Année 2018

QCM DE MATHÉMATIQUES

Répondre en cochant la ou les cases correspondant à des assertions vraies (et seulement celles-ci).

Ces questions ont été écrites par Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari de l'université de Lille.

Ce travail a été effectué dans le cadre d'un projet Liscinum porté par l'université de Lille et Unisciel.

Table des matières

Première partie

Algèbre

Logique – Raisonnement

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

1 Logique – Raisonnement | 100

Cours ● Logique et raisonnements
Vidéo ■ Logique
Vidéo ■ Raisonnements
Fiche d'exercices ♦ Logique, ensembles, raisonnements

1.1 Logique | Facile | 100.01

Question 1
Soit P une assertion vraie et Q une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ P ou Q
- ☐ P et Q
- ☐ non(P) ou Q
- ☐ non$(P$ et $Q)$

Question 2
Par quoi peut-on compléter les pointillés pour avoir les deux assertions vraies ?

$$x \geqslant 2 \quad \ldots \quad x^2 \geqslant 4 \qquad\qquad |y| \leqslant 3 \quad \ldots \quad 0 \leqslant y \leqslant 3$$

- ☐ $\Longleftarrow$ et $\Longrightarrow$
- ☐ $\Longrightarrow$ et $\Longrightarrow$
- ☐ $\Longleftarrow$ et $\Longrightarrow$
- ☐ $\Longrightarrow$ et $\Longleftarrow$

Question 3
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x \geqslant 0$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 - n \geqslant 0$
- ☐ $\forall x \in \mathbb{R} \quad |x^3 - x| \geqslant 0$

☐ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \quad n^2 - 3 \geqslant 0$

Question 4
Quelles sont les assertions vraies ?

☐ $\exists x > 0 \quad \sqrt{x} = x$
☐ $\exists x < 0 \quad \exp(x) < 0$
☐ $\exists n \in \mathbb{N} \quad n^2 = 17$
☐ $\exists z \in \mathbb{C} \quad z^2 = -4$

Question 5
Un groupe de coureurs C chronomètre ses temps : $t(c)$ désigne le temps (en secondes) du coureur c. Dans ce groupe Valentin et Chloé ont réalisé le meilleur temps de 47 secondes. Tom est déçu car il est arrivé troisième, avec un temps de 55 secondes. À partir de ces informations, quelles sont les assertions dont on peut déduire qu'elles sont vraies ?

☐ $\forall c \in C \quad t(c) \geqslant 47$
☐ $\exists c \in C \quad 47 < t(c) < 55$
☐ $\exists c \in C \quad t(c) > 47$
☐ $\forall c \in C \quad t(c) \leqslant 55$

Question 6
Quelles sont les assertions vraies ?

☐ La négation de "$\forall x > 0 \quad \ln(x) \leqslant x$" est "$\exists x \leqslant 0 \quad \ln(x) \leqslant x$".
☐ La négation de "$\exists x > 0 \quad \ln(x^2) \neq x$" est "$\forall x > 0 \quad \ln(x^2) = x$".
☐ La négation de "$\forall x \geqslant 0 \quad \exp(x) \geqslant x$" est "$\exists x \geqslant 0 \quad \exp(x) \leqslant x$".
☐ La négation de "$\exists x > 0 \quad \exp(x) > x$" est "$\forall x > 0 \quad \exp(x) < x$".

1.2 Logique | Moyen | 100.01

Question 7
Soit P une assertion fausse, Q une assertion vraie et R une assertion fausse. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ Q et (P ou R)
☐ P ou (Q et R)
☐ non(P et Q et R)
☐ (P ou Q) et (Q ou R)

Question 8

Soient P et Q deux assertions. Quelles sont les assertions toujours vraies (que P et Q soient vraies ou fausses) ?

- ☐ P et non(P)
- ☐ non(P) ou P
- ☐ non(Q) ou P
- ☐ $(P$ ou $Q)$ ou $(P$ ou non$(Q))$

Question 9

Par quoi peut-on compléter les pointillés pour avoir une assertion vraie ?

$$|x^2| < 5 \quad \ldots \quad -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$$

- ☐ $\Longleftarrow$
- ☐ $\Longrightarrow$
- ☐ $\Longleftrightarrow$
- ☐ Aucune des réponses ci-dessus ne convient.

Question 10

À quoi est équivalent $P \implies Q$?

- ☐ non(P) ou non(Q)
- ☐ non(P) et non(Q)
- ☐ non(P) ou Q
- ☐ P et non(Q)

Question 11

Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall x \in]0,+\infty[\quad \exists y \in \mathbb{R} \qquad y = f(x)$
- ☐ $\exists x \in]0,+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad y = f(x)$
- ☐ $\exists x \in]0,+\infty[\quad \exists y \in \mathbb{R} \qquad y = f(x)$
- ☐ $\forall x \in]0,+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad y = f(x)$

Question 12

Le disque centré à l'origine de rayon 1 est défini par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall x \in [-1,1] \quad \forall y \in [-1,1] \qquad (x,y) \in D$
- ☐ $\exists x \in [-1,1] \quad \exists y \in [-1,1] \qquad (x,y) \in D$
- ☐ $\exists x \in [-1,1] \quad \forall y \in [-1,1] \qquad (x,y) \in D$
- ☐ $\forall x \in [-1,1] \quad \exists y \in [-1,1] \qquad (x,y) \in D$

1.3 Logique | Difficile | 100.01

Question 13
On définit l'assertion "ou exclusif", noté "xou" en disant que "P xou Q" est vraie lorsque P est vraie, ou Q est vraie, mais pas lorsque les deux sont vraies en même temps. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si "P ou Q" est vraie alors "P xou Q" aussi.
- ☐ Si "P ou Q" est fausse alors "P xou Q" aussi.
- ☐ "P xou Q" est équivalent à "(P ou Q) et (non(P) ou non(Q))"
- ☐ "P xou Q" est équivalent à "(P ou Q) ou (non(P) ou non(Q))"

Question 14
Soient P et Q deux assertions. Quelles sont les assertions toujours vraies (que P, Q soient vraies ou fausses) ?

- ☐ $(P \implies Q)$ ou $(Q \implies P)$
- ☐ $(P \implies Q)$ ou (P et non(Q))
- ☐ P ou $(P \implies Q)$
- ☐ $(P \iff Q)$ ou $(\text{non}(P) \iff \text{non}(Q))$

Question 15
À quoi est équivalent $P \Longleftarrow Q$?

- ☐ non(Q) ou P
- ☐ non(Q) et P
- ☐ non(P) ou Q
- ☐ non(P) et Q

Question 16
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \exp(x) - 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall x, x' \in \mathbb{R} \qquad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$
- ☐ $\forall x, x' \in \mathbb{R} \qquad x \neq x' \Longleftarrow f(x) \neq f(x')$
- ☐ $\forall x, x' \in \mathbb{R} \qquad x \neq x' \implies (\exists y \in \mathbb{R} \quad f(x) < y < f(x'))$
- ☐ $\forall x, x' \in \mathbb{R} \qquad f(x) \times f(x') < 0 \implies x \times x' < 0$

Question 17
On considère l'ensemble

$$E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ et } y \geqslant \sqrt{x}\right\}.$$

Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall y \geqslant 0 \quad \exists x \in [0,1] \qquad (x, y) \in E$
- ☐ $\exists y \geqslant 0 \quad \forall x \in [0,1] \qquad (x, y) \in E$

- ☐ $\forall x \in [0,1] \quad \exists y \geqslant 0 \qquad (x,y) \notin E$
- ☐ $\forall x \in [0,1] \quad \forall y \geqslant 0 \qquad (x,y) \notin E$

Question 18
Soit $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ une fonction. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La négation de "$\forall x > 0 \quad \exists y > 0 \quad y \neq f(x)$" est "$\exists x > 0 \quad \exists y > 0 \quad y = f(x)$".
- ☐ La négation de "$\exists x > 0 \quad \forall y > 0 \quad y \times f(x) > 0$" est "$\forall x > 0 \quad \exists y > 0 \quad y \times f(x) < 0$".
- ☐ La négation de "$\forall x, x' > 0 \quad x \neq x' \implies f(x) \neq f(x')$" est "$\exists x, x' > 0 \quad x = x'$ et $f(x) = f(x')$".
- ☐ La négation de "$\forall x, x' > 0 \quad f(x) = f(x') \implies x = x'$" est "$\exists x, x' > 0 \quad x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$".

1.4 Raisonnement | Facile | 100.03, 100.04

Question 19
Je veux montrer que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier, quelque soit $n \in \mathbb{N}$. Quelles sont les démarches possibles ?

- ☐ Montrer que la fonction $x \mapsto x(x+1)$ est paire.
- ☐ Séparer le cas n pair, du cas n impair.
- ☐ Par l'absurde, supposer que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un réel, puis chercher une contradiction.
- ☐ Le résultat est faux, je cherche un contre-exemple.

Question 20
Je veux montrer par récurrence l'assertion $H_n : 2^n > 2n - 1$, pour tout entier n assez grand. Quelle étape d'initialisation est valable ?

- ☐ Je commence à $n = 0$.
- ☐ Je commence à $n = 1$.
- ☐ Je commence à $n = 2$.
- ☐ Je commence à $n = 3$.

Question 21
Je veux montrer par récurrence l'assertion $H_n : 2^n > 2n - 1$, pour tout entier n assez grand. Pour l'étape d'hérédité je suppose H_n vraie, quelle(s) inégalité(s) dois-je maintenant démontrer ?

- ☐ $2^{n+1} > 2n + 1$
- ☐ $2^n > 2n - 1$
- ☐ $2^n > 2(n+1) - 1$
- ☐ $2^n + 1 > 2(n+1) - 1$

Question 22
Chercher un contre-exemple à une assertion du type "$\forall x \in E$ l'assertion $P(x)$ est vraie" revient à prouver l'assertion :

- ☐ $\exists! x \in E \quad$ l'assertion $P(x)$ est fausse.
- ☐ $\exists x \in E \quad$ l'assertion $P(x)$ est fausse.
- ☐ $\forall x \notin E \quad$ l'assertion $P(x)$ est fausse.
- ☐ $\forall x \in E \quad$ l'assertion $P(x)$ est fausse.

1.5 Raisonnement | Moyen | 100.03, 100.04

Question 23
J'effectue le raisonnement suivant avec deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \times g(x) = 0$$

$$\implies \forall x \in \mathbb{R} \quad \big(f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0\big)$$

$$\implies \big(\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0\big) \text{ ou } \big(\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 0\big)$$

- ☐ Ce raisonnement est valide.
- ☐ Ce raisonnement est faux car la première implication est fausse.
- ☐ Ce raisonnement est faux car la seconde implication est fausse.
- ☐ Ce raisonnement est faux car la première et la seconde implication sont fausses.

Question 24
Je souhaite montrer par récurrence une certaine assertion H_n, pour tout entier $n \geqslant 0$. Quels sont les débuts valables pour la rédaction de l'étape d'hérédité ?

- ☐ Je suppose H_n vraie pour tout $n \geqslant 0$, et je montre que H_{n+1} est vraie.
- ☐ Je suppose H_{n-1} vraie pour tout $n \geqslant 1$, et je montre que H_n est vraie.
- ☐ Je fixe $n \geqslant 0$, je suppose H_n vraie, et je montre que H_{n+1} est vraie.
- ☐ Je fixe $n \geqslant 0$ et je montre que H_{n+1} est vraie.

Question 25
Je veux montrer que $e^x > x$ pour tout x réel avec $x \geqslant 1$. L'initialisation est vraie pour $x = 1$, car $e^1 = 2,718\ldots > 1$. Pour l'hérédité, je suppose $e^x > x$ et je calcule :

$$e^{x+1} = e^x \times e > x \times e \geqslant x \times 2 \geqslant x + 1.$$

Je conclus par le principe de récurrence. Pour quelles raisons cette preuve n'est pas valide ?

- ☐ Car il faudrait commencer l'initialisation à $x = 0$.
- ☐ Car x est un réel.
- ☐ Car l'inégalité $e^x > x$ est fausse pour $x \leqslant 0$.
- ☐ Car la suite d'inégalités est fausse.

Question 26
Pour montrer que l'assertion "$\forall n \in \mathbb{N} \quad n^2 > 3n - 1$" est fausse, quels sont les arguments valables ?

- ☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 0$ l'inégalité est fausse.
- ☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 1$ l'inégalité est fausse.
- ☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 2$ l'inégalité est fausse.
- ☐ L'assertion est fausse, car pour $n = 1$ et $n = 2$ l'inégalité est fausse.

1.6 Raisonnement | Difficile | 100.03, 100.04

Question 27
Le raisonnement par contraposée est basé sur le fait que "$P \implies Q$" est équivalent à :

- ☐ "non(P) $\implies$ non(Q)".
- ☐ "non(Q) $\implies$ non(P)".
- ☐ "non(P) ou Q".
- ☐ "P ou non(Q)".

Question 28
Par quelle phrase puis-je remplacer la proposition logique "$P \Longleftarrow Q$" ?

- ☐ "P si Q"
- ☐ "P seulement si Q"
- ☐ "Q est une condition nécessaire pour obtenir P"
- ☐ "Q est une condition suffisante pour obtenir P"

Question 29
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La négation de "$P \implies Q$" est "non(Q) ou P"
- ☐ La réciproque de "$P \implies Q$" est "$Q \implies P$"
- ☐ La contraposée de "$P \implies Q$" est "non(P) $\implies$ non(Q)"
- ☐ L'assertion "$P \implies Q$" est équivalente à "non(P) ou non(Q)"

Question 30
Je veux montrer que $\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$ par un raisonnement par l'absurde. Quel schéma de raisonnement est adapté ?

- ☐ Je suppose que $\sqrt{13}$ est rationnel et je cherche une contradiction.
- ☐ Je suppose que $\sqrt{13}$ est irrationnel et je cherche une contradiction.

- ☐ J'écris $13 = \frac{p}{q}$ (avec p, q entiers) et je cherche une contradiction.
- ☐ J'écris $\sqrt{13} = \frac{p}{q}$ (avec p, q entiers) et je cherche une contradiction.

Ensembles, applications

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

Cours ● Ensembles et applications
Vidéo ■ Ensembles
Vidéo ■ Applications
Vidéo ■ Injection, surjection, bijection
Vidéo ■ Ensembles finis
Vidéo ■ Relation d'équivalence
Fiche d'exercices ♦ Logique, ensembles, raisonnements
Fiche d'exercices ♦ Injection, surjection, bijection
Fiche d'exercices ♦ Dénombrement

2 Ensembles, applications | 100, 101, 102

2.1 Ensembles, applications | Facile | 100.02, 101.01, 102.01, 102.02

Question 31

Soit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x+8)^2 = 9^2\}$. Sous quelle forme peut-on encore écrire l'ensemble A ?

- ☐ $A = \{1\}$
- ☐ $A = \varnothing$
- ☐ $A = \{-17\}$
- ☐ $A = \{1, -17\}$

Question 32

Soit $E = \{a, b, c\}$. Quelle écriture est correcte ?

- ☐ $\{a\} \in E$
- ☐ $a \subset E$
- ☐ $a \in E$
- ☐ $\{a, b\} \in E$

Question 33

Soit $A = \{1, 2\}$, $B = \{\{1\}, \{2\}\}$ et $C = \{\{1\}, \{1, 2\}\}$. Cochez la bonne réponse :

- ☐ $A = B$

- ☐ $A \subset B$
- ☐ $A \in C$
- ☐ $A \subset C$

Question 34

Soit $A = [1, 3]$ et $B = [2, 4]$. Quelle est l'intersection de A et B ?

- ☐ $A \cap B = \emptyset$
- ☐ $A \cap B = [2, 3]$
- ☐ $A \cap B = [1, 4]$
- ☐ $A \cap B = A$

Question 35

Soit $A = [-1, 3]$ et $B = [0, 4]$. Cochez la bonne réponse :

- ☐ $A \cup B = \emptyset$
- ☐ $A \cup B = [0, 3]$
- ☐ $A \cup B = [-1, 0]$
- ☐ $A \cup B = [-1, 4]$

Question 36

Soit $A = \{a, b, c\}$ et $B = \{1, 2\}$. Cochez la bonne réponse :

- ☐ $\{a, 1\} \in A \times B$
- ☐ $\{(a, 1)\} \in A \times B$
- ☐ $(a, 1) \in A \times B$
- ☐ $\{a, 1\} \subset A \times B$

Question 37

On désigne par C_n^k le nombre de choix de k éléments parmi n. Combien fait $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} (-1)^k \mathrm{C}_{100}^k$?

- ☐ 100
- ☐ 0
- ☐ 101
- ☐ 5000

Question 38

On désigne par C_n^k le nombre de choix de k éléments parmi n. Combien fait $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \mathrm{C}_{10}^k$?

- ☐ 10
- ☐ 100
- ☐ 1024
- ☐ 50

Question 39
On considère l'application $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4\}$ définie par

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 3, \quad f(3) = 4, \quad f(4) = 2.$$

Quelle est la bonne réponse ?

- ☐ $f^{-1}(\{2\}) = \{1\}$
- ☐ $f^{-1}(\{2\}) = \{3\}$
- ☐ $f^{-1}(\{2\}) = \{4\}$
- ☐ $f^{-1}(\{2\}) = \{1,4\}$

Question 40
On considère l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n+1.$$

Quelle est la bonne réponse ?

- ☐ f est surjective et non injective.
- ☐ f est injective et non surjective.
- ☐ f est bijective.
- ☐ f n'est ni injective ni surjective.

2.2 Ensembles, applications | Moyen | 100.02, 101.01, 102.02, 102.02

Question 41
Soit A et B deux ensembles. L'écriture $A \subsetneq B$ signifie que A est inclus dans B et que $A \neq B$. On suppose que $A \cap B = A \cup B$. Que peut-on dire de A et B ?

