i}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})i}{2}$.
- ☐ [Vrai] les solutions de (E) sont : $z_1 = \frac{\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})i}{2}$ et $z_2 = \frac{-\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})i}{2}$.

Explications: Utiliser la méthode de résolution d'une équation du second degré.

Question 111

On considère l'équation : (E) : $z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z \in \mathbb{C}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si z est une solution de (E), $\arg z = \frac{\pi}{8}[2\pi]$.
- ☐ [Vrai] Les solutions de (E) sont : $z = e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $z = -e^{i\frac{\pi}{8}}$.
- ☐ [Vrai] $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
- ☐ [Faux] $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Explications: Utiliser l'écriture géométrique et algébrique pour résoudre l'équation et identifier la partie réelle et la partie imaginaire.

Question 112

Les racines cubiques de -8 sont :

- ☐ [Vrai] $z_k = 2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$, $k = 1, 2, 3$
- ☐ [Vrai] $z_k = 2e^{i\frac{(2k-1)\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$
- ☐ [Faux] $z_k = -2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$
- ☐ [Vrai] $z_1 = -2, z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_3 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Explications: On résout l'équation $z^3 = -8 = 2^3 e^{i\pi}$, en utilisant l'écriture géométrique.

Question 113

On considère l'équation : (E) : $z^5 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$, $z \in \mathbb{C}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si z est une solution de (E), $|z| = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$.
- ☐ [Vrai] Si z est une solution de (E), $|z| = \frac{1}{\sqrt[10]{2}}$.
- ☐ [Faux] Si z est une solution de (E), $\arg z = \frac{\pi}{12}\,[2\pi]$.
- ☐ [Vrai] Si z est une solution de (E), $\arg z = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{5}\,[2\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Explications: Résoudre $z^5 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$, en utilisant l'écriture géométrique.

Question 114

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-1| = |z+1|$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $z = 0$
- ☐ [Vrai] $z = ia$, $a \in \mathbb{R}$
- ☐ [Faux] Le point du plan d'affixe z appartient au cercle de rayon 1 et de centre le point d'affixe 0.
- ☐ [Vrai] Le point du plan d'affixe z appartient à la médiatrice du segment $[A, B]$, où A et B sont les points d'affixe -1 et 1 respectivement.

Explications: Soit z tel que $|z-1| = |z+1|$, M le point du plan d'affixe z, A et B les points d'affixe -1 et 1 respectivement. Alors, M est équidistant de A et B.

4.6 Équations | Difficile | 104.02, 104.03, 104.04

Question 115

On considère l'équation (E) : $(z^2+1)^2 + z^2 = 0$, $z \in \mathbb{C}$. L'ensemble des solutions de (E) est :

- ☐ [Vrai] $\{\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2}i\,,\, \pm\frac{1-\sqrt{5}}{2}i\}$
- ☐ [Faux] $\{\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\, \pm\frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$
- ☐ [Faux] $\{\pm\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\,,\, \pm\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\}$
- ☐ [Faux] $\{\pm\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,,\, \pm\frac{1-\sqrt{3}}{2}\}$

Explications: Remarquer que $(z^2+1)^2 + z^2 = (z^2+1)^2 - (iz)^2 = (z^2 - iz + 1)(z^2 + iz + 1)$. On peut aussi poser $Z = z^2$ et se ramener à une équation du second degré.

Question 116

On considère l'équation (E) : $z^8 = \overline{z}$, $z \in \mathbb{C}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si z est une solution de (E), alors $z = 0$.
- ☐ [Vrai] Si z est une solution de (E), alors $z = 0$ ou $|z| = 1$.
- ☐ [Faux] L'équation (E) admet 8 solutions distinctes.
- ☐ [Vrai] Les solutions non nulles de (E) sont les racines 9-ièmes de l'unité.

Explications: Remarquer que si z est une solution de (E), $|z|^8 = |\overline{z}| = |z|$, donc si z n'est pas nul, $|z| = 1$. Par conséquent, z est une solution non nulle de (E) si et seulement si $z^9 = z\overline{z} = 1$.

Question 117

Soit n un entier $\geqslant 2$, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les racines n-ièmes de l'unité. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $z^n - 1 = (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n)$
- ☐ [Vrai] $z_1.z_2, \ldots z_n = (-1)^{n-1}$
- ☐ [Faux] $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 1$
- ☐ [Vrai] $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$

Explications: $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sont les racines dans $\mathbb{C}$ du polynôme $P(X) = X^n - 1$, donc $P(X) = (X - z_1)(X - z_2)\ldots(X - z_n)$. On examine le coefficient de X^{n-1} et le coefficient constant.

Question 118

Soit E l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|\frac{z-1}{1+iz}| = \sqrt{2}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] E est une droite.
- ☐ [Vrai] E est un cercle.
- ☐ [Faux] $E = \emptyset$
- ☐ [Vrai] E est le cercle de rayon 2 et de centre le point d'affixe $-1+2i$.

Explications: Soit $z \neq i$. On a : $|\frac{z-1}{1+iz}| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z-1|^2 = 2|1+iz|^2 \Leftrightarrow (z-1)(\overline{z}-1) = 2(1+iz)(1-i\overline{z})$. On développe cette dernière égalité.

Question 119

Soit E l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $E = \mathbb{R}^*$
- ☐ [Faux] E est le cercle unité.
- ☐ [Vrai] $E = \mathbb{R}^* \cup \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$
- ☐ [Vrai] E contient le cercle unité.

Explications: Soit $z \neq 0$. On a : $z + \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \overline{z} + \frac{1}{\overline{z}}$. On multiplie par $z\overline{z}$ et on simplifie cette égalité.

Question 120

Soit E l'ensemble des points M d'affixe z tels que M et les points A et B d'affixe i et iz respectivement soient alignés. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] E est la droite passant par les points d'affixe i et $-1+i$ respectivement.
- ☐ [Vrai] E est le cercle de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de centre le point d'affixe $\frac{1}{2}(1+i)$.
- ☐ [Faux] E est le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et de centre le point d'affixe $1+i$.
- ☐ [Faux] E est la droite passant par les points d'affixe $-i$ et $1-i$ respectivement.

Explications: $M(z), A(i)$ et $B(iz)$ sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires. On pose $z = x+iy$, $x, y \in \mathbb{R}$. Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de coordonnées $(x, y-1)$ et $(-y, x-1)$ respectivement. $M(x+iy) \in E$ si et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$.

Géométrie du plan

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

5 Géométrie du plan | 140

Fiche d'exercices ♦ Droites du plan ; droites et plans de l'espace

5.1 Géométrie du plan | Facile | 140.01, 140.02

Question 121

On considère les points $A(3,0)$ et $B(0,4)$. Quelle est la distance d entre A et B ?

- ☐ [Faux] $d = 3$
- ☐ [Faux] $d = 4$
- ☐ [Vrai] $d = 5$
- ☐ [Faux] $d = 3 + 4 = 7$

Explications: D'abord, $\overrightarrow{AB} = (-3,4)$. Donc $d = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Question 122

On considère les vecteurs $\vec{u} = (2,-1)$ et $\vec{v} = (1,-4)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] La norme de $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = 2 - 1 = 1$.
- ☐ [Vrai] La norme de $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{5}$.
- ☐ [Faux] Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\vec{u} \cdot \vec{v} = (2-1) + (1-4) = -3$.
- ☐ [Vrai] Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$.

Explications: Penser aux définitions : si $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Question 123

On considère les points $A(1,1)$, $B(-1,1)$ et $C(1,-1)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égaux.
- ☐ [Faux] $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AC}$
- ☐ [Faux] Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- ☐ [Vrai] Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Explications: D'abord, $\overrightarrow{AB} = (-2,0)$ et $\overrightarrow{AC} = (0,-2)$, et puis le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est nul. Donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Question 124

Dans un repère orthonormé direct, on considère le point A de coordonnées polaires $r = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{6}$. Quelles sont les coordonnées cartésiennes (x, y) de A ?

- ☐ [Faux] $x = 2$ et $y = 2$
- ☐ [Vrai] $x = \sqrt{3}$ et $y = 1$
- ☐ [Faux] $x = 1$ et $y = \sqrt{3}$
- ☐ [Faux] $x = 1$ et $y = 1$

Explications: Les deux systèmes de coordonnées sont reliés par les relations $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

Question 125
Dans un repère orthonormé direct, on considère le point $A(1,1)$. Quelles sont les coordonnées polaires (r,θ) de A ?

- ☐ [Faux] $r=1$ et $\theta=1$
- ☐ [Faux] $r=2$ et $\theta=0$
- ☐ [Vrai] $r=\sqrt{2}$ et $\theta=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$
- ☐ [Faux] $r=\sqrt{2}$ et $\theta=0+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Explications: D'abord, $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ et θ est solution du système :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \\ \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Question 126
On considère les points $A(0,1)$, $B(2,3)$ et $C(1,1)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] Les droites (AB) et (OC) sont confondues.
- ☐ [Faux] Les droites (AB) et (OC) sont perpendiculaires.
- ☐ [Vrai] Les droites (AB) et (OC) sont parallèles.
- ☐ [Faux] Les droites (AB) et (OC) sont sécantes.

Explications: On a $\overrightarrow{AB}=(2,2)=2\overrightarrow{OC}$. Les droites (AB) et (OC) sont parallèles.

Question 127
On considère les points $A(-1,-1)$, $B(-1,1)$, $C(1,2)$ et $D(1,0)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
- ☐ [Faux] Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
- ☐ [Vrai] Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- ☐ [Vrai] $(ABCD)$ est un parallélogramme.

Explications: On a $\overrightarrow{AB}=(0,2)=-\overrightarrow{CD}$, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles. De plus, $AB=CD$, donc $(ABCD)$ est un parallélogramme.

Question 128
Soit D la droite passant par l'origine et par le point $A(1,1)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] $\vec{u}(1,1)$ est un vecteur directeur de D.
- ☐ [Faux] $\vec{u}(1,1)$ est un vecteur normal à D.
- ☐ [Vrai] $y=x$ est une équation cartésienne de D.
- ☐ [Faux] $x+y=0$ est une équation cartésienne de D.

Explications: La droite D est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{OA} = \vec{u}(1,1)$ et $M(x,y) \in D \Longleftrightarrow \det(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA}) = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0$. Ceci donne une équation cartésienne de D.

Question 129
Soit D la droite passant par les points $A(1,-1)$ et $B(1,1)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] $\vec{u}(0,1)$ est un vecteur directeur de D.
- ☐ [Faux] $\vec{u}(0,1)$ est un vecteur normal à D.
- ☐ [Faux] Le point $C(1,0)$ n'appartient pas à D.
- ☐ [Vrai] Le point $C(1,0)$ appartient à D.

Explications: Le vecteur $\overrightarrow{AB} = (0,2)$ est un vecteur directeur de D. Par ailleurs, $\overrightarrow{AC} = (0,1) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Donc $C \in D$.

Question 130
Soit D la droite passant par les points $A(1,-1)$ et $B(1,0)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] Une équation cartésienne de D est : $x - y + 1 = 0$.
- ☐ [Vrai] Une équation cartésienne de D est : $x - 1 = 0$.
- ☐ [Vrai] $\vec{u}(1,0)$ est un vecteur normal à D.
- ☐ [Faux] $\vec{u}(1,0)$ est un vecteur directeur de D.

Explications: Les coordonnées de A et B vérifient l'équation $x - 1 = 0$, celle-ci est donc une équation cartésienne de D et $\vec{u}(1,0)$ est un vecteur normal à D.

5.2 Géométrie du plan | Moyen | 140.01, 140.02

Question 131
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (1,1)$ et $\vec{v} = \left(1, \sqrt{3}\right)$. Quel est la mesure $\alpha \in [0, 2\pi[$ de l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

- ☐ [Faux] $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$
- ☐ [Faux] $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$
- ☐ [Vrai] $\alpha = \dfrac{\pi}{12}$
- ☐ [Faux] $\alpha = \dfrac{7\pi}{12}$

Explications: Une mesure de l'angle orienté entre $\vec{i}$ et $\vec{u}$ est $a = \dfrac{\pi}{4}$ et une mesure de l'angle orienté entre $\vec{i}$ et $\vec{v}$ est $b = \dfrac{\pi}{3}$. Donc $\alpha = b - a = \dfrac{\pi}{12}$.

Question 132
Dans le plan muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, a\right)$ et $\vec{v} = \left(a, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Comment choisir le réel a pour que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée ?

- ☐ [Vrai] $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- ☐ [Vrai] $a = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- ☐ [Faux] $a = \sqrt{2}$
- ☐ [Faux] $a = -\sqrt{2}$

Explications: Pour tout $a \in \mathbb{R}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Ensuite, $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$ implique $a = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{2}}$.

Question 133

Dans le plan muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{2}, a\right)$ et $\vec{v} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, b\right)$. Comment choisir les réels a et b pour que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée ?

- ☐ [Vrai] $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \dfrac{1}{2}$
- ☐ [Faux] $a = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$
- ☐ [Faux] $a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \dfrac{1}{2}$
- ☐ [Vrai] $a = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$

Explications: D'abord, $\|\vec{u}\| = 1 \Leftrightarrow a = \dfrac{\pm\sqrt{3}}{2}$, $\|\vec{v}\| = 1 \Leftrightarrow b = \dfrac{\pm 1}{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si, et seulement si, a et b sont de même signe.

Question 134

Dans le plan muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On suppose que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 3$ et que l'angle entre ces deux vecteurs est $\dfrac{\pi}{3}$. Quelle est la norme de $\vec{u} + \vec{v}$?

- ☐ [Faux] $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 6$
- ☐ [Faux] $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 3$
- ☐ [Vrai] $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 3\sqrt{3}$
- ☐ [Faux] $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 9$

Explications: La bilinéarité et la symétrie du produit scalaire donnent

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Et puis $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{9}{2}$. Donc $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = 9 + 9 + 9$.

Question 135

On considère les points $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$ et $C(1, -1)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] Les points A, B et C sont alignés.

- ☐ [Vrai] ABC est un triangle rectangle en A.
- ☐ [Faux] ABC est un triangle équilatéral.
- ☐ [Vrai] ABC est un triangle isocèle en A.

Explications: On a $\overrightarrow{AB} = (-2, 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (0, -2)$. Les points A, B et C ne sont pas alignés. De plus, $\|\overrightarrow{AB}\| = 2 = \|\overrightarrow{AC}\|$ donc ABC est isocèle en A et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$, donc ABC est rectangle en A.

Question 136
Soit D la droite définie par le paramétrage :

$$\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] Le point $A(1,1)$ appartient à D.
- ☐ [Faux] $\vec{u} = (1,-1)$ est un vecteur normal à D.
- ☐ [Vrai] Une équation cartésienne de D est : $x + y - 3 = 0$.
- ☐ [Faux] $\vec{u}(1,1)$ est un vecteur directeur de D.

Explications: Le vecteur $\vec{u} = (1,-1)$ est un vecteur directeur de D. On élimine t en additionnant les deux équations. Ceci donne $x + y = 3$ qui est une équation cartésienne de D.

Question 137
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite D passant par les points $A(1,1)$ et $B(2,3)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $\vec{u} = (1,2)$ est un vecteur normal à D.
- ☐ [Vrai] Une équation cartésienne de D est : $2x - y - 1 = 0$.
- ☐ [Faux] Le point $C(1,2)$ appartient à D.
- ☐ [Vrai] La distance du point $N(-1,2)$ à la droite D est $\sqrt{5}$.

Explications: Le vecteur $\overrightarrow{AB} = (1,2)$ dirige D et $M(x,y) \in D \iff \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = 0$, c'est-à-dire $2x - y - 1 = 0$. La distance de N à D est donnée par $\dfrac{|2 \times (-1) - 2 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \sqrt{5}$.

Question 138
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(1,2)$, $B(2,1)$ et $C(-2,1)$. Quelle est la distance d du point C à la droite (AB) ?

- ☐ [Faux] $d = \sqrt{2}$
- ☐ [Faux] $d = 3$
- ☐ [Vrai] $d = 2\sqrt{2}$
- ☐ [Faux] $d = \sqrt{10}$

Explications: Utiliser la formule $d = \dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)\right|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = 2\sqrt{2}$.

Question 139
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite D définie par le paramétrage :

$$\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Quelle est la distance d du point $M(2,3)$ à la droite D ?

- ☐ [Vrai] $d = \sqrt{2}$
- ☐ [Faux] $d = \sqrt{3}$
- ☐ [Faux] $d = 1$
- ☐ [Faux] $d = 2$

Explications: Le point $A(1,2) \in D$ et le vecteur $\vec{v} = (1,-1)$ dirige D. On utilise la formule $d = \dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{v}\right)\right|}{\|\vec{v}\|} = \sqrt{2}$.

Question 140
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(a,b)$ et $B(1,1)$. Comment choisir les réels a et b pour que l'aire du triangle de sommets O, A, B soit égale à 1 ?

- ☐ [Vrai] $a = 2$ et $b = 0$
- ☐ [Vrai] $a = 2 + b$ et $b \in \mathbb{R}$
- ☐ [Faux] $a = 1$ et $b = 0$
- ☐ [Faux] $a = 0$ et $b = 1$

Explications: On doit avoir $2\text{Aire}(OAB) = \left|\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}\right)\right| = 2$. Ceci donne ($a = 2 + b$ et $b \in \mathbb{R}$).

5.3 Géométrie du plan | Difficile | 140.01, 140.02

Question 141
Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, a\right)$ et $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, b\right)$. Comment choisir les réels a et b pour que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée directe ?

- ☐ [Vrai] $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$
- ☐ [Faux] $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$
- ☐ [Faux] $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$
- ☐ [Faux] $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$

Explications: D'abord, $\|\vec{u}\| = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pm\sqrt{3}}{2}$, $\|\vec{v}\| = 1 \Leftrightarrow b = \frac{\pm 1}{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si, et seulement si, a et b sont de même signe. Enfin pour que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit directe, il faut que $\det(\vec{u}, \vec{v})$ soit positif.

Question 142
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(a,b)$ et $B(1,1)$. Comment choisir les réels a et b pour que le triangle de sommets O,A,B soit rectangle et isocèle en A ?

- ☐ [Faux] $a=-1$ et $b=-1$
- ☐ [Vrai] $a=1$ et $b=0$
- ☐ [Vrai] $a=0$ et $b=1$
- ☐ [Faux] $a=1$ et $b=-1$

Explications: On doit avoir $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{AB}\|$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Ceci donne ($a=1$ et $b=0$) ou ($a=0$ et $b=1$).

Question 143
Soit D la droite définie par l'équation cartésienne : $x-2y=4$. Quelles sont les coordonnées (a,b) du projeté orthogonal $H(a,b)$ du point $M(1,1)$ sur D ?

- ☐ [Faux] $(a,b)=(4,0)$
- ☐ [Vrai] $(a,b)=(2,-1)$
- ☐ [Faux] $(a,b)=(6,1)$
- ☐ [Faux] $(a,b)=(1,1)$

Explications: Le vecteur $\vec{u}=(1,-2)$ est normal à D et le vecteur $\vec{v}=(2,1)$ est directeur de D. Les coordonnées de H vérifient le système

$$\begin{cases} a-2b=4 \\ \overrightarrow{HM}\cdot\vec{v}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b=4 \\ 2a+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1. \end{cases}$$

Question 144
On considère trois points A, B et C du plan tels que

$$(AB)\ :\ x-2y+3=0 \quad \text{et} \quad (AC)\ :\ 2x-y-3=0.$$

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] Les points A, B et C sont alignés.
- ☐ [Faux] Le point B appartient à (AC).
- ☐ [Faux] Le point C appartient à (AB).
- ☐ [Vrai] Les coordonnées de A sont $A(3,3)$.

Explications: Les points A, B et C ne sont pas alignés car sinon les droites (AB) et (AC) seraient confondues. Ces droites se coupent en A et les coordonnées de ce point d'intersection vérifient le système

$$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ 2x-y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3. \end{cases}$$

Question 145
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le point $A(1,2)$ et on note D une droite passant par A et qui est à distance 1 de l'origine. Une équation cartésienne de D est

- ☐ [Vrai] $D\ :\ x = 1$
- ☐ [Faux] $D\ :\ x + 2y = 0$
- ☐ [Vrai] $D\ :\ 3x - 4y + 5 = 0$
- ☐ [Faux] $D\ :\ y = 2x$

Explications: Une équation cartésienne d'une droite D passant par A est de la forme $a(x-1)+b(y-2) = 0$. Mais,

$$1 = \mathrm{d}(O,D) = \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow b = 0 \text{ ou } b = -\frac{4}{3}a.$$

Ceci détermine toutes les droites passant par A et qui sont à distance 1 de l'origine.

