HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Mathematik 1 Infotronik (6)

Gerald Kupris

31.10.2012

Vorlesungsinhalte Komplexe Zahlen

Was sind komplexe Zahlen?

Das Problem:
Im Bereich der reellen Zahlen ist die Wurzel aus einer negativen Zahl nicht definiert.

$$\sqrt{-1} = ?$$

Die Lösung:
Es wird eine neue Zahl ***i*** definiert, eine so genannte imaginäre Einheit, für die gilt:

$$i = \sqrt{-1}$$

Die Definition:
Als komplexe Zahlen bezeichnet man Zahlen, die in der folgenden Form dargestellt werden können:

$$a + b \cdot i$$

Anatomie der komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl ***z*** kann in der folgenden Form dargestellt werden:

$$z = a + b \cdot i$$

a und ***b*** sind **reelle** Zahlen. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit ***C*** bezeichnet und kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$C = \{a + b \cdot i \mid a, b \in R\} \qquad \mathbb{C}$$

a ist der **Realteil** der komplexen Zahl: $a = \operatorname{Re}(a + bi) \quad a = \Re(a + bi)$

b ist der **Imaginärteil** der komplexen Zahl: $b = \operatorname{Im}(a + bi) \quad b = \Im(a + bi).$

Entdeckung der komplexen Zahlen

Die Mathematiker haben sich über einige Jahrhunderte mit den komplexen Zahlen schwergetan und ihnen manchmal auch das Existenzrecht abgesprochen.

Leibniz entdeckte die Beziehung

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$$

und war davon äußerst beeindruckt.

Leibniz selbst nennt $\sqrt{-1}$ „ein Wunder der Analysis, ein Monstrum der idealen Welt, fast ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein"

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

Entdeckung der komplexen Zahlen

Da das Rechnen mit diesen als „sinnlos“ angesehenen Zahlen zunächst als bloßes Spiel erschien, war man umso überraschter, dass dieses „Spiel“ sehr häufig wertvolle Ergebnisse lieferte oder schon bekannten Ergebnissen eine befriedigendere Form zu geben erlaubte.

So kam Leonhard Euler (1707-1783) zum Beispiel zu einigen bemerkenswerten Gleichungen, die nur reelle Zahlen enthielten und sich ausnahmslos als richtig erwiesen, die aber auf anderem Wege nicht so einfach gewonnen werden konnten.

Die Bezeichnung "i" für die imaginäre Einheit stammt übrigens von Euler. Er hat sie aber nicht konsequent benutzt. Allgemein verbreitet wurde sie erst durch Carl Friedrich Gauß.

Carl Friedrich Gauß
(1777-1855)

Anwendungen komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen haben in der Physik und Technik eine wichtige Rolle als Rechenhilfe.

So lässt sich insbesondere die Behandlung von Differentialgleichungen zu Schwingungsvorgängen vereinfachen, da sich damit die komplizierten Beziehungen in Zusammenhang mit Produkten von Sinus- bzw. Kosinusfunktionen durch Produkte von Exponentialfunktionen ersetzen lassen, wobei lediglich die Exponenten addiert werden müssen.

In der Elektrotechnik besitzt die Darstellung elektrischer Größen mit Hilfe komplexer Zahlen weite Verbreitung. Sie wird bei der Berechnung von zeitlich sinusförmig veränderlichen Größen wie elektrischen und magnetischen Feldern verwendet.

So fügt man dazu beispielsweise in der komplexen Wechselstromrechnung willkürliche aber passende Imaginärteile in die reellen Ausgangsgleichungen ein, die man bei der Auswertung der Rechenergebnisse dann wieder ignoriert. Es handelt sich dabei lediglich um einen Rechentrick ohne philosophischen Hintergrund.

Darstellung komplexer Zahlen

Die Notation in der Form $z = a + b\,i$ wird auch als ***kartesische*** (nach René Descartes) oder ***algebraische Form*** bezeichnet.

