Année 2017

QCM de mathématiques

QCM de révisions (Arnaud)

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

Logique

Question 1. Soit l'équation $E : x^n = 27$.

- ☐ [Faux] E a une unique solution réelle quel que soit $n \geqslant 1$.
- ☐ [Vrai] E a au moins une solution réelle quel que soit $n \geqslant 1$.
- ☐ [Faux] E a n solutions réelles quel que soit $n \geqslant 1$.
- ☐ [Vrai] E a au moins n solutions complexes quel que soit $n \geqslant 1$.
- ☐ [Vrai] E a exactement n solutions complexes quel que soit $n \geqslant 1$.

Question 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 + 1$.

- ☐ [Faux] f est injective.
- ☐ [Vrai] f n'est pas injective.
- ☐ [Faux] f est surjective.
- ☐ [Vrai] f n'est pas surjective.
- ☐ [Vrai] La restriction de f, $f_| : [1,2] \to [2,5]$ est bijective.

Question 3. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2 + 1$.

- ☐ [Faux] f est injective.
- ☐ [Vrai] f n'est pas injective.
- ☐ [Vrai] f est surjective.
- ☐ [Faux] f n'est pas surjective.
- ☐ [Vrai] La restriction de f, $f_| : [1,2] \to [2,5]$ est bijective.

Question 4. Pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $z = x + iy$, on pose $e^z = e^x \times e^{iy} = e^{x+iy}$.

- ☐ [Vrai] $|e^z| = e^x$.
- ☐ [Faux] $|e^z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

- ☐ [Vrai] $\operatorname{Arg} e^z = y$.
- ☐ [Faux] $\operatorname{Arg} e^z = x + y$.
- ☐ [Faux] La fonction $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto e^z$ est injective.

Question 5. Par quoi peut on compléter les pointillés pour que les **deux** assertions suivantes soient vraies :

$$z \in \mathbb{C} \quad z = \overline{z} \ldots\ldots z \in \mathbb{R} \quad ; \quad z \in \mathbb{C} \quad z^3 = -1 \ldots\ldots z = -1$$

- ☐ [Vrai] $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$.
- ☐ [Faux] $\Longleftrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$.
- ☐ [Faux] $\Longleftarrow$ et $\Longleftrightarrow$.
- ☐ [Faux] $\Longrightarrow$ et $\Longrightarrow$.
- ☐ [Vrai] $\Longleftrightarrow$ et $\Longleftarrow$.

Question 6. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

- ☐ [Faux] $\exists N > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad (n \geqslant N \implies x_n \geqslant 0)$.
- ☐ [Faux] $\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \qquad x_n \leqslant \varepsilon$.
- ☐ [Vrai] $\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \exists n \geqslant N \qquad x_n < 0$.
- ☐ [Faux] $\exists n \in \mathbb{N}^* \qquad x_n = 0$.
- ☐ [Vrai] $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \in \mathbb{N}^* \ \ \forall n \in \mathbb{N}^* \ \ (n \geqslant N \implies |x_n| \leqslant \varepsilon)$.

Question 7. Soit E un ensemble, $A, B \subset E$, soit $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Les assertions suivantes sont-elles vraies quels que soient A et B inclus dans E ?

- ☐ [Vrai] $A\Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
- ☐ [Faux] $A\Delta B = (E \setminus A) \cap (E \setminus B)$.
- ☐ [Faux] Si $B \subset A$ alors $A\Delta B = A$.
- ☐ [Vrai] Si E est un ensemble fini, $\operatorname{Card}(A\Delta B) \leqslant \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.
- ☐ [Faux] Si E est un ensemble fini, $\operatorname{Card}(A\Delta B) < \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.

Question 8. Soit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 1$ puis pour $n \geqslant 1$ $x_n = \frac{x_{n-1}}{n}$.

- ☐ [Vrai] $\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n > 0$.
- ☐ [Vrai] $\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} \leqslant x_n$.
- ☐ [Faux] $\exists N \in \mathbb{N} \quad \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies x_n = c)$.
- ☐ [Faux] $\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n \geqslant \frac{1}{2}\frac{1}{n!}$.
- ☐ [Faux] $\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_n \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{n!}$.

Question 9. On lance de façon aléatoire deux dés identiques à 6 faces (numérotées de 1 à 6). On ne tient pas compte de l'ordre, par exemple le tirage 1 puis 5 est le même que 5 puis 1, mais les tirages 3 puis 3, et 3 puis 4 sont distincts.