- ☐ $A \subsetneq B$
- ☐ $B \subsetneq A$
- ☐ $A \neq B$
- ☐ $A = B$

Question 42
Soit A une partie d'un ensemble E telle que $A \neq E$. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $A \cap \overline{A} = E$
- ☐ $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- ☐ $A \cup \overline{A} = E$
- ☐ $A \cup \overline{A} = A$

Question 43
Soient A, B deux parties d'un ensemble E. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Quelle est la bonne réponse ?

- ☐ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- ☐ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- ☐ $\overline{A \cup B} = A \cap B$
- ☐ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup B$

Question 44
Soient A, B deux parties d'un ensemble E. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Quelle est la bonne réponse ?

- ☐ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- ☐ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap B$
- ☐ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- ☐ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap B$

Question 45
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$. On note $\mathscr{P}(E_n)$ l'ensemble des parties de E_n. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\mathscr{P}(E_2) = \{\{1\}, \{2\}\}$
- ☐ $\mathscr{P}(E_2) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, E_2\}$
- ☐ $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E_n)) = n$
- ☐ $\mathrm{Card}(\mathscr{P}(E_n)) = 2^n$

Question 46
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1.$$

Quelle est la bonne réponse ?

- ☐ $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
- ☐ $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$
- ☐ $f(\mathbb{R}) =]1, +\infty[$

- ☐ $f(\mathbb{R}) = [1, +\infty[$

Question 47
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2 + 1.$$

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $f^{-1}([1,5]) = [-2,2]$
- ☐ $f^{-1}([0,5]) = [-2,2]$
- ☐ $f^{-1}([1,5]) = [0,2]$
- ☐ $f^{-1}([0,5]) = [0,2]$

Question 48
On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \cos(\pi x).$$

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $f(\{0,2\}) = \{1\}$
- ☐ $f(\{0,2\}) = \{0\}$
- ☐ $f([0,2]) = [1,1]$
- ☐ $f([0,2]) = [-1,1]$

Question 49
On considère l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^2 + y^2.$$

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $f^{-1}(\{0\}) = \{(0,0)\}$
- ☐ $f^{-1}(\{1\}) = \{(1,0)\}$
- ☐ $f^{-1}(\{0\}) = \{(0,1)\}$
- ☐ $f^{-1}(\{1\})$ est le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1

Question 50
On considère l'application $f : \mathbb{R} \setminus \{2\} \to \mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ f(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

Quelle est la bonne réponse ?

- [ ] f n'est pas bijective.
- [ ] f est bijective et $f^{-1}(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$.
- [ ] f est bijective et $f^{-1}(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$.
- [ ] f est bijective et $f^{-1}(x) = \dfrac{-x+1}{-x-2}$.

2.3 Ensembles, applications | Difficile | 100.02, 101.01, 102.01, 102.02

Question 51
Soit $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 1\}$ et $B = \{(t+1, 2t+1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Que peut-on dire de A et B ?

- [ ] $A \subsetneq B$
- [ ] $B \subsetneq A$
- [ ] $A \neq B$
- [ ] $A = B$

Question 52
Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Soient A, B deux sous-ensembles de E. Quelles sont les bonnes réponses ?

- [ ] $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
- [ ] $f(A \cup B) \subsetneq f(A) \cup f(B)$
- [ ] $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- [ ] $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

Question 53
Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Soit A un sous-ensemble de E. Quelles sont les bonnes réponses ?

- [ ] $A = f^{-1}(f(A))$
- [ ] $A \subset f^{-1}(f(A))$
- [ ] $f^{-1}(f(A)) \subset A$
- [ ] $f^{-1}(f(A)) = E \setminus A$

Question 54
Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F. Soit B un sous-ensemble de F. Quelles sont les bonnes réponses ?

- [ ] $B = f(f^{-1}(B))$
- [ ] $B \subset f(f^{-1}(B))$
- [ ] $f(f^{-1}(B)) \subset B$

☐ $f(f^{-1}(B)) = F \setminus B$

Question 55
Soit E un ensemble et $A \subset E$ avec $A \neq E$. Comment choisir $X \subset E$ de sorte que

$$A \cap X = A \quad \text{et} \quad A \cup X = E\,?$$

☐ $X = A$
☐ $X = E$
☐ $X = \varnothing$
☐ X n'existe pas

Question 56
Soit E un ensemble et $A \subset E$ avec $A \neq E$. On note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E. Comment choisir $X \subset E$ de sorte que

$$A \cap X = \varnothing \quad \text{et} \quad A \cup X = E\,?$$

☐ $X = A$
☐ $X = E$
☐ $X = \varnothing$
☐ $X = \overline{A}$

Question 57
Soit E un ensemble à n éléments et $a \in E$. On note $\mathscr{P}_a(E)$ l'ensemble des parties de E qui contiennent a. Quel est le cardinal de $\mathscr{P}_a(E)$?

☐ $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_a(E)) = n - 1$
☐ $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_a(E)) = n$
☐ $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_a(E)) = 2^{n-1}$
☐ $\mathrm{Card}(\mathscr{P}_a(E)) = 2^n$

Question 58
On note C_n^k le nombre de choix de k éléments parmi n. Combien fait $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} (-1)^k 2^{-k} \mathrm{C}_{100}^k$?

☐ 0
☐ 2^{-100}
☐ 2^{100}
☐ 100

Question 59
Soit E un ensemble à n éléments et $A \subset E$ une partie à $p < n$ éléments. On note $\mathscr{H}(E)$ l'ensemble des parties de E qui contiennent un et un seul élément de A. Quel est le cardinal de $\mathscr{H}(E)$?

- ☐ $\mathrm{Card}(\mathscr{H}(E)) = p2^{n-p}$
- ☐ $\mathrm{Card}(\mathscr{H}(E)) = p$
- ☐ $\mathrm{Card}(\mathscr{H}(E)) = p2^{p}$
- ☐ $\mathrm{Card}(\mathscr{H}(E)) = p2^{n}$

Question 60
Soit $f : [-1,1] \to [-1,1]$ l'application définie par

$$\forall x \in [-1,1],\ f(x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Quelle sont les bonnes réponses ?

- ☐ f est injective mais non surjective.
- ☐ f est surjective mais non injective.
- ☐ f n'est ni injective ni surjective.
- ☐ f est bijective et $f^{-1}(x) = \dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

Polynômes

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

---

3 Polynômes – Fractions rationnelles | 105

Cours ● Polynômes
Vidéo ■ Définitions
Vidéo ■ Arithmétique des polynômes
Vidéo ■ Racine d'un polynôme, factorisation
Vidéo ■ Fractions rationnelles
Fiche d'exercices ♦ Polynômes
Fiche d'exercices ♦ Fractions rationnelles

3.1 Polynômes | Facile | 105.05

Question 61
Soit $P(X) = 2X^5 + 3X^2 + X$ et $Q(X) = 3X^2 - 2X + 3$. Quelles sont les assertions vraies concernant le polynôme produit $P(X) \times Q(X)$?

- ☐ Le coefficient dominant est 5.

- ☐ Le coefficient du monôme X^3 est -3.
- ☐ Le coefficient du terme constant est 3.
- ☐ Le produit est la somme de 7 monômes ayant un coefficient non nuls.

Question 62

Soit $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2$ et $Q(X) = X^3 - X + 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Le polynôme $P(X) \times Q(X)$ est de degré 9.
- ☐ Le coefficient du monôme X^2 dans le produit $P(X) \times Q(X)$ est 3.
- ☐ Le polynôme $P(X) + Q(X)$ est de degré 3.
- ☐ Le polynôme $P(X) - Q(X)$ est de degré 3.

Question 63

Soient $P(X)$ et $Q(X)$ deux polynômes unitaires de degré $n \geqslant 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $P + Q$ est un polynôme de degré n.
- ☐ $P - Q$ est un polynôme de degré n.
- ☐ $P \times Q$ est un polynôme de degré $n + n = 2n$.
- ☐ P/Q est un polynôme de degré $n - n = 0$.

3.2 Polynômes | Moyen | 105.05

Question 64

Soit P un polynôme de degré $\geqslant 2$. Quelles sont les assertions vraies, quel que soit le polynôme P ?

- ☐ $\deg(P(X) \times (X^2 - X + 1)) = \deg P(X) + 2$
- ☐ $\deg(P(X) + (X^2 - X + 1)) = \deg P(X)$
- ☐ $\deg(P(X)^2) = (\deg P(X))^2$
- ☐ $\deg(P(X^2)) = 2 \deg P(X)$

Question 65

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On associe le polynôme dérivé : $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$.

- ☐ Le polynôme dérivé de $P(X) = X^5 - 2X^2 + 1$ est $P'(X) = 5X^4 - 2X$.
- ☐ Le seul polynôme qui vérifie $P'(X) = 0$ est $P(X) = 1$.
- ☐ Si $P'(X)$ est de degré 7, alors $P(X)$ est de degré 8.
- ☐ Si le coefficient constant de P est nul, alors c'est aussi le cas pour P'.

3.3 Polynômes | Difficile | 105.05

Question 66
Soit $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. À ce polynôme P on associe un nouveau polynôme Q, défini par $Q(X) = P(X - \frac{a_{n-1}}{n})$.
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si $P(X) = X^2 + 3X + 1$ alors $Q(X) = X^2 - 2X$.
- ☐ Si $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2$ alors $Q(X) = X^3 - 3X$.
- ☐ Le coefficient constant du polynôme Q est toujours nul.
- ☐ Le coefficient du monôme X^{n-1} de Q est toujours nul.

Question 67
Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_kX^k$. On associe le polynôme dérivé : $P'(X) = \sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k-1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si P est de degré $n \geqslant 1$ alors P' est de degré $n-1$.
- ☐ Si $P'(X) = nX^{n-1}$ alors $P(X) = X^n$.
- ☐ Si $P' = P$ alors $P = 0$.
- ☐ Si $P' - Q' = 0$ alors $P - Q = 0$.

Question 68
Soit $A(X) = \sum_{i=0}^{n} a_iX^i$. Soit $B(X) = \sum_{j=0}^{m} b_jX^j$. Soit $C(X) = A(X) \times B(X) = \sum_{k=0}^{m+n} c_kX^k$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $c_k = a_k b_k$
- ☐ $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$
- ☐ $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_i$
- ☐ $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

3.4 Arithmétique des polynômes | Facile | 105.01, 105.02

Question 69
Soient A, B deux polynômes, avec B non nul. Soit $A = B \times Q + R$ la division euclidienne de A par B.

- ☐ Un tel Q existe toujours.
- ☐ S'il existe, Q est unique.
- ☐ On a toujours $\deg Q \leqslant \deg A$.
- ☐ On a toujours $\deg Q \leqslant \deg B$.

Question 70
Soient A, B deux polynômes, avec B non nul. Soit $A = B \times Q + R$ la division euclidienne de A par B.

- ☐ Un tel R existe toujours.
- ☐ S'il existe, R est unique.
- ☐ On a toujours $\deg R < \deg A$ (ou bien R est nul).
- ☐ On a toujours $\deg R < \deg B$ (ou bien R est nul).

Question 71
Soient $A(X) = 2X^4+3X^3-8X^2-2X+1$ et $B(X) = X^2+3X+1$. Soit $A = BQ+R$ la division euclidienne de A par B.

- ☐ Le coefficient du monôme X^2 de Q est 1.
- ☐ Le coefficient du monôme X de Q est 3.
- ☐ Le coefficient du monôme X de R est 2.
- ☐ Le coefficient constant de R est 2.

3.5 Arithmétique des polynômes | Moyen | 105.01, 105.02

Question 72
Soient $A(X) = X^6-7X^5+10X^4+5X^3-23X^2+5$ et $B(X) = X^3-5X^2+1$. Soit $A = BQ+R$ la division euclidienne de A par B.

- ☐ Le coefficient du monôme X^2 de Q est 0.
- ☐ Le coefficient du monôme X de Q est 0.
- ☐ Le coefficient du monôme X de R est -1.
- ☐ Le coefficient constant de R est 1.

Question 73
Soient $A(X) = X^4-2X^3-4X^2+2X+3$ et $B(X) = X^4-2X^3-3X^2$ des polynômes de $\mathbb{R}[X]$. Notons D le pgcd de A et B. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $X-1$ divise D.
- ☐ $X+1$ divise D.
- ☐ $D(X) = (X-3)(X+1)$.
- ☐ $D(X) = (X-3)(X+1)^2$.

Question 74
Quelles sont les affirmations vraies pour des polynômes de $\mathbb{R}[X]$?

- ☐ Le pgcd de $(X-1)^2(X-3)^3(X^2+X+1)^3$ et $(X-1)^2(X-2)(X-3)(X^2+X+1)^2$ est $(X-1)^2(X-3)(X^2+X+1)$.
- ☐ Le ppcm de $(X-1)^2(X-3)^3(X^2+X+1)^3$ et $(X-1)^2(X-2)(X-3)(X^2+X+1)^2$ est $(X-1)^2(X-2)(X-3)^3(X^2+X+1)^2$.
- ☐ Le pgcd de $(X-1)^2(X^2-1)^3$ et $(X-1)^4(X+1)^5$ est $(X-1)^4(X+1)^3$.
- ☐ Le ppcm de $(X-1)^2(X^2-1)^3$ et $(X-1)^4(X+1)^5$ est $(X-1)^5(X+1)^5$.

3.6 Arithmétique des polynômes | Difficile | 105.01, 105.02

Question 75

Soit A un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Soit B un polynôme de degré $m \geqslant 1$, avec $m \leqslant n$. Soit $A = B \times Q + R$ la division euclidienne de A par B. On note $q = \deg Q$ et $r = \deg R$ (avec $r = -\infty$ si $R = 0$). Quelles sont les assertions vraies (quelque soient A et B) ?

- ☐ $q = n - m$
- ☐ $r < m$
- ☐ $r = 0 \implies A$ divise B.
- ☐ $n = mq + r$

Question 76

Soit $n \geqslant 2$. Soit $A(X) = X^{2n} + X^{2n-2}$. Soit $B(X) = X^n + X^{n-1}$. Soit $A = BQ + R$ la division euclidienne de A par B.

- ☐ Le coefficient de X^n de Q est 1.
- ☐ Le coefficient de X^{n-1} de Q est 1.
- ☐ Le coefficient de X^{n-2} de Q est 2.
- ☐ R est constitué d'un seul monôme.

Question 77

Soit $A(X) = X^4 - X^2$. Soit $B(X) = X^2 + X - 2$. Soit D le pgcd de A et B dans $\mathbb{R}[X]$.

- ☐ $D(X) = 1$
- ☐ Il existe $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $AU + BV = X - 1$.
- ☐ Il existe $u \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Au + BV = X - 1$.
- ☐ Il existe $U \in \mathbb{R}[X]$ et $v \in \mathbb{R}$ tels que $AU + Bv = X - 1$.

3.7 Racines, factorisation | Facile | 105.03

Question 78

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré 8. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ P admet exactement 8 racines réelles (comptées avec multiplicité).
- ☐ P admet au moins une racine réelle.
- ☐ P admet au plus 8 racines réelles (comptées avec multiplicité).
- ☐ P admet au moins 8 racines réelles (comptées avec multiplicité).

Question 79

Soit $P(X) = X^7 - 5X^5 - 5X^4 + 4X^3 + 13X^2 + 12X + 4$.

- ☐ -1 est une racine de P.
- ☐ 0 est une racine de P.

- ☐ 1 est une racine de P.
- ☐ 2 est une racine de P.

Question 80
Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $2X^2 + 3X + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
- ☐ $2X^2 - 3X + 2$ est irréductible sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $2X^2 - X + 3$ est irréductible sur $\mathbb{C}$.
- ☐ $X^3 + X^2 + X + 4$ est irréductible sur $\mathbb{R}$.

3.8 Racines, factorisation | Moyen | 105.03

Question 81
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $2n + 1$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ P peut admettre une racine complexe, qui ne soit pas réelle.
- ☐ P admet au moins une racines réelle.
- ☐ P admet au moins deux racines réelles (comptées avec multiplicités).
- ☐ P peut avoir $2n + 1$ racines réelles distinctes.

Question 82
Soit $P(X) = X^6 + 4X^5 + X^4 - 10X^3 - 4X^2 + 8X$.

- ☐ -1 est une racine double.
- ☐ 0 est une racine double.
- ☐ 1 est une racine double.
- ☐ -2 est une racine double.

3.9 Racines, factorisation | Difficile | 105.03

Question 83
Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme de degré n.

- ☐ P peut avoir des racines dans $\mathbb{R}$, mais pas dans $\mathbb{Q}$.
- ☐ Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une racine de P, alors $\bar{z}$ aussi.
- ☐ Les facteurs irréductibles de P sur $\mathbb{Q}$ sont de degré 1 ou 2.
- ☐ Les racines réelles de P sont de la forme $\alpha + \beta\sqrt{\gamma}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$.

Question 84
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \geqslant 1$. Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ a racine de $P \iff X - a$ divise P.
- ☐ a racine de P de multiplicité $\geqslant k \iff (X-a)^k$ divise P.
- ☐ a racine de P de multiplicité $\geqslant k \iff P(a) = 0, P'(a) = 0, \ldots, P^{(k)}(a) = 0$.
- ☐ La somme des multiplicités des racines est $\leqslant n$.

3.10 Fractions rationnelles | Facile | 105.04

Question 85

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ Les éléments simples sur $\mathbb{C}$ sont de la forme $\frac{a}{X-\alpha}$, $a, \alpha \in \mathbb{C}$.
- ☐ Les éléments simples sur $\mathbb{C}$ sont de la forme $\frac{a}{(X-\alpha)^k}$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}^*$.
- ☐ Les éléments simples sur $\mathbb{R}$ peuvent être de la forme $\frac{a}{(X-\alpha)^k}$, $a, \alpha \in \mathbb{R}$.
- ☐ Les éléments simples sur $\mathbb{R}$ peuvent être de la forme $\frac{aX+b}{X-\alpha}$, $a, b, \alpha \in \mathbb{R}$.