Question 146
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite Δ d'équation $y = x$ et on note D une droite perpendiculaire à Δ et qui est à distance 1 de l'origine. Une équation cartésienne de D est

- ☐ [Faux] $D\ :\ x - y + \sqrt{2} = 0$
- ☐ [Vrai] $D\ :\ x + y + \sqrt{2} = 0$
- ☐ [Vrai] $D\ :\ x + y - \sqrt{2} = 0$
- ☐ [Faux] $D\ :\ x - y - \sqrt{2} = 0$

Explications: Le vecteur $\vec{n} = (1,-1)$ est normal à Δ, il dirige D. Une équation cartésienne de D est de la forme $x + y + c = 0$. Mais,

$$1 = \mathrm{d}(O,D) = \frac{|c|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2}.$$

Question 147
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite Δ d'équation $x = y$ et on note D une droite parallèle à Δ et qui est à distance 1 de l'origine. Une équation cartésienne de D est

- ☐ [Vrai] $D\ :\ x - y + \sqrt{2} = 0$
- ☐ [Faux] $D\ :\ x + y + \sqrt{2} = 0$
- ☐ [Faux] $D\ :\ x + y - \sqrt{2} = 0$
- ☐ [Vrai] $D\ :\ x - y - \sqrt{2} = 0$

Explications: Le vecteur $\vec{n} = (1,-1)$ est normal à Δ, il est aussi normal à D. Une équation cartésienne de D est de la forme $x - y + c = 0$. Mais,

$$1 = \mathrm{d}(O,D) = \frac{|c|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2}.$$

Question 148

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite Δ d'équation $x = y$ et on note D une droite perpendiculaire à Δ et qui est à distance 0 de l'origine. Une représentation paramétrique de D est

- ☐ [Faux] $D \ : \ x = t, \ y = t$ et $t \in \mathbb{R}$
- ☐ [Vrai] $D \ : \ x = t, \ y = -t$ et $t \in \mathbb{R}$
- ☐ [Faux] $D \ : \ x = 3t, \ y = 3t$ et $t \in \mathbb{R}$
- ☐ [Vrai] $D \ : \ x = -2t, \ y = 2t$ et $t \in \mathbb{R}$

Explications: Le vecteur $\vec{n} = (1, -1)$ est normal à Δ, il dirige D. Or $\mathrm{d}(O, D) = 0 \Rightarrow O \in D$. Donc D est la droite passant par O est dirigée par $\vec{n}$.

Question 149

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite Δ d'équation $y = x$ et on note D une droite parallèle à Δ et qui est à distance 0 de l'origine. Une représentation paramétrique de D est

- ☐ [Vrai] $D \ : \ x = t, \ y = t$ et $t \in \mathbb{R}$
- ☐ [Faux] $D \ : \ x = t, \ y = -t$ et $t \in \mathbb{R}$
- ☐ [Vrai] $D \ : \ x = -t, \ y = -t$ et $t \in \mathbb{R}$
- ☐ [Faux] $D \ : \ x = 2t, \ y = -2t$ et $t \in \mathbb{R}$

Explications: Le vecteur $\vec{n} = (1, -1)$ est normal à Δ, il est aussi normal à D. Donc $\vec{v} = (1, 1)$ dirige D. Or $\mathrm{d}(O, D) = 0 \Rightarrow O \in D$. Donc D est la droite passant par O est dirigée par $\vec{v}$.

Question 150

Le projeté orthogonal de l'origine O sur une droite D du plan est le point $H(1, 1)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] La distance entre O et D est 0.
- ☐ [Vrai] La distance entre O et D est $\sqrt{2}$.
- ☐ [Vrai] Une équation cartésienne de D est $x + y - 2 = 0$.
- ☐ [Faux] Une équation cartésienne de D est $y = x$.

Explications: D est la droite passant par H et $\overrightarrow{OH} = (1, 1)$ en est un vecteur normal.

Géométrie dans l'espace

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

6 Géométrie dans l'espace | 141

Fiche d'exercices ⧫ Droites du plan ; droites et plans de l'espace
Pour ces questions, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

6.1 Produit scalaire – Produit vectoriel – Déterminant | Facile | 141.01

Question 151
Soit $\vec{u}(1,1,1), \vec{v}(1,-1,0)$ et $\vec{w}(0,1,1)$ trois vecteurs. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- ☐ [Faux] $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.
- ☐ [Vrai] $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère de l'espace.
- ☐ [Faux] $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère orthonormé de l'espace.

Explications: Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère si et seulement si $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$.

Question 152
Soit $A(1,1,1), B(0,1,1)$ et $C(1,0,1)$ trois points. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] A, B et C sont alignés.
- ☐ [Faux] A, B et C forment un triangle d'aire $\frac{1}{3}$.
- ☐ [Vrai] A, B et C forment un triangle d'aire $\frac{1}{2}$.
- ☐ [Faux] Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Explications: L'aire du triangle ABC est donnée par : $\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$.

6.2 Aire – Volume | Moyen | 141.02

Question 153
Soit $\vec{u}(-1,1,1), \vec{v}(0,1,2)$ et $\vec{w}(1,0,-1)$ trois vecteurs. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] L'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\sqrt{3}$.
- ☐ [Vrai] L'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\sqrt{6}$.
- ☐ [Faux] Le volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est 1.
- ☐ [Vrai] Le volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est 2.

Explications: L'aire du parallélogramme engendré par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donnée par : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$. Le volume du parallélépipède engendré par trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est donné par : $|\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$.

6.3 Plans | Facile | 141.03

Question 154
Soit P le plan passant par $A(1,1,0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1,-1,1)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Une équation cartésienne de P est $x - y + z = 1$.

- ☐ [Vrai] Une équation cartésienne de P est $x - y + z = 0$.
- ☐ [Vrai] Une représentation paramétrique de P est :

$$\begin{cases} x &= t - s \\ y &= t \\ z &= s, \quad (t, s \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

- ☐ [Vrai] Une représentation paramétrique de P est :

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= s \\ z &= s - t, \quad (t, s \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Explications: Une équation de P est de la forme : $x - y + z + a = 0$ et on cherche a pour que A appartienne à P. On résout cette équation pour trouver une représentation paramétrique.

Question 155

Soit P le plan passant par $A(-1, 1, 1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(0, 1, 1)$ et $\vec{v}(1, 0, 1)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Une représentation paramétrique de P est :

$$\begin{cases} x &= -1 + s \\ y &= 1 + t \\ z &= 1 + t + s, \quad (t, s \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

- ☐ [Faux] Une représentation paramétrique de P est :

$$\begin{cases} x &= -1 + t \\ y &= 1 + s \\ z &= -1 + t + s, \quad (t, s \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

- ☐ [Faux] Une équation cartésienne de P est $x + y + z = -1$.
- ☐ [Vrai] Une équation cartésienne de P est $x + y - z = -1$.

Explications: On peut trouver une équation cartésienne, à partir d'une représentation paramétrique, en éliminant les paramètres.

Question 156

Soit P le plan passant par les points $A(0, 1, 0)$, $B(1, -1, 0)$ et $C(0, 1, 1)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Une représentation paramétrique de P est :

$$\begin{cases} x &= s \\ y &= 1 - 2s \\ z &= t, \quad (t, s \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

- ☐ [Faux] Une représentation paramétrique de P est :

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= s \\ z &= 1 + 2s, \quad (t, s \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

- ☐ [Faux] Une équation cartésienne de P est $2x+z=1$.
- ☐ [Vrai] Une équation cartésienne de P est $2x+y=1$.

Explications: P est le plan passant par A et dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

6.4 Droites de l'espace | Facile | 141.04

Question 157
Soit D la droite passant par le point $A(2,-1,1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1,1,0)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Une représentation paramétrique de D est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-t \\ y & = & -1+t \\ z & = & 1, \quad (t\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$$

- ☐ [Faux] Une représentation paramétrique de D est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2-t \\ y & = & -1+t \\ z & = & -t, \quad (t\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$$

- ☐ [Vrai] Une représentation cartésienne de D est :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & 1 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

- ☐ [Faux] Une représentation cartésienne de D est :

$$\left\{\begin{array}{ccc} x+y & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

Explications: On peut trouver une représentation cartésienne, à partir d'une représentation paramétrique en éliminant le paramètre.

Question 158
Soit D la droite passant par le point $A(-1,1,2)$ et perpendiculaire au plan d'équation cartésienne : $x+y+z=1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Une représentation paramétrique de D est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 2+t, \quad (t\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$$

- ☐ [Vrai] Une représentation paramétrique de D est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1-t \\ y & = & 1-t \\ z & = & 2-t, \quad (t\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$$

- ☐ [Vrai] Une représentation cartésienne de D est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x-y & = & -2 \\ y-z & = & -1 \end{array}\right.$$

- ☐ [Faux] Une représentation cartésienne de D est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ x+z & = & 1 \end{array}\right.$$

Explications: D est dirigée par le vecteur $\vec{u}(1,1,1)$.

6.5 Plans – Droites | Moyen | 141.03, 141.04

Question 159
Soit a et b deux réels, D et D' deux droites de représentations paramétriques :

$$D : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+2t \\ y & = & t \\ z & = & -1+at, \quad (t \in \mathbb{R}) \end{array}\right. \qquad D' : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -3+bt \\ y & = & -t \\ z & = & 1+t, \quad (t \in \mathbb{R}) \end{array}\right.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] D et D' sont parallèles si et seulement si $a=2$ et $b=3$.
- ☐ [Vrai] D et D' sont parallèles si et seulement si $a=-1$ et $b=-2$.
- ☐ [Faux] D et D' sont orthogonales si et seulement si $a=1$ et $b=0$.
- ☐ [Vrai] D et D' sont orthogonales si et seulement si $a=1-2b$, $b \in \mathbb{R}$.

Explications: Si D est dirigée par un vecteur $\vec{u}$ et D' est dirigée par un vecteur $\vec{v}$, D et D' sont parallèles si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{0}$. D et D' sont othogonales si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Question 160
Soit $P : x+y-z=0$, $P' : x-y=2$ et $P'' : y-z=3$ trois plans. L'intersection de ces trois plans est :

- ☐ [Faux] Vide.
- ☐ [Faux] Une droite.
- ☐ [Vrai] Un point.
- ☐ [Vrai] Le point de coordonnées $(-3,-5,-8)$.

Explications: On résout le système constitué des équations des trois plans.

Question 161
Soit $P : x-y-z=-2$, $P' : x+z=2$ deux plans et D la droite : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+t \\ y & = & 2+2t \\ z & = & 1-t, \quad (t \in \mathbb{R}) \end{array}\right.$ Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $D \subset P'$
- ☐ [Vrai] $D = P \cap P'$

- ☐ [Faux] $D \cap P = \emptyset$
- ☐ [Faux] $D \cap P' = \emptyset$

Explications: On vérifie que $D = P \cap P'$.

Question 162

Soit $P : x+y-z=1$, $P' : x+z=-1$ deux plans et Q le plan passant par $A(1,1,1)$ et perpendiculaire à P et à P'. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Une équation cartésienne de Q est $x+2y-z+2=0$.
- ☐ [Vrai] Une équation cartésienne de Q est $x-2y-z+2=0$.
- ☐ [Faux] Une représentation paramétrique de Q est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & 1+t-s \\ z & = & 1+t+s, \quad (t,s \in \mathbb{R}) \end{array}\right.$$

- ☐ [Vrai] Une représentation paramétrique de Q est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t+s \\ y & = & 1+t \\ z & = & 1-t+s, \quad (t,s \in \mathbb{R}) \end{array}\right.$$

Explications: Q passe par A et est dirigé par $\vec{n}$ et $\vec{n'}$, où $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont des vecteurs normaux à P et à P' respectivement.

Question 163

On considère la droite $D : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & t \\ z & = & -1+2t, \quad (t \in \mathbb{R}) \end{array}\right.$ et le plan P passant par $A(0,1,1)$ et perpendiculaire à D. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Une équation cartésienne de P est $x-y-2z+3=0$.
- ☐ [Faux] Une équation cartésienne de P est $x-2y-2z+2=0$.
- ☐ [Vrai] Une représentation paramétrique de P est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 3+t-2s \\ z & = & s, \quad (t,s \in \mathbb{R}) \end{array}\right.$$

- ☐ [Faux] Une représentation paramétrique de P est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & 2+t-2s \\ z & = & s, \quad (t,s \in \mathbb{R}) \end{array}\right.$$

Explications: Un vecteur directeur de D est un vecteur normal à P.

Question 164

On considère les deux plans $P : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t+s \\ y & = & -1+t \\ z & = & 2+t-s, \quad (t,s\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$ et $P' : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+2t \\ y & = & t+s \\ z & = & 2+2s, \quad (t,s\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $P\cap P'$ est une droite.
- ☐ [Faux] P et P' sont perpendiculaires.
- ☐ [Vrai] $P = P'$
- ☐ [Faux] $P\cap P' = \emptyset$

Explications: On vérifie que $P = P'$.

6.6 Plans – Droites | Difficile | 141.03, 141.04

Question 165

Soit P et P' deux plans non parallèles d'équations : $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ respectivement. Soit $D = P\cap P'$ et Q un plan contenant D. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Une équation cartésienne de Q est $ax+by+cz+d=0$.
- ☐ [Faux] Une équation cartésienne de Q est $a'x+b'y+c'z+d'=0$.
- ☐ [Vrai] Une équation cartésienne de Q est de la forme : $\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$, où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $(\alpha a+\beta a', \alpha b+\beta b', \alpha c+\beta c', \alpha d+\beta d')\neq(0,0,0,0)$.
- ☐ [Vrai] Si $Q\neq P'$, une équation cartésienne de Q est de la forme : $(ax+by+cz+d)+\alpha(a'x+b'y+c'z+d')=0$, où $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $(a+\alpha a', b+\alpha b', c+\alpha c', d+\alpha d')\neq(0,0,0,0)$.

Explications: $\vec{n}(a,b,c)$ est un vecteur normal à P et $\vec{n'}(a',b',c')$ est un vecteur normal à P', donc un vecteur normal à Q est une combinaison linéaire de $\vec{n}$ et $\vec{n'}$. Par conséquent, une équation cartésienne de Q est de la forme : $\alpha(ax+by+cz)+\beta(a'x+b'y+c'z)+\gamma=0$. D'autre part, si $A(x_0,y_0,z_0)\in D$, $A\in Q$. On déduit que $\gamma=\alpha d+\beta d'$.

Question 166

Soit D la droite d'équations : $\left\{\begin{array}{lcl} x+z & = & 1 \\ x-y & = & -1 \end{array}\right.$ et P le plan contenant D et perpendiculaire au plan Q d'équation : $x-z+3=0$. Une équation cartésienne de P est :

- ☐ [Vrai] $x+z=1$
- ☐ [Faux] $x+y=0$
- ☐ [Faux] $y+z=1$
- ☐ [Faux] $x-y=-1$

Explications: $\vec{u}(1,0,-1)$ est un vecteur normal à Q qui n'appartient pas au plan vectoriel $x-y=0$. Donc P est différent du plan d'équation : $x-y=-1$ et donc une équation cartésienne de P est de la forme : $(x+z-1)+\alpha(x-y+1)=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$. On calcule α de sorte que $\vec{u}(1,0,-1)$ soit un vecteur de P.

Question 167

Soit D la droite d'équations : $\left\{\begin{array}{rcl} x-y &=& -1 \\ y-z &=& 0 \end{array}\right.$ et P le plan contenant D et parallèle à la droite d'équations D' : $\left\{\begin{array}{rcl} x+z &=& 0 \\ x-y &=& 2 \end{array}\right.$. Une équation cartésienne de P est :

- ☐ [Faux] $x-z=1$
- ☐ [Faux] $x-y=0$
- ☐ [Faux] $y-z=0$
- ☐ [Vrai] $x-y=-1$

Explications: $\vec{u}(1,1,-1)$ est un vecteur directeur de la droite D' qui n'appartient pas au plan $y-z=0$. Donc P est différent du plan d'équation : $y-z=0$ et donc une équation cartésienne de P est de la forme : $(x-y+1)+\alpha(y-z)=0$, $\alpha\in\mathbb{R}$. On calcule α de sorte que $\vec{u}(1,1,-1)$ soit un vecteur de P.

Question 168

Soit $(P_n), n\in\mathbb{N}$, la famille de plans d'équations : $n^2x+(2n-1)y+nz=3$. On note E l'intersection de ces plans, c'est-à-dire $E=\{M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ M\in P_n, \forall n\in\mathbb{N}\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $E=\emptyset$
- ☐ [Faux] E est un plan d'équation $x+y+z=3$.
- ☐ [Faux] E est une droite d'équation $\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 3 \\ y &=& -3 \end{array}\right.$.
- ☐ [Vrai] E est le point de coordonnées $(0,-3,6)$.

Explications: Soit $M(x,y,z)\in E$, alors $n^2x+(2n-1)y+nz=3$, $\forall n\in\mathbb{N} \Longleftrightarrow xn^2+(2y+z)n-y-3=0$, $\forall n\in\mathbb{N} \Longleftrightarrow x=0, 2y+z=0$ et $y+3=0$.

Question 169

On considère les droites D_1 : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& z-1 \\ y &=& 2z+1 \end{array}\right.$ et D_2 : $\left\{\begin{array}{rcl} y &=& 3x \\ z &=& 1 \end{array}\right.$. Soit P_1 et P_2 des plans parallèles contenant D_1 et D_2 respectivement. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Une équation cartésienne de P_1 est $3x-y-z+4=0$.
- ☐ [Faux] Une équation cartésienne de P_1 est $4x-y-z+5=0$.
- ☐ [Faux] Une équation cartésienne de P_2 est $4x-y-z+1=0$.
- ☐ [Vrai] Une équation cartésienne de P_2 est $3x-y-z+1=0$.

Explications: D_1 passe par le point $A_1(-1,1,0)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u_1}(1,2,1)$. D_2 passe par le point $A_2(0,0,1)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u_2}(1,3,0)$. P_1 passe donc par A_1 est de vecteur normal $\vec{n}=\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}$ et P_2 passe donc par A_2 est de vecteur normal $\vec{n}$.

Question 170

Soit D_1 : $\left\{\begin{array}{rcl} y &=& x+2 \\ z &=& x \end{array}\right.$, D_2 : $\left\{\begin{array}{rcl} y &=& 2x+1 \\ z &=& 2x-1 \end{array}\right.$ et Δ une droite parallèle au plan (xOy) et rencontrant les droites D_1, D_2 et l'axe (Oz). Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Une équation cartésienne de Δ est : $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 1 \\ z & = & -1 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z & = & 0 \\ z & = & 1 \end{array}\right.$.
- ☐ [Faux] Δ est contenu dans le plan $z=-1$ ou $z=1$.
- ☐ [Vrai] Une équation cartésienne de Δ est : $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 0 \\ z & = & -2 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{lcl} y & = & 3x \\ z & = & 1 \end{array}\right.$.
- ☐ [Vrai] Δ est contenu dans le plan $z=-2$ ou $z=1$.

Explications: Δ est parallèle au plan (xOy) et rencontre l'axe (Oz), une représentation cartésienne de Δ est donc de la forme : $\left\{\begin{array}{lcl} ax+by & = & 0 \\ z & = & c, \quad a,b,c\in\mathbb{R} \end{array}\right.$.
On peut supposer que b est non nul, sinon, Δ ne rencontre pas D_1 ou D_2. Par conséquent, une représentation cartésienne de Δ est donc de la forme : $\left\{\begin{array}{lcl} ax+y & = & 0 \\ z & = & b, \quad a,b\in\mathbb{R} \end{array}\right.$.
On calcule a et b pour que Δ rencontre D_1 et D_2.