- ☐ [Faux] Il y a 36 tirages distincts possibles.
- ☐ [Vrai] Il y a 30 tirages distincts possibles.
- ☐ [Faux] Il y a 21 tirages distincts possibles.
- ☐ [Vrai] La somme des deux chiffres a strictement plus de chances d'être 7 que 2.
- ☐ [Faux] La somme des deux chiffres a strictement plus de chances d'être $\geqslant 11$ que $\leqslant 3$.

Question 10. Soit E un ensemble fini de cardinal n, soit $A \subset E$ un ensemble à p éléments, et $B \subset E$ un ensemble à q éléments. On note $\mathcal{S} = \{(a,b) \in A \times B \mid a \neq b\}$ et $\mathcal{T} = \{(I,b) \text{ avec } I \subset A \mid \operatorname{Card} I = r \text{ et } b \in B\}$.

- ☐ [Faux] Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\operatorname{Card}\mathcal{S} = p + q$.
- ☐ [Vrai] Si $A \cap B = \emptyset$ alors $\operatorname{Card}\mathcal{S} = pq$.
- ☐ [Faux] Si $A \subset B$ alors $\mathcal{S} = \emptyset$.
- ☐ [Faux] $\operatorname{Card}\mathcal{T} = C_n^p \times r$.
- ☐ [Vrai] $\operatorname{Card}\mathcal{T} = C_p^r \times q$.

Arithmétique

Question 11. Les propositions suivantes sont-elles vraies quels que soient $\ell \geqslant 2$ et $p_1, \ldots, p_\ell$ des nombres premiers > 2 ?

- ☐ [Faux] $p_1 p_2 \ldots p_\ell$ est un nombre premier.
- ☐ [Faux] Le carré de p_1 est un nombre premier.
- ☐ [Faux] $p_1 p_2 \ldots p_\ell + 1$ est un nombre premier.
- ☐ [Vrai] $\prod_{i=1}^{\ell} p_i$ est un nombre impair.
- ☐ [Faux] $\sum_{i=1}^{\ell} p_i$ est un nombre impair.

Question 12. ☐ [Vrai] Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier, alors $(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$ est divisible par 24.

- ☐ [Faux] Soit $n \geqslant 6$ un entier pair alors $\frac{n}{2}$ est impair.
- ☐ [Vrai] La somme et le produit de deux nombres pairs est un nombre pair.
- ☐ [Faux] $a|b$ et $a'|b' \quad \Longrightarrow \quad aa'|bb'$.
- ☐ [Faux] $a|b$ et $a'|b' \quad \Longrightarrow \quad a + a'|b + b'$.

Question 13. ☐ [Vrai] Le pgcd de 924, 441 et 504 est 21.

- ☐ [Faux] 627 et 308 sont premiers entre eux.
- ☐ [Faux] Si $p \geqslant 3$ est premier, alors $p!$ est premier.
- ☐ [Vrai] Soit $n \geqslant 2$ alors n et $n+1$ sont premiers entre eux.
- ☐ [Vrai] Soit $n \geqslant 2$ un entier, le pgcd de $\{in^i \text{ pour } i = 1, \ldots, 100\}$ est n.

Question 14. Soient $a, b, c \geqslant 1$ des entiers.

- ☐ [Vrai] $ab = \mathrm{pgcd}(a, b) \times \mathrm{ppcm}(a, b)$.
- ☐ [Faux] $abc = \mathrm{pgcd}(a, b, c) \times \mathrm{ppcm}(a, b, c)$.
- ☐ [Vrai] $\mathrm{ppcm}(a, b, c)$ est divisible par c.
- ☐ [Faux] $\mathrm{ppcm}(1932, 345) = 19320$.
- ☐ [Faux] $\mathrm{ppcm}(5, 10, 15) = 15$.

Question 15. ☐ [Faux] Soit $a, b, c \geqslant 1$ des entiers. Si $a|bc$ et a ne divise pas b alors $a|c$.

- ☐ [Vrai] Sachant que 7 divise 86419746×111 alors 7 divise 86419746.
- ☐ [Vrai] Si $a = bq+r$ est la division euclidienne de a par b alors $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, r)$.
- ☐ [Vrai] Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $195u + 2380v = 5$.
- ☐ [Faux] Sachant qu'il existe u, v tels que $2431u+65520v = 39$ alors $\mathrm{pgcd}(2431, 65520) = 39$.

Question 16. ☐ [Vrai] $\exists P \in \mathbb{Z}[X] \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad P(x) > 0$.