Question 86

Soient $P(X) = X - 1$, $Q(X) = (X+1)^2(X^2+X+1)$. On décompose la fraction $F = \frac{P}{Q}$ sur $\mathbb{R}$.

- ☐ La partie polynomiale est nulle.
- ☐ Il peut y avoir un élément simple $\frac{a}{X-1}$.
- ☐ Il peut y avoir un élément simple $\frac{a}{X+1}$ mais pas $\frac{a}{(X+1)^2}$.
- ☐ Il peut y avoir un élément simple $\frac{aX+b}{X^2+X+1}$ mais pas $\frac{aX+b}{(X^2+X+1)^2}$.

3.11 Fractions rationnelles | Moyen | 105.04

Question 87

Soit $\frac{P(X)}{Q(X)}$ une fraction rationnelle. On note $E(X)$ sa partie polynomiale (appelée aussi partie entière).

- ☐ Si $\deg P < \deg Q$ alors $E(X) = 0$.
- ☐ Si $\deg P \geqslant \deg Q$ alors $\deg E(X) = \deg P - \deg Q$.
- ☐ Si $P(X) = X^3 + X + 2$ et $Q(X) = X^2 - 1$ alors $E(X) = X + 1$.
- ☐ Si $P(X) = X^5 + X - 2$ et $Q(X) = X^2 - 1$ alors $E(X) = X^3 + X$.

Question 88

Soit $P(X) = 3X$ et $Q(X) = (X-2)(X-1)^2(X^2 - X + 1)$. On écrit

$$\frac{P(X)}{Q(X)} = \frac{a}{X-2} + \frac{b}{X-1} + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{dX+e}{X^2-X+1}.$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ En multipliant par $X - 2$, puis en évaluant en $X = 2$, j'obtiens $a = 1$.
- ☐ En multipliant par $(X-1)^2$, puis en évaluant en $X = 1$, j'obtiens $c = -3$.
- ☐ En multipliant par X, puis en faisant tendre $X \to +\infty$, j'obtiens la relation $a + b + d = 0$.
- ☐ En évaluant en $X = 0$, j'obtiens la relation $a + b + c + e = 0$.

3.12 Fractions rationnelles | Difficile | 105.04

Question 89

Soit $F(X)=\dfrac{1}{(X^2+1)X^3}$. On écrit

$$F(X)=\frac{a}{X}+\frac{b}{X^2}+\frac{c}{X^3}+\frac{dX+e}{X^2+1}.$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $c=1$
- ☐ $b=1$
- ☐ $a=1$
- ☐ $e=0$

Question 90

Soit $F(X)=\dfrac{X-1}{X(X^2+1)^2}$. On écrit

$$F(X)=\frac{a}{X}+\frac{bX+c}{X^2+1}+\frac{dX+e}{(X^2+1)^2}.$$

Quelles sont les affirmations vraies ?

- ☐ $a=-1$
- ☐ $d=0$ et $e=0$
- ☐ $b=0$ et $c=0$
- ☐ $b=0$ et $d=0$

Nombres complexes

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

---

4 Nombres complexes | 104

Cours ● Nombres complexes
Vidéo ■ Les nombres complexes, définitions et opérations
Vidéo ■ Racines carrées, équation du second degré
Vidéo ■ Argument et trigonométrie
Vidéo ■ Nombres complexes et géométrie
Fiche d'exercices ♦ Nombres complexes

4.1 Écritures algébrique et géométrique | Facile | 104.01

Question 91
Soit $z = (1-2i)^2$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $z = 5-4i$
- ☐ $z = -3-4i$
- ☐ Le conjugué de z est : $\overline{z} = 3+4i$.
- ☐ Le module de z est 5.

Question 92
Soit $z = \frac{i+1}{1-i\sqrt{3}}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $|z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$
- ☐ $z\overline{z} = \frac{1}{2}$
- ☐ Un argument de z est : $\frac{7\pi}{12}$.
- ☐ Le conjugué de z est : $\overline{z} = \frac{i-1}{1+i\sqrt{3}}$.

Question 93
Soit z un nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{4}$. L'écriture algébrique de z est :

- ☐ $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$
- ☐ $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$
- ☐ $z = 2+2i$
- ☐ $z = 2-2i$

Question 94
Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $e^{i\theta} \in \mathbb{R}$ si et seulement si :

- ☐ $\theta = 0$
- ☐ $\theta = 2\pi$
- ☐ $\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
- ☐ $\theta = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Question 95
Soit θ un réel. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\cos^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$
- ☐ $\cos^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$
- ☐ $\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$
- ☐ $\sin^2\theta = \frac{1+\cos(2\theta)}{2}$

Question 96
Soit θ un réel. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\cos(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$
- ☐ $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$
- ☐ $\sin(2\theta) = 2\cos\theta\sin\theta$
- ☐ $\sin(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

4.2 Écritures algébrique et géométrique | Moyen | 104.01

Question 97
Soit $z = \frac{(1-i)^{10}}{(1+i\sqrt{3})^4}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $|z| = 2$
- ☐ $|z| = \frac{1}{2}$
- ☐ $\arg z = \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$
- ☐ $\arg z = -\frac{\pi}{6}\,[2\pi]$

Question 98
Soit $z = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\phi - i\sin\phi}$, $\theta, \phi \in \mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $|z| = 2$
- ☐ $\arg z = \theta + \phi\,[2\pi]$
- ☐ $z = \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi)$
- ☐ $|z| = 1$

Question 99
Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes. Alors, $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2$ est égal à :

- ☐ $|z_1|^2 + |z_2|^2$
- ☐ $|z_1|^2 - |z_2|^2$
- ☐ $2|z_1|^2 + 2|z_2|^2$
- ☐ $2|z_1|^2 - 2|z_2|^2$

Question 100
Soit θ un réel. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\cos^3\theta = \frac{1}{8}(\cos(3\theta) + 3\cos\theta)$
- ☐ $\cos^3\theta = \frac{1}{4}(\cos(3\theta) + 3\cos\theta)$
- ☐ $\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta - \sin(3\theta))$
- ☐ $\sin^3\theta = \frac{1}{4}(3\sin\theta + \sin(3\theta))$

Question 101
Soit θ un réel. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\cos(5\theta) = \cos^5\theta - 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$
- ☐ $\cos(5\theta) = \cos^5\theta + 10\cos^3\theta\sin^2\theta + 5\cos\theta\sin^4\theta$
- ☐ $\sin(5\theta) = 5\cos^4\theta\sin\theta + 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$
- ☐ $\sin(5\theta) = 5\cos^4\theta\sin\theta - 10\cos^2\theta\sin^3\theta + \sin^5\theta$

4.3 Écritures algébrique et géométrique | Difficile | 104.01

Question 102
Par définition, si $x, y \in \mathbb{R}$, $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.
Soit $z = e^{e^{i\theta}}$, où θ est un réel. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $|z| = 1$
- ☐ $|z| = e^{\cos\theta}$
- ☐ $\arg z = \theta\,[2\pi]$
- ☐ $\arg z = \sin\theta\,[2\pi]$

Question 103
Soit $z = 1 + e^{i\theta}, \theta \in]-\pi, \pi[$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $|z| = 2$
- ☐ $|z| = 2\cos(\frac{\theta}{2})$
- ☐ $\arg z = \frac{\theta}{2}\,[2\pi]$
- ☐ $\arg z = \theta\,[2\pi]$

Question 104
Soit $z = e^{i\theta} + e^{i\phi}, \theta, \phi \in \mathbb{R}$ tels que $-\pi < \theta - \phi < \pi$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $|z| = 2$
- ☐ $|z| = 2\cos(\frac{\theta-\phi}{2})$
- ☐ $\arg z = \theta + \phi\,[2\pi]$
- ☐ $\arg z = \frac{\theta+\phi}{2}\,[2\pi]$

Question 105
Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $S_1 = \sum_{k=0}^{n}\cos(kx)$ et $S_2 = \sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $S_1 = \cos(\frac{nx}{2}) \cdot \frac{\sin(\frac{n+1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$
- ☐ $S_1 = \sin(\frac{nx}{2}) \cdot \frac{\sin(\frac{n+1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$

- ☐ $S_2 = \sin(\frac{nx}{2}) \cdot \frac{\sin(\frac{n+1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$
- ☐ $S_2 = \cos(\frac{nx}{2}) \cdot \frac{\sin(\frac{n+1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})}$

4.4 Équations | Facile | 104.02, 104.03, 104.04

Question 106

Les racines carrées de i sont :

- ☐ $\frac{1+i}{2}$ et $-\frac{1+i}{2}$
- ☐ $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1+i}{\sqrt{2}}$
- ☐ $e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $e^{\frac{-i\pi}{4}}$
- ☐ $e^{\frac{i\pi}{4}}$ et $-e^{\frac{i\pi}{4}}$

Question 107

On considère l'équation : $(E) : z^2 + z + 1 = 0$, $z \in \mathbb{C}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Les solutions de (E) sont : $z_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- ☐ Les solutions de (E) sont : $z_1 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.
- ☐ Les solutions de (E) sont : $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $z_2 = e^{\frac{-2i\pi}{3}}$.
- ☐ Si z est une solution de (E), alors $|z| = 1$.

Question 108

Les racines cubiques de $1 + i$ sont :

- ☐ $z_k = \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}, k = 0, 1, 2$
- ☐ $z_k = \sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{12}+\frac{2k\pi}{3})}, k = 0, 1, 2$
- ☐ $z_k = \sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{12}-\frac{2k\pi}{3})}, k = 0, 1, 2$
- ☐ $z_k = \sqrt[3]{2}e^{i(\frac{\pi}{12}-\frac{2k\pi}{3})}, k = 0, 1, 2$

Question 109

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z - 2| = 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $z = 3$
- ☐ $z = 1$
- ☐ $z = 2 + e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$
- ☐ Le point du plan d'affixe z appartient au cercle de rayon 1 et de centre le point d'affixe 2.

4.5 Équations | Moyen | 104.02, 104.03, 104.04

Question 110
On considère l'équation : $(E) : z^2 - 2iz - 1 - i = 0$, $z \in \mathbb{C}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Le discriminant de l'équation est : $\Delta = 8 + 4i$.
- ☐ Le discriminant de l'équation est : $\Delta = 4i$.
- ☐ les solutions de (E) sont : $z_1 = \frac{\sqrt{2}+(1+\sqrt{2})i}{2}$ et $z_2 = \frac{\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})i}{2}$.
- ☐ les solutions de (E) sont : $z_1 = \frac{\sqrt{2}+(2+\sqrt{2})i}{2}$ et $z_2 = \frac{-\sqrt{2}+(2-\sqrt{2})i}{2}$.

Question 111
On considère l'équation : $(E) : z^2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $z \in \mathbb{C}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si z est une solution de (E), $\arg z = \frac{\pi}{8}[2\pi]$.
- ☐ Les solutions de (E) sont : $z = e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $z = -e^{i\frac{\pi}{8}}$.
- ☐ $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$
- ☐ $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ et $\sin(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

Question 112
Les racines cubiques de -8 sont :

- ☐ $z_k = 2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$, $k = 1, 2, 3$
- ☐ $z_k = 2e^{i\frac{(2k-1)\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$
- ☐ $z_k = -2e^{i\frac{(2k+1)\pi}{3}}$, $k = 0, 1, 2$
- ☐ $z_1 = -2, z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_3 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Question 113
On considère l'équation : $(E) : z^5 = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$, $z \in \mathbb{C}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si z est une solution de (E), $|z| = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}$.
- ☐ Si z est une solution de (E), $|z| = \frac{1}{\sqrt[10]{2}}$.
- ☐ Si z est une solution de (E), $\arg z = \frac{\pi}{12}[2\pi]$.
- ☐ Si z est une solution de (E), $\arg z = \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{5}[2\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Question 114
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z-1| = |z+1|$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $z = 0$
- ☐ $z = ia$, $a \in \mathbb{R}$
- ☐ Le point du plan d'affixe z appartient au cercle de rayon 1 et de centre le point d'affixe 0.
- ☐ Le point du plan d'affixe z appartient à la médiatrice du segment $[A, B]$, où A et B sont les points d'affixe -1 et 1 respectivement.

4.6 Équations | Difficile | 104.02, 104.03, 104.04

Question 115

On considère l'équation (E) : $(z^2+1)^2+z^2=0$, $z\in\mathbb{C}$. L'ensemble des solutions de (E) est :

- ☐ $\{\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2}i\,,\pm\frac{1-\sqrt{5}}{2}i\}$
- ☐ $\{\pm\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\pm\frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$
- ☐ $\{\pm\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\,,\pm\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\}$
- ☐ $\{\pm\frac{1+\sqrt{3}}{2}\,,\pm\frac{1-\sqrt{3}}{2}\}$

Question 116

On considère l'équation (E) : $z^8=\overline{z}$, $z\in\mathbb{C}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si z est une solution de (E), alors $z=0$.
- ☐ Si z est une solution de (E), alors $z=0$ ou $|z|=1$.
- ☐ L'équation (E) admet 8 solutions distinctes.
- ☐ Les solutions non nulles de (E) sont les racines 9-ièmes de l'unité.

Question 117

Soit n un entier $\geqslant 2$, $z_1,z_2,\dots,z_n$ les racines n-ièmes de l'unité. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $z^n-1=(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n)$
- ☐ $z_1.z_2,\dots z_n=(-1)^{n-1}$
- ☐ $z_1+z_2+\dots+z_n=1$
- ☐ $z_1+z_2+\dots+z_n=0$

Question 118

Soit E l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $|\frac{z-1}{1+iz}|=\sqrt{2}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est une droite.
- ☐ E est un cercle.
- ☐ $E=\emptyset$
- ☐ E est le cercle de rayon 2 et de centre le point d'affixe $-1+2i$.

Question 119

Soit E l'ensemble des points M d'affixe z tels que : $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $E=\mathbb{R}^*$
- ☐ E est le cercle unité.
- ☐ $E=\mathbb{R}^*\cup\{z\in\mathbb{C};\,|z|=1\}$
- ☐ E contient le cercle unité.

Question 120
Soit E l'ensemble des points M d'affixe z tels que M et les points A et B d'affixe i et iz respectivement soient alignés. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est la droite passant par les points d'affixe i et $-1+i$ respectivement.
- ☐ E est le cercle de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de centre le point d'affixe $\frac{1}{2}(1+i)$.
- ☐ E est le cercle de rayon $\frac{1}{2}$ et de centre le point d'affixe $1+i$.
- ☐ E est la droite passant par les points d'affixe $-i$ et $1-i$ respectivement.

Géométrie du plan

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

5 Géométrie du plan | 140

Fiche d'exercices ♦ Droites du plan ; droites et plans de l'espace

5.1 Géométrie du plan | Facile | 140.01, 140.02

Question 121
On considère les points $A(3,0)$ et $B(0,4)$. Quelle est la distance d entre A et B ?

- ☐ $d=3$
- ☐ $d=4$
- ☐ $d=5$
- ☐ $d=3+4=7$

Question 122
On considère les vecteurs $\vec{u}=(2,-1)$ et $\vec{v}=(1,-4)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ La norme de $\vec{u}$ est $||\vec{u}||=2-1=1$.
- ☐ La norme de $\vec{u}$ est $||\vec{u}||=\sqrt{5}$.
- ☐ Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\vec{u}\cdot\vec{v}=(2-1)+(1-4)=-3$.
- ☐ Le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est $\vec{u}\cdot\vec{v}=6$.

Question 123
On considère les points $A(1,1)$, $B(-1,1)$ et $C(1,-1)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont égaux.
- ☐ $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}$

- ☐ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- ☐ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

Question 124
Dans un repère orthonormé direct, on considère le point A de coordonnées polaires $r = 2$ et $\theta = \dfrac{\pi}{6}$.
Quelles sont les coordonnées cartésiennes (x, y) de A ?

- ☐ $x = 2$ et $y = 2$
- ☐ $x = \sqrt{3}$ et $y = 1$
- ☐ $x = 1$ et $y = \sqrt{3}$
- ☐ $x = 1$ et $y = 1$

Question 125
Dans un repère orthonormé direct, on considère le point $A(1, 1)$. Quelles sont les coordonnées polaires (r, θ) de A ?

- ☐ $r = 1$ et $\theta = 1$
- ☐ $r = 2$ et $\theta = 0$
- ☐ $r = \sqrt{2}$ et $\theta = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- ☐ $r = \sqrt{2}$ et $\theta = 0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Question 126
On considère les points $A(0, 1)$, $B(2, 3)$ et $C(1, 1)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ Les droites (AB) et (OC) sont confondues.
- ☐ Les droites (AB) et (OC) sont perpendiculaires.
- ☐ Les droites (AB) et (OC) sont parallèles.
- ☐ Les droites (AB) et (OC) sont sécantes.

Question 127
On considère les points $A(-1, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 2)$ et $D(1, 0)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
- ☐ Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
- ☐ Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- ☐ $(ABCD)$ est un parallélogramme.

Question 128
Soit D la droite passant par l'origine et par le point $A(1, 1)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\vec{u}(1,1)$ est un vecteur directeur de D.
- ☐ $\vec{u}(1,1)$ est un vecteur normal à D.
- ☐ $y = x$ est une équation cartésienne de D.
- ☐ $x + y = 0$ est une équation cartésienne de D.