6.7 Distance | Facile | 141.05

Question 171
Soit $A(1,1,1)$ et P le plan d'équation cartésienne : $x+y+z+1=0$. La distance de A à P est :

- ☐ [Faux] $\frac{1}{\sqrt{3}}$
- ☐ [Faux] $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- ☐ [Faux] $\sqrt{3}$
- ☐ [Vrai] $\frac{4}{\sqrt{3}}$

Explications: Si P est d'équation $ax+by+cz+d=0$ et $A(x_0,y_0,z_0)$, la distance de A à P est donnée par : $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Question 172
Soit $A(-1,1,0)$ et P le plan passant par $B(1,0,1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1,1,1)$ et $\vec{v}(1,0,-1)$. La distance de A à P est :

- ☐ [Faux] $\frac{1}{\sqrt{6}}$
- ☐ [Vrai] $\frac{5}{\sqrt{6}}$
- ☐ [Faux] $\sqrt{6}$
- ☐ [Faux] $\frac{4}{\sqrt{6}}$

Explications: Si P passe par un point B et est dirigé par des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et A un point, la distance de A à P est donnée par : $\frac{|\det(\overrightarrow{BA},\vec{u},\vec{v})|}{\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|}$.

Question 173
Soit $A(2,0,1)$ et D la droite d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+y-z & = & 1 \\ x-y & = & -1 \end{array}\right.$$

La distance de A à D est :

- ☐ [Vrai] $\frac{3}{\sqrt{2}}$
- ☐ [Faux] $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ☐ [Faux] $\sqrt{3}$
- ☐ [Faux] $\sqrt{2}$

Explications: Si D est une droite qui passe par un point B et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ et A un point, la distance de A à D est donnée par : $\frac{\|\overrightarrow{BA}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$.

6.8 Distance | Moyen | 141.05

Question 174

On considère les droites $D_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+t \\ y & = & -t \\ z & = & 1+t, \quad (t\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$ et $D_2 : \left\{\begin{array}{lcl} y & = & 2 \\ x-z & = & 2 \end{array}\right.$ La distance entre D_1 et D_2 est :

- ☐ [Faux] 0
- ☐ [Faux] $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ☐ [Vrai] $\sqrt{2}$
- ☐ [Faux] Les droites se rapprochent autant que l'on veut sans se toucher.

Explications: Si D_1 passe par un point A_1 et est dirigée par un vecteur $\vec{u_1}$ et D_2 passe par un point A_2 et est dirigée par un vecteur $\vec{u_2}$, la distance entre D_1 et D_2 est donnée par : $\frac{|\det(\overrightarrow{A_1A_2},\vec{u_1},\vec{u_2})|}{\|\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}\|}$.

Question 175

Soit D la droite passant par le point $A(1,-1,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1,1,-1)$. Soit $M(1,-1,3)$ un point et H le projeté orthogonal de M sur D. Les coordonnées de H sont :

- ☐ [Faux] $H(0,1,1)$
- ☐ [Faux] $H(1,2,1)$
- ☐ [Vrai] $H(0,-2,1)$
- ☐ [Faux] $H(1,-2,1)$

Explications: $H\in D$, donc il existe $t\in\mathbb{R}$ tel que $H(1+t,-1+t,-t)$. On calcule t en utilisant l'égalité : $\overrightarrow{HM}\cdot\vec{u}=0$.

Question 176

On considère les droites $D_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x+y-z & = & 1 \\ x-y & = & -1 \end{array}\right.$, $D_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x-y+z & = & -1 \\ x-z & = & 1 \end{array}\right.$ et Δ la perpendiculaire commune à D_1 et D_2. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Une représentation cartésienne de Δ est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+5y-4z-5 & = & 0 \\ x-4y+5z+5 & = & 0 \end{array}\right.$$

☐ [Vrai] Une représentation cartésienne de Δ est :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+7y-4z-7 & = & 0 \\ x-4y+7z+7 & = & 0 \end{array}\right.$$

☐ [Faux] Δ est contenu dans le plan d'équation $x+5y-4z-5=0$.

☐ [Vrai] Δ est contenu dans le plan d'équation $x-4y+7z+7=0$.

Explications: Soit D_1 une droite passant par un point A_1 et dirigée par un vecteur $\vec{u_1}$ et D_2 une droite passant par un point A_2 et dirigée par un vecteur $\vec{u_2}$, telles que D_1 et D_2 ne soient pas parallèles. Soit P_1 le plan passant par A_1 et dirigé par les vecteurs $\vec{u_1}$ et $\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}$ et P_2 le plan passant par A_2 et dirigé par les vecteurs $\vec{u_2}$ et $\vec{u_1}\wedge\vec{u_2}$. Alors, la perpendiculaire commune à D_1 et D_2 est l'intersection de P_1 et P_2.

6.9 Distance | Difficile | 141.05

Question 177

Soit $A(1,1,1)$ un point, D la droite : $\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+z \\ y & = & z \end{array}\right.$ et P un plan contenant D et tel que la distance de A à P soit égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Une équation cartésienne de P est :

☐ [Faux] $x+z+1=0$ ou $x+y+1=0$

☐ [Faux] $x-z+1=0$ ou $x-y=0$

☐ [Faux] $z=1$ ou $x=1$

☐ [Vrai] $x-z=1$ ou $x-y=1$

Explications: P est différent du plan d'équation $y-z=0$ et $D\subset P$, une équation cartésienne de P est donc de la forme : $(x-z-1)+\alpha(y-z)=0$. On calcule α pour que la distance de A à P soit égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Question 178

Soit $P_1 : z+3=0$ et $P_2 : 2x+y+2z-1=0$ des plans et π un plan bissecteur de P_1 et P_2, c'est-à-dire : $M\in\pi$ si et seulement si M est à la même distance de P_1 et de P_2. Une équation cartésienne de π est :

☐ [Vrai] $2x+y-z-10=0$ ou $2x+y+5z+8=0$

☐ [Faux] $x+y-z-1=0$ ou $x+y+z+1=0$

☐ [Faux] $2x+y+z+8=0$ ou $2x-y+5z+7=0$

☐ [Faux] $x+y-z-4=0$ ou $x+y+3z-8=0$

Explications: $M(x,y,z)\in\pi \Longleftrightarrow |z+3| = \frac{|2x+y+2z-1|}{3}$.

Question 179

Soit E l'ensemble des points situés à la même distance des axes de coordonnées. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Faux] E est une droite.

☐ [Vrai] E est une réunion de droites.

☐ [Faux] $M(x,y,z) \in E \iff x = y = z$

☐ [Vrai] $M(x,y,z) \in E \iff |x| = |y| = |z|$

Explications: $M(x,y,z) \in E \iff \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{i}\| = \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{j}\| = \|\overrightarrow{OM} \wedge \vec{k}\|$.

Question 180

Soit D la droite : $\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 1 \\ z = -1-t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$ et P un plan contenant D à une distance de 1 de l'origine. Une équation cartésienne de P est :

☐ [Faux] $y = 1$

☐ [Vrai] $y = 1$ ou $4x + 3y + 12z + 13 = 0$

☐ [Faux] $y = 1$ ou $x = 1$

☐ [Faux] $x = 1$ ou $y = 1$ ou $z = 1$

Explications: Une représentation cartésienne de D est : $\begin{cases} y = 1 \\ x + 3z + 4 = 0 \end{cases}$. P est différent du plan $x + 3z + 4 = 0$ et P contient D, une équation cartésienne de P est donc de la forme : $(y-1) + \alpha(x + 3z + 4) = 0$. On calcule α de sorte que la distance de P à l'origine soit égale à 1.

Deuxième partie
Analyse

Réels

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

7 Réels | 120

Cours ● Les nombres réels
Vidéo ■ L'ensemble des nombres rationnels
Vidéo ■ Propriétés des réels
Vidéo ■ Densité des rationnels
Vidéo ■ Borne supérieure
Fiche d'exercices ♦ Propriétés des réels

7.1 Rationnels | Facile | 120.01

Question 181

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\frac{4}{16}+\frac{4}{20}=\frac{9}{16}$
- ☐ [Vrai] $\frac{14}{12}+\frac{12}{14}=\frac{85}{42}$
- ☐ [Vrai] $\frac{36}{5}-3=\frac{21}{5}$
- ☐ [Vrai] $\frac{14}{15}/\frac{21}{35}=\frac{14}{9}$

Explications: Pour additionner deux fractions rationnels, il faut d'abord les réduire au même dénominateur.

Question 182

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\frac{1}{7}=0,142142142\dots$
- ☐ [Vrai] Le nombre dont l'écriture décimale est $0,090909\dots$ est un nombre rationnel.
- ☐ [Vrai] $9,99999\dots=10$
- ☐ [Faux] $\frac{1}{5}=0,202020\dots$

Explications: On trouve l'écriture décimale d'un rationnel en calculant la division ! Si on a une écriture décimale finie ou périodique alors c'est un nombre rationnel.

7.2 Rationnels | Moyen | 120.01

Question 183

Soient x et y deux nombres rationnels strictement positifs. Parmi les nombres réels suivants, lesquels sont aussi des nombres rationnels ?

- ☐ [Vrai] $\frac{x-y}{x+y}$
- ☐ [Faux] $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$
- ☐ [Vrai] $x-y^2$
- ☐ [Vrai] $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

Explications: La somme, le produit, le quotient de deux nombres rationnels reste un nombre rationnel. La racine carrée d'un nombre rationnel n'est pas toujours un nombre rationnel (par exemple la racine carrée de 2). Par contre, par identité remarquable, on a $(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})=x^2-y^2$ qui est un nombre rationnel.

Question 184

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
- ☐ [Vrai] Le produit de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
- ☐ [Faux] La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
- ☐ [Faux] Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

Explications: La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel. Le produit aussi. C'est en général faux pour les nombres irrationnels !

7.3 Rationnels | Difficile | 120.01

Question 185
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] L'écriture décimale de $\sqrt{3}$ est finie ou périodique.
- ☐ [Vrai] L'écriture décimale de $\frac{n}{n+1}$ est finie ou périodique (quelque soit $n \in \mathbb{N}$).
- ☐ [Faux] Un nombre réel qui admet une écriture décimale infinie est un nombre irrationnel.
- ☐ [Vrai] Un nombre réel qui admet une écriture décimale finie est un nombre rationnel.

Explications: Les nombre rationnels sont exactement les nombres qui admettent une écriture décimale finie ou périodique.

Question 186
Je veux montrer que $\log 13$, est un nombre irrationnel. On rappelle que $\log 13$ est le réel tel que $10^{\log 13} = 13$. Quelle démarche puis-je adopter ?

- ☐ [Faux] Par division je calcule l'écriture décimale de $\log 13$ et je montre qu'elle est périodique.
- ☐ [Faux] Je prouve par récurrence que $\log n$ est irrationnel pour $n \geqslant 2$.
- ☐ [Vrai] Je suppose par l'absurde que $\log 13 = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et je cherche une contradiction après avoir écrit $13^q = 10^p$.
- ☐ [Faux] Il est faux que $\log 3$ soit un nombre irrationnel.

Explications: On raisonne par l'absurde en écrivant $\log 13 = \frac{p}{q}$, où p, q sont des entiers strictement positifs. On en déduit que $13^q = 10^p$. Comme 13 et 10 sont premiers entre eux, alors on obtient $p = q = 0$ et donc une contradiction.

7.4 Propriétés de nombres réels | Facile | 120.03

Question 187
Comment s'appelle les propriétés suivantes de $\mathbb{R}$?

- ☐ [Vrai] $(a + b) + c = a + (b + c)$ est l'associativité de l'addition.
- ☐ [Faux] $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ est la distributivité de la multiplication.
- ☐ [Vrai] $a \times b = b \times a$ est la commutativité de la multiplication.
- ☐ [Faux] $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ est l'intégrité.

Explications: $(a + b) + c = a + (b + c)$ est l'associativité de l'addition.
$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ est l'associativité de la multiplication.
$a \times b = b \times a$ est la commutativité de la multiplication.
$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ est la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

Question 188
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant 2y$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $x^2 \leqslant 2xy$
- ☐ [Faux] $y \leqslant \frac{x}{2}$
- ☐ [Vrai] $2x \leqslant x + 2y$

- ☐ [Vrai] $-2y \leqslant -x$

Explications: Lorsque l'on multiplie par un nombre négatif alors le sens de l'inégalité change. Il faut faire attention lorsque l'on multiplie par x, car le sens de l'inégalité est changé ou pas selon que x soit négatif ou positif !

Question 189
Notation : $E(x)$ désigne la partie entière du réel x. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $E(7,9) = 8$
- ☐ [Vrai] $E(-3,33) = -4$
- ☐ [Faux] $E(\frac{5}{3}) = 5$
- ☐ [Faux] $E(x) = 0 \implies x = 0$

Explications: La partie entière de x est le plus grand entier, inférieur ou égal à x.

7.5 Propriétés de nombres réels | Moyen | 120.03

Question 190
Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = x - |x|$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0$
- ☐ [Vrai] $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant 0$
- ☐ [Vrai] $\forall x > 0 \quad f(x) = 0$
- ☐ [Faux] $\forall x < 0 \quad f(x) = -2x$

Explications: Si $x \geqslant 0$, alors $f(x) = 0$. Si $x < 0$ alors $-|x| = x$ et donc $f(x) = 2x < 0$.

Question 191
Quelles sont les assertions vraies concernant le maximum de nombres réels ?

- ☐ [Vrai] $\max(a,b) \geqslant a$ et $\max(a,b) \geqslant b$
- ☐ [Faux] $\max(a,b) > a$ ou $\max(a,b) > b$
- ☐ [Vrai] $\max(\max(a,b),c) = \max(a,b,c)$
- ☐ [Vrai] $\min(a, \max(a,b)) = a$

Explications: $\max(a,b) \geqslant a$ et $\max(a,b) \geqslant b$ et $\max(\max(a,b),c) = \max(a,b,c)$. L'assertion "$\max(a,b) > a$ ou $\max(a,b) > b$" est fausse (prendre $a = b$). Cherchez une preuve pour l'assertion restante !

Question 192
Notation : $E(x)$ désigne la partie entière du réel x. Quelles sont les assertions qui caractérisent la partie entière ?

- ☐ [Faux] $E(x)$ est le plus petit entier supérieur ou égal à x.
- ☐ [Vrai] $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
- ☐ [Faux] $E(x)$ est l'entier tel que $x \leqslant E(x) < x + 1$

☐ [Vrai] $E(x)$ est l'entier tel que $E(x) \leqslant x < E(x)+1$

Explications: $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x, ce qui se caractérise aussi par $E(x) \leqslant x < E(x)+1$.

Question 193
Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $G(x) = E(10x)$.

☐ [Faux] $G(\frac{2}{3}) = 66$

☐ [Faux] $\forall x > 0 \quad G(x) \geqslant 1$

☐ [Faux] $G(x) = 10 \iff x \in \{10, 11, 12, \ldots, 19\}$

☐ [Vrai] $G(x) = G(y) \implies |x-y| \leqslant \frac{1}{10}$

Explications: La fonction G est très similaire à la fonction partie entière.

Question 194
Quelles sont les assertions vraies pour $x \in \mathbb{R}$?

☐ [Vrai] $x \neq 0 \iff |x| > 0$

☐ [Faux] $|x| > 1 \iff x \geqslant 1$

☐ [Vrai] $\sqrt{x^2} = |x|$

☐ [Vrai] $x + |x| = 0 \iff x \leqslant 0$

Explications: L'assertion $|x| > 1 \iff x \geqslant 1$ est fausse, car "$|x| > 1$" est en fait équivalent à "$x > 1$ ou $x < -1$".

7.6 Propriétés de nombres réels | Difficile | 120.03

Question 195
Quelles propriétés découlent de la propriété d'Archimède des réels (c'est-à-dire $\mathbb{R}$ est archimédien) ?

☐ [Faux] $\exists x > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x > n$

☐ [Vrai] $\forall x > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > x$

☐ [Vrai] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$

☐ [Vrai] $\forall x > 0 \quad \forall y > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad nx > y$

Explications: La définition de la propriété d'Archimède est $\forall x > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > x$. Cela implique les deux autres assertions vraies.

Question 196
Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Faux] $\max(x, y) = \frac{x+y-|x|-|y|}{2}$

☐ [Faux] $\max(x, y) = \frac{x+y-|x+y|}{2}$

☐ [Faux] $\max(x, y) = \frac{|x+y|-x-y}{2}$

- ☐ [Vrai] $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$

Explications: On prouve la formule $\max(x,y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$ en distinguant le cas $x-y \geqslant 0$ puis $x-y<0$.

Question 197

Quelles sont les assertions vraies, pour tout $x,y \in \mathbb{R}$?

- ☐ [Faux] $|x-y| \leqslant |x|-|y|$
- ☐ [Vrai] $|x| \leqslant |x-y|+|y|$
- ☐ [Faux] $|x+y| \geqslant |x|+|y|$
- ☐ [Vrai] $|x-y| \leqslant |x|+|y|$

Explications: L'inégalité triangulaire est $|x+y| \leqslant |x|+|y|$. Les assertions vraies en découlent.

Question 198

On définit la partie fractionnaire d'un réel x, par $F(x) = x - E(x)$.

- ☐ [Faux] $F(x) = 0 \iff 0 \leqslant x < 1$
- ☐ [Faux] Si $7 \leqslant x < 8$ alors $F(x) = 7$.
- ☐ [Faux] Si $x = -0,2$ alors $F(x) = -0,2$.
- ☐ [Vrai] Si $F(x) = F(y)$ alors $x-y \in \mathbb{Z}$.

Explications: La partie fractionnaire est égale à la partie "après la virgule". Par exemple $F(12,3456) = 0,3456$.

7.7 Intervalle, densité | Facile | 120.04

Question 199

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $x \in]5;7[\iff |x-6| < 1$
- ☐ [Faux] $x \in]5;7[\iff |x-1| < 6$
- ☐ [Faux] $x \in [0,999\,;\,1,001] \iff |x+1| < 0,001$
- ☐ [Faux] $x \in [0,999\,;\,1,001] \iff |x+1| \leqslant 0,001$

Explications: $|x-a| \leqslant \varepsilon \iff x \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$

Question 200

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $[3,7] \cup [8,10] = [3,10]$
- ☐ [Faux] $[-3,5] \cap [2,7] = [-3,7]$
- ☐ [Faux] $[a,b[\cup]a,b] =]a,b[$
- ☐ [Vrai] $[a,b[\cap]a,b] =]a,b[$

Explications: Tracer les intervalles sur la droite réelle pour mieux comprendre.

7.8 Intervalle, densité | Moyen | 120.04

Question 201
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon] \implies |x - x_0| \leqslant \varepsilon$
- ☐ [Faux] $x - x_0 \leqslant \varepsilon \implies x \in [x_0, x_0 + \varepsilon]$
- ☐ [Vrai] $|x - y| = 1 \iff y = x + 1$ ou $y = x - 1$
- ☐ [Faux] $|x| > A \iff x > A$ ou $x < A$

Explications: $|x - a| \leqslant \varepsilon \iff x \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$

Question 202
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$.

- ☐ [Faux] Il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $x < c < y$.
- ☐ [Vrai] Il existe $c \in \mathbb{Q}$ tel que $x < c < y$.
- ☐ [Vrai] Il existe $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < c < y$.
- ☐ [Vrai] Il existe une infinité de $c \in \mathbb{Q}$ tels que $x < c < y$.

Explications: Entre deux nombres réels, il existe une infinité de rationnels et aussi une infinité de nombres irrationnels.

Question 203
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x - \sqrt{2} < 10^{-10}$.
- ☐ [Vrai] Il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x - \frac{4}{3} < 10^{-10}$.
- ☐ [Vrai] Il existe une suite de nombres rationnels dont la limite est $\sqrt{2}$.
- ☐ [Vrai] Il existe une suite de nombres irrationnels dont la limite est $\frac{4}{3}$.

Explications: Tout est vrai ! Ce sont des conséquences de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ et de la densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Question 204
Pour $n \geqslant 1$ on définit l'intervalle $I_n = [0, \frac{1}{n}]$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Pour tout $n \geqslant 1$, $I_n \subset I_{n+1}$.
- ☐ [Vrai] Si $x \in I_n$ pour tout $n \geqslant 1$, alors $x = 0$.
- ☐ [Faux] L'union de tous les I_n (pour n parcourant $\mathbb{N}^*$) est $[0, +\infty[$.
- ☐ [Faux] Pour $n < m$ alors $I_n \cap I_{n+1} \cap \ldots \cap I_m = I_n$.

Explications: On a $[0, 1] = I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots$.