Die Bezeichnung *kartesisch* erklärt sich aus der Darstellung in der komplexen bzw. gaußschen Zahlenebene.

In der Elektrotechnik wird das kleine ***i*** schon für zeitlich veränderliche Ströme verwendet und kann zu Verwechselungen mit der imaginären Einheit ***i*** führen. Daher wird in diesem Bereich gemäß DIN 1302 der Buchstabe ***j*** verwendet.

Komplexe Zahlen können gemäß DIN 1304-1 und DIN 5483-3 unterstrichen dargestellt werden, um sie von reellen Zahlen zu unterscheiden.

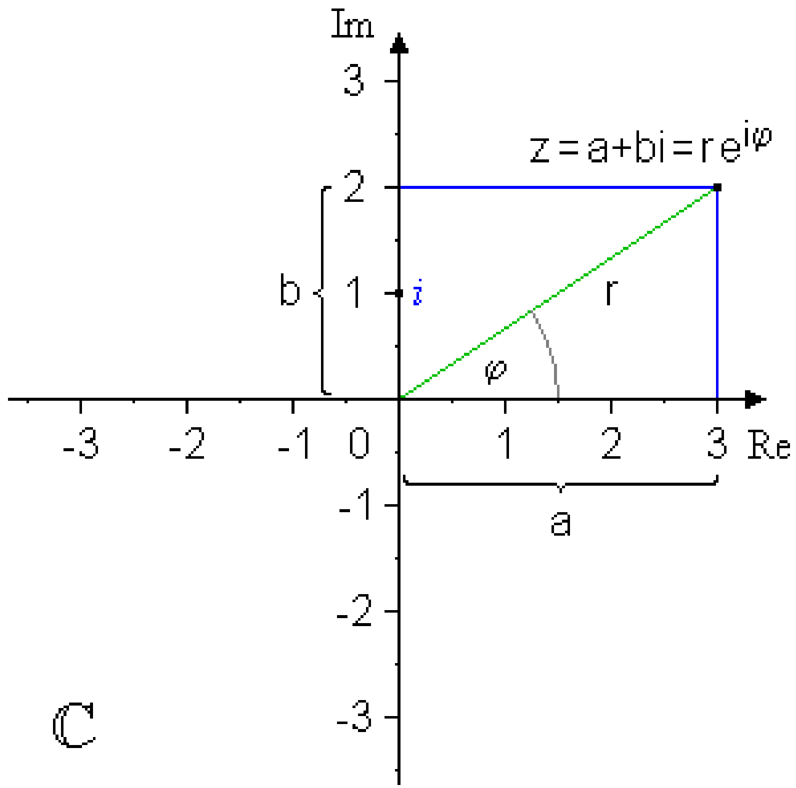
Weitere Darstellungsformen für komplexe Zahlen sind die ***Exponentialform*** und die ***trigonometrische Form***.

Die Gaußsche Zahlenebene

Während sich die Menge der reellen Zahlen durch Punkte auf einer Zahlengeraden veranschaulichen lässt, kann man die Menge der komplexen Zahlen als Punkte in einer **Ebene** (komplexe Ebene, Gaußsche Zahlenebene) darstellen.

Dies entspricht der „doppelten Natur“ der Menge der komplexen Zahlen als zweidimensionalem reellem Vektorraum. Die Teilmenge der **reellen** Zahlen bildet darin die **waagerechte** Achse, die Teilmenge der rein **imaginären** Zahlen (d. h. mit Realteil 0) bildet die **senkrechte** Achse.

Eine komplexe Zahl besitzt dann die horizontale Koordinate a und die vertikale Koordinate b.



Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Gemäß Definition entspricht die Addition komplexer Zahlen der Vektoraddition.