Question 129

Soit D la droite passant par les points $A(1,-1)$ et $B(1,1)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\vec{u}(0,1)$ est un vecteur directeur de D.
- ☐ $\vec{u}(0,1)$ est un vecteur normal à D.
- ☐ Le point $C(1,0)$ n'appartient pas à D.
- ☐ Le point $C(1,0)$ appartient à D.

Question 130

Soit D la droite passant par les points $A(1,-1)$ et $B(1,0)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ Une équation cartésienne de D est : $x - y + 1 = 0$.
- ☐ Une équation cartésienne de D est : $x - 1 = 0$.
- ☐ $\vec{u}(1,0)$ est un vecteur normal à D.
- ☐ $\vec{u}(1,0)$ est un vecteur directeur de D.

5.2 Géométrie du plan | Moyen | 140.01, 140.02

Question 131

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = (1,1)$ et $\vec{v} = \left(1, \sqrt{3}\right)$. Quel est la mesure $\alpha \in [0, 2\pi[$ de l'angle orienté entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

- ☐ $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$
- ☐ $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$
- ☐ $\alpha = \dfrac{\pi}{12}$
- ☐ $\alpha = \dfrac{7\pi}{12}$

Question 132

Dans le plan muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, a\right)$ et $\vec{v} = \left(a, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Comment choisir le réel a pour que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée ?

- ☐ $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

- ☐ $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ☐ $a = \sqrt{2}$
- ☐ $a = -\sqrt{2}$

Question 133

Dans le plan muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, a\right)$ et $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, b\right)$. Comment choisir les réels a et b pour que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée ?

- ☐ $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$
- ☐ $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$
- ☐ $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$
- ☐ $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$

Question 134

Dans le plan muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On suppose que $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 3$ et que l'angle entre ces deux vecteurs est $\frac{\pi}{3}$. Quelle est la norme de $\vec{u} + \vec{v}$?

- ☐ $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 6$
- ☐ $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 3$
- ☐ $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 3\sqrt{3}$
- ☐ $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 9$

Question 135

On considère les points $A(1, 1)$, $B(-1, 1)$ et $C(1, -1)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ Les points A, B et C sont alignés.
- ☐ ABC est un triangle rectangle en A.
- ☐ ABC est un triangle équilatéral.
- ☐ ABC est un triangle isocèle en A.

Question 136

Soit D la droite définie par le paramétrage :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ Le point $A(1,1)$ appartient à D.
- ☐ $\vec{u} = (1,-1)$ est un vecteur normal à D.
- ☐ Une équation cartésienne de D est : $x + y - 3 = 0$.
- ☐ $\vec{u}(1,1)$ est un vecteur directeur de D.

Question 137

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite D passant par les points $A(1,1)$ et $B(2,3)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\vec{u} = (1,2)$ est un vecteur normal à D.
- ☐ Une équation cartésienne de D est : $2x - y - 1 = 0$.
- ☐ Le point $C(1,2)$ appartient à D.
- ☐ La distance du point $N(-1,2)$ à la droite D est $\sqrt{5}$.

Question 138

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(1,2)$, $B(2,1)$ et $C(-2,1)$. Quelle est la distance d du point C à la droite (AB) ?

- ☐ $d = \sqrt{2}$
- ☐ $d = 3$
- ☐ $d = 2\sqrt{2}$
- ☐ $d = \sqrt{10}$

Question 139

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite D définie par le paramétrage :

$$\begin{cases} x &= 1+t \\ y &= 2-t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Quelle est la distance d du point $M(2,3)$ à la droite D ?

- ☐ $d = \sqrt{2}$
- ☐ $d = \sqrt{3}$
- ☐ $d = 1$
- ☐ $d = 2$

Question 140

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points $A(a,b)$ et $B(1,1)$. Comment choisir les réels a et b pour que l'aire du triangle de sommets O,A,B soit égale à 1 ?

- ☐ $a = 2$ et $b = 0$
- ☐ $a = 2 + b$ et $b \in \mathbb{R}$
- ☐ $a = 1$ et $b = 0$
- ☐ $a = 0$ et $b = 1$

5.3 Géométrie du plan | Difficile | 140.01, 140.02

Question 141

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les vecteurs $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, a\right)$ et $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, b\right)$. Comment choisir les réels a et b pour que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée directe ?

- ☐ $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$
- ☐ $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$
- ☐ $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = \frac{1}{2}$
- ☐ $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $b = -\frac{1}{2}$

Question 142

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points $A(a, b)$ et $B(1, 1)$. Comment choisir les réels a et b pour que le triangle de sommets O, A, B soit rectangle et isocèle en A ?

- ☐ $a = -1$ et $b = -1$
- ☐ $a = 1$ et $b = 0$
- ☐ $a = 0$ et $b = 1$
- ☐ $a = 1$ et $b = -1$

Question 143

Soit D la droite définie par l'équation cartésienne : $x - 2y = 4$. Quelles sont les coordonnées (a, b) du projeté orthogonal $H(a, b)$ du point $M(1, 1)$ sur D ?

- ☐ $(a, b) = (4, 0)$
- ☐ $(a, b) = (2, -1)$
- ☐ $(a, b) = (6, 1)$
- ☐ $(a, b) = (1, 1)$

Question 144

On considère trois points A, B et C du plan tels que

$$(AB) \;:\; x - 2y + 3 = 0 \quad \text{et} \quad (AC) \;:\; 2x - y - 3 = 0.$$

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ Les points A, B et C sont alignés.
- ☐ Le point B appartient à (AC).
- ☐ Le point C appartient à (AB).

☐ Les coordonnées de A sont $A(3,3)$.

Question 145
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le point $A(1,2)$ et on note D une droite passant par A et qui est à distance 1 de l'origine. Une équation cartésienne de D est

☐ $D\ :\ x = 1$
☐ $D\ :\ x + 2y = 0$
☐ $D\ :\ 3x - 4y + 5 = 0$
☐ $D\ :\ y = 2x$

Question 146
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite Δ d'équation $y = x$ et on note D une droite perpendiculaire à Δ et qui est à distance 1 de l'origine. Une équation cartésienne de D est

☐ $D\ :\ x - y + \sqrt{2} = 0$
☐ $D\ :\ x + y + \sqrt{2} = 0$
☐ $D\ :\ x + y - \sqrt{2} = 0$
☐ $D\ :\ x - y - \sqrt{2} = 0$

Question 147
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite Δ d'équation $x = y$ et on note D une droite parallèle à Δ et qui est à distance 1 de l'origine. Une équation cartésienne de D est

☐ $D\ :\ x - y + \sqrt{2} = 0$
☐ $D\ :\ x + y + \sqrt{2} = 0$
☐ $D\ :\ x + y - \sqrt{2} = 0$
☐ $D\ :\ x - y - \sqrt{2} = 0$

Question 148
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite Δ d'équation $x = y$ et on note D une droite perpendiculaire à Δ et qui est à distance 0 de l'origine. Une représentation paramétrique de D est

☐ $D\ :\ x = t,\ y = t$ et $t \in \mathbb{R}$
☐ $D\ :\ x = t,\ y = -t$ et $t \in \mathbb{R}$
☐ $D\ :\ x = 3t,\ y = 3t$ et $t \in \mathbb{R}$
☐ $D\ :\ x = -2t,\ y = 2t$ et $t \in \mathbb{R}$

Question 149

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère la droite Δ d'équation $y = x$ et on note D une droite parallèle à Δ et qui est à distance 0 de l'origine. Une représentation paramétrique de D est

- ☐ $D\ :\ x = t,\ y = t$ et $t \in \mathbb{R}$
- ☐ $D\ :\ x = t,\ y = -t$ et $t \in \mathbb{R}$
- ☐ $D\ :\ x = -t,\ y = -t$ et $t \in \mathbb{R}$
- ☐ $D\ :\ x = 2t,\ y = -2t$ et $t \in \mathbb{R}$

Question 150

Le projeté orthogonal de l'origine O sur une droite D du plan est le point $H(1,1)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ La distance entre O et D est 0.
- ☐ La distance entre O et D est $\sqrt{2}$.
- ☐ Une équation cartésienne de D est $x + y - 2 = 0$.
- ☐ Une équation cartésienne de D est $y = x$.

Géométrie dans l'espace

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

---

6 Géométrie dans l'espace | 141

`Fiche d'exercices ♦ Droites du plan ; droites et plans de l'espace`

Pour ces questions, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

6.1 Produit scalaire – Produit vectoriel – Déterminant | Facile | 141.01

Question 151

Soit $\vec{u}(1,1,1), \vec{v}(1,-1,0)$ et $\vec{w}(0,1,1)$ trois vecteurs. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.
- ☐ $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont colinéaires.
- ☐ $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère de l'espace.
- ☐ $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère orthonormé de l'espace.

Question 152

Soit $A(1,1,1), B(0,1,1)$ et $C(1,0,1)$ trois points. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ A, B et C sont alignés.
- ☐ A, B et C forment un triangle d'aire $\frac{1}{3}$.
- ☐ A, B et C forment un triangle d'aire $\frac{1}{2}$.
- ☐ Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

6.2 Aire – Volume | Moyen | 141.02

Question 153
Soit $\vec{u}(-1,1,1), \vec{v}(0,1,2)$ et $\vec{w}(1,0,-1)$ trois vecteurs. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ L'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\sqrt{3}$.
- ☐ L'aire du parallélogramme engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est : $\sqrt{6}$.
- ☐ Le volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est 1.
- ☐ Le volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est 2.

6.3 Plans | Facile | 141.03

Question 154
Soit P le plan passant par $A(1,1,0)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1,-1,1)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Une équation cartésienne de P est $x - y + z = 1$.
- ☐ Une équation cartésienne de P est $x - y + z = 0$.
- ☐ Une représentation paramétrique de P est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t-s \\ y & = & t \\ z & = & s, \quad (t,s \in \mathbb{R}) \end{array}\right.$$

- ☐ Une représentation paramétrique de P est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & s \\ z & = & s-t, \quad (t,s \in \mathbb{R}) \end{array}\right.$$

Question 155
Soit P le plan passant par $A(-1,1,1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(0,1,1)$ et $\vec{v}(1,0,1)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Une représentation paramétrique de P est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -1+s \\ y & = & 1+t \\ z & = & 1+t+s, \quad (t,s \in \mathbb{R}) \end{array}\right.$$

☐ Une représentation paramétrique de P est :

$$\begin{cases} x &= -1+t \\ y &= 1+s \\ z &= -1+t+s, \quad (t,s\in\mathbb{R}) \end{cases}$$

☐ Une équation cartésienne de P est $x+y+z=-1$.

☐ Une équation cartésienne de P est $x+y-z=-1$.

Question 156

Soit P le plan passant par les points $A(0,1,0)$, $B(1,-1,0)$ et $C(0,1,1)$. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ Une représentation paramétrique de P est :

$$\begin{cases} x &= s \\ y &= 1-2s \\ z &= t, \quad (t,s\in\mathbb{R}) \end{cases}$$

☐ Une représentation paramétrique de P est :

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= s \\ z &= 1+2s, \quad (t,s\in\mathbb{R}) \end{cases}$$

☐ Une équation cartésienne de P est $2x+z=1$.

☐ Une équation cartésienne de P est $2x+y=1$.

6.4 Droites de l'espace | Facile | 141.04

Question 157

Soit D la droite passant par le point $A(2,-1,1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1,1,0)$. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ Une représentation paramétrique de D est :

$$\begin{cases} x &= 2-t \\ y &= -1+t \\ z &= 1, \quad (t\in\mathbb{R}) \end{cases}$$

☐ Une représentation paramétrique de D est :

$$\begin{cases} x &= 2-t \\ y &= -1+t \\ z &= -t, \quad (t\in\mathbb{R}) \end{cases}$$

☐ Une représentation cartésienne de D est :

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ z &= 1 \end{cases}$$

☐ Une représentation cartésienne de D est :

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ z &= 1 \end{cases}$$

Question 158

Soit D la droite passant par le point $A(-1,1,2)$ et perpendiculaire au plan d'équation cartésienne : $x+y+z=1$. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ Une représentation paramétrique de D est :

$$\begin{cases} x &= -1+t \\ y &= 1+t \\ z &= 2+t, \quad (t\in\mathbb{R}) \end{cases}$$

☐ Une représentation paramétrique de D est :

$$\begin{cases} x &= -1-t \\ y &= 1-t \\ z &= 2-t, \quad (t\in\mathbb{R}) \end{cases}$$

☐ Une représentation cartésienne de D est :

$$\begin{cases} x-y &= -2 \\ y-z &= -1 \end{cases}$$

☐ Une représentation cartésienne de D est :

$$\begin{cases} x+y &= 2 \\ x+z &= 1 \end{cases}$$

6.5 Plans – Droites | Moyen | 141.03, 141.04

Question 159

Soit a et b deux réels, D et D' deux droites de représentations paramétriques :

$$D : \begin{cases} x &= 1+2t \\ y &= t \\ z &= -1+at, \quad (t\in\mathbb{R}) \end{cases} \qquad D' : \begin{cases} x &= -3+bt \\ y &= -t \\ z &= 1+t, \quad (t\in\mathbb{R}) \end{cases}$$

Quelles sont les assertions vraies ?

☐ D et D' sont parallèles si et seulement si $a=2$ et $b=3$.

☐ D et D' sont parallèles si et seulement si $a=-1$ et $b=-2$.

☐ D et D' sont orthogonales si et seulement si $a=1$ et $b=0$.

☐ D et D' sont orthogonales si et seulement si $a=1-2b$, $b\in\mathbb{R}$.

Question 160

Soit $P : x+y-z=0$, $P' : x-y=2$ et $P'' : y-z=3$ trois plans. L'intersection de ces trois plans est :

- ☐ Vide.
- ☐ Une droite.
- ☐ Un point.
- ☐ Le point de coordonnées $(-3,-5,-8)$.

Question 161

Soit $P: x-y-z=-2$, $P': x+z=2$ deux plans et D la droite : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+t \\ y & = & 2+2t \\ z & = & 1-t, \quad (t\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$ Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $D \subset P'$
- ☐ $D = P \cap P'$
- ☐ $D \cap P = \emptyset$
- ☐ $D \cap P' = \emptyset$

Question 162

Soit $P: x+y-z=1$, $P': x+z=-1$ deux plans et Q le plan passant par $A(1,1,1)$ et perpendiculaire à P et à P'. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Une équation cartésienne de Q est $x+2y-z+2=0$.
- ☐ Une équation cartésienne de Q est $x-2y-z+2=0$.
- ☐ Une représentation paramétrique de Q est :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1-t \\ y & = & 1+t-s \\ z & = & 1+t+s, \quad (t,s\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$$

- ☐ Une représentation paramétrique de Q est :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1+t+s \\ y & = & 1+t \\ z & = & 1-t+s, \quad (t,s\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$$

Question 163

On considère la droite D : $\left\{\begin{array}{lll} x & = & 1-t \\ y & = & t \\ z & = & -1+2t, \quad (t\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$ et le plan P passant par $A(0,1,1)$ et perpendiculaire à D. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Une équation cartésienne de P est $x-y-2z+3=0$.
- ☐ Une équation cartésienne de P est $x-2y-2z+2=0$.
- ☐ Une représentation paramétrique de P est :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & 3+t-2s \\ z & = & s, \quad (t,s\in\mathbb{R}) \end{array}\right.$$

- [ ] Une représentation paramétrique de P est :

$$\begin{cases} x &= t \\ y &= 2+t-2s \\ z &= s, \quad (t,s\in\mathbb{R}) \end{cases}$$

Question 164

On considère les deux plans $P : \begin{cases} x &= 1+t+s \\ y &= -1+t \\ z &= 2+t-s, \quad (t,s\in\mathbb{R}) \end{cases}$ et $P' : \begin{cases} x &= 3+2t \\ y &= t+s \\ z &= 2+2s, \quad (t,s\in\mathbb{R}) \end{cases}$

Quelles sont les assertions vraies ?

- [ ] $P\cap P'$ est une droite.
- [ ] P et P' sont perpendiculaires.
- [ ] $P=P'$
- [ ] $P\cap P'=\emptyset$

6.6 Plans – Droites | Difficile | 141.03, 141.04

Question 165

Soit P et P' deux plans non parallèles d'équations : $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d'=0$ respectivement. Soit $D=P\cap P'$ et Q un plan contenant D. Quelles sont les assertions vraies ?

- [ ] Une équation cartésienne de Q est $ax+by+cz+d=0$.
- [ ] Une équation cartésienne de Q est $a'x+b'y+c'z+d'=0$.
- [ ] Une équation cartésienne de Q est de la forme : $\alpha(ax+by+cz+d)+\beta(a'x+b'y+c'z+d')=0$, où $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tels que $(\alpha a+\beta a',\alpha b+\beta b',\alpha c+\beta c',\alpha d+\beta d')\neq(0,0,0,0)$.
- [ ] Si $Q\neq P'$, une équation cartésienne de Q est de la forme : $(ax+by+cz+d)+\alpha(a'x+b'y+c'z+d')=0$, où $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $(a+\alpha a',b+\alpha b',c+\alpha c',d+\alpha d')\neq(0,0,0,0)$.

Question 166

Soit D la droite d'équations : $\begin{cases} x+z &= 1 \\ x-y &= -1 \end{cases}$ et P le plan contenant D et perpendiculaire au plan Q d'équation : $x-z+3=0$. Une équation cartésienne de P est :

- [ ] $x+z=1$
- [ ] $x+y=0$
- [ ] $y+z=1$
- [ ] $x-y=-1$

Question 167

Soit D la droite d'équations : $\begin{cases} x-y &= -1 \\ y-z &= 0 \end{cases}$ et P le plan contenant D et parallèle à la droite d'équations $D' : \begin{cases} x+z &= 0 \\ x-y &= 2 \end{cases}$. Une équation cartésienne de P est :

- ☐ $x-z=1$
- ☐ $x-y=0$
- ☐ $y-z=0$
- ☐ $x-y=-1$

Question 168

Soit $(P_n), n\in\mathbb{N}$, la famille de plans d'équations : $n^2x+(2n-1)y+nz=3$. On note E l'intersection de ces plans, c'est-à-dire $E=\{M(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ M\in P_n, \forall n\in\mathbb{N}\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $E=\emptyset$
- ☐ E est un plan d'équation $x+y+z=3$.
- ☐ E est une droite d'équation $\begin{cases} x+y+z &= 3\\ y &= -3\end{cases}$.
- ☐ E est le point de coordonnées $(0,-3,6)$.