Question 205
Pour $n \geqslant 1$ on définit l'intervalle $I_n = [0, n]$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Pour tout $n \geqslant 1$, $I_n \subset I_{n+1}$.
- ☐ [Faux] Si $x \in I_n$ pour tout $n \geqslant 1$, alors $x = 0$.
- ☐ [Vrai] L'union de tous les I_n (pour n parcourant $\mathbb{N}^*$) est $[0,+\infty[$.
- ☐ [Vrai] Pour $n < m$ alors $I_n \cap I_{n+1} \cap \ldots \cap I_m = I_n$.

Explications: On a $[0,1] = I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \cdots$.

7.9 Intervalle, densité | Difficile | 120.04

Question 206
Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $I \cup J$ est un intervalle.
- ☐ [Vrai] $I \cap J$ est un intervalle (éventuellement réduit à un point ou vide).
- ☐ [Vrai] Si $I \cap J \neq \varnothing$ alors $I \cup J$ est un intervalle.
- ☐ [Vrai] Si $I \subset J$ alors $I \cup J$ est un intervalle.

Explications: Tracer les intervalles sur la droite réelle pour mieux comprendre. Une union d'intervalles n'est en général pas un intervalle !

Question 207
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Si $x, y \in I$, il existe $c \in I$ tel que $x < c < y$.
- ☐ [Vrai] Si $x, y \in I$, alors pour tout c tel que $x < c < y$, on a $c \in I$.
- ☐ [Vrai] Si $x \notin I$ et $y \in I$, il existe $c \in I$ tel que $x < c < y$.
- ☐ [Faux] Si $x \notin I$ et $y \in I$, il existe $c \notin I$ tel que $x < c < y$.

Explications: Si x et y sont deux éléments de l'intervalle I alors toute valeur entre x et y est aussi dans l'intervalle.

7.10 Maximum, majorant | Facile | 120.02

Question 208
Le maximum d'un ensemble E, s'il existe, est le réel $m \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \leqslant m$.

- ☐ [Faux] Si $E = [3,7]$ alors 8 est un maximum de E.
- ☐ [Vrai] Si $E = [-3,-1]$ alors -1 est le maximum de E.
- ☐ [Vrai] L'ensemble $E = [-3,-1[$ n'admet pas de maximum.
- ☐ [Faux] L'ensemble $E = [-3,2[\ \cap \ ]-1,1]$ n'admet pas de maximum.

Explications: Attention, le maximum de E doit être un élément de E !

7.11 Maximum, majorant | Moyen | 120.02

Question 209
On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ si pour tout $x \in E$, on a $x \leqslant M$.

- ☐ [Vrai] Si $E = [3,7]$ alors 8 est un majorant de E.
- ☐ [Vrai] Si $E = [-3,-1[$ alors tout $M \geqslant -1$ est un majorant de E.
- ☐ [Faux] Si $E =]0,+\infty[$ alors tout $M \geqslant 0$ est un majorant de E.
- ☐ [Faux] Si $E = [2,3] \cup [5,10]$ alors tout $M \geqslant 3$ est un majorant de E.

Explications: Tracer les intervalles sur la droite réelle pour mieux comprendre. Les majorants d'un ensemble sont alors tous les réels "à droite" de l'ensemble.

7.12 Maximum, majorant | Difficile | 120.02

Question 210
On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ si pour tout $x \in E$, on a $x \leqslant M$.

- ☐ [Faux] Un intervalle non vide et différent de $\mathbb{R}$ admet toujours un majorant.
- ☐ [Vrai] Un intervalle non vide et borné admet au moins deux majorants.
- ☐ [Vrai] Un ensemble qui admet un majorant, en admet une infinité.
- ☐ [Faux] L'ensemble $\mathbb{N}$ admet une infinité de majorants.

Explications: L'ensemble des majorants (s'il est non vide) est du type $[M,+\infty[$.

Suites

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

---

8 Suites réelles | 121

Cours ● Les suites
Vidéo ■ Premières définitions
Vidéo ■ Limite
Vidéo ■ Exemples remarquables
Vidéo ■ Théorèmes de convergence
Vidéo ■ Suites récurrentes
Fiche d'exercices ♦ Suites

8.1 Suites | Facile | 121.00

Question 211
Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Comment traduire $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$?

- ☐ [Faux] $\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| < \varepsilon$

- ☐ [Faux] $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| < \varepsilon$
- ☐ [Vrai] $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$
- ☐ [Faux] $\exists \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

Explications: C'est la définition de $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$: $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$.

Question 212

Soit (u_n) une suite réelle. Comment traduire $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$?

- ☐ [Faux] $\forall A > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > A$
- ☐ [Faux] $\forall A > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > A$
- ☐ [Faux] $\exists A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow u_n > A$
- ☐ [Vrai] $\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow u_n > A$

Explications: C'est la définition $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$: $\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow u_n > A$.

Question 213

Soit $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2-1}$ et $v_n = \dfrac{2n+1}{n^2-1}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Explications: D'abord, $u_n = \dfrac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(2-\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1+\frac{1}{n^2}}{2-\frac{1}{n^2}}$. Or, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2} = 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1+0}{2-0} = \dfrac{1}{2}$. De même, $v_n = \dfrac{n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{2+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n^2}}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Question 214

Soit $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et $v_n = \cos\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\pi\right)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -1$
- ☐ [Vrai] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -1$
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$ n'existe pas

Explications: D'abord, $u_n = \dfrac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ et donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ car $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right) = +\infty$. Par ailleurs,

$$\frac{n^2+1}{n^2-1}\pi = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}\pi = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}}\pi.$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1}\pi = \pi$, et par suite, $\lim_{n\to+\infty} v_n = \cos(\pi) = -1$.

Question 215

Soit $u_n = 3^n - 2^n$ et $v_n = 3^n - (-3)^n$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$ n'existe pas

Explications: D'abord, $u_n = 3^n \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$. Or $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de limite 0, donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \times (1-0) = +\infty$. Par ailleurs, $v_{2n} = 0$ et $v_{2n+1} = 2 \times 3^{2n+1}$. Donc $\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_{2n+1} = +\infty$. Le théorème des suites extraites implique que (v_n) n'a pas de limite.

Question 216

Soit $u_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et $v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$
- ☐ [Vrai] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{e}$

Explications: On utilise le fait que si $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, alors les suites (a_n) et $\ln(1+a_n)$ sont équivalentes. Ainsi le terme u_n est équivalent, en $+\infty$, à $n \times \frac{1}{n} = 1$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et, puisque $v_n = \mathrm{e}^{u_n}$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{e}$.

Question 217

Soit $u_n = \frac{\cos n}{2n+1}$ et $v_n = \frac{2n + \cos n}{2n+1}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$ n'existent pas
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$

Explications: On utilise le théorème d'encadrement, $0 \leqslant \left|\frac{\cos n}{2n+1}\right| \leqslant \frac{1}{2n+1} \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et, puisque $v_n = \frac{2n}{2n+1} + u_n$, $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{2n+1} + \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Question 218

Soit $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] La suite (u_n) est divergente.
- ☐ [Vrai] La suite (u_n) est strictement croissante.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

Explications: Le terme u_n est la somme des premiers termes de la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. Donc (u_n) est strictement croissante et

$$u_n = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow[+\infty]{} 2.$$

Question 219
Soit $u_n = \ln\left(1 + ne^{-n}\right)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] La suite (u_n) est bornée.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$
- ☐ [Faux] La suite (u_n) est divergente.

Explications: Par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-n} = 0$ et, par continuité de la fonction logarithme

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln\left[\lim_{n\to+\infty}\left(1+ne^{-n}\right)\right] = \ln(1) = 0.$$

Donc, (u_n) converge et sa limite est 0. En outre, elle est bornée comme toute suite convergente.

Question 220
Soit $u_n = \sqrt[n]{3+\cos n}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] La suite (u_n) est bornée.
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$
- ☐ [Faux] La suite (u_n) est croissante.
- ☐ [Faux] La suite (u_n) est divergente.

Explications: On a : $\sqrt[n]{2} \leqslant u_n \leqslant \sqrt[n]{4}$. Or

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1 = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{4}.$$

Donc, le théorème d'encadrement implique que (u_n) converge et que sa limite est 1.

8.2 Suites | Moyen | 121.00

Question 221
Soit $u_n = \dfrac{2^{n+1}-3^{n+1}}{2^n+3^n}$ et $v_n = \dfrac{n2^{2n}-3^n}{n2^{2n}+3^n}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$

Explications: D'abord, $u_n = \dfrac{3^{n+1} \times \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1\right]}{3^n \times \left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 1\right]} = 3\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n} + 1}$. Or $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de limite 0, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3\dfrac{0-1}{0+1} = -3$. De même,

$$v_n = \frac{n(2^2)^n - 3^n}{n(2^2)^n + 3^n} = \frac{n4^n - 3^n}{n4^n + 3^n} = \frac{n4^n \times \left[1 - \frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]}{n4^n \times \left[1 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n\right]} = \frac{1 - \frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1 + \frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n}.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{3}{4}\right)^n = 0$.

Question 222

Soit $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^{-1}$
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{e}^{-1}$
- ☐ [Faux] La suite (u_n) est divergente.
- ☐ [Vrai] La suite (v_n) est divergente.

Explications: On utilise le fait que si $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, alors les suites (a_n) et $\ln(1+a_n)$ sont équivalentes. Ainsi

$$\ln(u_n) = n\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim n \times \frac{-1}{n} = -1.$$

Donc (u_n) est convergente et sa limite est e^{-1}. On vérifie, de même, que

$$\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \mathrm{e} \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_{2n+1} = \mathrm{e}^{-1}.$$

Donc, d'après le théorème des suites extraites, (v_n) est divergente.

Question 223

Soit $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+1}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 2| < \varepsilon$
- ☐ [Vrai] $\exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 2| < \varepsilon$
- ☐ [Vrai] $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 10 \Rightarrow |u_n - 2| < 10^{-2}$
- ☐ [Vrai] $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$

Explications: D'abord, $u_n - 2 = \dfrac{-1}{n^2+1}$. D'une part, $|u_n - 2| \leqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'autre part, si $n > 10$ alors $n^2 + 1 > 10^2 + 1 > 10^2$. C'est-à-dire

$$|u_n - 2| = \frac{1}{n^2+1} < 10^{-2}.$$

De même, pour tout $\varepsilon > 0$, si $n > n_0 = E\left(\sqrt{\varepsilon^{-1}}\right) + 1$ alors $|u_n - 2| = \dfrac{1}{n^2+1} < \varepsilon$.

Question 224

Soient $u_n = \sqrt{n^2+4n-1} - n$ et $v_n = \dfrac{4n-1}{\sqrt{n^2+4n-1}+n}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$
- ☐ [Vrai] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

Explications: On multiplie par le terme conjugué, on obtient $u_n = \dfrac{4n-1}{\sqrt{n^2+4n-1}+n} = v_n$. Ensuite,

$$\frac{4n-1}{\sqrt{n^2+4n-1}+n} = \frac{4n\left(1-\frac{1}{4n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}+1\right)} = 4\frac{1-\frac{1}{4n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}}+1} \xrightarrow[+\infty]{} 2.$$

Question 225

Soit $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] Pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.
- ☐ [Faux] La suite (u_n) est divergente.
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- ☐ [Vrai] La suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant 2$.

Explications: On vérifie par récurrence que $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$, donc (u_n) est majorée par 2. Par ailleurs, il est clair que (u_n) est croissante. Le théorème des suites monotones implique que (u_n) est convergente et que $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant 2$.

Question 226

Soit $u_n = \sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right)$ et $v_n = \sin\left(\dfrac{3}{2n\pi}\right)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] La suite (u_n) diverge et la suite (v_n) converge.
- ☐ [Faux] Les suites (u_n) et (v_n) sont divergentes.
- ☐ [Vrai] La suite (u_n) n'a pas de limite et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
- ☐ [Faux] $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

Explications: Par continuité de la fonction sinus, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2n\pi} = 0 \text{ donc } \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) = \sin\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2n\pi}\right) = \sin 0 = 0.$$

Ainsi, (v_n) converge et sa limite est 0. Par ailleurs,

$$u_{3n} = \sin(2n\pi) = 0 \text{ et } u_{3n+1} = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Donc, d'après le théorème des suites extraites, (u_n) diverge ; elle n'a pas de limite.

Question 227

Soit $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] Si les limites existent, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n < \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
- ☐ [Faux] Les suites (u_n) et (v_n) sont divergentes.
- ☐ [Vrai] Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
- ☐ [Vrai] Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite finie.

Explications: On vérifie que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et que

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0.$$

Donc (u_n) et (v_n) sont adjacentes. En conséquence, elles convergent vers la même limite finie.

Question 228

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que $|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 1|$ pour tout $n \geqslant 0$. Que peut-on en déduire ?

- ☐ [Faux] La suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- ☐ [Faux] La suite (u_n) est divergente.
- ☐ [Vrai] Pour tout $n \geqslant 1$, $|u_n - 1| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - 1|$.
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Explications: On vérifie par récurrence que $|u_n - 1| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - 1|$, et donc, par passage à la limite, $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - 1) = 0$. C'est-à-dire, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Question 229

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que $u_n \geqslant \sqrt{n}$ pour tout $n \geqslant 0$. Que peut-on en déduire ?

- ☐ [Vrai] La suite (u_n) n'est pas majorée.
- ☐ [Faux] La suite (u_n) est croissante.
- ☐ [Faux] La suite (u_n) est convergente.
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Explications: Si (u_n) était majorée, il en serait de même pour $\sqrt{n}$ ce qui est absurde. Donc (u_n) est une suite non majorée. Par passage à la limite, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Question 230

Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] La suite (u_n) est croissante non majorée.
- ☐ [Faux] La suite (u_n) est divergente.
- ☐ [Vrai] Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.
- ☐ [Vrai] (u_n) est convergente et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

Explications: Le terme u_n est une somme télescopique. En effet, on vérifie que, pour tout $k \geqslant 1$,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \Rightarrow u_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Donc (u_n) est convergente et sa même limite est 1.

8.3 Suites | Difficile | 121.00

Question 231

Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$. On pose $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ et $v_n = \frac{na^{2n} - b^{2n}}{a^{2n} + b^{2n}}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] Les suites (u_n) et (v_n) sont divergentes.
- ☐ [Vrai] $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ et (v_n) est divergente.
- ☐ [Vrai] $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- ☐ [Faux] $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Explications: D'abord, $u_n = \frac{a^n \times \left[1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n\right]}{a^n \times \left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n\right]} = \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n}$. Or $\left(\frac{b}{a}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de limite 0, donc $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$. De même,

$$v_n = \frac{na^{2n} \times \left[1 - \frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\right]}{a^{2n} \times \left[1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{2n}\right]} = n\frac{1 - \frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}}{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^{2n}}.$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ car $\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}}{1 + \frac{1}{n}\left(\frac{b}{a}\right)^{2n}} = 1$.

Question 232

Soit $u_n = \left|\frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] La suite (u_n) est monotone.
- ☐ [Vrai] Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.
- ☐ [Faux] La suite (u_n) est divergente.
- ☐ [Vrai] $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

Explications: On vérifie que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_{2n} = \frac{1}{2} \text{ et } u_{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1}.$$

Donc les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite, à savoir $\frac{1}{2}$. D'après le théorème des suites extraites, la suite (u_n) converge aussi vers $\frac{1}{2}$.

Question 233

On considère les suites de termes généraux $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$ et $w_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$.
Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] Les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes.
- ☐ [Vrai] La suite (u_n) est convergente.
- ☐ [Faux] La suite (u_n) est divergente.
- ☐ [Faux] L'une au moins des suites (v_n) ou (w_n) est divergente.

Explications: On vérifie que (v_n) est décroissante, (w_n) est croissante et que $\lim_{n\to+\infty}(v_n - w_n) = 0$. Donc ces deux suites sont adjacentes. En particulier, elles convergent et elles ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Or $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$, donc, d'après le théorème des suites extraites, la suite (u_n) converge aussi vers ℓ.

Question 234

Soit $a > 0$. On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 > 0$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + a^2}{2u_n}$.
Que peut-on en déduire ?

- ☐ [Faux] Le terme u_n n'est pas défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ☐ [Vrai] $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant a$, et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
- ☐ [Vrai] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{|u_1 - a|}{2^n}$.
- ☐ [Faux] La suite (u_n) est divergente.

Explications: Par récurrence, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc (u_n) est bien définie. D'autre part,

$$0 \leqslant (u_n - a)^2 = u_n^2 + a^2 - 2au_n \Rightarrow a \leqslant \frac{u_n^2 + a^2}{2u_n}.$$

Donc $u_{n+1} \geqslant a > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que

$$u_{n+1} - u_n = \frac{a^2 - u_n^2}{2u_n} \leqslant 0, \text{ pour } n \geqslant 1,$$

donc $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. On vérifie aussi par récurrence que $|u_{n+1} - a| \leqslant \frac{|u_1 - a|}{2^n}$, et donc, par passage à la limite, $\lim_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$. C'est-à-dire, (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = a$.

Question 235
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que (v_n) est croissante non majorée et que $v_n < u_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Que peut-on en déduire ?

- ☐ [Faux] $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n < \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
- ☐ [Vrai] La suite (u_n) est divergente.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant u_0$
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Explications: La suite (v_n) est croissante non majorée, donc sa limite est $+\infty$. Il en est de même pour la limite de (u_n), c'est-à-dire (u_n) est divergente et sa limite est $+\infty$.

Question 236
Soit (u_n) une suite croissante. On suppose que $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \geqslant 0$. Que peut-on en déduire ?

- ☐ [Faux] (u_n) est divergente.
- ☐ [Vrai] (u_n) est bornée et $u_0 \leqslant u_n \leqslant u_0 + 2$.
- ☐ [Vrai] (u_n) est convergente et $u_0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant u_0 + 2$.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Explications: On vérifie par récurrence que

$$u_0 \leqslant u_n \leqslant u_0 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = u_0 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donc, $u_0 \leqslant u_n \leqslant u_0 + 2$. Étant à la fois croissante est majorée, la suite (u_n) est convergente et, par passage à la limite, $u_0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant u_0 + 2$.

Question 237
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. Que peut-on en déduire ?

- ☐ [Faux] Une telle suite (u_n) n'existe pas.
- ☐ [Vrai] $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$, et (u_n) est décroissante
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Explications: On vérifie par récurrence que $0 \leqslant u_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Donc la suite (u_n) est bien définie. On vérifie aussi que $\ln(1 + x) \leqslant x$ pour tout réel $x \geqslant 0$. En particulier,

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \leqslant u_n.$$

Donc (u_n) est décroissante. Étant à la fois décroissante est minorée, la suite (u_n) est convergente et sa limite est l'unique solution de l'équation $x = \ln(1 + x)$. Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Question 238
Soit (u_n) une suite croissante. On suppose que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \geqslant 0$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] (u_n) est majorée.
- ☐ [Faux] (u_n) est divergente.
- ☐ [Vrai] (u_n) est convergente et $0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant 2$.
- ☐ [Vrai] $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Explications: On vérifie par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{2^n}u_0 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}u_0 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Donc, (u_n) est majorée car $\frac{1}{2^{n-1}} \underset{+\infty}{\longrightarrow} 0$. Étant à la fois croissante est majorée, la suite (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ et, par passage à la limite, $0 \leqslant \ell \leqslant 2$. Par ailleurs, l'hypothèse faite sur u_n donne

$$0 \leqslant \ell \leqslant \frac{\ell}{2} \Rightarrow \ell = 0$$

et comme $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante positive, $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Question 239

Soit (u_n) une suite croissante. On suppose que $u_n + \frac{1}{n+1} \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] (u_n) est majorée.
- ☐ [Vrai] (u_n) est divergente.
- ☐ [Faux] (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$.
- ☐ [Faux] $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Explications: On vérifie par récurrence que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$u_0 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \leqslant u_n.$$

Donc, (u_n) n'est pas majorée car sinon, il en serait de même pour la suite de terme général $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Question 240

On admet que $\forall x \in [0,1[,\ \ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$. Soit $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, $n \geqslant 1$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] La suite (u_n) est croissante non majorée.
- ☐ [Vrai] Pour tout $n \geqslant 1$, $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln(2)$.
- ☐ [Vrai] (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$.
- ☐ [Faux] $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Explications: Avec $x = \frac{1}{n+k}$, on aura :

$$\ln(n+k+1) - \ln(n+k) \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \ln(n+k) - \ln(n+k-1).$$

On somme sur k de 1 à n, on obtient :

$$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln(2n) - \ln(n) = \ln(2).$$

Le théorème d'encadrement implique que (u_n) converge et que sa limite est $\ln(2)$.