- ☐ [Faux] $\forall P \in \mathbb{Z}[X] \quad \exists x \in \mathbb{R} \qquad |P(x)| < 1$.
- ☐ [Vrai] $\forall P \in \mathbb{Q}[X] \qquad x \in \mathbb{Q} \implies P(x) \in \mathbb{Q}$.
- ☐ [Vrai] $\forall P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $\geqslant 1 \quad \exists z \in \mathbb{C} \qquad P(z) = 0$.
- ☐ [Faux] Tout polynôme de degré 2 ne s'annulant pas, prend uniquement des valeurs positives.

Question 17. Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ des polynômes non nuls $P = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, soit $I_P = \{i \in \mathbb{N} \mid a_i \neq 0\}$, soit $\mathrm{val}(P) = \min I_P$.

- ☐ [Vrai] $\mathrm{val}(-X^7 + X^3 + 7X^2) = 2$.
- ☐ [Vrai] $\mathrm{val}(P + Q) \geqslant \mathrm{val}(P)$.
- ☐ [Vrai] $\mathrm{val}(P \times Q) \geqslant \mathrm{val}(P) + \mathrm{val}(Q)$.
- ☐ [Faux] $\mathrm{val}(k.P) = k \cdot \mathrm{val}(P)$ où $k \in \mathbb{N}^*$.
- ☐ [Vrai] Si $Q|P$ alors $\mathrm{val}(P/Q) = \mathrm{val}(P) - \mathrm{val}(Q)$.

Question 18. ☐ [Vrai] $X^4 + X^3 - X^2 - X$ est divisible par $X(X - 1)$.

- ☐ [Faux] Le reste la division euclidienne de $X^3 + X^2 + 3$ par $X - 1$ est $X + 4$.
- ☐ [Vrai] Le quotient de $X^5 + 2X^3 + X^2 + 2X + 1$ par $X^2 + 1$ est $X^3 + X + 1$.
- ☐ [Vrai] $X - 1$ divise $X^n - 1$ pour $n \geqslant 1$.
- ☐ [Faux] $X + 1$ divise $X^n + 1$ pour $n \geqslant 1$.

Question 19. ☐ [Vrai] Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. $X - a$ divise P ssi $P(a) = 0$.

- ☐ [Vrai] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) = 0$.
- ☐ [Vrai] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, les racines de P^2 sont d'ordre au moins 2.

- ☐ [Faux] Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, x est racine simple ssi $P(x) = 0$.
- ☐ [Faux] Un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n a n racines réelles.

Question 20. ☐ [Faux] $X^4 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

- ☐ [Vrai] $X^2 + 7$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
- ☐ [Faux] $X^2 + 7$ est irréductible dans $\mathbb{C}[X]$.
- ☐ [Faux] Dans $\mathbb{Z}[X]$, $\mathrm{pgcd}(X(X-1)^2(X^2+1), X^2(X-1)(X^2-1)) = X(X-1)$.
- ☐ [Vrai] Dans $\mathbb{Z}[X]$, $\mathrm{pgcd}(X^4 + X^3 + X^2 + X, X^3 - X^2 - X + 1) = X + 1$.

Réels

Question 21. Réel et rationnels

- ☐ [Vrai] $(x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}) \implies x + y \in \mathbb{Q}$
- ☐ [Faux] $(x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \implies x + y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- ☐ [Vrai] $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad \forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \qquad x < y \implies (\exists z \in \mathbb{Q} \quad x < z < y)$
- ☐ [Vrai] $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \quad (\forall y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \qquad x < y \implies (\exists z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad x < z < y)$
- ☐ [Faux] Pour $n \geqslant 3$, n impair $\implies \sqrt{n} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Question 22. Soient A, B, C des parties de $\mathbb{R}$

- ☐ [Faux] Si $\sup A$ existe alors $\max A$ existe.
- ☐ [Vrai] Si $\max A$ existe alors $\sup A$ existe.
- ☐ [Vrai] Pour A, B majorées et $C \subset A \cap B$ alors $\sup C \leqslant \sup A$ et $\sup C \leqslant \sup B$.
- ☐ [Faux] Si $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} + 1 \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$ alors $\inf A = 0$ et $\sup A = 1$.
- ☐ [Vrai] Si $B = \left\{ \frac{E(x)}{x} \, | x > 0 \right\}$ alors $\inf B = 0$ et $\sup B = 1$.

Question 23. Limites de suites

- ☐ [Vrai] Si $u_n = n \sin(\frac{1}{n})$ alors (u_n) tend vers 1.
- ☐ [Faux] Si $u_n = \ln(\ln(n))$ alors (u_n) a une limite finie.
- ☐ [Faux] $u_n = \frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$ alors (u_n) tend vers $+\infty$.
- ☐ [Faux] $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ alors (u_n) diverge.
- ☐ [Vrai] $u_n = \sin(n)$, il existe une sous-suite de (u_n) convergente.