Question 169

On considère les droites $D_1 : \begin{cases} x &= z-1\\ y &= 2z+1\end{cases}$ et $D_2 : \begin{cases} y &= 3x\\ z &= 1\end{cases}$. Soit P_1 et P_2 des plans parallèles contenant D_1 et D_2 respectivement. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Une équation cartésienne de P_1 est $3x-y-z+4=0$.
- ☐ Une équation cartésienne de P_1 est $4x-y-z+5=0$.
- ☐ Une équation cartésienne de P_2 est $4x-y-z+1=0$.
- ☐ Une équation cartésienne de P_2 est $3x-y-z+1=0$.

Question 170

Soit $D_1 : \begin{cases} y &= x+2\\ z &= x\end{cases}$, $D_2 : \begin{cases} y &= 2x+1\\ z &= 2x-1\end{cases}$ et Δ une droite parallèle au plan (xOy) et rencontrant les droites D_1, D_2 et l'axe (Oz). Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Une équation cartésienne de Δ est : $\begin{cases} y &= 1\\ z &= -1\end{cases}$ ou $\begin{cases} x+y+z &= 0\\ z &= 1\end{cases}$.
- ☐ Δ est contenu dans le plan $z=-1$ ou $z=1$.
- ☐ Une équation cartésienne de Δ est : $\begin{cases} y &= 0\\ z &= -2\end{cases}$ ou $\begin{cases} y &= 3x\\ z &= 1\end{cases}$.
- ☐ Δ est contenu dans le plan $z=-2$ ou $z=1$.

6.7 Distance | Facile | 141.05

Question 171

Soit $A(1,1,1)$ et P le plan d'équation cartésienne : $x+y+z+1=0$. La distance de A à P est :

- ☐ $\frac{1}{\sqrt{3}}$

- ☐ $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- ☐ $\sqrt{3}$
- ☐ $\frac{4}{\sqrt{3}}$

Question 172
Soit $A(-1,1,0)$ et P le plan passant par $B(1,0,1)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1,1,1)$ et $\vec{v}(1,0,-1)$. La distance de A à P est :

- ☐ $\frac{1}{\sqrt{6}}$
- ☐ $\frac{5}{\sqrt{6}}$
- ☐ $\sqrt{6}$
- ☐ $\frac{4}{\sqrt{6}}$

Question 173
Soit $A(2,0,1)$ et D la droite d'équations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 1 \\ x-y & = & -1 \end{array}\right.$$

La distance de A à D est :

- ☐ $\frac{3}{\sqrt{2}}$
- ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ☐ $\sqrt{3}$
- ☐ $\sqrt{2}$

6.8 Distance | Moyen | 141.05

Question 174
On considère les droites $D_1 : \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+t \\ y & = & -t \\ z & = & 1+t, \quad (t \in \mathbb{R}) \end{array}\right.$ et $D_2 : \left\{\begin{array}{rcl} y & = & 2 \\ x-z & = & 2 \end{array}\right.$ La distance entre D_1 et D_2 est :

- ☐ 0
- ☐ $\frac{1}{\sqrt{2}}$
- ☐ $\sqrt{2}$
- ☐ Les droites se rapprochent autant que l'on veut sans se toucher.

Question 175
Soit D la droite passant par le point $A(1,-1,0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(1,1,-1)$. Soit $M(1,-1,3)$ un point et H le projeté orthogonal de M sur D. Les coordonnées de H sont :

- ☐ $H(0,1,1)$
- ☐ $H(1,2,1)$
- ☐ $H(0,-2,1)$
- ☐ $H(1,-2,1)$

Question 176

On considère les droites $D_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x+y-z & = & 1 \\ x-y & = & -1 \end{array} \right.$, $D_2 : \left\{ \begin{array}{rcl} x-y+z & = & -1 \\ x-z & = & 1 \end{array} \right.$ et Δ la perpendiculaire commune à D_1 et D_2. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Une représentation cartésienne de Δ est :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+5y-4z-5 & = & 0 \\ x-4y+5z+5 & = & 0 \end{array} \right.$$

- ☐ Une représentation cartésienne de Δ est :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x+7y-4z-7 & = & 0 \\ x-4y+7z+7 & = & 0 \end{array} \right.$$

- ☐ Δ est contenu dans le plan d'équation $x+5y-4z-5=0$.
- ☐ Δ est contenu dans le plan d'équation $x-4y+7z+7=0$.

6.9 Distance | Difficile | 141.05

Question 177

Soit $A(1,1,1)$ un point, D la droite : $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 1+z \\ y & = & z \end{array} \right.$ et P un plan contenant D et tel que la distance de A à P soit égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Une équation cartésienne de P est :

- ☐ $x+z+1=0$ ou $x+y+1=0$
- ☐ $x-z+1=0$ ou $x-y=0$
- ☐ $z=1$ ou $x=1$
- ☐ $x-z=1$ ou $x-y=1$

Question 178

Soit $P_1 : z+3=0$ et $P_2 : 2x+y+2z-1=0$ des plans et π un plan bissecteur de P_1 et P_2, c'est-à-dire : $M \in \pi$ si et seulement si M est à la même distance de P_1 et de P_2. Une équation cartésienne de π est :

- ☐ $2x+y-z-10=0$ ou $2x+y+5z+8=0$
- ☐ $x+y-z-1=0$ ou $x+y+z+1=0$
- ☐ $2x+y+z+8=0$ ou $2x-y+5z+7=0$
- ☐ $x+y-z-4=0$ ou $x+y+3z-8=0$

Question 179
Soit E l'ensemble des points situés à la même distance des axes de coordonnées. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ E est une droite.
- ☐ E est une réunion de droites.
- ☐ $M(x,y,z) \in E \iff x = y = z$
- ☐ $M(x,y,z) \in E \iff |x| = |y| = |z|$

Question 180
Soit D la droite : $\begin{cases} x &= -1+3t \\ y &= 1 \\ z &= -1-t, \quad t \in \mathbb{R} \end{cases}$ et P un plan contenant D à une distance de 1 de l'origine. Une équation cartésienne de P est :

- ☐ $y = 1$
- ☐ $y = 1$ ou $4x + 3y + 12z + 13 = 0$
- ☐ $y = 1$ ou $x = 1$
- ☐ $x = 1$ ou $y = 1$ ou $z = 1$

Deuxième partie
Analyse

Réels

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

7 Réels | 120

Cours ● Les nombres réels
Vidéo ■ L'ensemble des nombres rationnels
Vidéo ■ Propriétés des réels
Vidéo ■ Densité des rationnels
Vidéo ■ Borne supérieure
Fiche d'exercices ♦ Propriétés des réels

7.1 Rationnels | Facile | 120.01

Question 181
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\frac{4}{16} + \frac{4}{20} = \frac{9}{16}$
- ☐ $\frac{14}{12} + \frac{12}{14} = \frac{85}{42}$
- ☐ $\frac{36}{5} - 3 = \frac{21}{5}$
- ☐ $\frac{14}{15} / \frac{21}{35} = \frac{14}{9}$

Question 182
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\frac{1}{7} = 0,142142142\ldots$
- ☐ Le nombre dont l'écriture décimale est $0,090909\ldots$ est un nombre rationnel.
- ☐ $9,99999\ldots = 10$
- ☐ $\frac{1}{5} = 0,202020\ldots$

7.2 Rationnels | Moyen | 120.01

Question 183
Soient x et y deux nombres rationnels strictement positifs. Parmi les nombres réels suivants, lesquels sont aussi des nombres rationnels ?

- ☐ $\frac{x-y}{x+y}$
- ☐ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$
- ☐ $x - y^2$
- ☐ $(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$

Question 184
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La somme de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
- ☐ Le produit de deux nombres rationnels est un nombre rationnel.
- ☐ La somme de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.
- ☐ Le produit de deux nombres irrationnels est un nombre irrationnel.

7.3 Rationnels | Difficile | 120.01

Question 185
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ L'écriture décimale de $\sqrt{3}$ est finie ou périodique.
- ☐ L'écriture décimale de $\frac{n}{n+1}$ est finie ou périodique (quelque soit $n \in \mathbb{N}$).
- ☐ Un nombre réel qui admet une écriture décimale infinie est un nombre irrationnel.
- ☐ Un nombre réel qui admet une écriture décimale finie est un nombre rationnel.

Question 186
Je veux montrer que $\log 13$, est un nombre irrationnel. On rappelle que $\log 13$ est le réel tel que $10^{\log 13} = 13$. Quelle démarche puis-je adopter ?

- ☐ Par division je calcule l'écriture décimale de $\log 13$ et je montre qu'elle est périodique.
- ☐ Je prouve par récurrence que $\log n$ est irrationnel pour $n \geqslant 2$.
- ☐ Je suppose par l'absurde que $\log 13 = \frac{p}{q}$, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$ et je cherche une contradiction après avoir écrit $13^q = 10^p$.
- ☐ Il est faux que $\log 3$ soit un nombre irrationnel.

7.4 Propriétés de nombres réels | Facile | 120.03

Question 187
Comment s'appelle les propriétés suivantes de $\mathbb{R}$?

- ☐ $(a+b)+c = a+(b+c)$ est l'associativité de l'addition.
- ☐ $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ est la distributivité de la multiplication.
- ☐ $a \times b = b \times a$ est la commutativité de la multiplication.
- ☐ $a \times (b+c) = a \times b + a \times c$ est l'intégrité.

Question 188
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leqslant 2y$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $x^2 \leqslant 2xy$
- ☐ $y \leqslant \frac{x}{2}$
- ☐ $2x \leqslant x + 2y$
- ☐ $-2y \leqslant -x$

Question 189
Notation : $E(x)$ désigne la partie entière du réel x. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $E(7,9) = 8$
- ☐ $E(-3,33) = -4$
- ☐ $E(\frac{5}{3}) = 5$
- ☐ $E(x) = 0 \implies x = 0$

7.5 Propriétés de nombres réels | Moyen | 120.03

Question 190
Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = x - |x|$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant 0$
- ☐ $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant 0$
- ☐ $\forall x > 0 \quad f(x) = 0$
- ☐ $\forall x < 0 \quad f(x) = -2x$

Question 191
Quelles sont les assertions vraies concernant le maximum de nombres réels ?

- ☐ $\max(a,b) \geqslant a$ et $\max(a,b) \geqslant b$
- ☐ $\max(a,b) > a$ ou $\max(a,b) > b$
- ☐ $\max(\max(a,b),c) = \max(a,b,c)$
- ☐ $\min(a,\max(a,b)) = a$

Question 192
Notation : $E(x)$ désigne la partie entière du réel x. Quelles sont les assertions qui caractérisent la partie entière ?

- ☐ $E(x)$ est le plus petit entier supérieur ou égal à x.
- ☐ $E(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
- ☐ $E(x)$ est l'entier tel que $x \leqslant E(x) < x+1$
- ☐ $E(x)$ est l'entier tel que $E(x) \leqslant x < E(x)+1$

Question 193
Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $G(x) = E(10x)$.

- ☐ $G(\frac{2}{3}) = 66$
- ☐ $\forall x > 0 \quad G(x) \geqslant 1$
- ☐ $G(x) = 10 \iff x \in \{10, 11, 12, \ldots, 19\}$
- ☐ $G(x) = G(y) \implies |x-y| \leqslant \frac{1}{10}$

Question 194
Quelles sont les assertions vraies pour $x \in \mathbb{R}$?

- ☐ $x \neq 0 \iff |x| > 0$
- ☐ $|x| > 1 \iff x \geqslant 1$
- ☐ $\sqrt{x^2} = |x|$
- ☐ $x + |x| = 0 \iff x \leqslant 0$

7.6 Propriétés de nombres réels | Difficile | 120.03

Question 195
Quelles propriétés découlent de la propriété d'Archimède des réels (c'est-à-dire $\mathbb{R}$ est archimédien) ?

- ☐ $\exists x > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x > n$
- ☐ $\forall x > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n > x$
- ☐ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad 0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$
- ☐ $\forall x > 0 \quad \forall y > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad nx > y$

Question 196
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\max(x, y) = \frac{x+y-|x|-|y|}{2}$
- ☐ $\max(x, y) = \frac{x+y-|x+y|}{2}$
- ☐ $\max(x, y) = \frac{|x+y|-x-y}{2}$
- ☐ $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$

Question 197
Quelles sont les assertions vraies, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$?

- ☐ $|x - y| \leqslant |x| - |y|$
- ☐ $|x| \leqslant |x - y| + |y|$
- ☐ $|x + y| \geqslant |x| + |y|$
- ☐ $|x - y| \leqslant |x| + |y|$

Question 198
On définit la partie fractionnaire d'un réel x, par $F(x) = x - E(x)$.

- ☐ $F(x) = 0 \iff 0 \leqslant x < 1$
- ☐ Si $7 \leqslant x < 8$ alors $F(x) = 7$.
- ☐ Si $x = -0,2$ alors $F(x) = -0,2$.
- ☐ Si $F(x) = F(y)$ alors $x - y \in \mathbb{Z}$.

7.7 Intervalle, densité | Facile | 120.04

Question 199
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $x \in]5; 7[\iff |x - 6| < 1$
- ☐ $x \in]5; 7[\iff |x - 1| < 6$
- ☐ $x \in [0,999\,; 1,001] \iff |x + 1| < 0,001$

- ☐ $x \in [0,999\,;\,1,001] \iff |x+1| \leqslant 0,001$

Question 200
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $[3,7] \cup [8,10] = [3,10]$
- ☐ $[-3,5] \cap [2,7] = [-3,7]$
- ☐ $[a,b[\cup]a,b] =]a,b[$
- ☐ $[a,b[\cap]a,b] =]a,b[$

7.8 Intervalle, densité | Moyen | 120.04

Question 201
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $x \in [x_0, x_0+\varepsilon] \implies |x-x_0| \leqslant \varepsilon$
- ☐ $x - x_0 \leqslant \varepsilon \implies x \in [x_0, x_0+\varepsilon]$
- ☐ $|x-y| = 1 \iff y = x+1$ ou $y = x-1$
- ☐ $|x| > A \iff x > A$ ou $x < A$

Question 202
Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$.

- ☐ Il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $x < c < y$.
- ☐ Il existe $c \in \mathbb{Q}$ tel que $x < c < y$.
- ☐ Il existe $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x < c < y$.
- ☐ Il existe une infinité de $c \in \mathbb{Q}$ tels que $x < c < y$.

Question 203
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Il existe $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x - \sqrt{2} < 10^{-10}$.
- ☐ Il existe $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x - \frac{4}{3} < 10^{-10}$.
- ☐ Il existe une suite de nombres rationnels dont la limite est $\sqrt{2}$.
- ☐ Il existe une suite de nombres irrationnels dont la limite est $\frac{4}{3}$.

Question 204
Pour $n \geqslant 1$ on définit l'intervalle $I_n = [0, \frac{1}{n}]$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Pour tout $n \geqslant 1$, $I_n \subset I_{n+1}$.
- ☐ Si $x \in I_n$ pour tout $n \geqslant 1$, alors $x = 0$.

- ☐ L'union de tous les I_n (pour n parcourant $\mathbb{N}^*$) est $[0,+\infty[$.
- ☐ Pour $n < m$ alors $I_n \cap I_{n+1} \cap \ldots \cap I_m = I_n$.

Question 205

Pour $n \geqslant 1$ on définit l'intervalle $I_n = [0, n]$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Pour tout $n \geqslant 1$, $I_n \subset I_{n+1}$.
- ☐ Si $x \in I_n$ pour tout $n \geqslant 1$, alors $x = 0$.
- ☐ L'union de tous les I_n (pour n parcourant $\mathbb{N}^*$) est $[0,+\infty[$.
- ☐ Pour $n < m$ alors $I_n \cap I_{n+1} \cap \ldots \cap I_m = I_n$.

7.9 Intervalle, densité | Difficile | 120.04

Question 206

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $I \cup J$ est un intervalle.
- ☐ $I \cap J$ est un intervalle (éventuellement réduit à un point ou vide).
- ☐ Si $I \cap J \neq \varnothing$ alors $I \cup J$ est un intervalle.
- ☐ Si $I \subset J$ alors $I \cup J$ est un intervalle.

Question 207

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x < y$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si $x, y \in I$, il existe $c \in I$ tel que $x < c < y$.
- ☐ Si $x, y \in I$, alors pour tout c tel que $x < c < y$, on a $c \in I$.
- ☐ Si $x \notin I$ et $y \in I$, il existe $c \in I$ tel que $x < c < y$.
- ☐ Si $x \notin I$ et $y \in I$, il existe $c \notin I$ tel que $x < c < y$.

7.10 Maximum, majorant | Facile | 120.02

Question 208

Le maximum d'un ensemble E, s'il existe, est le réel $m \in E$ tel que pour tout $x \in E$, on a $x \leqslant m$.

- ☐ Si $E = [3, 7]$ alors 8 est un maximum de E.
- ☐ Si $E = [-3, -1]$ alors -1 est le maximum de E.
- ☐ L'ensemble $E = [-3, -1[$ n'admet pas de maximum.
- ☐ L'ensemble $E = [-3, 2[\ \cap\ ]-1, 1]$ n'admet pas de maximum.