Limites de fonction

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

9 Limites des fonctions réelles | 123

Cours ● Limites et fonctions continues
Vidéo ■ Notions de fonction
Vidéo ■ partie 2. Limites
Fiche d'exercices ♦ Limites de fonctions

9.1 Limites des fonctions réelles | Facile | 123.03

9.1.1 Fraction rationnelle

Question 241
Soit $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

Explications: La limite en l'infini d'une fraction rationnelle est la limite de la fraction des monômes de plus haut degré.

Question 242
Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to1} f(x) = 0$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to1} f(x) = \frac{2}{3}$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+} f(x) = +\infty$

Explications: $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \frac{x+1}{2x+1}$.

Question 243
Soit $f(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{3x}{(x+1)(x^2-x+1)}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to -1^+} f(x)=+\infty$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to -1} f(x)=0$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to -1} f(x)=-2$

Explications: En réduisant au même dénominateur, on obtient : $f(x)=\frac{x+1}{x^2-x+1}$.

9.1.2 Fonction racine carrée

Question 244
Soit $f(x)=\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{x-1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to +\infty} f(x)=0$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to 1} f(x)=-\frac{1}{2\sqrt{2}}$
- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en 1.

Explications: On multiplie le numérateur et le dénominateur de f par l'expression conjuguée de $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}$, c'est-à-dire par $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}$. On obtient : $f(x)=-\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{2x}}$.

Question 245
Soit $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}+x$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to -\infty} f(x)=+\infty$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to -\infty} f(x)=-\frac{1}{2}$
- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en $-\infty$.

Explications: On multiplie le numérateur et le dénominateur de f par l'expression conjuguée de $\sqrt{x^2+x+1}+x$, c'est-à-dire par $\sqrt{x^2+x+1}-x$. On obtient : $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$. Attention ! $\sqrt{x^2+x+1}=|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$, pour $x<0$.

9.1.3 Croissances comparées

Question 246
Soit $f(x)=x\ln x-x^2+1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to +\infty} f(x)=-\infty$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to 0^+} f(x)=1$

Explications: Si α et β sont des réels >0, alors en $+\infty$, on a : $(\ln x)^\alpha \ll x^\beta$, où la notation $f\ll g$ signifie : $\lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0$. On a aussi $\lim_{x\to 0^+} x^\beta|\ln x|^\alpha=0$.

Question 247
Soit $f(x) = e^{2x} - x^7 + x^2 - 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Explications: Si α et β sont des réels > 0, alors en $+\infty$, on a : $x^\alpha \ll e^{\beta x}$, où la notation $f \ll g$ signifie : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Question 248
Soit $f(x) = (x^5 - x^3 + 1)e^{-x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Explications: Si α et β sont des réels > 0, alors en $+\infty$, on a : $x^\alpha \ll e^{\beta x}$, où la notation $f \ll g$ signifie : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

9.1.4 Encadrement

Question 249
Soit $f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to0} f(x) = 0$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Explications: Encadrer $\sin \frac{1}{x}$ pour la limite en 0 et encadrer $\sin x$ pour la limite en $+\infty$.

Question 250
Soit $f(x) = e^{-x} \cos(e^{2x})$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en $+\infty$.
- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en $-\infty$.
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Explications: Encadrer $\cos(e^{2x})$ pour la limite en $+\infty$.

9.2 Limites des fonctions réelles | Moyen | 123.03

9.2.1 Définition d'une limite

Question 251

Soit $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle contenant a et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to a} f(x) = l\,(l \in \mathbb{R})$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to a} f(x) = l\,(l \in \mathbb{R})$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-l| < \alpha$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, f(x) > A \Rightarrow |x-a| < \alpha$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ si et seulement si $\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, |x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) < A$

Explications: Voir la définition d'une limite finie ou infinie en un point $a \in \mathbb{R}$:
$\lim_{x\to a} f(x) = l$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$
$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ si et seulement si $\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, |x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) < A$

Question 252

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l\,(l \in \mathbb{R})$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)-l| < \varepsilon \Rightarrow x > A$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l\,(l \in \mathbb{R})$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant A \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall A > 0, \exists B < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ si et seulement si $\exists B < 0, \forall A < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x < B \Rightarrow f(x) < A$

Explications: Voir la définition d'une limite en $+\infty$ ou $-\infty$ vers une valeur finie ou infinie :
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = l\,(l \in \mathbb{R})$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant A \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$
$\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall A > 0, \exists B < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$

9.2.2 Fonction racine carrée

Question 253

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$
- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en $+\infty$.
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$

Explications: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}$.

9.2.3 Fonction valeur absolue

Question 254
Soit $f(x) = x - \frac{|x|}{x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$
- ☐ [Vrai] f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$

Explications: En utilisant la définition de la valeur absolue, $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x > 0 \\ x+1, & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

Question 255
Soit $f(x) = \frac{x}{|x-1|} - \frac{3x-1}{|x^2-1|}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$
- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en -1.
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$

Explications: En utilisant la définition de la valeur absolue, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+4x-1}{1-x^2}, & \text{si } x \leqslant -1 \\ \frac{1-x}{1+x}, & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ \frac{x-1}{1+x}, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

9.2.4 Fonction périodique

Question 256
Soit $f(x) = \sin x$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$
- ☐ [Vrai] f n'admet pas de limite en $+\infty$.
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$
- ☐ [Vrai] f n'admet pas de limite en $-\infty$.

Explications: Toute fonction périodique non constante n'admet pas de limite en l'infini.

9.2.5 Dérivabilité en un point

Question 257
Soit $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$
- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

Explications: La fonction $g : x \to \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et $g'(x) = \frac{1}{1+x}$, pour tout $x > -1$. Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) = 1$.

Question 258
Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

Explications: La fonction $g : x \to \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \cos x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Donc $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = g'(0) = 1$.

Question 259
Soit $f(x) = \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en 0
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{4}$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{4}{3}$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Explications: $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, donc $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{4x} \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{4x}{\sin(4x)} = \frac{3}{4}$.

Question 260
Soit $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$

Explications: On a : $\cos x = \cos^2(\frac{x}{2}) - \sin^2(\frac{x}{2})$ et $1 = \cos^2(\frac{x}{2}) + \sin^2(\frac{x}{2})$, donc $\cos x - 1 = -2\sin^2(\frac{x}{2})$. D'autre part, $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. On déduit que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}$.

9.3 Limites des fonctions réelles | Difficile | 123.03

9.3.1 Fonction partie entière

Question 261
Soit $f(x) = xE(\frac{1}{x})$, où E désigne la partie entière. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$
- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

Explications: Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $x - 1 < E(x) \leqslant x$. Donc $1 - x < f(x) \leqslant 1$, pour $x > 0$ et $1 \leqslant f(x) < 1 - x$, pour $x < 0$. On déduit que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$.

Question 262
Soit $f(x) = xE(\frac{1}{x})$, où E désigne la partie entière. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Explications: Pour $x > 1$, $E(\frac{1}{x}) = 0$, donc $f(x) = 0$ et donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Pour $x < -1$, $E(\frac{1}{x}) = -1$, donc $f(x) = -x$ et donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

9.3.2 Densité des rationnels et irrationnels

Question 263
Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$
- ☐ [Vrai] f n'admet pas de limite en 0.

Explications: L'ensemble des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$. Donc il existe une suite de rationnels (u_n) qui tend vers 0 et donc $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = 1$. D'autre part, l'ensemble des irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$. Donc il existe une suite d'irrationnels (v_n) qui tend vers 0 et donc $\lim_{n\to+\infty} f(v_n) = \lim_{n\to+\infty}(v_n - 1) = -1$. On en déduit que f n'admet pas de limite en 0.

Question 264
Soit f une fonction définie sur $]0,1[$ par : $f(x) = 1$, si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $f(x) = \frac{1}{m}$, si $x = \frac{n}{m}$, où $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{n}{m}$ soit une fraction irréductible. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$
- ☐ [Vrai] f n'admet pas de limite en 1^-.
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

Explications: L'ensemble des irrationnels est dense dans $\mathbb{R}$. Donc il existe une suite d'irrationnels (u_n) qui tend vers 1^- et donc $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = 1$. D'autre part, la suite $(\frac{n}{n+1})$ tend vers 1^- et $\lim_{n\to+\infty} f(\frac{n}{n+1}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$. On déduit que f n'admet pas de limite en 1^-.

9.3.3 Fonction monotone

Question 265
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en $+\infty$.
- ☐ [Vrai] f admet une limite en $+\infty$.

- ☐ [Vrai] Si f est majorée, f admet une limite finie en $+\infty$.
- ☐ [Vrai] Si f est non majorée, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Explications: (a) On suppose que f est majorée et on pose $M = \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ (le plus petit des majorants de f). Alors, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = M$. En effet, soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $a > 0$ tel que : $M - \varepsilon < f(a) \leqslant M$. Comme f est croissante, si $x \geqslant a$, alors $M - \varepsilon < f(a) \leqslant f(x) \leqslant M$. D'où le résultat, d'après la définition d'une limite.
(b) On suppose que f n'est pas majorée. Alors, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. En effet, soit $A > 0$, alors il existe $a > 0$ tel que $f(a) > A$. Comme f est croissante, si $x \geqslant a$, alors $f(x) \geqslant f(a) > A$. D'où le résultat, d'après la définition d'une limite.

9.3.4 Fonction racine n-ième

Question 266
Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{2}$
- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

Explications: On pourra multiplier f par $\sqrt{x+1}+1$ et $(\sqrt[3]{x+1})^2 + \sqrt[3]{x+1}+1$ les expressions conjuguées de $\sqrt{x+1}-1$ et de $\sqrt[3]{x+1}-1$ respectivement. On obtient : $f(x) = \frac{(\sqrt[3]{x+1})^2+\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$.

Question 267
Soit $f(x) = x + \sqrt[5]{1-x^5}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Explications: En utilisant l'égalité : $a^5 + b^5 = (a+b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$, on pourra multiplier f par l'expression conjuguée de $x + \sqrt[5]{1-x^5}$. On obtient : $f(x) = \left[x^4 - x^3\sqrt[5]{1-x^5} + x^2(\sqrt[5]{1-x^5})^2 - x(\sqrt[5]{1-x^5})^3 + (\sqrt[5]{1-x^5})^4\right]^{-1}$.

Question 268
Soit $f(x) = \sqrt{x^3+2x^2+3} - ax\sqrt{x+b}$, $a, b \in \mathbb{R}$. f admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si :

- ☐ [Faux] $a > 0$ et $b > 0$
- ☐ [Faux] $a = 1$ et $b > 0$
- ☐ [Vrai] $a = 1$ et $b = 2$
- ☐ [Faux] $a = 1$ et $b = 0$

Explications: Si $a \leqslant 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. On suppose donc que $a > 0$ et on multiplie f par son expression conjuguée. on obtient : $f(x) = \frac{(1-a^2)x^3+(2-a^2b)x^2+3}{\sqrt{x^3+2x^2+3}+ax\sqrt{x+b}}$. On déduit que f admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si $a = 1$ et $b = 2$.

Question 269

Soit f la fonction définie sur $]\frac{3}{2}, +\infty[\setminus\{2\}$ par : $f(x) = \begin{cases} a\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}, & \text{si } x < 2 \\ \frac{\sqrt{2x-3}-b}{x-2}, & \text{si } x > 2 \end{cases}$. f admet une limite finie quand x tend vers 2 si et seulement si :

- ☐ [Vrai] $a = 2$ et $b = 1$
- ☐ [Faux] $a > 0$ et $b > 0$
- ☐ [Faux] $a = 2$ et $b > 0$
- ☐ [Faux] $a = 0$ et $b = 1$

Explications: Si $b \neq 1$, f admet une limite infinie quand x tend vers 2^+. On suppose que $b = 1$ et on multiplie f par l'expression conjuguée selon les cas. On obtient : $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{x-1}+1} & \text{si } x < 2 \\ \frac{2}{\sqrt{2x-3}+1} & \text{si } x > 2 \end{cases}$. On déduit que f admet une limite finie quand x tend vers 2 si et seulement si $a = 2$.

9.3.5 Fonction puissance

Question 270

Soit $f(x) = \frac{(2x)^x}{x^{(2x)}}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ [Vrai] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- ☐ [Faux] f n'admet pas de limite en $+\infty$.
- ☐ [Faux] $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

Explications: Par définition, si u et v sont deux fonctions telles que $u > 0$, $u^v = e^{v\ln u}$. On en déduit que $f(x) = \exp[x\ln(2x) - 2x\ln x] = \exp[x\ln 2 - x\ln x]$. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Continuité

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

10 Continuité | 123

Cours ● Limites et fonctions continues
Vidéo ■ Continuité en un point
Vidéo ■ Continuité sur un intervalle

Vidéo ■ Fonctions monotones et bijections
Fiche d'exercices ♦ Fonctions continues

10.1 Notion de fonctions | Facile | 123.00

Question 271
Quels arguments sont valides pour justifier que la fonction $x \mapsto \sin(x)$ n'est pas une fonction croissante sur $\mathbb{R}$?

- ☐ [Faux] $\sin(\pi) = \sin(0)$ et pourtant $\pi \neq 0$.
- ☐ [Faux] $\sin(\frac{\pi}{2}) > \sin(0)$ et pourtant $0 < \frac{\pi}{2}$.
- ☐ [Vrai] $\sin(\frac{3\pi}{4}) > \sin(\pi)$ et pourtant $\frac{3\pi}{4} < \pi$.
- ☐ [Faux] On a $|\sin x| \leqslant |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Explications: Une fonction f est croissante si $x \leqslant y$ implique $f(x) \leqslant f(y)$. Donc une fonction n'est pas croissante si on peut trouver $x \leqslant y$ mais avec $f(x) > f(y)$. Le seul argument valable est donc $\frac{3\pi}{4} < \pi$ avec $\sin(\frac{3\pi}{4}) > \sin(\pi)$.

Question 272
Soient f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $f - 2g$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $f^2 \times g$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $\frac{f}{g^2}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $\sqrt{f+g}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Explications: La somme et le produit de fonctions est définie partout. Par contre pour le quotient il faut que le dénominateur ne s'annule pas. Pour une racine carrée, il faut que le terme sous la racine soit positif ou nul.

Question 273
Quelles sont les assertions vraies concernant le domaine de définition des fonctions suivantes ? (Rappel : le domaine de définition de f est le plus grand ensemble $D_f \subset \mathbb{R}$ sur lequel f est définie.)

- ☐ [Vrai] Le domaine de définition de $\exp(\frac{1}{x^2+1})$ est $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Le domaine de définition de $\sqrt{x^2-1}$ est $[1, +\infty[$.
- ☐ [Faux] Le domaine de définition de $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-3)}}$ est $]1, 3[$.
- ☐ [Faux] Le domaine de définition de $\ln(x^3 - 8)$ est $[2, +\infty[$.

Explications: $\frac{1}{x}$ est définie pour $x \neq 0$, $\sqrt{x}$ est définie pour $x \geqslant 0$; $\exp x$ est définie sur $\mathbb{R}$; $\ln x$ seulement pour $x > 0$.

10.2 Notion de fonctions | Moyen | 123.00

Question 274
Quels arguments sont valables pour montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est décroissante ?

- ☐ [Faux] On a $x \leqslant y$ qui implique $f(x) \leqslant f(y)$.
- ☐ [Vrai] On a $x \leqslant y$ qui implique $f(x) \geqslant f(y)$.
- ☐ [Vrai] On a $x \geqslant y$ qui implique $f(x) \leqslant f(y)$.
- ☐ [Faux] On a $x \geqslant y$ qui implique $f(x) \geqslant f(y)$.

Explications: Une fonction f est décroissante si $x \leqslant y$ implique $f(x) \geqslant f(y)$. Ce qui peut aussi s'écrire $x \geqslant y$ qui implique $f(x) \leqslant f(y)$. Autrement dit f inverse le sens des inégalités.

Question 275

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $\forall M > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant M$ implique f majorée.
- ☐ [Faux] $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists M > 0 \quad f(x) \geqslant M$ implique f majorée.
- ☐ [Vrai] $\exists M > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant M$ implique f majorée.
- ☐ [Faux] $\exists M > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant M$ implique f majorée.

Explications: Par définition f est majorée si $\exists M > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant M$.

Question 276

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante car sa dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est partout négative.
- ☐ [Vrai] Une fonction périodique et croissante est constante.
- ☐ [Vrai] Si $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est croissante, alors $1/f$ est décroissante.
- ☐ [Faux] Si f et g sont croissantes, alors $f - g$ est croissante.

Explications: La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$.

Question 277

Soit $f(x) = \ln(x-1)$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$. Quelles sont les assertions vraies concernant les domaines de définition ? (Rappel : le domaine de définition de f est le plus grand ensemble $D_f \subset \mathbb{R}$ sur lequel f est définie.)

- ☐ [Vrai] $D_f \cup D_g = [-1, +\infty[$.
- ☐ [Faux] Pour la composition $f \circ g$, $D_{f \circ g} = [-1, +\infty[$.
- ☐ [Faux] Pour la composition $g \circ f$, $D_{g \circ f} =]1, +\infty[$.
- ☐ [Vrai] Pour la fonction $f \times g$, $D_{f \times g} =]1, +\infty[$.

Explications: $D_f =]1, +\infty[$; $D_g = [-1, +\infty[$; $D_f \cup D_g = [-1, +\infty[$; $D_{f \times g} = D_f \cap D_g =]1, +\infty[$; $D_{f \circ g} =]1, +\infty[$. $g \circ f$ n'est pas définie pour x proche de 1, en fait $D_{g \circ f} = [1 + \frac{1}{e}, +\infty[$.

10.3 Notion de fonctions | Difficile | 123.00

Question 278

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs strictement positives. Quels arguments sont valables pour montrer que f est croissante ?

- ☐ [Faux] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+1) \geqslant f(x)$.
- ☐ [Faux] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{f(x+1)}{f(x)} \geqslant 1$.
- ☐ [Faux] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $h > 0$ tel que $f(x+h) \geqslant f(x)$.
- ☐ [Vrai] Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h > 0$, on a $\frac{f(x+h)}{f(x)} \geqslant 1$.

Explications: En notant $y = x + h$ avec $h > 0$ on a $y > x$ et donc il suffit d'avoir $\frac{f(y)}{f(x)} \geqslant 1$. Par contre, il n'est pas suffisant de comparer f en des valeurs distantes de 1 ! Essayez de dessiner un contre-exemple : f vaut 0 partout, sauf 1 en chaque entier.

Question 279
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si f est bornée et g majorée alors $f - g$ est bornée.
- ☐ [Vrai] Si f bornée et g majorée alors $f - g$ est minorée.
- ☐ [Faux] Si f et g sont minorées, alors $f \times g$ est minorée.
- ☐ [Faux] Si f et g sont minorées, alors $|f \times g|$ est bornée.

Explications: La somme de deux fonctions majorées (resp. minorées) est majorée (resp. minorée). Ce n'est pas le cas pour le produit : par exemple $f(x) = -1$ est minorée, $g(x) = \exp(x)$ aussi, mais $f \times g(x) = -\exp(x)$ ne l'est pas.

Question 280
Soient $f :]-\infty, 0[\to]0, 1[$ et $g :]-2, 2[\to]0, +\infty[$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Le domaine de définition de $x \mapsto g\big(f(2x)\big)$ est $]-1, 1[$.
- ☐ [Faux] Le domaine de définition de $x \mapsto g\big(\ln(f(x))\big)$ est $]0, +\infty[$.
- ☐ [Vrai] Le domaine de définition de $x \mapsto \frac{g(x+1)}{f(x)}$ est $]-3, 0[$.
- ☐ [Vrai] Le domaine de définition de $x \mapsto \frac{f(x) \times g(x)}{f(x)+g(x)}$ est $]-2, 0[$.

Explications: Si $x \mapsto f(x)$ est définie sur $]a, b[$ alors $x \mapsto f(x+k)$ est définie sur $]a-k, b-k[$ et $x \mapsto f(\ell x)$ est définie sur $]\frac{a}{\ell}, \frac{b}{\ell}[$ (où $\ell > 0$).