Addition: $(a+b\,\mathrm{i})+(c+d\,\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\,\mathrm{i}$

Beispiel: $(3+2\mathrm{i})+(5+5\mathrm{i})=(3+5)+(2+5)\mathrm{i}=8+7\mathrm{i}$

Subtraktion: $(a+b\,\mathrm{i})-(c+d\,\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\,\mathrm{i}$

Beispiel: $(5+5\mathrm{i})-(3+2\mathrm{i})=(5-3)+(5-2)\mathrm{i}=2+3\mathrm{i}$

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Die Multiplikation komplexer Zahlen ergibt sich mit der Definition ***i² = − 1*** durch einfaches Ausmultiplizieren und Neugruppieren.

$$(a + b\,\mathrm{i}) \cdot (c + d\,\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot \mathrm{i}$$

Beispiel:

$$(2+5\mathrm{i}) \cdot (3+7\mathrm{i}) = (2 \cdot 3 + 2 \cdot 7\mathrm{i}) + (5\mathrm{i} \cdot 3 + 5\mathrm{i} \cdot 7\mathrm{i}) = 6 + 14\mathrm{i} + 15\mathrm{i} - 35 = -29 + 29\mathrm{i}$$

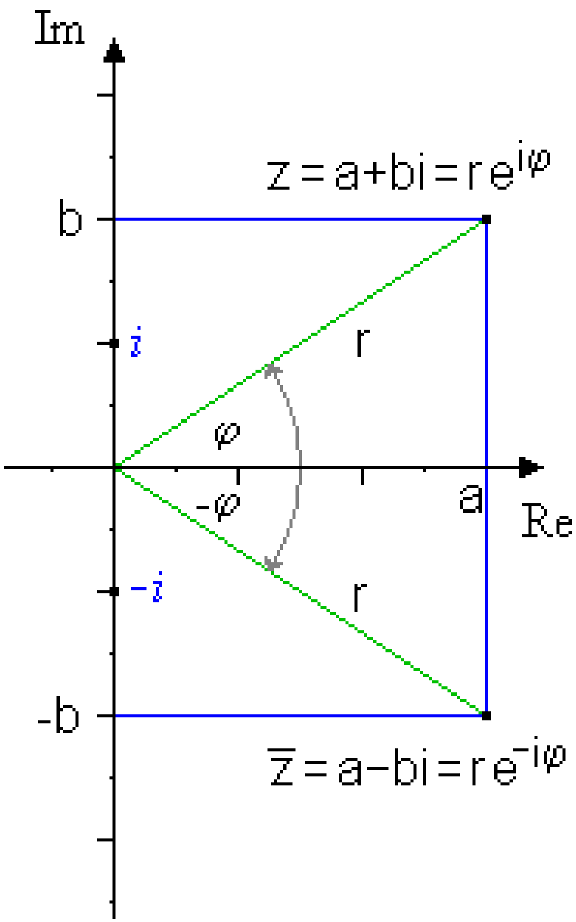
Die Division komplexer Zahlen lässt sich auf die Multiplikation zurückführen, allerdings möchte man vermeiden, dass ***i*** im Nenner steht. Daher muss der Bruch mit der zum Nenner **komplex konjugierten** Zahl erweitert werden.

Komplex konjugierte Zahlen

Dreht man das **Vorzeichen des Imaginärteils** b einer komplexen Zahl um, so erhält man die zu z komplex konjugierte (oder auch konjungiert komplexe) Zahl $\bar{z}$ (manchmal auch z* geschrieben).

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z = a + b \cdot \mathrm{i} \;\mapsto\; \bar{z} = a - b \cdot \mathrm{i}$$

Auffällig bei den zueinander komplex konjugierten Zahlen ist, dass sie in der Gaußschen Zahlenebene **symmetrisch zur reellen Achse** liegen, da sie sich nur durch das Vorzeichen im Imaginärteil unterscheiden.