7.11 Maximum, majorant | Moyen | 120.02

Question 209
On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ si pour tout $x \in E$, on a $x \leqslant M$.

- ☐ Si $E = [3,7]$ alors 8 est un majorant de E.
- ☐ Si $E = [-3,-1[$ alors tout $M \geqslant -1$ est un majorant de E.
- ☐ Si $E =]0,+\infty[$ alors tout $M \geqslant 0$ est un majorant de E.
- ☐ Si $E = [2,3] \cup [5,10]$ alors tout $M \geqslant 3$ est un majorant de E.

7.12 Maximum, majorant | Difficile | 120.02

Question 210
On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ si pour tout $x \in E$, on a $x \leqslant M$.

- ☐ Un intervalle non vide et différent de $\mathbb{R}$ admet toujours un majorant.
- ☐ Un intervalle non vide et borné admet au moins deux majorants.
- ☐ Un ensemble qui admet un majorant, en admet une infinité.
- ☐ L'ensemble $\mathbb{N}$ admet une infinité de majorants.

Suites

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

---

8 Suites réelles | 121

Cours ● Les suites
Vidéo ■ Premières définitions
Vidéo ■ Limite
Vidéo ■ Exemples remarquables
Vidéo ■ Théorèmes de convergence
Vidéo ■ Suites récurrentes
Fiche d'exercices ♦ Suites

8.1 Suites | Facile | 121.00

Question 211
Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. Comment traduire $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$?

- ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| < \varepsilon$
- ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| < \varepsilon$
- ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$
- ☐ $\exists \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$

Question 212
Soit (u_n) une suite réelle. Comment traduire $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$?

- ☐ $\forall A > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n > A$
- ☐ $\forall A > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n > A$
- ☐ $\exists A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow u_n > A$
- ☐ $\forall A > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow u_n > A$

Question 213
Soit $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2-1}$ et $v_n = \dfrac{2n+1}{n^2-1}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 2$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

Question 214
Soit $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ et $v_n = \cos\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-1}\pi\right)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$ n'existe pas

Question 215
Soit $u_n = 3^n - 2^n$ et $v_n = 3^n - (-3)^n$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$ n'existe pas

Question 216
Soit $u_n = n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ et $v_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{e}$

Question 217

Soit $u_n = \dfrac{\cos n}{2n+1}$ et $v_n = \dfrac{2n+\cos n}{2n+1}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$ n'existent pas
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$

Question 218

Soit $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2^n}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ La suite (u_n) est divergente.
- ☐ La suite (u_n) est strictement croissante.
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

Question 219

Soit $u_n = \ln\big(1 + n\mathrm{e}^{-n}\big)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ La suite (u_n) est bornée.
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$
- ☐ La suite (u_n) est divergente.

Question 220

Soit $u_n = \sqrt[n]{3+\cos n}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ La suite (u_n) est bornée.
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$
- ☐ La suite (u_n) est croissante.
- ☐ La suite (u_n) est divergente.

8.2 Suites | Moyen | 121.00

Question 221

Soit $u_n = \dfrac{2^{n+1} - 3^{n+1}}{2^n + 3^n}$ et $v_n = \dfrac{n2^{2n} - 3^n}{n2^{2n} + 3^n}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -3$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$

Question 222

Soit $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ et $v_n = \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n}\right)^n$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \mathrm{e}^{-1}$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \mathrm{e}^{-1}$
- ☐ La suite (u_n) est divergente.
- ☐ La suite (v_n) est divergente.

Question 223

Soit $u_n = \dfrac{2n^2 + 1}{n^2 + 1}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 2| < \varepsilon$
- ☐ $\exists \varepsilon > 0,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - 2| < \varepsilon$
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 10 \Rightarrow |u_n - 2| < 10^{-2}$
- ☐ $\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n > n_0 \Rightarrow |u_n - 2| < \varepsilon$

Question 224

Soient $u_n = \sqrt{n^2 + 4n - 1} - n$ et $v_n = \dfrac{4n - 1}{\sqrt{n^2 + 4n - 1} + n}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 2$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

Question 225

Soit $u_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ Pour tout $n \geqslant 1$, on a $u_n \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$.

- ☐ La suite (u_n) est divergente.
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- ☐ La suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant 2$.

Question 226

Soit $u_n = \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$ et $v_n = \sin\left(\frac{3}{2n\pi}\right)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ La suite (u_n) diverge et la suite (v_n) converge.
- ☐ Les suites (u_n) et (v_n) sont divergentes.
- ☐ La suite (u_n) n'a pas de limite et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$

Question 227

Soit $u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ Si les limites existent, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n < \lim_{n\to+\infty} v_n$.
- ☐ Les suites (u_n) et (v_n) sont divergentes.
- ☐ Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
- ☐ Les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite finie.

Question 228

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que $|u_{n+1} - 1| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - 1|$ pour tout $n \geqslant 0$. Que peut-on en déduire ?

- ☐ La suite (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- ☐ La suite (u_n) est divergente.
- ☐ Pour tout $n \geqslant 1$, $|u_n - 1| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - 1|$.
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

Question 229

Soit (u_n) une suite réelle. On suppose que $u_n \geqslant \sqrt{n}$ pour tout $n \geqslant 0$. Que peut-on en déduire ?

- ☐ La suite (u_n) n'est pas majorée.
- ☐ La suite (u_n) est croissante.
- ☐ La suite (u_n) est convergente.
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Question 230

Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ La suite (u_n) est croissante non majorée.
- ☐ La suite (u_n) est divergente.
- ☐ Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.
- ☐ (u_n) est convergente et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$.

8.3 Suites | Difficile | 121.00

Question 231

Soient a et b deux réels tels que $a > b > 0$. On pose $u_n = \frac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ et $v_n = \frac{na^{2n} - b^{2n}}{a^{2n} + b^{2n}}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ Les suites (u_n) et (v_n) sont divergentes.
- ☐ $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ et (v_n) est divergente.
- ☐ $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$
- ☐ $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$ et $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$

Question 232

Soit $u_n = \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} n}{n} \right|$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ La suite (u_n) est monotone.
- ☐ Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite.
- ☐ La suite (u_n) est divergente.
- ☐ $\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{2}$

Question 233

On considère les suites de termes généraux $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, $v_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k}$ et $w_n = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ Les suites (v_n) et (w_n) sont convergentes.
- ☐ La suite (u_n) est convergente.
- ☐ La suite (u_n) est divergente.
- ☐ L'une au moins des suites (v_n) ou (w_n) est divergente.

Question 234

Soit $a > 0$. On définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ par $u_0 > 0$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + a^2}{2u_n}$.
Que peut-on en déduire ?

- ☐ Le terme u_n n'est pas défini pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant a$, et $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
- ☐ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - a| \leqslant \dfrac{|u_1 - a|}{2^n}$.
- ☐ La suite (u_n) est divergente.

Question 235

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On suppose que (v_n) est croissante non majorée et que $v_n < u_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Que peut-on en déduire ?

- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n < \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
- ☐ La suite (u_n) est divergente.
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant u_0$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Question 236

Soit (u_n) une suite croissante. On suppose que $u_{n+1} - u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \geqslant 0$. Que peut-on en déduire ?

- ☐ (u_n) est divergente.
- ☐ (u_n) est bornée et $u_0 \leqslant u_n \leqslant u_0 + 2$.
- ☐ (u_n) est convergente et $u_0 \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant u_0 + 2$.
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Question 237

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 \geqslant 0$ et $u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$. Que peut-on en déduire ?

- ☐ Une telle suite (u_n) n'existe pas.
- ☐ $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$, et (u_n) est décroissante
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- ☐ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

Question 238

Soit (u_n) une suite croissante. On suppose que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \geqslant 0$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ (u_n) est majorée.

- ☐ (u_n) est divergente.
- ☐ (u_n) est convergente et $0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant 2$.
- ☐ $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Question 239

Soit (u_n) une suite croissante. On suppose que $u_n + \frac{1}{n+1} \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ (u_n) est majorée.
- ☐ (u_n) est divergente.
- ☐ (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n \geqslant 0$.
- ☐ $u_n = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Question 240

On admet que $\forall x \in [0,1[$, $\ln(1+x) \leqslant x \leqslant -\ln(1-x)$. Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$, $n \geqslant 1$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ La suite (u_n) est croissante non majorée.
- ☐ Pour tout $n \geqslant 1$, $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln(2)$.
- ☐ (u_n) est convergente et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(2)$.
- ☐ $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Limites de fonction

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

9 Limites des fonctions réelles | 123

Cours ● Limites et fonctions continues
Vidéo ■ Notions de fonction
Vidéo ■ partie 2. Limites
Fiche d'exercices ♦ Limites de fonctions

9.1 Limites des fonctions réelles | Facile | 123.03

9.1.1 Fraction rationnelle

Question 241
Soit $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2-x-1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$
- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$

Question 242
Soit $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to1} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to1} f(x) = \frac{2}{3}$
- ☐ $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^+} f(x) = +\infty$

Question 243
Soit $f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{3x}{(x+1)(x^2-x+1)}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to-1^+} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$
- ☐ $\lim_{x\to-1} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to-1} f(x) = -2$

9.1.2 Fonction racine carrée

Question 244
Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2x}}{x-1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to1} f(x) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$
- ☐ f n'admet pas de limite en 1.

Question 245
Soit $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} + x$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{1}{2}$
- ☐ f n'admet pas de limite en $-\infty$.

9.1.3 Croissances comparées

Question 246

Soit $f(x) = x \ln x - x^2 + 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- ☐ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

Question 247

Soit $f(x) = e^{2x} - x^7 + x^2 - 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Question 248

Soit $f(x) = (x^5 - x^3 + 1)e^{-x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

9.1.4 Encadrement

Question 249

Soit $f(x) = \sin x \cdot \sin \frac{1}{x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- ☐ f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Question 250

Soit $f(x) = e^{-x}\cos(e^{2x})$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- ☐ f n'admet pas de limite en $+\infty$.
- ☐ f n'admet pas de limite en $-\infty$.
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

9.2 Limites des fonctions réelles | Moyen | 123.03

9.2.1 Définition d'une limite

Question 251

Soit $a \in \mathbb{R}$, I un intervalle contenant a et f une fonction définie sur $I \setminus \{a\}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to a} f(x) = l\,(l \in \mathbb{R})$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, |x-a| < \alpha \Rightarrow |f(x)-l| < \varepsilon$
- ☐ $\lim_{x\to a} f(x) = l\,(l \in \mathbb{R})$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I\setminus\{a\}, |x-a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-l| < \alpha$
- ☐ $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall A > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, f(x) > A \Rightarrow |x-a| < \alpha$
- ☐ $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ si et seulement si $\forall A < 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in I \setminus \{a\}, |x-a| < \alpha \Rightarrow f(x) < A$

Question 252

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l\,(l \in \mathbb{R})$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |f(x)-l| < \varepsilon \Rightarrow x > A$
- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l\,(l \in \mathbb{R})$ si et seulement si $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \geqslant A \Rightarrow |f(x)-l| \leqslant \varepsilon$
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ si et seulement si $\forall A > 0, \exists B < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x \leqslant B \Rightarrow f(x) \geqslant A$
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ si et seulement si $\exists B < 0, \forall A < 0, \forall x \in \mathbb{R}, x < B \Rightarrow f(x) < A$

9.2.2 Fonction racine carrée

Question 253

Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x}}}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to0^+} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to0^+} f(x) = +\infty$
- ☐ f n'admet pas de limite en $+\infty$.
- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$

9.2.3 Fonction valeur absolue

Question 254

Soit $f(x) = x - \frac{|x|}{x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to0} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- ☐ f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Question 255

Soit $f(x) = \frac{x}{|x-1|} - \frac{3x-1}{|x^2-1|}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to 1} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to 1} f(x) = 1$
- ☐ f n'admet pas de limite en -1.
- ☐ $\lim_{x\to -1} f(x) = +\infty$

9.2.4 Fonction périodique

Question 256
Soit $f(x) = \sin x$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$
- ☐ f n'admet pas de limite en $+\infty$.
- ☐ $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$
- ☐ f n'admet pas de limite en $-\infty$.

9.2.5 Dérivabilité en un point

Question 257
Soit $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$
- ☐ f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$

Question 258
Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

Question 259
Soit $f(x) = \frac{\sin(3x)}{\sin(4x)}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f n'admet pas de limite en 0
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{4}$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{4}{3}$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Question 260
Soit $f(x) = \frac{\cos x - 1}{x^2}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim_{x \to 0} f(x) = -\frac{1}{2}$
- ☐ $\lim_{x \to 0} f(x) = \frac{1}{2}$

9.3 Limites des fonctions réelles | Difficile | 123.03

9.3.1 Fonction partie entière

Question 261
Soit $f(x) = xE(\frac{1}{x})$, où E désigne la partie entière. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$
- ☐ f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

Question 262
Soit $f(x) = xE(\frac{1}{x})$, où E désigne la partie entière. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

9.3.2 Densité des rationnels et irrationnels

Question 263
Soit f une fonction définie sur $[0,1]$ par : $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$
- ☐ $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x \to 0} f(x) = -1$
- ☐ f n'admet pas de limite en 0.

Question 264
Soit f une fonction définie sur $]0,1[$ par : $f(x) = 1$, si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(x) = \frac{1}{m}$, si $x = \frac{n}{m}$, où $n, m \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{n}{m}$ soit une fraction irréductible. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0$
- ☐ f n'admet pas de limite en 1^-.
- ☐ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$
- ☐ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$

9.3.3 Fonction monotone

Question 265
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f n'admet pas de limite en $+\infty$.
- ☐ f admet une limite en $+\infty$.
- ☐ Si f est majorée, f admet une limite finie en $+\infty$.
- ☐ Si f est non majorée, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

9.3.4 Fonction racine n-ième

Question 266
Soit $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{3}{2}$
- ☐ f n'admet pas de limite en 0.
- ☐ $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$

Question 267
Soit $f(x) = x + \sqrt[5]{1-x^5}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
- ☐ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Question 268
Soit $f(x) = \sqrt{x^3+2x^2+3} - ax\sqrt{x+b}$, $a, b \in \mathbb{R}$. f admet une limite finie en $+\infty$ si et seulement si :

- ☐ $a > 0$ et $b > 0$
- ☐ $a = 1$ et $b > 0$
- ☐ $a = 1$ et $b = 2$
- ☐ $a = 1$ et $b = 0$

Question 269

Soit f la fonction définie sur $]\frac{3}{2},+\infty[\setminus\{2\}$ par : $f(x)=\begin{cases} a\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}, & \text{si } x<2 \\ \frac{\sqrt{2x-3}-b}{x-2}, & \text{si } x>2 \end{cases}$. f admet une limite finie quand x tend vers 2 si et seulement si :

- ☐ $a=2$ et $b=1$
- ☐ $a>0$ et $b>0$
- ☐ $a=2$ et $b>0$
- ☐ $a=0$ et $b=1$

9.3.5 Fonction puissance

Question 270

Soit $f(x)=\frac{(2x)^x}{x^{(2x)}}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$
- ☐ f n'admet pas de limite en $+\infty$.
- ☐ $\lim_{x\to+\infty} f(x)=1$

Continuité

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

10 Continuité | 123

Cours ● Limites et fonctions continues
Vidéo ■ Continuité en un point
Vidéo ■ Continuité sur un intervalle
Vidéo ■ Fonctions monotones et bijections
Fiche d'exercices ♦ Fonctions continues

10.1 Notion de fonctions | Facile | 123.00

Question 271

Quels arguments sont valides pour justifier que la fonction $x\mapsto\sin(x)$ n'est pas une fonction croissante sur $\mathbb{R}$?

- ☐ $\sin(\pi)=\sin(0)$ et pourtant $\pi\neq 0$.
- ☐ $\sin(\frac{\pi}{2})>\sin(0)$ et pourtant $0<\frac{\pi}{2}$.
- ☐ $\sin(\frac{3\pi}{4})>\sin(\pi)$ et pourtant $\frac{3\pi}{4}<\pi$.
- ☐ On a $|\sin x|\leqslant|x|$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Question 272
Soient f, g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $f - 2g$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $f^2 \times g$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $\frac{f}{g^2}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $\sqrt{f+g}$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Question 273
Quelles sont les assertions vraies concernant le domaine de définition des fonctions suivantes ? (Rappel : le domaine de définition de f est le plus grand ensemble $D_f \subset \mathbb{R}$ sur lequel f est définie.)

- ☐ Le domaine de définition de $\exp(\frac{1}{x^2+1})$ est $\mathbb{R}$.
- ☐ Le domaine de définition de $\sqrt{x^2-1}$ est $[1, +\infty[$.
- ☐ Le domaine de définition de $\frac{1}{\sqrt{(x-1)(x-3)}}$ est $]1, 3[$.
- ☐ Le domaine de définition de $\ln(x^3 - 8)$ est $[2, +\infty[$.

10.2 Notion de fonctions | Moyen | 123.00

Question 274
Quels arguments sont valables pour montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est décroissante ?

- ☐ On a $x \leqslant y$ qui implique $f(x) \leqslant f(y)$.
- ☐ On a $x \leqslant y$ qui implique $f(x) \geqslant f(y)$.
- ☐ On a $x \geqslant y$ qui implique $f(x) \leqslant f(y)$.
- ☐ On a $x \geqslant y$ qui implique $f(x) \geqslant f(y)$.

Question 275
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $\forall M > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant M$ implique f majorée.
- ☐ $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists M > 0 \quad f(x) \geqslant M$ implique f majorée.
- ☐ $\exists M > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leqslant M$ implique f majorée.
- ☐ $\exists M > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \geqslant M$ implique f majorée.

Question 276
Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante car sa dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ est partout négative.