10.4 Fonctions continues | Facile | 123.01, 123.02

Question 281
Quelles fonctions sont continues en $x = 0$?

- ☐ [Vrai] $x \mapsto |x|$ (valeur absolue).
- ☐ [Faux] $x \mapsto E(x)$ (partie entière).
- ☐ [Faux] $x \mapsto \frac{1}{x}$ (inverse).
- ☐ [Vrai] $x \mapsto \sqrt{x}$ (racine carrée).

Explications: La fonction inverse n'est pas définie à l'origine ! La fonction partie entière n'est pas continue à l'origine.

Question 282
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont continues sur $\mathbb{R}$?

- ☐ [Vrai] $x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$
- ☐ [Faux] $x \tan(x)$
- ☐ [Vrai] $x \mapsto \frac{1}{\exp(x)}$
- ☐ [Vrai] $x \mapsto \ln(\exp(3x))$

Explications: La fonction tangente n'est pas définie partout, et elle continue seulement sur son domaine de définition. Comme $\ln(\exp(3x)) = 3x$ alors cette fonction sera continue sur $\mathbb{R}$.

Question 283
Quelles sont les propriétés vraies ?

- ☐ [Vrai] La somme de deux fonctions continues est continue.
- ☐ [Vrai] Le produit de deux fonctions continues est continue.
- ☐ [Faux] Le quotient de deux fonctions continues est continue.
- ☐ [Vrai] L'inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas est continue.

Explications: Le quotient de deux fonctions continues est une fonction continue, uniquement aux points où le dénominateur ne s'annule pas.

10.5 Fonctions continues | Moyen | 123.01, 123.02

Question 284
Parmi les propriétés suivantes, quelles sont celles qui implique que f est continue en x_0 ?

- ☐ [Vrai] $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- ☐ [Vrai] $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \qquad |x - x_0| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$
- ☐ [Faux] $\exists \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
- ☐ [Vrai] $\left|f(x) - f(x_0)\right| \to 0$ lorsque $x \to x_0$

Explications: f est continue en x_0 si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, ce qui s'écrit aussi $\left|f(x) - f(x_0)\right| \to 0$, ou encore : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \qquad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (et on peut remplacer les inégalités strictes par des inégalités larges).

Question 285
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont continues sur $\mathbb{R}$?

- ☐ [Vrai] $x \mapsto P(x)$, où P est un polynôme.
- ☐ [Vrai] $x \mapsto |f(x)|$, où f est une fonction continue.
- ☐ [Vrai] $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$, où f est une fonction continue ne s'annulant pas.
- ☐ [Faux] La fonction f définie par $f(x) = 0$, si $x \in \mathbb{Q}$ et par $f(x) = 1$ sinon.

Explications: La fonction f définie par $f(x) = 0$, si $x \in \mathbb{Q}$ et par $f(x) = 1$ sinon, est une fonction qui n'est continue en aucun point $x_0 \in \mathbb{R}$!

Question 286
En posant $f(0) = 0$, quelles fonctions deviennent continues sur $\mathbb{R}$?

- ☐ [Faux] $f(x) = \frac{1}{x}$
- ☐ [Faux] $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
- ☐ [Vrai] $f(x) = x\ln(|x|)$
- ☐ [Faux] $f(x) = e^{1/x}$

Explications: Toutes les fonctions sont continues sur $\mathbb{R}^*$, il s'agit donc de déterminer si $f(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$. C'est uniquement le cas de $x\ln(|x|)$.

10.6 Fonctions continues | Difficile | 123.01, 123.02

Question 287
Parmi les propriétés suivantes, quelles sont celles qui impliquent que f est continue en x_0 ?

- ☐ [Faux] $f(x)^2 \to f(x_0)^2$ (lorsque $x \to x_0$)
- ☐ [Vrai] $f(x)^3 \to f(x_0)^3$ (lorsque $x \to x_0$)
- ☐ [Faux] $E(f(x)) \to E(f(x_0))$ (lorsque $x \to x_0$)
- ☐ [Vrai] $\exp(f(x)) \to \exp(f(x_0))$ (lorsque $x \to x_0$)

Explications: Si $f(x)^2 \to f(x_0)^2$ alors ce n'est pas toujours vrai que $f(x) \to f(x_0)$, prendre la fonction $f(x) = -1$ si $x < 0$ et $f(x) = +1$ sinon. Par contre avec le cube c'est vrai, car la fonction $x \mapsto x^3$ est une bijection continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, idem avec l'exponentielle !

Question 288
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Si $u_n \to \ell$ et f continue en ℓ, alors $f(u_n)$ admet une limite.
- ☐ [Faux] Si $f(u_n) \to f(\ell)$ et f est continue en ℓ, alors $u_n \to \ell$.
- ☐ [Vrai] Si $u_n \to \ell$ et $f(u_n)$ n'a pas de limite, alors f n'est pas continue en ℓ.
- ☐ [Vrai] Si pour toute suite qui vérifie $u_n \to \ell$, on a $f(u_n) \to f(\ell)$, alors f est continue en ℓ.

Explications: Une fonction f est continue en ℓ si et seulement si pour toute suite (u_n) qui tend vers ℓ, on a $f(u_n) \to f(\ell)$.

10.7 Théorèmes des valeurs intermédiaires | Facile | 123.01, 123.02

Question 289
Quelles assertions peut-on déduire du théorème des valeurs intermédiaires ?

- ☐ [Vrai] $\sin(x) - x^2 + 1$ s'annule sur $[0, \pi]$.
- ☐ [Vrai] $x^5 - 37$ s'annule sur $[2, 3]$.
- ☐ [Vrai] $\ln(x+1) - x + 1$ s'annule sur $[0, +\infty[$.
- ☐ [Faux] $e^x + e^{-x}$ s'annule sur $[-1, 1]$.

Explications: Pour montrer qu'une fonction continue f s'annule sur un intervalle $[a, b]$, il est suffisant de montrer que $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ (ou l'opposé).

Question 290
Soit $f(x) = x^2 - 7$. On applique la méthode de dichotomie sur l'intervalle $[2;3]$. On calcule $f(2,125) = -1,9375$; $f(2,5) = -0,75$; $f(2,625) = -0,109375$; $f(2,75) = 0,5625$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] f s'annule sur $[2;2,5]$ et sur $[2,5;3]$.
- ☐ [Vrai] f s'annule sur $[2,5;3]$.
- ☐ [Faux] f s'annule sur $[2,75;3]$.
- ☐ [Vrai] $2,6 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 2,8$

Explications: La fonctions f est continue, strictement croissante et s'annule en $\sqrt{7}$. Comme $f(2,625) < 0$ et $f(2,75) > 0$, alors $2,625 < \sqrt{7} < 2,75$.

10.8 Théorèmes des valeurs intermédiaires | Moyen | 123.01, 123.02

Question 291
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue (avec $a < b$). Quelles assertions sont une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires ?

- ☐ [Faux] Si $f(a) \cdot f(b) > 0$ alors f s'annule sur $[a,b]$.
- ☐ [Vrai] Si $f(a) < k < f(b)$ alors $f(x) - k$ s'annule sur $[a,b]$.
- ☐ [Faux] Pour $I \subset \mathbb{R}$, si $f(I)$ est un intervalle alors I est un intervalle.
- ☐ [Faux] Si $c \in]a,b[$ alors $f(c) \in]f(a), f(b)[$.

Explications: Les trois façons d'énoncer le théorème des valeurs intermédiaires, pour $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue : (1) si $f(a) \cdot f(b) \leqslant 0$ alors f s'annule sur $[a,b]$; (2) si $f(a) < k < f(b)$ alors il existe $a < c < b$ tel que $f(c) = k$; (3) si I est un intervalle, alors $f(I)$ est un intervalle.

Question 292
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$. Par dichotomie on construit deux suites (a_n) et (b_n), avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Si $f(\frac{1}{2}) > 0$ alors $a_1 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = \frac{1}{2}$.
- ☐ [Vrai] f s'annule sur $[a_n, b_n]$ (quel que soit $n \geqslant 0$).
- ☐ [Faux] (a_n) et (b_n) sont des suites croissantes.
- ☐ [Faux] $a_n \to 0$ ou $b_n \to 0$.

Explications: Par dichotomie on construit deux suites adjacentes. (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et $a_n \leqslant b_n$. Ces deux suites convergent vers une valeur $c \in]a,b[$, telle que $f(c) = 0$.

10.9 Théorèmes des valeurs intermédiaires | Difficile | 123.01, 123.02

Question 293
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue (avec $a < b$). Quelles assertions sont vraies ?

- ☐ [Faux] Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ et f croissante alors f s'annule une unique fois sur $[a,b]$.
- ☐ [Faux] Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ et f n'est pas strictement monotone alors f s'annule au moins deux fois sur $[a,b]$.

- ☐ [Faux] Si $f(a)\cdot f(b)<0$ alors f s'annule un nombre fini de fois sur $[a,b]$.
- ☐ [Vrai] Si $f(a)\cdot f(b)<0$ et f strictement décroissante, alors f s'annule une unique fois sur $[a,b]$.

Explications: Le théorème des valeurs intermédiaires implique que si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ est continue avec $f(a)\cdot f(b)<0$ alors il existe une valeur $c\in[a,b]$ telle que $f(c)=0$. Pour avoir l'unicité de ce zéro, il suffit que f soit strictement croissante ou bien strictement décroissante.

Question 294

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(0)>0$ et $f(1)<0$. Par dichotomie on construit deux suites (a_n) et (b_n), avec $a_0=0$ et $b_0=1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes.
- ☐ [Faux] $(f=0)$ admet une unique solution sur $[a_n,b_n]$.
- ☐ [Vrai] Si $f(a_n)<0$ et $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)>0$ alors $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1}=b_n$.
- ☐ [Vrai] Pour $n=10$, a_{10} approche une solution de $(f=0)$ à moins de $\frac{1}{1000}$.

Explications: Par dichotomie les suites construites vérifient : (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante et $a_n\leqslant b_n$, et $b_n-a_n\to0$. Ce sont donc des suites adjacentes. En plus la limite de ces deux suites est une solution de l'équation $(f=0)$. Le méthode implique ici que si $f(a_n)>0$, $f(b_n)<0$ et $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)>0$ alors $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1}=b_n$. L'intervalle $[a_n,b_n]$ où se trouve un zéro est divisé par deux à chaque étape. Donc au bout de 10 étapes l'intervalle $[a_{10},b_{10}]$ est un sous intervalle de l'intervalle de départ $[0,1]$, et sa longueur est $\frac{1}{2^{10}}=\frac{1}{1024}<\frac{1}{1000}$.

10.10 Maximum, bijection | Facile | 123.04

Question 295

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] f admet un maximum sur $]a,b[$.
- ☐ [Faux] f admet un maximum en a ou en b.
- ☐ [Vrai] f est bornée sur $]a,b[$.
- ☐ [Faux] f admet un maximum ou un minimum sur $[a,b]$ mais pas les deux.

Explications: Une fonction continue sur un intervalle fermé borné, est bornée et atteint ses bornes (donc le maximum et le minimum sont atteints). Par contre ses extremums peuvent être en a ou en b ou dans $]a,b[$.

Question 296

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que : elle est strictement croissante sur $]-\infty,0]$; strictement décroissante sur $[0,1]$; strictement croissante sur $[1,+\infty[$. En plus $\lim_{x\to-\infty}f=-\infty$, $f(0)=2$, $f(1)=1$ et $\lim_{x\to+\infty}f=3$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] La restriction $f_|:]-\infty,0]\to]-\infty,2]$ est bijective.
- ☐ [Faux] La restriction $f_|:[1,+\infty[\to[1,+\infty[$ est bijective.
- ☐ [Vrai] La restriction $f_|:[0,1]\to[1,2]$ est bijective.
- ☐ [Faux] La restriction $f_|:]0,+\infty]\to[1,3[$ est bijective.

Explications: Le plus simple est de dessiner l'allure du graphe (ou le tableau de variation) pour se convaincre que f restreinte à $]-\infty, 0]$ définit une bijection vers $]-\infty, 2]$; f restreinte à $[0, 1]$ définit une bijection (décroissante) vers $[1, 2]$; f restreinte à $[1, +\infty[$ définit une bijection vers $[1, 3[$.

10.11 Maximum, bijection | Moyen | 123.04

Question 297
Soit $f(x) = x\sin(\pi x) - \ln(x) - 1$ définie sur $]0, 1]$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] f est bornée et atteint ses bornes.
- ☐ [Faux] f est majorée.
- ☐ [Vrai] f est minorée.
- ☐ [Vrai] Il existe $c \in]0, 1]$ tel que $f(c) = 0$.

Explications: Attention l'intervalle de définition n'est pas fermé borné. Par contre la limite de f en 0 en $+\infty$ et $f(1) = -1$. On en déduit que f n'est pas majorée, par contre elle est minorée, et par la théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule.

Question 298
Soit $f : [a, b] \to [c, d]$ continue avec $a < b$, $c < d$, $f(a) = c$, $f(b) = d$. Quelles propriétés impliquent f bijective ?

- ☐ [Vrai] f injective.
- ☐ [Faux] f surjective.
- ☐ [Faux] f croissante.
- ☐ [Vrai] f strictement croissante.

Explications: Comme $f(a) = c$, $f(b) = d$, alors par le théorème des valeurs intermédiaires, toute valeur entre c et d est atteinte, autrement dit f est surjective. Si en plus f est injective (ce qui est le cas si f strictement croissante) alors f sera bijective.

10.12 Maximum, bijection | Difficile | 123.04

Question 299
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $J = f(I)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] J est un intervalle.
- ☐ [Faux] Si I est majoré, alors J est majoré.
- ☐ [Vrai] Si I est fermé borné, alors J est fermé borné.
- ☐ [Faux] Si I est borné, alors J est borné.

Explications: Par une fonction continue, l'image d'un intervalle est un intervalle ; l'image d'un intervalle fermé et borné est un intervalle fermé et borné.

Question 300
Soit $f : I \to J$ une fonction continue, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Si f surjective et strictement croissante, alors f est bijective.
- ☐ [Vrai] Si f bijective, alors sa bijection réciproque f^{-1} est continue.
- ☐ [Faux] Si f bijective et $I = \mathbb{R}$, alors J n'est pas un intervalle borné.
- ☐ [Vrai] Si f bijective et J est un intervalle fermé et borné, alors I est un intervalle fermé et borné.

Explications: La bijection réciproque d'une fonction continue est continue. En particulier cela implique que pour $f^{-1} : J \to I$, si J est un intervalle fermé et borné, alors I aussi.

Dérivabilité

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

11 Dérivabilité des fonctions réelles | 124

Cours ● Dérivée d'une fonction
Vidéo ■ Définition
Vidéo ■ Calculs
Vidéo ■ Extremum local, théorème de Rolle
Vidéo ■ Théorème des accroissements finis
Fiche d'exercices ♦ Fonctions dérivables

11.1 Dérivées | Facile | 124.00

Question 301
Soit $f(x) = \frac{2}{x}$ et $g(x) = 2\sqrt{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ (resp. $\mathscr{C}_g$) la courbe représentative de f (resp. g). Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $(1,2)$ est $y = -2x + 4$.
- ☐ [Faux] Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $(1,2)$ est $y = -2x + 2$.
- ☐ [Faux] Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point $(1,2)$ est $y = x + 2$.
- ☐ [Vrai] Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point $(1,2)$ est $y = x + 1$.

Explications: Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $(a, f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Ici, $f'(x) = -\frac{2}{x^2}$ et $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Question 302
Etant donné que $f(3) = 1$ et $f'(3) = 5$. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $(3,1)$ est :

- ☐ [Faux] $y = 1(x-3)+5 = x+2$
- ☐ [Faux] $y = 1(x-3)-5 = x-8$
- ☐ [Faux] $y = 5(x-3)-1 = 5x-16$
- ☐ [Vrai] $y = 5(x-3)+1 = 5x-14$

Explications: On applique la formule du cours $y = f'(3)(x-3)+f(3) = 5(x-3)+1$.

Question 303

Soit $f(x) = |x-1|$. On note $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) pour désigner la dérivée à droite (resp. à gauche) en a. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $f'_d(1) = 1$ et $f'_g(1) = 1$
- ☐ [Faux] f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.
- ☐ [Vrai] f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$.
- ☐ [Vrai] f n'est pas dérivable en 1 car $f'_d(1) = 1$ et $f'_g(1) = -1$.

Explications: Par définition, on a :

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x \geqslant 1 \\ 1-x & \text{si } x \leqslant 1. \end{cases}$$

Donc, f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ -1 & \text{si } x < 1. \end{cases}$$

En particulier, $f'(0) = -1$. Par contre f n'est pas dérivable en 1 car

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1 \text{ et } \lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -1.$$

Question 304

Soit $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] f est continue et dérivable en 2.
- ☐ [Vrai] f est continue et non dérivable en 2.
- ☐ [Vrai] La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 2 est une droite verticale.
- ☐ [Faux] La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 2 est une droite horizontale.

Explications: Les théorèmes généraux impliquent que f est continue sur $\mathbb{R}$ et est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Mais

$$\lim_{x\to 2^\pm} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2^\pm} \frac{1}{\sqrt[3]{x-2}} = \pm\infty$$

Donc, f n'est pas dérivable en 2 et la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 2 est une droite verticale.

Question 305

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] La dérivée de $f(x) = (2x+1)^2$ est $f'(x) = 4(2x+1)$.
- ☐ [Faux] La dérivée de $f(x) = (2x+1)^2$ est $f'(x) = 2(2x+1)$.
- ☐ [Faux] La dérivée de $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x}$ est $f'(x) = 2\mathrm{e}^{x^2-2x}$.
- ☐ [Vrai] La dérivée de $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x}$ est $f'(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x}$.

Explications: De manière plus générale, $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ et $(\mathrm{e}^v)' = v'\mathrm{e}^v$. Il suffit de prendre $u = 2x+1$, $n = 2$ et $v = x^2 - 2x$.

Question 306

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] La dérivée de $f(x) = \sin[(2x+1)^2]$ est $f'(x) = 2\cos[(2x+1)^2]$.
- ☐ [Vrai] La dérivée de $f(x) = \sin[(2x+1)^2]$ est $f'(x) = 4(2x+1)\cos[(2x+1)^2]$.
- ☐ [Vrai] La dérivée de $f(x) = \tan(1+x^2)$ est $f'(x) = \dfrac{2x}{\cos^2(1+x^2)}$.
- ☐ [Faux] La dérivée de $f(x) = \tan(1+x^2)$ est $f'(x) = 1 + \tan^2(1+x^2)$.

Explications: De manière plus générale, $(\sin u)' = u' \cos u$ et

$$(\tan v)' = \frac{v'}{\cos^2 v} = v'(1 + \tan^2 v).$$

Il suffit de prendre $u = (2x+1)^2$, $v = 1 + x^2 \Rightarrow u' = 4(2x+1)$ et $v' = 2x$.

Question 307

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] La dérivée de $f(x) = \arcsin(1-2x^2)$ est $f'(x) = \dfrac{-2x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$.
- ☐ [Faux] La dérivée de $f(x) = \arcsin(1-2x^2)$ est $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$.
- ☐ [Faux] La dérivée de $f(x) = \arccos(x^2-1)$ est $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$.
- ☐ [Vrai] La dérivée de $f(x) = \arccos(x^2-1)$ est $f'(x) = \dfrac{-2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$.

Explications: On applique les règles

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \text{ et } (\arccos v)' = \frac{-v'}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Avec $u = 1 - 2x^2$ et $v = x^2 - 1$, on obtient :

$$(\arcsin(1-2x^2))' = \frac{-2x}{|x|\sqrt{1-x^2}} \text{ et } (\arccos(x^2-1))' = \frac{-2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}.$$

Question 308

Soit $f(x) = x^2 - \mathrm{e}^{x^2-1}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] f admet un minimum local en 0.
- ☐ [Faux] f admet un maximum local en 0.
- ☐ [Faux] f admet un point d'inflexion en 0.
- ☐ [Faux] la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 est une droite verticale.

Explications: On calcule $f'(x) = 2x - 2xe^{x^2-1}$ et $f''(x) = 2-2(1+2x^2)e^{x^2-1}$. Ensuite, on vérifie que

$$f'(x) = 0 \text{ et } f''(0) = 2 - 2e^{-1} > 0.$$

Donc f admet un minimum local en 0 et la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 est une droite horizontale.