Komplex konjugierte Zahlen

Das Produkt aus einer komplexen Zahl $z = a + bi$ und ihrer komplex konjugierten Zahl ergibt das Quadrat ihres Betrages:

$$z \cdot \bar{z} = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Die Summe aus einer komplexen Zahl $z = a + bi$ und ihrer komplex konjugierten Zahl ergibt das 2-fache ihres Realteils:

$$z + \bar{z} = (a + b\mathrm{i}) + (a - b\mathrm{i}) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

Die Differenz aus einer komplexen Zahl $z = a + bi$ und ihrer komplex konjugierten Zahl ergibt das 2i-fache ihres Imaginärteils:

$$z - \bar{z} = (a + b\mathrm{i}) - (a - b\mathrm{i}) = 2b\mathrm{i} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$$

Rechenregeln komplex konjugierter Zahlen

Für alle komplexen Zahlen $z_1, z_2, z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ gilt:

$$a = \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$

$$b = \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

Division komplexer Zahlen in algebraischer Form

Für $z \neq 0$ gilt:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen erhalten wir:

$$\frac{y}{z} = \frac{y}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{y\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}\,\mathrm{i}.$$

Der Betrag komplexer Zahlen

Der Betrag | *z* | einer komplexen Zahl ***z = a + b i*** ist folgendermaßen definiert:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

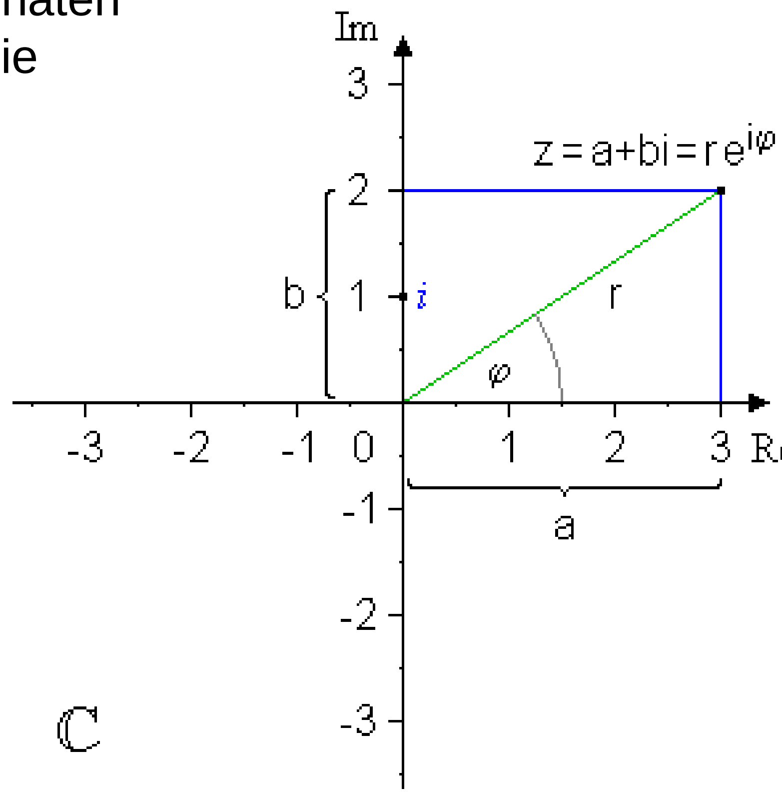
Diese Definition des Betrags einer komplexen Zahl entspricht dem Abstand der Zahl (in der Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene) vom Ursprung des Koordinatensystems.

Der Betrag einer komplexen Zahl und der dazu konjugiert komplexen Zahl ist gleich, da bei der Definition einer konjugiert komplexen Zahl nur das Vorzeichen des b differiert und laut Definition des Betrages einer komplexen Zahl a und b quadriert werden, somit also der Unterschied des Vorzeichens ohne den Verlust einer weiteren Lösung wegfällt.

$$|z| = |\bar{z}|$$

Darstellung komplexer Zahlen in Polarform

Verwendet man anstelle der kartesischen Koordinaten a und b die Polarkoordinaten r und φ , so kann die komplexe Zahl in **Polarform** dargestellt werden.