- ☐ Une fonction périodique et croissante est constante.
- ☐ Si $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est croissante, alors $1/f$ est décroissante.
- ☐ Si f et g sont croissantes, alors $f - g$ est croissante.

Question 277
Soit $f(x) = \ln(x-1)$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$. Quelles sont les assertions vraies concernant les domaines de définition ? (Rappel : le domaine de définition de f est le plus grand ensemble $D_f \subset \mathbb{R}$ sur lequel f est définie.)

- ☐ $D_f \cup D_g = [-1, +\infty[$.
- ☐ Pour la composition $f \circ g$, $D_{f\circ g} = [-1, +\infty[$.
- ☐ Pour la composition $g \circ f$, $D_{g\circ f} =]1, +\infty[$.
- ☐ Pour la fonction $f \times g$, $D_{f\times g} =]1, +\infty[$.

10.3 Notion de fonctions | Difficile | 123.00

Question 278
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à valeurs strictement positives. Quels arguments sont valables pour montrer que f est croissante ?

- ☐ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x+1) \geqslant f(x)$.
- ☐ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\frac{f(x+1)}{f(x)} \geqslant 1$.
- ☐ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $h > 0$ tel que $f(x+h) \geqslant f(x)$.
- ☐ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $h > 0$, on a $\frac{f(x+h)}{f(x)} \geqslant 1$.

Question 279
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si f est bornée et g majorée alors $f - g$ est bornée.
- ☐ Si f bornée et g majorée alors $f - g$ est minorée.
- ☐ Si f et g sont minorées, alors $f \times g$ est minorée.
- ☐ Si f et g sont minorées, alors $|f \times g|$ est bornée.

Question 280
Soient $f :]-\infty, 0[\to]0, 1[$ et $g :]-2, 2[\to]0, +\infty[$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Le domaine de définition de $x \mapsto g\big(f(2x)\big)$ est $]-1, 1[$.
- ☐ Le domaine de définition de $x \mapsto g\big(\ln(f(x))\big)$ est $]0, +\infty[$.
- ☐ Le domaine de définition de $x \mapsto \frac{g(x+1)}{f(x)}$ est $]-3, 0[$.
- ☐ Le domaine de définition de $x \mapsto \frac{f(x)\times g(x)}{f(x)+g(x)}$ est $]-2, 0[$.

10.4 Fonctions continues | Facile | 123.01, 123.02

Question 281
Quelles fonctions sont continues en $x = 0$?

- ☐ $x \mapsto |x|$ (valeur absolue).
- ☐ $x \mapsto E(x)$ (partie entière).
- ☐ $x \mapsto \frac{1}{x}$ (inverse).
- ☐ $x \mapsto \sqrt{x}$ (racine carrée).

Question 282
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont continues sur $\mathbb{R}$?

- ☐ $x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$
- ☐ $x \tan(x)$
- ☐ $x \mapsto \frac{1}{\exp(x)}$
- ☐ $x \mapsto \ln(\exp(3x))$

Question 283
Quelles sont les propriétés vraies ?

- ☐ La somme de deux fonctions continues est continue.
- ☐ Le produit de deux fonctions continues est continue.
- ☐ Le quotient de deux fonctions continues est continue.
- ☐ L'inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas est continue.

10.5 Fonctions continues | Moyen | 123.01, 123.02

Question 284
Parmi les propriétés suivantes, quelles sont celles qui implique que f est continue en x_0 ?

- ☐ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
- ☐ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \qquad |x - x_0| \leqslant \delta \implies |f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$
- ☐ $\exists \delta > 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \qquad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
- ☐ $\big|f(x) - f(x_0)\big| \to 0$ lorsque $x \to x_0$

Question 285
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont continues sur $\mathbb{R}$?

- ☐ $x \mapsto P(x)$, où P est un polynôme.
- ☐ $x \mapsto |f(x)|$, où f est une fonction continue.
- ☐ $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$, où f est une fonction continue ne s'annulant pas.
- ☐ La fonction f définie par $f(x) = 0$, si $x \in \mathbb{Q}$ et par $f(x) = 1$ sinon.

Question 286
En posant $f(0) = 0$, quelles fonctions deviennent continues sur $\mathbb{R}$?

- ☐ $f(x) = \frac{1}{x}$
- ☐ $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
- ☐ $f(x) = x\ln(|x|)$
- ☐ $f(x) = e^{1/x}$

10.6 Fonctions continues | Difficile | 123.01, 123.02

Question 287
Parmi les propriétés suivantes, quelles sont celles qui impliquent que f est continue en x_0 ?

- ☐ $f(x)^2 \to f(x_0)^2$ (lorsque $x \to x_0$)
- ☐ $f(x)^3 \to f(x_0)^3$ (lorsque $x \to x_0$)
- ☐ $E(f(x)) \to E(f(x_0))$ (lorsque $x \to x_0$)
- ☐ $\exp(f(x)) \to \exp(f(x_0))$ (lorsque $x \to x_0$)

Question 288
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si $u_n \to \ell$ et f continue en ℓ, alors $f(u_n)$ admet une limite.
- ☐ Si $f(u_n) \to f(\ell)$ et f est continue en ℓ, alors $u_n \to \ell$.
- ☐ Si $u_n \to \ell$ et $f(u_n)$ n'a pas de limite, alors f n'est pas continue en ℓ.
- ☐ Si pour toute suite qui vérifie $u_n \to \ell$, on a $f(u_n) \to f(\ell)$, alors f est continue en ℓ.

10.7 Théorèmes des valeurs intermédiaires | Facile | 123.01, 123.02

Question 289
Quelles assertions peut-on déduire du théorème des valeurs intermédiaires ?

- ☐ $\sin(x) - x^2 + 1$ s'annule sur $[0, \pi]$.
- ☐ $x^5 - 37$ s'annule sur $[2, 3]$.
- ☐ $\ln(x+1) - x + 1$ s'annule sur $[0, +\infty[$.
- ☐ $e^x + e^{-x}$ s'annule sur $[-1, 1]$.

Question 290
Soit $f(x) = x^2 - 7$. On applique la méthode de dichotomie sur l'intervalle $[2;3]$. On calcule $f(2,125) = -1,9375$; $f(2,5) = -0,75$; $f(2,625) = -0,109375$; $f(2,75) = 0,5625$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f s'annule sur $[2;2,5]$ et sur $[2,5;3]$.
- ☐ f s'annule sur $[2,5;3]$.
- ☐ f s'annule sur $[2,75;3]$.
- ☐ $2,6 \leqslant \sqrt{7} \leqslant 2,8$

10.8 Théorèmes des valeurs intermédiaires | Moyen | 123.01, 123.02

Question 291

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue (avec $a < b$). Quelles assertions sont une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires ?

- ☐ Si $f(a) \cdot f(b) > 0$ alors f s'annule sur $[a,b]$.
- ☐ Si $f(a) < k < f(b)$ alors $f(x) - k$ s'annule sur $[a,b]$.
- ☐ Pour $I \subset \mathbb{R}$, si $f(I)$ est un intervalle alors I est un intervalle.
- ☐ Si $c \in]a,b[$ alors $f(c) \in]f(a), f(b)[$.

Question 292

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$. Par dichotomie on construit deux suites (a_n) et (b_n), avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si $f(\frac{1}{2}) > 0$ alors $a_1 = \frac{1}{2}$ et $b_1 = \frac{1}{2}$.
- ☐ f s'annule sur $[a_n, b_n]$ (quel que soit $n \geqslant 0$).
- ☐ (a_n) et (b_n) sont des suites croissantes.
- ☐ $a_n \to 0$ ou $b_n \to 0$.

10.9 Théorèmes des valeurs intermédiaires | Difficile | 123.01, 123.02

Question 293

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue (avec $a < b$). Quelles assertions sont vraies ?

- ☐ Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ et f croissante alors f s'annule une unique fois sur $[a,b]$.
- ☐ Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ et f n'est pas strictement monotone alors f s'annule au moins deux fois sur $[a,b]$.
- ☐ Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors f s'annule un nombre fini de fois sur $[a,b]$.
- ☐ Si $f(a) \cdot f(b) < 0$ et f strictement décroissante, alors f s'annule une unique fois sur $[a,b]$.

Question 294

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(0) > 0$ et $f(1) < 0$. Par dichotomie on construit deux suites (a_n) et (b_n), avec $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes.
- ☐ $(f = 0)$ admet une unique solution sur $[a_n, b_n]$.
- ☐ Si $f(a_n) < 0$ et $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$ alors $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
- ☐ Pour $n = 10$, a_{10} approche une solution de $(f = 0)$ à moins de $\frac{1}{1000}$.

10.10 Maximum, bijection | Facile | 123.04

Question 295

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f admet un maximum sur $]a,b[$.
- ☐ f admet un maximum en a ou en b.
- ☐ f est bornée sur $]a,b[$.
- ☐ f admet un maximum ou un minimum sur $[a,b]$ mais pas les deux.

Question 296

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : elle est strictement croissante sur $]-\infty,0]$; strictement décroissante sur $[0,1]$; strictement croissante sur $[1,+\infty[$. En plus $\lim_{x\to-\infty} f = -\infty$, $f(0) = 2$, $f(1) = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f = 3$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ La restriction $f_| :]-\infty,0] \to]-\infty,2]$ est bijective.
- ☐ La restriction $f_| : [1,+\infty[\to [1,+\infty[$ est bijective.
- ☐ La restriction $f_| : [0,1] \to [1,2]$ est bijective.
- ☐ La restriction $f_| :]0,+\infty] \to [1,3[$ est bijective.

10.11 Maximum, bijection | Moyen | 123.04

Question 297

Soit $f(x) = x\sin(\pi x) - \ln(x) - 1$ définie sur $]0,1]$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est bornée et atteint ses bornes.
- ☐ f est majorée.
- ☐ f est minorée.
- ☐ Il existe $c \in]0,1]$ tel que $f(c) = 0$.

Question 298

Soit $f : [a,b] \to [c,d]$ continue avec $a < b$, $c < d$, $f(a) = c$, $f(b) = d$. Quelles propriétés impliquent f bijective ?

- ☐ f injective.
- ☐ f surjective.
- ☐ f croissante.
- ☐ f strictement croissante.

10.12 Maximum, bijection | Difficile | 123.04

Question 299

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $J = f(I)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ J est un intervalle.
- ☐ Si I est majoré, alors J est majoré.
- ☐ Si I est fermé borné, alors J est fermé borné.
- ☐ Si I est borné, alors J est borné.

Question 300
Soit $f : I \to J$ une fonction continue, où I et J sont des intervalles de $\mathbb{R}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Si f surjective et strictement croissante, alors f est bijective.
- ☐ Si f bijective, alors sa bijection réciproque f^{-1} est continue.
- ☐ Si f bijective et $I = \mathbb{R}$, alors J n'est pas un intervalle borné.
- ☐ Si f bijective et J est un intervalle fermé et borné, alors I est un intervalle fermé et borné.

Dérivabilité

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

11 Dérivabilité des fonctions réelles | 124

Cours ● Dérivée d'une fonction
Vidéo ■ Définition
Vidéo ■ Calculs
Vidéo ■ Extremum local, théorème de Rolle
Vidéo ■ Théorème des accroissements finis
Fiche d'exercices ♦ Fonctions dérivables

11.1 Dérivées | Facile | 124.00

Question 301
Soit $f(x) = \dfrac{2}{x}$ et $g(x) = 2\sqrt{x}$. On note $\mathscr{C}_f$ (resp. $\mathscr{C}_g$) la courbe représentative de f (resp. g). Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $(1,2)$ est $y = -2x + 4$.
- ☐ Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $(1,2)$ est $y = -2x + 2$.
- ☐ Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point $(1,2)$ est $y = x + 2$.
- ☐ Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point $(1,2)$ est $y = x + 1$.

Question 302
Etant donné que $f(3) = 1$ et $f'(3) = 5$. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $(3,1)$ est :

- ☐ $y = 1(x-3)+5 = x+2$
- ☐ $y = 1(x-3)-5 = x-8$
- ☐ $y = 5(x-3)-1 = 5x-16$
- ☐ $y = 5(x-3)+1 = 5x-14$

Question 303

Soit $f(x) = |x-1|$. On note $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) pour désigner la dérivée à droite (resp. à gauche) en a. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $f'_d(1) = 1$ et $f'_g(1) = 1$
- ☐ f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1$.
- ☐ f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1$.
- ☐ f n'est pas dérivable en 1 car $f'_d(1) = 1$ et $f'_g(1) = -1$.

Question 304

Soit $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ f est continue et dérivable en 2.
- ☐ f est continue et non dérivable en 2.
- ☐ La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 2 est une droite verticale.
- ☐ La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 2 est une droite horizontale.

Question 305

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ La dérivée de $f(x) = (2x+1)^2$ est $f'(x) = 4(2x+1)$.
- ☐ La dérivée de $f(x) = (2x+1)^2$ est $f'(x) = 2(2x+1)$.
- ☐ La dérivée de $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x}$ est $f'(x) = 2\mathrm{e}^{x^2-2x}$.
- ☐ La dérivée de $f(x) = \mathrm{e}^{x^2-2x}$ est $f'(x) = 2(x-1)\mathrm{e}^{x^2-2x}$.

Question 306

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ La dérivée de $f(x) = \sin[(2x+1)^2]$ est $f'(x) = 2\cos[(2x+1)^2]$.
- ☐ La dérivée de $f(x) = \sin[(2x+1)^2]$ est $f'(x) = 4(2x+1)\cos[(2x+1)^2]$.
- ☐ La dérivée de $f(x) = \tan(1+x^2)$ est $f'(x) = \dfrac{2x}{\cos^2(1+x^2)}$.
- ☐ La dérivée de $f(x) = \tan(1+x^2)$ est $f'(x) = 1+\tan^2(1+x^2)$.

Question 307

Quelles sont les bonnes réponses ?

- [ ] La dérivée de $f(x)=\arcsin(1-2x^2)$ est $f'(x)=\dfrac{-2x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$.
- [ ] La dérivée de $f(x)=\arcsin(1-2x^2)$ est $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x^2}}$.
- [ ] La dérivée de $f(x)=\arccos(x^2-1)$ est $f'(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$.
- [ ] La dérivée de $f(x)=\arccos(x^2-1)$ est $f'(x)=\dfrac{-2x}{|x|\sqrt{2-x^2}}$.

Question 308
Soit $f(x)=x^2-\mathrm{e}^{x^2-1}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- [ ] f admet un minimum local en 0.
- [ ] f admet un maximum local en 0.
- [ ] f admet un point d'inflexion en 0.
- [ ] la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 est une droite verticale.

Question 309
Soit $f(x)=x^4-x^3+1$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- [ ] f admet un minimum local au point $\dfrac{3}{4}$.
- [ ] f admet un maximum local au point 0.
- [ ] f admet un minimum local au point 0.
- [ ] f admet un point d'inflexion au point 0.

Question 310
Soit $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- [ ] $f''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}$
- [ ] $f''(x)=\dfrac{-2}{(1+x)^3}$
- [ ] pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{n}{(1+x)^{n+1}}$
- [ ] pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$

11.2 Dérivées | Moyen | 124.00

Question 311
Soit $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- [ ] $f''(x)=(x^2+4x+2)\mathrm{e}^x$

- ☐ $f''(x) = 2e^x$
- ☐ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n^2 - n)e^x$.
- ☐ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n)e^x$.

Question 312

Soit $f(x) = x\ln(1+x)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $f'(x) = (x)'[\ln(1+x)]' = 1 \times \dfrac{1}{1+x}$
- ☐ $f'(x) = \ln(1+x) + \dfrac{x}{1+x}$
- ☐ Pour $n \geqslant 2$, $f^{(n)}(x) = n \times \dfrac{1}{(1+x)^n}$.
- ☐ Pour $n \geqslant 2$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n(n-2)!}{(1+x)^n}(x+n)$.

Question 313

Soit $f(x) = x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ Il existe $a \in]0,1[$ tel que $f'(a) = 0$.
- ☐ Il existe $a \in]0,1[$ où la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est une droite horizontale.
- ☐ Il existe $a \in]0,1[$ où la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est une droite verticale.
- ☐ $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion en 0.

Question 314

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \begin{cases} e^{x^2+x} & \text{si } x \leqslant 0 \\ a\arctan x + b & \text{si } x > 0. \end{cases}$

Quelles valeurs faut-il donner à a et b pour que f soit dérivable sur $\mathbb{R}$?

- ☐ $a = 1$ et $b = 0$
- ☐ $a = 0$ et $b = 1$
- ☐ $a = 0$ et $b = 0$
- ☐ $a = 1$ et $b = 1$

Question 315

Soit $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ f n'est pas dérivable en 0.
- ☐ f est dérivable en 0 est $f'(0) = 0$.

- [ ] f est dérivable en 0 est $f'(0) = 1$.
- [ ] Pour $x \neq 0$, $f'(x) = 1 + 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.

Question 316

Soit $f(x) = \mathrm{e}^{3x^4 - 4x^3}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- [ ] $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0$
- [ ] f admet un minimum en 1.
- [ ] f admet un maximum en 1.
- [ ] Il existe $a \in]0,1[$ tel que $f''(a) = 0$.

Question 317

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$. Quel est l'ensemble S des points x_0 où la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite d'équation $y = x$?

- [ ] $S = \{-1\}$
- [ ] $S = \{0\}$
- [ ] $S = \{0, 1\}$
- [ ] $S = \varnothing$

Question 318

Soit $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$. Quel est l'ensemble S des points x_0 où la tangente à $\mathscr{C}_f$ est perpendiculaire à la droite d'équation $y = x$?