Question 309

Soit $f(x) = x^4 - x^3 + 1$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] f admet un minimum local au point $\dfrac{3}{4}$.
- ☐ [Faux] f admet un maximum local au point 0.
- ☐ [Faux] f admet un minimum local au point 0.
- ☐ [Vrai] f admet un point d'inflexion au point 0.

Explications: On a $f'\left(\frac{3}{4}\right) = 0$ et $f''\left(\frac{3}{4}\right) > 0$. Donc f admet un minimum au point $\dfrac{3}{4}$. On vérifie aussi que f'' s'annule en 0 en changeant de signe. Donc f admet un point d'inflexion au point 0.

Question 310

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] $f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$
- ☐ [Faux] $f''(x) = \dfrac{-2}{(1+x)^3}$
- ☐ [Faux] pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{n}{(1+x)^{n+1}}$
- ☐ [Vrai] pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$

Explications: On a $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2}{(1+x)^3}$ et l'on vérifie, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

11.2 Dérivées | Moyen | 124.00

Question 311

Soit $f(x) = x^2 e^x$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] $f''(x) = (x^2 + 4x + 2)e^x$

- ☐ [Faux] $f''(x) = 2e^x$
- ☐ [Vrai] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n^2 - n)e^x$.
- ☐ [Faux] Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n)e^x$.

Explications: On applique la formule de Leibniz

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x^2)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = [x^2 + 2nx + n(n-1)]e^x.$$

Question 312

Soit $f(x) = x\ln(1+x)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $f'(x) = (x)'[\ln(1+x)]' = 1 \times \dfrac{1}{1+x}$
- ☐ [Vrai] $f'(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$
- ☐ [Faux] Pour $n \geqslant 2$, $f^{(n)}(x) = n \times \dfrac{1}{(1+x)^n}$.
- ☐ [Vrai] Pour $n \geqslant 2$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n(n-2)!}{(1+x)^n}(x+n)$.

Explications: On applique la formule de Leibniz

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (x)^{(k)} (\ln(1+x))^{(n-k)}.$$

Mais $[\ln(1+x)]^{(k)} = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$. Ce qui donne

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n(n-2)!}{(1+x)^n}(x+n).$$

Question 313

Soit $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] Il existe $a \in]0,1[$ tel que $f'(a) = 0$.
- ☐ [Vrai] Il existe $a \in]0,1[$ où la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est une droite horizontale.
- ☐ [Faux] Il existe $a \in]0,1[$ où la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est une droite verticale.
- ☐ [Faux] $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion en 0.

Explications: La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. En particulier, la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point $a \in \mathbb{R}$ ne peut être une droite verticale. Par ailleurs, $f(0) = f(1) = 0$. Donc le théorème de Rolle implique l'existence de $a \in]0,1[$ tel que $f'(a) = 0$ et la tangente à $\mathscr{C}_f$ en ce point est une droite horizontale.

Question 314

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \begin{cases} e^{x^2+x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ a\arctan x + b & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Quelles valeurs faut-il donner à a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$?

- ☐ [Faux] $a = 1$ et $b = 0$
- ☐ [Faux] $a = 0$ et $b = 1$
- ☐ [Faux] $a = 0$ et $b = 0$
- ☐ [Vrai] $a = 1$ et $b = 1$

Explications: La fonction f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et pour qu'elle soit continue en 0, il faut que

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) \Rightarrow 1 = b.$$

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$f'(x) = \begin{cases} (2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x} & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{a}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et $f'_g(0) = 1$ et $f'_d(0) = a$. Donc, pour que f soit dérivable en 0, on doit avoir $f'_g(0) = f'_d(0)$. D'où $a = 1$.

Question 315

Soit $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] f n'est pas dérivable en 0.
- ☐ [Faux] f est dérivable en 0 est $f'(0) = 0$.
- ☐ [Vrai] f est dérivable en 0 est $f'(0) = 1$.
- ☐ [Vrai] Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$.

Explications: On a

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \left(1 + x \sin \frac{1}{x}\right) = 1.$$

Donc, f est dérivable en 0 et $f'(0) = 1$. Par ailleurs, les règles de calcul donnent, pour $x \neq 0$,

$$f'(x) = (x)' + (x^2)' \sin \frac{1}{x} + x^2 \left(\sin \frac{1}{x}\right)' = 1 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}.$$

Question 316

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{3x^4 - 4x^3}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) > 0$
- ☐ [Vrai] f admet un minimum en 1.
- ☐ [Faux] f admet un maximum en 1.
- ☐ [Vrai] Il existe $a \in]0, 1[$ tel que $f''(a) = 0$.

Explications: On a $f'(x) = (12x^3 - 12x^2)e^{3x^4-4x^3} = 12x^2(x-1)e^{3x^4-4x^3}$. On en déduit que $f'(1) = 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x < 1$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 1$. Donc f admet un minimum en 1.
Par ailleurs, $f'(0) = f'(1) = 0$ et, puisque f' est continue sur $[0,1]$ et est dérivable sur $]0,1[$, le théorème de Rolle implique qu'il existe $a \in]0,1[$ tel que $f''(a) = 0$.

Question 317

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$. Quel est l'ensemble S des points x_0 où la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = x$?

- ☐ [Faux] $S = \{-1\}$
- ☐ [Faux] $S = \{0\}$
- ☐ [Faux] $S = \{0,1\}$
- ☐ [Vrai] $S = \varnothing$

Explications: La pente de la droite $y = x$ est 1, donc la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 est parallèle à cette droite si, et seulement si, $f'(x_0) = 1$. Une telle équation n'admet pas de solution.

Question 318

Soit $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$. Quel est l'ensemble S des points x_0 où la tangente à $\mathscr{C}_f$ est perpendiculaire à la droite d'équation $y = x$?

- ☐ [Faux] $S = \{-2\}$
- ☐ [Faux] $S = \{-3\}$
- ☐ [Vrai] $S = \{-1,-3\}$
- ☐ [Faux] $S = \varnothing$

Explications: La pente de la droite $y = x$ est 1, donc la tangente à $\mathscr{C}_f$ en x_0 est perpendiculaire à cette droite si, et seulement si, $f'(x_0) = -1$. C'est-à-dire $x_0 = -1$ ou $x_0 = -3$.

Question 319

On considère $f(x) = x^2 - x$ sur l'intervalle $[0,1]$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] f vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et une valeur vérifiant la conclusion de ce théorème est $\dfrac{1}{2}$.
- ☐ [Faux] f ne vérifie pas les hypothèses du théorème de Rolle.
- ☐ [Faux] f ne vérifie pas les hypothèses du théorème des accroissements finis.
- ☐ [Vrai] f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis et une valeur vérifiant la conclusion de ce théorème est $\dfrac{1}{2}$.

Explications: La fonction f est continue sur $[0,1]$ et est dérivable sur $]0,1[$. Donc elle vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis, et, comme en plus $f(0) = 0 = f(1)$, elle vérifie aussi les hypothèses du théorème de Rolle. Les deux théorèmes impliquent l'existence de $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$. Soit $c = \dfrac{1}{2}$.

Question 320
Soit $f(x)=\begin{cases} x^2\ln(x^2) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0. \end{cases}$
Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f''(x)=2\ln x^2+6$
- ☐ [Faux] f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Explications: Les théorèmes généraux assurent que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ avec

$$f'(x)=2x\ln(x^2)+2x \text{ et } f''(x)=2\ln x^2+6 \text{ si } x\neq 0$$

et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0=f'(0)$. On a aussi

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=0=f'(0)\Rightarrow f' \text{ est continue en } 0.$$

Ainsi f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Elle n'est pas deux fois dérivables en 0 car

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}[2\ln(x^2)+2]=-\infty.$$

11.3 Dérivées | Difficile | 124.00

Question 321
Soit $f(x)=\arctan x+\arctan\frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f'(x)=0$
- ☐ [Faux] $\forall x\in\mathbb{R}^*$, $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$
- ☐ [Faux] La fonction f est paire.
- ☐ [Vrai] $f(x)=\dfrac{\pi}{2}$ si $x>0$ et $f(x)=-\dfrac{\pi}{2}$ si $x<0$

Explications: La fonction f, tout comme la fonction arctan, est impaire. On calcule $f'(x)$ pour $x\neq 0$:

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{\left(\frac{1}{x}\right)'}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}=0$$

Donc f est constante sur chaque intervalle de son domaine de définition :

$$f(x)=\begin{cases} f(1)=\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x>0 \\ \\ f(-1)=-\frac{\pi}{2} & \text{si } x<0. \end{cases}$$

Question 322
Soit f une fonction continue sur $[-1,1]$ telle que $f(0)=\pi$ et, pour tout $x\in]-1,1[$, $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Comment peut-on exprimer f ?

- ☐ [Faux] $f(x) = \sqrt{1-x^2} - 1 + \pi$
- ☐ [Vrai] $f(x) = \arcsin(x) + \pi$
- ☐ [Vrai] $f(x) = -\arccos x + \dfrac{3\pi}{2}$
- ☐ [Faux] Une telle fonction f n'existe pas.

Explications: On remarque que $f'(x) = (\arcsin x)' = (-\arccos x)'$. Donc, par continuité,

$$\forall x \in [-1, 1],\ f(x) = \arcsin x + C_1 = -\arccos x + C_2.$$

Mais $f(0) = \pi \Rightarrow C_1 = \pi$ et $C_2 = \dfrac{3\pi}{2}$.

Question 323

Soit $f(x) = x^3 + x^2 + x - \dfrac{13}{12}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $f(0) = -\dfrac{13}{12} < 0$ et $f(1) = -\dfrac{1}{12} < 0$, donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]0, 1[$.
- ☐ [Vrai] L'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $]0, 1[$.
- ☐ [Vrai] Le théorème de Rolle s'applique à une primitive de f sur $[0, 1]$.
- ☐ [Faux] Le théorème de Rolle s'applique à f sur $[0, 1]$.

Explications: Le théorème de Rolle ne s'applique pas à f sur $[0, 1]$ car $f(0) \neq f(1)$. Mais on peut l'appliquer à

$$F(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - \frac{13}{12}x.$$

Cette fonction vérifie toutes les hypothèses du théorème, donc

$$\exists c \in]0, 1[,\ F'(c) = 0 \Longleftrightarrow f(c) = 0.$$

Question 324

Soit $f(x) = \tan(x)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $f(0) = 0 = f(\pi)$ et donc il existe $c \in]0, \pi[$ tel que $f'(c) = 0$.
- ☐ [Vrai] $f(0) = 0 = f(\pi)$ mais il n'existe pas de $c \in]0, \pi[$ tel que $f'(c) = 0$.
- ☐ [Faux] Le théorème de Rolle ne s'applique pas à f sur $[0, \pi]$ car $f(0) \neq f(\pi)$.
- ☐ [Vrai] Le théorème de Rolle ne s'applique pas à f sur $[0, \pi]$.

Explications: On a bien $f(0) = 0 = f(\pi)$. Mais, pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on a $f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$. On ne peut appliquer le théorème de Rolle à f sur $[0, \pi]$ car f n'est pas définie au point $\dfrac{\pi}{2}$.

Question 325

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^3 + 3x + 1$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$
- ☐ [Vrai] f est une bijection et $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{3}$.

- ☐ [Faux] f est une bijection et $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{6}$.
- ☐ [Faux] f est une bijection et $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(x)}$.

Explications: On a $f'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi f est continue et est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc, d'après le théorème de la bijection, f est une bijection et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

En particulier, et puisque $f(0) = 1$, $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{3}$.

Question 326

Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $\alpha \notin [a,b]$ et $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-\alpha}$.

- ☐ [Vrai] On peut appliquer le théorème de Rolle à g sur $[a,b]$.
- ☐ [Vrai] Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(c)}{c-\alpha}$.
- ☐ [Vrai] Il existe $c \in]a,b[$ tel que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en c passe par $(\alpha, 0)$.
- ☐ [Faux] La dérivée de g est $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{(x-\alpha)^2}$.

Explications: La fonction g est continue sur $[a,b]$ et elle est dérivable sur $]a,b[$ avec

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-\alpha) - f(x)}{(x-\alpha)^2}.$$

De plus $g(a) = g(b) = 0$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle. Il existe alors $c \in]a,b[$ tel que

$$g'(c) = 0 \Longleftrightarrow f'(c)(c-\alpha) - f(c) \Longleftrightarrow f'(c) = \frac{f(c)}{c-\alpha}.$$

La tangente à $\mathscr{C}_f$ en c passe par le point $(\alpha, 0)$.

Question 327

Soit $n \geqslant 2$ un entier et $f(x) = \dfrac{1+x^n}{(1+x)^n}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Vrai] $f'(x) = \dfrac{n(x^{n-1}-1)}{(1+x)^{n+1}}$ et f admet un minimum en 1.
- ☐ [Faux] $f'(1) \neq 0$ et donc f n'admet pas d'extremum en 1.
- ☐ [Faux] Le théorème de Rolle s'applique à f sur $[-1,1]$ car $f(-1) = f(1)$.
- ☐ [Vrai] $\forall x \geqslant 0,\ (1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n)$.

Explications: La dérivée de $f(x)$ est $f'(x) = \dfrac{n(x^{n-1}-1)}{(1+x)^{n+1}}$ et f admet bien un minimum en 1 (dresser le tableau de variations de f). En particulier,

$$\forall x \geqslant 0,\ f(1) \leqslant f(x) \Longleftrightarrow (1+x)^n \leqslant 2^{n-1}(1+x^n).$$

Question 328
Soit $f(x) = e^x$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $f''(x)$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] f est convexe sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] f est concave sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] $\forall t \in [0,1]$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $t \ln x + (1-t)\ln y \leqslant \ln[tx + (1-t)y]$.

Explications: On a $f''(x) = e^x > 0$. Donc f est convexe sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par définition,

$$\forall t \in [0,1]\ \forall a, b \in \mathbb{R},\ f[ta + (1-t)b] \leqslant tf(a) + (1-t)f(b).$$

En prenant $a = \ln x$ et $b = \ln y$, avec $x, y > 0$, on aura

$$e^{t \ln x + (1-t)\ln y} \leqslant tx + (1-t)y.$$

Il suffit de composer par ln, qui est strictement croissante, pour avoir

$$t \ln x + (1-t)\ln y \leqslant \ln[tx + (1-t)y].$$

Question 329
Soit $f(x) = \ln(x)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $f''(x)$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- ☐ [Faux] f est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- ☐ [Vrai] f est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- ☐ [Vrai] $\forall t \in [0,1]$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a : $e^{tx+(1-t)y} \leqslant te^x + (1-t)e^y$.

Explications: On a $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$. Donc f est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$. Ainsi, par définition,

$$\forall t \in [0,1]\ \forall a, b \in \mathbb{R}^{+*},\ f[ta + (1-t)b] \geqslant tf(a) + (1-t)f(b).$$

En prenant $a = e^x$ et $b = e^x$, où $x, y \in \mathbb{R}$, on aura

$$\ln[te^x + (1-t)e^y] \geqslant tx + (1-t)y.$$

Il suffit de composer par la fonction exponentielle, qui est strictement croissante, pour avoir

$$te^x + (1-t)e^y \geqslant e^{tx+(1-t)y}.$$

Question 330
Soit $f(x) = \arcsin(1-2x^2)$ définie sur $[-1,1]$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ [Faux] $\forall x \in [-1,1]$, $f'(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$
- ☐ [Faux] $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) = -2\arcsin x + \dfrac{\pi}{2}$
- ☐ [Vrai] $f'_d(0) = -2$ et $f'_g(0) = 2$

☐ [Vrai] La fonction f est paire avec $f(x) = -2\arcsin x + \frac{\pi}{2}$ si $x \in [0,1]$.

Explications: La fonction f est clairement paire. On calcule $f'(x)$ pour $x \in]0,1[$:

$$f'(x) = \frac{(1-2x^2)'}{\sqrt{1-(1-2x^2)^2}} = \frac{-2x}{|x|\sqrt{1-x^2}}.$$

Donc, pour $x \in]0,1[$, $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} = (-2\arcsin x)'$. Ainsi, par continuité,

$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = -2\arcsin x + C.$$

Or $f(0) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} = -2\arcsin 0 + C$, donc $C = \frac{\pi}{2}$. Par ailleurs,

$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [0,1] \\ f \text{ est dérivable sur }]0,1[\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow f'_d(0) = -2.$$

On vérifie, de même, que $f'_g(0) = 2$.

Fonctions usuelles

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

12 Fonctions usuelles | 126

Cours ● Fonctions usuelles
Vidéo ■ partie 1. Logarithme et exponentielle
Vidéo ■ partie 2. Fonctions circulaires inverses
Vidéo ■ partie 3. Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses
Fiche d'exercices ♦ Fonctions circulaires et hyperboliques inverses

12.1 Fonctions usuelles | Facile | 126.00

12.1.1 Domaine de définition

Question 331

Soit $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x^2-1}$. On notera D_f et D_g le domaine de définition de f et de g respectivement. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ [Faux] $D_f =]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[$

☐ [Vrai] $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$

☐ [Faux] $D_g = [-1,1]$

☐ [Vrai] $D_g =]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$

Explications: f est définie si et seulement si $x^2-2x-1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq 1-\sqrt{2}$ et $x \neq 1+\sqrt{2}$. g est définie si et seulement si $x^2-1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant -1$.

Question 332
Soit $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{2-x}}$ et $g(x)=\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}}$. On notera D_f et D_g le domaine de définition de f et g respectivement. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $D_f=]-\infty,1]\cup]2,+\infty[$
- ☐ [Faux] $D_f=[1,2[$
- ☐ [Vrai] $D_g=]-\infty,1]$
- ☐ [Faux] $D_g=]-\infty,2[$

Explications: f est définie si $x\neq 2$ et $\frac{1-x}{2-x}\geqslant 0$. On déduit que $D_f=]-\infty,1]\cup]2,+\infty[$. g est définie si $1-x\geqslant 0$ et $2-x>0$, c'est-à-dire $x\leqslant 1$.

Question 333
Soit $f(x)=\ln(\frac{2+x}{2-x})$ et $g(x)=x^x$. On notera D_f et D_g le domaine de définition des fonctions f et g respectivement. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $D_f=\mathbb{R}\backslash\{2\}$
- ☐ [Vrai] $D_f=]-2,2[$
- ☐ [Faux] $D_g=\mathbb{R}$
- ☐ [Vrai] $D_g=]0,+\infty[$

Explications: f est définie si $x\neq 2$ et $\frac{2+x}{2-x}\geqslant 0$. On déduit que $D_f=]-2,2[$. Par définition, $g(x)=e^{x\ln x}$. Donc g est définie si $x>0$.

12.1.2 Fonctions circulaires réciproques

Question 334
Soit $f(x)=\arcsin(2x)$, $g(x)=\arccos(x^2-1)$ et $h(x)=\arctan\sqrt{x}$. On notera D_f,D_g et D_h le domaine de définition de f,g et h respectivement. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $D_f=[-1,1]$
- ☐ [Faux] $D_g=[-1,1]$
- ☐ [Vrai] $D_g=[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$
- ☐ [Vrai] $D_h=[0,+\infty[$

Explications: Les fonctions $x\mapsto\arcsin x$ et $x\mapsto\arccos x$ sont définies sur $[-1,1]$ et la fonction $x\mapsto\arctan x$ est définie sur $\mathbb{R}$. On déduit que : f est définie si $-1\leqslant 2x\leqslant 1$, c'est-à-dire $x\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, g est définie si $-1\leqslant x^2-1\leqslant 1$, c'est-à-dire $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ et h est définie si $x\geqslant 0$.

Question 335
Soit $A=\arcsin(\sin\frac{15\pi}{7})$, $B=\arccos(\cos\frac{21\pi}{11})$ et $C=\arctan(\tan\frac{17\pi}{13})$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $A=\frac{15\pi}{7}$
- ☐ [Vrai] $A=\frac{\pi}{7}$
- ☐ [Faux] $B=-\frac{\pi}{11}$
- ☐ [Vrai] $C=\frac{4\pi}{13}$

Explications: On a : $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \forall x \in [-1,1]$, $\arccos x \in [0,\pi], \forall x \in [-1,1]$ et $\arctan x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \forall x \in \mathbb{R}$. En utilisant la périodicité des fonctions sinus, cosinus et tangente, on obtient : $A = \frac{\pi}{7}$, $B = \frac{\pi}{11}$ et $C = \frac{4\pi}{13}$.

Question 336
Soit $f(x) = \arcsin(\cos x)$ et $g(x) = \arccos(\sin x)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] f est périodique de période π.
- ☐ [Vrai] g est périodique de période 2π.
- ☐ [Vrai] f est une fonction paire.
- ☐ [Faux] g est une fonction impaire.

Explications: Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont périodiques de période 2π, donc f et g sont de période 2π. La fonction $x \mapsto \cos x$ est paire, donc f l'est aussi. La fonction $x \mapsto \sin x$ est impaire, mais la fonction $x \mapsto \arccos x$ n'est ni paire ni impaire, donc g n'est ni paire ni impaire.

12.1.3 Equations

Question 337
Soit (E) l'équation : $\ln(x^2-1) = \ln(x-1) + \ln 2$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] (E) est définie sur $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$.
- ☐ [Vrai] (E) est définie sur $]1,+\infty[$.
- ☐ [Vrai] (E) n'admet pas de solution.
- ☐ [Faux] (E) admet une unique solution $x = 1$.

Explications: (E) est définie si $x^2-1 > 0$ et $x-1 > 0$, c'est-à-dire $x > 1$. Soit $x > 1$, alors $(E) \Leftrightarrow \ln(x-1) + \ln(x+1) = \ln(x-1) + \ln 2 \Leftrightarrow \ln(x+1) = \ln 2 \Leftrightarrow x = 1$.

Question 338
Soit (E) l'équation : $e^{2x} + e^x - 2 = 0$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] (E) est définie sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] Le domaine de définition de (E) est $\mathbb{R}^+$.
- ☐ [Faux] (E) admet deux solutions distinctes.
- ☐ [Vrai] (E) admet une unique solution $x = 0$.

Explications: La fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, donc (E) est définie sur $\mathbb{R}$. En posant $y = e^x$, on se ramène à résoudre l'équation du second degré $y^2 + y - 2 = 0$. En résolvant cette équation, on obtient $y = 1$ ou $y = -2$. Par conséquent, $x = 0$.

12.1.4 Etude de fonctions

Question 339
Soit $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] f est définie sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] f est croissante.
- ☐ [Vrai] f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] L'application réciproque de f est f.

Explications: La fonction $x \to \sqrt[3]{x}$ est définie sue $\mathbb{R}$, elle est strictement croissante et établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$, elle est strictement décroissante et établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $y \in \mathbb{R}$, on a : $y = \sqrt[3]{1-x^3} \Leftrightarrow 1-x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{1-y^3}$. Donc l'application réciproque de f est f.

Question 340
Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] f est définie sur $]0,+\infty[$.
- ☐ [Faux] f est croissante sur $]0,+\infty[$.
- ☐ [Vrai] f est une bijection de $]0,e]$ dans $]-\infty,\frac{1}{e}]$.
- ☐ [Vrai] f est une bijection de $[e,+\infty[$ dans $]0,\frac{1}{e}]$.

Explications: f est définie sur $]0,+\infty[$. En étudiant les variations de f, f est strictement croissante sur $]0,e]$ et strictement décroissante sur $[e,+\infty[$. D'autre part, $f(]0,e]) =]-\infty,\frac{1}{e}]$ et $f([e,+\infty[) =]0,\frac{1}{e}]$. On déduit que f établit une bijection de $]0,e]$ dans $]-\infty,\frac{1}{e}]$ et de $[e,+\infty[$ dans $]0,\frac{1}{e}]$.

12.2 Fonctions usuelles | Moyen | 126.00

12.2.1 Domaine de définition

Question 341
Soit $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$ et $g(x) = e^{\frac{1}{x}}\sqrt[4]{1-|x|}$. On notera D_f et D_g le domaine de définition de f et g respectivement. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $D_f = \mathbb{R}$
- ☐ [Faux] $D_f = [-1,1]$
- ☐ [Faux] $D_g = \mathbb{R}^*$
- ☐ [Vrai] $D_g = [-1,0[\cup]0,1]$

Explications: la fonction $x \to \sqrt[3]{x}$ est définie sur $\mathbb{R}$, donc $D_f = \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ est définie sur $[0,+\infty[$. On déduit que $D_g = [-1,0[\cup]0,1]$.

12.2.2 Equations - Inéquations

Question 342
Soit (E) l'équation : $4^x - 3^x = 3^{x+1} - 2^{2x+1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] (E) est définie sur $\mathbb{R}$.
- ☐ [Vrai] (E) admet une unique solution $x = 1$.
- ☐ [Faux] (E) admet deux solutions distinctes.

- ☐ [Faux] (E) n'admet pas de solution.

Explications: On a : $(E) \Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{2x+1} = 3^{x+1} + 3^x \Leftrightarrow (1+2)2^{2x} = (1+3)3^x \Leftrightarrow 2^{2x-2} = 3^{x-1} \Leftrightarrow (2x-2)\ln 2 = (x-1)\ln 3 \Leftrightarrow x = 1$.

Question 343
Soit (E) l'inéquation : $\ln|1+x| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] Le domaine de définition de (E) est $]-\frac{1}{2},+\infty[$.
- ☐ [Faux] L'ensemble des solutions de (E) est : $]-1,-\frac{3}{5}]\cup]-\frac{1}{3},+\infty[$.
- ☐ [Faux] L'ensemble des solutions de (E) est $]-\infty,-1[\cup]-1,-\frac{3}{5}]$.
- ☐ [Vrai] L'ensemble des solutions de (E) est : $]-\infty,-1[\cup]-1,-\frac{3}{5}]\cup[-\frac{1}{3},+\infty[$.

Explications: Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,-\frac{1}{2}\}$. $(E) \Leftrightarrow \ln|\frac{x+1}{4x+2}| \leqslant 0 \Leftrightarrow (E') : |\frac{x+1}{4x+2}| \leqslant 1$.
Si $x > -\frac{1}{2}$, $(E') \Leftrightarrow -4x-2 \leqslant x+1 \leqslant 4x+2 \Leftrightarrow x \geqslant -\frac{1}{3}$.
Si $x < -\frac{1}{2}$, $(E') \Leftrightarrow -4x-2 \geqslant x+1 \geqslant 4x+2 \Leftrightarrow x \leqslant -\frac{3}{5}$.
Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est $]-\infty,-1[\cup]-1,-\frac{3}{5}]\cup[-\frac{1}{3},+\infty[$.

Question 344
Soit $f(x) = \sin x - x$ et $g(x) = e^x - 1 - x$ Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- ☐ [Vrai] $f(x) \leqslant 0$, $\forall x \geqslant 0$
- ☐ [Vrai] $g(x) \geqslant 0$, $\forall x \geqslant 0$
- ☐ [Vrai] $g(x) \geqslant 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Explications: On pourra étudier les variations des fonctions f et g. On obtient : $\sin x \leqslant x$, $\forall x \geqslant 0$ et $e^x \geqslant 1 + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

12.2.3 Fonctions circulaires réciproques

Question 345
Soit $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Le domaine de définition de f est $[-1,1]$.
- ☐ [Vrai] $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) = \frac{\pi}{2}$
- ☐ [Faux] $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) = x$
- ☐ [Vrai] f est une fonction constante.

Explications: f est définie sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ et $f'(x) = 0$, $\forall x \in]-1,1[$. Puisque $]-1,1[$ est un intervalle, on déduit que f est constante sur $]-1,1[$ et comme f est continue sur $[-1,1]$, f est constante sur $[-1,1]$. Or $f(0) = \frac{\pi}{2}$, donc $f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in [-1,1]$.

Question 346
Soit $f(x) = \arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$.
- ☐ [Faux] f est une fonction constante.
- ☐ [Faux] $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{\pi}{2}$
- ☐ [Vrai] $\forall x > 0, f(x) = \frac{\pi}{2}$

Explications: f est définie sur $\mathbb{R}^*$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^*$. Puisque $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$, f est constante sur chaque intervalle. Or $f(1) = \frac{\pi}{2}$ et $f(-1) = -\frac{\pi}{2}$, on déduit que $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

12.2.4 Etude de fonctions

Question 347
Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $y = 2$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
- ☐ [Vrai] La courbe de f admet une asymptote verticale ($x = 1$).
- ☐ [Faux] Le point de coordonnées $(1, 1)$ est un centre de symétrie du graphe de f.
- ☐ [Vrai] Le point de coordonnées $(1, 2)$ est un centre de symétrie du graphe de f.

Explications: $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$, donc $y = 2$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
$\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, donc la droite $x = 1$ est une asymptote (verticale) à la courbe de f en 1.
Le graphe de f admet un centre de symétrie d'abscisse 1 si et seulement si la fonction $x \to f(1+x)+f(1-x)$ est constante, pour tout $x \neq 0$. Ce qui revient à ce que la fonction $x \to f(x)+f(2-x)$ soit constante, pour tout $x \neq 1$. Or $f(x)+f(2-x) = 4 = 2 \times 2$, $\forall x \neq 1$. Donc le point de coordonnées $(1, 2)$ est un centre de symétrie du graphe de f.

Question 348
Soit $f(x) = (-1)^{E(x)}$, où $E(x)$ est la partie entière de x. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] f est périodique de période 1.
- ☐ [Vrai] f est périodique de période 2.
- ☐ [Faux] f est une fonction paire.
- ☐ [Vrai] f est bornée.

Explications: $|f(x)| = 1$, donc f est bornée.
$\forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$, $E(x+n) = E(x)+n$. On déduit que $f(x+1) = -f(x)$ et $f(x+2) = f(x)$, donc f est de période 2.
On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $E(x) \leqslant x < E(x)+1$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $-E(x)-1 < -x \leqslant -E(x)$, on déduit que : $E(-x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -E(x)-1, & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$. Il en découle : $f(-x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -f(x), & \text{si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$. Donc f n'est ni paire ni impaire.

Question 349
Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Le domaine de définition de f est $]-\infty, 0]\cup]1, +\infty[$.

- ☐ [Faux] $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
- ☐ [Vrai] $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
- ☐ [Vrai] $y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote en $-\infty$.

Explications: f est définie si $x \neq 1$ et $\frac{x}{x-1} \geqslant 0$. On déduit que le domaine de définition de f est $]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$.
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{\frac{x}{x-1}}-1) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(x-1)(\sqrt{\frac{x}{x-1}}+1)} = \frac{1}{2}$. Donc $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$, $\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x) = \lim_{x\to-\infty} x(1-\sqrt{\frac{x}{x-1}}) = -\frac{1}{2}$. Donc $y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de f en $-\infty$.

Question 350
Soit $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Le domaine de définition de f est $[-1, 1]$.
- ☐ [Faux] f est croissante sur $[-1, 1]$.
- ☐ [Faux] f établit une bijection de $[0, 1]$ dans $[1, \sqrt{2}]$.
- ☐ [Vrai] f établit une bijection de $[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ dans $[-1, \sqrt{2}]$.

Explications: f est définie sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$ et $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. En étudiant les variations de f, on déduit que f établit une bijection de $[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ dans $[-1, \sqrt{2}]$ et de $[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1]$ dans $[1, \sqrt{2}]$.

12.3 Fonctions usuelles | Difficile | 126.00

12.3.1 Equations

Question 351
Soit (E) l'équation : $x^x = (\sqrt{x})^{x+1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Le domaine de définition de (E) est $]0, +\infty[$.
- ☐ [Faux] (E) n'admet pas de solution.
- ☐ [Faux] (E) admet deux solutions distinctes.
- ☐ [Vrai] (E) admet une unique solution.

Explications: (E) est définie si $x > 0$.
Soit $x > 0$, alors $(E) \Leftrightarrow x \ln x = \frac{1}{2}(x+1)\ln x \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Question 352
Soit (S) le système d'équations : $\begin{cases} 2^x & = & y^2 \\ 2^{x+1} & = & y^{2+x} \end{cases}$. On note E l'ensemble des (x, y) qui vérifient (S). Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] (S) est défini pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
- ☐ [Faux] Le cardinal de E est 1.

- ☐ [Vrai] Le cardinal de E est 2.
- ☐ [Faux] Le cardinal de E est 4.

Explications: (S) est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, $(S) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2^{\frac{x}{2}} \\ 2^{x+1} & = & 2^{x+\frac{x^2}{2}} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & 2^{\frac{x}{2}} \\ x^2 & = & 2 \end{array} \right.$.
Donc $E = \{(\sqrt{2}, \sqrt{2}^{\sqrt{2}}); (-\sqrt{2}, \sqrt{2}^{-\sqrt{2}})\}$ et donc le cardinal de E est 2.

Question 353
Soit (E) l'équation : $\cos 2x = \sin x$. on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E). Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] Le domaine de définition de (E) est $\mathbb{R}$.
- ☐ [Faux] $\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ [Faux] $\mathscr{S} = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- ☐ [Faux] $\mathscr{S} = \{-\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Explications: $(E) \Leftrightarrow \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - x) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z};\ 2x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \,\text{ou}\, 2x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z};\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \,\text{ou}\, x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$.
Donc $\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

12.3.2 Fonctions circulaires réciproques

Question 354
Soit f une fonction définie par l'équation (E) : $\arcsin f(x) + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$. on notera D_f le domaine de définition de f. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $D_f = [-1, 1]$
- ☐ [Faux] $\forall x \in [-1, 1], f(x) = -\sqrt{1-x^2}$
- ☐ [Vrai] $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sqrt{1-x^2}$
- ☐ [Vrai] f est une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$.

Explications:
la fonction $x \to \arcsin x$ est définie sur $[-1, 1]$ et prend ses valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si $-1 \leqslant x < 0$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x < 0$ et si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$. On déduit que f n'est pas définie si $-1 \leqslant x < 0$.
Soit $x \in [0, 1]$, on a : $(E) \Rightarrow f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - \arcsin x) = \cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Or $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et la fonction cosinus est positive sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $(E) \Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Réciproquement, on considère la fonction g définie sur $[0, 1]$ par : $g(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$. g est dérivable sur $]0, 1[$ et $g'(x) = 0$. Comme g est continue sur $[0, 1]$, g est constante sur cet intervalle et en identifiant en 0, on obtient $g(x) = \frac{\pi}{2}$, pour tout $x \in [0, 1]$. On déduit que $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, pour tout $x \in [0, 1]$.
Soit $x, y \in [0, 1]$, on a : $y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{1-y^2}$. Donc f est une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ et $f^{-1} = f$.

Question 355
Soit $f(x) = \arcsin(\frac{2x}{1+x^2})$. On notera D_f le domaine de définition de f. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $D_f = [-1, 1]$
- ☐ [Vrai] $D_f = \mathbb{R}$
- ☐ [Vrai] Si $x \in [-1, 1]$, $f(x) = 2\arctan x$
- ☐ [Vrai] Si $x \geqslant 1$, $f(x) = -2\arctan x + \pi$

Explications: f est définie si $-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1$, c'est-à-dire $-1 - x^2 \leqslant 2x \leqslant 1 + x^2$, ce qui revient à : $(x+1)^2 \geqslant 0$ et $(x-1)^2 \geqslant 0$, ce qui est le cas pour tout $x \in \mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ et $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} = \begin{cases} \frac{2}{1+x^2}, & \text{si } -1 < x < 1 \\ -\frac{2}{1+x^2}, & \text{si } x > 1 \text{ ou } x < -1 \end{cases}$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on déduit que : $f(x) = \begin{cases} 2\arctan x + c_1, & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -2\arctan x + c_2, & \text{si } x \leqslant -1 \\ -2\arctan x + c_3, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$, où c_1, c_2 et c_3 sont des constantes. En identifiant en 0, en $-\infty$ et en $+\infty$, on obtient : $f(x) = \begin{cases} 2\arctan x, & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -2\arctan x - \pi, & \text{si } x \leqslant -1 \\ -2\arctan x + \pi, & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$.

Question 356
Soit $f(x) = \arccos(\frac{1-x^2}{1+x^2})$. On notera D_f le domaine de définition de f. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $D_f = \mathbb{R}$
- ☐ [Faux] $D_f = [-1, 1]$
- ☐ [Vrai] $f(x) = 2\arctan x + 2\pi$, $\forall x \leqslant 0$
- ☐ [Vrai] $f(x) = -2\arctan |x| + 2\pi$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Explications: f est définie si $-1 \leqslant \frac{1-x^2}{1+x^2} \leqslant 1$, ce qui est le cas pour tout $x \in \mathbb{R}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = -\frac{2x}{|x|(1+x^2)} = \begin{cases} -\frac{2}{1+x^2}, & \text{si } x > 0 \\ \frac{2}{1+x^2}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, on déduit que : $f(x) = \begin{cases} -2\arctan x + c_1, & \text{si } x \geqslant 0 \\ 2\arctan x + c_2, & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$, où c_1 et c_2 sont des constantes. En identifiant en $+\infty$ et en $-\infty$, on obtient : $f(x) = \begin{cases} -2\arctan x + 2\pi, & \text{si } x \geqslant 0 \\ 2\arctan x + 2\pi, & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$. Donc $f(x) = -2\arctan |x| + 2\pi$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

12.3.3 Etude de foncions

Question 357
Soit $f(x) = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$. On notera D_f le domaine de définition de f. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $D_f = [-1, 1]$
- ☐ [Faux] $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2x$
- ☐ [Vrai] $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, 0]$, $f(x) = 0$
- ☐ [Vrai] $\forall x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$, $f(x) = -\pi - 2x$

Explications: $D_f = \mathbb{R}$. f est périodique de période 2π. En simplifiant f sur $[-\pi, \pi]$, on obtient :
$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \pi, & \text{si } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi \\ 0, & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0 \\ -\pi - 2x, & \text{si } -\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2} \end{cases}.$$

Question 358

Soit $f(x) = \exp(\frac{\ln^2|x|}{\ln^2|x|+1})$. On notera D_f le domaine de définition de f. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $D_f =]0, +\infty[$
- ☐ [Vrai] f est paire.
- ☐ [Faux] f est croissante sur $]0, +\infty[$.
- ☐ [Vrai] f est une bijection de $]0, 1]$ dans $[1, e[$.

Explications: $D_f = \mathbb{R}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = f(x)$, donc f est paire.
f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$. Si $x > 0$, $f'(x) = \frac{2\ln x}{x(\ln^2 x+1)^2} f(x)$. En étudiant les variations de f, on déduit que f est n'est pas monotone sur $]0, +\infty[$ et qu'elle établit une bijection de $]0, 1]$ dans $[1, e[$ et de $[1, +\infty[$ dans $[1, e[$.

Question 359

Soit $f(x) = x^x(1-x)^{1-x}$. On notera D_f le domaine de définition de f. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Vrai] $D_f =]0, 1[$
- ☐ [Vrai] L'ensemble des valeurs de f est $[\frac{1}{2}, 1[$.
- ☐ [Faux] f est croissante $]0, 1[$.
- ☐ [Vrai] f est une bijection de $[\frac{1}{2}, 1[$ dans $[\frac{1}{2}, 1[$.

Explications: Par définition, $f(x) = \exp[x \ln x + (1-x)\ln(1-x)]$, on déduit que $D_f =]0, 1[$. f est dérivable sur $]0, 1[$ et $f'(x) = \ln(\frac{x}{1-x}) f(x)$. En étudiant les variations de f, f n'est pas monotone sur $]0, 1[$. Elle établit une bijection de $]0, \frac{1}{2}]$ dans $[\frac{1}{2}, 1[$ et de $[\frac{1}{2}, 1[$ dans $[\frac{1}{2}, 1[$.

Question 360

Soit $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ [Faux] $D_f =]0, +\infty[$
- ☐ [Vrai] $\forall x > 0, 1 < f(x) < e$
- ☐ [Faux] $\forall x > 0, f(x) > e$
- ☐ [Vrai] $\forall x < -1, f(x) > e$

Explications: Par définition, $f(x) = \exp[x \ln(1+\frac{1}{x})]$, on déduit que f est définie si $x \in]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.
f est dérivable sur son domaine de définition et $f'(x) = [\ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}] f(x)$. En étudiant les variations de la fonction $x \mapsto \ln(1 + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x+1}$, on déduit les variations de f. En particulier, f est croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]0, +\infty[$, $f(]-\infty, -1[) =]e, +\infty[$ et $f(]0, +\infty[) =]1, e[$.