Algebraische Form einer komplexen Zahl :

$$z = a + b \cdot i$$

Trigonometrische Form einer komplexen Zahl:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Exponentialform (Eulersche Form):

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

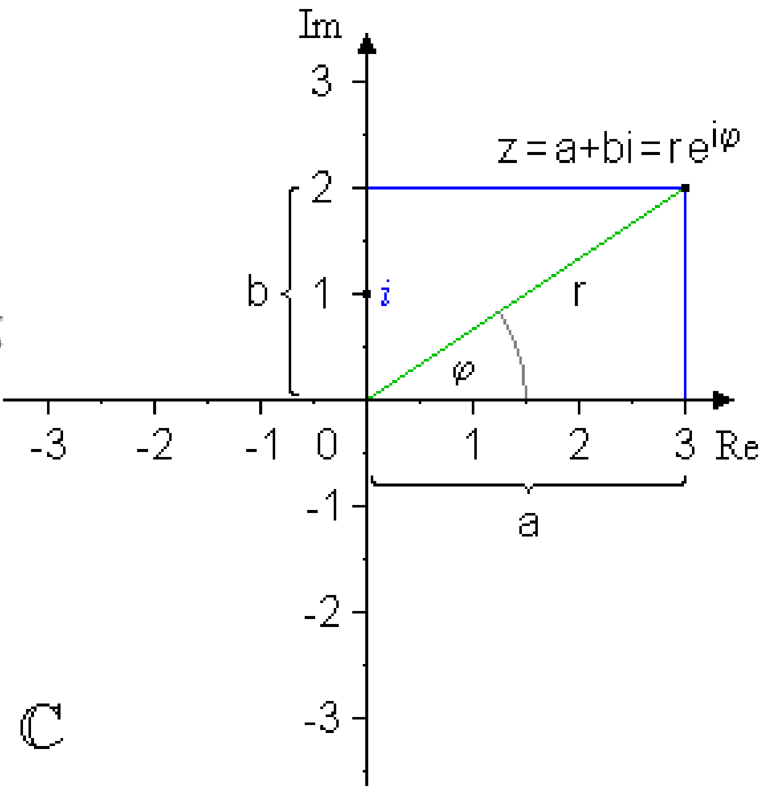
φ meist in rad
(360° = 2π)

Umwandlung von algebraischer Form in Polarform

$$z = r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{für } a > 0, b \text{ beliebig} \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } a = 0, b < 0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } a = 0, b = 0 \end{cases}$$