Question 24. Suites définies par récurrence. Soit $f(x) = 2x(1-x)$ et la suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

- ☐ [Vrai] $\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n \in [0,1]$.
- ☐ [Faux] Quelque soit u_0 dans $[0,1]$, (u_n) est monotone.
- ☐ [Faux] Si (u_n) converge vers ℓ alors $\ell = 0$ ou $\ell = 1$.

- ☐ [Vrai] Si (u_n) converge vers ℓ alors $\ell = 0$ ou $\ell = \frac{1}{2}$.
- ☐ [Vrai] $u_0 \in]0,1[$ alors (u_n) ne converge pas vers 0.

Question 25. Fonctions continues

- ☐ [Faux] La somme, le produit et le quotient de deux fonctions continues est continue.
- ☐ [Vrai] La fonction $\sqrt{\sqrt{x}}\ln x$ est prolongeable par continuité en 0.
- ☐ [Faux] Il existe $a, b \geqslant 0$ tels que fonction définie par $f(x) = -e^x$ si $x < 0$ et $f(x) = ax^2 + b$ si $x \geqslant 0$ soit continue.
- ☐ [Faux] Toute fonction impaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est continue en 0.
- ☐ [Faux] La fonction $\frac{\sqrt{|x|}}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.

Question 26. Théorème des valeurs intermédiaires, fonctions bornées

- ☐ [Vrai] La méthode de dichotomie est basée sur le théorème des valeurs intermédiaires.
- ☐ [Faux] Tout polynôme de degré $\geqslant 3$ a au moins une racine réelle.
- ☐ [Faux] La fonction $f(x) = \frac{1}{x^3(x^2+1)}$ admet au moins une racine réelle dans $]-1,+1[$.
- ☐ [Vrai] Pour $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$, f est bornée.
- ☐ [Faux] Pour $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie qui vaut $f(0)$ en $+\infty$ alors f est bornée et atteint ses bornes.

Question 27. Dérivation

- ☐ [Faux] La fonction $f(x) = 1/x$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
- ☐ [Vrai] La fonction $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ est continue et dérivable en 0.
- ☐ [Vrai] La fonction définie par $x \mapsto 0$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $x \mapsto x^2$ si $x \notin \mathbb{Q}$ est dérivable en 0.
- ☐ [Vrai] Si $f(x) = P(x)e^x$ avec P un polynôme alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe un polynôme Q_n tel que $f^{(n)}(x) = Q_n(x)e^x$.
- ☐ [Faux] Si $f(x) = \sqrt{x}\ln x$ si $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(0) = 0$ alors f est dérivable en 0.

Question 28. Théorème de Rolle et des accroissements finis

- ☐ [Faux] Si f est dérivable sur $[a,b]$ avec $f(a) = f(b)$ il existe un unique $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.
- ☐ [Vrai] Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et $f'(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.
- ☐ [Faux] Soit $f(x) = \ln x$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$. Pour $x > 0$ il existe $c \in]0,x[$ tel que $\ln x = \frac{x}{c}$.
- ☐ [Vrai] Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\lim f(x) = +1$ quand $x \to +\infty$ et $\lim f(x) = +1$ quand $x \to -\infty$ alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.
- ☐ [Vrai] $\forall x > 0$ $e^x \leqslant xe^x + 1$.

Question 29. Fonctions usuelles

- ☐ [Vrai] $\forall n \in \mathbb{N}\ \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.
- ☐ [Vrai] $\forall x \in \mathbb{R}\ \operatorname{ch} x \geqslant \operatorname{sh} x$.
- ☐ [Vrai] $\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.
- ☐ [Vrai] $\operatorname{ch} 2x = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x$.
- ☐ [Faux] $\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \operatorname{th} b}$.

Question 30. Fonctions réciproques

- ☐ [Faux] Un fonction continue $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement décroissante est bijective.
- ☐ [Vrai] Si f est une fonction continue bijective croissante alors f^{-1} est croissante.
- ☐ [Faux] Si f est une fonction continue bijective ne s'annulant jamais alors $(\frac{1}{f})^{-1} = f$.
- ☐ [Faux] $\arcsin(\sin x) = x$ pour tout $x \in [0, 2\pi[$.
- ☐ [Faux] Si $f(x) = \arctan(x^2)$ alors $f'(x) = \frac{1}{1+x^4}$.