- [ ] $S = \{-2\}$
- [ ] $S = \{-3\}$
- [ ] $S = \{-1, -3\}$
- [ ] $S = \varnothing$

Question 319

On considère $f(x) = x^2 - x$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- [ ] f vérifie les hypothèses du théorème de Rolle et une valeur vérifiant la conclusion de ce théorème est $\frac{1}{2}$.
- [ ] f ne vérifie pas les hypothèses du théorème de Rolle.
- [ ] f ne vérifie pas les hypothèses du théorème des accroissements finis.
- [ ] f vérifie les hypothèses du théorème des accroissements finis et une valeur vérifiant la conclusion de ce théorème est $\frac{1}{2}$.

Question 320
Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln(x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$
Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- ☐ $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f''(x) = 2\ln x^2 + 6$
- ☐ f est deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
- ☐ f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

11.3 Dérivées | Difficile | 124.00

Question 321
Soit $f(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 0$
- ☐ $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$
- ☐ La fonction f est paire.
- ☐ $f(x) = \dfrac{\pi}{2}$ si $x > 0$ et $f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ si $x < 0$

Question 322
Soit f une fonction continue sur $[-1,1]$ telle que $f(0) = \pi$ et, pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Comment peut-on exprimer f ?

- ☐ $f(x) = \sqrt{1-x^2} - 1 + \pi$
- ☐ $f(x) = \arcsin(x) + \pi$
- ☐ $f(x) = -\arccos x + \dfrac{3\pi}{2}$
- ☐ Une telle fonction f n'existe pas.

Question 323
Soit $f(x) = x^3 + x^2 + x - \dfrac{13}{12}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $f(0) = -\dfrac{13}{12} < 0$ et $f(1) = -\dfrac{1}{12} < 0$, donc $f(x) = 0$ n'a pas de solution dans $]0,1[$.
- ☐ L'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $]0,1[$.
- ☐ Le théorème de Rolle s'applique à une primitive de f sur $[0,1]$.
- ☐ Le théorème de Rolle s'applique à f sur $[0,1]$.

Question 324
Soit $f(x) = \tan(x)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $f(0)=0=f(\pi)$ et donc il existe $c\in]0,\pi[$ tel que $f'(c)=0$.
- ☐ $f(0)=0=f(\pi)$ mais il n'existe pas de $c\in]0,\pi[$ tel que $f'(c)=0$.
- ☐ Le théorème de Rolle ne s'applique pas à f sur $[0,\pi]$ car $f(0)\neq f(\pi)$.
- ☐ Le théorème de Rolle ne s'applique pas à f sur $[0,\pi]$.

Question 325

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $f(x)=x^3+3x+1$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)>0$
- ☐ f est une bijection et $(f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{3}$.
- ☐ f est une bijection et $(f^{-1})'(1)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{6}$.
- ☐ f est une bijection et $(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'(x)}$.

Question 326

Soit f une fonction réelle continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et telle que $f(a)=f(b)=0$. Soit $\alpha\notin[a,b]$ et $g(x)=\dfrac{f(x)}{x-\alpha}$.

- ☐ On peut appliquer le théorème de Rolle à g sur $[a,b]$.
- ☐ Il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(c)}{c-\alpha}$.
- ☐ Il existe $c\in]a,b[$ tel que la tangente à $\mathscr{C}_f$ en c passe par $(\alpha,0)$.
- ☐ La dérivée de g est $g'(x)=\dfrac{f'(x)}{(x-\alpha)^2}$.

Question 327

Soit $n\geqslant 2$ un entier et $f(x)=\dfrac{1+x^n}{(1+x)^n}$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $f'(x)=\dfrac{n(x^{n-1}-1)}{(1+x)^{n+1}}$ et f admet un minimum en 1.
- ☐ $f'(1)\neq 0$ et donc f n'admet pas d'extremum en 1.
- ☐ Le théorème de Rolle s'applique à f sur $[-1,1]$ car $f(-1)=f(1)$.
- ☐ $\forall x\geqslant 0,\ (1+x)^n\leqslant 2^{n-1}(1+x^n)$.

Question 328

Soit $f(x)=\mathrm{e}^x$. Quelles sont les bonnes réponses ?

- ☐ $f''(x)$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.
- ☐ f est convexe sur $\mathbb{R}$.
- ☐ f est concave sur $\mathbb{R}$.

☐ $\forall t \in [0,1]$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $t \ln x + (1-t)\ln y \leqslant \ln[tx + (1-t)y]$.

Question 329

Soit $f(x) = \ln(x)$. Quelles sont les bonnes réponses ?

☐ $f''(x)$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}^{+*}$.

☐ f est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.

☐ f est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$.

☐ $\forall t \in [0,1]$ et $\forall x, y \in \mathbb{R}$, on a : $\mathrm{e}^{tx+(1-t)y} \leqslant t\mathrm{e}^x + (1-t)\mathrm{e}^y$.

Question 330

Soit $f(x) = \arcsin(1-2x^2)$ définie sur $[-1,1]$. Quelles sont les bonnes réponses ?

☐ $\forall x \in [-1,1]$, $f'(x) = \dfrac{-2}{\sqrt{1-x^2}}$

☐ $\forall x \in [-1,1]$, $f(x) = -2\arcsin x + \dfrac{\pi}{2}$

☐ $f'_d(0) = -2$ et $f'_g(0) = 2$

☐ La fonction f est paire avec $f(x) = -2\arcsin x + \dfrac{\pi}{2}$ si $x \in [0,1]$.

Fonctions usuelles

Arnaud Bodin, Abdellah Hanani, Mohamed Mzari

12 Fonctions usuelles | 126

Cours ● Fonctions usuelles
Vidéo ■ partie 1. Logarithme et exponentielle
Vidéo ■ partie 2. Fonctions circulaires inverses
Vidéo ■ partie 3. Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses
Fiche d'exercices ♦ Fonctions circulaires et hyperboliques inverses

12.1 Fonctions usuelles | Facile | 126.00

12.1.1 Domaine de définition

Question 331

Soit $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^2-2x-1}$ et $g(x) = \sqrt{x^2-1}$. On notera D_f et D_g le domaine de définition de f et de g respectivement. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ $D_f =]1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}[$

- ☐ $D_f = \mathbb{R}\setminus\{1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$
- ☐ $D_g = [-1,1]$
- ☐ $D_g =]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

Question 332
Soit $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2-x}}$ et $g(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{2-x}}$. On notera D_f et D_g le domaine de définition de f et g respectivement. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $D_f =]-\infty,1]\cup]2,+\infty[$
- ☐ $D_f = [1,2[$
- ☐ $D_g =]-\infty,1]$
- ☐ $D_g =]-\infty,2[$

Question 333
Soit $f(x) = \ln(\frac{2+x}{2-x})$ et $g(x) = x^x$. On notera D_f et D_g le domaine de définition des fonctions f et g respectivement. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $D_f = \mathbb{R}\setminus\{2\}$
- ☐ $D_f =]-2,2[$
- ☐ $D_g = \mathbb{R}$
- ☐ $D_g =]0,+\infty[$

12.1.2 Fonctions circulaires réciproques

Question 334
Soit $f(x) = \arcsin(2x)$, $g(x) = \arccos(x^2-1)$ et $h(x) = \arctan\sqrt{x}$. On notera D_f, D_g et D_h le domaine de définition de f, g et h respectivement. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $D_f = [-1,1]$
- ☐ $D_g = [-1,1]$
- ☐ $D_g = [-\sqrt{2},\sqrt{2}]$
- ☐ $D_h = [0,+\infty[$

Question 335
Soit $A = \arcsin(\sin\frac{15\pi}{7})$, $B = \arccos(\cos\frac{21\pi}{11})$ et $C = \arctan(\tan\frac{17\pi}{13})$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $A = \frac{15\pi}{7}$
- ☐ $A = \frac{\pi}{7}$
- ☐ $B = -\frac{\pi}{11}$
- ☐ $C = \frac{4\pi}{13}$

Question 336
Soit $f(x) = \arcsin(\cos x)$ et $g(x) = \arccos(\sin x)$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est périodique de période π.
- ☐ g est périodique de période 2π.
- ☐ f est une fonction paire.
- ☐ g est une fonction impaire.

12.1.3 Equations

Question 337
Soit (E) l'équation : $\ln(x^2 - 1) = \ln(x - 1) + \ln 2$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ (E) est définie sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.
- ☐ (E) est définie sur $]1, +\infty[$.
- ☐ (E) n'admet pas de solution.
- ☐ (E) admet une unique solution $x = 1$.

Question 338
Soit (E) l'équation : $e^{2x} + e^x - 2 = 0$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ (E) est définie sur $\mathbb{R}$.
- ☐ Le domaine de définition de (E) est $\mathbb{R}^+$.
- ☐ (E) admet deux solutions distinctes.
- ☐ (E) admet une unique solution $x = 0$.

12.1.4 Etude de fonctions

Question 339
Soit $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est définie sur $\mathbb{R}$.
- ☐ f est croissante.
- ☐ f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- ☐ L'application réciproque de f est f.

Question 340
Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est définie sur $]0, +\infty[$.
- ☐ f est croissante sur $]0, +\infty[$.
- ☐ f est une bijection de $]0, e]$ dans $]-\infty, \frac{1}{e}]$.
- ☐ f est une bijection de $[e, +\infty[$ dans $]0, \frac{1}{e}]$.

12.2 Fonctions usuelles | Moyen | 126.00

12.2.1 Domaine de définition

Question 341
Soit $f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$ et $g(x) = e^{\frac{1}{x}} \sqrt[4]{1-|x|}$. On notera D_f et D_g le domaine de définition de f et g respectivement. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $D_f = \mathbb{R}$
- ☐ $D_f = [-1,1]$
- ☐ $D_g = \mathbb{R}^*$
- ☐ $D_g = [-1,0[\cup]0,1]$

12.2.2 Equations - Inéquations

Question 342
Soit (E) l'équation : $4^x - 3^x = 3^{x+1} - 2^{2x+1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ (E) est définie sur $\mathbb{R}$.
- ☐ (E) admet une unique solution $x = 1$.
- ☐ (E) admet deux solutions distinctes.
- ☐ (E) n'admet pas de solution.

Question 343
Soit (E) l'inéquation : $\ln|1+x| - \ln|2x+1| \leqslant \ln 2$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Le domaine de définition de (E) est $]-\frac{1}{2},+\infty[$.
- ☐ L'ensemble des solutions de (E) est : $]-1,-\frac{3}{5}]\cup]-\frac{1}{3},+\infty[$.
- ☐ L'ensemble des solutions de (E) est $]-\infty,-1[\cup]-1,-\frac{3}{5}]$.
- ☐ L'ensemble des solutions de (E) est : $]-\infty,-1[\cup]-1,-\frac{3}{5}]\cup[-\frac{1}{3},+\infty[$.

Question 344
Soit $f(x) = \sin x - x$ et $g(x) = e^x - 1 - x$ Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $f(x) \leqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
- ☐ $f(x) \leqslant 0,\ \forall x \geqslant 0$
- ☐ $g(x) \geqslant 0,\ \forall x \geqslant 0$
- ☐ $g(x) \geqslant 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

12.2.3 Fonctions circulaires réciproques

Question 345
Soit $f(x) = \arcsin x + \arccos x$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Le domaine de définition de f est $[-1, 1]$.
- ☐ $\forall x \in [-1, 1], f(x) = \frac{\pi}{2}$
- ☐ $\forall x \in [-1, 1], f(x) = x$
- ☐ f est une fonction constante.

Question 346
Soit $f(x) = \arctan x + \arctan(\frac{1}{x})$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}^*$.
- ☐ f est une fonction constante.
- ☐ $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{\pi}{2}$
- ☐ $\forall x > 0, f(x) = \frac{\pi}{2}$

12.2.4 Etude de fonctions

Question 347
Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $y = 2$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
- ☐ La courbe de f admet une asymptote verticale ($x = 1$).
- ☐ Le point de coordonnées $(1, 1)$ est un centre de symétrie du graphe de f.
- ☐ Le point de coordonnées $(1, 2)$ est un centre de symétrie du graphe de f.

Question 348
Soit $f(x) = (-1)^{E(x)}$, où $E(x)$ est la partie entière de x. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ f est périodique de période 1.
- ☐ f est périodique de période 2.
- ☐ f est une fonction paire.
- ☐ f est bornée.

Question 349
Soit $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ Le domaine de définition de f est $]-\infty, 0] \cup]1, +\infty[$.
- ☐ $y = x - \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.
- ☐ $y = x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à la courbe de f en $+\infty$.

☐ $y = -x - \frac{1}{2}$ est une asymptote en $-\infty$.

Question 350
Soit $f(x) = x + \sqrt{1-x^2}$. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ Le domaine de définition de f est $[-1, 1]$.
☐ f est croissante sur $[-1, 1]$.
☐ f établit une bijection de $[0, 1]$ dans $[1, \sqrt{2}]$.
☐ f établit une bijection de $[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ dans $[-1, \sqrt{2}]$.

12.3 Fonctions usuelles | Difficile | 126.00

12.3.1 Equations

Question 351
Soit (E) l'équation : $x^x = (\sqrt{x})^{x+1}$. Quelles sont les assertions vraies ?

☐ Le domaine de définition de (E) est $]0, +\infty[$.
☐ (E) n'admet pas de solution.
☐ (E) admet deux solutions distinctes.
☐ (E) admet une unique solution.

Question 352
Soit (S) le système d'équations : $\left\{\begin{array}{rcl} 2^x & = & y^2 \\ 2^{x+1} & = & y^{2+x} \end{array}\right.$. On note E l'ensemble des (x, y) qui vérifient (S). Quelles sont les assertions vraies ?

☐ (S) est défini pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
☐ Le cardinal de E est 1.
☐ Le cardinal de E est 2.
☐ Le cardinal de E est 4.

Question 353
Soit (E) l'équation : $\cos 2x = \sin x$. on note $\mathscr{S}$ l'ensemble des solutions de (E). Quelles sont les assertions vraies ?

☐ Le domaine de définition de (E) est $\mathbb{R}$.
☐ $\mathscr{S} = \{\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\}$
☐ $\mathscr{S} = \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
☐ $\mathscr{S} = \{-\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

12.3.2 Fonctions circulaires réciproques

Question 354

Soit f une fonction définie par l'équation (E) : $\arcsin f(x) + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$. on notera D_f le domaine de définition de f. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $D_f = [-1,1]$
- ☐ $\forall x \in [-1,1], f(x) = -\sqrt{1-x^2}$
- ☐ $\forall x \in [0,1], f(x) = \sqrt{1-x^2}$
- ☐ f est une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1]$.

la fonction $x \to \arcsin x$ est définie sur $[-1,1]$ et prend ses valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si $-1 \leqslant x < 0$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x < 0$ et si $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}$. On déduit que f n'est pas définie si $-1 \leqslant x < 0$.
Soit $x \in [0,1]$, on a : $(E) \Rightarrow f(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - \arcsin x) = \cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}$. Or $\arcsin x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et la fonction cosinus est positive sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, donc $(E) \Rightarrow f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
Réciproquement, on considère la fonction g définie sur $[0,1]$ par : $g(x) = \arcsin\sqrt{1-x^2} + \arcsin x$. g est dérivable sur $]0,1[$ et $g'(x) = 0$. Comme g est continue sur $[0,1]$, g est constante sur cet intervalle et en identifiant en 0, on obtient $g(x) = \frac{\pi}{2}$, pour tout $x \in [0,1]$. On déduit que $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, pour tout $x \in [0,1]$.
Soit $x, y \in [0,1]$, on a : $y = \sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt{1-y^2}$. Donc f est une bijection de $[0,1]$ dans $[0,1]$ et $f^{-1} = f$.

Question 355

Soit $f(x) = \arcsin(\frac{2x}{1+x^2})$. On notera D_f le domaine de définition de f. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $D_f = [-1,1]$
- ☐ $D_f = \mathbb{R}$
- ☐ Si $x \in [-1,1]$, $f(x) = 2\arctan x$
- ☐ Si $x \geqslant 1$, $f(x) = -2\arctan x + \pi$

Question 356

Soit $f(x) = \arccos(\frac{1-x^2}{1+x^2})$. On notera D_f le domaine de définition de f. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $D_f = \mathbb{R}$
- ☐ $D_f = [-1,1]$
- ☐ $f(x) = 2\arctan x + 2\pi$, $\forall x \leqslant 0$
- ☐ $f(x) = -2\arctan|x| + 2\pi$, $\forall x \in \mathbb{R}$

12.3.3 Etude de foncions

Question 357

Soit $f(x) = \arcsin(\sin x) + \arccos(\cos x)$. On notera D_f le domaine de définition de f. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $D_f = [-1,1]$

- ☐ $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 2x$
- ☐ $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, 0], f(x) = 0$
- ☐ $\forall x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}], f(x) = -\pi - 2x$

Question 358

Soit $f(x) = \exp(\frac{\ln^2|x|}{\ln^2|x|+1})$. On notera D_f le domaine de définition de f. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $D_f =]0, +\infty[$
- ☐ f est paire.
- ☐ f est croissante sur $]0, +\infty[$.
- ☐ f est une bijection de $]0, 1]$ dans $[1, e[$.

Question 359

Soit $f(x) = x^x(1-x)^{1-x}$. On notera D_f le domaine de définition de f. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $D_f =]0, 1[$
- ☐ L'ensemble des valeurs de f est $[\frac{1}{2}, 1[$.
- ☐ f est croissante $]0, 1[$.
- ☐ f est une bijection de $[\frac{1}{2}, 1[$ dans $[\frac{1}{2}, 1[$.

Question 360

Soit $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$. Quelles sont les assertions vraies ?

- ☐ $D_f =]0, +\infty[$
- ☐ $\forall x > 0, 1 < f(x) < e$
- ☐ $\forall x > 0, f(x) > e$
- ☐ $\forall x < -1, f(x) > e$