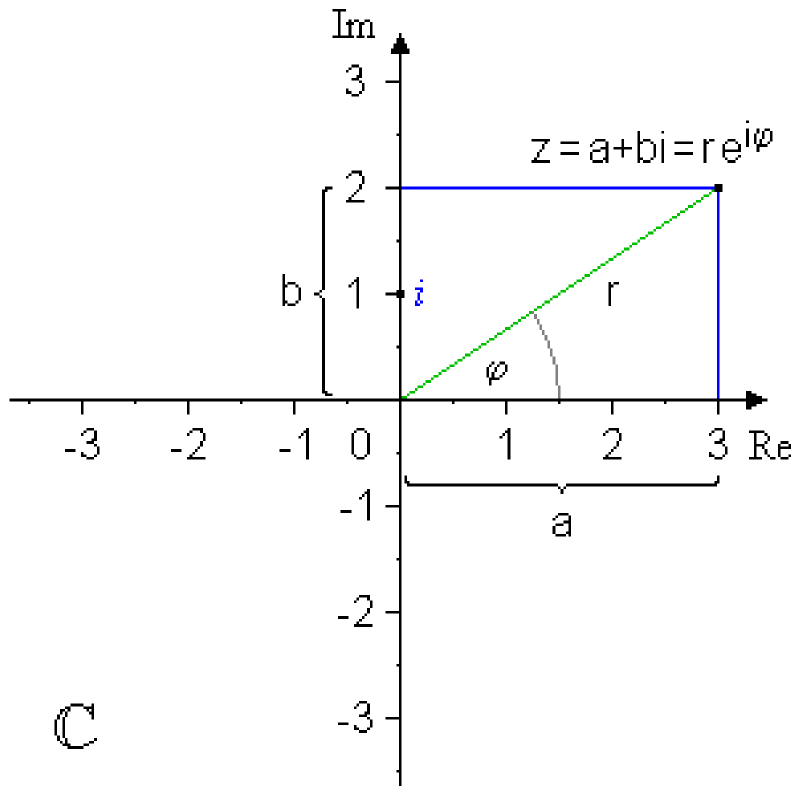
für: $-\pi < \varphi \leq \pi$

Umwandlung von Polarform in algebraische Form

$$z = a + b\,\mathrm{i}$$

$$a = \mathrm{Re}(z) = r \cdot \cos\varphi$$

$$b = \mathrm{Im}(z) = r \cdot \sin\varphi$$



Darstellung einer komplexen Zahl in Polarform

Die Darstellung einer komplexen Zahl über den **Betrag *r*** und die **Phase *φ*** wird als **Polarform** bezeichnet.

$$z = \overbrace{r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)}^{\text{Trigonometrische Form}} = \overbrace{r \cdot e^{j\varphi}}^{\text{Exponentialform (Eulersche Form)}}$$

Betrag

Eulersche Zahl

Argument
(Phase)

Die Grundlage für die Darstellung in Exponentialform ist die Eulersche Formel:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi$$

Die Eulersche Formel

Die Eulersche Formel erhält man am bequemsten aus der Mac Laurinschen Reihe von $\boldsymbol{e^x}$, indem man $\boldsymbol{x}$ durch $\boldsymbol{j\varphi}$ ersetztund dabei die Bedeutung $\boldsymbol{j^2=-1}$ beachtet.

$$e^{j\varphi} = 1 + \frac{(j\varphi)^1}{1!} + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{(j\varphi)^3}{3!} + \frac{(j\varphi)^4}{4!} + \frac{(j\varphi)^5}{5!} + \frac{(j\varphi)^6}{6!} + \frac{(j\varphi)^7}{7!} + \ldots$$

$$e^{j\varphi} = 1 + j\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - j\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - j\frac{\varphi^7}{7!} + \ldots$$

$$e^{j\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots\right) + j\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right)$$

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

Die Eulersche Zahl

Die eulersche Zahl **e = 2,718281828459...** (nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler) ist eine irrationale und sogar transzendente reelle Zahl.

Die eulersche Zahl ist die Basis des natürlichen Logarithmus und der (natürlichen) Exponentialfunktion, die aufgrund dieser Beziehung zur Zahl e häufig kurz e-Funktion genannt wird. Sie spielt in der Differential- und Integralrechnung eine wichtige Rolle.

Der Buchstabe e für diese Zahl wurde zuerst von Euler 1736 in seinem Werk Mechanica benutzt. Es gibt keine Hinweise, dass dies in Anlehnung an seinen Namen geschah.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$\boxed{e^{i\cdot\pi} = -1}$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Leonhard Euler

(* 15. April 1707 in Basel; † 18. September 1783 in Sankt Petersburg) war einer der bedeutendsten jemals lebenden Mathematiker.
Ein großer Teil der heutigen mathematischen Symbolik geht auf Euler zurück (z. B. e, π, i, Summenzeichen ∑, f(x) als Darstellung für eine Funktion). 1744 gab er ein Lehrbuch der Variationsrechnung heraus. Euler kann auch als der eigentliche Begründer der Analysis angesehen werden. 1748 publizierte er das Grundlagenwerk „Introductio in analysin infinitorum“, in dem zum ersten Mal der Begriff der Funktion die zentrale Rolle spielt. Andere Arbeiten setzen sich mit Zahlentheorie, Algebra, angewandter Mathematik und sogar mit der Anwendung mathematischer Methoden in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften auseinander.

Leonhard Euler
(1707-1783)

Entwicklung der Nachkommastellen von *e*

Datum	Dezimalstellen	Mathematiker
1748	18	Leonhard Euler
1853	137	William Shanks
1871	205	William Shanks
1884	346	J. Marcus Boorman
1949	2.010	John von Neumann (on the ENIAC)
1961	100.265	Daniel Shanks & John Wrench
1981	116.000	Stephen Gary Wozniak (on the Apple II)
1994	10.000.000	Robert Nemiroff & Jerry Bonnell
Mai 1997	18.199.978	Patrick Demichel
August 1997	20.000.000	Birger Seifert
Oktober 1999	869.894.101	Sebastian Wedeniwski
21. November 1999	1.250.000.000	Xavier Gourdon
16. Juli 2000	3.221.225.472	Colin Martin & Xavier Gourdon
18. September 2003	50.100.000.000	Shigeru Kondo & Xavier Gourdon
6. Mai 2009	200.000.000.000	Shigeru Kondo & Steve Pagliarulo

Multiplikation und Division in der Polarform

Bei der Multiplikation in der Polarform werden die Beträge multipliziert und die Phasen addiert. Bei der Division wird der Betrag des Dividenden durch den Betrag des Divisors geteilt und die Phase des Divisors von der Phase des Dividenden subtrahiert:

Trigonometrische Form:

$$r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi) \cdot s \cdot (\cos\psi + \mathrm{i} \cdot \sin\psi) = r \cdot s \cdot [\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi + \psi)]$$

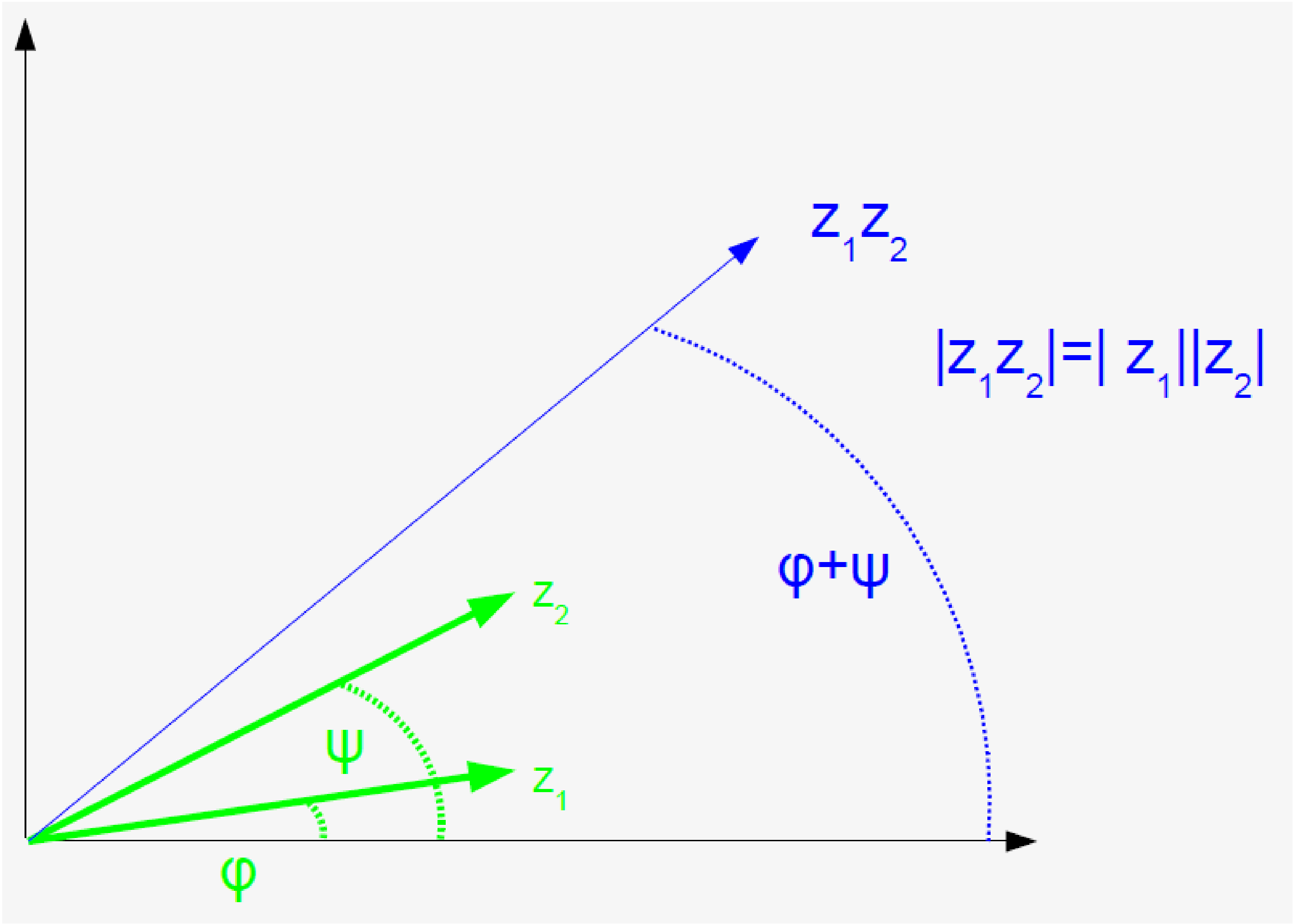
$$\frac{r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)}{s \cdot (\cos\psi + \mathrm{i} \cdot \sin\psi)} = \frac{r}{s} \cdot [\cos(\varphi - \psi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi - \psi)]$$

Exponentialform:

$$\left(r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}\right) \cdot \left(s \cdot e^{\mathrm{i}\psi}\right) = (r \cdot s) \cdot e^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}$$

$$\frac{\left(r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}\right)}{\left(s \cdot e^{\mathrm{i}\psi}\right)} = \frac{r}{s} \cdot e^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}$$

Grafische Darstellung der Multiplikation in Polarform



Einfache Rechenregeln

Man rechnet mit komplexen Zahlen am besten einfach so, als ob ***i*** eine ganz normale Variable wäre, man muss nur beim Multiplizieren daran denken, dass gilt: $i^2 = -1$.

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$$

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen werden (in der algebraischen Form) komponentenweise durchgeführt.

Die Multiplikation komplexer Zahlen kann je nach Vorgabe vorteilhaft in algebraischer Form oder in Polarform durchgeführt werden.

Bei der Division komplexer Zahlen werden in Exponentialform ihre Beträge dividiert und ihre Argumente (Winkel) subtrahiert, oder in algebraischer Form mit dem konjugierten multipliziert und durch dessen Betragsquadrat dividiert.

Aufgaben

1. Geben Sie folgende komplexen Zahlen in Polarform an:
   a) $3 + 4j$
   b) $-8 - 6j$
   c) $(3 + 4j) \cdot (-4 + 2j)$

2. Geben Sie folgende komplexe Zahlen in kartesischer Form an:
   a) $2 \cdot \cos(\pi/3) + 2j \cdot \sin(\pi/3)$
   b) $\dfrac{4 \cdot \overline{(3 - j)}}{(1 + j) \cdot (-1 + j)}$

3. Geben Sie für $z_1 = -\sqrt{3} - j$ und $z_2 = 2 \cdot e^{j \cdot 5\pi/6}$ folgende Ausdrücke in kartesischer Form an:
   a) $z_1 + z_2$
   b) z_1 / z_2
   c) $(z_1 / z_2)^{15}$

Aufgaben

4. Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in kartesischer Form an:

a) $$z = \frac{5 \cdot (1+2j)^5 \cdot (4-3j)^2}{(3+4j)^3 \cdot (2-j)^4}$$

b) $$z = (2-4j)^2 + \frac{|1-\sqrt{3} \cdot j|}{j}$$

c) $$z = \frac{(3+j) \cdot (\cos(120°) - j \cdot \sin(120°))}{(1-j)^2 \cdot (\overline{2j})} + \frac{2 \cdot (\cos(90°) + j\sin(90°))}{e^{-j \cdot 180°}}$$

5. Beweisen Sie die von Leibnitz entdeckte Beziehung:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$$

Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München 2010

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf