Blatt 27: Fkt'en vom Typ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, Teil (I) "Allgemeine Grundlagen"

1. Wodurch veranschaulicht man geometrisch eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen?

2. Wie kann man den Definitionsbereich $D(f)$ einer Funktion zweier unabhängiger Variabler beschreiben?

3. Was bedeutet die Gleichung $z = c$ bei der Beschreibung einer Punktmenge (x, y, z) des R^3 oder einer Teilmenge davon?

4. Wie konstruiert man die sog. "Karte einer Funktion zweier unabhängiger Variabler"?

5. Die Funktion $z = f(x, y)$ habe an der Stelle (a, b) den Grenzwert g.
   a) Wie drückt man diesen Sachverhalt mathematisch aus?
   b) Was bedeutet diese Aussage hinsichtlich der Zugehörigkeit der Stelle zum Definitionsbereich?

6. Wann ist $z = f(x, y)$ an der Stelle (a, b) stetig?

7. Wann kann man eine Funktion $z = f(x, y)$ an einer Stelle (a, b), an der sie nicht definiert ist, stetig ergänzen, und wie muß die Ergänzung erfolgen?

8. Geben Sie Definitionsbereich und Wertebereich folgender Funktionen an und skizzieren Sie diese für a), b), d), j):
   a) $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, b) $z = \sqrt{x^2 + y^2 - R^2}$,
   c) $z = (R^2 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}}$, d) $z = \sqrt{xy}$,
   e) $z = \frac{4}{x^2+y^2}$, f) $z = \frac{xy}{y-x}$,
   g) $z = y \ln x$, h) $z = \ln(y - x^2)$,
   i) $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, j) $z = \arcsin\frac{x}{a} + \arcsin\frac{y}{b}$,
   k) $z = \sin x + \sqrt{y - a}$, l) $u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$.

9. Für die Funktion $z = x + y$ zeichne man die Niveaulinien für $z = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ und den Schnitt mit der x, z-Ebene.

10. Für die Funktion $z = 16 - x^2 - 4y^2$ sind
    a) die Niveaulinien für $z = 0, 2, 4, \ldots, 14$,
    b) die Schnittkurve mit der x, z-Ebene,
    c) die Schnittkurve mit der y, z-Ebene zu skizzieren.

11. Welche Schnittkurven bildet $z = 4x^2 + y^2$ mit den Koordinatenebenen und Parallelebenen zur x, y-Ebene?
    Welche Fläche wird durch die Funktion beschrieben?

12. Welche Fläche wird durch die Gleichung $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ dargestellt?

13. Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen $z = f(x, y)$ an der Stelle $(0; 0)$ einen Grenzwert besitzen und berechnen Sie diesen gegebenenfalls.
    a) $z = \dfrac{\sin axy}{xy}$, b) $z = \dfrac{2x - y \sin x}{x + y}$,
    c) $z = \dfrac{\tan xy}{x^2 + 2y^2}$, (Beachte: $\lim_{t\to 0} \frac{\tan t}{t} = 1$).

14. Berechnen Sie $\lim\limits_{(x,y)\to(0;\ [illegible])} e^{xy} \cos y$.

    Hinweis: Benutzen Sie Regeln über das Rechnen mit Grenzwerten.

15. Die folgenden Funktionen sind an der Stelle $(0; 0)$ nicht definiert.
    Prüfen Sie, welche von ihnen sich stetig ergänzen lassen und geben Sie die Ergänzung an.
    a) $z = \dfrac{3x^2 - y}{x^2 + y}$, b) $z = \dfrac{\sin xy}{xy}$,
    c) $z = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$, d) $z = \dfrac{\sin 3\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}$,
    e) $z = \dfrac{a^{x+y} - 1}{x + y}$, f) $z = \dfrac{x^2 e^y - 5y^2}{x^2 + y^2}$.

Blatt 27: Lösungen

2711

1. Eine Funktion $z = f(x, y)$ läßt sich i.a. geometrisch durch eine Fläche im R^3 darstellen.

2. Der Definitionsbereich besteht aus Punkten der x, y-Ebene. Die Beschreibung erfolgt entweder durch Angabe einer Randkurve oder mittels Ungleichungen für x und y.

3. $z = c$ kann bedeuten.
   - der Punkt $(0, 0, c)$ auf der z-Achse
   - die Gerade $x = c$ in der x, z-Ebene
   - die Gerade $y = c$ in der y, z-Ebene
   - eine Parallelebene zur x, y-Ebene in der Höhe c.

4. Schneidet man die Fläche $z = f(x, y)$ mit den Ebenen $z = c$, so erhält man als Schnittkurven sog. Schichtenlinien. Projiziert man die Schichtenlinien auf die x, y-Ebene, so erhält man die Karte der Funktion (vgl. Geländedarstellungen durch Landkarten). Die Projektionen auf die x, y-Ebene nennt man auch Höhen- oder Niveaulinien.

5. a) $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = g$

   b) $z = f(x, y)$ braucht an der Stelle (a, b) selbst nicht definiert zu sein. Wenn sich die unabhängigen Veränderlichen x und y auf einem beliebigen Weg den Werten a und b nähern, so strebt der zugehörige Funktionswert unabhängig vom Weg gegen g.

6. $z = f(x, y)$ ist an der Stelle (a, b) stetig, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
   1. Der Funktionswert $f(a, b)$ existiert.
   2. Der Grenzwert $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = g$ existiert.
   3. Es gilt $f(a, b) = g$.

7. Eine Funktion kann stetig ergänzt werden, wenn der Grenzwert

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = g$$

existiert. In diesem Fall liegt eine hebbare Unstetigkeit vor. Die stetige Ergänzung erhält man durch die Festsetzung

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{für } (x, y) \neq (a, b) \\ y & \text{für } (x, y) = (a, b). \end{cases}$$

8. a) $D(f) = \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq R^2\}; W(f) = \{z|0 \leq z \leq R\}$, Abb. 5.3.
   b) $D(f) = \{(x, y)|x^2 + y^2 \geq R^2\}; W(f) = \{z|0 \leq z < \infty\}$, Abb. 5.4.
   c) $D(f) = \{(x, y)|x^2 + y^2 < R^2\}; W(f) = \{z|\frac{1}{R} < z < \infty\}$.
   d) $D(f) = \{(x, y)|x \geq 0; y \geq 0 \text{ und } x \leq 0, y \leq 0\}$.
   $W(f) = \{z|0 \leq z < \infty\}$, Abb. 5.5.
   e) $D(f) = \{(x, y)|(x, y) \neq (0; 0)\}; W(f) = \{z|0 \leq z < \infty\}$.
   f) $D(f) = \{(x, y)|y \neq x\}; W(f) = \{z|z \in R\}$.
   g) $D(f) = \{(x, y)|x > 0; y \in R\}; W(f) = \{z|z \in R\}$.
   h) $D(f) = \{(x, y)|y > x^2\}; W(f) = \{z|z \in R\}$.
   i) $D(f) = \{(x, y)|x \neq 0; y \neq 0\}; W(f) = \{z|z \in R\}$.
   j) $D(f) = \{(x, y)| -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}; W(f) = \{z| -\pi \leq z \leq \pi\}$, Abb. 5.6.
   k) $D(f) = \{(x, y)|x \in R, y \geq a\}; W(f) = \{z| -1 \leq z < \infty\}$.
   l) $D(f) = \{(x, y, z)|x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ (Kugel mit dem Radius R), $W(f) = \{u|0 \leq u \leq R\}$.

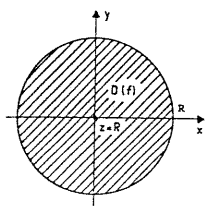


Abb. 5.3

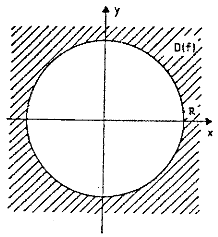


Abb. 5.4

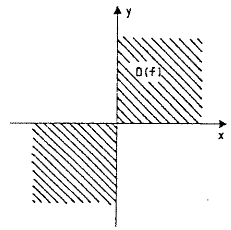


Abb. 5.5

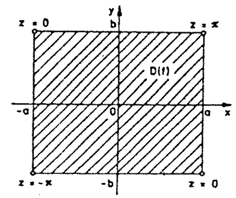


Abb. 5.6

9.

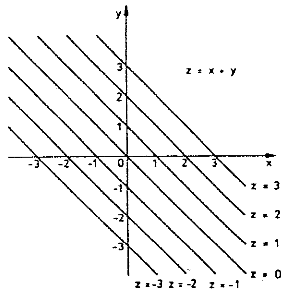
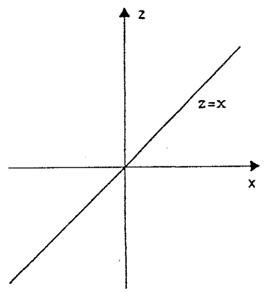


Abb. 5.7 a)



$z = x + y$ stellt eine Ebene dar

Abb. 5.7 b)

2712

10.

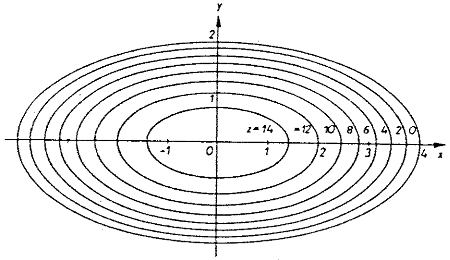


Abb. 5.8 a)

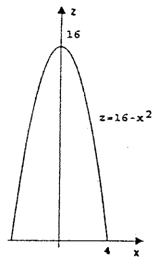


Abb. 5.8 b)

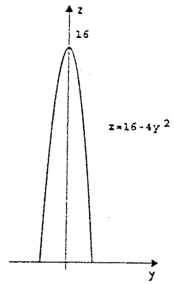


Abb. 5.8 c)

$z = 16 - x^2 - 4y^2$ stellt ein elliptisches Paraboloid dar.

11. $y = 0$ (x, z-Ebene), quadratische Parabel $z = 4x^2$;

$x = 0$ (y, z-Ebene), quadratische Parabel $z = y^2$;

$z = c$, Ellipsen $\dfrac{x^2}{\frac{c}{4}} + \dfrac{y^2}{c} = 1$.

Die Funktion beschreibt ein elliptisches Paraboloid.

12. $y = 0$; Geradenpaar in der oberen Halbebene

$z = |x|$

$z = c$; Kreis mit dem Radius $\sqrt{c} : x^2 + y^2 = c^2$.

Die Funktion beschreibt einen Kreiskegel.

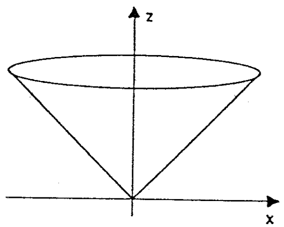


Abb. 5.9

13. a) $t = axy \to \lim\limits_{t\to 0}(a\frac{\sin t}{t}) = a$.

b) $g_1 = \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x - y\sin x}{x+y} = 0$,

$g_2 = \lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} \frac{2x - y\sin x}{x+y} = 2$.

$g_1 \neq g_2$, es existiert kein Grenzwert.

c) $g_1 = 0$; $g_2 = 0$, aber für $y = x$: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$.

Man erhält nicht bei allen Annäherungen an die Stelle $(0,0)$ denselben Wert, folglich existiert g nicht.

14. Wegen $\lim\limits_{(x,y)\to(0;\pi)} e^{xy} = 1$ und $\lim\limits_{y\to\pi} \cos y = -1$ folgt unter Verwendung der Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten

$$\lim_{(x,y)\to(0;\pi)} e^{xy}\cos y = 1.$$

15. a) $g_1 = -1$; $g_2 = 3$; keine Ergänzung möglich.

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{xy} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$, $\quad z^* = \begin{cases} \frac{\sin xy}{xy} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

stetige Ergänzung möglich;

c) Längs der Geraden $y = ax$ gilt: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ax^2}{x^2 + ax^2} = \frac{a}{1+a}$.

Der Grenzwert hängt von der Wahl der Geraden ab, folglich ist keine Ergänzung möglich.

d) $t = 3\sqrt{x^2 + y^2}$; $\lim\limits_{t\to 0} 3\cdot\frac{\sin t}{t} = 3$; $z* = \begin{cases} \frac{\sin 3\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 3 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

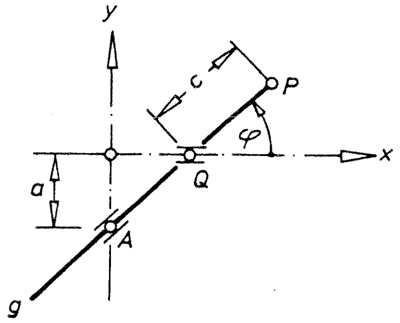
e) $t = x + y$; $\lim\limits_{t\to 0}\frac{a^t - 1}{t} = \ln a$; $z^* = \begin{cases} \frac{a^{x+y}-1}{x+y} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ \ln a & \text{für} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$

f) $g_1 = 1$; $g_2 = -5$; keine Ergänzung möglich.

Blatt 26: Aufstellen von Parameterdarstellungen einer Kurve

[Quelle: Aufgabensammlung der FH-München, 1980
(Prof. Schulz, Prof. Schwägerl)]

1) Die Strecke PQ liegt auf der Geraden g. g schleift durch den festen Punkt A, während ihr Punkt Q sich auf der x-Achse bewegt. P beschreibt dabei eine Kurve $\mathcal{C}$.



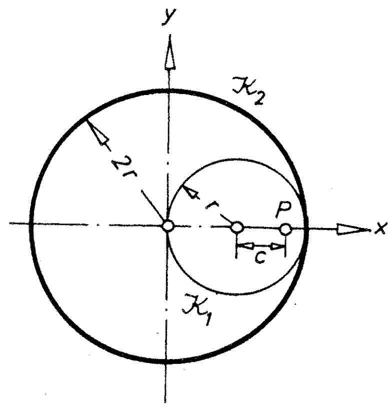
a) Man gebe eine Parameterdarstellung von $\mathcal{C}$ an (Parameter sei der Winkel φ).

~~b) Wie lautet eine Bestimmungsgleichung für die Parameterwerte φ_W der Wendepunkte von $\mathcal{C}$?~~

c) Man bestimme den Krümmungsradius ϱ von $\mathcal{C}$ in ihrem Schnittpunkt mit der y-Achse.

d) Welchen Flächeninhalt A hat der von $\mathcal{C}$, der x-Achse, der y-Achse und der Geraden $x = a/\sqrt{3} + c/2$ begrenzte ebene Bereich?

2) Der fest mit dem Rollkreis $\mathcal{K}_1$ verbundene Punkt P beschreibt beim Abrollen von $\mathcal{K}_1$ am festen Kreis $\mathcal{K}_2$ eine Kurve $\mathcal{E}$.

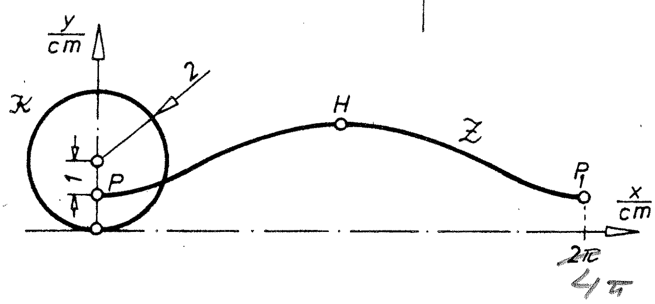


a) Man gebe eine Parameterdarstellung für $\mathcal{E}$ an.

~~b) Wie lautet eine Gleichung $F(x,y) = 0$ von $\mathcal{E}$?~~

c) Um welche bekannte Kurve handelt es sich bei $\mathcal{E}$? Man skizziere $\mathcal{K}_2$, $\mathcal{E}$ und eine allgemeine Lage von $\mathcal{K}_1$.

3) Der Kreis $\mathcal{K}$ rollt auf der x-Achse ohne zu gleiten ab. Der fest mit $\mathcal{K}$ verbundene Punkt P beschreibt dabei eine gestreckte Zykloide $\mathcal{Z}$.



a) Man gebe eine Parameterdarstellung von $\mathcal{Z}$ an.

~~b) Wie groß ist der Krümmungsradius ϱ von $\mathcal{Z}$ im höchsten Punkt H?~~

c) Man berechne den Flächeninhalt A des vom Bogen PHP_1, von der x-Achse und den Vertikalen durch P und P_1 begrenzten Bereichs.

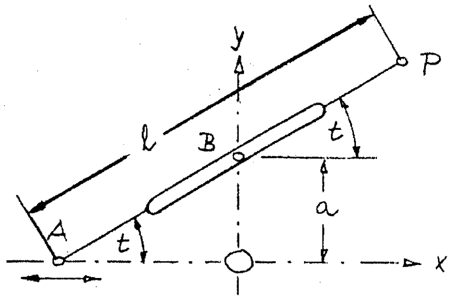
[Lös: 1a) $x = \dfrac{a}{\tan\varphi} + c\cdot\cos\varphi$; $y = c\cdot\sin\varphi$

2a) $x = (r+c)\cdot\cos t$; $y = (r-c)\cdot\sin t$

3a) $x = 2t - \sin t$; $y = 2 - \cos t$]

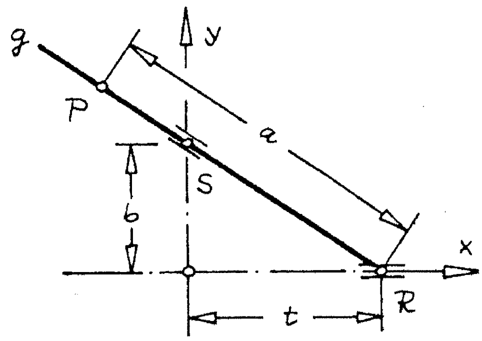
Blatt 25: Aufstellen von Wegen (Parameterdarstellung von Kurven im R^2)

25.1 (Leistungsnachweis Ing.-Mathe II, SoSe 2000 / Aufgabe 1)
Der Punkt P des skizzierten Schleifschiebergetriebes beschreibt eine Kurve γ, wenn A auf der x-Achse gleitet und die Gerade AP durch den festen Punkt B schleift.



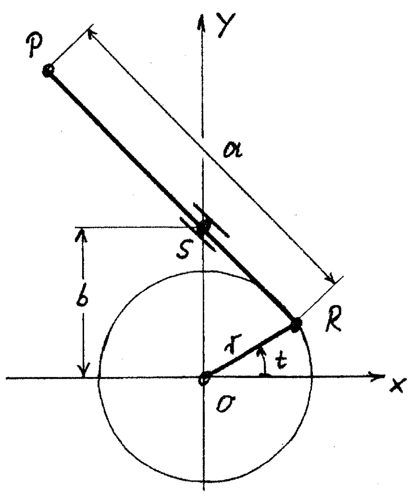
Ermitteln Sie eine Parameterdarstellung von γ
(als Parameter verwende man den eingezeichneten Winkel t)

25.2 (DVP Ing.-Mathe I &II, SoSe 2000 / Aufgabe 1)
Eine Gerade g wird mit ihrem Punkt R auf der x-Achse geführt und schleift dabei durch den Punkt S der y-Achse. Ihr Punkt P beschreibt dabei eine Bahnkurve $\gamma(t)$.
(Der Abstand $\overline{PR}$ der Punkte P und R ist dabei konstant, d.h. $\overline{PR} = a$).



a) Fertigen Sie auf Basis Ihrer Vorstellung über den Bewegungsablauf eine Skizze der Bahnkurve des Punkts P.
(**Tip:** Lassen Sie dabei in Gedanken den Punkt R von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ wandern und Beachten Sie $\overline{PR} = a$).
b) Geben Sie die Parameterdarstellung von $\gamma(t) := (x(t), y(t))$ an, wobei die x-Koordinate t von Punkt R der Parameter ist.
c) Bestimmen Sie die Koordinaten x_H, y_H des höchsten Punkts H von $\gamma(t)$.
d) An welche Asymptote nähert sich $\gamma(t)$ für $|t| \to \infty$ an ? (Lös. auf Basis der Vorstellung)

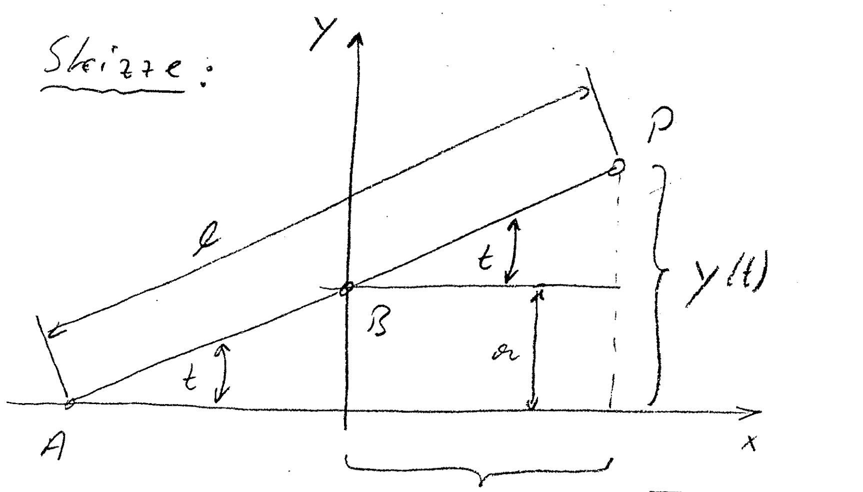
25.3 (DVP Ing.-Mathe I &II, WS 00/01 / Aufgabe 1)
Die Stange $\overline{RP}$ mit Länge $a = \overline{RP}$ wird im Punkt R auf einer Kreisbahn mit Radius $r = \overline{OR}$ um den Koordinatenursprung O geführt und schleift dabei durch den Punkt S der y-Achse. Ihr Punkt P beschreibt dabei eine Bahnkurve $\gamma(t)$, wobei t den Winkel zwischen Kurbel $\overline{OR}$ und x-Achse bezeichnet.
(Getriebeaufbau und weiter Maße entnehmen Sie der Skizze.)



a) Fertigen Sie auf Basis Ihrer Vorstellung über den Bewegungsablauf eine Skizze der Bahnkurve des Punkts P.
(Skizze: a=7 cm; b=3 cm; r=2 cm; t=30 Grad)
b) Seien $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ die Schnittpunkte der Kurve $\gamma(t)$ mit der y-Achse.
Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B an.
c) Geben Sie die Parameterdarstellung von $\gamma(t) := (x(t), y(t))$ an.

25.1

Skizze:



$$x(t) = \overline{BP} \cdot \cos t$$

Längen $\overline{AB}, \overline{BP}$:

$$\overline{AB} = \frac{a}{\sin t}$$

$$\overline{BP} = l - \overline{AB} = l - \frac{a}{\sin t}$$

$$\Rightarrow \quad \gamma(t): \begin{cases} x(t) = \left(l - \frac{a}{\sin t}\right) \cdot \cos t = l \cdot \cos t - a \cdot \cot t \\ y(t) = l \cdot \sin t \end{cases}$$

---

1 b)

höchster Punkt H für $t_H = \frac{\pi}{2}$

$$\varkappa_H := \left[\frac{\dot{x} \cdot \ddot{y} - \dot{y} \ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \right]_{t = \frac{\pi}{2}}$$

$$\dot{x} = -l \cdot \sin t + \frac{a}{\sin^2 t} \quad \Rightarrow \quad \dot{x}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -l + a = a - l$$

$$\dot{y} = l \cdot \cos t \quad \Rightarrow \quad \dot{y}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\ddot{x} = -l \cdot \cos t - \frac{2 \cdot a \cdot \cos t}{\sin^3 t} \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\ddot{y} = -l \cdot \sin t \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = -l$$

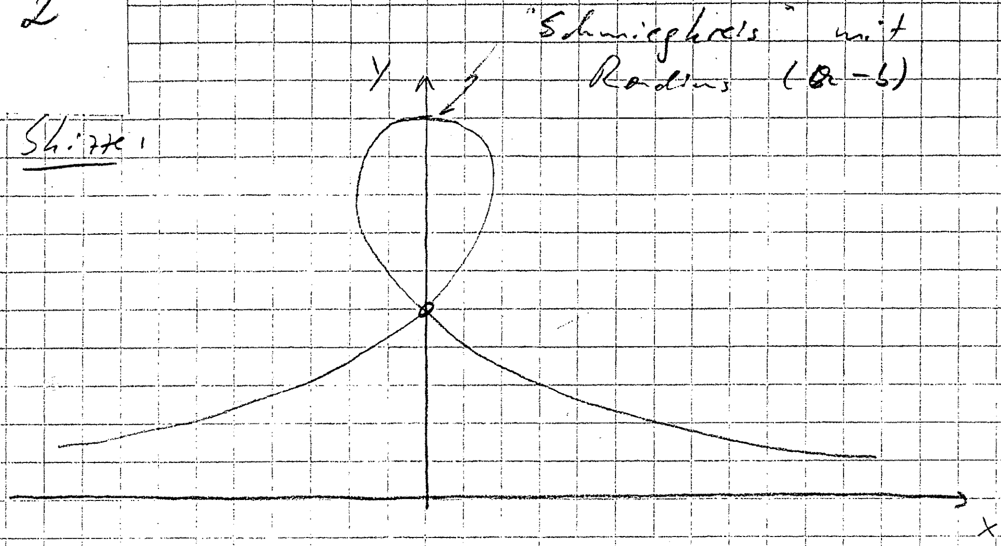
$$\Rightarrow \varkappa_H = \varkappa\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \left[\frac{(-l+a) \cdot (-l) - 0 \cdot 0}{((-l+a)^2 + 0^2)^{3/2}} \right] = \left[\frac{(-1) \cdot (l-a) \cdot (-l)}{\left(\left(-1 \cdot (l-a)\right)^2\right)^{3/2}} \right]$$

$$= \left[\frac{(l-a) \cdot l}{(l-a)^3} \right] = \frac{l}{(l-a)^2}$$

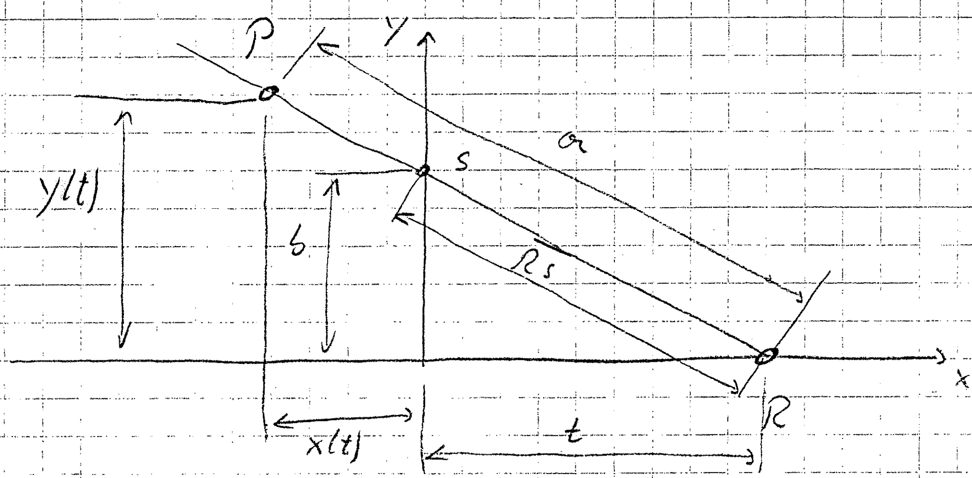
25.2

25.2/1

a) Skizze:



b)



⇝ Seitenverhältnisse im Dreieck:

$$\frac{a}{y(t)} = \frac{\overline{RS}}{b} \Rightarrow y(t) = \frac{a \cdot b}{\overline{RS}}$$

$$\frac{a}{-x(t)+t} = \frac{\overline{RS}}{t} \Rightarrow t - x(t) = \frac{a \cdot t}{\overline{RS}}$$

$$x(t) = t - \frac{a \cdot t}{\overline{RS}}$$

$$\overline{RS} = \sqrt{t^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = t - \frac{a \cdot t}{\sqrt{t^2+b^2}} \Rightarrow \boxed{x(t) = t \cdot \left(1 - \frac{a}{\sqrt{t^2+b^2}}\right)}$$

$$\boxed{y(t) = \frac{a \cdot b}{\sqrt{t^2+b^2}}}$$

c) Höchster Punkt H von $y(t)$

$\Leftarrow$ $t = 0$

↑

aus Vorstellung (Anschauung!)

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_H &= 0 \\ y_H &= a \end{aligned}} \Bigg\} \Rightarrow \boxed{H = (0, a)}$$

d) Asymptoten:

$t \to +\infty$: pos. x-Achse

$t \to -\infty$: neg. x-Achse

aus Anschauung!

$\Rightarrow$ Asymptote : $\boxed{x\text{-Achse}}$

Formale Lösung:

$\rightsquigarrow$ Betrachte die Grenzwerte

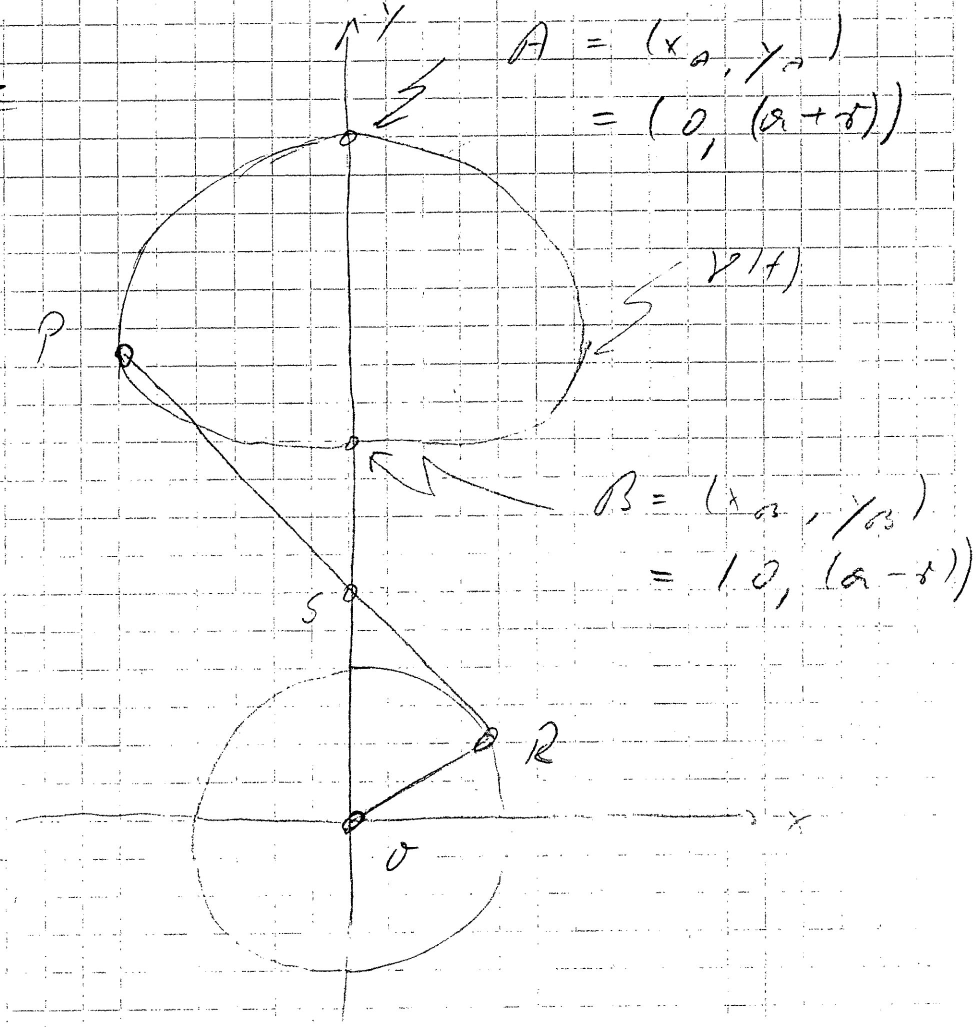
$$\lim_{|t| \to \infty} \{x(t)\} = \lim_{|t| \to \infty} \left\{ t \cdot \left(1 - \frac{a}{\sqrt{t^2 + b^2}}\right) \right\}$$

$$= \underline{\underline{\pm t}}$$

$$\lim_{|t| \to \infty} \{y(t)\} = \lim_{|t| \to \infty} \left\{ \frac{a \cdot b}{\sqrt{t^2 + b^2}} \right\} = \underline{\underline{0}}$$

25.3

a) Skizze



b) ~ vgl. Skizze.

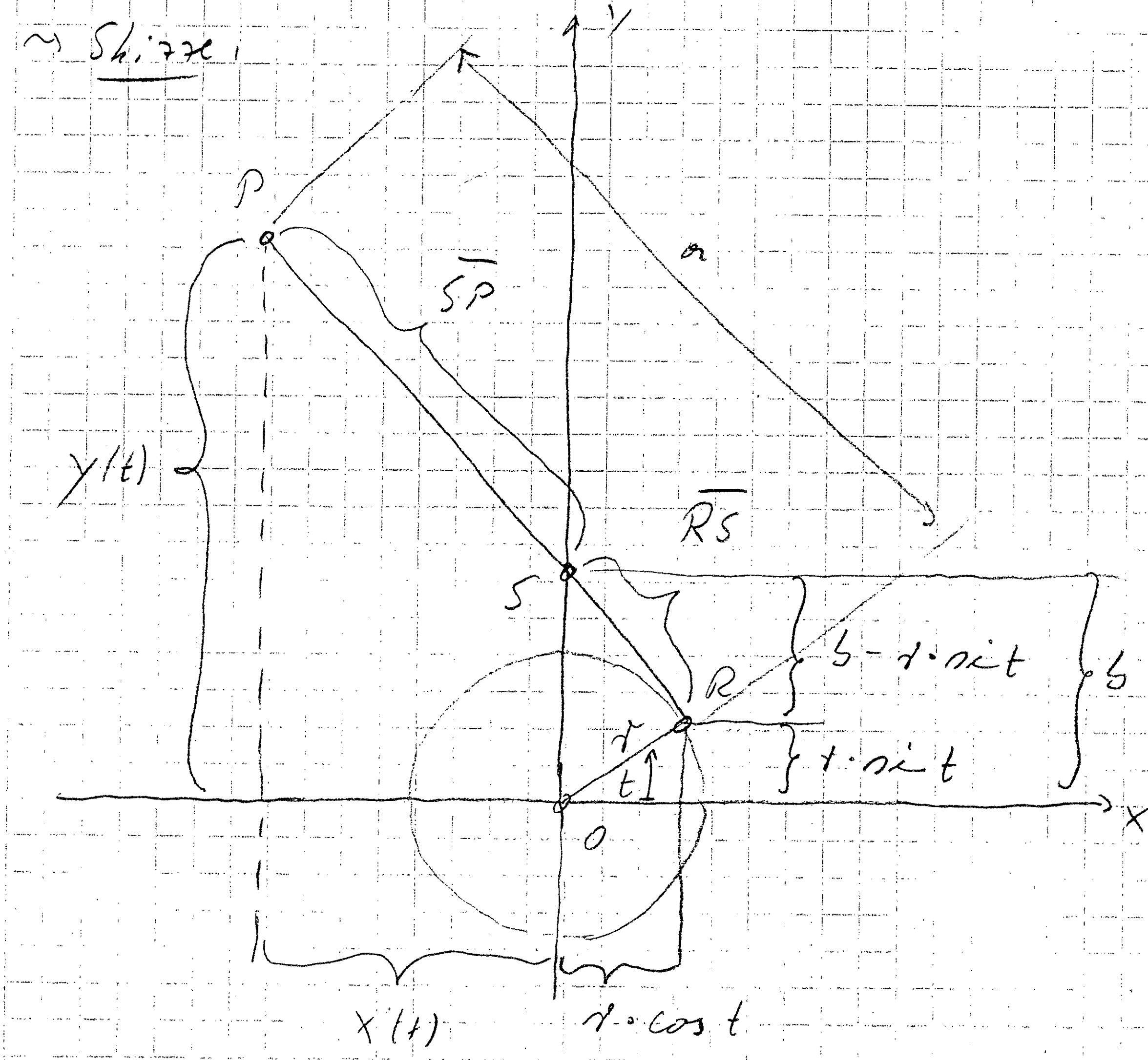
$$\boxed{\begin{aligned} A &= (x_A, y_A) \\ &= (0, (a+r)) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} B &= (x_B, y_B) \\ &= (0, (a-r)) \end{aligned}}$$

25.3/2

c) Parameterdarstellung von $\gamma(t)$.

~ Skizze:



$\underline{x(t)}$:

→ Strahlensatz: $\boxed{\dfrac{-x(t)}{\overline{SP}} = \dfrac{r\cdot\cos t}{\overline{RS}}}$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = -\overline{SP}\cdot\dfrac{r\cdot\cos t}{\overline{RS}}}$

NR 1:

$$-\overline{SP} = -(a - \overline{RS})$$

$$\Rightarrow \overline{SP} = \overline{RS} - a$$

25.3/3

$\sqrt{\;}$ NR 2:

$$\overline{RS} = \sqrt{(b - r\cdot\sin t)^2 + (r\cdot\cos t)^2}$$

$$= \sqrt{(b^2 - 2\cdot b r\cdot\sin t + r^2\cdot\sin^2 t + r^2\cdot\cos^2 t)}$$

$$= \sqrt{(b^2 - 2\cdot b\cdot r\cdot\sin t + r^2\cdot\underbrace{(\sin^2 t + \cos^2 t)}_{=1})}$$

$$= \sqrt{\underbrace{b^2 - 2\cdot b\cdot r\cdot\sin t + r^2}_{>0}}$$

>0, da $\sin t \le 1$

$\leadsto$ sei $\sin t = 1$, dann:

$\Rightarrow \underbrace{b^2 - 2\cdot b\cdot r + r^2}_{(b-r)^2} > 0$,

da $b > r$

$$\Rightarrow x(t) = (\overline{RS} - a)\cdot\frac{r\cdot\cos t}{\overline{RS}}$$

$$= \left(1 - \frac{a}{\overline{RS}}\right)\cdot r\cdot\cos t$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \left(1 - \frac{a}{\sqrt{b^2 - 2\cdot b\cdot r\cdot\sin t + r^2}}\right)\cdot r\cdot\cos t}$$

25.3/4

$\underline{y(t)}$:

→ Pythagoras :

$$\left(y(t) - r \cdot \sin t\right)^2 = a^2 - \left(r \cdot \cos t - x(t)\right)^2$$

$$\Rightarrow y(t) = \ldots$$

→ oder: Strahlensatz

$$\frac{y(t) - r \cdot \sin t}{a} = \frac{b - r \cdot \sin t}{\overline{RS}}$$

$$\Rightarrow y(t) = a \cdot \left(\frac{b - r \cdot \sin t}{\overline{RS}}\right) + r \cdot \sin t$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = a \cdot \left(\frac{b - r \cdot \sin t}{\sqrt{b^2 - 2 \cdot b \cdot r \cdot \sin t + r^2}}\right) + r \cdot \sin t}$$

√ Probe: "Plausibilitätstest"!

$t = 90° \Rightarrow \sin t = 1$

$\cos t = 0$

$$\Rightarrow \overline{RS} = \sqrt{b^2 - 2br \cdot 1 + r^2} = \sqrt{(b-r)^2} = b - r$$

$$\Rightarrow x(t) = \left(1 - \frac{a}{(b-r)}\right) \cdot r \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$y(t) = a \cdot \left(\frac{b - r \cdot 1}{b - r}\right) + r \cdot 1 = \underline{\underline{a + r}}$$

BlaH 24 Potenz-, Wurzel- und Logarithmenrechnung

A 24.1 Folgende Terme sind zu vereinfachen ($a, b, c, d, x, y, z \in I\!R \setminus \{0\};\ m, n, r \in I\!N$):

a) $\dfrac{a^{3n-5} \cdot b^{3n+4} \cdot c^{2m-3+n} \cdot d^{6-r}}{(c^2)^{m-2} \cdot a^{2n-6} \cdot d^{-r+n+7} \cdot b^{4n+5}}$ b) $\dfrac{x^n y^{2-n}}{a^{2n+1} b^{3n}} \cdot \dfrac{a^3 b^{5n+2}}{x^{-2-n} y^{3n+2}}$

c) $\dfrac{(x^3y^3z^2 + x^2y^4z^2)^n}{(x^4y^4z^3 - x^4y^3z^4)^n} \quad (y \neq z)$ d) $\left(\dfrac{8a^3x^3}{6cy^3}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{27b^3y^3}{2^2a^5x^3c}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{2a^2xc}{9yb^2}\right)^4$

e) $\dfrac{a^{n-1}(-b)^n x^{3+2n}}{c^{2n+1}y^{n+2}} : \dfrac{(-b)^{3n}x^3}{a^{-2n+1}c^{n+1}y^2}$

f) $\dfrac{9(2ac+3ad)^4}{(4c^2x - 9d^2x)^3} : \dfrac{a(4c^2-9d^2)^2 \cdot (2xac + 3dxa)}{(4c^2-6dc)^4 \cdot (12ac^2 - 27d^2a)^2} \quad (c \neq \pm\frac{3}{2}d)$

A 24.2 Vereinfachen Sie ($a, b, c, x, y > 0$):

a) $\sqrt{a\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a^3}}}$ b) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{9a^6}{b^2c}\right)^n \sqrt{\left(\dfrac{27b^5}{a^5\sqrt{c^3}}\right)^n}}$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{a^2b^5}{c}} : \sqrt[6]{\dfrac{ac}{b^2}}$

d) $\sqrt[4]{a^3\sqrt[5]{a^4\sqrt[3]{a^8}}} : \sqrt[3]{a^2\sqrt[5]{a^4\sqrt[4]{a^5}}}$ e) $\dfrac{\sqrt[4]{(ax+ay)^3}}{\sqrt[3]{(bx^2-by^2)^4}} : \dfrac{\sqrt{(bx+by)^{-\frac{1}{2}}}}{\sqrt[8]{(ax^2-ay^2)^3}} \quad (x > y)$

A 24.3 Fassen Sie zusammen und geben Sie - falls nötig - die Existenzbedingungen für die auftretenden Terme an:

a) $3\sqrt{64} + \sqrt[4]{81} - \sqrt[3]{64}$ b) $\sqrt{75} - \sqrt{12} + \sqrt{108} + \sqrt[12]{729}$

c) $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} - \sqrt{a^2+b^2}$ d) $\sqrt{(x+2)^2 - 6x - 3}$

e) $\dfrac{x^2-6x+9}{\sqrt{(x-4)^2+2x-7}}$ f) $\sqrt{x^2-y^2}\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$ g) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \cdot \sqrt{x+y}}{\sqrt{x^2-y^2}}$

h) $\dfrac{a-b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} - \dfrac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ i) $a - 3\sqrt[3]{a^2b} + 3\sqrt[3]{ab^2} - b$ j) $a^3 + 3a^{\frac{5}{3}} + 3a^{\frac{1}{3}} + a^{-1}$

A 24.4 In den Nennern der folgenden Brüche sind die Wurzeln zu beseitigen:

a) $\dfrac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ b) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{a+b}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \quad (a, b \geq 0,\ a \neq b)$

d) $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ e) $\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ f) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{8}}$

A 24.5 Man berechne x:

a) $x = \log_3 27$ b) $x = \log_{\frac{1}{3}} 27$ c) $x = \sqrt[3]{10^{3+\lg 5}}$

d) $x = \sqrt{2+\sqrt{e^{\ln 4}}}$ e) $x = \sqrt{10 + 9 \cdot 10^{2\ln e^2 - 3}}$ f) $x = 64^{1-\log_8 2} + 6^{-\log_6 4}$

g) $\log_5 x = 2$ h) $\log_{\frac{1}{5}} x = -2$ i) $\log_x 81 = 4$

j) $\log_{\frac{1}{x}} 81 = 4$ k) $\log_8\{2\log_3[1 + \log_2(1 + 3\log_2 x)]\} = \dfrac{1}{3}$

A 24.6 Unter Verwendung von Logarithmengesetzen vereinfache man ($x, y, a, b, c > 0,\ c \neq 1$):

a) $\log_c \dfrac{x^2y}{\sqrt{1+x^2}} - 2\log_c x + \dfrac{1}{2}\log_c(1+x^2)$ b) $2\ln x + \ln(8x) - 3\ln(2x)$

c) $\dfrac{1}{3}\log_5(a^2 - ab + b^2) + \dfrac{1}{3}\log_5(a+b)$ d) $\dfrac{\log_x\left(\frac{x^a}{b}\right) \cdot \log_y(bx^a)}{\log_y x} \quad (x, y \neq 1)$

A 24.7 Man ermittle die Lösungsmengen L für x aus folgenden Gleichungen ($a, b > 0,\ \neq 1$)

a) $\log_a x + \log_a(x+5) - \log_a 150 = 0 \quad (x > 0)$

b) $\log_5(3x-9) - \log_5 x = \log_5(x-7) \quad (x > 7)$

c) $(\log_3 x)^2 - 7 = 3\log_3 x^2 \quad (x > 0)$

d) $\log_b x - \log_{b^2} x + \log_{b^4} x = \dfrac{3}{4} \quad (x > 0)$

e) $\log_9(x+2) \cdot \log_x 3 = 1 \quad (x > 0,\ \neq 1)$ f) $\ln(64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}}) = 0$

g) $0.25^{x^2} \cdot 2^{2x-1} = \dfrac{1}{32}$ h) $4^{x+\frac{1}{2}} - 3^{x-1} = 3^{x+1} - 2^{2x-1}$

i) $21^{4x-3} = 3^{2x-2} \cdot 7^{6x-4}$ j) $\log_3(4^{x+1} - 10) = 2 + \log_3(2^{x+1} - 2)$

k) $\left(\dfrac{3}{7}\right)^{3x-7} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{7x-3}$ l) $2\ln 3 + (\dfrac{1}{2x} - 1)\ln 2 - \ln(2^{\frac{1}{x}} + 2) = 0$

A 24.8 Die folgenden physikalischen Formeln (vgl. z.B. [DES]) sind nach den angegebenen Größen umzustellen:

a) (Bernoulli-Gleichung) $p_s + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2 = c^*$ nach ρ, v (c^* =const)

b) (relativistische Dopplerverschiebung) $f' = f\sqrt{\dfrac{c_0+v}{c_0-v}}$ nach v

c) (relativistische Massebeziehung) $m = m_0\left(1 - (\dfrac{v}{c_0})^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ nach v, c_0

d) (erzwungene Schwingung) $x_m = \dfrac{F_m}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\delta\omega)^2}}$ nach δ, ω_0, ω

e) (Entropie) $S = k\ln P_{th}$ nach P_{th}

f) (Adiabatengleichung) $T^\kappa \cdot p^{1-\kappa} = \hat{c}$ nach T, p, κ ($\hat{c}$ =const)

g) (barometrische Höhenformel) $p = p_0\exp\left(-\dfrac{\rho_0 gh}{p_0}\right)$ nach ρ_0

(Hinweis: $\exp(x)$ ist eine andere Schreibweise für e^x.)

h) (Diffusionsspannung) $U_D = \dfrac{kT}{e}\ln\dfrac{n_An_D}{n_i^2}$ nach n_A, n_i.

vgl. auch BlaH 2

Lösungen zu Bl. 24

L 24.1 a) $a^{3n-5-2n+6}\,b^{3n+4-4n-5}\,c^{2m-3+n-2m+4}\,d^{6-r+r-n-7} =$

$a^{n+1}b^{-n-1}c^{n+1}d^{-n-1} = \left(\dfrac{ac}{bd}\right)^{n+1}.$

b) $x^{n+2+n}y^{2-n-3n-2}a^{3-2n-1}b^{5n+2-3n} = x^{2(n+1)}b^{2(n+1)}a^{-2(n-1)}y^{-4n} = \left(\dfrac{(bx)^{n+1}}{a^{n-1}y^{2n}}\right)^2.$

c) $\left(\dfrac{x^2y^3z^2(x+y)}{x^4y^3z^3(y-z)}\right)^n = \dfrac{1}{(x^2z)^n}\left(\dfrac{x+y}{y-z}\right)^n \quad (y \neq z).$

d) $(2^6a^6x^62^{-2}3^{-2}c^{-2}y^{-6})\cdot(3^9b^9y^92^{-6}a^{-15}x^{-9}c^{-3})\cdot(2^4a^8x^4c^43^{-8}y^{-4}b^{-8}) =$

$2^{6-2-6+4}3^{-2+9-8}a^{6-15+8}b^{9-8}c^{-2-3+4}x^{6-9+4}y^{-6+9-4} = 2^23^{-1}a^{-1}b^1c^{-1}x^1y^{-1} = \dfrac{4bx}{3acy}.$

e) $a^{n-1-2n+1}(-b)^{n-3n}c^{-2n-1+n+1}x^{3+2n-3}y^{-n-2+2} = a^{-n}(-b)^{-2n}c^{-n}x^{2n}y^{-n} =$

$\left(\dfrac{x^2}{ab^2cy}\right)^n.$

f) $\dfrac{3^2\,a^4(2c+3d)^4}{x^3(4c^2-9d^2)^3}\cdot\dfrac{2^4c^4(2c-3d)^4\cdot 3^2a^2(4c^2-9d^2)^2}{a\,(4c^2-9d^2)^2\cdot ax(2c+3d)} = \dfrac{2^43^4a^4c^4(2c+3d)^3(2c-3d)^4}{x^4(4c^2-9d^2)^3}$

$= \left(\dfrac{6ac}{x}\right)^4\dfrac{(2c+3d)^3(2c-3d)^4}{(2c-3d)^3(2c+3d)^3} = \left(\dfrac{6ac}{x}\right)^4(2c-3d).$

L 24.2 a) $\left(a\cdot a^{\frac{2}{3}}\cdot(a^{\frac{3}{4}})^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^{1+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{23}{24}} = \sqrt[24]{a^{23}}.$

b) $\sqrt[4]{\left(\dfrac{9a^6}{b^2c}\right)^n\cdot\left(\dfrac{27b^5}{a^5c^{3/2}}\right)^{2n}} = \sqrt[4]{\dfrac{3^{2n}a^{6n}3^{6n}b^{10n}}{b^{2n}c^na^{10n}c^{3n}}} = \sqrt[4]{3^{8n}a^{-4n}b^{8n}c^{-4n}} = \left(\dfrac{9b^2}{ac}\right)^n.$

c) $\sqrt[6]{\dfrac{a^4b^{10}b^2}{c^2ac}} = \sqrt{\dfrac{a}{c}}\,b^2.$

d) $\left(a^3(a^4\cdot a^{\frac{8}{3}})^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{4}} : \left(a^2(a^4\cdot a^{\frac{5}{4}})^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(a^3\cdot a^{\frac{4}{3}}\right)^{1/4} : \left(a^2\cdot a^{\frac{21}{20}}\right)^{\frac{1}{3}} =$

$a^{\frac{13}{12}} : a^{\frac{61}{60}} = a^{\frac{4}{60}} = \sqrt[15]{a}.$

e) $\dfrac{a^{\frac{3}{4}}(x+y)^{\frac{3}{4}}}{b^{\frac{4}{3}}(x-y)^{\frac{4}{3}}(x+y)^{\frac{4}{3}}}\cdot\dfrac{a^{\frac{8}{6}}(x-y)^{\frac{8}{6}}(x+y)^{\frac{8}{6}}}{b^{-\frac{1}{4}}(x+y)^{-\frac{1}{4}}} = a^{\frac{3}{4}+\frac{8}{6}}b^{-\frac{4}{3}+\frac{1}{4}}(x+y)^{\frac{3}{4}-\frac{4}{3}+\frac{8}{6}+\frac{1}{4}} =$

$a^{\frac{25}{12}}b^{-\frac{13}{12}}(x+y) = \sqrt[12]{\dfrac{a^{25}}{b^{13}}}\,(x+y) = \dfrac{a^2}{b}\,(x+y)\,\sqrt[12]{\dfrac{a}{b}}.$

L 24.3 a) $3\cdot 8+3-4 = 23.$ b) $5\sqrt{3}-2\sqrt{3}+6\sqrt{3}+\sqrt{3} = 10\sqrt{3}.$

c) $\dfrac{a^2-b^2-\sqrt{a^2+b^2}^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{-2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad a^2+b^2 \neq 0.$

d) $\sqrt{x^2+4x+4-6x-3} = \sqrt{x^2-2x+1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1|.$

e) $\dfrac{(x-3)^2}{\sqrt{x^2-8x+16+2x-7}} = \dfrac{(x-3)^2}{\sqrt{x^2-6x+9}} = \dfrac{(x-3)^2}{\sqrt{(x-3)^2}} = |x-3|, \quad x \neq 3.$

f) $\sqrt{\dfrac{(x-y)(x+y)^2}{x-y}} = |x+y| = x+y$ (da $-x \le y < x$ gelten muß).

g) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{x+y}}{\sqrt{x+y}\cdot\sqrt{x-y}} = \dfrac{\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}} = \dfrac{1}{\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}}, \quad x > y \ge 0.$

h) $\dfrac{(a-b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(a+b)(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \dfrac{2(a\sqrt{b}-b\sqrt{a})}{a-b}, \quad a, b \ge 0,\ a \neq b.$

i) $(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})^3, \quad a, b \ge 0.$ j) $(a+\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}})^3, \quad a > 0.$

L 24.4 a) $\sqrt{2}+1.$ b) $\dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{1-2} = -3+2\sqrt{2}.$ c) $\dfrac{(a+b)(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}.$

d) $\dfrac{(1+\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})}{4\cdot 3-9\cdot 2} = -1-\dfrac{1}{3}\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{2}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}.$

e) $\dfrac{(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})(1-\sqrt{2}-\sqrt{6})}{(1-\sqrt{2})^2-6} = \dfrac{-1+3\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{-2\sqrt{2}-3} = \dfrac{(1-3\sqrt{2}+3\sqrt{3})(2\sqrt{2}-3)}{(2\sqrt{2}+3)(2\sqrt{2}-3)}$

$= 15-11\sqrt{2}+9\sqrt{3}-6\sqrt{6}.$ f) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-2\sqrt{2}} = 1.$

L 24.5 a) $27 = 3^x \Rightarrow x = 3.$ b) $27 = \left(\frac{1}{3}\right)^x \Rightarrow x = -3.$

c) $x = \sqrt[3]{10^3\cdot 10^{\lg 5}} = 10\sqrt[3]{5}.$ d) $x = \sqrt{2+\sqrt{4}} = 2.$

e) $x = \sqrt{10+9\cdot 10^{4-3}} = 10.$

f) $x = 64^1\cdot\dfrac{1}{8^{2\log_8 2}}+\dfrac{1}{6^{\log_6 4}} = 64\cdot\dfrac{1}{8^{\log_8 4}}+\dfrac{1}{6^{\log_6 4}} = 64\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4} = 16.25.$

g) $x = 5^2 = 25.$ h) $x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} = 25.$ i) $x^4 = 81 \Rightarrow x = 3.$

j) $\left(\frac{1}{x}\right)^4 = 81 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$

k) $2\log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)] = 8^{\frac{1}{3}} = 2 \Leftrightarrow \log_3[1+\log_2(1+3\log_2 x)] = 1 \Leftrightarrow$
$1+\log_2(1+3\log_2 x) = 3 \Leftrightarrow \log_2(1+3\log_2 x) = 2 \Leftrightarrow 1+3\log_2 x = 4 \Leftrightarrow$
$3\log_2 x = 3 \Leftrightarrow \log_2 x = 1 \Leftrightarrow x = 2.$

L 24.6 a) $\log_a x^2+\log_a y-\log_a\sqrt{1+x^2}-\log_a x^2+\log_a(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = \log_a y.$

b) $\ln x^2+\ln(8x)-\ln(2x)^3 = \ln\dfrac{8x^3}{(2x)^3} = \ln 1 = 0.$

c) $\frac{1}{3}\log_5[(a^2-ab+b^2)(a+b)] = \frac{1}{3}\log_5(a^3+b^3) = \log_5\sqrt[3]{a^3+b^3}.$

d) $\dfrac{(\log_x x^a-\log_x b)(\log_y b+\log_y x^a)}{\log_y x} = (a-\log_x b)\left(\dfrac{\log_y b}{\log_y x}+a\dfrac{\log_y x}{\log_y x}\right) =$

$(a-\log_x b)(\log_x b+a) = a^2-(\log_x b)^2.$

24/12

L 24.9 a) $\log_a \frac{x(x+5)}{150} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(x+5)}{150} = 1 \Leftrightarrow x^2+5x-150=0 \Rightarrow x_1 = -15$ (entfällt), $x_2 = 10 \Rightarrow L = \{10\}$.

b) $\log_5 \frac{3x-9}{x(x-7)} = 0 \Rightarrow 3x-9 = x(x-7) \Leftrightarrow x^2-10x+9=0 \Rightarrow x_1 = 1$ (entfällt), $x_2 = 9 \Rightarrow L=\{9\}$.

c) $(\log_3 x)^2 - 3\cdot 2\cdot \log_3 x - 7 = 0$. Setze $\log_3 x = z \Rightarrow z^2-6z-7=0 \Rightarrow z_1 = -1 = \log_3 x_1 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3}$; $z_2 = 7 = \log_3 x_2 \Rightarrow x_2 = 3^7 = 2187. \Rightarrow L = \{\frac{1}{3},\ 2187\}$.

d) $\log_b x - \frac{\log_b x}{\log_b b^2} + \frac{\log_b x}{\log_b b^4} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \log_b x(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}) = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \log_b x = 1 \Rightarrow L = \{b\}$.

e) $\log_9(x+2)\cdot\frac{\log_9 3}{\log_9 x} = 1 \Leftrightarrow \frac{\log_9(x+2)}{\log_9 x}\cdot \log_9 9^{\frac{1}{2}} = 1 \Leftrightarrow \log_9(x+2) = 2\log_9 x \Leftrightarrow x+2 = x^2 \Rightarrow x_1 = -1$ (entfällt), $x_2 = 2 \Rightarrow L = \{2\}$.

f) $64\cdot \sqrt[24]{2^{x^2-40x}} = 1 \Leftrightarrow 2^6(2^{x^2-40x})^{\frac{1}{24}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{24}(x^2-40x)+6 = 0 \Rightarrow L = \{4,\ 36\}$.

g) $(2^{-2})^{x^2}\cdot 2^{2x-1} = 2^{-5} \Leftrightarrow -2x^2+2x-1 = -5 \Rightarrow L = \{-1,\ 2\}$.

h) $2^{2(x+\frac{1}{2})} + 2^{2x-1} = 3^{x+1} + 3^{x-1} \Leftrightarrow 2^{2x}(2+\frac{1}{2}) = 3^x(3+\frac{1}{3}) \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{10/3}{5/2} = \frac{4}{3} \Rightarrow L = \{1\}$.

i) $3^{4x-3}\,7^{4x-3} = 3^{2x-2}\,7^{6x-4} \Leftrightarrow 3^{2x-1} = 7^{2x-1} \Rightarrow 2x-1 = 0 \Rightarrow L = \{\frac{1}{2}\}$.

j) $\log_3 \frac{4^{x+1}-10}{2^{x+1}-2} = 2 \Leftrightarrow \frac{4^{x+1}-10}{2^{x+1}-2} = 3^2 \Leftrightarrow 4\cdot(2^2)^x - 10 = 9(2\cdot 2^x - 2)$. Setze $z = 2^x \Rightarrow 4z^2 - 18z + 8 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2} = 2^{x_1} \Rightarrow x_1 = -1$ (entfällt nach Probe), $z_2 = 4 = 2^{x_2} \Rightarrow x_2 = 2 \Rightarrow L = \{2\}$.

k) $(3x-7)(\log_a 3 - \log_a 7) = (7x-3)(\log_a 1 - \log_a 3) \Leftrightarrow x(3\log_a 3 - 3\log_a 7 + 7\log_a 3) = 3\log_a 3 + 7\log_a 3 - 7\log_a 7 \Rightarrow L = \left\{\frac{10\log_a 3 - 7\log_a 7}{10\log_a 3 - 3\log_a 7}\right\}$.

(Die Basis a kann beliebig (aber > 0, $\neq 1$) gewählt werden.)

l) $\ln \frac{3^2\cdot 2^{\frac{1}{2x}-1}}{2^{\frac{1}{x}}+2} = 0 \Leftrightarrow \frac{9\cdot 2^{-1}\cdot 2^{\frac{1}{2x}}}{2^{\frac{1}{x}}+2} = 1 \Leftrightarrow \frac{9}{2}\cdot 2^{\frac{1}{2x}} = 2^{\frac{1}{x}} + 2$. Setze $2^{\frac{1}{2x}} = z \Rightarrow z^2 - \frac{9}{2}z + 2 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{1}{2} = 2^{\frac{1}{2x_1}} \Rightarrow \frac{1}{2x_1} = -1 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$; $z_2 = 4 = 2^{\frac{1}{2x_2}} \Rightarrow \frac{1}{2x_2} = 2 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4}. \Rightarrow L = \{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\}$.

L 24.8 a) $\rho(gh+\frac{1}{2}v^2) = c^* - p_s \Rightarrow \rho = \frac{c^*-p_s}{gh+\frac{1}{2}v^2}$, $v = \sqrt{\frac{2(c^*-p_s-\rho gh)}{\rho}}$.

b) $f'^2 = \frac{f^2(c_0+v)}{c_0-v} \Leftrightarrow f'^2(c_0-v) = f^2(c_0+v) \Leftrightarrow c_0(f'^2-f^2) = v(f^2+f'^2) \Rightarrow v = \frac{c_0(f'^2-f^2)}{f'^2+f^2}$.

c) $m^2 = \frac{m_0^2}{1-\frac{v^2}{c_0^2}} \Leftrightarrow m^2 - m^2\frac{v^2}{c_0^2} = m_0^2 \Leftrightarrow m^2 - m_0^2 = m^2\frac{v^2}{c_0^2} \Leftrightarrow v = \frac{c_0}{m}\sqrt{m^2-m_0^2}$; $c_0 = \frac{mv}{\sqrt{m^2-m_0^2}}$.

d) $m^2x_m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2 + m^2x_m^2(2\delta\omega)^2 = F_m^2 \Leftrightarrow (2\delta\omega)^2 = \frac{F_m^2 - m^2x_m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}{m^2x_m^2} \Leftrightarrow$

$$\delta = \frac{\sqrt{F_m^2 - m^2x_m^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}}{2\omega m x_m};$$

$$|\omega_0^2-\omega^2| = \frac{\sqrt{F_m^2 - m^2x_m^2(2\delta\omega)^2}}{mx_m} \Rightarrow \omega_0 = \pm\sqrt{\omega^2 \pm \frac{\sqrt{F_m^2 - m^2x_m^2(2\delta\omega)^2}}{mx_m}};$$

$\omega^4m^2x_m^2 + \omega^2(4\delta^2m^2x_m^2 - 2\omega_0^2m^2x_m^2) + m^2x_m^2\omega_0^4 - F_m^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\omega^4 + (4\delta^2 - 2\omega_0^2)\omega^2 + \omega_0^4 - \frac{F_m^2}{m^2x_m^2} = 0$ (biquadratische Gleichung für ω) $\Rightarrow \omega_{1,2}^2 =$

$$-2\delta^2+\omega_0^2 \pm \sqrt{(-2\delta^2+\omega_0^2)^2 - \omega_0^4 + \frac{F_m^2}{m^2x_m^2}} = -2\delta^2+\omega_0^2 \pm \sqrt{4\delta^4 - 4\delta^2\omega_0^2 + \frac{F_m^2}{m^2x_m^2}}$$

$$\Rightarrow \omega_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{-2\delta^2+\omega_0^2 \pm \sqrt{4\delta^4 - 4\delta^2\omega_0^2 + \frac{F_m^2}{m^2x_m^2}}}.$$

e) $P_{th} = e^{\frac{S}{k}}$.

f) $T = (\hat{c}\cdot p^{\kappa-1})^{\frac{1}{\kappa}}$; $T^\kappa = \hat{c}\cdot p^{\kappa-1}$; $\log_a T^\kappa = \log_a \hat{c} + \log_a p^{\kappa-1} \Leftrightarrow \kappa\log_a T + (1-\kappa)\log_a p = \log_a \hat{c} \Leftrightarrow \kappa(\log_a T - \log_a p) = \log_a \hat{c} - \log_a p$

$\Leftrightarrow \kappa = \frac{\log_a \hat{c} - \log_a p}{\log_a T - \log_a p} = \frac{\log_a \frac{\hat{c}}{p}}{\log_a \frac{T}{p}}$ ($a > 0$, $\neq 1$ beliebige Basis)

g) $\ln\frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0 gh}{p_0} \Rightarrow \rho_0 = -\frac{p_0}{gh}\ln\frac{p}{p_0}$.

h) $\exp\left(\frac{U_De}{kT}\right) = \frac{n_An_D}{n_i^2} \Rightarrow n_A = \frac{n_i^2}{n_D}\exp\left(\frac{U_De}{kT}\right) \Rightarrow n_i^2 = \frac{n_A}{n_D}\exp\left(-\frac{U_De}{kT}\right) \Rightarrow n_i = \sqrt{\frac{n_A}{n_D}}\exp\left(-\frac{U_De}{2kT}\right)$.

Blatt: 23

10.7 Aufgaben

23.1 Man rechne den gegebenen Winkel in die jeweils anderen Winkelmaße um (Grad mit sexagesimaler Teilung, Grad mit dezimaler Teilung, Radiant, Gon)

a) $\alpha = 12°13'08''$ b) $\alpha = 114,065°$

c) $\alpha = 1,7563 rad$ d) $\alpha = 65,4029 gon$

23.2 Man vereinfache

a) $\frac{\tan\alpha}{\sin\alpha}$ b) $\sin\alpha\sqrt{1+\cot^2\alpha}$

c) $\tan\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

23.3 Man beweise die Beziehung

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$

23.4 Gegeben ist $\sin\alpha = \frac{1}{k}$. Man berechne $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\cot\alpha$.

23.5 Man vereinfache

a) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

c) $y = \tan(x + 540°)$ d) $\frac{\cos(90° + \lambda)}{\cos(180° + \lambda)}$

23.6 Die folgenden Terme sind zu vereinfachen

a) $\cos(45° + \beta) - \cos(45° - \beta)$

b) $\sin(120° + \alpha) + \cos(210° - \alpha)$

c) $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$ d) $\frac{(1-\cos\alpha)\cos\alpha}{\sin 2\alpha}$ e) $\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$

23.7 Man beweise die folgenden Gleichungen

a) $\sin\alpha + \sin(\alpha + 120°) + \sin(\alpha + 240°) = 0$

b) $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

c) $\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = \tan\frac{\beta}{2}$

d) $\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} = \tan(45° + \alpha)$

e) $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$

23.8 Man bestimme α in den ersten vier Quadranten

a) $\sin\alpha = 0,5314$ b) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

c) $\tan\alpha = 0,7500$ d) $\cot\alpha = -1$

e) $\sin\alpha = -0,3736$ f) $\cos\alpha = 0,9510$

23.9 Man vereinfache

a) $\arctan\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$ b) $\arccos(\sin x)$

23.10 Man löse die folgenden goniometrischen Gleichungen (Es sind nur die Hauptwerte anzugeben)

a) $4\sin x + 3 = 0$

b) $2\sin 2x - \sqrt{3} = 0$

c) $\sin x - \cos x = 1$

d) $\sqrt{3}\cos x + \sin x - 1 = 0$

e) $4\sin x = 6\cot x$

f) $3\cos^2 x + \sin x\cos x + 2\sin^2 x = 3$

g) $\cos 2x + \cos x = 0$

h) $\sin 2x - \cos x = 0$

i) $1 - \cos x = \frac{1}{3}\tan\frac{x}{2}$

k) $\sqrt{3}\cos 2x = \sin x - \sqrt{3}$

23.11 Für die in Bild 10.24 gezeigte Funktion gelten die Beziehungen:

$$f(x) = a\sin(\omega x + \varphi) = a\cos(\omega x + \psi) = b_1\sin\omega x + b_2\cos\omega x.$$

Man berechne $a, \omega, \varphi, \psi, b_1$ und b_2.

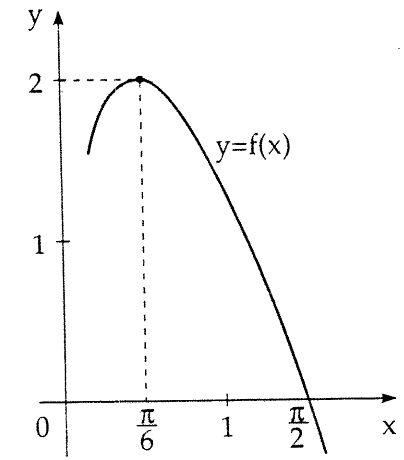


Bild 10.24

23.12 Gegeben sind die drei Ströme

$i_1 = 25\text{ A}\sin\omega t$, $i_2 = 10\text{ A}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$, $i_3 = 15\text{ A}\sin(\omega t + \pi)$.

Man berechne den resultierenden Strom

$i = i_1 + i_2 + i_3 = \hat{i}\text{ A}\sin\omega t + \varphi$

zu Bl. 23

~~c) $x = e^{\frac{\ln 15}{3\ln 4}} = 1,918$ d) $x_1 = e^2$, $x_2 = \frac{1}{e}$~~

~~e) $x = e^{0,6} = 1,822$~~

23. 1 a) $\alpha = 12,2189° = 0,21326 \text{ rad} = 13,5765 \text{ gon}$
b) $\alpha = 114°03'54'' = 1,9908 \text{ rad} = 126,7389 \text{ gon}$
c) $\alpha = 100,6286° = 100°37'43'' = 111,8095 \text{ gon}$
d) $\alpha = 58,8626° = 58°51'45'' = 1,02735 \text{ rad}$

23. 2 a) $\dfrac{1}{\cos\alpha}$ b) 1 c) $\sin\alpha$

23. 3 Man verwende (10.19a) und (10.18).

23. 4 $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{k^2-1}}{k}$, $\tan\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{k^2-1}}$, $\cot\alpha = \sqrt{k^2-1}$

23. 5 a) $y = \cos x$ b) $y = \sin x$ c) $y = \tan x$ d) $\tan\lambda$

23. 6 a) $-\sqrt{2}\sin\beta$ b) $-\sin\alpha$ c) $\tan\dfrac{\alpha}{2}$
d) $\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{\alpha}{2}$ e) $\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

23. 7 a) Man verwende (10.31). b) (10.19), (10.37)
c) (10.42b, c) d) (10.33)
e) Zerlegung: $\sin 3x = \sin(2x + x)$, (10.31) usw.

23. 8 a) $\alpha_1 = 32,100°$, $\alpha_2 = 147,900°$
b) $\alpha_1 = 150°$, $\alpha_2 = 210°$
c) $\alpha_1 = 36,870°$, $\alpha_2 = 216,870°$
d) $\alpha_1 = 135°$, $\alpha_2 = 315°$
e) $\alpha_1 = -21,938°$, $\alpha_2 = 338,062°$
f) $\alpha_1 = 18,010°$, $\alpha_2 = 341,990°$

23. 9 a) x b) $\dfrac{\pi}{2} - x$

23. 10 a) $x_1 = 228°35'$, $x_2 = 311°25'$
b) $2x = 60° + k\cdot 360° \Rightarrow x_1 = 30°$, $x_2 = 210°$
$2x = 120° + k\cdot 360° \Rightarrow x_3 = 60°$, $x_4 = 240°$
c) $x_1 = 90°$, $x_2 = 180°$
d) $x_1 = 90°$, $x_2 = 330°$
e) $x_1 = 60°$, $x_2 = 300°$
f) $x_1 = 0°$, $x_2 = 45°$, $x_3 = 180°$, $x_4 = 225°$
g) $x_1 = 60°$, $x_2 = 180°$, $x_3 = 300°$
h) $x_1 = 30°$, $x_2 = 90°$, $x_3 = 150°$, $x_4 = 270°$
i) $x_1 = 0°$, $x_2 = 19°28'$, $x_3 = 160°32'$
k) $x_1 = 60°$, $x_2 = 120°$

23. 11 $a = 2$, $\omega = \dfrac{3}{2}$, $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, $\psi = -\dfrac{\pi}{4}$, $b_1 = b_2 = \sqrt{2}$

23. 12 $i = 14,14\, A\sin(\omega t + 0,785)$

Quelle: Wendler, T.: "Vorkurs Ing.-Mathe". Verlag Harri Deutsch 1995

S. 232 – 236

Zu A 23.19

10.5 Goniometrische Gleichungen

G o n i o m e t r i s c h e Gleichungen (griech. gon, das Knie, der Winkel) sind Bestimmungsgleichungen für einen unbekannten Winkel - gewöhnlich mit x bezeichnet -, die Winkelfunktionen enthalten.

Beispiel 10.19:

$$\sin x + 3x - 2 = 0$$

Solche Gleichungen werden normalerweise zeichnerisch gelöst. Zu diesem Zweck schreibt man die Gleichung um:

$$\sin x = -3x + 2;$$

betrachtet jede Seite für sich als Funktion

$$y = f_1(x) = \sin x; \qquad y = f_2(x) = -3x + 2$$

und führt damit die Aufgabe, die Gleichung zu lösen, zurück auf die Aufgabe, die gemeinsamen Schnittpunkte zweier Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ zu ermitteln. Man zeichnet die Graphen beider Funktionen (Bild 10.18) und erhält - in diesem Fall - einen gemeinsamen Schnittpunkt S, für den, wie Bild 10.18 zeigt, die Funktionswerte beider Funktionen übereinstimmen, d. h., für den $f_1(x_s) = f_2(x_s)$ oder $\sin x_s = -3x_s + 2$ gelten.

Die zugehörige Abszisse des Schnittpunktes S, nämlich x_s, ist die gesuchte Lösung der Ausgangsgleichung, weil für sie beide Funktionswerte gleich sind. Der Index „S" gibt an, daß das Argument x jetzt eine bestimmten Zahlenwert - im vorliegenden Beispiel 0,51 (Bild 10.18) - angenommen hat. Die so erhaltene Lösung $\underline{\underline{x_s = 0,51}}$ ist nur ein Näherungswert. Durch sog. *Näherungsverfahren*, auf die hier nicht weiter eingegangen wird, läßt sie sich jedoch beliebig verbessern.

In einigen Fällen lassen sich goniometrische Gleichungen auch rein rechnerisch lösen. Dabei müssen eventuell vorkommende verschiedene Winkelfunktionen durch eine einzige Winkelfunktion desselben Winkels ausgedrückt werden.

Beispiel 10.20:

$\sin x = 2\cos x$ (Bild 10.19)

Lösung:

Man teilt durch $\cos x$: $\dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x = 2$ (I)

Dies ist erlaubt, weil $\cos x \neq 0$ sein muß. Wäre $\cos x = 0$, müßte nach der Gleichung auch $\sin x = 0$ sein. Das ist jedoch nicht möglich, weil aus $\cos x = 0$ folgt, daß $x = \dfrac{\pi}{2}$

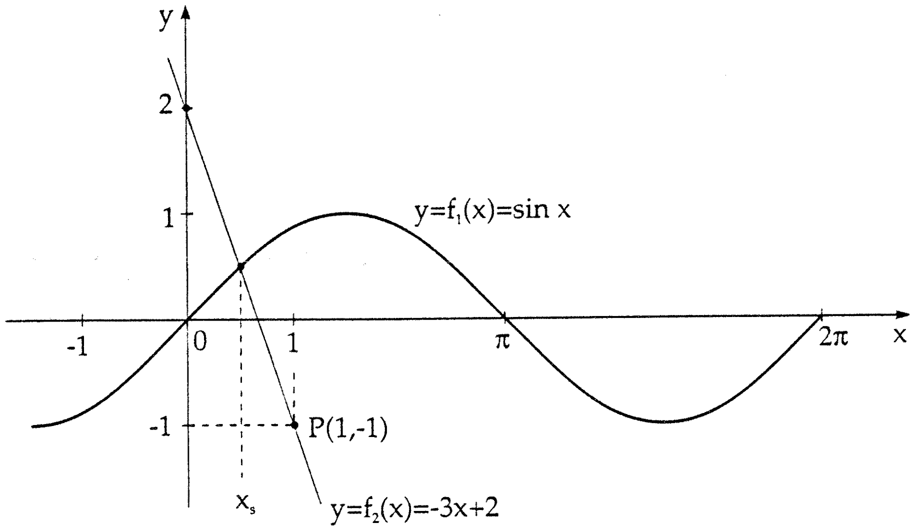


Bild 10.18

ist (s. Bild 10.14a); für diesen Argumentwert ist $\sin x = 1$. Aus (I) folgt zunächst $x = 63,43°$.

Nun ist $\tan x$ eine Funktion mit der Periode $p = 180°$ oder π (s. Gl. 10.26). Sie nimmt den Wert 2 demnach auch noch an weiteren Stellen an (s. Bild 10.14b). Als allgemeine Lösung erhält man:

$$x = 63,43° + k \cdot 180° \qquad (k \in Z)$$

Beschränkt man sich auf die Lösungen in den ersten vier Quadranten - was allgemein üblich ist -, erhält man schließlich zwei Lösungen:

$$\underline{\underline{x_1 = 63,43°}}; \quad \underline{\underline{x_2 = 243,43°}}$$

Treten verschiedene Argumente von Winkelfunktionen auf, so sind sie - meist mittels der Additionstheoreme - auf das gleiche Argument zurückzuführen.

Beispiel 10.21:

$\cos x = \sin 2x$ (Bild 10.20)

Lösung:

Mit Gleichung (10.37) läßt sich die Gleichung umschreiben zu

$$\cos x = 2 \sin x \cos x$$

und weiter

$$\cos x - 2 \sin x \cos x = 0 \qquad \text{(I)}$$

$$\cos x(1 - 2 \sin x) = 0 \qquad \text{(II)}$$

Achtung: In (I) darf man nicht durch $\cos x$ dividieren, weil $\cos x = 0$ werden kann.

Statt dessen klammert man $\cos x$ aus und erhält mit (II) ein Produkt, das Null ist und für das der Satz gilt:

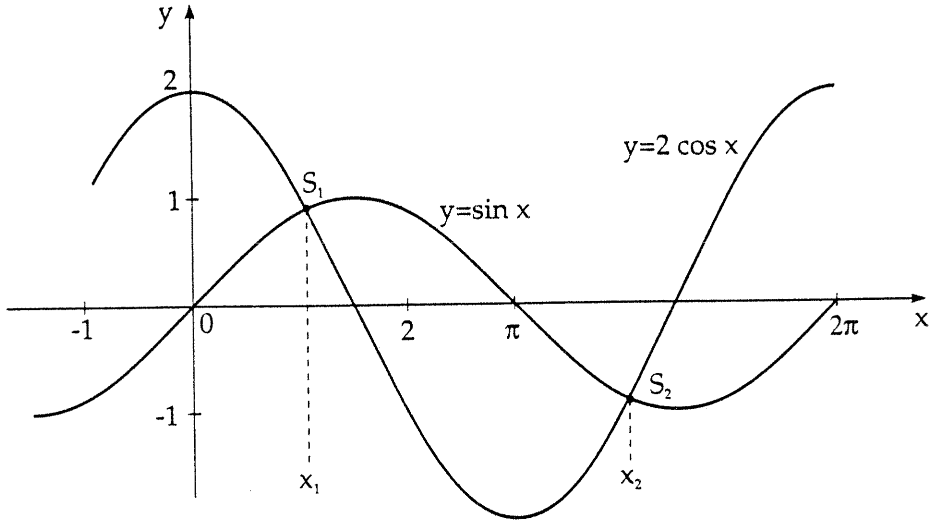


Bild 10.19

- Ein Produkt ist Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist.

Erste Möglichkeit: $\cos x = 0 \quad x_{2,4} = 90° + k \cdot 180°$

Zweite Möglichkeit: $1 - 2\sin x = 0, \quad \sin x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = 30° + k \cdot 360°; \quad x_3 = 150° + k \cdot 360°$

(s. Bild 10.14a)

Für die Hauptwerte der Lösungen, das sind die in den ersten vier Quadranten liegenden Lösungen, folgt:

$$\underline{\underline{x_1 = 30° = \frac{\pi}{6}\ \text{rad}}} \qquad \underline{\underline{x_3 = 150° = \frac{5}{6}\pi\ \text{rad}}}$$

$$\underline{\underline{x_2 = 90° = \frac{\pi}{2}\ \text{rad}}} \qquad \underline{\underline{x_4 = 270° = \frac{3}{2}\pi\ \text{rad}}}$$

Jede Lösung ist durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung auf ihre Gültigkeit zu untersuchen, da man z. B. zuviel Lösungen erhält, wenn während der Auflösung der Gleichung durch Quadrieren der Grad der Gleichung erhöht wird. Auch kann der Fall eintreten, daß sich eine Gleichung ergibt, deren Lösung zwar algebraisch möglich ist, aber im Bereich der reellen Zahlen als Lösung für die vorgelegte trigonometrischen Funktion untauglich ist.

Beispiel 10.22:

$$\sin x = \frac{1}{2}\cot x \quad \text{(Bild 10.21)}$$

Lösung:

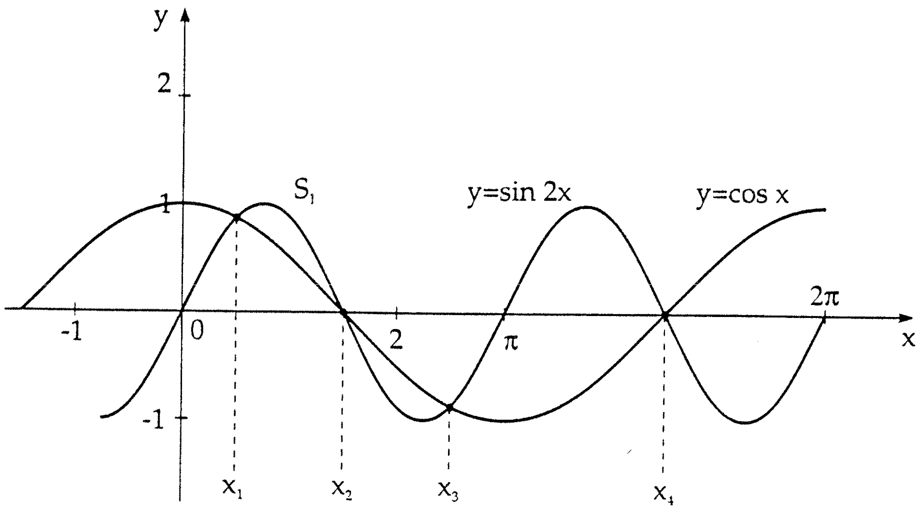


Bild 10.20

$$\sin x = \frac{\cos x}{2\sin x}; \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}\cos x$$

$$1 - \cos^2 x = \frac{1}{2}\cos x$$

$$\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x - 1 = 0$$

Das ist eine „*in cos x quadratische Gleichung*", die man durch die Substitution $\cos x = t$ auf eine in t gemischt-quadratische Gleichung zurückführt:

$$t^2 + \frac{t}{2} - 1 = 0.$$

Sie besitzt zwei Lösungen, die sich mittels der p-q-Formel zu

$$t_1 = -\frac{1}{4} + \sqrt{\frac{1}{16}\cdot 17} = 0,7808$$

$$t_2 = -\frac{1}{4} - \sqrt{\frac{1}{16}\cdot 17} = -1,2808 \quad \text{berechnen.}$$

Setzt man für t wieder $\cos x$ ein, erhält man für

$$t_1 = \cos x = 0,7808 \text{ und damit } x_1 = 38,66^\circ + k\cdot 360^\circ$$

$$x_2 = 321,34^\circ + k\cdot 360^\circ$$

$t_2 = \cos x = -1,2808$ ist keine reelle Lösung, weil der Betrag größer als 1 ist.

Für die Hauptwerte der Lösungen folgt

$\underline{\underline{x_1 = 38,66^\circ}}$ $\underline{\underline{x_2 = 321,34^\circ}}$

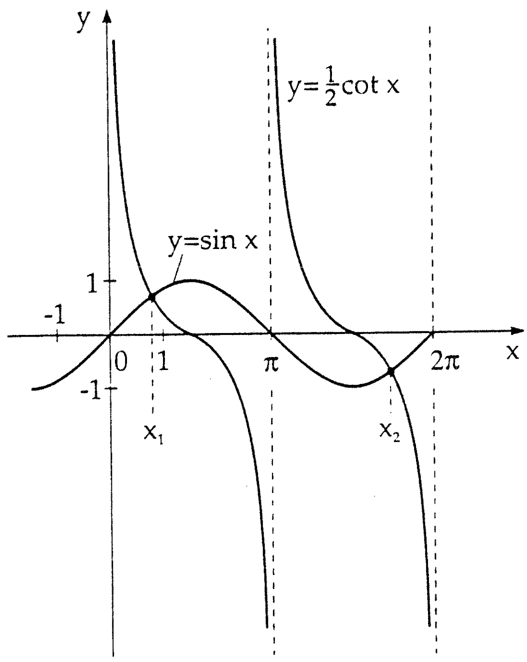


Bild 10.21

10.6 Sinusfunktion, harmonische Schwingungen

Viele Vorgänge in Natur und Technik lassen sich auf Schwingungen zurückführen, zum Beispiel Vorgänge in der Wechselstrom- oder Hochfrequenztechnik, in der Optik, in der Akustik und auch in der Mechanik. Die mathematische Beschreibung dieser Vorgänge führt auf die Sinus- und Cosinusfunktion.

In all diesen Vorgängen kann jedoch nicht erwartet werden, daß der größte Ausschlag einer Schwingung, die *Amplitude*, den Wert 1 hat, daß die *Wellenlänge* stets 2π entsprechend der Periode ist oder daß die Messung gerade dann beginnt, wenn die Sinusfunktion den Wert Null hat.

Mit anderen Worten: Die bisher angegebene *Normaldarstellung* der Winkelfunktionen, wie z. B. $y = \sin x$, reicht nicht aus, um solche Vorgänge zu beschreiben. Durch lineare Maßstabsänderungen und Verschiebungen des Koordinatensystems gelingt es jedoch, sie so zu verallgemeinern, ohne dabei ihre Funktionseigenschaften wesentlich zu verändern, daß sie zur Darstellung oben aufgeführter Vorgänge verwendet werden können, solange es sich um harmonische Schwingungen[3] handelt.

Die allgemeine Form der Sinusfunktion lautet mit den in der Praxis üblichen

[3]Eine harmonische Schwingung ist eine periodische Bewegung, die als Projektion einer Kreisbewegung gedacht werden kann.

Quelle:
Wendler, J.:
"Vorkurs Ing.-Mathe".
Verlag Harri Deutsch, 1995
S. 236 – 240

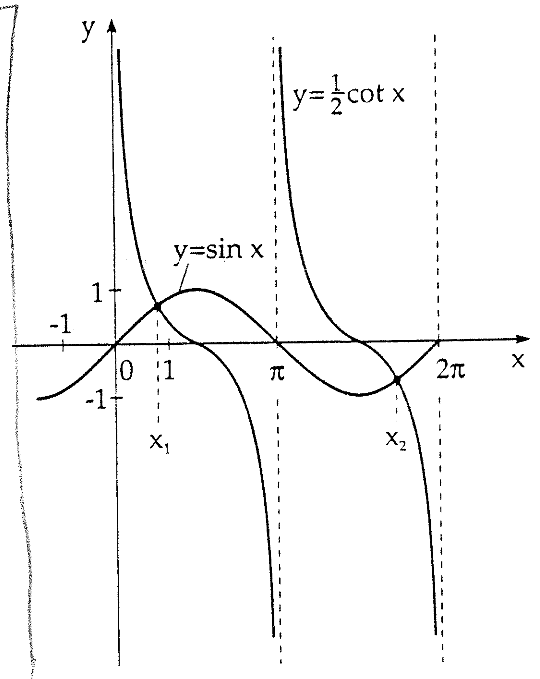


Bild 10.21

zu A. 23. 12

~~10.6~~ Sinusfunktion, harmonische Schwingungen

Viele Vorgänge in Natur und Technik lassen sich auf Schwingungen zurückführen, zum Beispiel Vorgänge in der Wechselstrom- oder Hochfrequenztechnik, in der Optik, in der Akustik und auch in der Mechanik. Die mathematische Beschreibung dieser Vorgänge führt auf die Sinus- und Cosinusfunktion.

In all diesen Vorgängen kann jedoch nicht erwartet werden, daß der größte Ausschlag einer Schwingung, die *Amplitude*, den Wert 1 hat, daß die *Wellenlänge* stets 2π entsprechend der Periode ist oder daß die Messung gerade dann beginnt, wenn die Sinusfunktion den Wert Null hat.

M i t a n d e r e n W o r t e n: Die bisher angegebene *Normaldarstellung* der Winkelfunktionen, wie z. B. $y = \sin x$, reicht nicht aus, um solche Vorgänge zu beschreiben. Durch lineare Maßstabsänderungen und Verschiebungen des Koordinatensystems gelingt es jedoch, sie so zu verallgemeinern, ohne dabei ihre Funktionseigenschaften wesentlich zu verändern, daß sie zur Darstellung oben aufgeführter Vorgänge verwendet werden können, solange es sich um h a r m o n i s c h e S c h w i n g u n g e n[3] handelt.

Die allgemeine Form der Sinusfunktion lautet mit den in der Praxis üblichen

[3] Eine harmonische Schwingung ist eine periodische Bewegung, die als Projektion einer Kreisbewegung gedacht werden kann.

Bezeichnungen:

$$\boxed{y = y(t) = a \cdot \sin(\omega t + \varphi)} \tag{10.56}$$

Darin bedeuten:

y	Auslenkung oder *Elongation*, von der Zeit t abhängige veränderliche Zustandsgröße (Geschwindigkeit, Beschleunigung, Dampfdruck, Spannung, Stromstärke usw.)
t	Zeit in s, unabhängige Veränderliche
a	*Amplitude*, maximale (höchstmögliche) Auslenkung
ω	*Kreisfrequenz* ($\omega > 0$) in rad/s, die Anzahl der Schwingungen in 2π Sekunden. $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ mit f in Hertz (Hz) also Anzahl der Schwingungen pro Sekunde und T in Sekunden (s) als *Periodendauer*
φ	Phasenkonstante oder *Nullphasenwinkel* in rad
$\omega t + \varphi$	Phase oder *Phasenwinkel* in rad

Beispiel 10.23:

$$y = y(t) = 3 \cdot \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Diese Gleichung beschreibt eine Schwingung mit der Amplitude $a = 3$, d. h., ihre Auslenkung ist dreimal so groß wie die der normalen Sinusschwingung $y = \sin t$.

Ihre Kreisfrequenz ist $\omega = 2$ rad/s; sie schwingt also doppelt so schnell wie die normale Sinusschwingung.

Zeichnet man ihren Graphen in ein t, y-Koordinatensystem (Bild 10.22), sieht man, daß ihre Periode $p = \frac{2\pi}{\omega} = \pi$ halb so groß wie die der Sinusschwingung ist, weil sie mit doppelter Frequenz wie diese schwingt. Ihre Verschiebung in die negative t-Richtung ist $\frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.

Bild 10.23 zeigte den Graphen der Schwingungsgleichung in einem $\omega t, y$-Koordinatensystem. Diese Darstellung wird in der Praxis bevorzugt gewählt, wenn die Kreisfrequenz konstant ist. Setzt man in der Ausgangsgleichung $2t = x$, erhält man mit $y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ die Gleichung einer 2π–periodischen Sinusfunktion mit der Amplitude $a = 3$ und der Verschiebung $\varphi = \frac{\pi}{2}$ in die negative x-Richtung.

Der Unterschied zwischen beiden Bildern:

In Bild 10.22 ist die waagerechte Achse die Zeit-Achse, die Periode p ist gleich der Schwingungsdauer T (s). - In Bild 10.23 ist auf der waagerechten Achse der Weg im Bogenmaß aufgetragen, die Periode ist somit ein Winkel.

Vergleicht man die Bilder 10.22. und 10.14a miteinander, läßt sich über den Einfluß von a, ω und φ auf die Schwingung der Gleichung (10.56) folgendes aussagen:

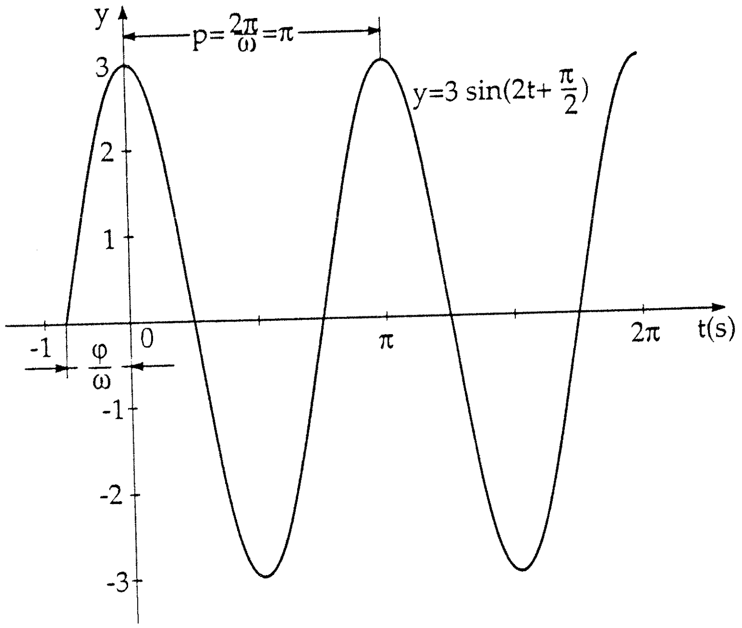


Bild 10.22

1. Die Änderung von a bewirkt eine Vergrößerung oder eine Verkleinerung der Auslenkung auf das $|a|$-fache, je nachdem, ob $|a| > 1$ oder $|a| < 1$ ist, und eine Spiegelung an der t-Achse, falls $a < 0$.
2. Die Änderung von ω bewirkt eine gleichmäßige Stauchung oder Dehnung der Sinusfunktion in Richtung der t-Achse auf das $\frac{1}{|\omega|}$–fache, je nachdem, ob $|\omega| > 1$ oder $|\omega| < 1$ ist, und eine Spiegelung an der t-Achse, falls $\omega < 0$. Die Periode ist in diesem Fall $p = \frac{2\pi}{\omega}$.
3. Die Änderung von φ bewirkt eine Verschiebung der Sinuskurve in Richtung der t-Achse um $\frac{\varphi}{\omega}$ nach rechts oder links, je nachdem, ob $\left(\frac{\varphi}{\omega}\right) < 0$ oder $\left(\frac{\varphi}{\omega}\right) > 0$ ist. Man beachte, daß die Verschiebung im t, y-Koordinatensystem nicht φ, sondern $\frac{\varphi}{\omega}$ lautet, weil die Beziehung $\sin(\omega t + \varphi) = \sin \omega \left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)$ gilt.

Trägt man, wie in Bild 10.23, auf der Abszissenachse nicht t, sondern ωt ab, wird der Zusammenhang zwischen den in Gleichungen (10.56) auftretenden Konstanten a, ω und φ sowie ihre geometrische Bedeutung insofern einfacher, als die Periode $p = 2\pi$ beträgt, die Verschiebung φ ist und die Stauchung oder Dehnung entfällt.

Meistens treten in der Praxis mehrere sich überlagernde Schwingungen auf. Handelt es sich dabei um harmonische Schwingungen gleicher Frequenz, also

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1); \quad y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2); \quad y_3 = \ldots;$$

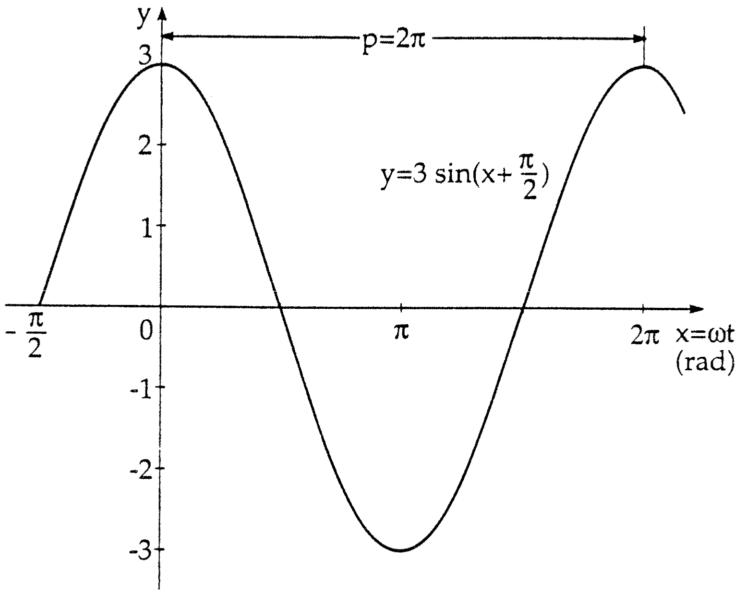


Bild 10.23

erhält man bei der additiven Überlagerung dieser Schwingungen wieder eine harmonische Schwingung gleicher Frequenz:

$$\boxed{a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + a_2 \sin(\omega t + \varphi_2) + \ldots = a \sin(\omega t + \varphi)} \qquad (10.57)$$

Die Amplitude a der neuen Schwingung berechnet sich nach der Gleichung

$$\boxed{a = \sqrt{(a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2 \ldots)^2 + (a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2 + \ldots)^2}} \qquad (10.58)$$

und ihre Phasenverschiebung φ nach den Gleichungen

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a_1 \cos\varphi_1 + a_2 \cos\varphi_2 + \ldots}{a}} \qquad (10.59a)$$

und

$$\boxed{\sin\varphi = \frac{a_1 \sin\varphi_1 + a_2 \sin\varphi_2 + \ldots}{a}} \qquad (10.59b)$$

Beispiel 10.24:
Drei Ströme an einem Knotenpunkt sind durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} i_1 &= 10\,\mathrm{A} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \\ i_2 &= 20\,\mathrm{A} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ i_3 &= 30\,\mathrm{A} \sin \omega t \end{aligned}$$

gegeben. Man berechne den resultierenden Strom i nach Betrag (Amplitude) und Phase.

Lösung:
Es gilt für

$$i_1: \quad a_1 = 10\text{ A}; \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \cos\varphi_1 = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$
$$\sin\varphi_1 = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$
$$i_2: \quad a_2 = 20\text{ A}; \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{2}; \quad \cos\varphi_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$
$$\sin\varphi_2 = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$
$$i_3: \quad a_3 = 30\text{ A}; \quad \varphi_3 = 0; \quad \cos\varphi_3 = \cos 0 = 1$$
$$\sin\varphi_3 = \sin 0 = 0$$

Mit diesen Werten erhält man aus Gleichung (10.58):

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{(10\cdot 0 + 20\cdot 0 + 30\cdot 1)^2 + (10\cdot 1 - 20\cdot 1 + 30\cdot 0)^2} \\ &= 31,62\text{ A} \end{aligned}$$

und aus Gleichung (10.59b)

$$\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{10\cdot 1 + 20\cdot(-1) + 30\cdot 0}{31,62} = -0,316 \\ \varphi &= -0,32\text{ rad} \end{aligned}$$

Damit lautet der resultierende Strom:

$$\underline{\underline{i = 31,62\text{ A}\sin(\omega t - 0,32)}}$$

10.7 Aufgaben

10.1 Man rechne den gegebenen Winkel in die jeweils anderen Winkelmaße um (Grad mit sexagesimaler Teilung, Grad mit dezimaler Teilung, Radiant, Gon)

a) $\alpha = 12°13'08''$ b) $\alpha = 114,065°$
c) $\alpha = 1,7563 rad$ d) $\alpha = 65,4029 gon$

10.2 Man vereinfache

a) $\dfrac{\tan\alpha}{\sin\alpha}$ b) $\sin\alpha\sqrt{1+\cot^2\alpha}$
c) $\tan\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

10.3 Man beweise die Beziehung

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \tan^2\alpha$$

BlaH 22

22.1 Man berechne

a) $4\sqrt[2]{a}+3\sqrt[2]{b}-\sqrt[2]{a}+\sqrt[3]{b}$
b) $2\sqrt[3]{x}-8\sqrt[2]{x}+5\sqrt[3]{x}+\sqrt[2]{x}$
c) $2\sqrt[3]{27}+5\sqrt[3]{125}-6\sqrt[3]{8}$
d) $4\sqrt[6]{64}-2\sqrt[3]{243}+2\sqrt[5]{7776}$

22.2 Man multipliziere die Wurzeln

a) $\sqrt[5]{8a^2}\cdot\sqrt[5]{4a^3}$ b) $\sqrt{20x^5}\cdot\sqrt{45x}$
c) $\sqrt[3]{4a}\cdot\sqrt[3]{9a^4}\cdot\sqrt[3]{6a}$ d) $\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{y^4}}$
e) $\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$ f) $\sqrt[3]{(a+b)^2}\cdot\sqrt[3]{a^2-b^2}$
g) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ h) $\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}\cdot\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}$

22.3 Man berechne und vereinfache (ohne Verwendung des Taschenrechners). Bei einigen Aufgaben ist der Radikand in geeignete Faktoren zu zerlegen

a) $\sqrt{32}+\sqrt{18}-\sqrt{50}$ b) $\sqrt{3}\sqrt{48}$
c) $(4\sqrt{5}-3\sqrt{15})^2$ d) $(2\sqrt{15}-3\sqrt{5})^2-(\sqrt{21}-2\sqrt{7})^2$
e) $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+9}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}-9}$ f) $(4\sqrt{18}-5\sqrt{50}+3\sqrt{98})\cdot 2\sqrt{2}$
g) $(2+3\sqrt{5})(2-3\sqrt{5})$ h) $2xy\sqrt{72}+5xy\sqrt{288}-2xy\sqrt{98}$

22.4 Man dividiere die Wurzeln

a) $\frac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{108p^3}}{\sqrt{3p}}$
c) $(\sqrt{48}-\sqrt{75}+\sqrt{108}):\sqrt{3}$
d) $\frac{\sqrt[2]{18ab^5}}{\sqrt[2]{2a^3b^3}}$ e) $\frac{\sqrt{x^3-x^2y-xy^2+y^3}}{\sqrt{x+y}}$
f) $\frac{\sqrt{16x^2+16y^2}}{\sqrt{16x^2-32xy+16y^2}}$
g) $\frac{\sqrt[x-y]{a^{x+4y}}}{\sqrt[x-y]{a^{5y}}}+\frac{\sqrt[x+y]{a^{5x+3y}}}{\sqrt[x+y]{a^{4x+2y}}}$

22.5 Man bringe den vor der Wurzel stehenden Faktor unter die Wurzel und vereinfache

a) $xy\sqrt[3]{y}$ b) $a\sqrt[4]{\frac{1}{a}}$
c) $\frac{u}{v}\sqrt[3]{\frac{v^2}{u}}$ d) $(a-b)\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$
e) $\frac{a+1}{a-1}\sqrt{\frac{a-1}{a+1}}$ f) $\frac{1}{x^2}\sqrt{x^6-x^4}$

22.6 Man berechne, indem man die Wurzeln gleichnamig macht

a) $\frac{\sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[10]{b}}$ b) $\sqrt[2]{\frac{a}{x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{a}}$
c) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[5]{x}$ d) $\sqrt[2]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a}$
e) $\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^4}$

22.7 Man berechne

a) $\sqrt{\sqrt[3]{144}}$ b) $\sqrt{\sqrt{256}}$
c) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}}$ d) $\frac{a}{\sqrt[3]{a^2}}$
e) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$ f) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{15}b^6}}$
g) $\sqrt[2]{\frac{2}{\sqrt[3]{2}}}$ h) $\sqrt[7]{\frac{a\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[2]{a}}}$
i) $\sqrt[x-1]{\frac{a}{\sqrt[x]{a}}}$

22.8 Man mache den Nenner rational

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{8a}{\sqrt{2a}}$ g) $\frac{5\sqrt{2}+30}{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}$ h) $\frac{\sqrt{5+2\sqrt{6}}}{\sqrt{5-2\sqrt{6}}}$
c) $\frac{5}{\sqrt{a+b}}$ d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$ i) $\frac{5-2\sqrt{21}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}-\sqrt{3}}$
e) $\frac{\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}-2}$ f) $\frac{x}{x+\sqrt{x-y}}$

Lösungen zu

Blatt 22

22.1 a) $3\sqrt[2]{a}+4\sqrt[2]{b}$ b) $7(\sqrt[3]{x}-\sqrt[2]{x})$
c) 19 d) 7

22.2 a) $2a$ b) $30x^3$ c) $6a^2$
d) $\frac{x}{y}$ e) $a-b$ f) $(a+b)\sqrt[3]{a-b}$
g) $a-b$ h) b

22.3 a) $2\sqrt{2}$ b) 12 c) $215-120\sqrt{3}$
d) $8(7-4\sqrt{3})$ e) 3 f) 32
g) -41 h) $58\sqrt{2xy}$

22.4 a) 6 b) $6p$ c) 5
d) $\frac{3b}{a}$ e) $x-y$, Partialdivision anwenden
f) $\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x-y}$ g) $2a$

22.5 a) $\sqrt[3]{x^3y^4}$ b) $\sqrt[4]{a^3}$ c) $\sqrt[3]{\frac{u^2}{v}}$
d) $\sqrt{a^2-b^2}$ e) $\sqrt{\frac{a+1}{a-1}}$ f) $\sqrt{x^2-1}$

22.6 a) $\sqrt[10]{b^3}$ b) $\sqrt[6]{\frac{a}{x}}$ c) $\sqrt[10]{x^7}$
d) $\sqrt[8]{a^{11}}$ e) $\sqrt[12]{a^{25}}$

22.7 a) $\sqrt[3]{12}=2,289$ b) 4 c) $\sqrt[3]{a}$ d) $\sqrt[3]{a}$
e) $\sqrt[8]{128}=1,834$ f) $a\sqrt[5]{b^2}$ g) $\sqrt[3]{2}$ h) $\sqrt[8]{a}$
i) $\sqrt[x]{a}$

22.8 a) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ b) $4\sqrt{2a}$ c) $\frac{5\sqrt{a+b}}{a+b}$ d) $\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})$
e) $-3-2\sqrt{2}$ f) $\frac{x(x-\sqrt{x-y})}{x^2-x+y}$ g) $\frac{1}{3}\sqrt{6}$
h) $5+2\sqrt{6}$ i) $\sqrt{7}+\sqrt{5}-\sqrt{3}$

Blatt 21

21.1 Man addiere bzw. subtrahiere die folgenden Potenzen.

a) $4 \cdot 3^5 - 8 \cdot 3^5 + 5 \cdot 3^5$
b) $5 \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + 18 \cdot 2^3$
c) $4^3 - 3^4 + (-5)^4$
d) $3a^2b - 5ab^2 + 4a^2b + 8ab^2 - 4a^2b = 3ab$
e) $\frac{3}{2}u^3v + \frac{4}{3}uv^2 - \frac{1}{4}u^3v - \frac{7}{9}uv^2$
f) $(x+2y)m^3 - (x+y)m^3 + (x-y)m^3$

21.2 Man multipliziere bzw. dividiere die folgenden Potenzen mit gleicher Basis.

a) $3^2 \cdot 3^4 \cdot 3^3$
b) $(-0,5)^2 \cdot (-0,5)^{-3} \cdot (-0,5)^4$
c) $x^{2a} \cdot x^{3a}$
d) $6a^2b^2 \cdot 3a^3b^3$
e) $4x^3 : 2x$
f) $a^{x+4} \cdot a^{x-3}$
g) $(-a)^{3n} \cdot (-a)^2 \cdot (-a)^{4-n}$
h) $(a+b)^3 \cdot (a+b)^7$
i) $3^{3n+2} \cdot 3x^{4n-3} \cdot 8x^{1-6n}$
k) $a^{-2}x^4 \cdot ax^{-3}$
l) $u^{3x+1} : u^{2x-1}$
m) $\dfrac{a^{n-3}}{a^{-2}}$
n) $\frac{5}{16}a^2b^3c^2 : 1\frac{1}{4}a^6b^5c^5$
o) $\dfrac{a^3b}{cd^4} \cdot \dfrac{c^3d}{a^2b^2} \cdot \dfrac{b^3d^3}{c^3}$
p) $\dfrac{2b^2}{a^4} - \dfrac{4b^3}{a^5} + \dfrac{2b^4}{a^6}$

21.3 Man berechne

a) $\dfrac{1+x^2}{x^5} - \dfrac{1}{x^3}$
b) $(a^{n-1} - a^{n-3}) \cdot (a^{3-n} - a^{1-n})$
c) $\dfrac{1}{a^{n-3}} - \dfrac{a^2-1}{a^{n+1}} - \dfrac{a^2-1}{a^{n-1}}$
d) $(3x^2y^5 + 9x^3y^4 - 17x^5y^3) : x^2y^2$
e) $\dfrac{1}{a^4} + \dfrac{2}{a^2b^2} + \dfrac{1}{b^4}$
f) $(a^{4x} - a^4) : (a^{x-1} + 1)$

21.4 Man berechne unter Verwendung geeigneter Zehnerpotenzen

a) $2500000 \cdot 40000$
b) $0,004 \cdot 10000$
c) $20000 : 0,05$

21.5 Man fasse die folgenden Potenzen mit gleichem Exponenten zusammen und berechne bzw. vereinfache

a) $4^4 \cdot 25^4$
b) $\left(\frac{5}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{21}{10}\right)^2$
c) $0,125^3 \cdot 0,8^3$
d) $\dfrac{24^4 \cdot 6^4 \cdot 5^4}{30^4 \cdot 8^4}$
e) $\left(\frac{9}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2$
f) x^3y^3
g) $(x-y)^2 \cdot (x+y)^2$
h) $\left(\frac{2x}{3y}\right)^4 \cdot \left(\frac{6y}{z}\right)^4 \cdot \left(\frac{5z}{2y}\right)^4$
i) $\left(\frac{a+b}{2c-d}\right)^2 \cdot \left(\frac{2c+d}{a^2-b^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4c^2-d^2}{a-b}\right)^2$

21.6 Man berechne

a) $(4^3)^2$
b) $[(-2)^3]^3$
c) $(x^n)^3$
d) $[(-x)^{-3}]^{-4}$
e) $(-a^3)^{2n-2}$
f) $\dfrac{a^{3n}b^m}{a^nb^{3m}}$
g) $\dfrac{(a^{2n+1} \cdot b^{1-4m})^3}{(a^{1+3n} \cdot b^{1-6m})^2}$
h) $\left(\frac{a^{-4}b^{-5}}{x^{-1}y^3}\right)^2 \cdot \left(\frac{a^{-2}x}{b^3y^2}\right)^{-3}$
i) $\left(\frac{u^3v^{-2}}{w^{-5}}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{u^2v^{-3}}{w^{-4}}\right)^4$
k) $\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2$
l) $\left(2x^3 - \frac{1}{x}\right)^3$
m) $(x^2 - x^{-2})^{-2}$

21.7 Gegeben ist eine Parabel 2. Ordnung durch die Gleichung

$$y = f(x) = 3x^2 - 6x + 5.$$

Wie lautet die Scheitelgleichung? Man zeichne die Parabel im Koordinatensystem.

21.8 Desgl. für $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

Lösungen zu BlaH 21

21.1 a) $3^5 = 243$ b) $2^8 = 256$ c) 608

d) $3ab(a+b)$ e) $5uv\left(\frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{9}v\right)$ f) xm^3

21.2 a) $3^9 = 19683$ b) $(-0,5)^3 = -0,125$ c) x^{5a} d) $18a^5b^5$

e) $2x^2$ f) a^{2x+1} g) a^{2n+6} h) $(a+b)^{10}$

i) $24x^n$ k) $\frac{x}{a}$ l) u^{x+2} m) a^{n-1}

n) $\frac{1}{4}a^{-4}b^{-2}c^{-3}$ o) $\frac{ab}{c}$ p) $\frac{2b^2}{a^6}(a-b)^2$

21.3 a) $\frac{1}{x^5}$ b) $a^2 - 2 + a^{-2}$ c) $\frac{1}{a^{n+1}}$ d) $3y^2 + 9xy^2 - 17x^3y$

e) $\frac{(a^2+b^2)^2}{a^4b^4}$ f) $a^{3x+1} - a^{2x+2} + a^{x+3} - a^4$

21.4 a) $2,3 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^4 = 10 \cdot 10^{10} = 10^{11}$
b) $4 \cdot 10^{-3} \cdot 10^4 = 4 \cdot 10 = 40$

c) $\frac{20 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^{-2}} = 4 \cdot 10^5$

21.5 a) 10^4 b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2$ c) $0,1^3$ d) 3^4 e) $3^5 \cdot 2^2 = 972$

f) $(xy)^3$ g) $(x^2 - y^2)^2$ h) 10^4 i) $\left(\frac{2c+d}{a-b}\right)^4$

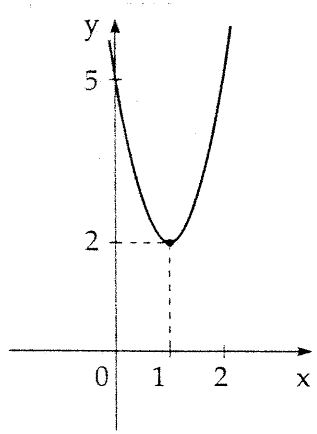
21.6 a) $4^6 = 4096$ b) $-2^9 = -512$ c) x^{3n} d) x^{12}

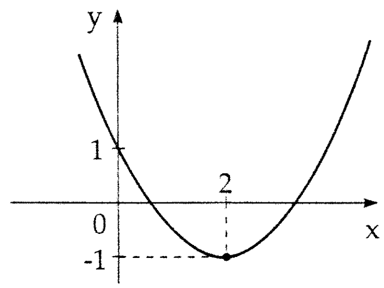
e) $a^{6(n-1)}$ f) $\left(\frac{a^n}{b^m}\right)^2$ g) ab h) $\frac{1}{a^2bx}$

i) $(uvw)^{-4}$ k) $a^4 + 2 + \frac{1}{a^4}$ l) $4x^6 - 4x^2 + \frac{1}{x^2}$ m) $\frac{x^4}{x^8 - 2x^4 + 1}$

21.7 $y - 2 = 3(x-1)^2$, siehe Bild L6

21.8 $y + 1 = \frac{1}{2}(x-2)^2$, siehe Bild L7





Bilder L6 und L7

Blatt 20

20.1 Polynomauswertung (Horner-Schema) und Faktorisierung (Produktdarstellung)

Berechnen Sie mittels Horner-Schema die Funktionswerte an den vorgegebenen Stellen:

a) $p(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$, $x = 1, x = 2, x = 3$

b) $p(x) = 3x^7 - 12x^5 + 15x^3 - 6x$, $x = -1, x = 1, x = 2$

c) $p(x) = 2x^4 + 4x^3 - 14x^2 - 16x + 24$, $x = 0, x = 1, x = 2$

d) $p(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, $x = -1, x = 0, x = 1$

e) $p(x) = 2x^3 + 4x^2 + 4x + 2$, $x = -1, x = 0, x = 1$

f) $p(x) = -x^4 + x^3 + x - 1$, $x = -1, x = 0, x = 1$

g) $p(x) = x^4 - 191x^2 - 980$, $x = -14, x = 0, x = 14$

Zerlegen Sie die obigen Polynome in irreduzible Bestandteile (Faktorisierung)

20.2 Polynomdivision, Umwandlung gebrochenrationaler Funktionen in echt gebrochenrationale Funktionen

Zerlegen Sie in ein Polynom und eine echt gebrochenrationale Funktion:

a) $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x^3 + x - 1}{x^3 - x^2 + 1}$ b) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - 10x + 19}{x^2 + x - 6}$

c) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 - x^2 - 3x - 8}{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}$ d) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1}$

20.3 Gebrochenrationale Funktionen: Definitionsbereich, Nullstellen, Pole

Bestimmen Sie den Definitionsbereich, die Nullstellen und untersuchen Sie die Definitionslücken auf Stetigkeit und bestimmen sie die Pole:

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{x^3 + 5x^2 + 6x}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{x^3 - x^2 - 6x}$

c) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ d) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x}{9x^3 + 24x^2 + 13x + 2}$

e) $f(x) = \dfrac{x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 8x^2}{x^3 - 3x + 2}$ f) $f(x) = \dfrac{x^4 - x^3 - 2x^2}{x^2 + x - 2}$

20.4 Partialbruchzerlegung

Bestimmen Sie die Partialbruchzerlegung folgender Funktionen:

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}$ b) $f(x) = \dfrac{7x^2 - 19x + 30}{x^3 - 6x^2 + 10x}$

c) $f(x) = \dfrac{-x^3 + 2x^2 - x + 4}{x^4 + 3x^2 + 2}$ d) $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^3 - x^2 - 3x - 8}{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}$

e) $f(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 - 10x + 19}{x^2 + x - 6}$ f) $f(x) = \dfrac{x^3 - 10x^2 + 7x - 3}{x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5}$

g) $f(x) = \dfrac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1}$ h) $f(x) = \dfrac{5x^4 + 18x^3 + 11x^2 + 12x + 8}{x(x-1)^2(x+2)^3}$

Lösung zu Blatt 20

Zu 20.1:

a)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ 1 & - & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \end{array} \Rightarrow p_4(1) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ 2 & - & 2 & 2 & -10 & -18 \\ \hline & 1 & 1 & -5 & -9 & -12 \end{array} \Rightarrow p_4(2) = -12$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ 3 & - & 3 & 6 & -3 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & -1 & -2 & 0 \end{array} \Rightarrow p_4(3) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\ 1 & - & 1 & 0 & -7 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -7 & -6 & 0 \\ 3 & - & 3 & 9 & 6 & \\ \hline & 1 & 3 & 2 & 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 3$

$x^2 + 3x + 2 = 0 \Rightarrow$

$x_3 = -2,\ x_4 = -1$

$\boxed{p_4(x) = (x-1)(x-3)(x+2)(x+1).}$

b)

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & 3 & 0 & -12 & 0 & 15 & 0 & -6 & 0 \\ -1 & - & -3 & 3 & 9 & -9 & -6 & 6 & 0 \\ \hline & 3 & -3 & -9 & 9 & 6 & -6 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow p_7(-1) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & 3 & 0 & -12 & 0 & 15 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & - & 3 & 3 & -9 & -9 & 6 & 6 & 0 \\ \hline & 3 & 3 & -9 & -9 & 6 & 6 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow p_7(1) = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrrrrr} & 3 & 0 & -12 & 0 & 15 & 0 & -6 & 0 \\ 2 & - & 6 & 12 & 0 & 0 & 30 & 60 & 108 \\ \hline & 3 & 6 & 0 & 0 & 15 & 30 & 54 & 108 \end{array}$$

$\Rightarrow p_7(2) = 108$

$$\begin{array}{r|rrrrrrr} & 3 & 0 & -12 & 0 & 15 & 0 & -6 \\ -1 & - & -3 & 3 & 9 & -9 & -6 & 6 \\ \hline & 3 & -3 & -9 & 9 & 6 & -6 & 0 \\ 1 & - & 3 & 0 & -9 & 0 & 6 & \\ \hline & 3 & 0 & -9 & 0 & 6 & 0 & \end{array}$$

Man erhält:
$x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,$
$3x^4 - 9x^2 + 6 = 0.$
Mit $x^2 = z$ ergibt sich
$z^2 - 3z + 2 = 0 \Rightarrow$
$z_1 = 1 \Rightarrow x_4 = -1,\ x_5 = 1$
$z_2 = 2 \Rightarrow x_6 = -\sqrt{2},\ x_7 = \sqrt{2}$

$\boxed{p_7(x) = 3x(x+1)^2(x-1)^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}).}$

c)

$\frac{1}{2}p_4(x) = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12.$

$M = \{1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 6, -6, -12, 12\}.$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & -7 & -8 & 12 \\ 1 & - & 1 & 3 & -4 & -12 \\ \hline & 1 & 3 & -4 & -12 & 0 \\ 2 & - & 2 & 10 & 12 & \\ \hline & 1 & 5 & 6 & 0 & \end{array}$$

Nullstellenermittlung für p_4 durch systematisches Probieren mit $x_i \in M$:
$\Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = 2$
$x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_3 = -3,\ x_4 = -2$

$\boxed{p_4(x) = 2(x-1)(x-2)(x+2)(x+3)}$

d) $p_1(x) = (x-1)^2(x+1)$

e) $p_2(x) = 2(x+1)\cdot(x^2+x+1)$

f) $p_3(x) = -(x-1)^2(x^2+x+1)$

g) $p_4(x) = (x-14)(x+14)(x^2+5)$

Zu 20.2

20.2

a)

$$y = \frac{x^4 + 2x^3 + x - 1}{x^3 - x^2 + 1} = x + 3 + \frac{3x^2 - 4}{x^3 - x^2 + 1}$$

$$(x^4 + 2x^3 + x - 1):(x^3 - x^2 + 1) = x + 3 + \frac{3x^2 - 4}{x^3 - x^2 + 1}$$

$$\begin{array}{l} \underline{(-)\; x^4 - x^3 + x} \\ \quad 3x^3 \qquad - 1 \\ \quad \underline{(-)\; 3x^3 - 3x^2 + 3} \\ \qquad\quad 3x^2 - 4 \end{array}$$

b)

$$\frac{2x^3 - x^2 - 10x + 19}{x^2 + x - 6} = 2x - 3 + \frac{5x + 1}{x^2 + x - 6}$$

c)

$$\frac{x^4 - 2x^3 - x^2 - 3x - 8}{x^3 - 2x^2 + 2x - 4} = x + \frac{-3x^2 + x - 8}{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}$$

$$(x^4 - 2x^3 - x^2 - 3x - 8):(x^3 - 2x^2 + 2x - 4) = x + \frac{-3x^2 + x - 8}{x^3 - 2x^2 + 2x - 4}$$

$$\begin{array}{l} \underline{-(x^4 - 2x^2 + 2x^2 - 4x)} \\ \qquad\qquad -3x^2 + x - 8 \end{array}$$

d)

$$\frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} = 2 + \frac{x^2 + 2}{x^3 - 1}$$

Zu 20.3:

(2013

a) Nullstellen des Zählers: $x = \frac{1}{2}$, $x = -3$.
Nullstellen des Nenners: $x = 0$, $x = -2$, $x = -3$.
$\Bigg\} \Rightarrow y = \dfrac{(2x-1)(x+3)}{x(x+2)(x+3)}$

Lücke: $x = -3$. Für $x \neq -3$ ist $y(x) = \tilde{y}(x) = \dfrac{2x-1}{x(x+2)}$; daher gilt:

$\lim\limits_{x \to -3} y(x) = \tilde{y}(-3) = -\frac{7}{3}$.

Polstellen: $x = 0$, $x = -2$ (beide 1. Ordnung), Nullstelle: $x = \frac{1}{2}$ (1. Ordnung).
Asymptote: $y_A = 0$ (da y echt gebrochen ist und somit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = 0$ gilt).
Vgl. Bild L 4.43 a.

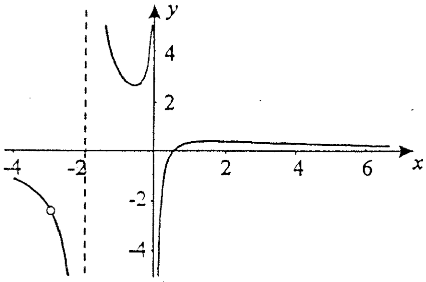


Bild L 4.43 a

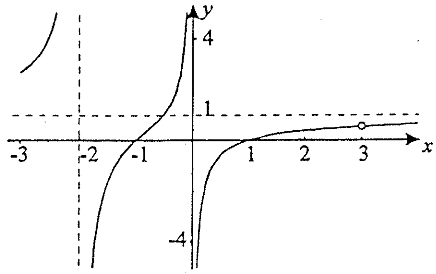


Bild L 4.43 b

b) Nullstellen des Zählers: $x = -1$, $x = 1$, $x = 3$
Nullstellen des Nenners: $x = 0$, $x = -2$, $x = 3$.
$\Bigg\} \Rightarrow y = \dfrac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x(x+2)(x-3)}$

Lücke: $x = 3$. Für $x \neq 3$ ist $y(x) = \tilde{y}(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x(x+2)}$; daraus folgt:

$\lim\limits_{x \to 3} y(x) = \tilde{y}(3) = \frac{8}{15}$.

Polstellen: $x = 0$, $x = -2$ (beide 1. Ordnung), Nullstellen: $x = -1$, $x = 1$ (beide 1. Ordnung).

Asymptote: Da Zähler- und Nennergrad übereinstimmen und die führenden x-Potenzen im Zähler und Nenner dieselben Faktoren haben, ist $y_A = \lim\limits_{x \to \pm\infty} y(x) = 1$.
Vgl. Bild L 4.43 b.

c) Nullstellen des Zählers: $x = -2$, $x = 1$ (doppelt).
Nullstellen des Nenners: $x = -1$, $x = 1$.
$\Bigg\} \Rightarrow y = \dfrac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)(x+1)}$

Lücke: $x = 1$. Für $x \neq 1$ ist $y(x) = \tilde{y}(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+1)}$; daraus folgt:

$\lim\limits_{x \to 1} y(x) = \tilde{y}(1) = 0$.

Polstelle: $x = -1$ (1. Ordnung), Nullstelle: $x = -2$ (1. Ordnung).
Asymptote: Für $x \to \pm\infty$ kann man anstelle von y die Funktion $\tilde{y}$ betrachten: $\tilde{y} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x+1} = \dfrac{x^2+x-2}{x+1}$. Die Aufspaltung von $\tilde{y}$ in ein Polynom und eine echt gebrochen rationale Funktion kann mittels Horner-Schema geschehen:

	1	1	−2
−1	-	−1	0
	1	0	−2

$\Rightarrow \tilde{y} = x - \dfrac{2}{x+1}$.

Da $\dfrac{2}{x+1} \to 0$ gilt für $x \to \pm\infty$, ist die Asymptote $y_A = x$.
Vgl. Bild L 4.43 c.

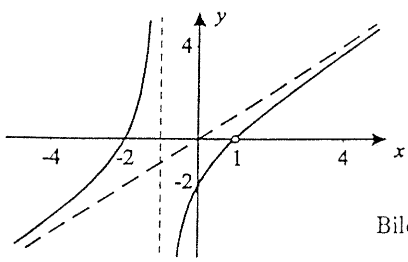


Bild L 4.43 c

Z-20.31 (20/4

d) Nullst. des Zählers: $x = 0$, $x = -2$,
$x = 2$ (doppelt).
Nullst. des Nenners: $x = -2$, $x = -\frac{1}{3}$ (doppelt). $\Bigg\} \Rightarrow y = \dfrac{x(x+2)(x-2)^2}{(3x+1)^2(x+2)}$

Lücke: $x = -2$. Für $x \neq -2$ ist $y(x) = \tilde{y}(x) = \dfrac{x(x-2)^2}{(3x+1)^2}$; daraus folgt:
$\lim\limits_{x \to -2} y(x) = \tilde{y}(-2) = -\frac{32}{25}$.
Polstelle: $x = -\frac{1}{3}$ (1. Ordnung),
Nullstellen: $x = 0$ (1. Ordnung), $x = 2$ (2. Ordnung).

Asymptote: Für $x \to \pm\infty$ kann man anstelle von y die Funktion $\tilde{y} = \dfrac{x(x-2)^2}{(3x+1)^2} = \dfrac{x^3 - 4x^2 + 4x}{9(x + \frac{1}{3})^2}$ betrachten und die Division durch $(x + \frac{1}{3})^2$ mit Hilfe des Horner-Schemas durchführen:

	1	-4	4	0
$-\frac{1}{3}$	-	$-\frac{1}{3}$	$\frac{13}{9}$	...
	1	$-\frac{13}{3}$	$\frac{49}{9}$	...
$-\frac{1}{3}$	-	$-\frac{1}{3}$	...	
	1	$-\frac{14}{3}$	...	

$\Rightarrow \; y_A = \frac{1}{9}(x - \frac{14}{3})$.
Vgl. Bild L 4.43 d.

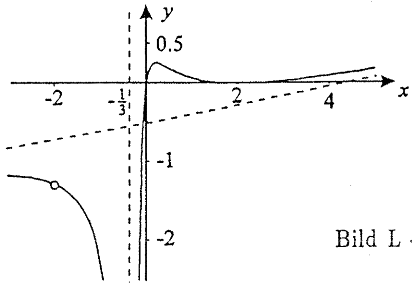


Bild L 4.43 d

e) Nullstellen des Zählers: $x = 0$ (doppelt),
$x = -1$, $x = 2$, $x = 4$.
Nullstellen des Nenners: $x = -2$, $x = 1$
(doppelt). $\Bigg\} \Rightarrow y = \dfrac{x^2(x+1)(x-2)(x-4)}{(x+2)(x-1)^2}$

Lücke: keine, Polstellen: $x = -2$ (1. Ordnung), $x = 1$ (2. Ordnung), Nullstellen: $x = -1$, $x = 2$, $x = 4$ (alle 1. Ordnung), $x = 0$ (2. Ordnung).
Asymptote: Da die Differenz zwischen Zähler- und Nennergrad gleich 2 ist, erhält man als Asymptote eine quadratische Parabel, die sich mit Hilfe des Horner-Schemas ermitteln läßt, indem man das Zählerpolynom zweimal durch $(x - 1)$ und einmal durch $(x + 2)$ dividiert:

	1	-5	2	8	0	0
1	-	1	-4	-2	6	...
	1	-4	-2	6	6	...
1	-	1	-3	-5	...	
	1	-3	-5	1	...	
-2	-	-2	10	...		
	1	-5	5	...		

$\Rightarrow \; y_A = x^2 - 5x + 5$.
Vgl. Bild L 4.43 e.

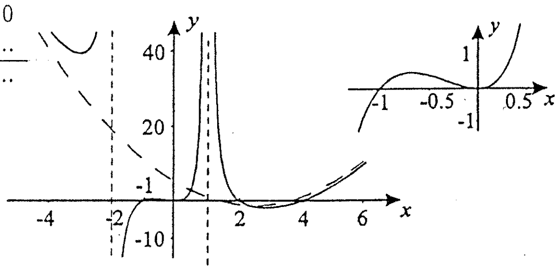


Bild L 4.43 e

f) Nullstellen des Zählers: $x = 0$ (doppelt),
$x = -1$, $x = 2$.
Nullstellen des Nenners: $x = -2$, $x = 1$. $\Bigg\} \Rightarrow y = \dfrac{x^2(x+1)(x-2)}{(x+2)(x-1)}$

Lücke: keine, Polstellen: $x = -2$, $x = 1$ (beide 1. Ordnung),
Nullstellen: $x = -1$, $x = 2$ (beide 1. Ordnung), $x = 0$ (2.Ordnung).
Asymptote: Da die Differenz zwischen Zähler- und Nennergrad gleich 2 ist, erhält man als Asymptote eine quadratische Parabel, die sich mit Hilfe des Horner-Schemas ermitteln läßt, indem man das Zählerpolynom nacheinander durch $(x-1)$ und $(x+2)$ dividiert:

	1	-1	-2	0	0
1	-	1	0	-2	-2
	1	0	-2	-2	-2
-2	-	-2	4	-4	
	1	-2	2	-6	

$\Rightarrow \; y_A = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$.
Vgl. Bild L 4.43 f.

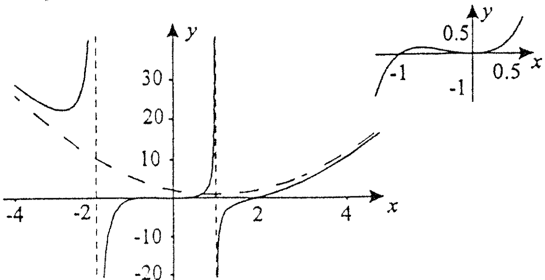


Bild L 4.43 f

Zu 20.4: 2015

a) $$y=\frac{x^2}{x^3-4x^2-3x+18}$$

Es ist $x^3-4x^2-3x+18=(x+2)(x-3)^2$. Daher lautet der Ansatz

$$\frac{x^2}{x^3-4x^2-3x+18}=\frac{c_1}{x+2}+\frac{d_1}{x-3}+\frac{d_2}{(x-3)^2}$$

Der Zählervergleich der addierten Partialbrüche liefert

$$c_1(x-3)^2+d_1(x-3)(x+2)+d_2(x+2)=x^2$$

Durch Einsetzen von x-Werten erhält man für

$x=-2$	$25c_1=4$	$c_1=4/25$
$x=3$	$5d_2=9$	$d_2=45/25$
$x=0$	$9c_1-6d_1+2d_2=0$	$d_1=21/25$

Bei einem Koeffizientenvergleich ergibt sich aus

$$(c_1+d_1)x^2+(-6c_1-d_1+d_2)x+(9c_1-6d_1+2d_2)=x^2$$

$$\begin{aligned} c_1+d_1 &=1\\ -6c_1-d_1+d_2&=0\\ 9c_1-6d_1+2d_2&=0 \end{aligned}$$

mit den gleichen Lösungen wie beim Einsetzen.

b) $$y=\frac{7x^2-19x+30}{x^3-6x^2+10x}$$

Es ist $x^3-6x^2+10x=x(x^2-6x+10)$, der quadratische Term ist nicht mehr in reelle Linearfaktoren zerlegbar. Daher lautet der Ansatz

$$\frac{7x^2-19x+30}{x(x^2-6x+10)}=\frac{c_1}{x}+\frac{a_1x+b_1}{x^2-6x+10}$$

Durch Einsetzen von x-Werten erhält man für

$x=0$	$10c_1=30$	$c_1=3$ Mit diesem Wert und
$x=1$	$15+a_1+b_1=18$	
$x=-1$	$51+a_1-b_1=56$	

Die beiden letzten Gleichungen ergeben $a_1=4$ und $b_1=-1$.
Bei einem Koeffizientenvergleich erhält man aus

$$(c_1+a_1)x^2+(b_1-6c_1)x+10c_1=7x^2-19x+30$$

$$\begin{aligned} c_1+a_1&=7\\ -6c_1+b_1&=-19\\ 10c_1&=30 \end{aligned}$$

und damit die gleichen Lösungen wie beim Einsetzen.

c) $$f_1(x)=\frac{2}{x^2+1}-\frac{x}{x^2+2}$$

d) $$f_2(x)=x-\frac{3}{x-2}+\frac{1}{x^2+2}$$

(2016

e)
$$\frac{2x^3 - x^2 - 10x + 19}{x^2 + x - 6} = 2x - 3 + \frac{5x + 1}{x^2 + x - 6}.$$

Die Nullstellen des Nenners errechnet man leicht zu $\alpha_1 = 2$ und $\alpha_2 = -3$, also gilt $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$. Damit macht man den Ansatz für die *Partialbruchzerlegung*:

$$\frac{5x + 1}{x^2 + x - 6} = \frac{A_1}{x - 2} + \frac{A_2}{x + 3} = \frac{A_1 \cdot (x + 3) + A_2 \cdot (x - 2)}{(x - 2)(x + 3)}.$$

Aus dem Zählervergleich

$$5x + 1 = A_1(x + 3) + A_2(x - 2)$$

gewinnt man durch Einsetzen von $x = 2$ sofort $A_1 = 11/5$ und durch Einsetzen von $x = -3$ die Konstante $A_2 = 14/5$. Also folgt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{5x + 1}{x^2 + x - 6} = \frac{11}{5}\frac{1}{x - 2} + \frac{14}{5}\frac{1}{x + 3}$$

---

f) Man findet (durch Kurvendiskussion oder Probieren), daß $\alpha_1 = 1$ eine Nullstelle des Nenners $q(x)$ ist. Division $q(x)/(x - 1) = q_1(x)$ liefert ein Polynom, für das $\alpha_1 = 1$ abermals Nullstelle ist. Also ist α_1 mindestens doppelte Nullstelle des Nenners. Division des Nenners durch $(x - 1)^2$ liefert die Zerlegung

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = (x - 1)^2(x^2 + 4x + 5). \tag{4.93}$$

Man versucht nun $x^2 + 4x + 5 = 0$ zu lösen und stellt fest, daß diese Gleichung keine reellen Lösungen hat. Damit ist (4.93) die Zerlegung des Nenners $q(x)$, die Ausgangspunkt für die *Partialbruchzerlegung* ist. Die Zahl $a_1 = 1$ ist in der Tat eine doppelte Nulltstelle des Nenners. Nach ( ) ist folgender Ansatz zu machen:

Abschn. 4.3.2
vgl. Skript Blatt zur PBZ

$$\frac{x^3 - 10x^2 + 7x - 3}{x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5} = \frac{A_{11}}{x - 1} + \frac{A_{12}}{(x - 1)^2} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4x + 5} \tag{4.94}$$

Man bringt die rechte Seite auf Hauptnenner und erhält für die Zähler die Gleichung

$$\begin{aligned} & x^3 - 10x^2 + 7x - 3 \\ &= A_{11}(x - 1)(x^2 + 4x + 5) + A_{12}(x^2 + 4x + 5) + (Bx + C)(x - 1)^2 \end{aligned} \tag{4.95}$$

Einsetzen von $x = 1$ läßt rechts einiges verschwinden, und man gewinnt $A_{12} = -1/2$. Wir bringen $A_{12}(x^2 + 4x + 5)$ nun auf die linke Seite von (4.95) und errechnen

$$x^3 - \frac{19}{2}x^2 + 9x - \frac{1}{2} = A_{11}(x - 1)(x^2 + 4x + 5) + (Bx + C)(x - 1)^2.$$

Division durch $(x - 1)$ ergibt

$$x^2 - \frac{17}{2} + \frac{1}{2} = A_{11}(x^2 + 4x + 5) + (Bx + C)(x - 1). \tag{4.96}$$

Hier liefert $x = 1$ die Konstante $A_{11} = -7/10$. Man setzt dies in (4.96) ein. Vergleicht man dann die Koeffizienten von x^2 rechts und links, so gewinnt man $B = 17/10$, und vergleicht man die konstanten Glieder, so folgt $C = -4$. Zusammen also

$$A_{11} = -0{,}7\,, \quad A_{12} = -0{,}5\,, \quad B = 1{,}7\,, \quad C = -4\,.$$

20/7

g)

(34) Man zerlege $\frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1}$ in Partialbrüche.

1. Durchdividieren: $(2x^3 + x^2):(x^3 - 1) = 2 + \frac{x^2 + 2}{x^3 - 1}$

2. Reelle Produktdarstellung des Nenners: Da $x_1 = 1$ eine Nullstelle ist, läßt sich $(x^3 - 1)$ durch $(x - 1)$ dividieren: $(x^3 - 1):(x - 1) = x^2 + x + 1$. Dieser quadratische Ausdruck hat keine reellen Nullstellen mehr, folglich lautet die reelle Produktdarstellung des Nenners: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$.

3. Ansatz der Partialbrüche:

$$\frac{x^2 + 2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{a}{x-1} + \frac{bx + c}{x^2+x+1}$$

4. Bestimmung der Koeffizienten:
Zuhaltemethode für a: $a = 1$
"Rüberbringen" von $\frac{1}{x-1}$:

$$\frac{x^2 + 2}{(x-1)(x^2+x+1)} - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2 + 2 - (x^2+x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{-1}{x^2+x+1} =$$

$\frac{bx + c}{x^2+x+1}$ Koeffizientenvergleich: $b = 0$, $c = -1$.

Ergebnis: $\frac{2x^3 + x^2}{x^3 - 1} = 2 + \frac{1}{x-1} + \frac{-1}{x^2+x+1}$.

h)

$$\frac{5x^4+18x^3+11x^2+12x+8}{x(x-1)^2(x+2)^3} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} + \frac{d}{x+2} + \frac{e}{(x+2)^2} + \frac{f}{(x+2)^3}.$$

Welche Koeffizienten lassen sich sofort mit der Zuhaltemethode bestimmen?

Lsg: $a = 1$, $c = 2$, $f = 2$.

Man kann nun die Partialbrüche, deren Koeffizienten man bestimmt hat, auf die linke Seite und diese auf den Hauptnenner bringen und anschließend durch x, $x-1$ und $x+2$ kürzen (Rechenprobe!) und abermals die Zuhaltemethode anwenden um b und e zu bestimmen. d würde man anschließend mit der Einsetzmethode bestimmen. Man kann aber auch sofort b, d und e mit der Einsetzmethode bestimmen. $b = 0$, $d = -1$, $e = 1$.

Blatt 19:

Grenzwertuntersuchungen

A 19.1 Untersuchen Sie unter Verwendung der Zahlenfolgen $(\hat{x}_n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)$, $(\tilde{x}_n) = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)$, $n = 1,2,\ldots$, ob die folgenden Funktionen an der Stelle $x = 1$ einen Grenzwert besitzen:

a) $f(x) = x - 1$ b) $f(x) = |x-1| + 2$ c) $f(x) = \sqrt{x-1}$ d) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

e) $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ f) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$

A 19.2 Berechnen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+5x-6}{2x^2-3x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x-2}{x^2+1}$ c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+2x-8}{x^2-2x}$ e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\sum\limits_{i=1}^{20}(ix+1)^2}{x^2+4}$ f) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$, $n \in \mathbb{N}$

g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{(x+3)(x-4)(3x+5)}{(x^2+1)\sqrt{3+4x^2}}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+4}-2}$ i) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} (\sqrt{4x^2-3x}-2x)$.

Lös: Betrachtung der entsprechenden Funktionsgraphen

A 19.3 Wiederholen Sie die Grundfunktionen und überzeugen Sie sich anhand ihrer Graphen von der Richtigkeit der nachstehenden Aussagen:

$\lim\limits_{x\to 0+0} \ln x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$,

$\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}+0} \tan x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}-0} \tan x = +\infty$,

$\lim\limits_{x\to 0-0} \cot x = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 0+0} \cot x = +\infty$.

Stetigkeit / Unstetigkeit von Funktionen

A 19.4 Untersuchen Sie, wo die folgenden Funktionen $f:\ y = f(x)$ stetig sind, charakterisieren Sie evtl. auftretende Unstetigkeiten und skizzieren Sie jeweils den Graph von f (die natürlichen Definitionsbereiche wurden bewußt *nicht* angegeben):

a) $f:\ y = \frac{x^2+x+6}{x^2+1}$ b) $f:\ y = \frac{4x^2-16x+16}{x-2}$ c) $f:\ y = \frac{x^2+x-6}{x^2+3x}$

d) $f:\ y = 2 - |2x-2|$ e) $f:\ y = \frac{|x+2|-|2-x|}{2|x|}$ f) $f:\ y = \sqrt{x^2-x-6}$

g) $f:\ y = \frac{\sqrt{4x^2-16x+16}}{x-2}$ h) $f:\ y = \frac{3x+4}{\sqrt{(x+2)^2-8x}-x+2}$

i) $f:\ y = \ln(x^2-4)$ j) $f:\ y = \ln|x^2-4|$

k) $f:\ y = \sqrt{1-e^{2x}}$ l) $f:\ y = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

A 19.5 Skizzieren Sie folgende Funktionen und charakterisieren Sie deren Unstetigkeiten:

a) $f(x) = \frac{x}{|x|}$ b) $f(x) = k$ für $x \in [k,\, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$

c) $f(x) = x$, $x \in (-1,\, 1]$, $f(x+2) = f(x)$ d) $f(x) = \begin{cases} -1 & , \ x \in [-2,\, 0) \\ 0 & , \ x = 0 \\ 1 & , \ x \in (0,\, 2) \end{cases}$, $f(x+4) = f(x)$

e) $f(x) = \begin{cases} 1-e^x & , \quad x < 0 \\ x^2 - x & , \quad x \in [0,\, 2) \\ 1-x & , \quad x \geq 2 \end{cases}$ f) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x < -1 \\ 0 & , \quad x = -1 \\ \sin(\frac{\pi}{2}x+\pi) & , \quad x > -1 \end{cases}$

A 19.6 Wie müssen die Konstanten A und B gewählt werden, damit die Funktion

$$f:\ y = \begin{cases} 1 - Ax & \text{für} \quad x < -2 \\ x^2 + Bx + 3 & \text{für} \quad x \in [-2,\, 1] \\ 2A + x & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$$

in ganz $\mathbb{R}$ stetig ist ?

Lösungen zu Blatt 19

19/1

L 19.1 Offensichtlich haben $(\hat{x}_n)$ und $(\tilde{x}_n)$ den Grenzwert 1:
$\lim\limits_{n\to\infty} \hat{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+2}) = 1$.

a) $f(\hat{x}_n) = 1+\frac{1}{n}-1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\hat{x}_n) = 0$; $f(\tilde{x}_n) = 1-\frac{1}{n+2}-1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = 0$.
Die Übereinstimmung dieser beiden Grenzwerte ist allerdings noch kein Beweis dafür, daß f bei $x=1$ den Grenzwert 0 besitzt. Es ist aber leicht einzusehen, daß für *jede* Zahlenfolge (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n-1) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - 1 = 1-1 = 0$. Somit hat f bei $x=1$ den Grenzwert 0: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 0$.

b) Es ist $f(\hat{x}_n) = |1+\frac{1}{n}-1|+2 = \frac{1}{n}+2$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\hat{x}_n) = 2$,
$f(\tilde{x}_n) = |1-\frac{1}{n+2}-1|+2 = \frac{1}{n+2}+2$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = 2$.
Zum gleichen Ergebnis kommt man mit jeder Zahlenfolge (x_n), für die $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ gilt. Für eine solche Zahlenfolge kann $x_n = 1+\delta_n$ mit $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n-1) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n - 1 = 0$ gesetzt werden. Somit ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}|1+\delta_n-1|+2 = |\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n|+2 = 2$. Ergebnis: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

c) $f(\hat{x}_n) = \sqrt{1+\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\hat{x}_n) = 0$, $f(\tilde{x}_n) = \sqrt{1-\frac{1}{n+2}-1}$ ist für kein $n \in \mathbb{N}$ definiert, da der Radikand kleiner als 0 ist. Somit gibt es gegen 1 konvergente Zahlenfolgen (x_n) (nämlich solche mit Gliedern < 1), so daß $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$ nicht existiert.
f hat daher bei $x=1$ *keinen* Grenzwert, sondern lediglich den *rechtsseitigen Grenzwert* 0; denn für jede Folge (x_n) mit $x_n > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 0$.
Ergebnis: $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x)$ existiert nicht.

d) $f(\hat{x}_n) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}-1} = n$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\hat{x}_n) = +\infty$. $f(\tilde{x}_n) = \dfrac{1}{1-\frac{1}{n+2}-1} = -(n+2)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = -\infty$. Ergebnis: f hat bei $x=1$ *keinen* Grenzwert.
Man überlegt sich leicht, daß $(f(x_n^+))$ für jede Zahlenfolge (x_n^+) mit $x_n^+ > 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^+ = 1$, bestimmt gegen $+\infty$ und $(f(x_n^-))$ für jede Zahlenfolge (x_n^-) mit $x_n^- < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^- = 1$, bestimmt gegen $-\infty$ divergiert; also gilt: $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = +\infty$.

e) $f(\hat{x}_n) = \dfrac{1}{(1+\frac{1}{n}-1)^2} = n^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\hat{x}_n) = +\infty$. $f(\tilde{x}_n) = \dfrac{1}{(1-\frac{1}{n+2}-1)^2} = (n+2)^2$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = +\infty$. f divergiert sowohl bei links- als auch bei rechtsseitiger Annäherung an $x=1$ gegen $+\infty$: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

f) $f(\hat{x}_n) = \dfrac{(\hat{x}_n-1)(\hat{x}_n+1)}{\hat{x}_n-1} = \hat{x}_n+1 = 1+\dfrac{1}{n}+1 = 2+\dfrac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} f(\hat{x}_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(2+\dfrac{1}{n}) = 2$. $f(\tilde{x}_n) = \dfrac{(\tilde{x}_n-1)(\tilde{x}_n+1)}{\tilde{x}_n-1} = \tilde{x}_n+1 = 1-\dfrac{1}{n+2}+1 = 2-\dfrac{1}{n+2}$; $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(2-\dfrac{1}{n+2}) = 2$. Da auch für beliebige, gegen 1 konvergierende Zahlenfolgen (x_n), $x_n \neq 1$, gilt: $f(x_n) = \dfrac{(x_n-1)(x_n+1)}{x_n-1} = x_n+1$, ist also stets $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 2$.
Ergebnis: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$.

L 19.2 **a)** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2(1+\frac{5}{x}-\frac{6}{x^2})}{x^2(2-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2})} = \dfrac{1+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x}-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{6}{x^2}}{2-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(4-\frac{2}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{4-\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{4-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}}{1+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}} = 0$

c) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2(1+\frac{1}{x^2})}{x(1-\frac{1}{x})} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} x\cdot\dfrac{1+\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}}{1-\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}} = -\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+4)}{x(x-2)} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x+4}{x} = 3$

e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{20}(ix+1)^2}{x^2+4} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2\sum\limits_{i=1}^{20} i^2 + 2x\sum\limits_{i=1}^{20} i + \sum\limits_{i=1}^{20} 1^i}{x^2+4} =$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2[\sum\limits_{i=1}^{20} i^2 + \frac{2}{x}\sum\limits_{i=1}^{20} i + \frac{1}{x^2}\sum\limits_{i=1}^{20} 1^i]}{x^2(1+\frac{4}{x^2})} = \sum\limits_{i=1}^{20} i^2 = 2\,870$ (vgl.A 2.30a, d)

f) Wegen $\dfrac{x^n-1}{x-1} = \sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i$ für $x \neq 1$ (vgl.A 2.30b) ist

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\sum\limits_{i=0}^{n-1} x^i = \sum\limits_{i=0}^{n-1}\lim\limits_{x\to 1} x^i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 1^i = n$

g) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(1+\frac{3}{x})x(1-\frac{4}{x})x(3+\frac{5}{x})}{x^2(1+\frac{1}{x^2})|x|\sqrt{\frac{3}{x^2}+4}} = \pm\dfrac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{3}{x})(1-\frac{4}{x})(3+\frac{5}{x})}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x^2})\sqrt{\frac{3}{x^2}+4}} = \pm\dfrac{3}{2}$

h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{x+4}+2)}{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(\sqrt{x+4}+2)}{x+4-4} =$

$\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{x+4}+2) = 4$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\sqrt{4x^2-3x}-2x)(\sqrt{4x^2-3x}+2x)}{\sqrt{4x^2-3x}+2x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4x^2-3x-4x^2}{\sqrt{4x^2-3x}+2x} =$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-3x}{x(\sqrt{4-\frac{3}{x}}+2)} = \dfrac{-3}{\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{4-\frac{3}{x}}+2)} = -\dfrac{3}{4}$

L 10.4 Unstetigkeitsstellen einer gebrochen rationalen Funktion sind die Nullstellen ihrer Nennerfunktion.

a) Da $x^2+1 \neq 0$ für alle $x \in I\!R$, ist f überall stetig. Vgl. Bild L 8.4a.

b) $x=2$ ist Nullstelle des Nenners von f. Es ist $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \frac{4(x-2)^2}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2\pm 0} 4(x-2) = 0$.

Ergebnis: f ist unstetig bei $x=2$ (Lücke, hebbare Unstetigkeit), sonst überall stetig. Vgl. Bild L 8.4b.

c) Die Nullstellen des Nenners von f sind $x=0$ und $x=-3$. Es ist

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{x^2+x-6}{x(x+3)} = \lim_{x\to 0-0} \frac{x^2+x-6}{x+3} \cdot \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = -2 \cdot \lim_{x\to 0-0} \frac{1}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to 0+0} \frac{x^2+x-6}{x(x+3)} = \lim_{x\to 0+0} \frac{x^2+x-6}{x+3} \cdot \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = -2 \cdot \lim_{x\to 0+0} \frac{1}{x} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to -3\pm 0} \frac{(x+3)(x-2)}{x(x+3)} = \lim_{x\to -3\pm 0} \frac{x-2}{x} = \frac{5}{3}.$$

Ergebnis: f ist unstetig bei $x=0$ (Polstelle 1. Ordnung) und bei $x=-3$ (Lücke, hebbare Unstetigkeit), ansonsten ist f stetig. Vgl. Bild L 8.4c.

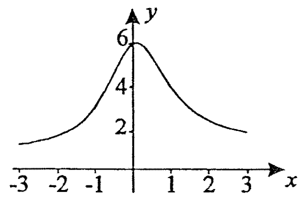


Bild L 8.4a

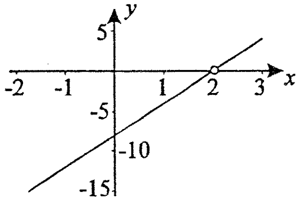


Bild L 8.4b

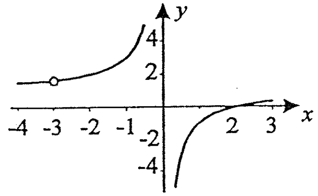


Bild L 8.4c

d) $y = \begin{cases} 2x & \text{für} \quad x<1 \\ -2x+4 & \text{für} \quad x \geq 1 \end{cases}$. Es ist $\lim\limits_{x\to 1\pm 0} f(x) = 2 = f(1)$.

Ergebnis: f ist überall stetig. Vgl. Bild L 8.4d.

e)

$$y = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{für} \quad x<-2 \\ -1 & \text{für} \quad -2 \leq x < 0 \\ 1 & \text{für} \quad 0 < x \leq 2 \\ \frac{2}{x} & \text{für} \quad 2 < x \end{cases}$$

Untersuchung der "kritischen" Stellen $x=-2$, $x=0$, $x=2$:

$\lim\limits_{x\to -2\pm 0} f(x) = -1 = f(-2)$,

$\lim\limits_{x\to 2\pm 0} f(x) = 1 = f(2)$.

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = 1$;

$f(0)$ ist nicht definiert.

Ergebnis: f ist unstetig bei $x=0$ (Sprungstelle mit Sprunghöhe 2), sonst überall stetig. Vgl. Bild L 8.4e.

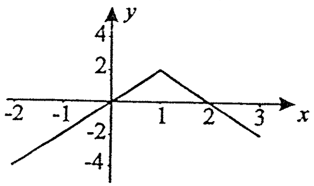


Bild L 8.4d

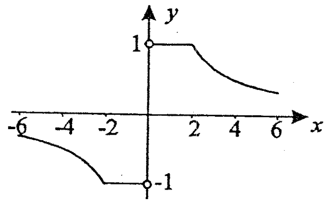


Bild L 8.4e

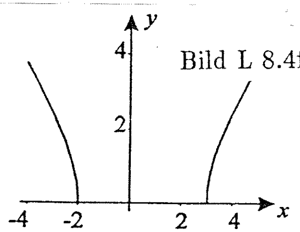


Bild L 8.4f

1/9/12

f) Der Radikand x^2-x-6 ist ≥ 0 nur für $x \leq -2$ oder $x \geq 3$. Daher ist f nicht definiert für $x \in (-2, 3)$: $D_f = I\!R \setminus (-2, 3)$.

$\lim\limits_{x\to -2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -2-0} \sqrt{(x+2)(x-3)} = 0 = f(-2)$

(Beachte: Der Radikand ist ≥ 0, da seine beiden Faktoren für $x \leq -2$ kleiner oder gleich 0 sind.)

$\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 3+0} \sqrt{(x+2)(x-3)} = 0 = f(3)$

(Beachte: Der Radikand ist ≥ 0, da seine beiden Faktoren für $x \geq 3$ größer oder gleich 0 sind.)

Daher ist f $\left.\begin{array}{l} \text{bei } x=-2 \text{ linksseitig stetig,} \\ \text{bei } x=\ \ 3 \text{ rechtsseitig stetig} \end{array}\right\}$ und im übrigen Definitionsbereich stetig. Vgl. Bild L 8.4f.

g) $y = \frac{\sqrt{4(x-2)^2}}{x-2} = \frac{2|x-2|}{x-2} = \begin{cases} -2 & \text{für} \quad x<2 \\ 2 & \text{für} \quad x>2 \end{cases}$,

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = 2$. Ergebnis: f ist bei $x=2$ unstetig ($x=2$ ist Sprungstelle mit Sprunghöhe 4), sonst überall stetig. Vgl. Bild L 8.4g.

h) $y = \frac{3x+4}{\sqrt{x^2+4x+4-8x}-x+2} = \frac{3x+4}{\sqrt{(x-2)^2}-x+2} = \frac{3x+4}{|x-2|-(x-2)} = -\frac{3x+4}{2(x-2)}$ für $x<2$. Für $x \geq 2$ ist f nicht definiert.

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = -\lim\limits_{x\to 2-0} \frac{3x+4}{2(x-2)} = +\infty$.

Ergebnis: f ist für $x<2$ stetig, bei $x=2$ unstetig ($x=2$ ist Unendlichkeitsstelle, es liegt *keine* linksseitige Stetigkeit vor). Vgl. Bild L 8.4h.

i) Da $y = \ln z$ nur für $z>0$ definiert ist, lautet der Definitionsbereich des vorgegebenen f: $D_f = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

Wir untersuchen nun die Randpunkte $x=-2$ und $x=2$ von D_f:

$\lim\limits_{x\to -2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to -2-0} \ln(x^2-4) = \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} \ln(x^2-4) = -\infty$

(Beachte: x^2 bleibt ≥ 4 sowohl bei $x \to -2-0$ als auch bei $x \to 2+0$.)

Ergebnis: $f(x)$ ist für $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ stetig, bei $x=-2$ und bei $x=2$ unstetig (f ist also bei $x=-2$ *nicht* linksseitig stetig und bei $x=2$ *nicht* rechtsseitig stetig). Vgl. Bild L 8.4i.

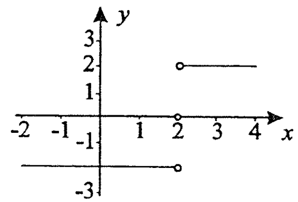


Bild L 8.4g

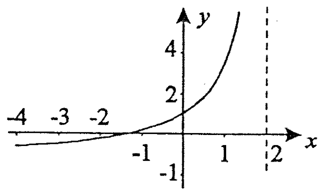


Bild L 8.4h

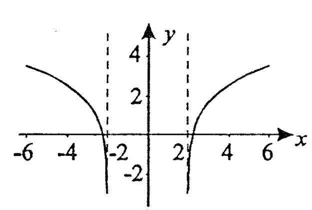


Bild L 8.4i

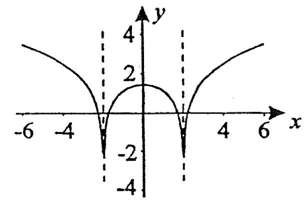


Bild L 8.4j

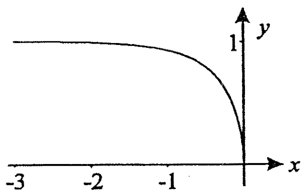


Bild L 8.4k

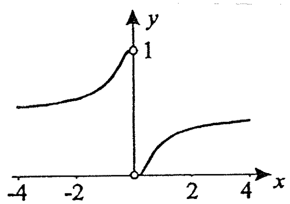


Bild L 8.4l

j) Es ist $f = \begin{cases} \ln(x^2-4), & x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty) \\ \ln(4-x^2), & x \in (-2,2) \end{cases}$.

Untersuchung der Randpunkte $x=-2$ und $x=2$ von D_f:

$\lim\limits_{x\to-2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = -\infty$ (vgl. A 8.4i).

$\lim\limits_{x\to-2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to-2+0} \ln(4-x^2) = -\infty, \quad \lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0} \ln(4-x^2) = -\infty.$

(Beachte: x^2 bleibt ≤ 4 sowohl bei $x \to -2+0$ als auch bei $x \to 2-0$.)

Ergebnis: f ist in D_f stetig. Die Randpunkte $x=-2$ und $x=2$ des Definitionsbereichs sind Unendlichkeitsstellen. Vgl. Bild L 8.4j.

k) f ist nur dort definiert, wo $1-e^{2x} \ge 0$ ist, d.h. $D_f = (-\infty, 0]$. Untersuchung des Randpunkts $x=0$: $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0} \sqrt{1-e^{2x}} = 0 = f(0)$. (Beachte: e^{2x} bleibt ≤ 1 bei $x \to 0-0$.) Ergebnis: f ist bei $x=0$ linksseitig stetig, im übrigen D_f stetig. Vgl. Bild L 8.4k.

l) f ist in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiert. Für die Untersuchung von f im Randpunkt $x=0$ des Definitionsbereichs betrachten wir zunächst das Verhalten von $e^{\frac{1}{x}}$ bei $x=0$ (vgl. A 8.3): Es ist $\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to+\infty} e^u = +\infty.$

Daher ist $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \dfrac{1}{1+\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}}} = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \dfrac{1}{1+\lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}}} = 0.$

Ergebnis: f ist bei $x=0$ unstetig (Sprungstelle mit Sprunghöhe 1). Vgl. Bild L8.4l.

$\boxed{\text{L 19.5}}$ **a)** f hat bei $x=0$ eine Sprungstelle mit der Sprunghöhe 2. $f(0)$ ist nicht definiert. Vgl. Bild L 8.6a.

b) f ist eine Treppenfunktion, die an den Stellen $x=k$, $k \in \mathbb{Z}$, Sprünge der Höhe 1 hat und dort rechtsseitig stetig ist. Vgl. Bild L 8.6b.

c) f ist eine periodische Funktion (Grundperiode $T=2$), die an den Stellen $x=1+2k$, $k \in \mathbb{Z}$, Sprünge der Höhe 2 hat und dort linksseitig stetig ist. Vgl. Bild L 8.6c.

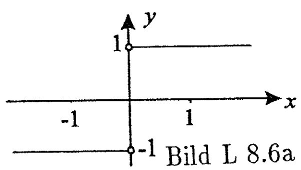


Bild L 8.6a

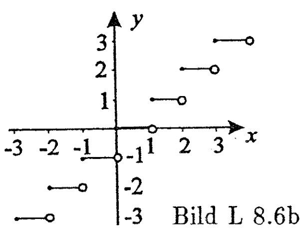


Bild L 8.6b

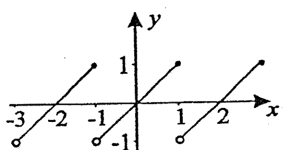


Bild L 8.6c

d) f ist eine periodische Funktion (Grundperiode $T=4$), die an den Stellen $x=2k$, $k \in \mathbb{Z}$, Sprünge der Höhe 2 hat und an den Stellen $x=4k+2$, $k \in \mathbb{Z}$, rechtsseitig stetig ist. Vgl. Bild L 8.6d.

e) Untersuchung an der Stelle $x=0$:

$\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-0}(1-e^x) = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+0}(x^2-x) = 0, \quad f(0)=0.$

Untersuchung an der Stelle $x=2$:

$\lim\limits_{x\to 2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2-0}(x^2-x) = 2, \quad \lim\limits_{x\to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 2+0}(1-x) = -1, \quad f(2) = -1.$

Ergebnis: f hat bei $x=2$ einen Sprung der Höhe 3, ist dort rechtsseitig stetig und in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ – insbesondere auch bei $x=0$ – stetig. Vgl. Bild L 8.6e.

f) Untersuchung an der Stelle $x=-1$: $\lim\limits_{x\to-1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to-1-0} x^2 = 1, \quad \lim\limits_{x\to-1+0} f(x) =$

$\lim\limits_{x\to-1+0} \sin(\frac{\pi}{2}x+\pi) = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1, \quad f(-1) = 0$. Somit stimmen bei $x=-1$ rechts- und linksseitiger Grenzwert überein, unterscheiden sich aber von $f(-1)$. f hat daher bei $x=-1$ eine hebbare Unstetigkeit und ist ansonsten stetig.

Würde man als Funktionswert bei $x=-1$ nicht 0, sondern 1 vereinbaren, dann wäre die so definierte Funktion überall stetig. Vgl. Bild L 8.6f.

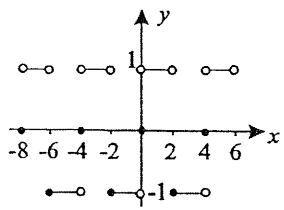


Bild L 8.6d

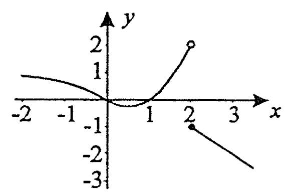


Bild L 8.6e

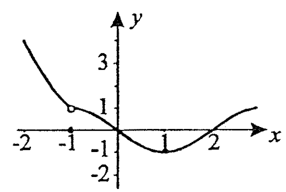


Bild L 8.6f

$\boxed{\text{L 19.6}}$ Es ist zu fordern, daß bei $x=-2$ und bei $x=1$ links- und rechtsseitiger Grenzwert und Funktionswert übereinstimmen.

$$x=-2: \quad \left.\begin{aligned} \lim_{x\to-2-0} f(x) &= \lim_{x\to-2-0}(1-Ax) = 1+2A \\ \lim_{x\to-2+0} f(x) &= \lim_{x\to-2+0}(x^2+Bx+3) = 7-2B = f(-2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

1.Forderung: $1+2A = 7-2B$

$$x=1: \quad \left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1-0} f(x) &= \lim_{x\to 1-0}(x^2+Bx+3) = 4+B = f(1) \\ \lim_{x\to 1+0} f(x) &= \lim_{x\to 1+0}(2A+x) = 2A+1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

2.Forderung: $2A+1 = 4+B$

Die beiden Forderungen führen zu $A=2$ und $B=1$.

BlaH 18:

Bemerkung: Die Aufgaben von BlaH 18 sind als "vertiefende Ergänzung" zu BlaH 17 zu sehe

A 18.1 Unter der Annahme, daß die Funktionen f und g für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert sind und $g(x) \neq 0$ gilt, beweise man folgende Behauptungen:

a) Sind f und g gerade, dann sind auch $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$, $f \circ g$ gerade.

b) Sind f und g ungerade, dann sind $f+g$, $f-g$, $f \circ g$, $g \circ f$ ungerade, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ gerade.

c) Ist f gerade, g ungerade (oder umgekehrt), dann sind $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ungerade, $f \circ g$, $g \circ f$ gerade.

d) Für beliebiges f und gerades g ist $f \circ g$ gerade.

A 18.2 Unter Verwendung von A 18.1 untersuche man die folgenden Funktionen $f: \; y = f(x)$, die jeweils auf ihrem natürlichen Definitionsbereich gegeben sein mögen, auf Geradheit/Ungeradheit:

a) $y = x^2 + \cos x$ b) $y = \tan x$ c) $y = \sin x \cdot \cos x$ d) $y = \sin(x^2)$
e) $y = (x^3 - x)^3$ f) $y = (x^3 - x)^2$ g) $y = \cos(\sin x)$ h) $y = \sin^2(\cos x)$

A 18.3 a) Es ist zu zeigen, daß sich jede Funktion f, die einen zum Nullpunkt symmetrischen Definitionsbereich besitzt, als Summe einer geraden Funktion g und einer ungeraden Funktion u darstellen läßt:

$$f = g + u.$$

b) Ermitteln Sie g und u für folgende Funktionen $f: \; y = f(x)$:

α) $y = x^2 + 2x - 1$ β) $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ γ) $y = \dfrac{x-1}{x+1}$
δ) $y = |x+2| - x$ ε) $y = \ln(x^2)$ ζ) $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

A 18.4 Sind folgende, auf ihrem natürlichen Definitionsbereich erklärte Funktionen $f: \; y = f(x)$ periodisch ? Ermitteln Sie gegebenenfalls die Grundperiode T.

a) $y = \sin x + e^x$ b) $y = 4\cos(x-2)$ c) $y = \tan(4x) + 5$
d) $y = e^{\cos(2x+1)} + \frac{1}{2}$ e) $y = \dfrac{\ln|\sin x|}{\tan(0.25\,x)}$, f) $y = \sin(3x) - \tan(2x)$

A 18.5 Eine gedämpfte Schwingung wird beschrieben durch

$$f: \; y = Ae^{-\gamma t} \sin \omega t, \quad t \geq 0, \quad \gamma > 0 \text{ (Dämpfungsfaktor).}$$

a) Ist f periodisch ?
b) Man skizziere den Graphen von f für $A = 1.5$, $\gamma = 0.25$, $\omega = 2$ für $t \in [0, 4\pi]$.

A 18.6 Ein spezieller elektrischer Impuls läßt sich durch die Funktion $f: \; y = f(t)$, $t \in \mathbb{R}$, beschreiben, die für $t \in [0,2]$ durch

$$y = \begin{cases} 2t & \text{für } 0 \leq t \leq 0.5 \\ 1 & \text{für } 0.5 \leq t \leq 1.5 \\ -2t + 4 & \text{für } 1.5 \leq t \leq 2 \end{cases}$$

definiert wird. Außerdem soll f ungerade sein und die Periode $T = 4$ besitzen. Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-6 \leq t \leq 6$.

A 18.7 Gesucht ist die Gleichung der Funktion $f: \; y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, die in $[-1, 1]$ die Gestalt $y = x^2$ hat, gerade ist und die Periode $T = 2$ besitzt.

A 18.8 Die folgenden physikalischen Formeln sind nach den angegebenen Größen umzustellen. (Zur Bedeutung der auftretenden Symbole vgl. z.B. [DES])

a) (Vertikalkomponente des schrägen Wurfs mit Abwurfwinkel β)
$z(t) = v_0 t \sin\beta - \frac{1}{2}gt^2$ nach β $(0 < \beta < \pi/2)$.

b) (Gedämpfte elektromagnetische Schwingung)
$i(t) = I_{max} e^{-\delta t} \sin(\omega t + \beta)$ nach β

c) (Comptoneffekt)
$\cot\varphi = \left(1 + \dfrac{hf}{m_e c_0^2}\right) \tan\dfrac{\vartheta}{2}$ nach ϑ $(-\pi < \vartheta < \pi)$

d) (Phasenverschiebung zwischen erzwungener Schwingung und Erregung)
$\varphi = \arctan \dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ nach ω.

Lösungen zu Blatt 18

L 18.1 a) Nach Voraussetzung ist: $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = g(x)$. Daraus folgt
$f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x)$; $f(-x) - g(-x) = f(x) - g(x)$;
$f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x)$; $\dfrac{f(-x)}{g(-x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$;
$f(g(-x)) = f(g(x))$; $g(f(-x)) = g(f(x))$.

b) Nach Voraussetzung ist: $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = -g(x)$. Daraus folgt
$f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x))$;
$f(-x) - g(-x) = -f(x) + g(x) = -(f(x) - g(x))$;
$f(g(-x)) = f(-g(x)) = -f(g(x))$; $g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x))$;
$f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x)$; $\dfrac{f(-x)}{g(-x)} = \dfrac{-f(x)}{-g(x)} = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

c) Setzt man $f(-x) = f(x)$, $g(-x) = -g(x)$ voraus, dann ergibt sich
$f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x)g(x)$; $\dfrac{f(-x)}{g(-x)} = \dfrac{f(x)}{-g(x)} = -\dfrac{f(x)}{g(x)}$;
$f(g(-x)) = f(-g(x)) = f(g(x))$; $g(f(-x)) = g(f(x))$.
Der Fall $f(-x) = -f(x)$, $g(-x) = g(x)$ läßt sich in gleicher Weise behandeln.

d) Da $g(-x) = g(x)$ vorausgesetzt wurde, ist $f(g(-x)) = f(g(x))$.

L 18.2 a) Es ist $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 : y = x^2$, $f_2 : y = \cos x$. Da f_1, f_2 gerade sind, ist nach A 18.1a) auch f gerade.

b) Es ist $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ mit $f_1 : y = \sin x$, $f_2 : y = \cos x$. Da f_1 ungerade, f_2 gerade, ist f ungerade (nach A 18.1c).

c) Da $f = f_1 \cdot f_2$ mit $f_1 : y = \sin x$, $f_2 : y = \cos x$ und f_1 ungerade, f_2 gerade, ist f ungerade (nach A 18.1c).

d) Es ist $f = f_1 \circ f_2$ mit der geraden Funktion $f_2 : z = x^2$. Daher ist f nach A 18.1d) gerade.

e) Es ist $f = f_1 \circ f_2$ mit $f_2 : z = x^3 - x$ (ungerade), $f_1 : y = z^3$ (ungerade); daher ist f ungerade (nach A 18.1b).

f) Es ist $f = f_1 \circ f_2$ mit $f_2 : z = x^3 - x$ (ungerade), $f_1 : y = z^2$ (gerade); daher ist f gerade (nach A 18.1c).

g) Es ist $f = f_1 \circ f_2$ mit $f_2 : z = \sin x$ (ungerade), $f_1 : y = \cos z$ (gerade); daher ist f gerade (nach A 18.1c).

h) Es ist $f = f_1 \circ f_2 \circ f_3$ mit $f_3 : u = \cos x$ (gerade), $f_2 : z = \sin u$ (ungerade), $f_1 : y = z^2$ (gerade); daher ist f gerade. (Nach A c ist $g = f_2 \circ f_3$ gerade, nach A 18.1 a oder nach A 18.1d ist $f = f_1 \circ g$ gerade.).

L 18.3 a) Angenommen, es gibt für f eine Darstellung der Form
$$f = g + u \quad \text{mit } g(-x) = g(x) \text{ und } u(-x) = -u(x), \quad (*)$$
dann folgt $f(x) = g(x) + u(x)$ und $f(-x) = g(x) - u(x)$, und daraus ergibt sich
$$\boxed{g(x) = \tfrac{1}{2}(f(x) + f(-x))} \quad \text{und} \quad \boxed{u(x) = \tfrac{1}{2}(f(x) - f(-x))}\,. \quad (**)$$
Andererseits folgt aus (**)
$g(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) + f(x)] = g(x)$, d.h., g ist gerade,
$u(-x) = \frac{1}{2}[f(-x) - f(x)] = -u(x)$, d.h., u ist ungerade, und
$g(x) + u(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = f(x)$, d.h.,
die Darstellung (*) ist stets in eindeutiger Weise möglich.

b) α) $g(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x - 1 + (-x)^2 + 2(-x) - 1) = x^2 - 1$, $x \in I\!R$
$u(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 2x - 1 - ((-x)^2 + 2(-x) - 1)) = 2x$, $x \in I\!R$.

β) $g(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1})$, $x \in I\!R$
$u(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$, $x \in I\!R$.

γ) Wegen $y = \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{(x-1)^2}{x^2-1} = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1}$ folgt
$$g(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}, \quad u(x) = -\frac{2x}{x^2-1}, \quad |x| \neq 1.$$

δ) $g(x) = \frac{1}{2}(|x+2| - x + |-x+2| + x) = \frac{1}{2}(|x+2| + |2-x|)$
$$= \begin{cases} -x & \text{für } x < -2 \\ 2 & \text{für } -2 \le x \le 2 \\ x & \text{für } x > 2 \end{cases},$$
$u(x) = \frac{1}{2}(|x+2| - x - |-x+2| - x) = \frac{1}{2}(|x+2| - |2-x|) - x$
$$= \begin{cases} -2 & \text{für } x < -2 \\ 0 & \text{für } -2 \le x \le 2 \\ 2 - x & \text{für } x > 2 \end{cases}$$
~~(Zur Auflösung von Beträgen vgl. H 3.9 (B).)~~

ε) $y = \ln(x^2)$, $x \neq 0$, ist eine gerade Funktion; somit gilt: $g(x) = \ln(x^2)$, $u(x) = 0$.

ζ) Da $y = \cos(x + \frac{\pi}{4}) = \cos x \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos x - \sin x)$ gilt und $\cos x$ eine gerade, $\sin x$ eine ungerade Funktion ist, folgt: $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$, $u(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x$.

L 18.4 a) Nein, da zwar $\sin x$ periodisch ($T = 2\pi$), aber e^x nicht periodisch ist: $f(x+2\pi) = \sin(x+2\pi) + e^{x+2\pi} = \sin x + e^x e^{2\pi} \neq f(x)$. Ebenso ist auch $f(x + 2k\pi) \neq f(x)$, $k \in Z\!\!Z$.

b) f hat die Grundperiode $T = 2\pi$; denn $\cos x$ hat diese Grundperiode, und damit gilt: $f(x + 2\pi) = 4\cos(x + 2\pi - 2) = 4(\cos(x-2) + 2\pi) = 4\cos(x-2) = f(x)$.

c) Die Forderung $f(x + T) = \tan(4x + 4T) + 5 = \tan(4x) + 5 = f(x)$ ist erfüllt, falls $4T = \pi$ (= Grundperiode von $\tan x$) ist. Somit ist f periodisch mit der Grundperiode $T = \pi/4$.

d) Die Forderung $f(x + T) = \exp\{\cos(2x + 2T + 1)\} + \frac{1}{2} = \exp\{\cos(2x+1)\} + \frac{1}{2}$ ist genau dann erfüllt, wenn $\cos(2x + 2T + 1) = \cos(2x + 1 + 2T) = \cos(2x + 1)$ für alle x gilt. Dies ist der Fall, wenn $2T = 2\pi$ (=Grundperiode von $\cos x$) ist. Somit hat die Funktion f die Grundperiode $T = \pi$.

e) Da $\sin x$ die Grundperiode $T = 2\pi$ besitzt, ist auch $\ln|\sin x|$ periodisch mit $T = 2\pi$. $\tan(\frac{x}{4})$ hat die Grundperiode 4π (den Nachweis hierfür führt man analog c)). Die gemeinsame Grundperiode von $\ln|\sin x|$ und $\tan(\frac{x}{4})$ und damit auch von f ist somit 4π.

f) $\sin(3x)$ hat die Grundperiode $\frac{2}{3}\pi$, $\tan(2x)$ hat die Grundperiode $\frac{\pi}{2}$. Die kleinste gemeinsame Periode von beiden ist das kleinste Vielfache von π, das $\frac{2}{3}$ und $\frac{1}{2}$ als Faktoren enthält: Die Grundperiode von f ist $T = \frac{12}{6}\pi = 2\pi$.

L 18.5
a) Da $e^{-\gamma t}$ nicht periodisch ist, kann auch f nicht periodisch sein.
b) Siehe Bild L 4.30.

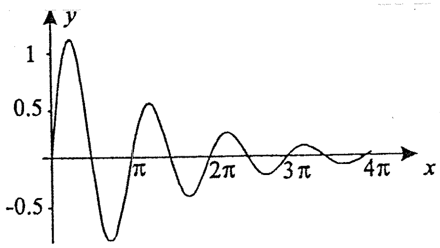


Bild L 4.30

L 18.6 Siehe Bild L 4.31.

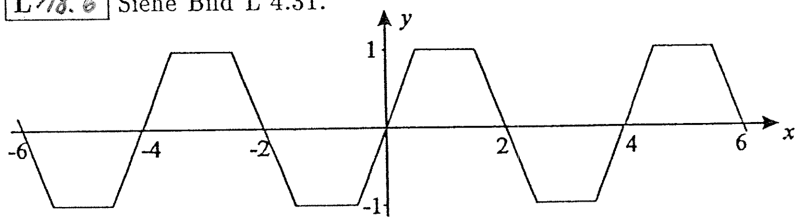


Bild L 4.31

L 18.7
$f:\ y=(x-2n)^2$ für $x\in[2n-1,2n+1],\ n\in\mathbb{Z}$.
Grundperiode: $T=2$.
Siehe Bild L 4.32.

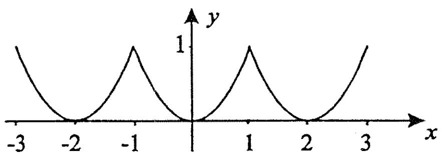


Bild L 4.32

L 18.8

a) $\sin\beta = \dfrac{z(t)+\frac{1}{2}gt^2}{v_0 t} \;\Rightarrow\; \beta = \arcsin\left(\dfrac{z(t)+\frac{1}{2}gt^2}{v_0 t}\right),\ -1 \le \dfrac{z(t)+\frac{1}{2}gt^2}{v_0 t} \le 1.$

b) $\sin(\omega t+\beta) = \dfrac{i(t)}{I_{max}}e^{\delta t}$. Für $\omega t+\beta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ folgt (für andere Intervalle vgl. A 4.36):
$\omega t+\beta = \arcsin\left(\dfrac{i(t)}{I_{max}}e^{\delta t}\right),\ -1\le \dfrac{i(t)}{I_{max}}e^{\delta t}\le 1. \;\Rightarrow\; \beta = \arcsin\left(\dfrac{i(t)}{I_{max}}e^{\delta t}\right)-\omega t.$

c) $\tan\frac{\vartheta}{2} = \dfrac{m_e c_0^2\cot\varphi}{m_e c_0^2+hf} \;\Rightarrow\; \vartheta = 2\arctan\left(\dfrac{m_e c_0^2\cot\varphi}{m_e c_0^2+hf}\right).$

d) $\tan\varphi = \dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \;\Leftrightarrow\; \omega_0^2\tan\varphi-\omega^2\tan\varphi-2\delta\omega=0 \;\Leftrightarrow\; \omega^2+2\delta\omega\cot\varphi-\omega_0^2=0$
$\Rightarrow\; \omega_{1,2} = -\delta\cot\varphi \pm\sqrt{\delta^2\cot^2\varphi+\omega_0^2}.$

Blatt 17:

Spezielle Eigenschaften von Funktionen

A 17.1 Welche der folgenden Funktionen $f: \; y = f(x), \; x \in D$, sind nach unten bzw. nach oben bzw. nach unten *und* oben beschränkt ? Gegebenenfalls bestimme man eine untere und eine obere Schranke.

a) $y = x + 1, \; D = \mathbb{R}$

b) $y = -x + 1, \; D = [-4, +\infty)$

c) $y = \dfrac{1}{(x+1)^2}, \; D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

d) $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}, \; D = \mathbb{R}^-$

e) $y = \dfrac{1}{1+x^2}, \; D = \mathbb{R}$

f) $y = -x^2 + 4, \; D = \mathbb{R}$

g) $y = 2 + \cos(2x), \; D = \mathbb{R}$

h) $y = \tan x, \; D = (-\frac{\pi}{2}, \; \frac{\pi}{2})$

i) $y = \mathrm{e}^{-2x} + 1, \; D = \mathbb{R}$

j) $y = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, \; D = \mathbb{R}.$

A 17.2 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktionen $f: \; y = f(x)$:

a) $y = x - 2, \; D = \mathbb{R}$

b) $y = -3x + 1, \; D = \mathbb{R}$

c) $y = x^2, \; D = \mathbb{R}^-$

d) $y = (x+1)^2 - 5, \; D = \mathbb{R}$

e) $y = -x^3 + 1, \; D = \mathbb{R}$

f) $y = |x - 1|, \; D = \mathbb{R}$

g) $y = \sin(2x), \; D = [-\pi, \; \pi]$

h) $y = \dfrac{1}{x-1}, \; D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

i) $y = \dfrac{1}{x^2} + 2, \; x \neq 0$

j) $y = \dfrac{x-1}{x+1}, \; D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}.$

A 17.3 Welche der folgenden Funktionen $f: \; y = f(x)$, die jeweils auf ihrem natürlichen Definitionsbereich erklärt sein mögen, sind gerade, welche ungerade?

a) $y = 3x^2 - 7x^4 + 2$

b) $y = 4x^5 - 2x^3 + 6x$

c) $y = 2x^2 - x + 1$

d) $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

e) $y = \dfrac{1}{x} + x$

f) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$

g) $y = \dfrac{x}{x^3+x}$

h) $y = |x| + 1$

i) $y = |x + 1|$

j) $y = \sqrt{x^3 + x}$

k) $y = \sqrt[3]{x^4 + 2}$

l) $y = \ln(x^2)$

m) $y = 2 \ln x$

n) $y = (\ln x)^2$

o) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$

p) $y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

q) $y = \sqrt{\cos x + 1}$

r) $y = \sqrt[3]{x + \sin x}$

A 17.4 Ermitteln Sie - falls möglich - von den folgenden Funktionen $f: \; y = f(x)$ die Umkehrfunktion f^{-1} und geben Sie deren Definitions- und Wertebereich an:

a) $y = -2x + 3, \; x \in \mathbb{R}$

b) $y = \dfrac{x+1}{x}, \; x \in [1, \, 100]$

c) $y = \dfrac{x-2}{x+1}, \; x \in [0, \, 3)$

d) $y = \ln(3 - \mathrm{e}^{-x}), \; x \in [0, +\infty)$

e) $y = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right), \; x \in (-1, \, 1)$

f) $y = 1 - \dfrac{2}{\mathrm{e}^x + 1}, \; x \in \mathbb{R}$

g) $y = x^4 + 1, \; x \in \mathbb{R}$

h) $y = \ln(\sqrt{x-1} + 1), \; x \in [1, +\infty)$

Lösungen zu Blatt 17

17/1

L 17.1 a) f ist nicht beschränkt: Mit wachsendem x überschreitet $f(x)$ jede beliebige reelle Zahl, mit fallendem x unterschreitet $f(x)$ jede beliebige reelle Zahl.

b) f ist nach unten nicht beschränkt (mit wachsendem x fällt $f(x)$ unter jede beliebige reelle Zahl), aber nach oben beschränkt durch $f(-4) = 5$.

c) f kann nicht negativ werden, daher ist f nach unten beschränkt durch 0. Nach oben ist f nicht beschränkt (bei Annäherung von x an -1 wächst $f(x)$ über alle Grenzen).

d) f ist nach unten beschränkt durch 0 und nach oben beschränkt durch 1. Diesem Wert nähert sich f am rechten Rand von D: Für jedes $x < 0$ ist $x - 1 < -1$, daher ist $(x-1)^2 > 1$ und $\dfrac{1}{(x-1)^2} < 1$.

e) f kann nicht negativ werden, daher ist es nach unten durch 0 beschränkt. (Für $|x| \gg 1$ kommt $f(x)$ diesem Wert beliebig nahe.) Ferner ist wegen $x^2 \geq 0$ und $1 + x^2 \geq 1$ stets $\dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$. Somit ist f auch nach oben beschränkt, und zwar durch $f(0) = 1$.

f) Der Graph von f ist eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitelpunkt $S(0,4)$. f ist daher nach oben beschränkt durch 4, nach unten nicht beschränkt (mit wachsendem $|x|$ unterschreitet $f(x)$ jede beliebige reelle Zahl).

g) Wegen $-1 \leq \cos(2x) \leq +1$ ist f beschränkt: $f(\frac{\pi}{2}) = 1 \leq f(x) \leq f(0) = 3$.

h) f ist nicht beschränkt: Für $x \to -\frac{\pi}{2}$ gilt $\tan x \to -\infty$, für $x \to \frac{\pi}{2}$ gilt $\tan x \to +\infty$.

i) Da die Exponentialfunktion stets > 0 ist, kann $f(x)$ nie kleiner als 1 werden. Somit ist f nach unten beschränkt durch 1. (Es gilt $f(x) \to 1$ für $x \to +\infty$.) Nach oben ist f nicht beschränkt (für $x \to -\infty$ gilt $e^{-2x} \to +\infty$).

j) Wegen $1 < 1 + e^x$ ist $0 < \dfrac{1}{1+e^x} < 1$, somit ist f beschränkt mit der unteren Schranke 0 und der oberen Schranke 1. (Es gilt $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$, $f(x) \to 1$ für $x \to -\infty$.)

L 17.2 a) Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) = x_1 - 2 < x_2 - 2 = f(x_2)$ $\Rightarrow$ f wächst streng monoton.

b) $x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; -x_1 > -x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) = -3x_1 + 1 > -3x_2 + 1 = f(x_2) \;\Rightarrow\; f$ fällt streng monoton.

c) $x_1 < x_2 < 0 \;\Rightarrow\; f(x_1) = x_1^2 > x_2^2 = f(x_2)$. Also ist f auf $D = \mathbb{R}^-$ streng monoton fallend.

d) Sei $x_1 < x_2 \leq -1$, dann ist $x_1 + 1 < x_2 + 1 \leq 0$ und $(x_1+1)^2 > (x_2+1)^2$. Somit gilt $f(x_1) = (x_1+1)^2 - 5 > (x_2+1)^2 - 5 = f(x_2)$; daher fällt f streng monoton auf $(-\infty,\ -1]$.

Sei $-1 \leq x_1 < x_2$, dann ist $0 \leq x_1 + 1 < x_2 + 1$ und $(x_1+1)^2 < (x_2+1)^2$. Somit gilt $f(x_1) = (x_1+1)^2 - 5 < (x_2+1)^2 - 5 = f(x_2)$; daher wächst f streng monoton auf $[-1,\ +\infty)$.

e) Sowohl für $x_1 < x_2 < 0$ als auch für $0 \leq x_1 < x_2$ und für $x_1 < 0 < x_2$ ist $f(x_1) = -x_1^3 + 1 > -x_2^3 + 1 = f(x_2)$. Daher fällt f monoton auf ganz $\mathbb{R}$.

f) Es gilt (vgl. H 3.9 (B)) $y = f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{für} \quad x \leq 1 \\ x-1 & \text{für} \quad x \geq 1 \end{cases}$. Analog a), b) erhält man unmittelbar: f ist streng monoton fallend auf $(-\infty,\ 1]$, streng monoton wachsend auf $[1,\ +\infty)$.

g) Vgl. Abb. L 4.14 d(sin): f wächst streng monoton auf $[-\pi,\ -\frac{3}{4}\pi]$ bzw. $[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}]$ bzw. $[\frac{3}{4}\pi,\ \pi]$ und fällt streng monoton auf $[-\frac{3}{4}\pi,\ -\frac{\pi}{4}]$ bzw. $[\frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi]$.

h) Für $x_1 < x_2 < 1$ ist $x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0$ und daher $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1 - 1} > \dfrac{1}{x_2 - 1} = f(x_2)$ (vgl. die Regeln für das Rechnen mit Ungleichungen).

Für $1 < x_1 < x_2$ ist $0 < x_1 - 1 < x_2 - 1$, und auch hier gilt $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1 - 1} > \dfrac{1}{x_2 - 1} = f(x_2)$. Somit fällt f streng monoton sowohl auf $(-\infty,\ 1)$ als auch auf $(1, +\infty)$.

Aber: f ist *nicht* monoton fallend in ihrem Definitionsbereich; denn es ist z.B. $f(-1) = -\frac{1}{2} < 1 = f(2)$.

i) Sei $x_1 < x_2 < 0$, dann ist $x_1^2 > x_2^2$ und $\dfrac{1}{x_1^2} < \dfrac{1}{x_2^2}$, somit $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1^2} + 2 < \dfrac{1}{x_2^2} + 2 = f(x_2)$.

Sei $0 < x_1 < x_2$, dann ist $0 < x_1^2 < x_2^2 > 0$ und $\dfrac{1}{x_1^2} > \dfrac{1}{x_2^2}$, somit $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1^2} + 2 > \dfrac{1}{x_2^2} + 2 = f(x_2)$.

Ergebnis: f wächst monoton auf $(-\infty, 0)$ und fällt monoton auf $(0, +\infty)$.

j) Es ist *nicht* möglich, durch eine getrennte Monotonieuntersuchung des Zählers und des Nenners zu einer Monotonieaussage für f zu kommen. Man formt deshalb $f(x)$ zunächst um: $f(x) = \dfrac{(x+1)-2}{x+1} = 1 - \dfrac{2}{x+1}$ und untersucht nun weiter analog Aufgabe h):

Für $x_1 < x_2 < -1$ ist $x_1 + 1 < x_2 + 1 < 0$ und daher $\dfrac{2}{x_1+1} > \dfrac{2}{x_2+1}$. Nach Multiplikation der Ungleichung mit -1 (dabei kehrt sich das Relationszeichen um!) und Addition von 1 erhält man:

$f(x_1) = 1 - \dfrac{2}{x_1+1} < 1 - \dfrac{2}{x_2+1} = f(x_2)$.

Für $-1 < x_1 < x_2$ ist $0 < x_1 + 1 < x_2 + 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{2}{x_1+1} > \dfrac{2}{x_2+1} \;\Rightarrow$

$f(x_1) = 1 - \dfrac{2}{x_1+1} < 1 - \dfrac{2}{x_2+1} = f(x_2)$.

f ist also jeweils streng monoton wachsend auf $(-\infty,\ -1)$ und auf $(-1,\ +\infty)$, aber nicht auf D (z.B. ist $f(-2) = 3 > -1 = f(0)$).

L 17.3 a) $f(-x) = 3(-x)^2 - 7(-x)^4 + 2 = 3x^2 - 7x^4 + 2 = f(x) \;\Rightarrow\; f$ ist gerade.

b) $f(-x) = 4(-x)^5 - 2(-x)^3 + 6(-x) = -4x^5 + 2x^3 - 6x = -(4x^5 - 2x^3 + 6x) = -f(x) \;\Rightarrow\; f$ ist ungerade.

c) $f(-x) = 2(-x)^2 - (-x) + 1 = 2x^2 + x + 1$ ist weder gleich $f(x)$ noch gleich $-f(x)$; daher ist f weder gerade noch ungerade.

d) $f(-x) = \dfrac{1}{(-x)^2 + 1} = \dfrac{1}{x^2 + 1} = f(x) \;\Rightarrow\; f$ ist gerade.

e) $f(-x) = \dfrac{1}{-x} + (-x) = -(\dfrac{1}{x} + x) = -f(x) \;\Rightarrow\; f$ ist ungerade.

f) $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 + 1} = -\dfrac{x}{x^2+1} = -f(x) \;\Rightarrow\; f$ ist ungerade.

g) $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^3 - x} = \dfrac{-x}{-(x^3+x)} = \dfrac{x}{x^3+x} = f(x) \;\Rightarrow\; f$ ist gerade.
h) $f(-x) = |-x| + 1 = |x| + 1$ (da $|-x| = |x|$) $\Rightarrow\; f$ ist gerade.
i) $f(-x) = |-x+1|$ ist weder gleich $f(x)$ noch gleich $-f(x)$; daher ist f weder gerade noch ungerade.
Bemerkung: Da $f(-1-x) = |-x| = |x| = f(-1+x)$, ist f gerade bezüglich der Geraden $x = -1$.
j) f ist nur für $x \geq 0$ definiert. Daher ist f weder gerade noch ungerade.
k) $f(-x) = \sqrt[3]{(-x)^4 + 2} = \sqrt[3]{x^4+2} = f(x) \;\Rightarrow\; f$ ist gerade.
l) $f(-x) = \ln(-x)^2 = \ln(x^2) = f(x) \;\Rightarrow\; f$ ist gerade.
m), n) f ist nur für $x > 0$ definiert, also weder gerade noch ungerade.
o) $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{-x} = \dfrac{-(e^{x} - e^{-x})}{-x} = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{x} = f(x) \;\Rightarrow\; f$ ist gerade.
p) $f(-x) = \dfrac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1} =$ (Multiplikation des Zählers und Nenners mit e^x)
$\dfrac{1-e^x}{1+e^x} = -\dfrac{e^x-1}{e^x+1} = -f(x) \;\Rightarrow\; f$ ist ungerade.
q) $f(-x) = \sqrt{\cos(-x)+1} = \sqrt{\cos x + 1} = f(x) \;\Rightarrow\; f$ ist gerade.
r) Da f nur für $x \geq 0$ definiert ist, kann f weder gerade noch ungerade sein.

L 17.4 a) Da aus $x_1 < x_2$ bekanntlich $-2x_1 > -2x_2$ und $3 - 2x_1 > 3 - 2x_2$ folgt, ist $f(x_1) > f(x_2)$, d.h. f fällt streng monoton; ferner ist $W_f = I\!R$. Somit existiert f^{-1} mit $D_{f^{-1}} = W_f = I\!R$, $W_{f^{-1}} = D_f = I\!R$. Aus $x = -\frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$ folgt $f^{-1}: \; y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

b) Es ist $y = 1 + \dfrac{1}{x}$, und wegen $\dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2}$ für $1 \leq x_1 < x_2 \leq 100$ gilt $f(x_1) = 1 + \dfrac{1}{x_1} > 1 + \dfrac{1}{x_2} = f(x_2)$, d.h., f ist streng monoton fallend. Folglich nimmt f am linken Rand des Definitionsbereichs seinen größten Funktionswert ($f(1) = 2$), am rechten Rand seinen kleinsten Funktionswert ($f(100) = 1.01$) an. Daher ist $W_f = [1.01, 2]$. Somit existiert f^{-1} mit $D_{f^{-1}} = [1.01, 2]$, $W_{f^{-1}} = [1, 100]$, und aus $y = \dfrac{x+1}{x} \;\Leftrightarrow\; yx = x + 1 \;\Leftrightarrow\; x(y-1) = 1$ folgt: $f^{-1}: \; y = \dfrac{1}{x-1}$.

c) Zur Untersuchung der Monotonie formen wir y zunächst etwas um: $y = \dfrac{x+1-3}{x+1} = 1 - \dfrac{3}{x+1}$. Für $0 \leq x_1 < x_2 < 3$ ist $x_1 + 1 < x_2 + 1$, $\dfrac{1}{x_1+1} > \dfrac{1}{x_2+1}$, $-\dfrac{3}{x_1+1} < -\dfrac{3}{x_2+1}$ und schließlich $f(x_1) = 1 - \dfrac{3}{x_1+1} < 1 - \dfrac{3}{x_2+1} = f(x_2)$, d.h. f wächst streng monoton. Daher ist $W_f = [f(0), f(3)) = [-2, \frac{1}{4})$. Somit existiert f^{-1}.
Aus $y = \dfrac{x-2}{x+1} \;\Leftrightarrow\; y(x+1) = x - 2 \;\Leftrightarrow\; x(y-1) = -2 - y \;\Leftrightarrow\; x = -\dfrac{2+y}{y-1}$ folgt
$f^{-1}: \; y = \dfrac{2+x}{1-x}$, $\;D_{f^{-1}} = [-2, \dfrac{1}{4})$, $W_{f^{-1}} = [0, 3)$.

d) Aus $0 \leq x_1 < x_2$ folgt wegen des streng monotonen Fallens von e^{-x}:
$1 \geq e^{-x_1} > e^{-x_2} \;\Leftrightarrow\; -1 \leq -e^{-x_1} < -e^{-x_2} \;\Leftrightarrow\; 0 < 3 - e^{-x_1} < 3 - e^{-x_2}$. Wegen des streng monotonen Wachsens von $\ln x$ erhält man $\ln(3 - e^{-x_1}) < \ln(3 - e^{-x_2})$, d.h. f wächst streng monoton. Daher ist $W_f = [\ln 2, \ln 3)$. ($\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(3 - e^{-x}) = \ln(3-0) = \ln 3$.) Also existiert f^{-1}. Aus $y = \ln(3 - e^{-x}) \;\Leftrightarrow\; e^y = 3 - e^{-x} \;\Leftrightarrow\; e^{-x} = 3 - e^y \;\Leftrightarrow\; -x = \ln(3 - e^y)$ folgt: $f^{-1}: \; y = -\ln(3 - e^x)$, $\;D_{f^{-1}} = [\ln 2, \ln 3)$, $W_{f^{-1}} = [0, +\infty)$.

e) Es ist $y = \ln(-\dfrac{1-x-2}{1-x}) = \ln(-1 + \dfrac{2}{1-x})$, und für $-1 < x_1 < x_2 < 1$ gilt: $1 - x_1 > 1 - x_2 > 0$, $\dfrac{1}{1-x_1} < \dfrac{1}{1-x_2}$ und $-1 + \dfrac{2}{1-x_1} < -1 + \dfrac{2}{1-x_2}$. Wegen des streng monotonen Wachsens von $\ln x$ folgt damit das streng monotone Wachsen von f, und es ist $W_f = (\lim\limits_{x\to-1+0} f(x), \lim\limits_{x\to1-0} f(x)) = (-\infty, +\infty)$. Somit existiert f^{-1}, und man erhält aus $y = \ln(\dfrac{1+x}{1-x}) \;\Leftrightarrow\; e^y = \dfrac{1+x}{1-x} \;\Leftrightarrow\; e^y(1-x) = 1 + x \;\Leftrightarrow\; e^y - 1 = x(1 + e^y) \;\Leftrightarrow\; x = \dfrac{e^y - 1}{1 + e^y}$ schließlich:
$f^{-1}: \; y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, $\;D_{f^{-1}} = (-\infty, +\infty)$, $W_{f^{-1}} = (-1, 1)$.

f) Aus $x_1 < x_2$ folgt wegen des streng monotonen Wachsens von e^x: $0 < e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2}{e^{x_1}+1} > \dfrac{2}{e^{x_2}+1} \;\Leftrightarrow\; -\dfrac{2}{e^{x_1}+1} < -\dfrac{2}{e^{x_2}+1}$. Daher gilt:
$f(x_1) = 1 - \dfrac{2}{e^{x_1}+1} < 1 - \dfrac{2}{e^{x_2}+1} = f(x_2)$, also ist f streng monoton wachsend,
$W_f = (\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = (-1, 1)$. Somit existiert f^{-1}.
Aus $y = 1 - \dfrac{2}{e^x+1} \;\Leftrightarrow\; 1 - y = \dfrac{2}{e^x+1} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{1}{1-y} = \dfrac{e^x+1}{2} \;\Leftrightarrow\; \dfrac{2}{1-y} - 1 = e^x$
erhält man $f^{-1}: \; y = \ln\left(\dfrac{2}{1-x} - 1\right) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, $\;D_{f^{-1}} = (-1, 1)$, $W_{f^{-1}} = I\!R$.

g) Falls $x_1 < x_2 < 0$, ist $x_1^4 > x_2^4$, somit $f(x_1) = 1 + x_1^4 > 1 + x_2^4 = f(x_2)$.
Falls $0 < x_1 < x_2$, ist $x_1^4 < x_2^4$, somit $f(x_1) < f(x_2)$. Da also f auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fällt, auf $[0, +\infty)$ streng monoton wächst, ist f *nicht* monoton auf D_f. Wegen der fehlenden Eineindeutigkeit von f existiert somit *keine* Umkehrfunktion. Betrachtet man jedoch die *zwei* Funktionen
$f_1: \; y = x^4 + 1$, $D_{f_1} = (-\infty, 0]$, $W_{f_1} = [1, +\infty)$
$f_2: \; y = x^4 + 1$, $D_{f_2} = [0, +\infty)$, $W_{f_2} = [1, +\infty)$,
so besitzt jede dieser Funktionen (wegen ihres streng monotonen Fallens bzw. Wachsens) eine Umkehrfunktion: Aus
$f_1: \; y = x^4 + 1 = (-x)^4 + 1$, $y \in [1, +\infty)$, $x \in (-\infty, 0]$ ergibt sich: $y - 1 = (-x)^4 \;\Leftrightarrow\; \sqrt[4]{y-1} = -x$, d.h. $f_1^{-1}: \; y = -\sqrt[4]{x-1}$, $D_{f_1^{-1}} = [1, +\infty)$, $W_{f_1^{-1}} = (-\infty, 0]$.
Analog erhält man $f_2^{-1}: \; y = \sqrt[4]{x-1}$, $D_{f_2^{-1}} = [1, +\infty)$, $W_{f_2^{-1}} = [0, +\infty)$.

h) Aus $1 \leq x_1 < x_2$ ergibt sich zunächst $0 \leq x_1 - 1 < x_2 - 1$, daraus wegen des streng monotonen Wachsens von $\sqrt{x}$ ($x \geq 0$): $0 < \sqrt{x_1 - 1} + 1 < \sqrt{x_2 - 1} + 1$ und wegen des streng monotonen Wachsens von $\ln x$ ($x > 0$): $f(x_1) = \ln(\sqrt{x_1 - 1} + 1) < \ln(\sqrt{x_2 - 1} + 1) = f(x_2)$. $W_f = [f(1), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)) = [0, +\infty)$. Als Umkehrfunktion erhält man aus $y = \ln(\sqrt{x-1} + 1) \;\Leftrightarrow\; e^y = \sqrt{x-1} + 1 \;\Leftrightarrow\; e^y - 1 = \sqrt{x-1} \;\Rightarrow\; (e^y - 1)^2 = x - 1$ schließlich $f^{-1}: \; y = 1 + (e^x - 1)^2$, $\;D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$, $W_{f^{-1}} = [1, +\infty)$.

Blatt 16: Reihen

A 16.0:

a) Wie sind in der Mathematik folgende Begriffe definiert

→ unendliche Reihe
→ Konvergenz einer unendl. Reihe
→ absolut konvergente Reihe
→ alternierende Reihe

b) Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine

→ konvergente unendliche Reihe
→ divergente unendliche Reihe
→ alternierende unendliche Reihe

Aufgabe 16.1: Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten folgender Reihen mit Hilfe des Majoranten- bzw. Minorantenkriteriums!

a) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu^2+1}$, b) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu(\nu+1)}}$, c) $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\ln \nu}$, d) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu!}{\nu^\nu}$,

e) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{1+\nu^4}$, f) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{\nu^2-2}}$.

Hinweis: Versuchen Sie die harmonische Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k^\alpha}\right) = \begin{cases} \text{divergent für } \alpha \le 1 \\ \text{konvergent für } \alpha > 1 \end{cases}$$

zu verwenden.

Aufgabe 16.2: Stellen Sie mit dem Quotientenkriterium fest, ob folgende Reihen konvergieren oder divergieren!

a) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{3^\nu}$, b) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^\nu}{\nu}$, c) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\nu!)^2}{(2\nu)!}$, d) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{\sqrt{\nu!}}$,

e) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\nu^\nu}}{\nu!}$, f) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{2^\nu \nu!}{\nu^\nu}$, g) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{3^\nu \nu!}{\nu^\nu}$, h) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{10\cdot 11 \cdots (10+\nu)}{1\cdot 3 \cdots (2\nu+1)}$.

Aufgabe 16.3: Stellen Sie mit dem Wurzelkriterium die Konvergenz bzw. Divergenz folgender Reihen fest!

a) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{3^\nu}$, b) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^\nu}$, c) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{2^\nu}{1+2^{2\nu}}$, d) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu}{\left(3-\frac{1}{\nu}\right)^\nu}$,

e) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \nu^\nu \sin^\nu \frac{2}{\nu}$, f) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{\nu^2}{2^\nu+3^\nu}$.

Aufgabe 16.4: Weisen Sie mit dem Leibnizschen Konvergenzkriterium die Konvergenz der folgenden alternierenden Reihen nach!

a) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{3\nu+1}$, b) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\sqrt{\nu(\nu+1)}}$, c) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{1+3^\nu}$,

d) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\nu+1}{2^\nu}$.

Zusatzfragen:

(i) Wie groß ist der maximale Fehler bei Approximation des Reihenwerts $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ durch $s_{10} := \sum\limits_{k=0}^{10} a_k$.

(ii) Bestimmen Sie n, so daß gilt

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} a_k - s_n \right| \le \varepsilon = 10^{-2}$$

Bem: $s_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$

Aufgabe 16.5: Untersuchen Sie, ob folgende Reihen absolut oder nicht-absolut konvergieren!

a) $\sum\limits_{\nu=2}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\ln \nu}$, b) $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} (-1)^\nu \frac{2\nu+1}{\nu(\nu+1)}$, c) $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu^2+1}$

(Lös: a) nicht-absolut konvergent, b) nicht-absolut konvergent, c) absolut konvergent,)

Blatt 16: Reihen

A 16.0

Für die Definitionen vgl. Skript
Abschn. 3.3.1

Beispiel $d = 1$

→ konvergente unendl. Reihe: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$

→ divergente unendl. Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

→ alternierende unendl. Reihe: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$

16.1 Anwendung von Majoranten-/Minoranten-kriterium

a) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu^2+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ mit $a_\nu := \frac{1}{\nu^2+1}$, $a_\nu > 0$

$\Rightarrow a_\nu := \frac{1}{\nu^2+1} < \frac{1}{\nu^2}$ $\Big\} \Rightarrow$ Verwende $\frac{1}{\nu^2}$ als Majorante

$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}$ konvergiert (vgl. harmonische Reihe)

b) $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\nu(\nu+1)}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu$ mit $a_\nu := \frac{1}{\sqrt{\nu\cdot(\nu+1)}}$, $a_\nu > 0$

$\Rightarrow a_\nu := \frac{1}{\sqrt{\nu\cdot(\nu+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(\nu+1)\cdot(\nu+1)}} = \frac{1}{(\nu+1)}$ $\Big\}$ Verwende $\frac{1}{\nu+1}$ als Minorante

$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)} \underset{(\nu+1)=:k}{\overset{\uparrow}{=}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ divergiert (vgl. harmonische Reihe)

: a) konvergent $\left(\text{Majorante: } \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}\right)$; b) divergent $\left(\text{Minorante: } \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu+1}\right)$,
c) divergent $\left(\text{Minorante: } \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu}\right)$; d) konvergent $\left(\text{Majorante: } \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{2}{\nu^2}\right)$,
e) konvergent $\left(\text{Majorante: } \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^3}\right)$; f) divergent $\left(\text{Minorante: } \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2/3}}\right)$,

Zu c): $a_\nu = \frac{1}{\ln \nu} > \frac{1}{\nu}$ da $\ln \nu < \nu$

($\rightsquigarrow$ vgl. Eigenschaften der Funktion "ln")

Zu d): $\frac{\nu!}{\nu^\nu} = \frac{\nu\cdot(\nu-1)\cdot(\nu-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{\nu\cdot\nu\cdot\nu\cdot\ldots\cdot\nu\cdot\nu} =$

$= \underbrace{\frac{\nu}{\nu}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\nu-1}{\nu}}_{<1}\cdot\underbrace{\frac{\nu-2}{\nu}}_{<1}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{2}{\nu}\cdot\frac{1}{\nu}}_{2/\nu^2} < \frac{2}{\nu^2}$

Zu e): $\frac{\nu}{1+\nu^4} = \frac{\nu}{\nu\cdot(\frac{1}{\nu}+\nu^3)}$

$= \frac{1}{(\frac{1}{\nu}+\nu^3)} < \frac{1}{\nu^3}$, da $(\frac{1}{\nu}+\nu^3) > \nu^3$

Zu f): $\frac{1}{\sqrt[3]{\nu^2-2}} = \frac{1}{(\nu^2-2)^{1/3}} > \frac{1}{(\nu^2)^{1/3}}$, da $(\nu^2-2) < \nu^2$

$\hookrightarrow \frac{1}{(\nu^2)^{1/3}} = \frac{1}{\nu^{2/3}}$

Lös. 16.2

a) konvergent, b) divergent, c) konvergent, d) konvergent,
e) konvergent, f) konvergent, g) divergent, h) konvergent.

} Quotientenkriterium

a) $a_k = \frac{k}{3^k}$

$$\Rightarrow b_k := \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k+1}{3^{k+1}} : \frac{k}{3^k} = \frac{(k+1)\cdot 3^k}{k\cdot 3^{k+1}} = \frac{3^k\cdot(k+1)}{3^k\cdot 3\cdot k}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{k+1}{k}\right)}_{(=b_k)}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} b_k = \frac{1}{3}\cdot\underbrace{\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)}_{=1} = 1/3 < 1$$

Also: Da $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| < 1$ konv. die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

b) $a_k = \frac{2^k}{k}$

$$\Rightarrow b_k := \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{2^{k+1}}{k+1} : \frac{2^k}{k} = \frac{2^{k+1}\cdot k}{2^k\cdot(k+1)} = \frac{2\cdot 2^k\cdot k}{2^k\cdot(k+1)}$$

$$= 2\cdot\frac{k}{k+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} b_k = 2\cdot\overbrace{\lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)}^{=1} = 2 > 1$$

Also: Q-Krit. liefert: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ div.

c) $a_k = \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

$$\Rightarrow b_k := \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{((k+1)!)^2}{(2\cdot(k+1))!} : \frac{(k!)^2}{(2k)!} = \frac{((k+1)!)^2\cdot(2k)!}{(k!)^2\cdot(2\cdot(k+1))!}$$

$$= \frac{((k+1)\cdot k!)^2\cdot(2k)!}{(k!)^2\cdot(2k+2)!} = \frac{(k+1)^2\cdot(k!)^2\cdot(2k)!}{(k!)^2\cdot(2k+2)!}$$

$$= \frac{(k+1)^2\cdot(2k)!}{(2k+2)!} = \frac{(k+1)^2\cdot(2k)!}{(2k+2)\cdot(2k+1)\cdot(2k)!} = \frac{(k+1)^2}{(2k+2)\cdot(2k+1)}$$

$$.. \; b_n = .. = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)\cdot(2n+1)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{4n^2+2n+4n+2} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = .. = \frac{1}{4} < 1$$

Also: Q-Krit. liefert: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kvg.

d) $a_n = \frac{n^2}{\sqrt{n!}}$

$$\Rightarrow b_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2}{\sqrt{(n+1)\cdot n!}} : \frac{n^2}{\sqrt{n!}} = \frac{(n+1)^2\cdot\sqrt{n!}}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n!}\cdot n^2}$$

$$= \frac{(n+1)^2}{\sqrt{n+1}\cdot n^2} = \frac{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{n+1}\cdot(n+1)}{\sqrt{n+1}\cdot n^2} = \frac{(n+1)^{3/2}}{n^2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n \to 0$$

Also: Q-Krit. liefert: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kvg.

e) $a_n = \frac{\sqrt{n^n}}{n!}$

$$\Rightarrow b_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\sqrt{(n+1)^{n+1}}}{(n+1)\cdot n!} : \frac{\sqrt{n^n}}{n!} = \frac{\sqrt{(n+1)^{n+1}}\cdot n!}{(n+1)\cdot n!\cdot\sqrt{n^n}}$$

$$= \frac{\sqrt{(n+1)^2\cdot(n+1)^{n-1}}}{(n+1)\cdot\sqrt{n^n}} = \frac{(n+1)\cdot\sqrt{(n+1)^{n-1}}}{(n+1)\cdot\sqrt{n^n}} = \frac{\sqrt{(n+1)^{n-1}}}{n^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n \to 0$$

Also: Q-Krit. liefert: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ kvg

16/5

f) $a_n = \dfrac{2^n \cdot n!}{n^n}$

$$\Rightarrow b_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)\cdot n!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{2^n \cdot n!}{n^n}$$

$$= \frac{2\cdot 2^n\cdot(n+1)\cdot n!\cdot n^n}{(n+1)\cdot(n+1)^n\cdot 2^n\cdot n!} = \frac{2\cdot n^n}{(n+1)^n}$$

$$= 2\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 2\cdot\left(\frac{n}{n\cdot(1+\frac{1}{n})}\right)^n = 2\cdot\left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n$$

$$= 2\cdot\frac{1}{(1+1/n)^n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{1}{(1+1/n)^n} = 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(1+1/n)^n}$$

da $e \approx 2{,}71\ldots$

$$= 2\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n} = 2\cdot\frac{1}{e} < 1$$

Also: Q-Krit. liefert: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ kvg.

g) $a_n = \dfrac{3^n\cdot n!}{n^n}$.

$$\Rightarrow b_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \underset{\text{siehe f)}}{\ldots} = 3\cdot\frac{1}{(1+1/n)^n}.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = 3\cdot\frac{1}{e} > 1$$

Also, Q-Krit. liefert: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

h) $a_n = \dfrac{10\cdot 11\cdot\ldots\cdot(10+n)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$

$$\Rightarrow b_n := \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \overbrace{\frac{10\cdot 11\cdot\ldots\cdot(10+n)\cdot(10+n+1)}{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)\cdot(2n+1+2)}}^{=a_{n+1}}\cdot\overbrace{\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{10\cdot 11\cdot\ldots\cdot(10+n)}}^{=(1/a_n)}$$

$$= \frac{10+n+1}{2n+1+2} = \frac{n+11}{2n+3} \Rightarrow \left.\lim_{n\to\infty} b_n \to \frac{1}{2} < 1\right\} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ kvg.}$$

Lös. 16.3 a) konvergent, b) konvergent, c) konvergent, d) konvergent, e) divergent, f) konvergent. } Wurzel-kriterium

a) $a_k = \frac{k}{3^k} \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{\sqrt[k]{k}}{\sqrt[k]{3^k}} = \frac{\sqrt[k]{k}}{3}$

Es gilt: $\sqrt[k]{k} \to 1$ (vgl. Beisp. in Abschn. 3.2)

$$\Rightarrow \underbrace{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k}{3^k}\right)} = 1/3 < 1}_{\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ kvg. nach Wurzelkriterium}}$$

b) $a_k = \frac{1}{k^k} \Rightarrow \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{\sqrt[k]{k^k}} = \frac{1}{k}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{1}{k^k}\right|} = \lim_{k\to\infty} (1/k) = 0 < 1 \Big\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kvg.

c) $a_k = \frac{2^k}{1+2^{2k}} \Rightarrow \sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{1+2^{2k}}\right|} = \frac{\sqrt[k]{2^k}}{\sqrt[k]{1+2^{2k}}}$

$$\underbrace{= \frac{2}{\sqrt[k]{1+2^{2k}}} < \frac{2}{\sqrt[k]{2^{2k}}} = \frac{2}{2^2} = \frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow \frac{1}{2}$ ist Majorante von $b_k := \sqrt[k]{\left|\frac{2^k}{1+2^{2k}}\right|}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} b_k < \frac{1}{2} \Big\} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kvg.

d) $a_k = \frac{k}{(3-\frac{1}{k})^k} \Rightarrow \sqrt[k]{\frac{k}{(3-\frac{1}{k})^k}} = \frac{\sqrt[k]{k}}{(3-1/k)}$

$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt[k]{k}}{(3-1/k)}\right) = \frac{\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k}}{\lim_{k\to\infty}(3-1/k)} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ kvg.

16/7

e) $a_n := n^n \cdot \sin^n\left(\frac{2}{n}\right)$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^n} \cdot \sqrt[n]{\sin^n\left(\frac{2}{n}\right)} = n \cdot \sin\left(\frac{2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left(n \cdot \sin\left(\frac{2}{n}\right)\right) = 2 > 1$$

<u>NR</u>: Grenzwertbest. mittels "Potenzreihen" (→ vgl. Vorl. Kap. 7)

Es gilt (Kap. 7): $\sin\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} - \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^5 - \dots$

$$= \frac{2}{n} - \frac{8}{n^3} + \dots$$

$$\Rightarrow n \cdot \sin\left(\frac{2}{n}\right) = 2 - \frac{8}{n^2} + \dots$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left\{n \cdot \sin\left(\frac{2}{n}\right)\right\} = \lim_{n\to\infty} \left\{2 - \frac{8}{n^2} + \dots\right\} = \underline{\underline{2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \underline{\underline{\text{divergiert}}}$$

f) $a_n := \frac{n^2}{2^n + 3^n}$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{|a^n|} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt[n]{2^n + 3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n \cdot n}}{\sqrt[n]{2^n + 3^n}} = \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}$$

⇝ Suche nach einer Majorante:

$$\sqrt[n]{2^n + 3^n} > \sqrt[n]{2^n + 2^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 2^n} = 2 \cdot \sqrt[n]{2}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n + 3^n}} =: b_n \leq c_n := \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2 \cdot 2^n}}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}}{2 \cdot \sqrt[n]{2}}$$

$$= \frac{\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\right)}{2 \cdot \lim \sqrt[n]{2}}$$

$$= \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 1/2$$

$$\left.\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1/2 \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \underline{\underline{\text{kvg}}}.$$

16.4 Für jede der aufgeführten Reihen gilt:

(a) die Reihe ist alternierend
(→ erkennbar am Faktor $(-1)^\nu$ vor jedem Reihenglied a_ν)

(b) die Glieder bilden (ab einem Index $\bar{k} \in \mathbb{N}$) eine monotone Nullfolge

$\overset{\text{(Leibniz-Krit.)}}{\Longrightarrow}$ Konvergenz der Reihe

Bem. zu den Zusatzfragen:

Zu (i): Das Leibniz-Kriterium liefert

$$\Big|\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k}_{=s} - \underbrace{s_n}_{\overset{!}{=}\sum_{k=0}^{n} a_k}\Big| < |a_{n+1}|$$

$$\Rightarrow \underbrace{\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k - s_{10}\Big|}_{\text{max. Fehler}} < |a_{11}|$$

⤳ Fazit: Betrachte den Wert $|a_{11}|$ als Schranke für den max. Fehler

Zu (ii): Bestimme (z.B. mittels "probieren") das kleinste $n \in \mathbb{N}$, für das gilt:

$$\underbrace{\Big|\sum_{k=0}^{\infty} a_k - s_n\Big| < |a_{n+1}|}_{\text{gemäß Leibniz-Krit.}} \leq \varepsilon := 10^{-2}$$

⤳ Fazit: gesucht ist das kleinste n für das $|a_{n+1}| < \varepsilon$ gilt

Blatt 15: Folgen

Bildungsvorschriften

A 15.0 Wie sind die Begriffe "Konvergenz", "Grenzwert" definiert. Geben Sie Beispiele für Folgen (a_n) mit $a_n \to 2$ und (a_n) div.

A 15.1 Geben Sie die ersten 6 Glieder der nachstehenden Zahlenfolgen (a_n), $n \geq 1$, an, wenn gilt:

a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ b) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ c) $a_n = \frac{(-2)^n + 2^n}{2n}$

d) $a_n = \frac{(-n)^n}{n!}$ e) $a_n = \frac{10^{-\frac{n}{2}} \cdot n!}{n + \min\{n^2, n!\}}$ f) $a_1 = 1,\ a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$ für $n > 1$

g) $a_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{3n+2}{2n-1} & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{n+3}{n^2 - 2n + 2} & \text{für } n \text{ gerade} \end{cases}$

h) $a_1 = 2,\ a_2 = 3,\ a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$ für $n > 2$.

A 15.2 Wie lautet das allgemeine Glied a_n der rekursiv vorgegebenen Zahlenfolgen in unabhängiger Darstellung (jeweils $n \geq 2$) ?

a) $a_1 = 1,\ a_n = 2a_{n-1}$ b) $a_1 = 1,\ a_n = \frac{2a_{n-1}}{n+1}$

c) $a_0 = 3,\ a_1 = 1,\ a_n = a_{n-2}$ d) $a_0 = 2,\ a_1 = \frac{1}{2},\ a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$

e) $a_0 = 3,\ a_1 = \frac{3}{2},\ a_n = \frac{5}{2} a_{n-1} - a_{n-2}$ f) $a_1 = 2,\ a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$

Arithmetische / Geometrische Folge

A 15.3 Wie lauten das allgemeine Glied und die Summe der ersten k Glieder der folgenden arithmetischen bzw. geometrischen Zahlenfolgen ?

a) $a_0 = -1,\ d = 3,\ k = 10$ b) $a_0 = 2,\ d = -2,\ k = 12$

c) $a_0 = 2,\ q = -\frac{1}{2},\ k = 8$ d) $a_0 = -1,\ q = 2,\ k = 6$

Hinweis: $\sum_{k=0}^{n} (a_0 + k \cdot d) = \frac{1}{2} \cdot (n+1) \cdot (2a_0 + n \cdot d)$

$$\sum_{k=0}^{n} (a_0 \cdot q^k) = \begin{cases} a_0 \cdot (n+1), & \text{für } q = 1 \\ a_0 \cdot \frac{(q^{n+1}) - 1}{q - 1}, & \text{für } q \neq 1 \end{cases}$$

Monotonie, Konvergenz, Grenzwert

A 15.4 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Zahlenfolgen $(a_n), n \geq 1$, mit:

a) $a_n = \frac{1}{n}$ b) $a_n = \frac{n^2}{2^5}$ c) $a_n = \frac{(-2)^n}{n}$ d) $a_n = \frac{2n+1}{n}$

e) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ f) $a_n = \frac{n+3}{n+1}$ g) $a_n = \frac{10^n}{n!}$ h) $a_n = \frac{n!}{n^n}$

i) $a_n = \frac{n^2+3}{(n+1)^2}$ j) $a_n = \frac{n^2+6n+8}{n^2+5n+6}$ k) $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n^2}$ l) $a_n = \frac{2^n + (-2)^n}{2^n}$

A 15.5 Welche der Zahlenfolgen der Aufgabe A15.4 sind beschränkt ? Im Falle vorliegender Beschränktheit gebe man jeweils untere und obere Schranken s bzw. S für (a_n) an.

A 15.6 Welche der Zahlenfolgen der Aufgaben A15.4 sind konvergent? Wie lautet ihr Grenzwert ?

A 15.7 Ermitteln Sie den Grenzwert der Zahlenfolge (a_n), $n = 1, 2, \ldots$ für:

a) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{n+2}$ b) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n-4}\right)^{3n}$ c) $a_n = \left(1 + \frac{4}{n+2}\right)^{3n+2}$

Anwendung: Zinsformel

A 15.8 Ein Kapital K_0 werde mit dem Zinssatz $i = 4\%$ p.a. verzinst.

a) Nach wieviel Jahren ist $K_0 = 10\,000$ DM mit Zinseszins auf $K_n = 18\,000$ DM angewachsen ?

b) Nach wieviel Jahren hat sich irgendein Kapital K_0 bei einfacher Verzinsung bzw. mit Zinseszins verdoppelt ?

c) Bei welchem Zinssatz würde sich irgendein Kapital K_0 in 20 Jahren mit Zinseszins vervierfachen ?

Hinweis zu 15.6

⇝ für (g), (h): nur Aussage der Form "Konvergent ja/nein mögl."

⇝ für (l): Mit Techniken aus der Vorlesung allein nicht lösbar!

Lösungen zu Blatt 15

15.1:

a) $0, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{6}, \frac{5}{7}$

b) $0, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{7}{6}$

c) $0, 2, 0, 4, 0, \frac{32}{3}$

d) $-1, 2, -\frac{9}{2}, \frac{32}{3}, -\frac{625}{24}, \frac{324}{5}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{10}}, \frac{1}{20}, \frac{1}{15\sqrt{10}}, \frac{3}{250}, \frac{1}{25\sqrt{10}}, \frac{3}{175}$

f) $1, 1, 2, 4, 8, 16$

g) $-5, \frac{5}{2}, \frac{11}{5}, \frac{7}{10}, -\frac{17}{9}, \frac{9}{26}$

h) $2, 3, 5, 9, 17, 33$

Lös 15.2

a) Bildungsgesetz: $a_n = 2 \cdot a_{n-1}$

$$a_1 = 1 = 1 = 2^0$$
$$a_2 = 2 \cdot a_1 = 2 \cdot 1 = 2 = 2^1$$
$$a_3 = 2 \cdot a_2 = 2 \cdot 2 = 4 = 2^2$$
$$a_4 = 2 \cdot a_3 = 2 \cdot 4 = 8 = 2^3$$
$$\vdots$$

$\Rightarrow$ Vermutung: $\boxed{a_n = 2^{n-1}}$

b) Bildungsgesetz: $a_n = \frac{2 \cdot a_{n-1}}{n+1}$

$$a_1 = 1 = 2/2 = \frac{2}{1 \cdot 2} = \frac{2^1}{2!}$$
$$a_2 = \frac{2 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2^2}{3!}$$
$$a_3 = \frac{2 \cdot (2/3)}{4} = \frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{2^3}{4!}$$
$$a_4 = \frac{2 \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{3 \cdot 4}\right)}{5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{2^4}{5!}$$
$$\vdots$$

$\Rightarrow$ Vermutung: $\boxed{a_n = \frac{2^n}{(n+1)!}}$

c) Bildungsgesetz: $a_n = a_{n-2}$

$$a_0 = 3 \qquad = 1 + 2 \qquad = (-1)^0 + 2$$
$$a_1 = 1 \qquad = -1 + 2 \qquad = (-1)^1 + 2$$
$$a_2 = a_0 = 3 = 1 + 2 = (-1)^2 + 2$$
$$a_3 = a_1 = 1 = -1 + 2 = (-1)^3 + 2$$
$$a_4 = a_2 = 3 = 1 + 2 = (-1)^4 + 2$$
$\vdots$

$\Rightarrow$ Vermutung: $\boxed{a_n = (-1)^n + 2}$

d) $\rightsquigarrow$ vgl. Vorlesung: $\boxed{a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{2^n}}$

e) Bildungsgesetz: $a_n = \frac{5}{2} \cdot a_{n-1} - a_{n-2}$

$$a_0 = 3 \qquad = \frac{3}{1} = \frac{3}{2^0}$$
$$a_1 = 3/2 \qquad = \frac{3}{2} = 3/2^1$$
$$a_2 = \frac{5}{2} \cdot a_1 - a_0 = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} - 3 = \frac{15}{4} - \frac{12}{4} = \frac{3}{4} = 3/2^2$$
$$a_3 = \frac{5}{2} \cdot a_2 - a_1 = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = \frac{15}{8} - \frac{12}{8} = \frac{3}{8} = \frac{3}{2^3}$$
$$a_4 = \frac{5}{2} \cdot a_3 - a_2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{8} - \frac{3}{4} = \frac{15}{16} - \frac{12}{16} = \frac{3}{16} = \frac{3}{2^4}$$
$\vdots$

$\Rightarrow$ Vermutung: $\boxed{a_n = \frac{3}{2^n}}$

f) Bildungsgesetz: $a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$

$$a_1 = 2 \qquad = 2$$
$$a_2 = a_1 \qquad = 2 \qquad = 2$$
$$a_3 = a_1 + a_2 = 2 + 2 = 4 = 2^2$$
$$a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 2 + 2 + 4 = 8 = 2^3$$
$$a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 2 + 4 + 8 = 16 = 2^4$$
$\vdots$

$\Rightarrow$ Vermutung: $\boxed{a_n = 2^{n-1} \text{ für } n \geq 2}$

Lös. 15.3

Vorbemerkung / Hinweis:

Typ der Folge	rekursive Form	explizite Form
arithmetisch	$a_n = a_{n-1} + d$	$a_n = a_0 + n \cdot d$
geometrisch	$a_n = a_{n-1} \cdot q$	$a_n = a_0 \cdot q^n$

a) $\left.\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ d &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = (-1) + n \cdot 3 = 3n - 1$

$$S_{10} := \sum_{k=0}^{9} a_k = \sum_{k=0}^{9} (3k - 1) = 3 \cdot \sum_{k=0}^{9} k - \sum_{k=0}^{9} 1$$

$$= 3 \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot (9) \cdot (9+1)}_{\text{vgl. Summenformel von Gauß!}} - 10 = \underline{\underline{125}}$$

b) $\left.\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ d &= -2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = 2 - n \cdot 2$

$$S_{12} := \sum_{k=0}^{11} a_k = \sum_{k=0}^{11} (2 - 2k) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{11} 1 - 2 \cdot \sum_{k=0}^{11} k$$

$$= 2 \cdot 12 - 2 \cdot \underbrace{\tfrac{1}{2} \cdot (11) \cdot (11+1)}_{\text{vgl. Summenformel von Gauß!}} = \underline{-108}$$

c) $\left.\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ q &= -1/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = 2 \cdot (-1/2)^n$

Summenformel der geom. Reihe

$$S_8 := \sum_{k=0}^{7} a_k = \sum_{k=0}^{7} 2 \cdot (-1/2)^k = 2 \cdot \sum_{k=0}^{7} (-1/2)^k = 2 \cdot \frac{(-\frac{1}{2})^8 - 1}{(-1/2) - 1}$$

d) $\left.\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ q &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_n = -1 \cdot 2^n$

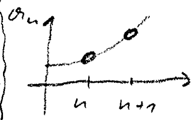
$$S_6 := \sum_{k=0}^{5} a_k = \sum_{k=0}^{5} (-1) \cdot 2^k = -1 \cdot \sum_{k=0}^{5} 2^k = -1 \cdot \frac{2^6 - 1}{2 - 1} = \underline{\underline{-63}}$$

Lös. 15.4

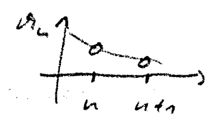
Vorbemerkung / Hinweis:

Def: Die Folge (a_n) heißt

(i) monoton wachsend $:\iff a_{n+1} > a_n$



(ii) monoton fallend $:\iff a_{n+1} < a_n$



Für die praktische Durchführung von Monotonieuntersuchungen ist folgende Überlegung nützlich:

Wenn alle Folgenglieder a_n pos. sind (d.h. $a_n > 0$ für alle n) dann gilt:

$$a_{n+1} > a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \iff (a_n) \text{ monoton wachsend}$$

$$a_{n+1} < a_n \iff \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \iff (a_n) \text{ monoton fallend}$$

Bemerkung: Damit Monotonie im Sinn obiger Def. vorliegt, müssen die Aussagen

(i) $a_{n+1} > a_n$ bzw. wenn $a_n > 0$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

bzw

(ii) $a_{n+1} < a_n$ bzw. wenn $a_n < 0$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

für alle Indizes n gelten, d.h. es darf insb. nicht für einen Teil der Indizes Aussage (i) und für einen anderen Teil Aussage (ii) gelten!

15/5

15.4 a) Da $a_n > 0$, folgt aus $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1} < 1$ für $n \geq 1$, daß (a_n) streng monoton fällt.

b) Wegen $a_n > 0$ und $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{n^2} > 1$ für $n \geq 1$ ist (a_n) streng monoton wachsend.

c) Alternierende Zahlenfolgen sind nicht monoton. Aber: $(|a_n|)$ ist für $n \geq 2$ streng monoton wachsend; denn es ist $|a_n| > 0$ und $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{2^{n+1} \cdot n}{(n+1) \cdot 2^n} = \frac{2n}{n+1} > 1$ für $n > 1$.

d) Wegen $a_n > 0$ und $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2(n+1)+1)n}{(n+1)(2n+1)} = \frac{2n^2+3n}{2n^2+3n+1} < 1$ für $n \geq 1$ ist (a_n) streng monoton fallend.

Eine andere Untersuchungsmöglichkeit:
$a_n = 2 + \frac{1}{n}$. Da die Zahlenfolge $(\frac{1}{n})$ streng monoton fällt, tut dies auch (a_n).

e) $a_n = \frac{n+1-2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}$. Da die Zahlenfolge $(\frac{1}{n+1})$ streng monoton fällt, wächst (a_n) nach H 7.4 streng monoton.

f) $a_n = \frac{n+1+2}{n+1} = 1 + \frac{2}{n+1}$. Da die Zahlenfolge $(\frac{2}{n+1})$ streng monoton fällt, fällt auch die Zahlenfolge (a_n) streng monoton (s. H 7.4).

g) Es ist $a_n > 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{10^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 10^n} = \frac{10}{n+1}$. Dies ist $\begin{cases} \geq 1 & \text{für } n = 1, 2, ..., 9 \\ < 1 & \text{für } n \geq 10. \end{cases}$

$\Rightarrow$ (a_n) ist nicht monoton. Die Glieder von (a_n) wachsen für $n = 1, 2, ..., 9$. Von $n = 10$ an nehmen sie streng monoton ab.

h) Es ist $a_n > 0$ und $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!\, n^n}{(n+1)^{n+1}\, n!} = \frac{(n+1)\, n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n <$ 1 für $n \geq 1 \Rightarrow$ (a_n) ist streng monoton fallend.

i) $a_n = \frac{n^2+3}{n^2+2n+1} = \frac{(n^2+2n+1) - 2n + 2}{n^2+2n+1} = 1 - 2\frac{n-1}{(n+1)^2}$.

Wir untersuchen zunächst die Zahlenfolge $(b_n) = (\frac{n-1}{(n+1)^2})$ auf Monotonie:

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n}{(n+2)^2} - \frac{n-1}{(n+1)^2} = \frac{-n^2+n+4}{(n+2)^2(n+1)^2}.$$

Da das Polynom $-n^2 + n + 4$ nur in $[\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{1+\sqrt{17}}{2}]$ Werte ≥ 0 annimmt, ist $b_{n+1} - b_n < 0$ für $n \geq 3$, d.h. (b_n) fällt ab $n = 3$ streng monoton. Folglich wächst (a_n) für $n \geq 3$ streng monoton (vgl. H 7.4).

j) Da $a_n > 0$ und $a_n = \frac{(n+2)(n+4)}{(n+2)(n+3)} = \frac{n+3+1}{n+3} = 1 + \frac{1}{n+3}$, ist (a_n) streng monoton fallend.

k) Es ist $a_{n+1} - a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} - \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{(-1)^n[(-1)n^2 - (n+1)^2]}{(n+1)^2\, n^2}$

$\begin{cases} > 0 \text{ für } n \text{ ungerade} \\ < 0 \text{ für } n \text{ gerade} \end{cases} \Rightarrow$ (a_n) ist nicht monoton.

l) Es ist $a_{2k} = 2$, $a_{2k+1} = 0$, daher ist (a_n) nicht monoton.

Lös: 15.5

Vorbemerkung:

(a_n) beschränkt $:\Leftrightarrow$ Es gibt Zahlen $s, S \in \mathbb{R}$ mit

$s \leq a_n \leq S$ für alle $n \in \mathbb{N}$

s: untere Schranke
S: obere Schranke

15/6

15.5 a) Offensichtlich ist $a_n > 0$. Da (a_n) streng monoton fällt, ist $a_n < a_1 = 1$ für $n > 1$. Somit ist (a_n) beschränkt, und es gilt $s = 0 < a_n \leq 1 = S$ für $n \geq 1$.

b) Da (a_n) streng monoton wächst, ist $a_n > a_1 = 2^{-5}$ für $n > 1$, also (a_n) nach unten beschränkt durch $s = 2^{-5}$. Für $n > 2^5$ ist $a_n > n$, daher ist (a_n) nach oben nicht beschränkt.

c) Die Zahlenfolge $(|a_n|)$ wächst streng monoton (vgl. L 7.4c) und ist nach oben nicht beschränkt (mit vollst. Induktion kann man zeigen, daß $|a_n| = \dfrac{2^n}{n} > n$ gilt für $n \geq 5$). (a_n) kann als alternierende Zahlenfolge, deren Glieder betragsmäßig über alle Grenzen wachsen, weder nach unten noch nach oben beschränkt sein.

d) (a_n) fällt streng monoton $\Rightarrow$ $a_n < a_1 = 3$ für $n > 1$, d.h., (a_n) ist nach oben beschränkt. Ferner ist $a_n = 2 + \frac{1}{n} > 2$ $\Rightarrow$ (a_n) ist auch nach unten beschränkt, also beschränkt: Für $n \geq 1$ gilt $s = 2 < a_n \leq 3 = S$.

e) (a_n) wächst streng monoton, kann aber nicht ≥ 1 sein. Da ferner $a_n > 0$ für alle $n \geq 1$, ist (a_n) beschränkt: $s = 0 < a_n < 1 = S$ für alle $n \geq 1$.

f) (a_n) fällt monoton $\Rightarrow$ $a_n \leq a_1 = 2$ für alle $n \geq 1$. Ferner ist $a_n = 1 + \dfrac{2}{n+1} > 1 \Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt: $s = 1 < a_n \leq 2 = S$ für alle $n \geq 1$.

g) Da (a_n) bis $n = 9$ streng monoton wächst, danach streng monoton fällt, aber alle $a_n > 0$ sind, ist (a_n) beschränkt: $s = 0 < a_n \leq a_9 = a_{10} = \frac{10^9}{9!} < 2\,756 = S$ für alle $n \geq 1$.

h) (a_n) fällt streng monoton, und es ist $a_n > 0$ für $n \geq 1$. $\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt: $s = 0 < a_n \leq a_1 = 1 = S$ für alle $n \geq 1$.

i) Es ist $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{7}{9}$; für $n \geq 3$ wächst (a_n) streng monoton, und es ist $a_n < 1$ für alle $n \geq 3$ (vgl. L 7.4i). Daher ist (a_n) beschränkt, und es gilt: $s = 0 < a_n \leq 1 = S$ für $n \geq 1$.

j) (a_n) fällt streng monoton, und es ist $a_n = 1 + \frac{1}{n+3} > 1$. Daher ist (a_n) beschränkt, und es gilt $s = 1 < a_n \leq a_1 = \frac{5}{4} = S$ für alle $n \geq 1$.

k) Für $n > 1$ ist $a_1 = 0 \leq a_{2n+1} < 1$ und $0 < a_{2n} \leq a_2 = 1 + \frac{1}{4}$ $\Rightarrow$ (a_n) ist beschränkt: $s = 0 \leq a_n \leq \frac{5}{4} = S$ für alle $n \geq 1$.

l) (a_n) ist beschränkt: $s = 0 \leq a_n \leq 2 = S$ für alle $n \geq 1$.

Lös. 15.6:

<u>Vorbemerkung</u>: In der Vorlesung (vgl. Abschn. 3.2.4) wurden folgende Konvergenzkriterien vorgestellt:

→ "Faustregel": (i) "errate" a

(ii) zeige: $|a_n - a| =: d_n \to 0$

<u>oder</u>: zeige "direkt" mittels Grenzwertdefinition, daß $a_n \to a$ bzw $a_n \to \infty$, d.h. divergent

→ Vergleichskriterium

→ Monotoniekriterium: (i) zeige Monotonie

(ii) zeige $s \leq a_n \leq S$

15.6 a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. ($(a_n)$ ist eine Nullfolge.)

b) (a_n) ist bestimmt divergent: $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

c) Da $|a_n| > n$ für $n \geq 5$ (vgl.L 7.5 c), ist (a_n) divergent; es gilt: $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = +\infty$, $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = -\infty$.

d) (a_n) konvergiert: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(2+\frac{1}{n})}{n} = \lim_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n}) = 2$.

e) (a_n) konvergiert: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = 1$.

f) (a_n) konvergiert: $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(1+\frac{3}{n})}{n(1+\frac{1}{n})} = 1$.

Bem.: "Direkte" Bestimmung der Grenzwerte mittels Grenzwertregeln und -überlegungen.

1517

g) Aus Lös 15.4 g) folgt: a_n monoton fallend für $n \geq 10$

Aus Lös. 15.5 g) folgt: $s < a_n < S$ d.h. a_n beschränkt

$\Rightarrow$ Monotoniekriterium liefert: a_n kvg, d.h. $a_n \to a$

Bestimmung des Grenzwerts mittels:

(i) Auffinden der "größten unteren Schranke" (hier gilt: $s = 0$ ist größte untere Schranke) (ohne Beweis)!

(ii) monoton Fallen & größte untere Schranke $s=0$ $\Rightarrow$ $a = 0$, d.h. $a_n \to 0$

h) Lös. 15.4 h) liefert: (a_n) monoton fallend

Lös. 15.5 h) liefert: (a_n) beschränkt ($0=s<a_n<S$)

$\Rightarrow$ Monotoniekriterium liefert: a_n kvg.

Bestimmung des Grenzwerts:

$\rightsquigarrow$ analog zu g) gilt: $0=s$ ist größte untere Schranke (ohne Beweis!)

$\Rightarrow a_n \to a = 0$

1518

i) (a_n) konvergiert: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(1+\frac{3}{n^2})}{n^2(1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2})} = 1.$

j) (a_n) konvergiert: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2(1+\frac{6}{n}+\frac{8}{n^2})}{n^2(1+\frac{5}{n}+\frac{6}{n^2})} = 1.$

k) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}) = 1 \Rightarrow (a_n)$ konvergiert.

l) <u>Vorbemerkung</u>:

Man kann folgenden Satz beweisen:

<u>Satz</u>: Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert und besitzt denselben Grenzwert.

D.h. Sei (a_n) eine kvg. Folge mit $a_n \to a$ für $n \to \infty$.
Dann muß auch für jede beliebig aus Gliedern von (a_n) gebildete Teilfolge $(b_n), (c_n), (d_n), \ldots$

z.B. $b_n = a_{2n}$, $c_n = a_{2n+1}$, $d_n = a_{3n}, \ldots$

gelten: $b_n \to a$, $c_n \to a$, $d_n \to a, \ldots$

<u>Folgerung</u> ("Korollar"):

Lassen sich für eine Folge (a_n) Teilfolgen $(b_n), (c_n)$ finden mit
$b_n \to b$
$c_n \to c$
und
$b \neq c$ bzw. $b = \infty$ und/oder $c = \infty$
dann kann (a_n) nicht konvergent sein.

Lös l) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = 2$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0 \Rightarrow (a_n)$ divergiert. $((a_n)$ hat die beiden Häufungspunkte 0 und 2).

d.h. Wähle $b_n := a_{2n}$, $c_n := a_{2n+1}$

Somit: $b_n \to b = 2$, $c_n \to c = 0$ #

15.7 a) Setze $n+3=m$. Dann ist (mit $n\to\infty$ gilt auch $m\to\infty$)
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^{m-1} = \lim\limits_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^m \cdot \lim\limits_{m\to\infty}(1+\frac{1}{m})^{-1} = \mathrm{e}\cdot 1 = \mathrm{e}$.

b) Setze $n-4=m$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{3(m+4)} =$

$\left(\lim\limits_{m\to\infty}(1-\frac{1}{m})^m\right)^3 \cdot \lim\limits_{m\to\infty}(1-\frac{1}{m})^{12} = (\mathrm{e}^{-1})^3\cdot 1 = \mathrm{e}^{-3}$.

c) Setze $n+2=m$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{4}{m}\right)^{3(m-2)+2} =$

$\left(\lim\limits_{m\to\infty}(1+\frac{4}{m})^m\right)^3 \cdot \lim\limits_{m\to\infty}(1+\frac{4}{m})^{-4} = (\mathrm{e}^4)^3\cdot 1 = \mathrm{e}^{12}$.

Lös. 15.8 Formeln gemäß Vorlesung (Abschn. 3.1):

"einfache Verzinsung": $\boxed{K_n = K_0\cdot\left(1+n\cdot\frac{i}{100}\right)}$

"Zinseszinz": $\boxed{K_n = K_0\cdot\left(1+\frac{i}{100}\right)^n}$

15.8 a) Man löst die Beziehung $K_n = K_0 q^n$, $q = 1+\frac{p}{100}$, nach n auf und erhält: $n = (\ln q)^{-1}\ln(\frac{K_n}{K_0})$. Für das vorliegende Beispiel ist $n = 14.99$, d.h. nach 15 Jahren würde das Anfangskapital von 10 000 DM auf 18 000 DM angewachsen sein.

b) Verdopplung bei einfacher Verzinsung nach n Jahren:
$2K_0 = K_0(1+\frac{4}{100}\cdot n) \;\Rightarrow\; n = 25$ Jahre .
Verdopplung bei Zinseszins nach n Jahren:
$2K_0 = K_0(1+\frac{4}{100})^n \;\Rightarrow\; n = \frac{\ln 2}{\ln 1.04} = 17.67$ Jahre
d.h., bereits nach 17 Jahren und 8 Monaten hat sich K_0 verdoppelt.
c) Forderung: $4K_0 = K_0(1+\frac{p}{100})^{20} \;\Rightarrow\; \frac{p}{100} = \sqrt[20]{4}-1 = 0.07177$, d.h., jedes beliebige Kapital vervierfacht sich nach 20 Jahren bei einem Zinssatz von etwa 7.2%.

Blatt 14: Matrizengleichungen

14.1 Bestimmen Sie X aus den Matrizengleichungen

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

14.2 Bestimmen Sie die Lösung X der Matrizengleichung $2A^T - 4X = 5B + A$

(a) allgemein

(b) für $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$

14.3 Bestimmen Sie die Lösung X der Matrizengleichung $A + 3(X - A - E) = 2B + X - E$

(a) allgemein

(b) für $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$, $E := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Einheitsmatrix)

14.4 Bestimmen Sie die Lösung X der Matrizengleichung $3X + A = A^T B - X + 3B$

(a) allgemein

(b) für $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

14.5 Bestimmen Sie die Lösung X der Matrizengleichung $2AB^T + X - 2E = 3X + 4B - 2A$

(a) allgemein

(b) für $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

14.6 Bestimmen Sie sämtliche Lösungen X der Matrizengleichung $X^2 + X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

14.7 Gegeben sei die Matrizengleichung $AX + XA^T = E$

(a) Versuchen Sie diese Matrizengleichung nach X aufzulösen.

(b) Lösen Sie diese Matrizengleichung für $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösungen zu Blatt 14

14.1:

a) $\mathbf{X}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-5 & 0\\ 2 & 2\end{pmatrix}$

b) $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 6\\ 1 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 4\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}$

c) $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

d) $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & -1 & -1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}$

14.2:

a) $2A^T - 4X = 5B + A \Leftrightarrow 4X = 2A^T - 5B - A \Leftrightarrow \boxed{X = \frac{1}{4}\cdot(2A^T - 5B - A)}$

b) $\mathbf{X}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}27 & -1\\ -1 & -27\end{pmatrix}$

14.3:

a)
$$
\begin{aligned}
& A + 3\cdot(X - A - E) = 2B + X - E \\
\Leftrightarrow\ & A + 3X - 3A - 3E = 2B + X - E \\
\Leftrightarrow\ & 3X - 2A - 3E = X + 2B - E \\
\Leftrightarrow\ & 2X = 2A + 2B + 2E \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{X = A + B + E}
\end{aligned}
$$

b) $X = \begin{bmatrix}5 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

14.4:

a)
$$
\begin{aligned}
& 3X + A = A^T B - X + 3B \\
\Leftrightarrow\ & 4\cdot X = A^T B + 3B - A \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{X = \frac{1}{4}\cdot(A^T B + 3B - A) = \frac{1}{4}\cdot((A^T + 3E)\cdot B - A)}
\end{aligned}
$$

b) $\mathbf{X}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}11 & -1 & 1\\ 25 & 7 & 19\\ 12 & -7 & 9\end{bmatrix}$

14.5:

a) $2AB^T + X - 2E = 3X + 4B - 2A$

$\Leftrightarrow \quad -2X = 4B - 2A - 2AB^T + 2E$

$\Leftrightarrow \quad X = -2B - E + (A + AB^T)$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{X = -2B - E + A\cdot(E + B^T)}$

b) $\mathbb{R}^{3,3} \ni X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

14.6: $X^2 + X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$

$\leadsto$ Die Matrizengl. ist nur definiert für $X \in \mathbb{R}^{2,2}$.

$\Rightarrow$ Ansatz: $X = \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$

⌈ Bem: Verwendung von a,b,c,d statt $x_{1,1}, \dots, x_{2,2}$
⌊ um die Indexschreibung zu umgehen!

$\leadsto$ Einsetzen des Ansatzes liefert:

⌈ NR1:

$$X^2 = \begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} & \boxed{X^2} \end{array} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & cb + d^2 \end{bmatrix}$$

⌊

$$\begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & cb + d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2 + a + bc & ab + bd + b \\ ac + dc + c & cb + d^2 + d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

14/3

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a^2+a+bc & (a+d+1)\cdot b \\ (a+d+1)\cdot c & d^2+d+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Algebraisches Gleichungssystem:

$$a^2+a+bc = 2 \qquad (1)$$

$$(a+d+1)\cdot b = 0 \qquad (2)$$

$$(a+d+1)\cdot c = 8 \qquad (3)$$

$$d^2+d+bc = 6 \qquad (4)$$

Gl. (2) liefert: $b=0$ oder $(a+d+1)=0$

Gl. (3) liefert: $(a+d+1) \neq 0$, da sonst $(a+d+1)\cdot c = 0 \neq 8$!

Somit muß gelten: $\boxed{b=0}$

$\overset{(b=0)}{\Longrightarrow}$ $b\cdot c = 0 \Rightarrow$ $a^2+a = 2 \qquad (5)$

$d^2+d = 6 \qquad (6)$

NR 2: Löse $a^2+a=2$, d.h. $a^2+a-2=0$

$\overset{(\text{Lösungsformel})}{\Longrightarrow}$ $a_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$

$\Rightarrow \boxed{a_1 = 1}$; $\boxed{a_2 = -2}$

NR 3: Löse $d^2+d=6$, d.h. $d^2+d-6=0$

$\overset{(\text{Lösungsformel})}{\Longrightarrow}$ $d_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+6} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2}$

$\Rightarrow \boxed{d_1 = 2}$; $\boxed{d_2 = -3}$

NR 4: Bestimmen von c aus Gl. (3)

$$(a+d+1)\cdot c = 8 \quad \text{mit} \quad a_1 = 1,\ a_2 = -2$$
$$d_1 = 2,\ d_2 = -3$$

$$\Rightarrow \quad c = \frac{1}{(a+d+1)}\cdot 8$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = \frac{8}{a_1+d_1+1} = \frac{8}{1+2+1} = \frac{8}{4} \Rightarrow \boxed{c_1 = 2}$$

$$c_2 = \frac{8}{a_2+d_1+1} = \frac{8}{-2+2+1} = \frac{8}{1} \Rightarrow \boxed{c_2 = 8}$$

$$c_3 = \frac{8}{a_1+d_2+1} = \frac{8}{1-3+1} = \frac{8}{-1} \Rightarrow \boxed{c_3 = -8}$$

$$c_4 = \frac{8}{a_2+d_2+1} = \frac{8}{-2-3+1} = \frac{8}{-4} \Rightarrow \boxed{c_4 = -2}$$

Fazit: Die Lösungen der Matrizengl.

$$X^2 - X = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & 6 \end{bmatrix}$$

lauten:

$$X_1 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_2 & d_1 \end{bmatrix} \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ c_3 & d_2 \end{bmatrix} \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$X_4 = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ c_4 & d_2 \end{bmatrix} \Rightarrow X_4 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

14.7: $A \cdot X + X \cdot A^T = E$

a) Auflösen der Matrizengl. $A \cdot X + X \cdot A^T = E$ mit elementaren algebraischen Operationen (d.h. Add. / Subtr. und Multiplikation von Matrizen von rechts bzw links) alleine nicht möglich.

→ vgl. Vorlesung Abschn. 2.5 das Beisp. "algebraische Riccati Gleichung"

b) Ansatz: $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

⇝ Einsetzen des Ansatzes liefert:

NR1: $A \cdot X$

$$\begin{array}{cc|cc} & & a & b \\ & & c & d \\ \hline 2 & 0 & & \\ -1 & 1 & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad AX = \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix}$$

NR2: XA^T

$$\begin{array}{cc|cc} & & 2 & -1 \\ & & 0 & 1 \\ \hline a & b & & \\ c & d & & \end{array} \quad \Rightarrow \quad XA^T = \begin{bmatrix} 2a & -a+b \\ 2c & -c+d \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ c-a & d-b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a & b-a \\ 2c & d-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4a & 3b-a \\ 3c-a & 2d-b-c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

→ (lineares) algebraisches Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 4\cdot a &= 1 \quad (1) \\ -a + 3b &= 0 \quad (2) \\ -a + 3c &= 0 \quad (3) \\ -b - c + 2d &= 1 \quad (4) \end{aligned}$$

$\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ $\boxed{a = \frac{1}{4}}$

$\overset{a=\frac{1}{4}\ \&\ (2)}{\Longrightarrow}$ $\boxed{b = \frac{1}{12}}$

$\overset{a=\frac{1}{4}\ \&\ (3)}{\Longrightarrow}$ $\boxed{c = 1/12}$

$\overset{b=\frac{1}{12};\ c=\frac{1}{12}\ \&\ (4)}{\Longrightarrow}$ $\boxed{d = 7/12}$

<u>Fazit:</u> $X = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/12 \\ 1/12 & 7/12 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{12}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}}$

Blatt 13: Parameterabhängige Matrizen

13.1 Bestimmen Sie in Abhängigkeit der Parameter $a,b \in R$ den Rang folgender Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & (1+a) \\ a & a & 1 & 2a \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & a & a & (1-a) \\ 1 & b & b & (1-b) \\ 1 & a & a & (1-a) \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -a & 0 & 1 \\ 0 & (1-a) & 0 \\ 1 & 0 & -a \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{bmatrix}$$

13.2 Berechnen Sie die Werte der folgenden Determinanten

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & a^3 & a^4 & a^5 \end{vmatrix} \qquad \det(B) = \begin{vmatrix} (a+1) & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (a+1) & 1 & 1 \\ 1 & 1 & (b+1) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & (b+1) \end{vmatrix}$$

$$\det(C) = \begin{vmatrix} (a+b)^2 & (a+b)\cdot(a-b) & (a-b)^2 \\ 2(a^2+ab+b^2) & 2a^2+b^2 & 2(a^2+b^2) \\ a^2+b^2 & a^2+2b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

13.3 Berechnen Sie unter Verwendung der Inversenformel die Inverse

$$A = \begin{bmatrix} (-a) & (2b+1) \\ (-b) & (-a-4) \end{bmatrix} \text{ mit } a,b \in R$$

13.4 Für welche Werte $a,b \in R$ sind folgende Matrizen invertierbar ?
Berechnen Sie für diese Werte die Inverse.

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ a & 2 & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lösungen zu Blatt 13

13.1:

$$r(\mathbf{A}) = \begin{cases} 1 & \text{für } a = 1 \\ 3 & \text{für } a \neq 1 \end{cases} \qquad r(\mathcal{B}) = \begin{cases} 1 & \text{für } a = b \\ 2 & \text{für } a \neq b \end{cases} \qquad r(\mathcal{C}) = \begin{cases} 1 & \text{für } a = 1 \\ 2 & \text{für } a = -1 \\ 3 & \text{für } a \neq 1 \wedge a \neq -1 \end{cases}$$

$$r(\mathcal{D}) = \begin{cases} 1 & \text{für } a = b = 1 \\ 2 & \text{für } a \neq 1 \wedge b \neq 1 \wedge (a-1)^2 = (b-1)^2 \\ 3 & \text{in allen anderen Fällen} \end{cases}$$

Bem: "$\wedge$" bedeutet "und"

13.2:

$\det(A) = 0$

$\det(B) = a \cdot b \cdot (a \cdot b + 2a + 2b)$

$\det(C) = 0$

13.3:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a^2 + 4a + 2b^2 + b} \begin{pmatrix} -a-4 & -2b-1 \\ b & -a \end{pmatrix}, \quad a^2 + 4a + 2b^2 + b \neq 0$$

13.4:

Bem: $(A \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar$) \Leftrightarrow (A$ nicht singulär$)$

$\mathbf{A}$ ist nicht singulär für $a \in \mathbf{R} \wedge a \neq 1 \wedge a \neq -2$.

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{(a-1)(a+2)} \begin{pmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & a+1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{B}$ ist nicht singulär für $a,\, b \in \mathbf{R} \wedge a \neq b \wedge b \neq 1$.

$$\mathcal{B}^{-1} = \frac{1}{(1-b)(b-a)} \begin{pmatrix} 1-b^2 & b-a & ab-1 \\ b-1 & 0 & 1-b \\ b-1 & a-b & 1-a \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}$ ist nicht singulär für $a \in \mathbf{R}$.

$$\mathcal{C}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{D}$ ist nicht singulär für $a \in \mathbf{R}$.

$$\mathcal{D}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{a}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{a}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{a}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Blatt 12: Lösbarkeit und Lösung von LGS

12.1 Untersuchen Sie auf Lösbarkeit und geben Sie – falls möglich – die allg. Lösung an:

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 6x_4 + 10x_5 &= 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 6x_5 &= 0 \\ -2x_1 - 4x_2 + 6x_3 + 11x_4 + 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 + x_5 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 12x_5 &= 4 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 8x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 &= 5 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 6 \\ 6x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_5 &= -3 \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 - 2x_5 &= -5 \\ 2x_1 + 4x_3 - 7x_4 - 3x_5 &= -8 \\ x_2 + 8x_3 - 5x_4 + x_5 &= 3 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 &= -5 \\ -6x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 &= 9 \\ -16x_1 - 8x_2 + 8x_3 - 4x_4 + 6x_5 &= 3 \\ -4x_1 + 6x_2 + 2x_3 + 6x_4 + 3x_5 &= 5 \end{aligned}$$

12.2 Für welche Werte $a, b \in R$ sind folgende LGS lösbar ? Geben Sie die Lösung an.

(a)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 &= 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + ax_3 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + x_2 &= b \\ x_2 + ax_3 &= 1 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= a + 1 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= b + 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 &= b + 2 \end{aligned}$$

(e)
$$\begin{aligned} bx_1 - ax_3 &= 1 \\ ax_1 + x_2 + bx_3 &= 1 \\ x_1 - ax_2 &= -1 \\ bx_2 - x_3 &= -1 \end{aligned}$$

(f)
$$\begin{aligned} ax_1 + x_3 &= 0 \\ ax_2 + x_4 &= 1 \\ x_1 + ax_3 &= 0 \\ x_2 + ax_4 &= 1 \end{aligned}$$

Lösungen zu Blatt 12

12.1:

a) $x_1 = -2t_1 - 3t_2$; $x_2 = 3t_1 - t_2$; $x_3 = -\frac{1}{2}t_1 - 2t_2$; $x_4 = t_1$; $x_5 = t_2$; $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$

b) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

c) $x_1 = 8$; $x_2 = 21$; $x_3 = -2$; $x_4 = 1$; $x_5 = 3$

d) Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

12.2:

a) $a \neq 2: x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $a = 2: x_1 = -t,\ x_2 = 0,\ x_3 = t \quad , \quad t \in \mathbf{R}$

b) $a \neq 0: x_1 = x_2 = x_3 = 0$; $a = 0: x_1 = t,\ x_2 = -2t,\ x_3 = t \quad , \quad t \in \mathbf{R}$

c) $a \neq \frac{1}{2}: x_1 = \frac{-3a - b + 3ab + 1}{2a-1},\ x_2 = \frac{3a - ab - 1}{2a-1},\ x_3 = \frac{b-1}{2a-1}$;

$a = \frac{1}{2} \wedge b = 1: x_1 = \frac{1}{2}t,\ x_2 = 1 - \frac{1}{2}t,\ x_3 = t \quad , \quad t \in \mathbf{R}$;

$a = \frac{1}{2} \wedge b \neq 1$: unlösbar

d) $3a = 2b: x_1 = -2t_1 + t_2 - a + 1,\ x_4 = -t_2 + \frac{1}{2}a,\ x_2 = t_1,\ x_3 = t_2 \quad , \quad t_1, t_2 \in \mathbf{R}$

$3a \neq 2b$: unlösbar

Quelle:

[Meitinger / Wirth]

"Repetitorium der Höheren Mathematik", S. 254 f

Durch Einbringen eines Parameters in ein LGS können also *alle drei Fälle* auftreten, die beim Lösen eines LGS möglich sind. Naturgemäß finden sich solche Aufgaben häufig in Klausuren.

12.2 (e)

$$\begin{aligned} bx \qquad\quad - az &= 1\\ ax + y + bz &= 1\\ x - ay \qquad\quad &= -1\\ by - z &= -1 \end{aligned}$$

Für welche Wertepaare $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ hat das LGS keine, genau eine, mehr als eine Lösung? Man gebe ggf. sämtliche Lösungen an!

(f)

$$\begin{aligned} ax + z &= 0\\ ay + w &= 1\\ x + az &= 0\\ y + aw &= 1 \end{aligned}$$

Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ hat das LGS keine, genau eine, mehr als eine Lösung? Man gebe ggf. sämtliche Lösungen an!

(e)

x	y	z		Regie	
b	0	$-a$	1	1	
a	1	b	1		1
$\boxed{1}$	$-a$	0	-1	$-b$	$-a$
0	b	-1	-1		
0	ab	$-a$	$1+b$	1	
0	$1+a^2$	b	$1+a$		1
0	b	$\boxed{-1}$	-1	$-a$	b
0	0	0	$1+a+b$	$\Longrightarrow$ Widerspruch, falls $1+a+b \neq 0$.	
0	$\boxed{1+a^2+b^2}$	0	$1+a-b$		

Notwendig für die Lösbarkeit ist also $1+a+b=0$, d.h. $b=-1-a$.

Die drei markierten Gleichungen ergeben mit $b=-1-a$:

x	y	z	
$\boxed{1}$	$-a$	0	-1
0	$-1-a$	$\boxed{-1}$	-1
[0	$2+2a+2a^2$	0	$2+2a$]
0	$\boxed{1+a+a^2}$	0	$1+a$

Wegen $1+a+a^2 \neq 0$ ist dieses LGS eindeutig lösbar !

$$y = \frac{2+2a}{2+2a+2a^2} = \frac{1+a}{1+a+a^2}$$

$$z = 1-(1+a)y = \frac{-a}{1+a+a^2} \qquad \text{also:} \qquad \vec{x} = \frac{1}{1+a+a^2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1+a \\ -a \end{pmatrix}.$$

$$x = -1+ay = -\frac{1}{1+a+a^2}$$

Ergebnis: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ist } 1+a+b \neq 0 \text{, so ist das LGS \underline{nicht lösbar}.} \\ \text{Ist } 1+a+b = 0 \text{, so ist das LGS \underline{eindeutig lösbar}} \\ \text{mit der oben angegebenen Lösung.} \end{array} \right.$

(f)

x	y	z	w		Regie
a	0	1	0	0	-1
0	a	0	1	1	
$\boxed{1}$	0	a	0	0	a
0	1	0	a	1	
0	0	a^2-1	0	0	
0	a	0	1	1	-1
0	$\boxed{1}$	0	a	1	a
0	0	$\boxed{a^2-1}$	0	0	
0	0	0	$\boxed{a^2-1}$	$a-1$	

<u>1. Fall:</u> $a=-1 \Longrightarrow 0w=-2$, Widerspruch: LGS hat <u>keine Lösung</u>.

<u>2. Fall:</u> $a=1 \Longrightarrow 0w=0 \Longrightarrow w=t$ beliebig
$\Longrightarrow 0z=0 \Longrightarrow z=s$ beliebig
$\Longrightarrow y=1-t$
$\Longrightarrow x=-s$

$\vec{x}=(-s,1-t,s,t)=(0,1,0,0)+s(-1,0,1,0)+t(0,-1,0,1)$ ist <u>zweiparametrige Lösungsschar.</u>

<u>3. Fall:</u> $a \neq \pm 1 \Longrightarrow (a^2-1)w = a-1 \Longrightarrow w=\frac{1}{a+1}$
$\Longrightarrow (a^2-1)z=0 \Longrightarrow z=0$
$\Longrightarrow y=1-\frac{a}{a+1}=\frac{1}{a+1}$
$\Longrightarrow x=0$

$\vec{x}=\frac{1}{a+1}(0,1,0,1)$ ist <u>eindeutig bestimmte Lösung.</u>

12/2

Blatt 11: Determinanten und deren Anwendung

11.1 Berechnen Sie folgende Determinanten:

(a) $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -5 & -10 & 1 \\ -15 & -14 & -2 \\ 15 & 30 & 6 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$

11.2 Berechnen Sie mittels *Inversenformel* (Vorlesung, Abschn. 2.3.6) die Inverse folgender Matrizen (und machen Sie bitte die Probe mittels $A \cdot A^{-1} = E$ usw.):

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 10 & 1 & 2 \\ -1 & 8 & 5 \end{bmatrix}$ $G = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 10 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ $H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

11.3 Lösen Sie folgende LGS unter Verwendung der *Cramerschen Regel*

(a) $\begin{aligned} 17x_1 + 12x_2 &= 8 \\ -6x_1 - 7x_2 &= 11 \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} 113x_1 - 89x_2 &= -352 \\ 29x_1 - 8x_2 &= 251 \end{aligned}$

(c) $\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 8 \\ 4x_1 - x_2 - 3x_3 &= 3 \end{aligned}$ (d) $\begin{aligned} 22x_1 - 11x_2 + 7x_3 &= 4 \\ 17x_1 + 4x_2 + 19x_3 &= 2 \\ 36x_1 - 20x_2 + 11x_3 &= 5 \end{aligned}$

Lösung zu Blatt 11

11.1:

a) $$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 7 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 5 \cdot (\underbrace{1 \cdot 2 - 2 \cdot 3}_{-4}) - 7 \cdot (\underbrace{6 \cdot 2 - 7 \cdot 3}_{-9}) + 4 \cdot (\underbrace{6 \cdot 2 - 7 \cdot 1}_{5})$$

$$= -20 + 63 + 20$$

$$= \underline{\underline{63}}$$

b) $$\begin{vmatrix} -5 & -10 & 1 \\ -15 & -14 & -2 \\ 15 & 30 & 6 \end{vmatrix} = \ldots = -720$$

c) $$\begin{vmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 3 & 6 & 9 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \ldots = -108$$

d) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \ldots = 5$$

e) $$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \ldots = -36$$

11.2:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \frac{1}{23} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{488} \cdot \begin{bmatrix} -11 & 52 & -1 \\ -52 & 24 & 84 \\ 81 & -28 & -37 \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} = \frac{1}{200} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & 19 \\ 27 & -8 & -13 \\ 17 & 32 & -23 \end{bmatrix} \qquad H^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

11.3:

a) $x_1 = 4$

$x_2 = -5$

b) $x_1 = 15$

$x_2 = 23$

c) $x_1 = 5$

$x_2 = 5$

$x_3 = 4$

d) $x_1 = 1$

$x_2 = 1$

$x_3 = -1$

Blatt 10: Matrizenrechnung, Matrixdarstellung LGS, Rang, Inverse Matrix

10.1 $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\4&0&3\\5&1&-4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&3&2\\5&1&0\\-3&2&4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}4&2\\0&-1\\5&-3\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}-2&3&1\\3&4&5\\1&5&7\end{bmatrix}$

Berechnen Sie:

a) $A+B$, $A-B$

b) $A\cdot C$, $B\cdot C$, $(A+B)\cdot C$

(Bem.: Vergleichen Sie die Erg. von $(A+B)\cdot C$ und $(A\cdot C+B\cdot C)$

c) $(A\cdot B)\cdot C$, $A\cdot(B\cdot C)$ (vergleichen Sie bitte die beiden Ergebnisse)

d) A^T, B^T, C^T, D^T. Ist eine der Matrizen symmetrisch ?

e) $(A\cdot B)^T$, $B^T\cdot A^T$ (vergleichen Sie bitte die beiden Ergebnisse)

10.2 Sei $A=\begin{bmatrix}0&a&b\\0&0&c\\0&0&0\end{bmatrix}$ mit $a,b,c\in R$. Berechnen Sie $A^n := \underbrace{A\cdot\ldots\cdot A}_{n-mal}$ für alle $n\in N$.

(Bem.: Wenn es ein $m\in N$ mit $A^m=0$ gibt, dann heißt die Matrix A *nilpotent*)

10.3 Stellen Sie folgende lineare Gleichungssysteme in Matrixform $A\cdot x=b$ dar

(a) $\begin{aligned}2x_1+x_2+x_3&=1\\4x_1+x_2+2x_3&=0\end{aligned}$

(b) $\begin{aligned}2x_1+4x_2+6x_3&=12\\x_1+3x_2+7x_3&=16\\3x_1+3x_2-2x_3&=-9\end{aligned}$

(c) $\begin{aligned}-x_1+8x_2+3x_3&=2\\2x_1+4x_2-x_3&=1\\-3x_1+9x_2+5x_3&=1\\2x_1+x_3&=-1\end{aligned}$

10.4 $A=\begin{bmatrix}1&2&-1\\4&0&3\\5&1&-4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&-3&2&4&1\\-2&1&7&3&-4\\4&-3&0&-2&0\\2&6&8&7&-2\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2&-1&3\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix}$, $c=\begin{bmatrix}3\\-1\\4\\2\end{bmatrix}$

Stellen Sie folgende LGS in Komponentenform dar:

(a) $A\cdot x=b$, $B\cdot x=c$, $C\cdot x=0$ (wobei $x\in R^{3,1}$ bzw. $x\in R^{5,1}$)

(b) Ist die Gleichung $A\cdot x=c$ bzw. $B\cdot x=b$ definiert ?

10.5 Bringen Sie folgende Matrizen in *Zeilen-Stufen-Form* und bestimmen Sie deren *Rang*:

$A=\begin{bmatrix}0&2&-4&5\\6&12&5&-5\\-4&-4&-4&6\\2&4&1&-1\\2&2&3&-4\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}3&4&1&4&5&7\\1&1&3&0&4&2\\0&2&1&0&3&2\\0&0&4&0&4&0\\1&3&4&0&7&4\end{bmatrix}$ $C=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\2&2&3&4&5\\3&3&3&4&5\\4&4&4&4&5\\5&5&5&5&5\end{bmatrix}$

10.6 Bestimmen Sie die *Inversen* der folgenden Matrizen (mittles LGS, vgl. Abschn. 2.2.7):

(a) $A=\begin{bmatrix}-4&-3\\5&4\end{bmatrix}$ (b) $B=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&2\\3&2&4\end{bmatrix}$

10.7 Zeigen Sie, daß die Matrix $A=\begin{bmatrix}1&0&-2\\2&2&4\\0&0&2\end{bmatrix}$ die *Matrizengleichung* $A^2-3A+2E=0$

erfüllt, und folgern Sie daraus, daß A die Inverse $A^{-1}=\frac{1}{2}(3E-A)$ besitzt.

A 10.5:

rang (A) = 3

rang (B) = 4

rang (C) = 5

A 10.6: Lösungsweg vgl. Vorl. Abschn. 2.2.7

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

A 10.7:

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6 \\ 6 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{E} = \mathbf{0} \Rightarrow \frac{3}{2}\mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{A}^2 = \mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\left(\frac{1}{2}(3\mathbf{E} - \mathbf{A})\right) = \mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}(3\mathbf{E} - \mathbf{A})$$

Blatt 9: Eliminationsverfahren zur Umformung / Lösung linearer Gleichungssysteme

Bringen Sie folgende lineare Gleichungssysteme mittels Eliminationsverfahren in eine Stufenform und geben Sie (falls möglich !) die Lösung an.
Falls Sie keine Lösung angeben können, wo liegt das Problem, z.B.

- Gibt es mehrere Lösungen ?
- Kann es keine Lösung geben weil sich einzelne Gleichungen widersprechen ?

9.1
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 &= 13 \end{aligned}$$

9.2
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 8 \end{aligned}$$

9.3
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

9.4
$$\begin{aligned} -x_1 + 8x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 &= 1 \\ 5x_2 + x_3 &= 0 \\ -3x_1 + 9x_2 + 5x_3 &= 1 \end{aligned}$$

9.5
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 12 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 16 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= -9 \end{aligned}$$

9.6
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 12 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 16 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= -9 \end{aligned}$$

9.7
$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 12 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 16 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 &= -12 \end{aligned}$$

Geben Sie die Lösung folgender linearer Gleichungssysteme an

9.8
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ 0 \cdot x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 &= 8 \end{aligned}$$

9.9
$$\begin{aligned} x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= -4 \\ 4x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 &= 4 \end{aligned}$$

4.1: Erläuterung des Eliminationsverfahrens. In dem folgenden Gleichungssystem sind die unbekannten Größen x_1, x_2 und x_3 zu bestimmen.

$$\begin{array}{ll} (1) & x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ (2) & 2x_1 + 3x_2 + x_3 = -1 \\ (3) & 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 13 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Man eliminiert zunächst x_1 aus den Gl. (2) und (3), indem man Gl. (1) mit dem Faktor 2 multipliziert und von Gl. (2) subtrahiert und anschließend Gl. (1) mit 3 multipliziert und von Gl. (3) subtrahiert.

$$\begin{array}{ll} (2') = (2) - 2 \cdot (1) & x_2 - x_3 = -5 \\ (3') = (3) - 3 \cdot (1) & -2x_2 + x_3 = 7 \end{array}$$

Im nächsten Schritt eliminiert man x_2 aus Gl. (3′), indem man Gl. (2′) mit 2 multipliziert und zu Gl. (3′) addiert.

$$(3'') \qquad -x_3 = -3$$

Aus Gl. (3″) erhält man $x_3 = 3$, dann aus Gl. (2′) $x_2 = -2$ und schließlich aus Gl. (1) $x_1 = 1$.
Das zur Auflösung benutzte Gleichungssystem (3″), (2′) und (1) lautet

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 - x_3 &= -5 \\ -x_3 &= -3 \end{aligned}$$

In allgemeiner Formulierung gilt folgende Eliminationsvorschrift: Man multipliziert Gl. (1) des Gleichungssystems mit a_{21}/a_{11} und subtrahiert diese neue Gleichung von Gl. (2). Dann hebt sich das erste Glied heraus, und es bleibt die Gleichung

$$\left(a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{12}\right) x_2 + \left(a_{23} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{13}\right) x_3 + \ldots + \left(a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}} a_{1n}\right) x_n = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} b_1 \qquad (4.65)$$

mit den $n-1$ Unbekannten $x_2, x_3, \ldots, x_n$ übrig. Multipliziert man Gl. (1) des Gleichungssystems nacheinander mit a_{i1}/a_{11} ($i = 2, 3, \ldots, n$) und subtrahiert diese jeweils von der i-ten Gleichung, so bleibt ein System von $(n-1)$ Gleichungen mit $(n-1)$ Unbekannten übrig. Dieses neue System wird nach dem gleichen Verfahren auf ein System von $(n-2)$ Gleichungen mit den $(n-2)$ Unbekannten x_3 bis x_n reduziert. So fährt man fort, bis nur noch eine Gleichung für die Unbekannte x_n übrigbleibt, aus der x_n berechnet wird. Schreibt man aus jedem dieser Systeme eine Gleichung, z. B. jeweils die erste heraus, so entsteht ein gestaffeltes Gleichungssystem mit einer oberen Dreieckmatrix als Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \ldots u_{1,n-1} & u_{1n} \\ 0 & u_{22} \ldots u_{2,n-1} & u_{2n} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \quad \ldots 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$$

aus der die Unbekannten schrittweise von unten nach oben berechnet werden können.
Die Berechnung der x_i aus der Dreiecksmatrix $\boldsymbol{U}$ setzt allerdings voraus, daß diese in der Hauptdiagonale nur von Null verschiedene Elemente $u_{kk} \neq 0$ für $k = 1, 2, \ldots, n$ enthält, weil beim Rückeinsetzen bei jedem Schritt durch ein Hauptdiagonalelement dividiert werden muß.
Aus der n-ten Zeile ergibt sich

$$x_n = \frac{d_n}{u_{nn}}$$

Mit diesem Wert x_n berechnet man aus der vorletzten Zeile

$$x_{n-1} = \frac{d_{n-1} - u_{n-1,n}\, x_n}{u_{n-1,n-1}}$$

und so weiter, jeweils mit dem Hauptdiagonalelement im Nenner.

In [Sc 88] wird bewiesen, daß für eine reguläre Matrix A durch Umordnung der Zeilen immer erreicht werden kann, daß in jeder Zeile von $\boldsymbol{U}$ ein von Null verschiedenes Hauptdiagonalelement entsteht. Bei vielen technischen Problemen steht in der Hauptdiagonalen von A in jeder Zeile das Element mit dem größten Betrag. Ist dies nicht der Fall, empfiehlt es sich, insbesondere bei dem in Abschn. 4.4.2 beschriebenen Verfahren, vor Beginn der Rechnung die Zeilen und ggf. Spalten von A so zu vertauschen, daß diese Voraussetzung erfüllt ist. Dies dient außerdem zur Verkleinerung der Rundungsfehler.

[Sc 88] Schwarz, H. R.: Numerische Mathematik, 3. Aufl. Stuttgart 1993

4.2 *Man löse das LGS*

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ x - y - z &= 1 \\ 3x + 3y + z &= 8 \end{aligned}$$

x	y	z		Regie	
1	2	$\boxed{1}$	3	1	−1
1	−1	−1	1	1	
3	3	1	8		1
2	$\boxed{1}$	0	4	−1	
2	1	0	5	1	
0	0	0	1		

Die letzte Gleichung ausgeschrieben:
$0x + 0y + 0z = 1$ Widerspruch!

Das LGS hat keine Lösung!

Neben eindeutig lösbaren und unlösbaren LGSen gibt es auch solche, die mehrere Lösungen haben:

4.3 *Man löse das LGS*

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ 4x + y + 2z &= 0 \\ 2x + z &= -1 \end{aligned}$$

x	y	z		
2	$\boxed{1}$	1	1	1
4	1	2	0	−1
2	0	1	−1	
−2	0	−1	1	1
2	0	$\boxed{1}$	−1	1
0	0	0	0	

Das LGS wird durch die markierten Gleichungen ersetzt:

$$\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ 2x + z &= -1 \end{aligned}$$

Aus der letzten markierten Gleichung wollten wir z ausrechnen. z ist jedoch nicht eindeutig bestimmt, sondern hängt von x ab.
Setzt man $x = t$ ($t \in \mathbb{R}$ beliebig, heißt *Parameter*), so wird $z = -1 - 2t$.
Setzt man nun x und z in die erste Gleichung ein, so erhält man:
$y = 1 - 2x - z = 1 - 2t - (-1 - 2t) = 2$. Also

$x = t$
$y = 2$
$z = -1 - 2t$

in vektorieller Schreibweise: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

4.4 *Man löse das LGS aus Beispiel* **11.1**

x_1	x_2	x_3		Regie[1]		
$\boxed{-1}$	8	3	2	2	0	3
2	4	−1	1	1		
0	5	1	0		1	
−3	9	5	1			−1
0	20	5	5	1		
0	5	$\boxed{1}$	0	−5		4
0	15	4	5			−1
0	−5	0	5	1		
0	$\boxed{5}$	0	−5	1		
0	0	0	0			

Man wählt die erste Spalte und markiert $\boxed{-1}$. Aus dieser markierten Gleichung wird später x_1 berechnet! Mittels der −1 erzeugt man Nullen in der ersten Spalte, d.h. man eliminiert x_1 aus den drei restlichen Gleichungen. Das alte LGS ist nun ersetzt durch die markierte Gleichung und die drei neuen Gleichungen:

Wieder markiert man ein Element $\boxed{1}$, mit dem man in der betreffenden Spalte Nullen erzeugt.

Nun noch $\boxed{5}$ markieren, und noch eine Null durch Addition der beiden Gleichungen erzeugen.

Diese Gleichung ist für alle (x_1, x_2, x_3) erfüllt und wird weggelassen.

Das ursprüngliche LGS ist nun ersetzt durch die drei markierten Gleichungen, ausgeschrieben:

$$\begin{aligned} -x_1+8x_2+3x_3 &= 2 \\ 5x_2+x_3 &= 0 \\ 5x_2 &= -5 \end{aligned}$$

Man kann nun noch eine Spaltenvertauschung vornehmen und erhält ein LGS mit gleicher Lösungsmenge wie das alte LGS, das jedoch einfacher zu lösen ist:

$$\begin{aligned} -x_1+3x_3+8x_2 &= 2 &\Longrightarrow\quad & x_1 = -2 + 3x_3 + 8x_2 = \underline{5} \\ x_3+5x_2 &= 0 &\Longrightarrow\quad & x_3 = -5x_2 = \underline{5} \\ 5x_2 &= -5 &\Longrightarrow\quad & x_2 = \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$

"Rückwärtseinsetzen"

In Matrizenschreibweise:

$$A\vec{x} = \vec{b} \iff \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ -3 & 9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Dieses LGS hat die eindeutig bestimmte Lösung $\underline{\underline{\vec{x} = (5, -1, 5)}}$. [2]

Da die elementaren Umformungen den Rang einer Matrix nicht ändern, gilt:

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{rg}(A, \vec{b}) = \underline{\underline{3}}$$

Blatt 8a: komplexe Zahlen

Arithmetik; Zerlegung Re(z), Im(z)

Aufg. 1: Man schreibe die folgenden Zahlen in der Standarddarstellung auf und gebe jeweils den Real- und Imaginärteil an:
(a) $(2+j)-(3+3j)$, (b) $j(j+2)$, (c) $(1-j)(1+2j)$, (d) $(2-3j)(2+3j)$

Aufg. 2: Man schreibe folgende Zahlen in der Standarddarstellung:

(a) $\frac{1}{2+3j}$, (b) $\frac{1}{2-3j}$, (c) $\frac{1-j}{1+j}$, (d) $\frac{1}{j}$.

Aufg. 3: Man schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Standarddarstellung:

(a) z_1+z_2, (b) $2z_1-3z_2$, (c) z_1z_2
mit $z_1=-1+2j$ und $z_2=2-3j$.

Aufg. 4: Zerlege in Real- und Imaginärteil: $\frac{3(1-j)^2}{2(3-j)(2+j)}$.

Aufg. 5: Gegeben sind zwei komplexe Zahlen $z_1=1-3j$ und $z_2=3-2j$. Man berechne
(a) $|z_1+z_2|$, (b) $|z_1|+|z_2|$, (c) $|z_1z_2|$, (d) $|z_1||z_2|$, (e) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|$, (f) $\frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Darstellungsformen: $x+jy \Leftrightarrow r\cdot(\cos\varphi+j\sin\varphi) \Leftrightarrow r e^{j\varphi}$

Aufg. 6: Man berechne den Betrag und den Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen: (a) $z_1=2j$, (b) $z_2=-1-j$, (c) $z_3=-2$, (d) $z_4=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j\sqrt{3}$.

Aufg. 7: Man schreibe die folgenden Zahlen in der Standarddarstellung auf: (a) $2e^{\frac{1}{2}\pi j}$, (b) $3e^{-\pi j}$, (c) $e^{3\pi j}$, (d) $2e^{-\frac{1}{2}\pi j}$, (e) $3e^{\frac{1}{4}\pi j}$.

Aufg. 8: Man schreibe die folgenden komplexen Zahlen unter Verwendung des Hauptwerts des Arguments in der Exponentialschreibweise auf:
(a) j, (b) $-5j$, (c) -3, (d) $4-4j$, (e) $3-4j$.

Potenzen kompl. Zahlen

Aufg. 9: Man berechne $(-1+j)^{-8}$, indem man $-1+j$ als $re^{j\theta}$ schreibt.

Aufg. 10: *Für* $w=\frac{3+i}{3}$ *skizziere man* w^k *für* $k=-2,\dots,23$:

Aufg. 11: *Man berechne und skizziere* $z_k=(1+i)^k$ *für* $k=1,\dots,8$:

Kompl. Wurzeln

Aufg. 12: *Man berechne und skizziere:* (a) *die 3-ten Einheitswurzeln*
(b) *die 3-ten Wurzeln aus* -1.

Hinweis zu:
(a) Die 3-ten Einheitswurzeln sind die Nullstellen des Polynoms z^3-1, also die Lösungen der Gleichung $z^3-1=0$, d.h. $z^3=1$:
(b) Löse $z^3+1=0$

Aufg. 13: Man bestimme sämtliche Wurzeln der Gleichung $z^5=4-4j$.

Aufg. 14: *Man bestimme alle Lösungen von* $z^3=i$:

Gleichungen kompl. Zahlen

Aufg. 15: *Für welche* z *gilt* $\frac{z-1}{2}=\frac{1+2i}{z+1}$?

Aufg. 16: *Man berechne* $z=\frac{3i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$:

Darstellung von Bereichen in $\mathbb{R}^2$

Aufg. 17: *Man berechne und skizziere folgende Punktmengen in der Ebene:*
(a) $K=\{z \mid \mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)\geq 2\}$ (b) $E=\{z \mid |z+i|+|z-i|=4\}$

Lösungen für Blatt 8a

8a/1

Arithmetik; Zerlegung Re(z), Im(z):

Aufg. 1: Man schreibe die folgenden Zahlen in der Standarddarstellung auf und gebe jeweils den Real- und Imaginärteil an:
(a) $(2+j)-(3+3j)$, (b) $j(j+2)$, (c) $(1-j)(1+2j)$, (d) $(2-3j)(2+3j)$

(a) $(2+j)-(3+3j) = 2+j-3-3j = -1-2j$
Realteil $= -1$, Imaginärteil $= -2$,

(b) $j(j+2) = j^2+2j = -1+2j$
Realteil $= -1$, Imaginärteil $= 2$,

(c) $(1-j)(1+2j) = 1+2j-j-2j^2 = 1+2j-j+2 = 3+j$
Realteil $= 3$, Imaginärteil $= 1$,

(d) $(2-3j)(2+3j) = 2^2-(3j)^2 = 4-9j^2 = 4+9 = 13$
Realteil $= 13$, Imaginärteil $= 0$.

Aufg. 2: Man schreibe folgende Zahlen in der Standarddarstellung:

(a) $\dfrac{1}{2+3j}$, (b) $\dfrac{1}{2-3j}$, (c) $\dfrac{1-j}{1+j}$, (d) $\dfrac{1}{j}$.

(a) $\dfrac{1}{2+3j} = \dfrac{1}{2+3j}\,\dfrac{2-3j}{2-3j} = \dfrac{2-3j}{2^2+3^2} = \dfrac{2}{13} - \dfrac{3}{13}j$

(b) $\dfrac{1}{2-3j} = \dfrac{1}{2-3j}\,\dfrac{2+3j}{2+3j} = \dfrac{2+3j}{2^2+3^2} = \dfrac{2}{13} + \dfrac{3}{13}j$

(c) $\dfrac{1-j}{1+j} = \dfrac{1-j}{1+j}\,\dfrac{1-j}{1-j} = \dfrac{1-2j+j^2}{1^2+1^2} = -j$,

(d) $\dfrac{1}{j} = \dfrac{1}{j}\,\dfrac{-j}{-j} = -j$.

Aufg. 3: Man schreibe die folgenden komplexen Zahlen in der Standarddarstellung:

(a) z_1+z_2, (b) $2z_1-3z_2$, (c) z_1z_2, (d) z_1^2/z_2
mit $z_1 = -1+2j$ und $z_2 = 2-3j$.

(a) $z_1+z_2 = (-1+2j)+(2-3j) = 1-j$,
(b) $2z_1-3z_2 = 2(-1+2j)-3(2-3j) = -2+4j-6+9j = -8+13j$,
(c) $z_1z_2 = (-1+2j)(2-3j) = -2+4j+3j-6j^2 = -2+4j+3j+6 = 4+7j$.

Aufg. 4 Zerlege in Real- und Imaginärteil: $\dfrac{3(1-j)^2}{2(3-j)(2+j)}$.

$$z = \frac{3(1-j)^2}{2(3-j)(2+j)} = \frac{3}{2}\,\frac{1-2j-1}{(9+1)(4+1)}(3+j)(2-j)$$
$$= -\frac{6j}{100}(7-j) = -\frac{3}{50} - \frac{21}{50}j.$$

A. 5: Gegeben sind zwei komplexe Zahlen $z_1 = 1-3j$ und $z_2 = 3-2j$. Man berechne

(a) $|z_1+z_2|$, (b) $|z_1|+|z_2|$, (c) $|z_1z_2|$, (d) $|z_1||z_2|$, (e) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$, (f) $\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

(a) $z_1+z_2 = (1-3j)+(3-2j) = 4-5j$ (hier *muß* man zunächst in die Standarddarstellung umrechnen). Damit ist

$$|z_1+z_2| = |4-5j| = [4^2+(-5)^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{41}.$$

(b) $|z_1|+|z_2| = [1^2+(-3)^2]^{\frac{1}{2}} + [3^2+(-2)^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}+\sqrt{13}$.

(c) $|z_1z_2| = |(1-3j)(3-2j)| = |-3-11j| = [(-3)^2+(-11)^2]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{130}$.

(d) $|z_1||z_2| = |(1-3j)(3-2j)| = \sqrt{10}\sqrt{13} = \sqrt{130}$ (vergleiche (c)!).

Sei 12

(e) Wegen $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1-3j}{3-2j}\,\frac{3+2j}{3+2j} = \frac{1}{13}(9-7j)$ ist

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{1}{13}|9-7j| = \frac{1}{13}(\sqrt{130}) = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}.$$

(f) $\frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{|1-3j|}{|3-2j|} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{13}}$ (vergleiche (e)!).

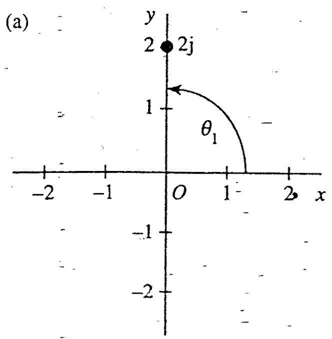
Darstellungsformen: $x + jy \leftrightarrow r\cdot(\cos\varphi + j\sin\varphi) = r e^{j\varphi}$

A . 6: Man berechne den Betrag und den Hauptwert des Arguments folgender komplexer Zahlen: (a) $z_1 = 2j$, (b) $z_2 = -1-j$, (c) $z_3 = -2$, (d) $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{3}$.

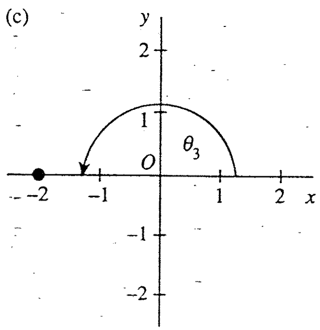
Die Beträge sind
(a) $|z_1| = |2j| = 2$, (b) $|z_2| = |-1-j| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,
(c) $|z_3| = |-2| = 2$, (d) $|z_4| = |\frac{1}{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{3}| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$.
Um das Argument zu bestimmen, ist eine Skizze in der komplexen Zahlenebene von Nutzen (Abbildung 6.4). Es ist
(a) $\operatorname{Arg} z_1 = \theta_1 = \frac{1}{2}\pi$, (b) $\operatorname{Arg} z_2 = \theta_2 = -\frac{3}{4}\pi$, (bzw $\varphi = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5}{4}\pi$)
(c) $\operatorname{Arg} z_3 = \theta_3 = \pi$, (d) $\operatorname{Arg} z_4 = \theta_4 = \frac{1}{3}\pi$.

Skizzen:

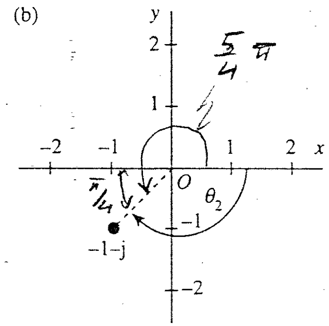
(a)



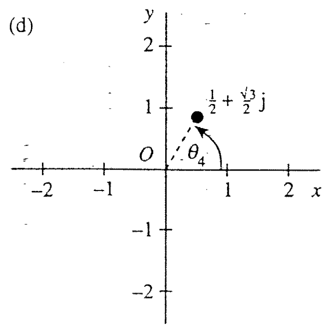
(c)



(b)



(d)



A . 7: Man schreibe die folgenden Zahlen in der Standarddarstellung auf: (a) $2e^{\frac{1}{2}\pi j}$, (b) $3e^{-\pi j}$, (c) $e^{3\pi j}$, (d) $2e^{-\frac{1}{2}\pi j}$, (e) $3e^{\frac{1}{4}\pi j}$.

Zunächst erinnern wir uns, daß r und θ in dem Ausdruck $re^{j\theta}$ Polarkoordinaten sind. In den hier vorliegenden einfachen Fällen braucht man also nur die Punkte in die komplexe Zahlenebene einzuzeichnen und die Koordinaten abzulesen, ohne erst $\cos\theta$ und $\sin\theta$ auszurechnen.

(a) $r = 2, \theta = \frac{1}{2}\pi$ (90°). Damit ist $2e^{\frac{1}{2}\pi j} = 2j$.
(b) $r = 3, \theta = -\pi$ (−180°). Damit ist $3e^{-j\pi} = -3$.
(c) $r = 1, \theta = 3\pi$. Damit ist $e^{3\pi j} = -1$.
(d) $r = 2, \theta = -\frac{1}{2}\pi$ (−90°). Damit ist $2e^{-\frac{1}{2}\pi j} = -2j$.
(e) $r = 3, \theta = \frac{1}{4}\pi$ (45°). Damit ist $3e^{\frac{1}{4}\pi j} = \frac{3}{2}\sqrt{2} + j\frac{3}{2}\sqrt{2}$.

A . 8: Man schreibe die folgenden komplexen Zahlen unter Verwendung des Hauptwerts des Arguments in der Exponentialschreibweise auf:
(a) j, (b) −5j, (c) −3, (d) 4 − 4j, (e) 3 − 4j.

Den Realteil der gegebenen komplexen Zahl setzt man jeweils gleich $r\cos\theta$ und den Imaginärteil gleich $r\sin\theta$. Das Argument θ ergibt sich aus einer Skizze in der komplexen Zahlenebene.

(a) $r\cos\theta = 0$, $r\sin\theta = 1$. Damit ist $r = 1$, und im Intervall $-\pi < \theta \le \pi$ erhält man $\theta = \frac{1}{2}\pi$. Die Exponentialdarstellung lautet also

$$j = e^{\frac{1}{2}j\pi}.$$

(b) $r\cos\theta = 0$, $r\sin\theta = -5$. Damit ist $r = 5$ und $\theta = -\frac{1}{2}\pi$. Die Exponentialdarstellung lautet

$$-5\mathrm{j} = 5\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\mathrm{j}\pi}.$$

(c) $r\cos\theta = -3$, $r\sin\theta = 0$. Damit ist $r = 3$ und $\theta = \pi$. Die Exponentialdarstellung lautet

$$-3 = 3\mathrm{e}^{\mathrm{j}\pi}.$$

(d) Es ist $r\cos\theta = 4$, $r\sin\theta = -4$ und damit $r = \sqrt{16+16} = 4\sqrt{2}$ sowie $\theta = -\frac{1}{4}\pi$ und schließlich

$$4 - 4\mathrm{j} = 4\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\mathrm{j}\pi}.$$

Potenzen kompl. Zahlen

A . 9: Man berechne $(-1+\mathrm{j})^{-8}$, indem man $-1+j$ als $r\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}$ schreibt.

Zunächst ist $r = |-1+j| = \sqrt{2}$. In der komplexen Zahlenebene sieht man, daß $\theta = 3\cdot 45°$, d.h. im Bogenmaß $\frac{3}{4}\pi$ ist. Damit erhält man

$$-1+\mathrm{j} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{j}}.$$

Weiter ist

$$(-1+j)^{-8} = (\sqrt{2}\mathrm{e}^{\frac{3}{4}\pi\mathrm{j}})^{-8} = (\sqrt{2})^{-8}\mathrm{e}^{-6\pi\mathrm{j}} = \frac{1}{16}\mathrm{e}^{-6\pi\mathrm{j}}.$$

In der komplexen Zahlenebene lauten die Polarkoordinaten $r = \frac{1}{16}$ und $\theta = -6\pi = -3(2\pi)$. Dieser θ-Wert entspricht gerade drei vollen Umdrehungen und führt damit wieder auf die reelle x-Achse zurück. Folglich ist

$$(-1+j)^{-8} = \frac{1}{16}.$$

A .10: *Für $w = \frac{3+i}{3}$ skizziere man w^k für $k = -2, \ldots, 23$:*

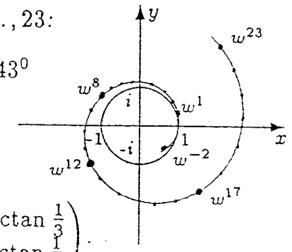
$|w| = \sqrt{10}/3 \approx 1.05$ und $\arg(w) = \arctan(1/3) \approx 18.43^0$

z.B. $k = 17$:

$|w^{17}| = (\sqrt{10}/3)^{17} \approx 2.44$

$\arg(w^{17}) = 17\cdot\arg(w) \approx 313^0$.

$\left(\frac{3+i}{3}\right)^t$ ist die logarithmische Spirale $\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^t\begin{pmatrix}\cos t\arctan\frac{1}{3}\\ \sin t\arctan\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.



A .11: *Man berechne und skizziere $z_k = (1+i)^k$ für $k = 1, \ldots, 8$:*

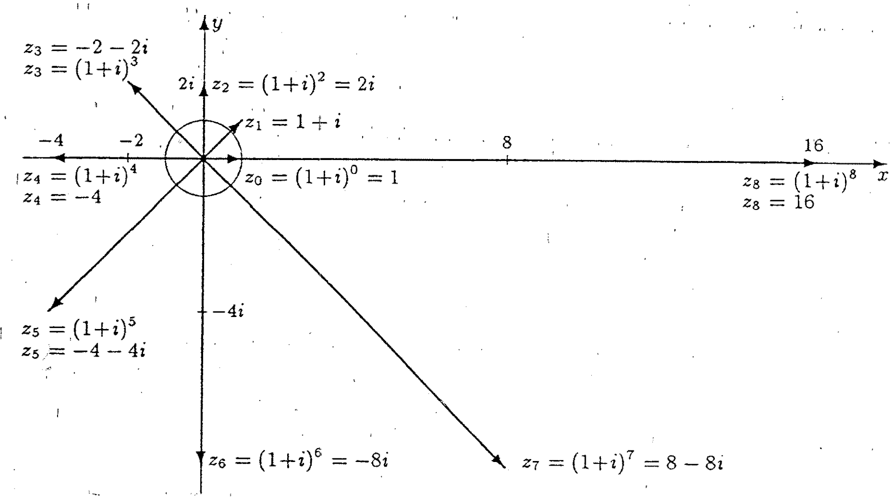
Es ist $z_k = (1+i)^k = (\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/4})^k = \sqrt{2}^k\mathrm{e}^{ik\pi/4}$ (Eulersche Darstellung):

$(1+i)^1 = (\sqrt{2})^1\mathrm{e}^{1\pi/4} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i1\pi/4}$ $\quad(1+i)^5 = (\sqrt{2})^5\mathrm{e}^{5\pi/4} = 4\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i5\pi/4}$

$(1+i)^2 = (\sqrt{2})^2\mathrm{e}^{2\pi/4} = 2\mathrm{e}^{i1\pi/2} = 2i$ $\quad(1+i)^6 = (\sqrt{2})^6\mathrm{e}^{6\pi/4} = 8\mathrm{e}^{i3\pi/2} = -8i$

$(1+i)^3 = (\sqrt{2})^3\mathrm{e}^{3\pi/4} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i3\pi/4}$ $\quad(1+i)^7 = (\sqrt{2})^7\mathrm{e}^{7\pi/4} = 8\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i7\pi/4}$

$(1+i)^4 = (\sqrt{2})^4\mathrm{e}^{4\pi/4} = 4\mathrm{e}^{i\pi} = -4$ $\quad(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8\mathrm{e}^{8\pi/4} = 16\mathrm{e}^{i2\pi} = 16$

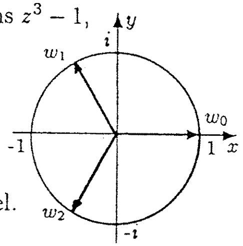


Kompl. Wurzeln

A ...12: *Man berechne und skizziere:* (a) *die 3-ten Einheitswurzeln* (b) *die 3-ten Wurzeln aus −1.*

(a) Die 3-ten Einheitswurzeln sind die Nullstellen des Polynoms $z^3 - 1$, also die Lösungen der Gleichung $z^3 - 1 = 0$, d.h. $z^3 = 1$:

$$\begin{aligned} w_0 &= e^{i0\cdot 2\pi/3} = \cos 0 + i\sin 0 &&= 1 \\ w_1 &= e^{i1\cdot 2\pi/3} = \cos 2\pi/3 + i\sin 2\pi/3 &&= -1/2 + i\sqrt{3}/2 \\ w_2 &= e^{i2\cdot 2\pi/3} = \cos 4\pi/3 + i\sin 4\pi/3 &&= -1/2 - i\sqrt{3}/2 \end{aligned}$$

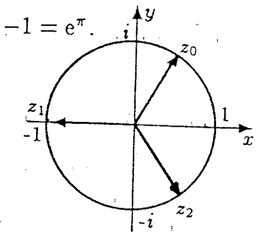


w_1 ist die 3-te Einheitswurzel mit kleinstem positiven Winkel.

Es gilt: $w_1^2 = w_2$, $w_1^3 = w_0 = 1$, $w_1 \cdot w_2 = 1$, $w_1^{-1} = w_2$, $\overline{w_1} = w_2$.

(b) $z^3 = -1$, also $r = |-1| = 1$ und $\varphi = \arg(-1) = \pi$ ergibt: $-1 = e^{\pi}$.
Mit der Formel von Moivre erhält man nun:

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i(\pi/3+0\cdot 2\pi/3)} = \cos\pi/3 + i\sin\pi/3 &&= 1/2 + i\sqrt{3}/2 \\ z_1 &= e^{i(\pi/3+1\cdot 2\pi/3)} = \cos\pi + i\sin\pi &&= -1 \\ z_2 &= e^{i(\pi/3+2\cdot 2\pi/3)} = \cos 5\pi/3 + i\sin 5\pi/3 &&= 1/2 - i\sqrt{3}/2 \end{aligned}$$



Man sieht: Es ist $z_0 = w_0 \cdot z_0$, $z_1 = w_1 \cdot z_0$, $z_2 = w_2 \cdot z_0$.
Man erhält also alle 3-ten Wurzeln aus −1, indem man z_0 mit allen 3-ten Einheitswurzeln multipliziert.

A ...13: Man bestimme sämtliche Wurzeln der Gleichung $z^5 = 4 - 4j$

Zunächst bringen wir $4 - 4j$ in die Polardarstellung $\rho e^{j\alpha}$,

$$\rho\cos\alpha = 4, \qquad \rho\sin\alpha = -4.$$

Unter Zuhilfenahme der komplexen Zahlenebene liest man hieraus $\rho = \sqrt{32}$ und $\alpha = -\frac{1}{4}j\pi + 2n\pi j$ ab. Die Polardarstellung lautet also

$$4 - 4j = 2\sqrt{2}e^{-\frac{1}{4}j\pi + 2n\pi j} = 2^{\frac{5}{2}}e^{j\pi(-\frac{1}{4}+2n)} \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

Nun sei $z = re^{j\theta}$; dann ist

$$r^5 e^{5j\theta} = 2^{\frac{5}{2}}e^{j\pi(-\frac{1}{4}+2n)}$$

oder

$$re^{j\theta} = \sqrt{2}e^{\frac{1}{5}j\pi(-\frac{1}{4}+2n)} \quad (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots).$$

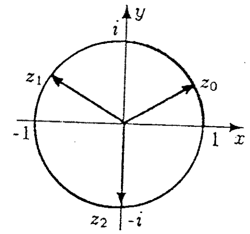
Durch Vergleich beider Seiten erhält man

$$r = \sqrt{2}, \quad \theta = \frac{1}{20}(-1 + 8n)\pi.$$

Fünf aufeinanderfolgende n-Werte ergeben fünf verschiedene Wurzeln; die weiteren n liefern dann keine neuen Lösungen mehr. Im einzelnen lauten die Wurzeln

$$\sqrt{2}e^{\frac{1}{20}j\pi}, \quad \sqrt{2}e^{\frac{7}{20}j\pi}, \quad \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}j\pi}, \quad \sqrt{2}e^{\frac{23}{20}j\pi}, \quad \sqrt{2}e^{\frac{31}{20}j\pi}.$$

A ...14: *Man bestimme alle Lösungen von $z^3 = i$:*
$|i| = 1$, $\arg(i) = \pi/2$, also: $i = e^{i\pi/2} = \cos\pi/2 + i\sin\pi/2$.



(a) Die Formel von Moivre ergibt:

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i(\pi/6+0\cdot 2\pi/3)} = \cos 1\pi/6 + i\sin 1\pi/6 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} + i), \\ z_1 &= e^{i(\pi/6+1\cdot 2\pi/3)} = \cos 5\pi/6 + i\sin 5\pi/6 = \tfrac{1}{2}(-\sqrt{3} + i), \\ z_2 &= e^{i(\pi/6+2\cdot 2\pi/3)} = \cos 9\pi/6 + i\sin 9\pi/6 = -i. \end{aligned}$$

(b) Nach Moivre ist $z_k = e^{ik\cdot 2\pi/n} \cdot \sqrt[n]{r}e^{i\varphi/n}$ und somit $z_k = w_k \cdot a$, wobei w_k eine n-te Einheitswurzel und a eine feste n-te Wurzel aus b ist.
Das ergibt folgendes Lösungsverfahren:
Man bestimmt eine Lösung von $z^3 = i$, also zum Beispiel $a = \cos\pi/6 + i\sin\pi/6$ oder auch (durch Raten) $a = -i$ und erhält—eventuell in anderer Reihenfolge—alle Lösungen von $z^3 = i$ durch Multiplikation von a mit den 3-ten Einheitswurzeln w_k:

$$\begin{aligned} a_0 &= w_0 \cdot a = 1(-i) &&= -i \\ a_1 &= w_1 \cdot a = \tfrac{1}{2}(-1 + i\sqrt{3})(-i) &&= \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \\ a_2 &= w_2 \cdot a = \tfrac{1}{2}(-1 - i\sqrt{3})(-i) &&= \tfrac{1}{2}(-\sqrt{3} + i) \end{aligned}$$

Die weiteren Lösungen erhält man also aus a, indem man den "Zeiger" a jeweils um $2\pi/3$ (im Allgemeinen um $2\pi/n$) weiterdreht!

Das bedeutet geometrisch: Um alle Lösungen von $z^n = b$ zu erhalten, bestimme man eine Lösung a und drehe das aus den n-ten Einheitswurzeln gebildete n-Eck so, daß eine Ecke in Richtung der einen Lösung a zeigt. Dann zeigen die anderen Ecken in Richtung der anderen Lösungen. Falls $|b| \neq 1$ ist, muß natürlich noch mit $\sqrt[n]{|b|}$ multipliziert werden.

8a/5

Gleichungen kompl. Zahlen

A .15: *Für welche z gilt* $\frac{z-1}{2} = \frac{1+2i}{z+1}$?

Beseitigt man die Nenner, so erhält man die Gleichung $z^2 = 3+4i$, $(z \neq -1)$. Es sind also die beiden 2–ten Wurzeln aus $3+4i$ zu bestimmen:

$|3+4i| = 5$, $\arg(3+4i) = \arctan 4/3 \approx 0.92 \approx 53.13^0$ ergibt:

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt{5}(\cos 0.46 + i\sin 0.46) &&= 2+i, \\ z_1 &= \sqrt{5}(\cos(0.46+\pi) + i\sin(0.46+\pi)) &&= -2-i. \end{aligned}$$

Oder: Da $a = 2+i$ eine Lösung von $z^2 = 3+4i$ ist, erhält man alle Lösungen durch Multiplikation von a mit den 2–ten Einheitswurzeln 1 und -1, also $z_{0,1} = \pm a = \underline{\pm(2+i)}$.

A .16: *Man berechne* $z = \frac{3i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$:

(a) kartesische Darstellung (Erweitern mit $\overline{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \sqrt{2}-i\sqrt{2}$):

$$z = \frac{3i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{3i(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})} = \underline{\tfrac{3}{4}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}.$$

(b) Eulersche Darstellung (Beträge dividieren, Winkel subtrahieren):

$$z = \frac{3i}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}} = \frac{3e^{i\pi/2}}{2e^{i\pi/4}} = \tfrac{3}{2}e^{i(\pi/2-\pi/4)} = \tfrac{3}{2}e^{i(\pi/4)}$$
$$= \tfrac{3}{2}(\cos\pi/4 + i\sin\pi/4) = \tfrac{3}{2}(\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2) = \underline{\tfrac{3}{4}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})}.$$

Darstellung von Bereichen in $\mathbb{R}^2$

A .17: *Man berechne und skizziere folgende Punktmengen in der Ebene:*

(a) $K = \{ z \mid \mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \geq 2 \}$ (b) $E = \{ z \mid |z+i| + |z-i| = 4 \}$

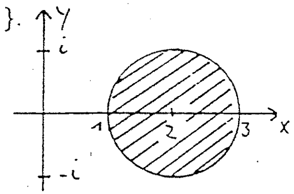
(a) $z = x+iy \Longrightarrow z+1 = x+1+iy$ und $z-1 = x-1+iy$, also gilt:

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = \frac{(x+1+iy)(x-1-iy)}{(x-1+iy)(x-1-iy)} = \frac{x^2-1+y^2-2iy}{(x-1)^2+y^2}. \text{ Also:}$$

$$\mathrm{Re}\left(\frac{z+1}{z-1}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{x^2-1+y^2-2iy}{(x-1)^2+y^2}\right) = \frac{x^2-1+y^2}{(x-1)^2+y^2} \geq 2 \iff$$

$$x^2-1+y^2 \geq 2((x-1)^2+y^2) \iff 1 \geq (x-2)^2+y^2.$$

Also gilt: $K = \{ z \mid z = x+iy \text{ und } (x-2)^2+y^2 \leq 1 \}$.



$(x-2)^2+y^2 = 1$ ist eine Gleichung des Kreises vom Radius 1 und dem Mittelpunkt $M = (2,0)$.

K ist also die Menge aller komplexen Zahlen in oder auf diesem Kreis.

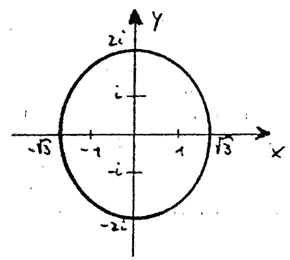
(b) Da $|a-b|$ der Abstand von a und b in der komplexen Ebene ist und $|z+i| = |z-(-i)|$ ist, sind also die komplexen Zahlen gesucht, für die die Summen der Abstände von $-i$ und i gleich 4 ist. Das ergibt (*Gärtnerkonstruktion*) die Ellipse mit den Brennpunkten $-i$ und i und den Halbachsen $\sqrt{3}$ und 2.

Der Ansatz $z = x+iy$ führt auf

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2} + \sqrt{x^2+(y-1)^2} = 4.$$

Beseitigt man die Wurzeln durch zweimaliges Quadrieren, erhält man die Ellipsengleichung:

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1.$$



Die Ungleichung $|z+i| + |z-i| > 4$ (bzw. < 4) erfüllen genau die komplexen Zahlen außerhalb (bzw. innerhalb) der Ellipse.

Blatt 8: komplexe Zahlen (grundlegende Rechenoperationen)

8.1 Man berechne $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\bar{z}_2 \cdot z_1$, $\bar{z}_2 \cdot z_2$ von:

a) $z_1 = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_2 = 1 - \mathrm{i}$, b) $z_1 = 2 + 3\mathrm{i}$, $z_2 = 3 - 5\mathrm{i}$,
c) $z_1 = 4 - 5\mathrm{i}$, $z_2 = 4 + 5\mathrm{i}$, d) $z_1 = \mathrm{i}$, $z_2 = -2 - 4\mathrm{i}$.

8.2 Welche komplexe Zahl ist das Spiegelbild von $z \neq 0$ bei Spiegelung

a) am Ursprung, b) an der reellen Achse,
c) an der imaginären Achse,

8.3 Welche der folgenden Ungleichungen sind richtig? (*)

a) $-2\mathrm{i}^2 < 5$, b) $(\mathrm{i} + 2)^2 > 0$,
c) $\mathrm{i}^2 + 2 > 0$, d) $\sin\varphi \leqq |\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|$,
e) $(1 + \mathrm{i})^4 > 0$, f) $|\sqrt{21}\,\mathrm{i} - 6| < |7 + 3\mathrm{i}|$.

8.4 Von der komplexen Zahl z bestimme man Real- und Imaginärteil:

a) $z = \frac{1}{\mathrm{i} + 1}$, b) $z = \frac{3 + 2\mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}$, c) $z = \left(\frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}\right)^2$,

d) $z = \frac{(2\mathrm{i} + 1)(\mathrm{i} - 2) + 1}{(2 - \mathrm{i})^2 - 2 + \mathrm{i}}$, e) $z = (3\mathrm{i} - \sqrt{3})^4$, f) $z = \left(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right)^{18}$,

g) $z = 64 \cdot (\sin^2\varphi + \mathrm{i}\sqrt{3} + \cos^2\varphi)^{-6}$, h) $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ mit $r = 4$, $\varphi = \frac{5}{6}\pi$,

8.5 Berechnen Sie den absoluten Betrag und das Argument der komplexen Zahlen, und geben Sie die trigonometrische und die exponentielle Form an:

a) $z = \mathrm{i} + 1$, b) $z = \sqrt{3} + \mathrm{i}$, c) $z = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$,

d) $z = \frac{1 + 2\mathrm{i}}{2 - \mathrm{i}}$, e) $z = \frac{2 - \mathrm{i}}{3\mathrm{i} + (\mathrm{i} - 1)^2}$, f) $z = \mathrm{i} + \frac{1 + \mathrm{i}}{3 + \mathrm{i}}$,

g) $z = \frac{(1 - \mathrm{i})^2}{1 + \mathrm{i}}$.

8.6 Man stelle folgende Zahlen in trigonometrischer Form und in der Gestalt $x + \mathrm{i}y$ dar:

a) $(1 - \mathrm{i})^6$, b) $\mathrm{e}^{3\pi\mathrm{i}}$, c) $(2 - \mathrm{i}\sqrt{3})^3$, d) $\mathrm{e}^{2 - 6\pi\mathrm{i}}$,
e) $(\mathrm{i} - \sqrt{3})^8$, f) $\left(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + \mathrm{i}\sqrt{2 - \sqrt{3}}\right)^3$, g) $\mathrm{e}^{4 - \mathrm{i}\cdot 3{,}5\pi}$,
h) $\left(\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$, i) $\mathrm{e}^{3 + \mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, j) $(1 - \mathrm{i})^{13}$.

Tipp: Formel von Moivre

8.7 Geben Sie die komplexen Zahlen $z_1 = 4\mathrm{i}$, $z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{6}\,\mathrm{i}$, $z_3 = 3\sqrt{3} - 3\mathrm{i}$, $z_4 = -3 - 3\mathrm{i}$ in exponentieller Darstellung an! Berechnen Sie mit deren Hilfe:

a) $z_5 = \frac{z_2^4}{z_1}$, b) $z_6 = \frac{z_3^3}{z_4^4}$,

8.8 Für welche Punkte $z = x + \mathrm{i}y$ der Gaußschen Zahlenebene gilt:

a) $[2 \cdot \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z^2)] \leq 0$ b) $0 < \sqrt{2}\,\mathrm{Im}(z) < |z|$, c) $|z + 4\mathrm{i} - 3| = 3$,

d) $|z + 2 - \mathrm{i}| \geqq 2$, e) $\frac{\bar{z}}{z} = 1$, f) $|z + 1| \leqq |z - 1|$,

g) $|z + 1| \leqq 2|z - 1|$, h) $\frac{1}{z} + \frac{1}{\bar{z}} = 1$, i) $\mathrm{Re}(z^2) = c$ (c reell),

8.9 Bestimmen Sie alle verschiedenen Werte w_j, $j = 0, 1, \ldots, (n - 1)$, die sich für $\sqrt[n]{z}$ ergeben!

a) $\sqrt{5 + 12\mathrm{i}}$, b) $\sqrt{8 - 15\mathrm{i}}$, c) $\sqrt[3]{-2 + 2\mathrm{i}}$,
d) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$, e) $\sqrt[4]{-8 + \mathrm{i}8\sqrt{3}}$, f) $\sqrt[5]{5 + 8\mathrm{i}}$.

8.10 Man löse die Gleichungen:

a) $z^6 = 1$, b) $z^4 = -1$,

c) $z^3 = 8\mathrm{i}$, d) $z^4 = \frac{1}{2}(\mathrm{i}\sqrt{3} - 1)$,

e) $z^5 + 10 - 5\mathrm{i} = 0$, f) $z^2(1 + \mathrm{i}) = 2z$,
g) $(z - 3\mathrm{i})^6 + 64 = 0$, h) $|z| = z \cdot \bar{z}$,
i) $z^2 - 2\mathrm{i}z + 8 = 0$, j) $z^2 - z + \mathrm{i}z - \mathrm{i} = 0$.

(*) Bem: In $\mathbb{C}$ gibt es keine Ordnungsaxiome
Konsequenz: Ungl. machen in $\mathbb{C}$ keinen Sinn!

Quelle: Aufg.-Sammlung "Math. für Ing." (Verlag Harri Deutsch, 1987)

8.1 Grundrechenarten in $\mathbb{C}$

a)
$$z_1 = x_1 + i\cdot y_1 = 1 + i\cdot\sqrt{3} \quad \Big\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ y_1 = \sqrt{3} \end{array}$$

$$z_2 = x_2 + i\cdot y_2 = 1 + i\cdot(-1) = 1 - i \quad \Big\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_2 = 1 \\ y_2 = (-1) \end{array}$$

Addition:
$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= x_1 + i\cdot y_1 + x_2 + i\cdot y_2 \\ &= (x_1 + x_2) + i\cdot(y_1 + y_2) \\ &= (1+1) + i\cdot(\sqrt{3}-1) \\ &= 2 + i\cdot(\sqrt{3}-1) \end{aligned}$$

Subtraktion:
$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 - x_2) + i\cdot(y_1 - y_2) \\ &= (1-1) + i\cdot(\sqrt{3} - (-1)) \\ &= 0 + i\cdot(\sqrt{3}+1) \end{aligned}$$

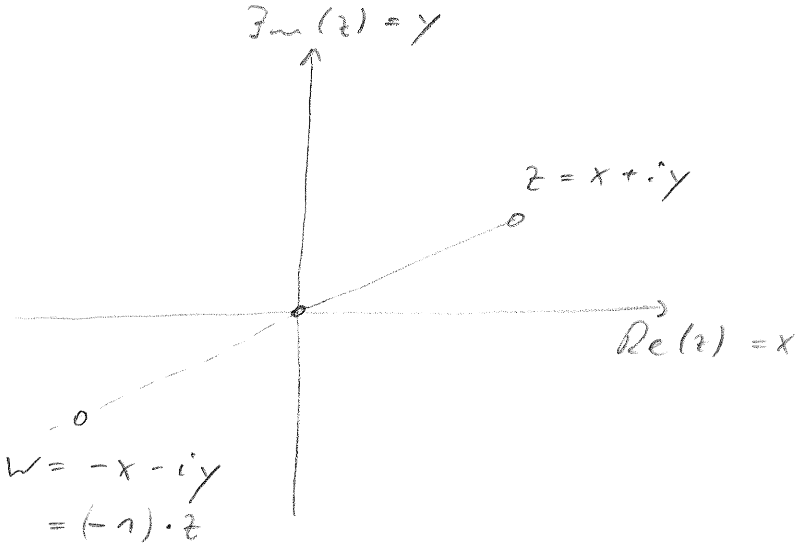
Multiplikation:
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)\cdot(x_2 + i\cdot y_2) \\ &= x_1\cdot x_2 + i\cdot y_1 x_2 + i\cdot y_2 x_1 + \overbrace{iy_1 iy_2}^{= -y_1 y_2} \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\cdot(y_1 x_2 + y_2 x_1) \\ &= (1\cdot 1 - \sqrt{3}\cdot(-1)) + i\cdot(\sqrt{3}\cdot 1 + (-1)\cdot 1) \\ &= (1+\sqrt{3}) + i\cdot(\sqrt{3}-1) \end{aligned}$$

Division:
$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\cdot(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i\cdot(y_1\cdot x_2 - y_2\cdot x_1)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \left[\frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}\right] + i\cdot\left[\frac{(y_1 x_2 - y_2 x_1)}{x_2^2 + y_2^2}\right] \\ &= \left[\frac{1\cdot 1 + \sqrt{3}\cdot(-1)}{1^2 + 1^2}\right] + i\cdot\left[\frac{\sqrt{3}\cdot 1 - (-1)\cdot 1}{1^2 + 1^2}\right] \\ &= \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right] + i\cdot\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right] \end{aligned}$$

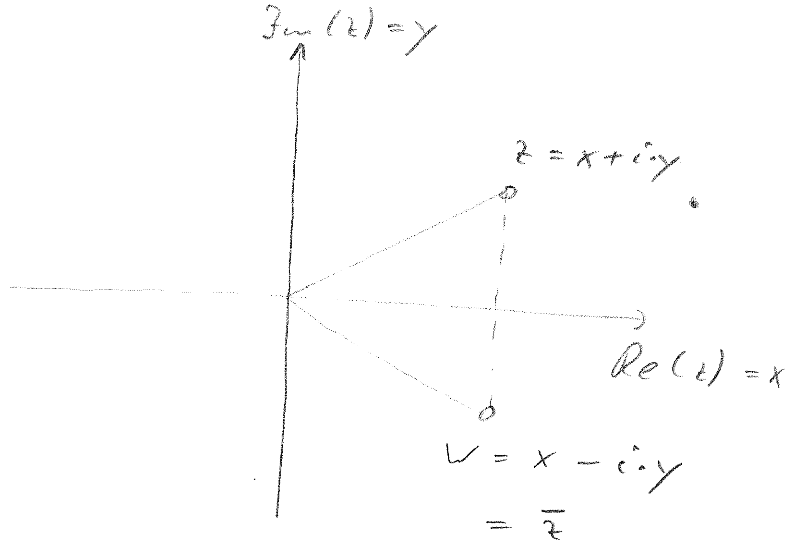
Konjugation:
$$\overline{z_2} = \overline{(x_2 + iy_2)} = (x_2 - iy_2) \Rightarrow \overline{z_2} = 1 + i$$

8.2 kompl. Zahlen in der ebenen Geometrie

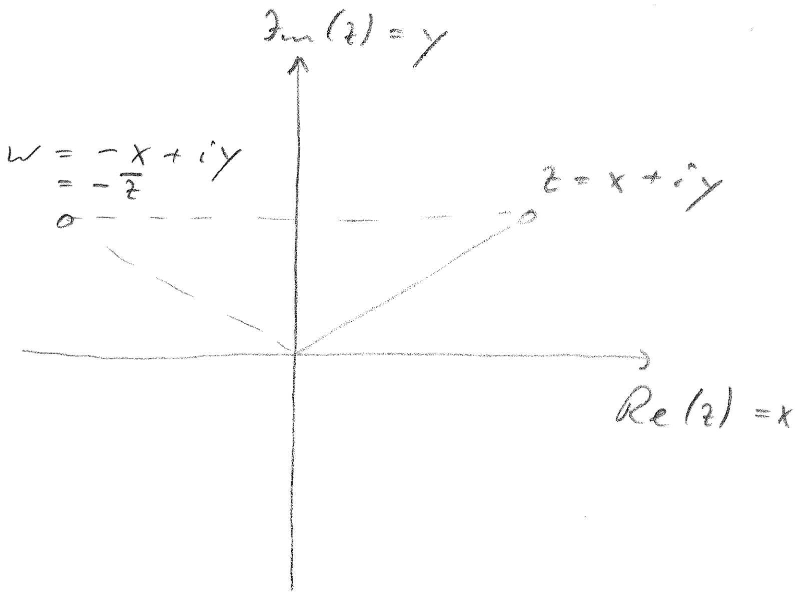
a)



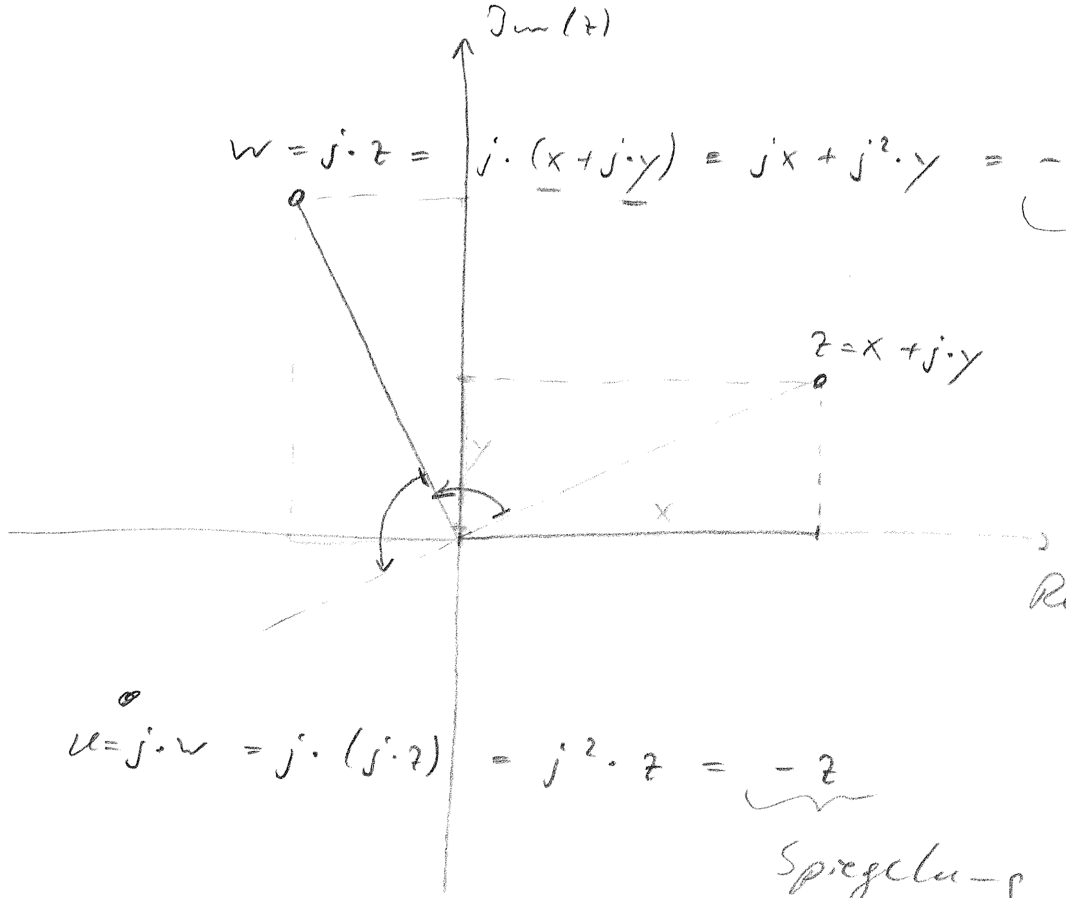
b)



c)



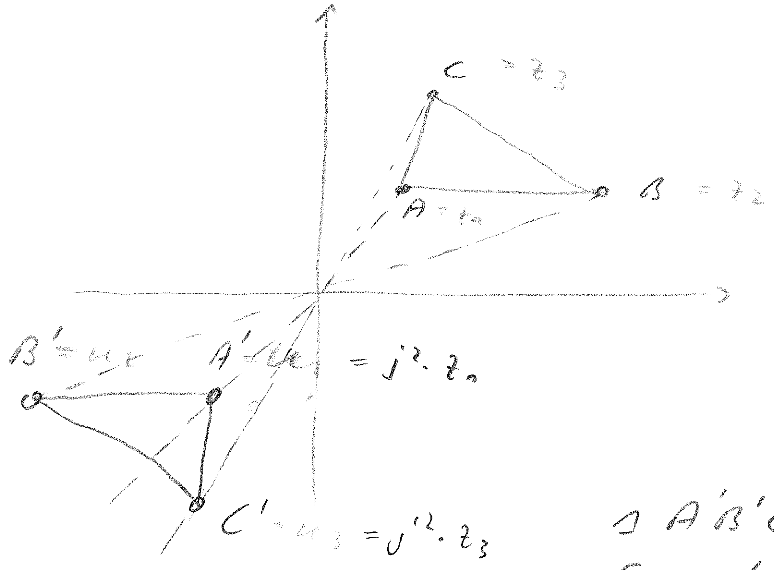
Ergänzung von Aufg. 8.2: „Drehung um +90°"



$$w = j\cdot z = j\cdot(x + j\cdot y) = jx + j^2\cdot y = \underbrace{-y + j\cdot x}_{\text{Drehung um } +90^\circ\,!}$$

$$u = j\cdot w = j\cdot(j\cdot z) = j^2\cdot z = \underbrace{-z}_{\text{Spiegelung am Ursprung}}$$

⇝ „Anwendung": Spiegelungen & Drehungen von Punkten (und somit Flächen) in der ebenen Geometrie, z.B.



$\triangle A'B'C'$ mittels Spiegelung von $\triangle ABC$ am Ursprung!

8.3 Elementare Ungleichungen

a) $-2 \cdot i^2 < 5$:

$i^2 = -1 \Rightarrow -2 \cdot (-1) = 2 < 5$ ✓

b) $(i+2)^2 > 0$:

$$\begin{aligned}(i+2)^2 &= (i+2)\cdot(i+2)\\ &= i^2 + i \cdot 2 + 2 \cdot i + 2^2\\ &= -1 + i \cdot 4 + 4\\ &= \underbrace{3 + i \cdot 4}_{\in \mathbb{C}}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Diese Ungleichung macht keinen Sinn, da in $\mathbb{C}$ keine Ordnung existiert !

[Bem: $\underbrace{z}_{\in \mathbb{C}} > 0$ ist sinnlos !

c) $i^2 + 2 > 0$:

$i^2 = -1 \Rightarrow i^2 + 2 = -1 + 2 = 1 > 0$ ✓

e) $(1+i)^4 = (1+i)^2 \cdot (1+i)^2$

$= (1 + 2i - 1) \cdot (1 + 2i - 1)$

$= 2i \cdot 2i =$

$= 4 i^2 = \underline{-4}$

NR: $(1+i)^2 = (1+i)(1+i)$
$= 1 + 1 \cdot i + i \cdot 1 + i^2$
$= 1 + 2i - 1$

$\Rightarrow (1+i)^4 = -4 < 0$

f) $|\sqrt{21}\, i - 6| < |7 + 3i|$:

Es gilt: $|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\Rightarrow |\sqrt{21}\, i - 6| = \sqrt{21 + 36} = \sqrt{57}$

$|7 + 3i| = \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58}$

$\Rightarrow \underline{|\sqrt{21}\, i - 6| < |7 + 3i|}$

8.4 Wichtige Operationen mit kompl. Zahlen

a) $z = \frac{1}{i+1} = \frac{1}{1+i}$

$= \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1^2+1^2} = \frac{1+i\cdot(-1)}{2}$

$= \frac{1}{2} + i\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow \mathrm{Re}(z) = (1/2)$

$\mathrm{Im}(z) = -(1/2)$

b)

8.5 Betrag komplexer Zahlen

Allgemein gilt (vgl. Def.):

$$z = x + iy \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} Re(z) &= x \\ Im(z) &= y \end{aligned}$$

$$|z| = \sqrt{[Re(z)]^2 + [Im(z)]^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

a) $z = i + 1 = 1 + i \cdot 1$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

b) $z = \sqrt{3} + i = \sqrt{3} + i \cdot 1$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{[\sqrt{3}]^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$

c)

8.8 Gebiete in der Gauß'schen Zahlenebene

a) $2 \cdot Re(z) + Re(z^2) \leq 0 \quad ; \quad z = x + j \cdot y$

<u>NR 1</u>: $z = x + j \cdot y \quad \Rightarrow \quad \boxed{Re(z) = x}$

<u>NR 2</u>:
$$\begin{aligned} z^2 = z \cdot z &= (x+jy)\cdot(x+jy) \\ &= x^2 + j \cdot xy + j \cdot yx + (jy)^2 \\ &= x^2 + j \cdot (2xy) - y^2 \\ &= (x^2 - y^2) + j \cdot (2xy) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Re(z^2) = (x^2 - y^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2 \cdot Re(z) + Re(z^2) \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2 \cdot x + (x^2 - y^2) \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2x + x^2 - y^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 - y^2 - 1^2 \leq 0 \quad \Big| \text{ "quadratische Ergänzung"} \\ \Leftrightarrow \quad & \boxed{(x+1)^2 - y^2 \leq 1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{2 \cdot Re(z) + Re(z^2) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{(x+1)^2 - y^2}_{=: f(x,y)} \leq 1}$$

<u>Skizze des durch $f(x,y) := (x+1)^2 - y^2 \leq 1$ beschriebenen Bereichs:</u>

→ <u>Vorgehen</u>: (i) Feststellung der "Grenzkurve"

$$(x+1)^2 - y^2 =: f(x,y) = 1$$

(ii) Wahl eines (beliebigen) Punkts $P = (\bar{x}, \bar{y})$ und Feststellung ob P zum Bereich gehört, d.h.

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \leq 1$$

oder nicht, d.h. $f(\bar{x}, \bar{y}) > 1$

1. Möglichkeit: "Erkennen", daß es sich bei

$$f(x,y) = (x+1)^2 - y^2 = 1$$

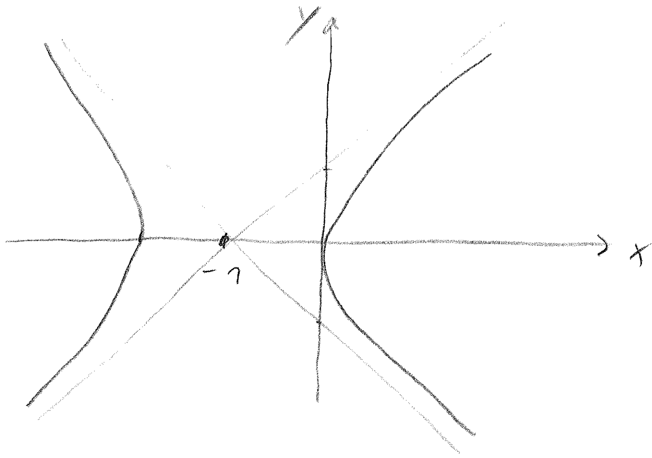
um eine Hyperbel-Gl. handelt

⇝ vgl. F.S., z.B. Netz, S. 152:

$$(x+1)^2 - y^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{(x-(-1))^2}{1^2} - \frac{(y-0)^2}{1^2} = 1}$$

"Hyperbel" mit Mittelpunkt $(-1,0)$

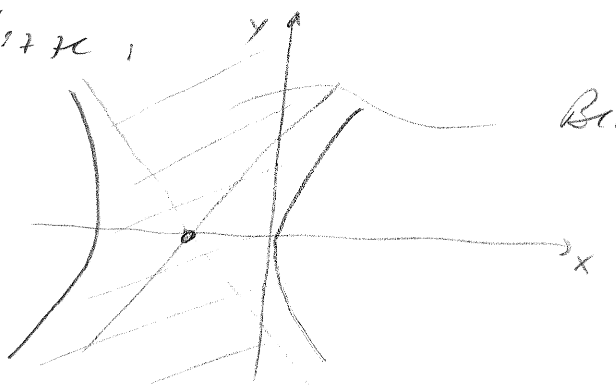


⇝ wähle als Punkt z.B. $P = (-1,0)$

$\Rightarrow (-1+1)^2 - 0^2 = 0 < 1$

$\Rightarrow P = (-1,0)$ liegt innerhalb des durch $(x+1)^2 - y^2 \leq 1$ beschriebenen Bereichs

$\Rightarrow$ Skizze:



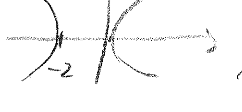
Bereich mit $f(x,y) = (x+1)^2 - y^2 \leq 1$

2. Möglichkeit: Ermittlung einer expliziten Darstellung für die Grenzkurve, d.h.

$$(x+1)^2 - y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = (x+1)^2 - 1 \Rightarrow \boxed{y(x) = \pm\sqrt{(x+1)^2 - 1}}$$

$\boxed{\text{für } x \leq -2 \text{ oder } x \geq 0}$

$\Rightarrow$ Skizze:

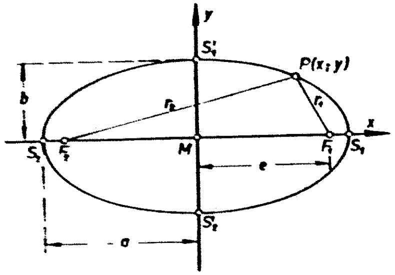


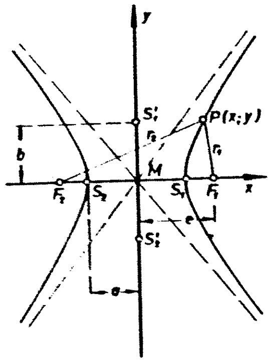
⇝ Wahl von $P = (\cdot,\cdot)$ wie oben

8/8a

4.5 Ellipse. Hyperbel

4.51 Allgemeine Eigenschaften





Die Ellipse (Hyperbel) ist der geometrische Ort aller Punkte, bei denen die Summe (Differenz) der Entfernung von 2 festen Punkten F_1, F_2 konstant ist:

Ellipse $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$,

Hyperbel $\overline{PF_2} - \overline{PF_1} = 2a$.

Die Punkte F_1, F_2 heißen *Brennpunkte*, ihr Abstand vom Mittelpunkt M *lineare Exzentrizität* e. Die Entfernungen r_1 und r_2 heißen *Brennstrahlen*. Man unterscheidet zwischen *großer Halbachse* a und *kleiner Halbachse* b, beide zusammen heißen Hauptachsen. Ihre Schnittpunkte mit der Ellipse (Hyperbel) heißen *Hauptscheitel* S_1, S_2 bzw. *Nebenscheitel* S'_1, S'_2.

Im folgenden wird vorausgesetzt, daß die Hauptachsen parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen.

e lineare Exzentrizität

$$e = \overline{F_1M} = \overline{F_2M}$$

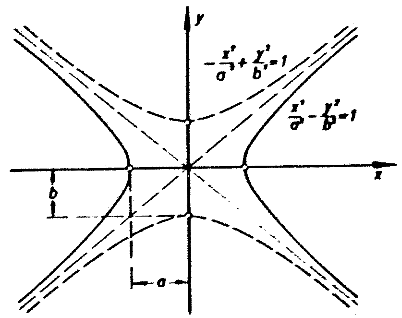
4.511 Kurvengleichungen

	Ellipse	Hyperbel
Mittelpunktsgleichungen Mittelpunkt M (0; 0)	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Mittelpunkt M (h; k)	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$
Lineare Exzentrizität	$e = \sqrt{a^2 - b^2}$	$e = \sqrt{a^2 + b^2}$
Numerische Exzentrizität	$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1$	$\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$
Halbparameter (Länge des Lotes in den Brennpunkten)	$p = \frac{b^2}{a}$	$p = \frac{b^2}{a}$
Scheitelgleichung	$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$	$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$
Asymptoten	nicht reell	$\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 0$
Polargleichung (Mittelpunkt wird Pol)	$r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}$	$r^2 = \frac{-b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi}$
Brennstrahlen	$r_1 = a - \varepsilon x$ $r_2 = a + \varepsilon x$	$r_1 = \varepsilon x - a$ $r_2 = \varepsilon x + a$
Flächeninhalt	$A = \pi ab$	

4.512 Gleichseitige Hyperbeln, konjugierte Hyperbeln

Bei einer *gleichseitigen Hyperbel* sind die Halbachsen gleich groß ($a = b$).
Mittelpunktsgleichung: $x^2 - y^2 = a^2$
Gleichung der Asymptoten: $y = \pm x$.
Konjugierte Hyperbeln haben gemeinsame Asymptoten; Haupt- und Nebenscheitel sind paarweise vertauscht.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



B

1. Gesucht ist die Gleichung der Hyperbel, deren Mittelpunkt die Koordinaten M (3; − 4) hat und deren Halbachsen $a = 6$ und $b = 5$ sind. Sie soll sich in Richtung der y-Achse öffnen.

   Die Gleichung ist $-\frac{(x-3)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{25} = 1$.

2. Wie lautet die Gleichung der Hyperbel mit den Asymptoten $y = \pm \frac{2}{3} x$, wenn sie außerdem noch durch den Punkt P (4; 2) gehen soll?
   Da die Asymptoten sich im Nullpunkt schneiden, ist dieser zugleich Mittelpunkt der Hyperbel. Sie hat damit die Gleichungsform $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Da P (4; 2) auf ihr liegen soll, gilt $\frac{16}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$

Fortsetzung S. 155

8.12)

i) $z^2 - \underbrace{(2i)}_{p} \cdot z + \underbrace{8}_{q} = 0$

Lösungsformel für quadr. Gl. liefert

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$= -\frac{-2i}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2i}{2}\right)^2 - 8}$$

$$= i \pm \sqrt{i^2 - 8}$$

$$= i \pm \sqrt{\underbrace{-1 - 8}_{-9}}$$

$$= i \pm \sqrt{-9}$$

$$= i \pm i \cdot 3$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} z_1 = 4i \\ z_2 = -2i \end{array}}$$

Probe: $z_1^2 - (2i) \cdot z_1 + 8 =$

$$= (4i)^2 - (2i) \cdot (4i) + 8$$

$$= 16 i^2 - 8 i^2 + 8$$

$$= -16 + 8 + 8 = \underline{\underline{0}} \checkmark$$

$$z_2^2 - (2i) \cdot z_2 + 8 =$$

$$= (-2i)^2 - (2i) \cdot (-2i) + 8$$

$$= 4i^2 + 4i^2 + 8$$

$$= -4 - 4 + 8 = \underline{\underline{0}} \checkmark$$

Bem: Alternativer Lösungsweg mittels Bezug $\mathbb{C} \leftrightarrow \mathbb{R}^2$ | 8/10

$\rightarrow$ Ansatz: $z = x + i \cdot y \quad , \quad x, y \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ Ansatz $z = x + iy$ in geg. Gl. einsetzen:

$$z^2 - (2i) \cdot z + 8 = 0$$

$$\Rightarrow (x+iy)^2 - (2i) \cdot (x+iy) + 8 = \overbrace{0 + i \cdot 0}^{0}$$

$$\Leftrightarrow (x+iy) \cdot (x+iy) - (2i) \cdot (x+iy) + 8 = 0 + i \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + xiy + iyx + iy \cdot iy - 2ix - 2iiy + 8 = 0 + i \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy \cdot i - y^2 - 2xi + 2y + 8 = 0 + i \cdot 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + 2y + 8) + (2xy - 2x) \cdot i = 0 + i \cdot 0$$

$\rightsquigarrow$ Koeffizientenvergleich:

$$\text{Re}: \quad x^2 - y^2 + 2y + 8 = 0 \qquad (1)$$

$$\text{Im}: \quad 2xy - 2x = 0 \qquad (2)$$

(2) liefert: $2x \cdot (y-1) = 0$

$$\Rightarrow x = 0 \quad \text{oder} \quad y = 1 .$$

Sei $y = 1$, dann liefert (1):

$$x^2 - 1^2 + 2 \cdot 1 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 1 + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -9 \quad \Big\} \text{ nicht lösbar in } \mathbb{R}\,!$$

$\rightsquigarrow$ Fazit: $y \neq 1 \Longrightarrow \boxed{x = 0}$

8/11

Für $x=0$ liefert (1):

$$0^2 - y^2 + 2y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$\overset{\text{(Lös.-Formel)}}{\Longrightarrow} \quad y_{1,2} = -\left(\frac{-2}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\frac{2}{2}\right)^2 + 8}$$

$$= 1 \pm \sqrt{9}$$

$$\Rightarrow \quad y_1 = 4$$

$$y_2 = -2$$

$\Rightarrow$ Lösung $z = x + i \cdot y$ der kompl. Gleichung

mit $x = 0$

$y_1 = 4$

$y_2 = -2$

lautet:

$$\boxed{\begin{aligned} z_1 &= 0 + 4i \\ z_2 &= 0 - 2i \end{aligned}}$$

8/10 j) $z^2 - z + iz - i = 0$

8/12

$$z^2 - z + iz - i = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z^2 - (1-i)\cdot z - i = 0$$

$$\overset{\text{(Lös.-Formel)}}{\Longrightarrow} \quad z_{1,2} = -\frac{-(1-i)}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-i)^2}{4} + i}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot i\right) \pm \sqrt{\frac{1^2 - 2i + i^2}{4} + i}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \pm \sqrt{-\frac{1}{2}i + i}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \pm \sqrt{\frac{1}{2}i}$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i\right) \pm \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{} \cdot \sqrt{i}$$

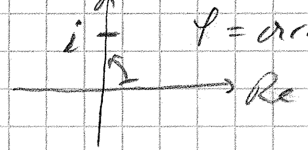
$$= \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \sqrt{i}$$

[NR: Bestimmung von $\sqrt{i}$

$$w_k = \sqrt{i} \quad , \quad k = 0,1$$

$$\Rightarrow \quad w_k^2 = i$$

[i in trig. Form darstellen



$\varphi = \arg(i) = \pi/2 \qquad |i| = 1$

$$\Rightarrow \quad i = \underbrace{\cos(\pi/2 + k\cdot 2\pi)}_{=0} + i\cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right)}_{=1}$$

$$\overset{\text{(Moivre Formel)}}{\Longrightarrow} \quad w_k = \sqrt[2]{1}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi/2 + k\cdot 2\pi}{2}\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi/2 + k\cdot 2\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi\right) + i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\cdot\pi\right) \quad , k = 0,1$$

8/13

$$\Rightarrow \quad w_0 = \cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(\pi/4\right)$$

$$w_1 = \cos\left(\tfrac{\pi}{4} + \pi\right) + i \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{4} + \pi\right)$$

$$\Rightarrow \quad w_0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$w_1 = -\tfrac{1}{2}\sqrt{2} - i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = -\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

<u>Bem.</u> $w_0 = -w_1$

$$\Rightarrow \quad z_{1,a} = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot w_0$$

$$z_{1,b} = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot w_1$$

$$z_{2,a} = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot w_0$$

$$z_{2,b} = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot w_0$$

$$\overset{(w_0 = -w_1)}{\Rightarrow} \quad z_{1,a} = z_{2,b} \quad \text{und} \quad z_{1,b} = z_{2,a}$$

$$\Rightarrow \quad z_1 = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\right) + \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} i$$

$$\boxed{z_1 = 1}$$

$$z_2 = \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i\right) - \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} i - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cdot i$$

$$\boxed{z_2 = -i}$$

<u>Probe</u>: $z_1 = 1 \Rightarrow 1^2 - 1 + i \cdot 1 - i = 0$ ✓

$z_2 = -i \Rightarrow (-i)^2 - (-i) + i \cdot (-i) - i = i^2 + i - i^2 - i = 0$ ✓

Blatt 7: Lagen und Schnitte von Punkten, Geraden und Ebenen im Raum

7.1 Man bestimme die Schnittmenge von jeweils zwei der drei Geraden:

$G_1: \ \vec{x} = (1,-2,1) + r(2,-3,1)$,
$G_2: \ \vec{x} = (3,-3,4) + s(-2,5,1)$,
$G_3: \ \vec{x} = (2,0,1) + t(4,-10,-2)$.

7.2 Man berechne den Schnittpunkt und ggf. den Schnittwinkel der folgenden beiden Geraden:
$G_1: \ \vec{x} = (1,-2,1) + r(2,-3,1)$ und $G_2: \ \vec{x} = (3,-3,4) + s(-2,5,1)$.

7.3 Man bestimme den Abstand der Geraden $G_1 : \vec{x} = (0,1,-2) + r(1,1,-3)$ und $G_2 : \vec{x} = (0,1,2) + s(-1,-1,3)$.

7.4 Gegeben sind die beiden Geraden $G_1: \ \vec{x} = (3,-2,3) + r(1,2,-1)$, $G_2: \ \vec{x} = (-1,2,-3) + s(1,0,3)$

(a) Man zeige: G_1 und G_2 sind windschief.

(b) Man berechne ihren Abstand $d(G_1, G_2)$.

(c) Man gebe die beiden parallelen Ebenen E_1 bzw. E_2 an, in denen G_1 bzw. G_2 liegen.

(d) Man berechne die Gerade L, die G_1 und G_2 senkrecht schneidet, sowie die beiden Punkte P_1 auf G_1 und P_2 auf G_2 mit kürzestem Abstand.

7.5 Man berechne den Abstand A von $P = (2,-2,3)$ zu $E : 2x - y + 2z = 6$.

7.6 Man berechne den Abstand vom Punkt $P = (0,2,2)$ zur Ebene $E: \ \vec{x} = (1,2,-3) + r(2,0,-1) + s(-3,2,0)$.
Auf welcher Seite der Ebene liegt P?

7.7 Man berechne ggf. den Schnittpunkt von $G : \vec{x} = (-1,4,-2) + t(1,-1,-2)$ und $E : \vec{x} = (2,5,-1) + r(4,0,-3) + s(-1,1,1)$.

7.8 Unter welchem Winkel schneiden sich folgende Ebenen?
$E_1 : \vec{x} = (1,2,3) + r(0,-1,2) + s(1,2,0)$, $\quad E_2 : x + y + 2z = 3$.

7.9 Man bestimme die Schnittmenge der Ebenen E_1 und E_2:

(a) $E_1 : \vec{x} = (0,1,1) + r(2,0,3) + s(1,2,1)$
$E_2 : -6x + y + 4z = 5$,

(b) $E_1 : \vec{x} = (1,-1,2) + r(2,3,0) + s(1,-2,1)$
$E_2 : \vec{x} = (2,1,0) + u(1,2,0) + v(0,2,1)$.

7/1

7.1 Man bestimme die Schnittmenge von jeweils zwei der drei Geraden:

$G_1: \ \vec{x} = (1,-2,1) + r(2,-3,1),$
$G_2: \ \vec{x} = (3,-3,4) + s(-2,5,1),$
$G_3: \ \vec{x} = (2,0,1) + t(4,-10,-2).$

$$\left\{\begin{array}{l} G_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + r\cdot\vec{b}_1 \ ; \ \vec{a}_1 = \begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix} ; \ \vec{b}_1 = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \\ G_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + s\cdot\vec{b}_2 \ ; \ \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}3\\-3\\4\end{pmatrix} ; \ \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix} \\ G_3: \vec{x} = \vec{a}_3 + t\cdot\vec{b}_3 \ ; \ \vec{a}_3 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} ; \ \vec{b}_3 = \begin{pmatrix}4\\-10\\-2\end{pmatrix} \end{array}\right.$$

Lös: [Meitinger, Wirth]

$\boxed{G_1 \cap G_2}$ $(1,-2,1) + r(2,-3,1) = (3,-3,4) + s(-2,5,1)$. Ordnen ergibt:

$$r(2,-3,1) - s(-2,5,1) = (2,-1,3)$$

Koordinatenvergleich liefert das LGS

r	s	
2	2	2
−3	−5	−1
1	−1	3

mit der Lösung $r = 2$, $s = -1$.

G_1 und G_2 schneiden sich folglich im Endpunkt von
$\vec{x}_0 = (1,-2,1) + 2(2,-3,1) = (3,-3,4) - 1(-2,5,1) = (5,-8,3)$.
$G_1 \cap G_2 = \underline{\underline{\{(5,-8,3)\}}}$.

$\boxed{G_2 \cap G_3}$ Gleichsetzen der Gleichungen von G_2 und G_3 liefert das LGS

s	t	
−2	−4	1
5	10	−3
1	2	3

Dieses LGS ist unlösbar.
Die Geraden schneiden sich nicht.
$G_2 \cap G_3 = \underline{\underline{\emptyset}}$.

Da die Richtungsvektoren von G_2, G_3 linear abhängig sind, sind die Geraden parallel.

$\boxed{G_1 \cap G_3}$ Man erhält wieder ein unlösbares LGS, $G_1 \cap G_3 = \underline{\underline{\emptyset}}$.
G_1 und G_3 schneiden sich nicht und sind nicht parallel, solche Geraden nennt man *windschief.*

Bemerkungen:

$G_1 \cap G_2$:

(i) Prüfen auf Parallelität:

→ gibt es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{b}_1 = \lambda \cdot \vec{b}_2$?

$$\Gamma \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix}-2\\5\\1\end{pmatrix} \iff \left.\begin{array}{l} 2 = -2\lambda \Rightarrow \lambda = -1 \\ -3 = 5\lambda \Rightarrow \lambda = -5/3 \\ 1 = 1\cdot\lambda \Rightarrow \lambda = 1 \end{array}\right\} \lightning, \text{ also } \vec{b}_1 \nparallel \vec{b}_2$$

⟹ es gibt kein solches λ, d.h. G_1 ist nicht parallel zu G_2 (in Zeichen: $G_1 \nparallel G_2$

L

(ii) Suche des Schnittpunkts:

→ gibt es $r, s \in \mathbb{R}$, sodaß eine Lösung des durch die Bedingung

$$\vec{a}_1 + r \cdot \vec{b}_1 = \vec{a}_2 + s \cdot \vec{b}_2$$

gegebenen LGS existiert?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2 \cdot r + 2 \cdot s &= 2 \Rightarrow s = 1 - r \\ -3 \cdot r - 5 \cdot s &= -1 \\ 1 \cdot r - 1 \cdot s &= 3 \end{aligned}$$

$$r - 1 + r = 3 \Rightarrow \underline{\underline{r = 2}} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{s = -1}}$$

⇝ überprüfe von $r = 2$, $s = -1$ für die dritte Gl.

$$-3 \cdot r - 5 \cdot s = -3 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) = -6 + 5 = \underline{\underline{-1}}$$

⇒ es gibt einen Schnittpunkt, und dieser läßt sich bestimmen aus

$$G_1: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

oder

$$G_2: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 3 \end{pmatrix}}}$$

<u>$G_2 \cap G_3$</u>: (i) Parallelität?

$$\vec{b}_2 = \lambda \cdot \vec{b}_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} -2 &= 4 \cdot \lambda &\Rightarrow \lambda = -(1/2) \\ 5 &= -10 \cdot \lambda &\Rightarrow \lambda = -(1/2) \\ 1 &= -2 \cdot \lambda &\Rightarrow \lambda = -(1/2) \end{aligned}$$

$\rightarrow \vec{b}_2 \parallel \vec{b}_3 \Rightarrow G_1$ parallel G_2

(ii) Gibt es einen gemeinsame Punkt?

<u>Bed</u>: Lösbarkeit des LGS: $\vec{a}_2 + s \cdot \vec{b}_2 = \vec{a}_3 + t \cdot \vec{b}_3$

7.2 *Man berechne ggf. den Schnittwinkel der folgenden beiden Geraden:*
$G_1: \vec{x} = (1,-2,1) + r(2,-3,1)$ und $G_2: \vec{x} = (3,-3,4) + s(-2,5,1)$.

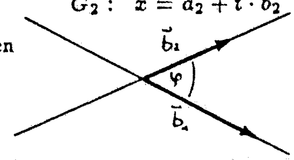
Lös:

Schnittwinkel zweier sich schneidender Geraden

$G_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + t\cdot\vec{b}_1$
$G_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + t\cdot\vec{b}_2$

Der Winkel φ zwischen zwei sich schneidenden Geraden ist der Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren.

$\cos\varphi = \frac{\vec{b}_1\cdot\vec{b}_2}{|\vec{b}_1|\cdot|\vec{b}_2|}$ mit $\varphi = \sphericalangle(\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \sphericalangle(G_1, G_2)$.



Die beiden Geraden schneiden sich, siehe BEI 5.29

$$\cos\varphi = \frac{(2,-3,1)\cdot(-2,5,1)}{|(2,-3,1)|\cdot|(-2,5,1)|} = \frac{-18}{\sqrt{14}\sqrt{30}} \approx -0.8783 \Longrightarrow \varphi \approx \underline{151.44^0}.$$

φ ist der Winkel zwischen den Richtungsvektoren der Geraden. Natürlich kann auch $28.56^o = 180^o - \varphi$ als Winkel zwischen den Geraden angesehen werden!

7.3 *Man bestimme den Abstand der Geraden $G_1: \vec{x} = (0,1,-2) + r(1,1,-3)$ und $G_2: \vec{x} = (0,1,2) + s(-1,-1,3)$.*

$G_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + r\cdot\vec{b}_1 \; ; \; \vec{a}_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}, \vec{b}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}$

$G_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + s\cdot\vec{b}_2 \; ; \; \vec{a}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$

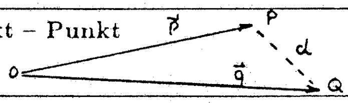
Lös: (i) Parallelität prüfen, d.h. gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\vec{b}_1 = \lambda\cdot\vec{b}_2$:

$\begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -1}} \rightarrow G_1 \parallel G_2$

(ii) Abstand (G_1, G_2) zurückführen auf Abstand (Pkt./Ger.

Abstand Punkt – Punkt

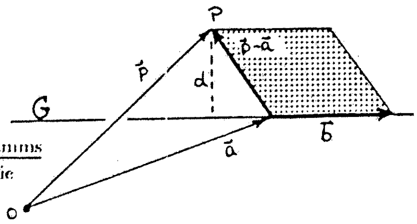
$d = |\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{QP}| = |\vec{q} - \vec{p}| = |\vec{p} - \vec{q}|$



Abstand Punkt – Gerade

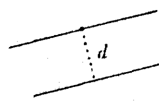
P, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$
$G: \vec{x} = \vec{a} + t\cdot\vec{b}$

$d = \frac{|\vec{b}\times(\vec{p}-\vec{a})|}{|\vec{b}|} = \frac{\text{Fläche des Parallelogramms}}{\text{Länge der Grundlinie}}$



Abstand zweier paralleler Geraden

Man erhält ihn, indem man den Abstand d eines beliebigen Punktes der einen Geraden zur anderen Geraden bestimmt.



$$\Longrightarrow \quad d = d(G_1, G_2) = \frac{|(1,1,-3)\times(0,0,4)|}{|(1,1,-3)|} = \frac{|(4,-4,0)|}{\sqrt{11}} = 4\sqrt{\frac{2}{11}} \approx \underline{1.706}.$$

7.4 Gegeben sind die beiden Geraden $G_1: \vec{x} = (3,-2,3) + r(1,2,-1)$
$G_2: \vec{x} = (-1,2,-3) + s(1,0,3)$

7/4

(a) *Man zeige: G_1 und G_2 sind windschief.*

(b) *Man berechne ihren Abstand $d(G_1, G_2)$.*

(c) *Man gebe die beiden parallelen Ebenen E_1 bzw. E_2 an, in denen G_1 bzw. G_2 liegen.*

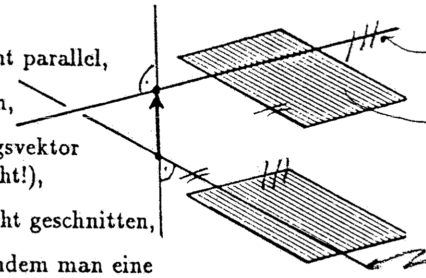
(d) *Man berechne die Gerade L, die G_1 und G_2 senkrecht schneidet, sowie die beiden Punkte P_1 auf G_1 und P_2 auf G_2 mit kürzestem Abstand.*

Vorbemerkung zur Lösung:

Windschiefe Geraden

!

- haben keinen Schnittpunkt und sind nicht parallel,
- liegen in verschiedenen parallelen Ebenen,
- haben genau einen kürzesten Verbindungsvektor (dieser steht auf beiden Geraden senkrecht!),
- werden von genau einer Geraden senkrecht geschnitten,
- *entstehen* aus zwei parallelen Geraden, indem man eine in der zu einer Verbindungsstrecke senkrechten Ebene dreht.



$G_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + t \cdot \vec{b}_1$

$E_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + t \cdot \vec{b}_1 + s \cdot \vec{b}_2$

$G_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + s \cdot \vec{b}_2$

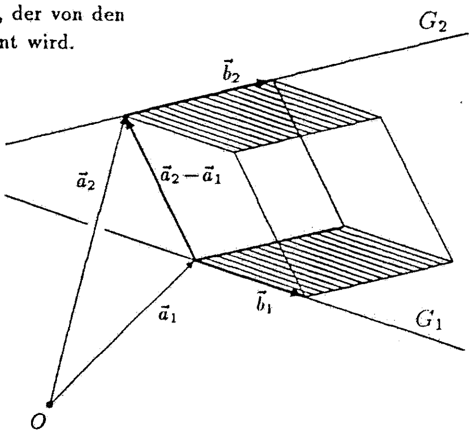
$E_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + s \cdot \vec{b}_2 + t \cdot \vec{b}_1$

Abstand nicht paralleler Geraden

$G_1: \; = \vec{a}_1 + t \cdot \vec{b}_1$
$G_2: \; = \vec{a}_2 + t \cdot \vec{b}_2$

Der Abstand ist die Höhe des Spats, der von den Vektoren $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ aufgespannt wird.

$$\text{Abstand} = d(G_1, G_2) = \frac{|<\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{b}_2>|}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} = \text{Höhe des Spats} = \frac{\text{Volumen des Spats}}{\text{Grundfläche des Spats}}$$



Schneiden sich G_1 und G_2, so liegen $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$, $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ in einer Ebene, ihr Spatprodukt und somit der Abstand von G_1 und G_2 ist 0.

Schneiden sich die nicht parallelen Geraden nicht, so heißen sie windschief.

$$G_1, G_2 \quad \text{windschief} \iff <\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{b}_2> \neq 0.$$

Lösung:

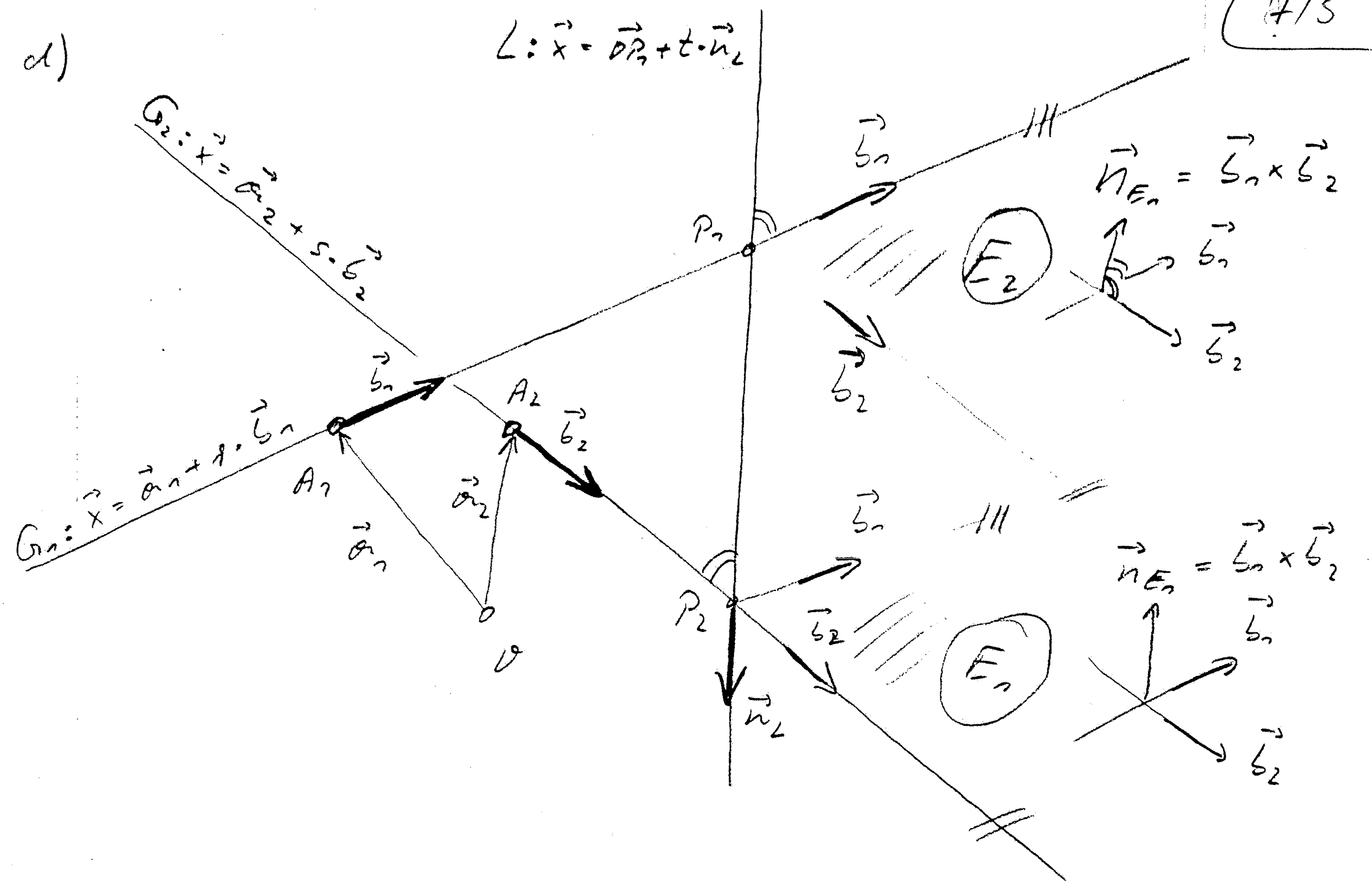
(a) G_1, G_2 sind windschief, da $<\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{b}_2> = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -28 \neq 0.$

Oder: G_1 und G_2 sind nicht parallel, da $(1,2,-1)$ und $(1,0,3)$ linear unabhängig sind. Sie haben keinen Schnittpunkt, da das entstehende LGS ... keine Lösung hat. } vgl. ! oben

(b) $$d = \frac{|<\vec{a}_2 - \vec{a}_1, \vec{b}_1, \vec{b}_2>|}{|\vec{b}_1 \times \vec{b}_2|} = \frac{\left|\begin{vmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ -6 & -1 & 3 \end{vmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-28|}{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{28}{2\sqrt{14}} = \underline{\underline{\sqrt{14}}}.$$

(c) G_1 liegt in $E_1: \; \vec{x} = (3,-2,3) + r(1,2,-1) + s(1,0,3)$.
G_2 liegt in $E_2: \; \vec{x} = (-1,2,-3) + r(1,2,-1) + s(1,0,3)$. Es gilt $E_1 || E_2$. } vgl. Bild

d)



<u>Es muß gelten:</u>

$$\vec{a}_1 + r \cdot \vec{b}_1 + t \cdot \vec{n}_L - s \cdot \vec{b}_2 - \vec{a}_2 = 0 \quad \Big\} \quad \text{„Streckenzug"} \quad \overline{0 A_1 P_1 P_2 A_2 0}$$

$\vec{n}_L$ aus der Bed.: $\begin{cases} L \perp G_1 \\ L \perp G_2 \end{cases}$

also: $\vec{n}_L = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$

$\Rightarrow$ LGS zur Bestimmung von r, t, s $\Big\} \Rightarrow$ $P_1 = \vec{a}_1 + r \cdot \vec{b}_1$
$P_2 = \vec{a}_2 + s \cdot \vec{b}_2$

Lös. aus [Merzinger, Wirth]:

(d) L läßt sich leicht aus P_1 und P_2 berechnen, oder auch aus P_1 und $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$, da $\vec{b}_1 \times \vec{b}_2$ ja ein Richtungsvektor von L ist.

Man betrachtet den geschlossenen Streckenzug:
$\vec{a}_1 + r_0\vec{b}_1 + t_0(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) - s_0\vec{b}_2 - \vec{a}_2 = \vec{0}$.

Aus dieser einen Vektorgleichung lassen sich die drei Unbekannten r_0, s_0, t_0 berechnen:

Das LGS $r_0\vec{b}_1 - s_0\vec{b}_2 + t_0(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = -\vec{a}_1 + \vec{a}_2$ ist eindeutig lösbar:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_0 \\ s_0 \\ t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{matrix} r_0 = 1 \\ s_0 = 2 \\ t_0 = -\frac{1}{2} \end{matrix}$$

Man erhält also: $P_1 = \vec{a}_1 + r_0\vec{b}_1 = (3,-2,3) + 1(1,2,-1) = (4,0,2)$.
$P_2 = \vec{a}_2 + s_0\vec{b}_2 = (-1,2,-3) + 2(1,0,3) = (1,2,3)$.

Also: $L: \ \vec{x} = \vec{p}_1 + r(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) = (4,0,2) + r(-3,2,1)$,
oder auch $L: \ \vec{x} = \vec{p}_1 + s(\vec{b}_1 \times \vec{b}_2) = (4,0,2) + s(6,-4,-2)$.

Die Gerade L ergibt sich auf 2 mögl. Arten:

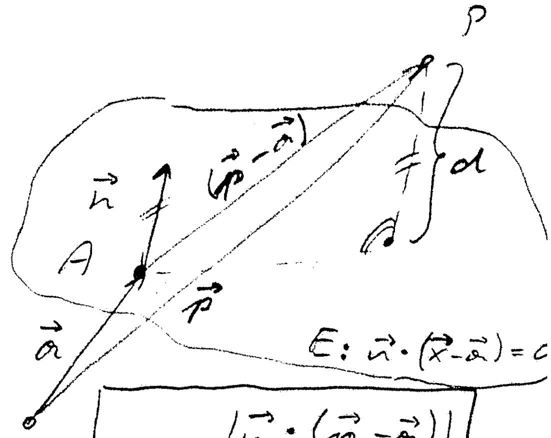
(i) $L: \vec{x} = \vec{OP_1} + t \cdot \overline{P_1}$

(ii) $L: \vec{x} = \vec{OP_1} + t \cdot \vec{n}_L$
mit $\vec{n}_L = \vec{b}_1 \times \vec{b}_2$

7.5 Man berechne den Abstand A von $P=(2,-2,3)$ zu $E: 2x-y+2z=6$.

Vorbemerkung zur Lösung:

Abstand Punkt – Ebene
Ist $E: \vec{n}\vec{x}=d$ (HNF: $\lvert\vec{n}\rvert=1, d\geq 0$) und P Endpunkt des Vektors $\vec{p}$, so ist
$A=\lvert\vec{n}\cdot\vec{p}-d\rvert$ der **Abstand** von P zu E.
Ist $\begin{Bmatrix}\vec{n}\cdot\vec{p}>d\\ \vec{n}\cdot\vec{p}=d\\ \vec{n}\cdot\vec{p}<d\end{Bmatrix}$, liegt P $\begin{cases}\text{auf der anderen Seite von } E \text{ wie der Nullpunkt,}\\ \text{auf der Ebene } E,\\ \text{auf der gleichen Seite von } E \text{ wie der Nullpunkt.}\end{cases}$



$$\boxed{d=\frac{\lvert\vec{n}\cdot\vec{p}-\vec{n}\cdot\vec{a}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}} \Longleftarrow \boxed{d=\frac{\lvert\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}}$$

Lös. der Aufgabe:

(i) Verwendung der HNF der Ebene:

$\lvert(2,-1,2)\rvert=\sqrt{9}=3 \Longrightarrow \vec{n}=(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}) \Longrightarrow E: \frac{2}{3}x-\frac{1}{3}y+\frac{2}{3}z=2$ (HNF).

$\vec{n}\cdot\vec{p}=(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3})\cdot(2,-2,3)=4 \Longrightarrow A=\lvert\vec{n}\cdot\vec{p}-d\rvert=\lvert 4-2\rvert=\underline{\underline{2}}$.

(ii) Mit Formel aus Vorlesung:

$$\boxed{d=\frac{\lvert\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}} \qquad \vec{n}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix},\quad \vec{p}=\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix},\quad \vec{n}\cdot\vec{a}=6$$

$$=\frac{\lvert\vec{n}\cdot\vec{p}-\vec{n}\cdot\vec{a}\rvert}{\lvert\vec{n}\rvert}$$

$$=\frac{\lvert 2\cdot 2+(-1)\cdot(-2)+2\cdot 3-6\rvert}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{6}{\sqrt{9}}=\frac{6}{3}=\underline{\underline{2}}$$

7.6 *Man berechne den Abstand vom Punkt $P=(0,2,2)$ zur Ebene $E: \vec{x}=(1,2,-3)+r(2,0,-1)+s(-3,2,0)$. Auf welcher Seite der Ebene liegt P?*

Lös: Umformung der Parameterdarstellung in die HNF:

$\vec{n}=(2,0,-1)\times(-3,2,0)=(2,3,4) \Rightarrow E: (2,3,4)(x,y,z)=(2,3,4)(1,2,-3)=-4$

also $E: 2x+3y+4z=-4$ und $E: -\frac{2}{\sqrt{29}}-\frac{3}{\sqrt{29}}-\frac{4}{\sqrt{29}}=\frac{4}{\sqrt{29}}$ (HNF).

$\vec{n}\cdot\vec{p}=-\frac{1}{\sqrt{29}}(2,3,4)\cdot(0,2,2)=-\frac{14}{\sqrt{29}}<\frac{4}{\sqrt{29}}=d$.

Also ist $A=\lvert\vec{n}\cdot\vec{p}-d\rvert=\frac{1}{\sqrt{29}}\lvert-14-4\rvert=\underline{\underline{\frac{18}{\sqrt{29}}}}$ der Abstand von P zu E, und wegen $\vec{n}\cdot\vec{p}<d$ liegt P auf der gleichen Seite von E wie der Nullpunkt.

7.7 Man berechne ggf. den Schnittpunkt von $G: \vec{x} = (-1,4,-2)+t(1,-1,-2)$ und $E: \vec{x} = (2,5,-1)+r(4,0,-3)+s(-1,1,1)$.

Vorbemerkung zur Lösung:

Schnittpunkt Gerade – Ebene	$G: \ \vec{x} = \vec{a}+t\vec{b}$ $E: \ \vec{n}\cdot\vec{x} = d$

Sind G und E nicht parallel, d.h. gilt $\vec{n}\cdot\vec{b} \neq 0$,
dann gilt für den **Durchstoßpunkt** $\vec{x}_0$: $\quad \vec{x}_0 = \vec{a}+t_0\vec{b}$ und $\vec{n}\cdot\vec{x}_0 = d$.
Multiplizieren der ersten Gleichung mit $\vec{n}$ und Auflösen nach t_0 ergibt:
Durchstoßpunkt: $\quad \vec{x}_0 = \vec{a}+t_0\vec{b} \quad$ mit $t_0 = \frac{d-\vec{n}\cdot\vec{a}}{\vec{n}\cdot\vec{b}}$, $\quad$ falls $\vec{n}\cdot\vec{b}\neq 0$, also $G \not\parallel E$.

Bem: Für Ebene in der Darstellung
$E: \ \vec{n}\cdot(\vec{x}-\vec{a}_1) = 0$, d.h.
$\vec{n}\cdot x = \underbrace{\vec{n}\cdot\vec{a}_1}_{=:d} = d$
gilt:
$$\boxed{t_0 = \frac{\vec{n}(\vec{a}_1-\vec{a})}{\vec{n}\cdot\vec{b}}}$$
(vgl. Vorlesung)

Lös:

(i) Umrechnung der Ebene in Parameterdarstellung
$E: \ \vec{x} = \vec{a}_1 + r\cdot\vec{b}_1 + s\cdot\vec{c}_1$
und Bestimmung des Schnittpunkts von E mit der Gerade
$G: \ \vec{x} = \vec{a}+t\cdot\vec{b}$
aus der Bedingung
$\vec{a}+t\cdot\vec{b} = \vec{a}_1 + r\cdot\vec{b}_1 + s\cdot\vec{c}_1 \ \Big\} \Rightarrow$ LGS für t, r, s !

Bem: Lösungsweg aufwendig!

Natürlich kann man das LGS
$$\begin{pmatrix}-1\\4\\-2\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\5\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \text{ also } \begin{array}{ccc|c} r & s & t & \\ \hline -4 & 1 & 1 & 3\\ 0 & -1 & -1 & 1\\ 3 & -1 & -2 & 1\end{array} \text{ lösen.}$$
$\Big\}$ Lösung aus [Merziger, Wirth]

(ii) Anwendung der obigen Formeln
(d.h. Ebene muß in Koordinatendarstellung) vorliegen!

Einfacher ist es, E in Koordinatenform umzuwandeln und den Schnittpunkt wie oben beschrieben zu berechnen:

$E: 3x - y + 4z = -3$ siehe BEI 5.47, also $t_0 = \frac{-3-(3,-1,4)(-1,4,-2)}{(3,-1,4)(1,-1,-2)} = -3$.

Durchstoßpunkt: $\vec{x}_0 = \vec{a}+t_0\vec{b} = (-1,4,-2)-3(1,-1,-2) = \underline{\underline{(-4,7,4)}}$.

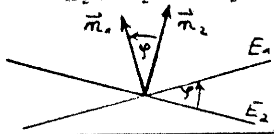
7.8 Unter welchem Winkel schneiden sich folgende Ebenen?
$E_1 : \vec{x} = (1,2,3) + r(0,-1,2) + s(1,2,0), \qquad E_2 : x + y + 2z = 3.$

Vorbemerkung zur Lösung:

Schnittwinkel zweier sich schneidender Ebenen

$E_1 : \ \vec{n}_1 \cdot \vec{x} = d_1$
$E_2 : \ \vec{n}_2 \cdot \vec{x} = d_2$

Der Winkel φ zwischen zwei sich schneidenden Ebenen ist der Winkel zwischen ihren Normalenvektoren:
$\cos\varphi = \dfrac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$ mit $\varphi = \sphericalangle(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \sphericalangle(E_1, E_2)$.



Bem.: Die Normalenvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ der beiden Ebenen werden benötigt!

Lös.:

Weg: (i) Bereitstellen der Normalenvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2$
(ii) anwenden obiger Formel

$\vec{n}_1 = (0,-1,2) \times (1,2,0) = (-4,2,1) \Rightarrow \cos\varphi = \dfrac{(-4,2,1)(1,1,2)}{\sqrt{21}\sqrt{6}} = 0 \Rightarrow \varphi = \underline{\underline{90^0}}.$
$\vec{n}_2 = (1,1,2)$

7.9 Man bestimme die Schnittmenge der Ebenen E_1 und E_2:

(a) $E_1 : \vec{x} = (0,1,1) + r(2,0,3) + s(1,2,1)$
$E_2 : -6x + y + 4z = 5,$

(b) $E_1 : \vec{x} = (1,-1,2) + r(2,3,0) + s(1,-2,1)$
$E_2 : \vec{x} = (2,1,0) + u(1,2,0) + v(0,2,1).$

Vorbemerkung zur Lösung:

Schnittmenge zweier Ebenen

Die Schnittmenge zweier Ebenen erhält man, indem man ein LGS löst.
Sind die Ebenen nicht parallel, so ist die Schnittmenge eine Gerade.
Am einfachsten ist es, wenn beide Ebenen in Koordinatendarstellung gegeben sind. Ist eine oder sind beide in Parameterdarstellung gegeben, so formt man diese zweckmäßigerweise in Koordinatendarstellung um!

!

Ls: (a) (1) Einsetzen von $E_1 : \vec{x} = (2r+s, 1+2s, 1+3r+s)$ in E_2 ergibt:
$-6(2r+s) + (1+2s) + 4(1+3r+s) = 5 \Longrightarrow 5 = 5$, Diese Gleichung ist für alle r, s richtig, die Ebenen sind gleich: $E_1 = E_2 = E_1 \cap E_2$.
(2) E_1 in Koordinatendarstellung umwandeln ergibt:
$\vec{n} = (2,0,3) \times (1,2,1) = (-6,1,4) \Longrightarrow E_1 : -6x + y + 4z = 5.$
Man sieht, die Ebenen sind gleich: $E_1 = E_2 = E_1 \cap E_2$.

kompakte Lösung auf Basis der Koordinatendarstellung der Ebenen

(b) (1) Gleichsetzen führt auf ein LGS:

r	s	u	v		
2	1	−1	0	1	
3	−2	−2	−2	2	1
0	1	0	$\boxed{-1}$	−2	−2
2	1	$\boxed{-1}$	0	1	2
3	−4	−2	0	6	−1
$\boxed{1}$	6	0	0	−4	

Das LGS hat eine einparametrige Lösungsschar (Parameter ist t):

$s = t$
$r = -4 - 6t$
$u = -1 + 2(-4 - 6t) + t$
$\quad = -9 - 11t$
$v = 2 + t$

Setzt man r, s in E_1 ein, erhält man:

$G := E_1 \cap E_2 : \quad \vec{x} = (1,-1,2) + (-4-6t)(2,3,0) + t(1,-2,1),$
$\underline{\vec{x} = (-7,-13,2) + t(-11,-20,1).}$

(2) Einfacher ist es, E_1 und E_2 in Koordinatenform zu bringen:
$\vec{n}_{E_1} = (2,3,0) \times (1,-2,1) = (3,-2,-7) \Longrightarrow E_1 : 3x - 2y - 7z = -9,$
$\vec{n}_{E_2} = (1,2,0) \times (0,2,1) = (2,-1,2) \Longrightarrow E_2 : 2x - y + 2z = 3.$
$E_1 \cap E_2$ ist die Lösungsmenge des LGS:

x	y	z	
3	−2	−7	−9
2	−1	2	3

$\Longrightarrow \begin{array}{l} x = 15 - 11r \\ y = 27 - 20r \\ z = r \end{array} \Longrightarrow G : \vec{x} = \begin{pmatrix} 15 \\ 27 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -11 \\ -20 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Also: $G := E_1 \cap E_2 : \quad \underline{\vec{x} = (15,27,0) + r(-11,-20,1).}$
Die Ergebnisse stimmen überein: $r = 2 \Longrightarrow P = (-7,-13,2) \in G$.

Blatt 6: Beschreibung von Geraden und Ebenen im dreidimensionalen Raum

6.1 Liegen die beiden Punkte $P_1 = (1, 2, 10)$, $P_2 = (3, 8, 4)$ auf der Geraden $G: \ \vec{x} = (1, 0, 2) + t(1, 4, 1)$?

Zeigen Sie:

6.2 Die beiden Geraden $\begin{array}{l} G_1: \ \vec{x} = (-2, 1, -4) + r(-1, 1, -2) \\ G_2: \ \vec{x} = (1, -2, 2) + s(2, -2, 4) \end{array}$ sind gleich!

6.3 (a) Man gebe eine Parameterdarstellung der Ebene, die den Punkt $P = (3, -3, 4)$ und die Gerade $G: \ \vec{x} = (2, -1, 1) + r(0, 1, 2)$ enthält.

(b) Liegt der Punkt $(0, 1, 1)$ auf der Ebene $E: \ \vec{x} = (2, -1, 1) + r \cdot (1, 1, 1) + s \cdot (0, 1, 2)$?

6.4 Man bestimme eine Parameterdarstellung der Ebene durch die Punkte $P_1 = (2, 1, -3)$, $P_2 = (-1, 3, -4)$, $P_3 = (1, 2, 3)$.

6.5 Man bestimme die beiden Normaleneinheitsvektoren der Ebene $E: \ \vec{x} = (3, 2, 1) + r(1, 1, 1) + s(2, 0, 1)$.

6.6 Ist $\vec{a} = (1, 2, 1)$ normal zu $E: \ \vec{x} = (1, 3, 1) + r(1, 2, -1) + s(1, 1, 1)$?

6.7 Liegt der Punkt $(5, -3, 4)$ auf der Ebene $E: \ 3x + 6y + z = 3$?

6.8 (a) Man bestimme eine Gleichung der Ebene E durch den Punkt $(3, 2, 1)$, die senkrecht ist zu $(2, -3, 4)$.

(b) Man bestimme eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte $(1, 5, 1)$ und $(4, 3, -1)$, die parallel zur y-Achse verläuft.

6.9 Man bestimme eine Koordinatendarstellung der Ebene $E: \vec{x} = (2, 5, -1) + r(4, 0, -3) + s(-1, 1, 1)$.

6.10 Man bestimme eine Parameterdarstellung von $E: 2x - 3z = 4$.

6.11 Man bestimme die HESSEsche Normalform der Ebene $E: x - y + 2z = -5$.

6.12 Es sei $E: \vec{x} = (2, 5, -1) + r(4, 0, -3) + s(-1, 1, 1)$.
Man bestimme die HESSEsche Normalform von E sowie den Abstand von E zum Nullpunkt.

6.1 Liegen die beiden Punkte $P_1 = (1,2,10)$, $P_2 = (3,8,4)$ auf der Geraden $G: \vec{x} = (1,0,2) + t(1,4,1)$?

6/1

Lös.: Läge P_1 auf G, so gäbe es einen Parameterwert t_1, für den gilt $(1,2,10) = (1,0,2) + t_1(1,4,1)$ ist. Komponentenvergleich liefert: $1 = 1 + t_1, 2 = 4t_1, 10 = 2 + t_1$.
Dieses LGS ist unlösbar, also liegt P_1 nicht auf G. (*)

P_2 liegt auf G, da das entsprechende LGS lösbar ist ($t_2 = 2$). (**)

zu (*): $P_1 \in G$, d.h. es gibt ein $t_1 \in \mathbb{R}$ mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}}$$

LGS zur Festlegung von t_1:

$$t_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\8\end{pmatrix} \iff \left.\begin{array}{lll} 1\cdot t_1 = 0 & \Rightarrow t_1 = 0 \\ 4\cdot t_1 = 2 & \Rightarrow t_1 = \frac{1}{2} \\ 1\cdot t_1 = 8 & \Rightarrow t_1 = 8 \end{array}\right\} \lightning$$

zu (**): $P_2 \in G$, d.h. es gibt ein $t_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix}3\\8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{LGS:} \left.\begin{array}{lll} 1\cdot t_2 = 2 & \Rightarrow t_2 = 2 \\ 4\cdot t_2 = 8 & \Rightarrow t_2 = 2 \\ 1\cdot t_2 = 2 & \Rightarrow t_2 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{t_2 = 2}}$$

6.2 Zeigen Sie:
Die beiden Geraden $G_1: \vec{x} = (-2,1,-4) + r(-1,1,-2)$, $G_2: \vec{x} = (1,-2,2) + s(2,-2,4)$ sind gleich!

Lös.: Das LGS $(1,-2,2) = (-2,1,-4) + r(-1,1,-2)$ ist lösbar mit $r = -3$, also liegt $(1,-2,2)$ auf G_1. Weiter ist $(2,-2,4) = -2(-1,1,-2)$. Also sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden linear abhängig. Zwei Geraden, die bei gleicher Richtung einen Punkt gemeinsam haben, sind gleich.

G_1 identisch G_2 $\iff$
- (i) Richtungsvektor von G_1 und Richtungsvektor von G_2 sind linear abhängig
- (ii) beide Geraden haben einen gemeinsamen Punkt

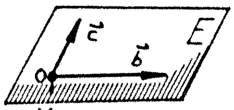
Zeige (i): Richtungsvektor G_1 ist $\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, Richtungsvektor G_2 ist $\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}2\\-2\\4\end{pmatrix} = (-2)\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$$

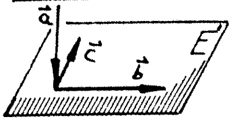
Zeige (ii): Suche nach einem gemeinsamen Punkt führt auf:

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{r = -3}}$$

Sind $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig und durchlaufen die Parameter r und s die reellen Zahlen, so liegen die Endpunkte der Vektoren $r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$ auf der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene.



$E: \ \vec{x} = r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$ ist eine Gleichung der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene durch den Nullpunkt.



$E': \ \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$ ist eine Gleichung der zur obigen Ebene parallelen Ebene, die durch den Endpunkt von $\vec{a}$ verläuft.

Parameterdarstellung der Ebene

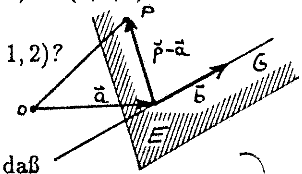
durch den Endpunkt von $\vec{a}$, aufgespannt von den beiden linear unabhängigen Vektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$:

$$E: \ \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c} \quad \text{mit } r, s \in \mathbb{R}.$$

6.3

(a) *Man gebe eine Parameterdarstellung der Ebene, die den Punkt $P = (3, -3, 4)$ und die Gerade $G: \ \vec{x} = (2, -1, 1) + r(0, 1, 2)$ enthält.*

(b) *Liegt der Punkt $(0, 1, 1)$ auf der Ebene $E: \ \vec{x} = (2, -1, 1) + r \cdot (1, 1, 1) + s \cdot (0, 1, 2)$?*



Lös

(a) $E: \ \vec{x} = (2, -1, 1) + r(0, 1, 2) + s((3, -3, 4) - (2, -1, 1))$
$\vec{x} = (2, -1, 1) + r(0, 1, 2) + s(1, -2, 3)$

Bem.: Es muß $P \notin G$ gelten! ⇝ evtl. vorher zu zeigen

(b) Wenn der Punkt auf der Ebene liegt, gibt es r und s, so daß $(0, 1, 1) = (2, -1, 1) + r(1, 1, 1) + s(0, 1, 2)$ also $(-2, 2, 0) = r(1, 1, 1) + s(0, 1, 2)$ ist. Koordinatenvergleich liefert das LGS:

$$\begin{aligned} r \quad &= -2 \\ r + s &= \ \ 2 \\ r + 2s &= \ \ 0 \end{aligned}$$

Dieses LGS ist offensichtlich unlösbar. Der Punkt $(0, 1, 1)$ liegt nicht auf der Ebene E. (+)

(+): LGS: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Longleftrightarrow \begin{aligned} 1 \cdot r + 0 \cdot s &= -2 \quad \Rightarrow r = -2 \\ 1 \cdot r + 1 \cdot s &= 2 \quad \Rightarrow s = 2 - r \Rightarrow s = 4 \\ 1 \cdot r + 2 \cdot s &= 0 \end{aligned}$$

Also: $r = -2$, $s = 4$

einsetzen: $r = 2, s = 4$

$\Rightarrow 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 4 = -2 + 8 = 6 \neq 0$ ↯

$\boxed{\text{Also: } P \notin E}$

Drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, bestimmen eine Ebene:

Parameterdarstellung der Ebene

durch **drei Punkte** P_1, P_2, P_3, die nicht auf einer Geraden liegen:

$$E: \ \vec{x} = \vec{p}_1 + r \cdot (\vec{p}_2 - \vec{p}_1) + s \cdot (\vec{p}_3 - \vec{p}_1) \quad \text{mit } r, s \in \mathbb{R}.$$

6.4

Man bestimme eine Parameterdarstellung der Ebene durch die Punkte $P_1 = (2, 1, -3)$, $P_2 = (-1, 3, -4)$, $P_3 = (1, 2, 3)$.

Lös:

$P_2 - P_1 = (-1, 3, -4) - (2, 1, -3) = (-3, 2, -1)$ ebenso: $P_3 - P_1 = (-1, 1, 6)$.

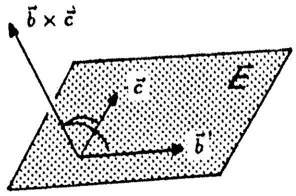
Also: $\quad E: \ \vec{x} = (2, 1-, 3) + r(-3, 2, -1) + s(-1, 1, 6)$.

Durch Vertauschen von P_1, P_2, P_3 erhält man andere Darstellungen, die jedoch die gleiche Ebene beschreiben.

(6.13

Ein Vektor heißt senkrecht (*orthogonal, normal*) zu einer Ebene, wenn er senkrecht auf allen Vektoren steht, die in der Ebene liegen, wenn er also insbesondere senkrecht auf den Richtungsvektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ der Ebene steht.

Ein zu einer Ebene senkrechter Vektor heißt **Normalenvektor** der Ebene.
Aus einer Parameterdarstellung der Ebene erhält man sofort einen Normalenvektor, nämlich $\vec{b} \times \vec{c}$. Jeder andere Normalenvektor hat die Form $t(\vec{b} \times \vec{c})$, $t \neq 0$.



6.5

Man bestimme die beiden Normaleneinheitsvektoren der Ebene
$E: \ \vec{x} = (3,2,1) + r(1,1,1) + s(2,0,1)$.

Lös:

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$$ ist Normalenvektor der Länge $\sqrt{6}$.

Also sind $\underline{\underline{\vec{n}_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)}}$ die gesuchten Normaleneinheitsvektoren.

6.6

Ist $\vec{a} = (1,2,1)$ *normal zu* $E: \ \vec{x} = (1,3,1) + r(1,2,-1) + s(1,1,1)$?

Lös

(i) Nein, denn $\vec{a}$ ist kein Vielfaches von $\vec{n} = (1,2,-1) \times (1,1,1) = (3,-2,-1)$.

(ii) Einfacher geht es so: $\vec{a}$ müßte senkrecht zu den Richtungsvektoren sein. Das ist wegen $\vec{a} \cdot (1,2,-1) = 4 \neq 0$ nicht der Fall!

Bem: Formaler Lösungsweg, d.h. Ansatz (i) geht immer!

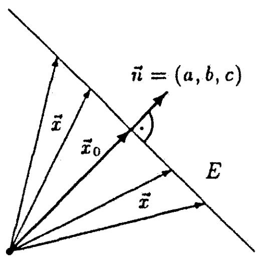
allg. Fall: $E: \vec{x} = \vec{OP} + t \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$
Dann gilt: $\vec{a} \perp E \iff (\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ und $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0)$

Die Lösungsmenge der Gleichung $ax + by + cz = d$ ist eine zweiparametrige Lösungsschar, also eine Ebene (falls nicht $a = b = c = 0$ ist, siehe auch BEI 12.10).

Mit dem Skalarprodukt kann man es so sagen:

Die Gleichung $ax + by + cz = d$ lösen heißt:

- Alle Vektoren $\vec{x} = (x, y, z)$ zu bestimmen, deren *Skalarprodukt* mit dem festen Vektor (a, b, c) gleich der Zahl d ist.
- Alle Vektoren zu berechnen, die – auf die Richtung von (a, b, c) projiziert – den gleichen Vektor $\vec{x}_0$ ergeben.



Koordinatendarstellung der Ebene

$$E: \begin{array}{ll} ax + by + cz = d \\ \vec{n} \cdot \vec{x} \qquad\quad = d \end{array} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} \vec{n} = (a,b,c) \neq (0,0,0) \\ \vec{n} = (a,b,c) \text{ ist } \textbf{Normalenvektor} \text{ von } E. \end{array}$$

Zwei Ebenen E_1, E_2 sind genau dann **parallel**, wenn ihre Normalenvektoren $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ linear abhängig sind.

$$E_1 \parallel E_2 \iff \exists \lambda \neq 0 \text{ mit } \vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2.$$

6.7

Liegt der Punkt $(5,-3,4)$ *auf der Ebene* $E: \ 3x + 6y + z = 3$?

Lös Nein, denn $3 \cdot 5 + 6 \cdot (-3) + 4 = 1 \neq 3$.

6.8

(a) *Man bestimme eine Gleichung der Ebene E durch den Punkt* $(3,2,1)$, *die senkrecht ist zu* $(2,-3,4)$.

(b) *Man bestimme eine Gleichung der Ebene E durch die Punkte* $(1,5,1)$ *und* $(4,3,-1)$, *die parallel zur y-Achse verläuft.*

Lös:

(a) $\vec{n} = (2,-3,4)$ ist ein Normalenvektor der gesuchten Ebene E. Damit kennt man die *linke Seite* der Ebenengleichung $E: \ 2x - 3y + 4z$.
Die *rechte Seite* bestimmt man so, daß $\vec{x}_0 = (3,2,1)$ die Gleichung erfüllt, d.h. aus $d = \vec{n} \cdot \vec{x}_0 = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 4$ erhält man: $E: \begin{array}{ll} \vec{n} \cdot \vec{x} & = \vec{n} \cdot \vec{x}_0 \\ \underline{2x - 3y + 4z =} & \underline{4.} \end{array}$

(b) Eine zur y-Achse parallele Ebene hat die Koordinatendarstellung $ax + cz = d$.
Einsetzen der Punkte ergibt:
$1a + 1c = d$, $4a - 1c = d$. Es folgt $a = \frac{2}{5}d$, $c = \frac{3}{5}d$.
Eine Ebenendarstellung ist $\underline{E: \ 2x + 3y = 5}$.

Bem, Gegeben ist
(i) Normalenvek.: $\vec{n} = \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix}$
(ii) Punkt $P = \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

Bem: $\parallel$ y-Achse heißt: $\vec{n} \perp$ y-Achse
$\Rightarrow \vec{n} = (a,0,c)^T$

Da man grundsätzlich zwei Möglichkeiten hat, eine Ebene darzustellen, interessiert es, diese beiden Darstellungen ineinander zu überführen:

Umformung
von Ebenendarstellungen

Parameterdarstellung in Koordinatendarstellung

Parameterdarstellung		Koordinatendarstellung
$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$	$\longrightarrow$ Multiplikation mit $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = (a,b,c)$	$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{a} = ax + by + cz = d$

Man multipliziert die Parameterdarstellung mit einem Vektor $\vec{n}$, der auf den Richtungsvektoren $\vec{b}$ und $\vec{c}$ senkrecht steht (Normalenvektor), z.B. mit $\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$.

Koordinatendarstellung in Parameterdarstellung

Koordinatendarstellung		Parameterdarstellung
$ax + by + cz = d$	$\longrightarrow$ Lösen des LGS	$\vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$

1 Gleichung, 3 Unbekannte

Man löst das LGS $ax + by + cz = d$.
Z.B., indem man, falls $a \neq 0$ ist, $y = r$ und $z = s$ setzt und nach x auflöst.
Das Ergebnis schreibt man vektoriell: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d/a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -b/a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -c/a \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

und erhält die Ebene in Parameterform (siehe z.B. BEI 5.45).

6.9 *Man bestimme eine Koordinatendarstellung der Ebene* $E : \vec{x} = (2,5,-1) + r(4,0,-3) + s(-1,1,1)$.

Lös:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$ ist ein Normalenvektor von E.

Multiplikation der Parameterdarstellung mit $\vec{n} = (3,-1,4)$ ergibt:

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot (2,5,-1) + r\underbrace{\vec{n} \cdot (4,0,-3)}_{=0} + s\underbrace{\vec{n} \cdot (-1,1,1)}_{=0}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot (2,5,-1)$$

$E: \quad 3x - y + 4z = -3$ (Koordinatenform).

6.10 *Man bestimme eine Parameterdarstellung von* $E : 2x - 3z = 4$.

Lös:

Das LGS hat eine zweiparametrige Lösung:
Setzt man $y = r$ und $z = s$, so erhält man: $x = \frac{1}{2}(4 + 3s) = 2 + 1.5s$. Also

$$\begin{matrix} x = 2 + 0r + 1.5s \\ y = 0 + 1r + \ \ 0s \\ z = 0 + 0r + \ \ 1s \end{matrix}$$, vektoriell geschrieben: $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ist in der Koordinatendarstellung der Ebenengleichung $E : \vec{n} \cdot \vec{x} = d$ der Normalenvektor $\vec{n}$ ein **Einheitsvektor** und ist $d \geq 0$, so spricht man von der **HESSEschen Normalform** (HNF) der Ebenengleichung. (Die Bedingung $d \geq 0$ wird vielfach nicht gestellt, dann gibt es natürlich zwei HESSEsche Normalformen.)

6.11 *Man bestimme die HESSEsche Normalform der Ebene* $E : x - y + 2z = -5$.

Lös:

$\vec{n} = (1,-1,2)$ ist ein Normalenvektor von E der Länge $\sqrt{6}$. Also sind $\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\vec{n}$ die Normaleneinheitsvektoren von E. Division der Ebenengleichung durch $-\sqrt{6}$ liefert die HESSEsche Normalform:

$$E : \ -\frac{1}{\sqrt{6}}x + \frac{1}{\sqrt{6}}y - \frac{2}{\sqrt{6}}z = \frac{5}{\sqrt{6}} \quad \text{(HNF)}.$$

HESSEsche Normalform

Ist $E : \vec{n}\vec{x} = d$ Ebenengleichung in HNF, also ($|\vec{n}| = 1$, $d \geq 0$), so gilt:

1) d ist der **Abstand** der Ebene zum Nullpunkt.
2) $\vec{n}$ zeigt vom Ursprung zu E hin.

Umformung

Koordinatendarstellung in HESSEsche Normalform:

Man dividiert die Koordinatenform $ax + by + cz = d$ durch den Betrag $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ des Normalenvektors $\vec{n} = (a,b,c)$ und macht ggf. die rechte Seite durch Multiplikation der Gleichung mit -1 positiv.

Parameterdarstellung in HESSEsche Normalform:

1. Parameterdarstellung in Koordinatendarstellung umformen.
2. Koordinatendarstellung in HESSEsche Normalform umformen.

6.12 *Es sei* $E : \vec{x} = (2,5,-1) + r(4,0,-3) + s(-1,1,1)$.
Man bestimme die HESSEsche Normalform von E sowie den Abstand von E zum Nullpunkt.

Lös:

$E : 3x - y + 4z = -3$ ist eine Koordinatenform von E.
Hierbei ist $\vec{n} = (3,-1,4)$ und $|\vec{n}| = |(3,-1,4)| = \sqrt{26}$.
$E : -\frac{3}{\sqrt{26}}x + \frac{1}{\sqrt{26}}y - \frac{4}{\sqrt{26}}z = \frac{3}{\sqrt{26}}$ ist die HESSEform von E.
Der Abstand der Ebene zum Nullpunkt beträgt $d = \frac{3}{\sqrt{26}}$.

Blatt 5: Vektoralgebra

5.1 Gegeben seien die Vektoren

$$\vec a = \begin{pmatrix} 2\\1\\0 \end{pmatrix},\quad \vec b = \begin{pmatrix} 0\\-1\\1 \end{pmatrix},\quad \vec c = \begin{pmatrix} 4\\3 \end{pmatrix},\quad \vec d = \begin{pmatrix} -1\\2\\2 \end{pmatrix},\quad \vec e = \begin{pmatrix} 0\\2\\-2 \end{pmatrix}.$$

a) Man berechne - sofern dies möglich ist -
$3\vec a$, $-2\vec b$, $2\vec a + 3\vec b - \vec d$, $2\vec d - \vec c + 3\vec e$, $2\vec e^T$, $3\vec c^T - \vec d^T$, $\vec b^T + 4\vec e$, $|\vec a|$, $|-2\vec b|$, $-2|\vec d|$, $2|\vec a| + 3|\vec b| - |\vec d|$, $|2\vec a + 3\vec b - \vec d|$, $|2\vec a| - |\vec c| + |3\vec e|$, $|2\vec a - \vec c + 3\vec e|$, $2|\vec e^T|$, $|3\vec c^T| - |\vec d|$, $|\vec b^T| + 4|\vec e|$.

b) Ermitteln Sie die Einheitsvektoren von $\vec a$, $\vec b$ und $\vec c$.

c) Welche der gegebenen Vektoren sind zueinander parallel, welche orthogonal?

d) Welchen Winkel schließen $\vec a$ und $\vec b$, $\vec d$ und $\vec e$ miteinander ein ?

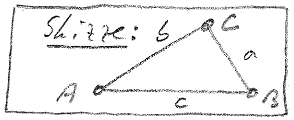
e) Welchen Betrag haben die Projektionen von $\vec a$ auf $\vec e$, von $\vec e$ auf $\vec a$, von $\vec b$ auf $\vec d$, von $\vec e$ auf $\vec b$?

f) Man berechne $(\vec a, \vec a)$, $(\vec a, \vec e)$, $\vec a \times \vec e$, $(\vec b \times \vec d, \vec e)$, $(\vec a \times \vec b) \times \vec e$, $\vec a \times (\vec b \times \vec e)$, $(\vec a + \vec d) \times (\vec b \times \vec d)$, $(\vec a \times \vec e, \vec b \times \vec e)$, $(\vec a \times \vec e, \vec d \times \vec e)$.

g) Die Konstanten α, β, γ sind so zu bestimmen, daß $\alpha\vec a + \vec b$ orthogonal zu $\vec b$, $\vec e$ orthogonal zu $\vec a + \beta\vec b$ ist, $\vec a + \gamma\vec b$ mit der y-Achse einen Winkel von 45^0 bildet.

5.2 Ein Dreieck in der x, y-Ebene hat die Eckpunkte $A(-2, -4)$, $B(3, 1)$, $C(0, 5)$. Ermitteln Sie

a) die Vektoren $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$,
b) die Seitenlängen des Dreiecks,
c) die Innenwinkel des Dreiecks,
d) den Mittelpunkt P der Seite a,
e) die Winkelhalbierende des Winkels CAB,
f) den Flächeninhalt des Dreiecks,
g) den Eckpunkt D des Parallelogramms $ABCD$,
h) die Längen der Diagonalen des Parallelogramms $ABCD$,
i) den Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$.



5.3 Lösen Sie die in A5.2 gestellten Aufgaben bei Vorgabe des Dreiecks im $\mathbb{R}^3$ mit den Eckpunkten $A(1, -2, -3)$, $B(-2, 2, 2)$, $C(0, 2, 6)$.

5.4 $P_1(1, 5)$, $P_2(4, 1)$ seien Punkte in der x, y-Ebene.

a) Wie muß die Ordinate y des Punktes $P_3(-2, y)$ gewählt werden, damit das Dreieck mit den Eckpunkten P_1, P_2, P_3

α) gleichschenklig ist ?

β) bei P_1 bzw. bei P_2 einen rechten Winkel besitzt ?

b) Welcher Beziehung müssen die Koordinaten des Punktes $P(x, y)$ genügen, wenn das Dreieck P_1P_2P bei P einen rechten Winkel besitzen soll?

[Quelle: Scholz "Mathematik in Übungsaufgaben"]

Vorbemerkung zu den Aufg. 5.5 - 5.7:
Diese Aufg. führen auf lineare Gleichungssysteme deren Behandlung in der Vorlesung in Kap. 2 besprochen wird!

5.5 Die folgenden Vektoren sind auf lineare Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit zu untersuchen:

a) $\vec x_1 = \begin{pmatrix} -1\\3\\2 \end{pmatrix}$, $\vec x_2 = \begin{pmatrix} 1\\-2\\-1 \end{pmatrix}$, $\vec x_3 = \begin{pmatrix} 1\\0\\1 \end{pmatrix}$

b) $\vec a = \begin{pmatrix} 2\\1\\1 \end{pmatrix}$, $\vec b = \begin{pmatrix} -1\\0\\1 \end{pmatrix}$, $\vec c = \begin{pmatrix} 1\\-1\\0 \end{pmatrix}$

c) $\vec a = \begin{pmatrix} -2\\0\\1 \end{pmatrix}$, $\vec b = \begin{pmatrix} 1\\-1\\-2 \end{pmatrix}$, $\vec c = \begin{pmatrix} 1\\1\\-1 \end{pmatrix}$, $\vec d = \begin{pmatrix} -1\\3\\1 \end{pmatrix}$.

5.6 Lassen sich die Vektoren $\vec a = (2, 3, 5)^T$ bzw. $\vec b = (3, 2, 1)^T$ als Linearkombination der Vektoren $\vec x_1$, $\vec x_2$, $\vec x_3$ aus Aufgabe 5.5 darstellen?

5.7 Es seien $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ linear unabhängige Vektoren. Man untersuche die lineare Abhängigkeit/Unabhängigkeit der Vektoren $\vec x$, $\vec y$, $\vec z$, die wie folgt definiert sind:

a) $\vec x = \vec a + 2\vec b$, $\vec y = \vec b - \vec c$, $\vec z = \vec a + \vec c$
b) $\vec x = \vec c + \vec b - 2\vec a$, $\vec y = \vec b - \vec a + 3\vec c$, $\vec z = -4\vec a + \vec b - 3\vec c$
c) $\vec x = \vec a - 3\vec b - 4\vec c$, $\vec y = \vec b - 2\vec c + \vec a$, $\vec z = \vec a + 3\vec b + \vec c$.

Lösungen zu Blatt 5

$\boxed{5.1}$ a) $3\vec a = \begin{pmatrix}6\\3\\0\end{pmatrix}$, $-2\vec b = \begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$, $2\vec a + 3\vec b - \vec d = \begin{pmatrix}5\\-3\\1\end{pmatrix}$, $2\vec d - \vec c +$ $3\vec e$ ist nicht bildbar, da $\vec d$, $\vec e$ und $\vec c$ unterschiedliche Dimension besitzen; $2\vec e^{\,T} = (0,4,-4)$, $3\vec c^{\,T} - \vec d^{\,T}$ ist nicht bildbar ($\vec c^{\,T}$ und $\vec d^{\,T}$ haben unterschiedliche Dimension); $\vec b^{\,T} + 4\vec e$ ist nicht bildbar ($\vec b^{\,T}$ ist Zeilenvektor, $\vec e$ ist Spaltenvektor); $|\vec a| = \sqrt{2^2+1^2+0^2} = \sqrt5$, $|-2\vec b| = 2|\vec b| = 2\sqrt{0^2+(-1)^2+1^2} = 2\sqrt2$, $-2|\vec d| = -2\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2} = -6$, $2|\vec a| + 3|\vec b| - |\vec d| = 2\sqrt5 + 3\sqrt2 - 3$, $|2\vec a + 3\vec b - \vec d| = |(5,-3,1)^T| = \sqrt{25+9+1} = \sqrt{35}$, $|2\vec a| - |\vec c| + |3\vec e| = 2\sqrt5 - 5 + 3\sqrt8$, $|2\vec a - \vec c + 3\vec e|$ ist nicht bildbar, $2|\vec e^{\,T}| = 2\sqrt8$, $|3\vec c^{\,T}| - |\vec d^{\,T}| = 12$, $|\vec b^{\,T}| + 4|\vec e| = \sqrt2 + 4\sqrt8 = 9\sqrt2$

b) $\frac{\vec a}{|\vec a|} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\frac{\vec b}{|\vec b|} = \frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\frac{\vec c}{|\vec c|} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$.

c) $\vec b$ ist parallel zu $\vec e$, da $\vec e = -2\vec b$;
$\vec d$ ist orthogonal zu $\vec a$, $\vec b$ und $\vec e$, da $(\vec d,\vec a) = (\vec d,\vec b) = (\vec d,\vec e) = 0$.

d) $\cos\sphericalangle(\vec a,\vec b) = \frac{(\vec a,\vec b)}{|\vec a||\vec b|} = \frac{-1}{\sqrt5\sqrt2} \Rightarrow \sphericalangle(\vec a,\vec b) = 108.435^0$,

$\cos\sphericalangle(\vec d,\vec e) = 0$ (wegen $(\vec d,\vec e) = 0$) $\Rightarrow \sphericalangle(\vec d,\vec e) = 90^0$.

e) Betrag der Projektion

von $\vec a$ auf $\vec e$ ist $\left(\vec a, \frac{\vec e}{|\vec e|}\right) = \frac{1}{\sqrt2}$; von $\vec e$ auf $\vec a$ ist $\left(\vec e, \frac{\vec a}{|\vec a|}\right) = \frac{2}{\sqrt5}$;

von $\vec b$ auf $\vec d$ ist $\left(\vec b, \frac{\vec d}{|\vec d|}\right) = 0$; von $\vec e$ auf $\vec b$ ist $\left(\vec e, \frac{\vec b}{|\vec b|}\right) = -\frac{4}{\sqrt2}$.

f) $(\vec a,\vec a) = 2^2+1^2+0^2 = 5$, $(\vec a,\vec e) = 2\cdot0+1\cdot2+0\cdot(-2) = 2$,

$$\vec a\times\vec e = \begin{pmatrix}1\cdot(-2)-0\cdot2\\0\cdot0-2\cdot(-2)\\2\cdot2-1\cdot0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix};$$

$(\vec b\times\vec d,\vec e) = -(\vec d\times\vec b,\vec e) = -(\vec d,\vec b\times\vec e) = \vec 0$ wegen der Parallelität von $\vec b$ und $\vec e$.

$(\vec a\times\vec b) = \begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}$; $(\vec a\times\vec b)\times\vec e = \begin{pmatrix}8\\2\\2\end{pmatrix}$; $\vec a\times(\vec b\times\vec e) = \vec 0$, da $\vec b \parallel \vec e$.

$(\vec a+\vec d)\times(\vec b\times\vec d) = \vec a\times(\vec b\times\vec d) + \vec d\times(\vec b\times\vec d)$. Wegen $\vec a\times(\vec b\times\vec d) = (\vec a,\vec d)\vec b - (\vec a,\vec b)\vec d$ und $(\vec a,\vec d) = 0$ sowie $\vec d\times(\vec b\times\vec d) = (\vec d,\vec d)\vec b - (\vec d,\vec b)\vec d$ und $(\vec d,\vec b) = 0$ erhält man insgesamt

$-(\vec a,\vec b)\vec d + (\vec d,\vec d)\vec b = \vec d + 9\vec b = \begin{pmatrix}-1\\-7\\11\end{pmatrix}$; $(\vec a\times\vec e,\vec b\times\vec e) = 0$ (da $\vec b\times\vec e = \vec 0$),

$$(\vec a\times\vec e,\vec d\times\vec e) = \begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-8\\-2\\-2\end{pmatrix} = 2(-2)\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix} = 36\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

g) Forderung: $(\alpha\vec a + \vec b, \vec b) = 0 \Leftrightarrow \alpha(\vec a,\vec b) + (\vec b,\vec b) = 0 \Leftrightarrow -\alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2$.
Forderung: $(\vec a + \beta\vec b, \vec e) = 0 \Leftrightarrow (\vec a,\vec e) + \beta(\vec b,\vec e) = 0 \Leftrightarrow 2 - 4\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = \frac12$.

Forderung: $\cos 45^0 = \frac{(\vec a + \gamma\vec b, \vec e_y)}{|\vec a + \gamma\vec b|\cdot 1} \Leftrightarrow \frac{\sqrt2}{2} = \frac{1-\gamma}{\sqrt{4+(1-\gamma)^2+\gamma^2}} \Rightarrow$

$\frac12(2\gamma^2 - 2\gamma + 5) = (1-\gamma)^2 \Leftrightarrow \gamma = -\frac32$. Probe !

$\boxed{5.2}$ a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}-2\\-9\end{pmatrix}$.

b) $a = |\overrightarrow{BC}| = 5$, $b = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{85}$, $c = |\overrightarrow{AB}| = 5\sqrt2$.

c) $\cos\alpha = \frac{(\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{CA})}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CA}|} = \frac{55}{5\sqrt2\cdot\sqrt{85}} \Rightarrow \alpha = 32.47^0$. $\cos\beta = \frac{(-\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{-5}{5\sqrt2\cdot5} \Rightarrow \beta = 98.13^0$. $\cos\gamma = \frac{(\overrightarrow{CA}, -\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{30}{\sqrt{85}\cdot5} \Rightarrow \gamma = 49.40^0$.

d) $\overrightarrow{0P} = \frac12(\overrightarrow{0B} + \overrightarrow{0C}) = \frac12\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\frac32\\3\end{pmatrix}$.

e) $\vec w = \overrightarrow{0A} + t\left(-\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} + \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right) = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} + t\left(\frac{1}{\sqrt{85}}\begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix} + \frac{1}{5\sqrt2}\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0.9240\\1.6833\end{pmatrix}$, $0 \le t\ (\le 4.0018)$. f) $A_D = \frac12|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac12\left|\begin{pmatrix}0\\0\\35\end{pmatrix}\right| = 17.5$.

g) $\overrightarrow{0D} = \overrightarrow{0A} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\0\end{pmatrix}$.

h) $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\9\end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{85}$, $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}-8\\-1\end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{65}$. i) $A_P = 2A_D = 35$.

$\boxed{5.3}$ a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\4\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix}1\\-4\\-9\end{pmatrix} = -\overrightarrow{AC}$.

b) $a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{20} = 2\sqrt5$, $b = |\overrightarrow{CA}| = \sqrt{98} = 7\sqrt2$, $c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{50} = 5\sqrt2$.

c) $\cos\alpha = \frac{(\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{CA})}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CA}|} = \frac{64}{5\sqrt2\cdot7\sqrt2} = \frac{32}{35} \Rightarrow \alpha = 23.90^0$

$\cos\beta = \frac{(-\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{-14}{5\sqrt2\cdot2\sqrt5} = -\frac{7}{5\sqrt{10}} \Rightarrow \beta = 116.28^0$

$\cos\gamma = \frac{(\overrightarrow{CA}, -\overrightarrow{BC})}{|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{34}{7\sqrt2\cdot2\sqrt5} \Rightarrow \gamma = 39.83^0$.

d) $\overrightarrow{0P}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{0B}+\overrightarrow{0C})=\frac{1}{2}(\begin{pmatrix}-2\\2\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\6\end{pmatrix})=\begin{pmatrix}-1\\2\\4\end{pmatrix}$.

e) $\vec{w}=\overrightarrow{0A}+t\left(-\frac{\overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|}+\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\right)=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}+t\left(-\frac{1}{7\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-4\\-9\end{pmatrix}+\frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-3\\4\\5\end{pmatrix}\right)=$
$\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-0.5253\\0.9697\\1.6162\end{pmatrix}$, $0\le t\ (\le 4.1248)$.

f) $A_D=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}|\begin{pmatrix}16\\22\\-8\end{pmatrix}|=14.1774.$

g) $\overrightarrow{0D}=\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.

h) $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\4\\9\end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{AC}|=7\sqrt{2}$, $\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}5\\-4\\-1\end{pmatrix}$, $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{42}$.

i) $A_P=2A_D=28.3548$.

5.4 **a** α) 1.Möglichkeit: $\overline{P_1P_2}=\overline{P_1P_3}$, d.h.
$\sqrt{(4-1)^2+(1-5)^2}=\sqrt{(-2-1)^2+(y-5)^2}\Rightarrow 25=9+(y-5)^2\Rightarrow |y-5|=4\Rightarrow$ $y_1=1$, $y_2=9$. Der Punkt $P_3(-2,9)$ liegt mit P_1 und P_2 auf einer Geraden. Das Dreieck $P_1P_2P_3$ entartet zu einer Strecke. Lösung: $P_3(-2,1)$.

2.Möglichkeit: $\overline{P_1P_3}=\overline{P_2P_3}$, d.h. $\sqrt{(-2-1)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(-2-4)^2+(y-1)^2}\Rightarrow$ $9+y^2-10y+25=36+y^2-2y+1\Rightarrow y=-\frac{3}{8}$. Lösung: $P_3(-2,-\frac{3}{8})$.

3.Möglichkeit: $\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}$, d.h. $\sqrt{(4-1)^2+(1-5)^2}=\sqrt{(-2-4)^2+(y-1)^2}\Rightarrow$ $25=36+(y-1)^2$. Diese Gleichung hat keine reelle Lösung.

a β) Rechter Winkel bei P_1: Nach dem Satz des Pythagoras ist zu fordern:
$\overline{P_1P_3}^2+\overline{P_1P_2}^2=\overline{P_2P_3}^2 \Leftrightarrow 9+(y-5)^2+25=36+(y-1)^2$
oder:
Das Skalarprodukt der die Katheten des rechtwinkligen Dreiecks repräsentierenden Vektoren muß 0 sein: $(\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_2})=0 \Leftrightarrow (\begin{pmatrix}-3\\y-5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix})=0$

$\Rightarrow\ y=\frac{11}{4}$. Lösung: $P_3(-2,\frac{11}{4})$.

Rechter Winkel bei P_2: Es ist zu fordern: $\overline{P_1P_2}^2+\overline{P_2P_3}^2=\overline{P_1P_3}^2$ oder $(\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_2P_3})=0.\ \Rightarrow\ y=-\frac{7}{2}$. Lösung: $P_3(-2,-\frac{7}{2})$.

b) Es ist zu fordern: $\overline{P_1P_2}^2=\overline{P_1P}^2+\overline{P_2P}^2$ oder $(\overrightarrow{P_1P},\overrightarrow{P_2P})=0$.
$\Leftrightarrow\ -9=x^2-5x+y^2-6y\ \Leftrightarrow$ (nach quadratischer Ergänzung) $\frac{25}{4}=(x-\frac{5}{2})^2+(y-3)^2$.

Ergebnis: Jeder Punkt $P(x,y)$, der auf dem Kreis mit Mittelpunkt $M(\frac{5}{2},3)$ und Radius $\frac{5}{2}$ ("Thaleskreis", vgl. A 5.5) liegt, bildet zusammen mit P_1 und P_2 ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei P. (M ist dabei Mittelpunkt der Strecke $\overline{P_1P_2}$.)

5.5 **a)** Zur Untersuchung der linearen Abhängigkeit der gegebenen Vektoren ist zu prüfen, ob das homogene lineare Gleichungssystem $\alpha_1\vec{x}_1+\alpha_2\vec{x}_2+\alpha_3\vec{x}_3=\vec{0}$ (*) nichttriviale Lösungen $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ besitzt (d.h. Lösungen $\neq(0,0,0)$). Behandelt man dieses Gleichungssystem mit dem $\underbrace{\text{Gaußschen Algorithmus}}_{\to \text{vgl. Lit.}}$ (vgl.Kap.2 Skript), so ergibt sich:

α_1	α_2	α_3	=
$\boxed{-1}$	1	1	0
3	−2	0	0
2	−1	1	0
0	$\boxed{1}$	3	0
0	1	3	0
0	0	0	0

D.h., (*) besitzt nichttriviale Lösungen, nämlich: α_3 beliebig, $\alpha_2=-3\alpha_3$,
$\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3=-2\alpha_3$.
Somit sind $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ linear abhängig, und es gilt z.B. (mit $\alpha_3=-1$):
$2\vec{x}_1+3\vec{x}_2-\vec{x}_3=\vec{0}$.

b) Der Ansatz $\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}=\vec{0}$ (*) wird wiederum mit dem Gaußschen Algorithmus behandelt:

α_1	α_2	α_3	=
2	−1	1	0
$\boxed{1}$	0	−1	0
1	1	0	0
0	$\boxed{-1}$	3	0
0	1	1	0
0	0	4	0

Man erhält:
$$4\alpha_3=0\ \Rightarrow\ \alpha_3=0$$
$$-\alpha_2+3\alpha_3=0\ \Rightarrow\ \alpha_2=0$$
$$\alpha_1-\alpha_3=0\ \Rightarrow\ \alpha_1=0.$$
Da der Ansatz (*) nur mit $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0$ richtig ist, sind $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ linear unabhängig.

c) Die 4 Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ sind linear abhängig, da sich im $I\!R^3$ jeder Vektor durch 3 linear unabhängige Vektoren eindeutig darstellen läßt. Es muß sich z.B. $\vec{d}$ durch $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ darstellen lassen, da diese linear unabhängig sind (Nachweis wie in b)). Somit muß eine Beziehung der Gestalt $\vec{d} = \alpha_1\vec{a} + \alpha_2\vec{b} + \alpha_3\vec{c}$ bestehen. Zur Ermittlung von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ löst man das lineare Gleichungssystem (im Schema des Gaußschen Algorithmus geschrieben):

α_1	α_2	α_3	$=$
−2	1	1	−1
0	−1	1	3
$\boxed{1}$	−2	−1	1
0	−3	−1	1
0	$\boxed{-1}$	1	3
0	0	−4	−8

$\Rightarrow\ \alpha_3 = 2$
$\Rightarrow\ \alpha_2 = \alpha_3 - 3 = -1$
$\Rightarrow\ \alpha_1 = 1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1.$
Somit ist
$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} + 2\vec{c}.$

5.6 Der Ansatz $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 = \vec{a}$ $\quad(*)$ führt auf das lineare Gleichungssystem (im Schema des Gaußschen Algorithmus geschrieben):

α_1	α_2	α_3	$=$
$\boxed{-1}$	1	1	2
3	−2	0	3
2	−1	1	5
0	$\boxed{1}$	3	9
0	1	3	9
0	0	0	0

D.h., eine Darstellung $(*)$ ist möglich.
Dabei kann α_3 beliebig gewählt werden; wir setzen $\alpha_3 = 1$.
$\Rightarrow\ \alpha_2 = 9 - 3\alpha_3 = 6$
$\Rightarrow\ \alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 - 2 = 5.$
Somit ist (z.B.) $\vec{a} = 5\vec{x}_1 + 6\vec{x}_2 + \vec{x}_3$.

Der zu $(*)$ analoge Ansatz für $\vec{b}$ führt zu

α_1	α_2	α_3	$=$
$\boxed{-1}$	1	1	3
3	−2	0	2
2	−1	1	1
0	$\boxed{1}$	3	11
0	1	3	7
0	0	0	−4

Dieses Gleichungssystem ist widerspruchsvoll. Daher läßt sich $\vec{b}$ nicht durch $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ darstellen.
Fazit: Da $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ linear abhängig sind, d.h. in einer Ebene E liegen, lassen sich nur solche Vektoren durch $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ darstellen, die ebenfalls in E liegen. Das ist bei $\vec{a}$ der Fall, bei $\vec{b}$ aber nicht.

5.7 Zur Untersuchung der linearen Abhängigkeit/Unabhängigkeit von $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ machen wir den Ansatz $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z} = \vec{0}$, fassen die $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ bzw. $\vec{c}$ enthaltenden Terme zusammen und setzen - die lineare Unabhängigkeit von $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ ausnutzend - deren Vorfaktoren einzeln gleich 0. Das ergibt bei

a) $\alpha(\vec{a}+2\vec{b}) + \beta(\vec{b}-\vec{c}) + \gamma(\vec{a}+\vec{c}) = \vec{0} \ \Leftrightarrow\ (\alpha+\gamma)\vec{a} + (2\alpha+\beta)\vec{b} + (-\beta+\gamma)\vec{c} = \vec{0} \Rightarrow$

$\alpha + \gamma = 0 \qquad \Rightarrow\ \alpha = -\beta \qquad \Rightarrow\ \alpha = 0$
$2\alpha + \beta = 0 \qquad \Rightarrow\ \beta = 0$
$-\beta + \gamma = 0\ \Rightarrow\ \gamma = \beta \qquad \Rightarrow\ \gamma = 0,$

d.h., $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ sind linear unabhängig.

b) $\alpha(\vec{c}+\vec{b}-2\vec{a}) + \beta(\vec{b}-\vec{a}+3\vec{c}) + \gamma(-4\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}) = \vec{0} \ \Leftrightarrow$
$(-2\alpha-\beta-4\gamma)\vec{a} + (\alpha+\beta+\gamma)\vec{b} + (\alpha+3\beta-3\gamma)\vec{c} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -2\alpha-\beta-4\gamma &= 0 \\ \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ \alpha+3\beta-3\gamma &= 0 \end{aligned}$

Mit dem Gaußschen Algorithmus erhält man

α	β	γ	$=$
−2	−1	−4	0
$\boxed{1}$	1	1	0
1	3	−3	0
0	$\boxed{1}$	−2	0
0	2	−4	0
0	0	0	0

d.h., γ kann beliebig (also auch $\neq 0$) gewählt werden, $\beta = 2\gamma$, $\alpha = -\beta - \gamma = -3\gamma$.
Somit sind $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ linear abhängig.

c) $\alpha(\vec{a}-3\vec{b}-4\vec{c}) + \beta(\vec{b}-2\vec{c}+\vec{a}) + \gamma(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}) = \vec{0} \ \Leftrightarrow$
$(\alpha+\beta+\gamma)\vec{a} + (-3\alpha+\beta+3\gamma)\vec{b} + (-4\alpha-2\beta+\gamma)\vec{c} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \alpha+\beta+\gamma &= 0 \\ -3\alpha+\beta+3\gamma &= 0 \\ -4\alpha-2\beta+\gamma &= 0 \end{aligned}$

Mit dem Gaußschen Algorithmus erhält man

α	β	γ	$=$
$\boxed{1}$	1	1	0
−3	1	3	0
−4	−2	1	0
0	4	6	0
0	$\boxed{2}$	5	0
0	0	−4	0

$\Rightarrow\ \gamma = 0$
$\Rightarrow\ \beta = -\frac{5}{2}\gamma = 0$
$\Rightarrow\ \alpha = -\beta - \gamma = 0.$
Somit sind $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ linear unabhängig.

Blatt 4 Funktionsbegriff, Definitions- und Wertebereich

Quelle: Scholz, S.: "Mathem. in Übungsaufg."

4.1 Entscheiden und begründen Sie, welche der folgenden Zuordnungen (=Abbildungen) Funktionen sind:

a) D sei die Menge der Bienenvölker des Imkers I. f ordnet jedem $x \in D$ seine Bienenkönigin zu.

b) D sei die Menge der Bienenvölker des Imkers I. f ordnet jedem $x \in D$ die ihm angehörenden Bienen zu.

c) D sei die Menge aller Arbeitsbienen des Imkers I. g ordne jeder Arbeitsbiene $x \in D$ das Bienenvolk zu, dem sie angehört. f ordnet jedem Bienenvolk seine Königin zu.

d) f ordnet jeder in Deutschland lebenden Frau die von ihr geborenen Kinder zu. g ordnet jedem in Deutschland lebenden Kind seine leibliche Mutter zu.

e) D sei die Menge der Einwohner Deutschlands. f ordnet jedem $x \in D$ seinen Geburtstag zu.

f) D sei die Menge der Tage eines Jahres. f ordnet jedem $x \in D$ diejenigen Einwohner Deutschlands zu, die am Tag x Geburtstag haben.

g) D sei die Menge der geordneten Paare (α, β), $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. f ordnet jedem $x \in D$ ein Dreieck zu, das die Winkel α und β und den rechten Winkel γ besitzt.

h) D sei die Menge aller ungeordneten Paare (a, b), $a, b \in I\!R$. f ordnet (a, b) diejenige(n) quadratische(n) Gleichung(en) $x^2 + px + q = 0$ zu, die a und b als reelle Nullstellen besitzt (bzw. besitzen).

4.2 In den folgenden Tabellen wird der Zahl x jeweils die darunter stehende Zahl y zugeordnet. Stellen diese Abbildungen f Funktionen dar?

a)

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	2	2	3	2	4	2	4	3	4

(y gibt die Anzahl der Teiler von x an.)

b)

x	0	1	2	4	8	4	1
y	0	1	$-\sqrt{2}$	2	$-2\sqrt{2}$	-2	-1

(y hat die Eigenschaft $y^2 = x$.)

c)

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	2	2	3	3	4	4	4	4

(y: Anzahl der Primzahlen $\leq x$.)

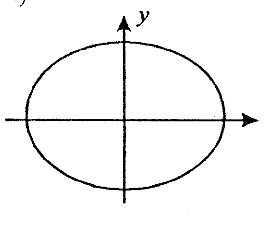
d)

x	0	1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	1	-1
y	1	$-\sqrt{2}$	2	2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$

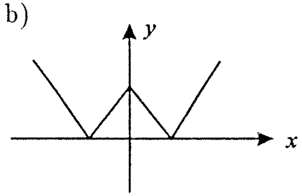
(y hat die Eigenschaft $y^2 - x^2 = 1$.)

4.3 Welche der dargestellten Kurven ist Graph einer Funktion $f: \ y = f(x)$?

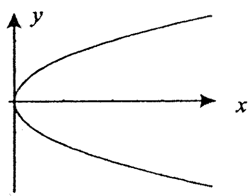
a)



b)



c)



4.4 Welche der folgenden Vorschriften, die den reellen Zahlen x reelle Zahlen y zuordnen, sind Funktionen?

a) $f: \ y = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$ b) $f: \ y = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \in (-\infty, 1] \\ x - 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$

c) $x + 2xy + y^2 - \frac{1}{4} = 0, \ x \in I\!R$ d) $f: \ y = \sqrt{x^2 - 1}, \ x \in I\!R \setminus (-1, 1)$

e) $x \sin y + x - 1 = 0, \ x > \frac{1}{2}$ f) $f: \ y = \begin{cases} |x-1| + |1+x| & \text{für} \quad x \leq 1 \\ 2 & \text{für} \quad x \in [0, 1] \\ 5 - x & \text{für} \quad x > 1 \end{cases}$

4.5 Welche der in den Aufgaben 4.1-4.4 vorkommenden Funktionen sind eineindeutig?, d.h. bijektiv.

4.6 Geben Sie den natürlichen Definitions- und den zugehörigen Wertebereich für folgende Funktionen $f: \ y = f(x)$ an und skizzieren Sie die zugehörigen Graphen:

a) $y = 2x - 1$ b) $y = \dfrac{1}{x} + 1$ c) $y = \dfrac{1-x}{1+x}$

d) $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$ e) $y = |x| - 1$ f) $y = |x-2| + |x+2|$

g) $y = 2|x+3| - 2|x+2|$ h) $y = \sqrt{-x-1}$ i) $y = \sqrt{x^2 - x - 2}$

j) $y = \sqrt{x - |x|}$ k) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x| - x}}$ l) $y = \left| \dfrac{1-x}{1+x} \right|$

4.7 Skizzieren Sie die Graphen folgender Funktionen $f: \ y = f(x)$:

a) $y = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1) & \text{für} \ -2 \leq x < -1 \\ 2x + 1 & \text{für} \ -1 \leq x \leq 0 \\ x + 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$ b) $y = \begin{cases} x(x+1) & \text{für} \quad x \leq 0 \\ \sin x & \text{für} \quad 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ 1 - \cos x & \text{für} \quad x \geq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x \leq -1 \\ \sqrt{1 - x^2} & \text{für} \ -1 < x < 1 \\ 1 & \text{für} \quad x \geq 1 \end{cases}$ d) $y = \begin{cases} -\cos x & \text{für} \quad x < 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ \sin x - 1 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$.

4.8 Gegeben seien die Funktionen f, g, h mit

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1}, \quad x \neq -1, \qquad g(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0, \qquad h(x) = 1 - x.$$

Man bilde die Funktionen

a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ h$ d) $h \circ f$ e) $g \circ h$ f) $h \circ g$

g) $f \circ f$ h) $g \circ g$ i) $h \circ h$ j) $f \circ (g \circ h)$ k) $(f \circ g) \circ h$ l) $g \circ (f \circ h)$

m) $h \circ (g \circ f)$ n) $(h \circ g) \circ f$

und berechne jeweils - falls vorhanden - den Funktionswert für $x = 1$.

Lösungen zu Blatt 4

4.1 a) Da jedes Bienenvolk genau eine Königin besitzt, ist f eine Funktion.
b) Jedes Bienenvolk besteht aus mehr als einer Biene. Daher ist f keine Funktion.
c) Jede Arbeitsbiene gehört genau einem Volk an; daher ist g eine Funktion. Auch f ist eine Funktion (siehe a)). Die mittelbare (= verkettete) Funktion $f \circ g$ ordnet jeder Arbeitsbiene ihre Königin zu.
d) Da es Frauen gibt, die mehr als ein Kind geboren haben, ist f keine Funktion. Da jedes Kind nur *eine* leibliche Mutter hat, ist g eine Funktion.
e) Jeder Einwohner Deutschlands hat ein eindeutig bestimmtes Geburtsdatum; daher ist f eine Funktion.
f) Da es mindestens einen Tag gibt, an dem mehrere Einwohner Deutschlands Geburtstag haben, ist f keine Funktion.
g) Zu jedem Paar (α, β) gibt es unendlich viele Dreiecke mit den Innenwinkeln α und β und dem rechtem Winkel $\gamma = \alpha + \beta = \pi/2$; f ist daher keine Funktion.
h) Zwischen den Koeffizienten p, q der quadratischen Gleichung und den beiden reellen Nullstellen $x = a$, $x = b$ bestehen nach dem Satz von Vieta die Beziehungen $a + b = -p$, $a \cdot b = q$, aus denen sich p und q und damit die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ eindeutig ermitteln lassen. Somit ist f eine Funktion.

4.2 a) und c) stellen Funktionen dar (zu jedem x gehört genau ein y).
b) und d) stellen keine Funktionen dar (zu $x = 1$ gehören jeweils zwei verschiedene y-Werte).

4.3 a) Keine Funktion: Zu jedem $x \in (-1, 1)$ gehören zwei verschiedene y-Werte.
b) Funktion.
c) Keine Funktion: Zu jedem $x > 0$ gehören zwei verschiedene y-Werte.

4.4 a) f ist eine Funktion. Sie wird als "Signumfunktion" bezeichnet und $y = \mathrm{sign}(x)$ geschrieben.
b) Für $x \in (0, 1]$ ist einerseits $y = x$, andererseits $y = x - 1$. $\Rightarrow$ f ist keine Funktion.
c) Faßt man die definierende Gleichung als quadratische Gleichung für y auf, so liefert die Lösungsformel
$y = -x \pm \sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}} = -x \pm \sqrt{(x - \frac{1}{2})^2} = -x \pm |x - \frac{1}{2}|$.
Jedem $x \in I\!R$ wird demnach sowohl $y = -2x + \frac{1}{2}$ als auch $y = -\frac{1}{2}$ zugeordnet. f mit $y = f(x)$ ist also keine Funktion.
d) $f: I\!R \setminus (-1, 1) \to I\!R^+$ ist eine Funktion.
e) Für jedes $x > \frac{1}{2}$ hat die Gleichung $\sin y = \dfrac{1-x}{x}$ wegen der Periodizität des Sinus unendlich viele Lösungen. Daher ist f mit $y = f(x)$ keine Funktion.
f) f ist eine Funktion.

4.5 A4.1a) und 4.1h).

4.6 a) $D = I\!R$, $W = I\!R$ b) $D = I\!R \setminus \{0\}$, $W = I\!R \setminus \{1\}$
c) $D = I\!R \setminus \{-1\}$, $W = I\!R \setminus \{-1\}$ d) $D = I\!R^+ \setminus \{1\}$, $W = I\!R$
e) $D = I\!R$, $W = [-1, +\infty)$

f) $y = \begin{cases} -2x & \text{für } x < -2 \\ 4 & \text{für } -2 \leq x \leq 2 \\ 2x & \text{für } x > 2 \end{cases}$, $D = I\!R$, $W = [4, +\infty)$

g) $y = \begin{cases} -2 & \text{für } x < -3 \\ 4x + 10 & \text{für } -3 \leq x \leq -2 \\ 2 & \text{für } x > -2 \end{cases}$, $D = I\!R$, $W = [-2, 2]$

h) $D = (-\infty, -1]$, $W = I\!R^+ \cup \{0\}$
i) Die Wurzel existiert nur für $x^2 - x - 2 \geq 0$ $\Rightarrow$ (vgl.H 3.8 (4))
$D = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$, $W = I\!R^+ \cup \{0\}$
j) $D = I\!R^+ \cup \{0\}$; da $f(x) = 0$ für alle $x \in D$, ist $W = \{0\}$ k) $D = I\!R^-$, $W = I\!R^+$
l) $D = I\!R \setminus \{-1\}$, $W = I\!R^+ \cup \{0\}$.
Vgl. Bilder L 4.7a-l.

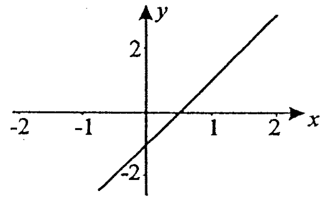


Bild 4.6 a

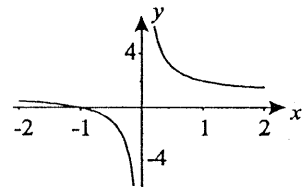


Bild 4.6 b

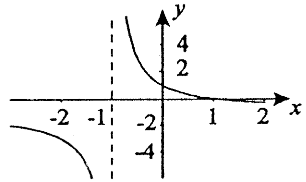


Bild 4.6 c

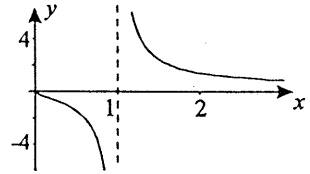


Bild 4.6 d

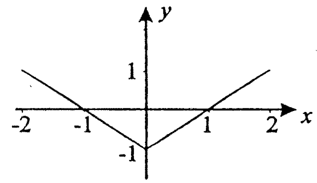


Bild 4.6 e

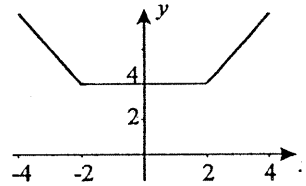


Bild 4.6 f

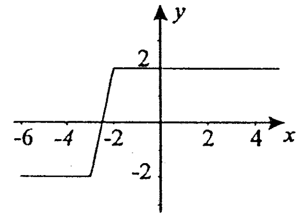


Bild 4.6 g

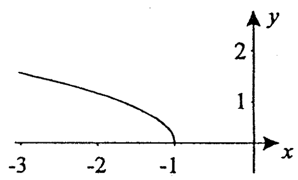


Bild 4.6 h

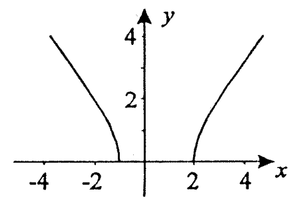


Bild 4.6 i

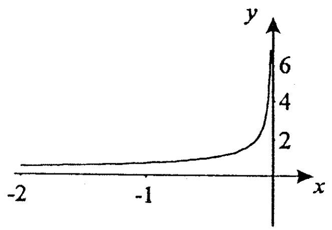


Bild 4.6 k

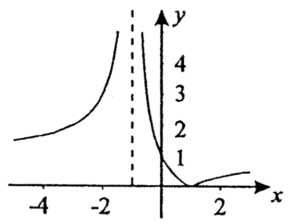


Bild 4.6 l

4.7 Siehe Bilder 4.7 a-d

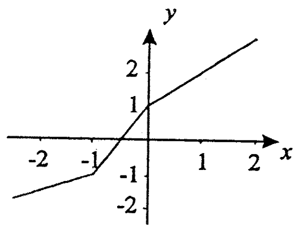


Bild 4.7 a

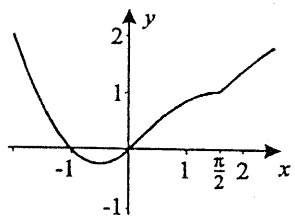


Bild 4.7 b

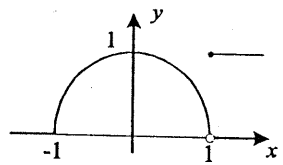


Bild 4.7 c

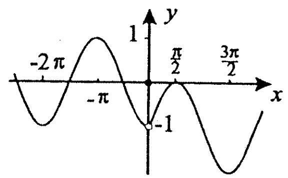


Bild 4.7 d

4.8 a) $(f\circ g)(x)=\dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+1}=\dfrac{1}{x(x+1)},\ x\neq 0, \neq -1,\quad (f\circ g)(1)=\dfrac{1}{2}.$

b) $(g\circ f)(x)=\dfrac{1}{\frac{x^2}{x+1}}=\dfrac{x+1}{x^2},\ x\neq 0, \neq -1,\quad (g\circ f)(1)=2.$

c) $(f\circ h)(x)=\dfrac{(1-x)^2}{(1-x)+1}=\dfrac{(1-x)^2}{2-x},\ x\neq 2,\quad (f\circ h)(1)=0.$

d) $(h\circ f)(x)=1-\dfrac{x^2}{x+1},\ x\neq -1,\quad (h\circ f)(1)=\dfrac{1}{2}.$

e) $(g\circ h)(x)=\dfrac{1}{1-x},\ x\neq 1,\quad (g\circ h)(1)$ existiert nicht.

f) $(h\circ g)(x)=1-\dfrac{1}{x},\ x\neq 0,\quad (h\circ g)(1)=0.$

g) $(f\circ f)(x)=\dfrac{(\frac{x^2}{x+1})^2}{\frac{x^2}{x+1}+1}=\dfrac{x^4}{(x+1)(x^2+x+1)},\ x\neq -1,\quad (f\circ f)(1)=\dfrac{1}{6}.$

h) $(g\circ g)(x)=\dfrac{1}{\frac{1}{x}}=x,\ x\neq 0,\quad (g\circ g)(1)=1.$

i) $(h\circ h)(x)=1-(1-x)=x,\quad (h\circ h)(1)=1.$

j) $(f\circ(g\circ h))(x)=\dfrac{(\frac{1}{1-x})^2}{\frac{1}{1-x}+1}=\dfrac{1}{(1-x)(2-x)},\ x\neq 1, \neq 2,$

$(f\circ(g\circ h))(1)$ existiert nicht.

k) $((f\circ g)\circ h)(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x+1)}=\dfrac{1}{(1-x)(2-x)},\ x\neq 1, \neq 2,$

$((f\circ g)\circ h)(1)$ existiert nicht.

l) $(g\circ(f\circ h))(x)=\dfrac{1}{\frac{(1-x)^2}{(2-x)}}=\dfrac{2-x}{(1-x)^2},\ x\neq 2, \neq 1,\ (g\circ(f\circ h))(1)$ existiert nicht.

m) $(h\circ(g\circ f))(x)=1-\dfrac{x+1}{x^2},\ x\neq 0, \neq -1,\quad (h\circ(g\circ f))(1)=-1.$

n) $((h\circ g)\circ f)(x)=1-\dfrac{1}{\frac{x^2}{x+1}}=1-\dfrac{x+1}{x^2},\ x\neq 0, \neq -1,\quad ((h\circ g)\circ f)(1)=-1.$

A 4.45 a) Weisen Sie nach, daß die Funktion f mit $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ für $x > -\frac{d}{c}$, $c \neq 0$, eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt, wenn $\Delta = ad - bc \neq 0$ gilt.
b) Welcher Zusammenhang muß zwischen den Konstanten a, b, c, d bestehen, damit die Funktion f aus a) mit ihrer Umkehrfunktion f^{-1} übereinstimmt ?

4.5 Hinweise

H 4.1-4 Entscheidend ist, ob jedem $x \in D$ *ein* Element oder *mehrere* Elemente einer andern Menge zugeordnet werden.
In A 4.1d ist D noch geeignet zu definieren; in A 4.2 ist D die Menge der in der Tabelle aufgeführten x-Werte; in A 4.3 ist D die Menge der $x \in I\!R$, für die der Graph in Bild A 4.3 dargestellt ist; in A 4.4 ist D die Menge der $x \in I\!R$, für die y definiert ist.

*) *) bijektiv

H 4.5 Die Funktion f heißt *eineindeutig*, wenn für $x_1, x_2 \in D$ gilt:
$(f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2)$ *und* $(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.

H 4.6 Man achte auf Verschiebungen, Streckungen/Stauchungen, Spiegelungen der Graphen.

H 4.6 Man ermittle die Menge $\overline{D}$ derjenigen $x \in I\!R$, für die y *nicht* gebildet werden kann; dann ist $D = D_{nat} = I\!R \setminus \overline{D}$.
Zur Ermittlung des zu D_{nat} gehörigen Wertebereichs W kann man Monotonieeigen*schaften von f ausnützen (s. A 4.23)*.

H 4.8 $f \circ g$ bedeutet: Auf x wird zunächst die Funktion $g: \; z = g(x)$ angewandt, danach auf z die Funktion f. Damit entsteht $F = f \circ g: \; y = F(x) = f(g(x))$.

H 4.10-12, 4.14 In diesen Aufgaben soll die Wirkungsweise der Parameter μ bzw. a veranschaulicht werden.

H 4.16 a) Das Argument $z = \frac{x-2}{3}$ muß im Definitionsbereich von $y = \arccos z$ liegen. Für b) sind analoge Überlegungen anzustellen.

H 4.17 Man führe neue Variable $\overline{x}$ so ein, daß $\overline{x}$ im Wertebereich von $\arcsin y$ bzw. von $\operatorname{arccot} y$ liegt.

H 4.18 a) Man betrachte $-x = \sin y$ und verwende $x = -\sin y = \sin(-y)$. Analog verfahre man bei b) und c). Bei d) verwende man außerdem A 4.15d.

H 4.20 Man beachte die Nulldurchgänge und die Maximalausschläge der einzelnen Graphen und berücksichtige die Tatsache, daß die Funktion $y = \sin(at)$ die Grundperiode $T = 2\pi/a$ besitzt.

H 4.21 Zu zeigen ist: $A\sin(\omega t) + A\sin(\omega + \Delta\omega)t = 2A\sin\left(\frac{\omega + (\omega+\Delta\omega)}{2}\right)t$
$\left(= 2A\sin\left(\omega + \frac{\Delta\omega}{2}\right)t\right)$.

H 4.22-24 Man nutze die Informationen aus, die die Graphen der auftretenden Grundfunktionen liefern.

H 4.23 Es ist zu unterscheiden zwischen $x \leq 0$ und $x \geq 0$ bei c),
zwischen $x \leq -1$ und $x \geq -1$ bei d), zwischen $x < 1$ und $x > 1$ bei h)
zwischen $x < 0$ und $x > 0$ bei i), zwischen $x < -1$ und $x > -1$ bei j).
Bei j) spaltet man außerdem $\frac{x-1}{x+1}$ in $1 - \frac{2}{x+1}$ auf.

H 4.24 $f(-x)$ und $f(x)$ sind miteinander zu vergleichen.

H 4.25 Man verwende die Definitionen von Geradheit bzw. Ungeradheit.

H 4.27 Aus $f(x) = g(x) + u(x)$ und $f(-x) = g(x) - u(x)$ ermittle man $g(x)$ und $u(x)$.

H 4.29 Von den Graphen der trigonometrischen Funktionen liest man deren Grundperiode ab. Ferner verwende man A 4.14.

H 4.33 1. Untersuchung von f auf strenge Monotonie. Falls diese vorliegt, existiert f^{-1}. Angabe von D_f und W_f.
2. Die Abbildungsvorschrift $y = f(x)$ nach x auflösen. Danach x und y vertauschen; dies liefert die Definitionsgleichung von f^{-1}. Ferner ist $D_{f^{-1}} = W_f$, $W_{f^{-1}} = D_f$.
Bei den nötigen Monotonieuntersuchungen kann man Monotonieeigenschaften der Grundfunktionen ausnützen.

H 4.35 Nur für $x \in D_f \cap D_{f^{-1}}$ gilt sowohl $f(f^{-1}(x)) = x$ als auch $f^{-1}(f(x)) = x$.

H 4.38 Für die Berechnung des Funktionswerts eines Polynoms

$$p_n(x) = a_x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (*)$$

an der Stelle $x = x_0$ greift man auf die folgende mögliche Darstellung von $p_n(x_0)$ zurück:

$$p_n(x_0) = ((\ldots((a_nx_0 + a_{n-1})x_0 + a_{n-2})x_0 + \ldots + a_2)x_0 + a_1)x_0 + a_0.$$

Die Auswertung dieser Berechnungsvorschrift erfolgt zweckmäßigerweise im **Horner-Schema:**

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0	$-$	x_0b_{n-1}	$\ldots$	x_0b_3	x_0b_2	x_0b_1	x_0b_0
	b_{n-1}	b_{n-2}	$\ldots$	b_2	b_1	b_0	$p_n(x_0)$

In der ersten Zeile dieses Schemas stehen die Koeffizienten von p_n; ferner ist
$b_{n-1} = a_n$, $b_{n-2} = a_{n-1} + x_0b_{n-1}$, $b_{n-3} = a_{n-2} + x_0b_{n-2}, \ldots, b_0 = a_1 + x_0b_1$,
und der gesuchte Funktionswert ergibt sich zu $p_n(x_0) = a_0 + x_0b_0$ (in der letzten Spalte des Schemas).
Das gleiche Schema, das man zur Berechnung von $p_n(x_0)$ verwendet, kann auch zur Division von $p_n(x)$ durch $(x - x_0)$ benutzt werden. Es gilt:

$$\frac{p_n(x)}{x - x_0} = p_{n-1}(x) + \frac{p_n(x_0)}{x - x_0},$$

Blatt 3

Ges: Lösungsmenge der Gleichungen

A 3.1 a) $5(x-3)-3(2x+1)=3x+2(4-x)$

b) $(x+2)(4-x)+(2x-1)(5+x)=(3+x)(4x-1)-3(x+2)(x+5)+15$

c) $\frac{1}{6}(5x+2)+\frac{1}{8}(3-x)-\frac{2}{3}(4x-1)=\frac{1}{4}(3x-1)$

A 3.2 a) $x(a-1)+b(2+c-x)=4bc-x, \quad a,b,c\in I\!R$

b) $ax(a+b)-(x+a)(a+ab)=(b^2-a)x+(a-\frac{2}{3}b)(\frac{3}{2}b+a)-ab(a-\frac{1}{6})$

c) $\frac{bx-a}{b}+\frac{a}{x}=\frac{b}{x}-\frac{b-ax}{a}$

A 3.3 a) $x^2-x-12=0$ b) $3x^2+3x-6=0$ c) $-2x^2+4x-12=0$

d) $12x^2+x-1=0$ e) $1+x^2=5$ f) $(1-x)^2=4$

A 3.4

a) $(x+3)(x-4)(x+5)=0$ b) $(x^2-4)(x+1)=0$ c) $x^3-3x^2-10x=0$

d) $8x^4-6x^2+1=0$ e) $x(5x^3-4x)-1=0$ f) $\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x}=-x$

A 3.5

a) $\frac{5x-3}{2x+4}-\frac{x+1}{x-2}=\frac{26}{x^2-4}+\frac{3x-25}{2x-4}$ b) $\frac{1-2x}{x-3}-\frac{5-x}{x+1}=\frac{9x+18}{9-3x}+\frac{4x+2}{2x+2}$

c) $\frac{7x+5}{3x-3}-\frac{2x+3}{2x+4}=\frac{3x+5}{2x-2}+\frac{1-2x}{3x+6}$

d) $\frac{x^3-6x}{x^2-1}+\frac{4-2x^2}{x^2+3x+2}=\frac{x-9}{x^2+x-2}+\frac{1}{(x+2)(x^2-1)}$

A 3.6 a) $ax^2-2bx+b^2=0$ b) $x^2+2(a+b)x+4ab=0$

c) $\frac{x+2b}{a}-\frac{x+2a}{b}=\frac{2(x-2ab+2a)}{ax}-\frac{2(x-2ab+2a)}{bx}$

Wurzelgleichungen

A 3.7 Folgende Wurzelgleichungen sind zu lösen:

a) $\sqrt{x-1}-\sqrt{x-4}=1$ b) $\sqrt{x^2-9}+\sqrt{x^2+11}=10$

c) $\sqrt{x-3}+\sqrt{3x+7}=\sqrt{2x+10}$ d) $\sqrt{3-x}+\sqrt{x+10}=\sqrt{20-5x}$

e) $2\sqrt{x}+\sqrt{2x-2}=\sqrt{x+1}$ f) $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x-1}$

g) $\sqrt{5-x}-\sqrt{x-1}=\sqrt{2x+2}-\sqrt{2-2x}$

h) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x-2}=\sqrt{x+14}+\sqrt{x-7}$

i) $11\sqrt[3]{x}-6\sqrt[3]{x^2}+x=6$ j) $\sqrt{2+2\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{x}-1}=2\sqrt[4]{x}$

k) $\sqrt[3]{2x+4}+\sqrt[3]{5-2x}=3$ l) $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{2x+2}=\sqrt[3]{(x+1)^2}$

Ungleichungen

A 3.8 Gesucht sind die Lösungsmengen L folgender Ungleichungen:

a) $2x-3<3x+2$ b) $ax-4>2x-1,\ a\in I\!R$ c) $-x^2+5x>6$

d) $8x-6\le 2x^2$ e) $\frac{3x+2}{x-1}<4$ f) $\frac{2x^2-1}{x+2}<2x-3$

g) $\frac{3x^2-4}{x^2-1}>3$ h) $\frac{4x-5}{2x-4}<\frac{2x+3}{x+1}$ i) $\frac{10x+2}{x+5}<\frac{9x+3}{x+4}$

Gleichungen und Ungleichungen mit Beträgen

A 3.9 Geben Sie die Lösungsmengen L folgender Betragsgleichungen an:

a) $|x-5|=1$ b) $|x-1|+x=2-x$

c) $|x-2|+|x+1|=2x+2$ d) $|x-1|+|x+2|=3$

e) $|x+1|+|x-1|=|x|$ f) $|x+1|-|x-1|=|x|$

g) $|x+2|-|2-x|=2|x|$ h) $||x+2|-|x-1||=3$

A 3.10 Bestimmen Sie die Lösungsmengen L der folgenden Ungleichungen:

a) $|x-2|\le 3$ b) $|x+4|>2$ c) $|x+1|-x\ge 1$

d) $|x+3|<4-|x-2|$ e) $|x-3|+|x+1|\le 2+x$ f) $|x+2|-x+|x-4|\ge 0$

g) $|x^2+2x-24|\le 24$ h) $|x-5|\le|x^2-7|$ i) $\frac{|x-12|}{x-2}\ge 6+x$

j) $\frac{3}{5-x}+|x|<|x-5|$ k) $||x-2|-|x+1|+6|\le 3$ l) $|x+|x-1||>\frac{|x|}{x+2}$

1

Lösungen zu Blatt 3

$\boxed{\text{L 3.1}}$ a) $5x - 15 - 6x - 3 = 3x + 8 - 2x \quad \Rightarrow \quad L = \{-13\}$.

b) $-x^2 + 2x + 8 + 2x^2 + 9x - 5 = 4x^2 + 11x - 3 - 3x^2 - 21x - 30 + 15 \quad \Rightarrow \quad L = \{-1\}$.

c) $\frac{5}{6}x + \frac{1}{3} + \frac{3}{8} - \frac{1}{8}x - \frac{8}{3}x + \frac{2}{3} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{65}{24}x = -\frac{13}{8} \quad \Rightarrow \quad L = \{\frac{3}{5}\}$.

$\boxed{\text{L 3.2}}$ a) $x(a-b) = b(3c-2) \quad (*)$

Falls $\quad a \neq b \quad \Rightarrow \quad L = \left\{\dfrac{b(3c-2)}{a-b}\right\}$.

$\left.\begin{array}{ll} \text{Falls} & a = b = 0 \\ \text{oder} & a = b \neq 0 \text{ und } c = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow L = \mathbb{R}$, da $(*)$ die Identität $0 = 0$ darstellt, also für jedes $x \in \mathbb{R}$ erfüllt ist.

Falls $\quad a = b \neq 0$ und $c \neq \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad L = \emptyset$ ($(*)$ ist für jedes $x \in \mathbb{R}$ widersprüchlich).

b) $x[a^2 + ab - a - ab - b^2 + a] = \frac{3}{2}ab + a^2 - b^2 - \frac{2}{3}ab - a^2b + \frac{1}{6}ab + a^2 + a^2b \quad \Leftrightarrow$
$x[a^2 - b^2] = ab + 2a^2 - b^2 \quad \Leftrightarrow \quad x(a+b)(a-b) = a(a+b) + (a+b)(a-b)$.

Falls $a = -b$ oder $a = b = 0 \;\Rightarrow\; L = \mathbb{R}$. Falls $a = b \neq 0 \;\Rightarrow\; L = \emptyset$.

Falls $|a| \neq |b| \;\Rightarrow\; L = \left\{\dfrac{2a-b}{a-b}\right\}$.

c) Voraussetzung: $a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \neq 0$.

$$\frac{ax(bx-a) + a \cdot ab - b \cdot ab + bx(b-ax)}{abx} = 0 \;\Leftrightarrow$$

$x^2(ab - ab) + x(-a^2 + b^2) + ab(a-b) = 0 \;\Leftrightarrow\; x(b-a)(b+a) - ab(b-a) = 0$.

Falls $a = b$, ist $L = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Falls $a = -b$, ist $L = \emptyset$.

Falls $|a| \neq |b|$, ist $L = \left\{\dfrac{ab}{a+b}\right\}$.

$\boxed{\text{L 3.3}}$ a) Mit der Lösungsformel für quadratische Gleichungen erhält man: $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 12}$. Somit ist $L = \{-3,\ 4\}$.

b) Normalform: $x^2 + x - 2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$, also ist $L = \{-2,\ 1\}$.

c) Normalform: $x^2 - 2x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-6}$: Es gibt keine reellen Lösungen, d.h. $L = \emptyset$.

d) Normalform: $x^2 + \frac{1}{12}x - \frac{1}{12} = 0 \;\Rightarrow\; x_{1,2} = -\frac{1}{24} \pm \sqrt{\frac{1}{576} + \frac{1}{12}} \;\Rightarrow\; L = \{-\frac{1}{3},\ \frac{1}{4}\}$.

e) $x^2 = 4 \;\Leftrightarrow\; |x| = 2$, daher ist $L = \{-2,\ 2\}$.

f) $|1 - x| = 2$, d.h. $1 - x = 2$ oder $-(1-x) = 2$, folglich ist $L = \{-1,\ 3\}$.

$\boxed{\text{L 3.4}}$ a) $(x+3)(x-4)(x+5) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+3=0) \vee (x-4=0) \vee (x+5=0) \;\Rightarrow$ $L = \{-3,\ 4,\ -5\}$.

b) $(x+2)(x-2)(x+1) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+2=0) \vee (x-2=0) \vee (x+1=0) \;\Rightarrow$ $L = \{-2,\ 2,\ -1\}$.

c) $x(x^2 - 3x - 10) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x=0) \vee (x^2 - 3x - 10 = 0)$;
$x^2 - 3x - 10 = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 10}$. Somit ist $L = \{0,\ -2,\ 5\}$.

d) Mit H 3.4d ergibt sich die Normalform $z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8} = 0 \;\Leftrightarrow\; z_{1,2} = \frac{3}{8} \pm \sqrt{\frac{9}{64} - \frac{1}{8}} \;\Rightarrow$
$z_1 = x^2 = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = \frac{1}{2}$,
$z_2 = x^2 = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Also gilt: $L = \{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\}$.

e) Mit H 3.4d ergibt sich die Normalform $z^2 - \frac{4}{5}z - \frac{1}{5} = 0 \;\Leftrightarrow\; z_{1,2} = \frac{2}{5} \pm \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{1}{5}} \;\Rightarrow$
$z_1 = x^2 = -\frac{1}{5}$ entfällt, da $x^2 \geq 0$ sein muß.
$z_2 = x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x_1 = -1,\ x_2 = 1$. Daher ist $L = \{-1,\ 1\}$.

f) $\dfrac{1}{x^3} - \dfrac{2}{x} = -x \;\Leftrightarrow\; (1 - 2x^2 + x^4 = 0) \wedge (x \neq 0) \;\Leftrightarrow\; (z-1)^2 = 0$ (mit $z = x^2$). $\Leftrightarrow$
$z = 1 \;\Leftrightarrow\; x_1 = 1,\ x_2 = -1$. Daher ist $L = \{-1,\ 1\}$.

$\boxed{\text{L 3.5}}$ a) Voraussetzung: $x \neq 2,\ x \neq -2$. Gleichnamigmachen:

$$\frac{(5x-3)(x-2) - (x+1)2(x+2)}{2(x+2)(x-2)} = \frac{26 \cdot 2 + (3x-25)(x+2)}{2(x+2)(x-2)}.$$

Beseitigen des Hauptnenners, Ausmultiplizieren und Ordnen führt zu der Gleichung $0 \cdot x^2 + 0 \cdot x - 0 = 0$, die für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllbar ist; daher folgt $L = \mathbb{R} \setminus \{-2,\ 2\}$.

b) Voraussetzung: $x \neq -1,\ x \neq 3$. Kürzen der rechts stehenden Brüche, Gleichnamigmachen und Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x-3)(x+1)$ liefert:
$(1-2x)(x+1) - (5-x)(x-3) = -(3x+6)(x+1) + (2x+1)(x-3)$.
Nach x-Potenzen geordnet, ergibt dies $0 \cdot x^2 + 5x + 25 = 0$. Folglich ist $L = \{-5\}$.

c) Voraussetzung: $x \neq -2,\ x \neq 1$. Gleichnamigmachen, Multiplikation mit dem Hauptnenner $6(x-1)(x+2)$ und Ordnen nach x-Potenzen ergibt: $3x^2 - 4x + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \;\Leftrightarrow\; x_{1,2} = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 1$ (entfällt nach Voraussetzung). Daher ist $L = \{\frac{1}{3}\}$.

Anderer Lösungsweg (unter derselben Voraussetzung): Durch Umordnen der Ausgangsgleichung erhält man zunächst $\dfrac{7x+5}{3(x-1)} - \dfrac{3x+5}{2(x-1)} = \dfrac{1-2x}{3(x+2)} + \dfrac{2x+3}{2(x+2)}$.

Nach Multiplikation mit 6 ergibt sich: $\dfrac{2(7x+5) - 3(3x+5)}{6(x-1)} = \dfrac{2(1-2x) + 3(2x+3)}{6(x+2)}$

$$\Leftrightarrow \frac{5x-5}{6(x-1)} = \frac{2x+11}{6(x+2)} \;\Leftrightarrow\; \frac{5}{6} = \frac{2x+11}{6(x+2)} \;\Leftrightarrow\; 5(x+2) = 2x + 11 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{3}.$$

d) Voraussetzung: $x \neq -1,\ x \neq 1,\ x \neq -2$. Gleichnamigmachen, Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x+2)(x^2-1)$ und Ordnen nach x-Potenzen ergibt:

$x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. Mit $z = x^2$ erhält man $z^2 - 5z + 4 = 0$. Daraus folgt $z_1 = 1$ - also $x_1 = -1,\ x_2 = 1$ - und $z_2 = 4$ - also $x_3 = -2,\ x_4 = 2$. Wegen der obigen Voraussetzung ist $L = \{2\}$.

$\boxed{\text{L 3.6}}$ a) Falls $a = 0$ und $b = 0$, ist die Gleichung identisch erfüllt, daher $L = \mathbb{R}$. Falls $a = 0$ und $b \neq 0$, hat die Gleichung $-2bx + b^2 = 0$ die Lösungsmenge $L = \{\frac{1}{2}b\}$.

Falls $a \neq 0$, hat die Gleichung die Normalform $x^2 - \dfrac{2b}{a}x + \dfrac{b^2}{a} = 0$. Die Lösungsformel

liefert $x_{1,2} = \dfrac{b}{a} \pm \sqrt{\dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{b^2}{a}} = \dfrac{b}{a}(1 \pm \sqrt{1-a})$.

Falls $a \leq 1,\ a \neq 0$, ist $L = \{\frac{b}{a}(1 - \sqrt{1-a}),\ \frac{b}{a}(1 + \sqrt{1-a})\}$.
Falls $a > 1$, hat die Gleichung keine reelle Lösung, d.h. $L = \emptyset$.

2

Lösungen zu Blatt 3

b) Es ist $x_{1,2} = -(a+b) \pm \sqrt{(a+b)^2 - 4ab} = -a - b \pm \sqrt{(a-b)^2} = -a - b \pm |a-b|$. Sowohl für $a \geq b$, als auch für $a < b$ ist $L = \{-2a,\ -2b\}$.

c) Unter der Voraussetzung $a \neq 0,\ b \neq 0,\ x \neq 0$ werden beide Seiten der Gleichung auf den Hauptnenner abx gebracht und anschließend mit dem Hauptnenner multipliziert. Danach ordnet man nach x-Potenzen und erhält:
$x^2(b-a) + 2x(b^2 - a^2 - b + a) + 4(ab^2 - ab - a^2b + a^2) = 0 \Leftrightarrow$
$x^2(b-a) + 2x(b-a)(b+a-1) + 4a(b-a)(b-1) = 0$.
Falls $b = a$, ist $L = \mathbb{R}$.
Falls $b \neq a$, hat man die Gleichung $x^2 + 2x(b+a-1) + 4a(b-1) = 0$ zu lösen.
Die Lösungsformel liefert $x_{1,2} = -(b+a-1) \pm \sqrt{(b+a-1)^2 - 4a(b-1)}$.
Wegen $(b+a-1)^2 - 4a(b-1) = b^2 + a^2 + 1 + 2ab - 2b - 2a - 4ab + 4a = b^2 + a^2 + 1 - 2ab - 2b + 2a = (b-a-1)^2$ erhält man
$x_{1,2} = -(b+a-1) \pm |b-a-1|$, somit $L = \{-2a,\ 2-2b\}$.

$\boxed{\text{L 3.7}}$ a) Voraussetzungen: $x \geq 1 \wedge x \geq 4$, d.h. $x \geq 4$.
$\sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x-4} \Rightarrow x - 1 = 1 + 2\sqrt{x-4} + x - 4 \Leftrightarrow 2 = 2\sqrt{x-4} \Rightarrow 1 = x - 4$. Somit ist $L = \{5\}$.

b) Voraussetzung: $|x| \geq 3$.
$\sqrt{x^2-9} = 10 - \sqrt{x^2+11} \Rightarrow x^2 - 9 = 100 - 20\sqrt{x^2+11} + x^2 + 11 \Leftrightarrow 20\sqrt{x^2+11} = 120 \Leftrightarrow x^2 + 11 = 36 \Leftrightarrow x^2 = 25$. Also ist $L = \{-5, 5\}$.

c) Voraussetzungen: $x \geq 3 \wedge x \geq -\frac{7}{3} \wedge x \geq -5$, d.h. $x \geq 3$.
$x - 3 + 2\sqrt{x-3}\sqrt{3x+7} + 3x + 7 = 2x + 10 \Leftrightarrow 2x - 6 = -2\sqrt{x-3}\sqrt{3x+7} \Leftrightarrow x - 3 = -\sqrt{x-3}\sqrt{3x+7} \Rightarrow (x-3)^2 = (x-3)(3x+7) \Leftrightarrow (x = 3) \vee (x - 3 = 3x + 7) \Leftrightarrow (x = 3) \vee (x = -5)$. $x = -5$ ist Scheinlösung (folgt aus der Voraussetzung), so daß man $L = \{3\}$ erhält.

d) Voraussetzungen: $x \leq 3 \wedge x \geq -5 \wedge x \leq 4$, d.h. $x \in [-5, 3]$.
$3 - x + 2\sqrt{3-x}\sqrt{x+10} + x + 10 = 20 - 5x \Leftrightarrow 5x - 7 = -2\sqrt{3-x}\sqrt{x+10} \Rightarrow (5x-7)^2 = 4(3-x)(x+10) \Leftrightarrow 29x^2 - 42x - 71 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{71}{29},\ x_2 = -1$. Da $x = 71/29$ Scheinlösung ist (nach Probe), erhält man $L = \{-1\}$.

e) Voraussetzungen: $x \geq 0 \wedge x \geq 1 \wedge x \geq -1$, d.h. $x \geq 1$.
$4x + 4\sqrt{x}\sqrt{2x-2} + 2x - 2 = x + 1 \Leftrightarrow 5x - 3 = -4\sqrt{2}\sqrt{x}\sqrt{x-1} \Rightarrow (5x-3)^2 = 32x(x-1) \Leftrightarrow 7x^2 - 2x - 9 = 0$. Da $x = -1$ Scheinlösung ist (folgt aus der Voraussetzung) und $x = \frac{9}{7}$ Scheinlösung ist (nach Probe), gilt $L = \emptyset$.

f) Voraussetzungen: $x \leq 1 \wedge x \geq 2 \wedge x \geq 1$, d.h. $L = \emptyset$.

g) Voraussetzungen: $x \leq 5 \wedge x \geq 1 \wedge x \geq -\frac{1}{2} \wedge x \leq 1$, d.h. als Lösung kommt nur $x = 1$ in Frage. Durch Einsetzen stellt man fest: $L = \{1\}$.

h) Voraussetzungen: $x \geq -5 \wedge x \geq 2 \wedge x \geq -14 \wedge x \geq 7$, d.h. $x \geq 7$.
$x + 5 + 2\sqrt{x+5}\sqrt{x-2} + x - 2 = x + 14 + 2\sqrt{x+14}\sqrt{x-7} + x - 7 \Leftrightarrow \sqrt{x+5}\sqrt{x-2} = \sqrt{x+14}\sqrt{x-7} + 2 \Rightarrow (x+5)(x-2) = (x+14)(x-7) + 4\sqrt{x+14}\sqrt{x-7} + 4 \Leftrightarrow -4x + 84 = 4\sqrt{x+14}\sqrt{x-7} \Rightarrow (-x+21)^2 = (x+14)(x-7) \Leftrightarrow 49x = 539$.
Folglich ist $L = \{11\}$.

i) Voraussetzung: $x \geq 0$. Setze $\sqrt[3]{x} = z$. Dann gilt: $11z - 6z^2 + z^3 - 6 = 0$.
Mit der in H 4.39 beschriebenen Methode erhält man $z_1 = 1 \Rightarrow x_1 = z_1^3 = 1$; $z_2 = 2 \Rightarrow x_2 = z_2^3 = 8$; $z_3 = 3 \Rightarrow x_3 = z_3^3 = 27$. Somit ist $L = \{1, 8, 27\}$.

j) Voraussetzungen: $x \geq 0 \wedge \sqrt{x} \geq 1$, d.h. $x \geq 1$.
$2 + 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2 + 2\sqrt{x}}\sqrt{\sqrt{x} - 1} + \sqrt{x} - 1 = 4\sqrt{x}$. Setze $\sqrt{x} = z$ (wegen der Voraussetzung ≥ 1). Das liefert $-2\sqrt{2}\sqrt{1+z}\sqrt{z-1} = z - 1 \Rightarrow 8(z^2 - 1) = (z-1)^2 \Leftrightarrow (z-1)(8(z+1) - (z-1)) = 0 \Rightarrow z_1 = 1 \Rightarrow x_1 = z_1^2 = 1$; $z_2 = -\frac{9}{7}$ ist Scheinlösung (da $z \geq 1$ vorausgesetzt ist). Daher ist $L = \{1\}$.

k) Voraussetzungen: $x \geq -2 \wedge x \leq \frac{5}{2}$, d.h. $x \in [-2, 2.5]$.
$2x + 4 + 3\sqrt[3]{2x+4}^{\,2} \cdot \sqrt[3]{5-2x} + 3\sqrt[3]{2x+4} \cdot \sqrt[3]{5-2x}^{\,2} + 5 - 2x = 27 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{2x+4} \cdot \sqrt[3]{5-2x}\left(\sqrt[3]{2x+4} + \sqrt[3]{5-2x}\right) = 18$. Nach Aufgabenstellung ist $\sqrt[3]{2x+4} + \sqrt[3]{5-2x} = 3$. Somit folgt $9\sqrt[3]{2x+4}\,\sqrt[3]{5-2x} = 18 \Rightarrow (2x+4)(5-2x) = 8 \Leftrightarrow -4x^2 + 2x + 12 = 0$. Daraus erhält man die Lösungsmenge $L = \{-1.5, 2\}$.

l) Voraussetzung: $|x| \geq 1$.
$x^2 - 1 + 3\sqrt[3]{x^2-1}^{\,2} \cdot \sqrt[3]{2(x+1)} + 3\sqrt[3]{x^2-1} \cdot \sqrt[3]{2(x+1)}^{\,2} + 2(x+1) = (x+1)^2$.
Nach Aufgabenstellung ist $\sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt[3]{2(x+1)} = \sqrt[3]{(x+1)^2}$. Somit folgt
$(x+1)(x-1) + 3\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[3]{2(x+1)}\sqrt[3]{(x+1)^2} + 2(x+1) = (x+1)^2 \Leftrightarrow$
$3\sqrt[3]{x^2-1}\sqrt[3]{2(x+1)}\sqrt[3]{(x+1)^2} = 0$. Daraus ergibt sich $L = \{-1, 1\}$.

$\boxed{\text{L 3.8}}$ a) $x > -5$, d.h $L = (-5, +\infty)$.

b) $(a-2)x > 3$. Falls $a > 2:\ L = (\frac{3}{a-2}, +\infty)$; falls $a < 2:\ L = (-\infty,\ \frac{3}{a-2})$; falls $a = 2:\ L = \emptyset$.

c) $x^2 - 5x + 6 = 0$ für $x_1 = 2,\ x_2 = 3$. Der Graph von $y = -x^2 + 5x - 6$ verläuft *oberhalb* der x-Achse für $x \in (2, 3)$. Daher: $L = (2, 3)$.
Anderer Lösungsweg: Es ist $-x^2 + 5x > 6 \Leftrightarrow -(x^2 - 5x + \frac{25}{4}) > 6 - \frac{25}{4} \Leftrightarrow -(x - \frac{5}{2})^2 > -\frac{1}{4} \Leftrightarrow (x - \frac{5}{2})^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow |x - \frac{5}{2}| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x - \frac{5}{2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 < x < 3$.
Damit: $L = (2, 3)$.

d) $x^2 - 4x + 3 = 0$ für $x_1 = 1,\ x_2 = 3$. Der Graph von $y = 2x^2 - 8x + 6$ verläuft *unterhalb* der x-Achse für $x \in (1, 3)$. Daher: $L = (-\infty,\ 1] \cup [3, +\infty)$.
Anderer Lösungsweg: Es ist $8x - 6 \leq 2x^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x - 2| \geq 1 \Leftrightarrow (x - 2 \geq 1) \vee (-x + 2 \geq 1) \Leftrightarrow (x \geq 3) \vee (x \leq 1)$. Damit: $L = (-\infty,\ 1] \cup [3, +\infty)$.

e) Voraussetzung: $x \neq 1$.
1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, 1):\ 3x + 2 > 4(x-1) \Leftrightarrow 6 > x$,
d.h. $x \in M_1 = (-\infty, 6)$. Daher: $L_1 = I_1 \cap M_1 = (-\infty, 1)$.
2.Fall: $x \in I_2 = (1, +\infty):\ 3x + 2 < 4(x-1) \Leftrightarrow 6 < x$,
d.h. $x \in M_2 = (6, +\infty)$. Daher: $L_2 = I_2 \cap M_2 = (6, +\infty)$.
Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 = (-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$.

(3) Lösungen zu Blatt 5

f) Voraussetzung: $x \neq -2$.

1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -2): \ 2x^2 - 1 > (2x-3)(x+2) \ \Leftrightarrow \ 5 > x$,
d.h. $x \in M_1 = (-\infty, 5)$. Daher: $L_1 = (-\infty, -2)$.

2.Fall: $x \in I_2 = (-2, +\infty): \ 2x^2 - 1 < (2x-3)(x+2) \ \Leftrightarrow \ 5 < x$,
d.h. $x \in M_2 = (5, +\infty)$. Daher: $L_2 = (5, +\infty)$.

Ergebnis: $L = (-\infty, -2) \cup (5, +\infty)$.

g) Voraussetzung: $|x| \neq 1$.

1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1): \ 3x^2 - 4 > 3(x^2-1) \Leftrightarrow -4 > -3$. Dies ist ein Widerspruch, also für *kein* $x \in I\!R$ erfüllbar; d.h. $M_1 = \emptyset$. $L_1 = I_1 \cap M_1 = \emptyset$.

2.Fall: $x \in I_2 = (-1, 1): \ 3x^2 - 4 < 3(x^2-1) \ \Leftrightarrow \ -4 < -3$. Dies ist *immer* richtig, unabhängig von x, d.h. $M_2 = I\!R$. $L_2 = I_2 \cap M_2 = (-1, 1)$.

3.Fall: $x \in I_3 = (1, +\infty): \ 3x^2 - 4 > 3(x^2-1) \ \Leftrightarrow \ -4 > -3$. Daher: $M_3 = L_3 = \emptyset$.

Ergebnis: $L = (-1, 1)$.

Anderer Lösungsweg: Es ist $\dfrac{3x^2-4}{x^2-1} > 3 \ \Leftrightarrow \ \dfrac{3(x^2-1)-1}{x^2-1} \ \Leftrightarrow \ 3 - \dfrac{1}{x^2-1} > 3 \ \Leftrightarrow$
$\dfrac{1}{x^2-1} < 0 \ \Leftrightarrow \ x^2 < 1 \ \Leftrightarrow \ -1 < x < 1$. Somit: $L = (-1, 1)$.

h) Voraussetzung: $x \neq -1 \wedge x \neq 2$.

1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1)$: Da die Ungleichung mit $(x+1) < 0$ *und* mit $(2x-4) < 0$ multipliziert wird, bleibt das Relationszeichen erhalten. Es ergibt sich:
$(4x-5)(x+1) < (2x+3)(2x-4) \ \Leftrightarrow \ x < -7$, d.h. $x \in M_1 = (-\infty, -7)$.
Somit ist $L_1 = I_1 \cap M_1 = (-\infty, -7)$.

2.Fall: $x \in I_2 = (-1, 2)$: Diesmal wird mit $(x+1) > 0$ und mit $(2x-4) < 0$ multipliziert; daher kehrt sich das Relationszeichen um, und man erhält:
$(4x-5)(x+1) > (2x+3)(2x-4) \ \Leftrightarrow \ x > -7$, d.h. $x \in M_2 = (-7, \infty)$.
Daher: $L_2 = I_2 \cap M_2 = (-1, 2)$.

3.Fall: $x \in I_3 = (2, +\infty)$: Nach Multiplikation mit $(x+1) > 0$ und mit $(2x-4) > 0$ ergibt sich: $(4x-5)(x+1) < (2x+3)(2x-4) \ \Leftrightarrow \ x < -7$, d.h. $x \in M_3 = (-\infty, -7)$. Daher: $L_3 = I_3 \cap M_3 = \emptyset$.

Ergebnis: $L = (-\infty, -7) \cup (-1, 2)$.

i) Voraussetzung: $x \neq -5 \wedge x \neq -4$.

1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -5): \ (10x+2)(x+4) < (9x+3)(x+5) \ \Leftrightarrow \ x^2 - 6x - 7 < 0$.

Der Graph von $y = x^2 - 6x - 7$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit den Nullstellen $x_1 = -1$, $x_2 = 7$. Daher gilt: $x^2 - 6x - 7 < 0 \Leftrightarrow \ x \in M_1 = (-1, 7)$. Also ist $L_1 = I_1 \cap M_1 = \emptyset$.

2.Fall: $x \in I_2 = (-5, -4): (10x+2)(x+4) > (9x+3)(x+5) \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 > 0 \ \Leftrightarrow$
$x \in M_2 = (-\infty, -1) \cup (7, \infty)$. Daher: $L_2 = I_2 \cap M_2 = (-5, -4)$.

3.Fall: $x \in I_3 = (-4, +\infty): (10x+2)(x+4) < (9x+3)(x+5) \Leftrightarrow x^2 - 6x - 7 < 0 \ \Leftrightarrow$
$x \in M_3 = (-1, 7)$. Somit ist $L_3 = I_3 \cap M_3 = (-1, 7)$.

Ergebnis: $L = (-5, -4) \cup (-1, 7)$.

L 3.9 a) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, 5): \ -x + 5 = 1 \ \Leftrightarrow \ x = 4$, d.h. $x \in M_1 = \{4\}$.
Folglich ist $L_1 = I_1 \cap M_1 = \{4\}$.

2.Fall: $x \in I_2 = [5, +\infty): \ x - 5 = 1 \ \Leftrightarrow \ x = 6$, d.h. $x \in M_2 = \{6\}$. Daher ist $L_2 = I_2 \cap M_2 = \{6\}$.

Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 = \{4, 6\}$.

Man erhält das Ergebnis auch unmittelbar aus der Überlegung, daß $x - 5 = 1$ oder $= -1$ sein muß.

b) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, 1): \ -x + 1 + x = 2 - x \ \Leftrightarrow \ x = 1$, d.h. $x \in M_1 = \{1\}$.
Somit ist $L_1 = \emptyset$.

2.Fall: $x \in I_2 = [1, +\infty): \ x - 1 + x = 2 - x \ \Leftrightarrow \ x = 1$, d.h. $x \in M_2 = \{1\}; L_2 = \{1\}$.

Ergebnis: $L = \{1\}$.

c) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1): \ -x + 2 - x - 1 = 2x + 2 \ \Leftrightarrow \ 4x = -1$,
d.h. $x \in M_1 = \{-\frac{1}{4}\}$. Damit folgt $L_1 = \emptyset$.

2.Fall: $x \in I_2 = [-1, 2): \ -x + 2 + x + 1 = 2x + 2 \ \Leftrightarrow \ 2x = 1$, d.h. $x \in M_2 = \{\frac{1}{2}\}$ und folglich $L_2 = \{\frac{1}{2}\}$.

3.Fall: $x \in I_3 = [2, +\infty): \ x - 2 + x + 1 = 2x + 2$ ist widerspruchsvoll, daher für kein $x \in I\!R$ erfüllbar: $L_3 = \emptyset$.

Ergebnis: $L = \{\frac{1}{2}\}$.

d) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -2): \ -x + 1 - x - 2 = 3 \ \Leftrightarrow \ -2x = 4$,
d.h. $x \in M_1 = \{-\frac{1}{2}\}$ und folglich $L_1 = \emptyset$.

2.Fall: $x \in I_2 = [-2, 1]: \ -x + 1 + x + 2 = 3$. Dies ist für alle $x \in M_2 = I\!R$ erfüllt. Daher ist $L_2 = I_2 \cap M_2 = [-2, 1]$.

3.Fall: $x \in I_3 = (1, +\infty): \ x - 1 + x + 2 = 3 \ \Leftrightarrow \ 2x = 2$, d.h. $x \in M_3 = \{1\}$. $L_3 = \emptyset$.

Ergebnis: $L = [-2, 1]$.

e) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1): \ -x - 1 - x + 1 = -x \ \Leftrightarrow \ x = 0$, d.h. $x \in M_1 = \{0\}$.
Daher: $L_1 = \emptyset$.

2.Fall: $x \in I_2 = [-1, 0): \ x + 1 - x + 1 = -x \ \Leftrightarrow \ x = -2$, d.h. $x \in M_2 = \{-2\}$.
Somit: $L_2 = \emptyset$.

3.Fall: $x \in I_3 = [0, 1): \ x + 1 - x + 1 = x \Leftrightarrow x = 2$, d.h. $x \in M_3 = \{2\}$. $L_3 = \emptyset$.

4.Fall: $x \in I_4 = [1, +\infty): \ x + 1 + x - 1 = x \Leftrightarrow x = 0$, d.h. $x \in M_4 = \{0\}$. $L_4 = \emptyset$.

Ergebnis: $L = \emptyset$.

f) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1): \ -x - 1 + x - 1 = -x \ \Leftrightarrow \ x = 2$, d.h. $x \in M_1 = \{2\}$.
Folglich: $L_1 = \emptyset$.

2.Fall: $x \in I_2 = [-1, 0): \ x + 1 + x - 1 = -x \ \Leftrightarrow \ x = 0$, d.h. $x \in M_2 = \{0\}$. $L_2 = \emptyset$.

3.Fall: $x \in I_3 = [0, 1): \ x + 1 + x - 1 = x \ \Leftrightarrow \ x = 0$, d.h. $x \in M_3 = \{0\}$. $L_3 = \{0\}$.

4.Fall: $x \in I_4 = [1, +\infty): \ x + 1 - x + 1 = x \ \Leftrightarrow \ x = 2$, d.h. $x \in M_4 = \{2\}$. $L_4 = \{2\}$.

Ergebnis: $L = \{0, 2\}$.

4

g) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -2): -x-2-2+x = -2x \Leftrightarrow x = 2$, d.h. $x \in M_1 = \{2\}$. Somit: $L_1 = \emptyset$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-2, 0): x+2-2+x = -2x \Leftrightarrow x = 0$, d.h. $x \in M_2 = \{0\}$. $L_2 = \emptyset$.
3.Fall: $x \in I_3 = [0, 2): x+2-2+x = 2x$. Dies ist erfüllt für alle $x \in I\!R$. $L_3 = [0, 2)$.
4.Fall: $x \in I_4 = [2, +\infty): x+2+2-x = 2x \Leftrightarrow x = 2$, d.h. $x \in M_4 = \{2\}$. $L_4 = \{2\}$.
Ergebnis: $L = [0, 2]$.

h) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -2): |-x-2+x-1| = 3$. Dies ist erfüllt für alle $x \in I\!R$. Somit ist $L_1 = (-\infty, -2)$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-2, 1]: |x+2+x-1| = 3 \Leftrightarrow (2x+1 = -3) \vee (2x+1 = 3)$, d.h. $(x \in M_{21} = \{-2\}) \vee (x \in M_{22} = \{1\})$. $L_2 = I_2 \cap (M_{21} \cup M_{22}) = \{-2, 1\}$.
3.Fall: $x \in I_3 = (1, +\infty): |x+2-x+1| = 3$. Dies ist für alle $x \in I\!R$ erfüllt. Daher ist $L_3 = (1, +\infty)$.
Ergebnis: $L = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

$\boxed{\text{L 3.10}}$ a) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, 2): -x+2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x$, d.h. $x \in M_1 = [-1, \infty)$. $L_1 = I_1 \cap M_1 = [-1, 2)$.
2.Fall: $x \in I_2 = [2, +\infty): x-2 \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 5$, d.h. $x \in M_2 = (-\infty, 5]$. Folglich: $L_2 = I_2 \cap M_2 = [2, 5]$.
Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 = [-1, 5]$.
Man erhält dieses Ergebnis auch aus $|x-2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$.

b) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -4): -x-4 > 2 \Leftrightarrow x < -6$, d.h. $x \in M_1 = (-\infty, -6)$. $L_1 = (-\infty, -6)$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-4, +\infty): x+4 > 2 \Leftrightarrow x > -2$, d.h. $x \in M_2 = (-2, +\infty)$. $L_2 = (-2, +\infty)$.
Ergebnis: $L = (-\infty, -6) \cup (-2, +\infty) = I\!R \setminus [-6, -2]$.
(Dabei ist $[-6, -2]$ die Lösungsmenge von $|x+4| \leq 2$; denn analog zu a) ist $|x+4| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq x+4 \leq 2 \Leftrightarrow -6 \leq x \leq -2$).

c) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1): -x-1-x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$, d.h. $x \in M_1 = (-\infty, -1]$. $L_1 = (-\infty, -1)$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-1, +\infty): x+1-x \geq 1$. Dies ist (mit Gleichheitszeichen) für alle $x \in I\!R$ erfüllt. $L_2 = [-1, +\infty)$.
Ergebnis: $L = I\!R$.
Bemerkung: Man erhält dieses Ergebnis auch unmittelbar aus folgender Überlegung: $|x+1| - x \geq 1 \Leftrightarrow |x+1| \geq x+1$. Diese Ungleichung ist für alle $x \in I\!R$ erfüllt, da $|a| \geq a$ für alle $a \in I\!R$ gilt. Daher ist $L = I\!R$.

d) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -3): -x-3 < 4+x-2 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$, d.h. $x \in M_1 = (-\frac{5}{2}, +\infty)$. $L_1 = \emptyset$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-3, 2): x+3 < 4+x-2$. Dies ist für *kein* $x \in I\!R$ erfüllbar: $L_2 = \emptyset$.
3.Fall: $x \in I_3 = [2, +\infty): x+3 < 4-x+2 \Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$, d.h. $x \in M_3 = (-\infty, \frac{3}{2})$. $L_3 = \emptyset$.
Ergebnis: $L = \emptyset$.

e) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1): -x+3-x-1 \leq 2+x \Leftrightarrow x \geq 0$, d.h. $x \in M_1 = [0, +\infty)$. $L_1 = \emptyset$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-1, 3): -x+3+x+1 \leq 2+x \Leftrightarrow x \geq 2$, d.h. $x \in M_2 = [2, +\infty)$. $L_2 = [2, 3)$.
3.Fall: $x \in I_3 = [3, +\infty): x-3+x+1 \leq 2+x \Leftrightarrow x \leq 4$, d.h. $x \in M_3 = (-\infty, 4]$. $L_3 = [3, 4]$.
Ergebnis: $L = [2, 4]$.
Bemerkung: Wir zeigen an diesem Beispiel, wie Ungleichungen auch graphisch gelöst werden können: Wir betrachten die Funktion $y = |x-3| + |x+1| - 2 - x$ und untersuchen, wo $y \leq 0$ ist. Zum Zeichnen des Graphen von y verwenden wir, daß gilt:

$$y = \begin{cases} -x+3-x-1-2-x = & -3x & \text{für} \quad x \leq -1 \\ -x+3+x+1-2-x = & -x+2 & \text{für} \quad -1 < x \leq 3 \\ x-3+x+1-2-x = & x-4 & \text{für} \quad x > 3 \end{cases}$$

Bild L 3.10e entnimmt man $L = [2, 4]$.

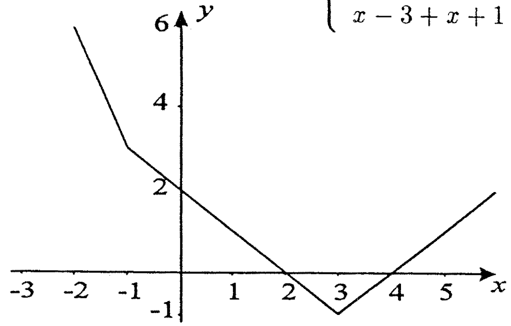


Bild L 3.10e

f) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -2): -x-2-x-x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$, d.h. $x \in M_1 = (-\infty, \frac{2}{3}]$. $L_1 = (-\infty, -2)$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-2, 4): x+2-x-x+4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$, d.h. $x \in M_2 = (-\infty, 6]$). $L_2 = [-2, 4)$.
3.Fall: $x \in I_3 = [4, +\infty): x+2-x+x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$, d.h. $x \in M_3 = [2, \infty)$. $L_3 = [4, +\infty)$.
Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = I\!R$.

g) Die Nullstellen von $y = x^2 + 2x - 24$ sind $x_1 = -6$, $x_2 = 4$. Daher ist $y \leq 0$ für $x \in [-6, 4]$.
1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -6): x^2 + 2x - 24 \leq 24$. $\tilde{y} = x^2 + 2x - 48$ hat die Nullstellen $x_1 = -8$, $x_2 = 6$. Somit ist $\tilde{y} \leq 0$ für $x \in M_1 = [-8, 6]$. $L_1 = I_1 \cap M_1 = [-8, -6)$.
2.Fall: $x \in I_2 = [-6, 4]: -x^2 - 2x + 24 \leq 24$. $\hat{y} = -x^2 - 2x$ hat die Nullstellen $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, so daß $\hat{y} \leq 0$ ist für $x \in M_2 = (-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$. $L_2 = I_2 \cap M_2 = [-6, -2] \cup [0, 4]$.
3.Fall: $x \in I_3 = (4, +\infty): x^2 + 2x - 24 \leq 24$. Nach Fall 1 gilt dies für $x \in M_1 = [-8, 6]$. $L_3 = I_3 \cap M_1 = (4, 6]$.
Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-8, -2] \cup [0, 6]$.

5

Lösen zu Blatt 5

h) Die Nullstellen von $y = x^2 - 7$ sind $x_1 = -\sqrt{7}$ und $x_2 = \sqrt{7}$.

1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -\sqrt{7}): \; -x + 5 \leq x^2 - 7. \; \Leftrightarrow \; 0 \leq x^2 + x - 12.$
$y = x^2 + x - 12$ hat die Nullstellen $x_1 = -4, \; x_2 = 3$. Somit ist $y \geq 0$ für $x \in M_1 = (-\infty, -4] \cup [3, +\infty)$. $L_1 = I_1 \cap M_1 = (-\infty, -4]$.

2.Fall: $x \in I_2 = [-\sqrt{7}, \sqrt{7}]: \; -x + 5 \leq -x^2 + 7. \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \leq 0.$
$\tilde{y} = x^2 - x - 2$ hat die Nullstellen $x_1 = -1, \; x_2 = 2$, so daß $\tilde{y} \leq 0$ ist für $x \in M_2 = [-1, 2]$. $L_2 = I_2 \cap M_2 = [-1, 2]$.

3.Fall: $x \in I_3 = (\sqrt{7}, 5): \; -x + 5 \leq x^2 - 7 \; \Leftrightarrow \; 0 \leq x^2 + x - 12$ (vgl. Fall 1).
$L_3 = I_3 \cap M_1 = [3, 5)$.

4.Fall: $x \in I_4 = [5, +\infty): \; x - 5 \leq x^2 - 7 \; \Leftrightarrow \; 0 \leq x^2 - x - 2$. Nach Fall 2 gilt dies für $x \in M_4 = (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$. $L_4 = I_4 \cap M_4 = [5, +\infty)$.

Ergebnis: $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 = [-\infty, -4] \cup [-1, 2] \cup [3, +\infty)$.

i) Der Nenner wechselt sein Vorzeichen bei $x = 2$, der Betragsinhalt bei $x = 12$. Damit sind folgende Fälle zu unterscheiden ($x \neq 2$!):

1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, 2): \; -x + 12 \leq (x-2)(6+x) \; \Leftrightarrow \; 0 \leq x^2 + 5x - 24.$
$y = x^2 + 5x - 24$ hat die Nullstellen $x_1 = -8, \; x_2 = 3$. Daher ist $y \geq 0$ für $x \in M_1 = (-\infty, -8] \cup [3, +\infty)$. $L_1 = I_1 \cap M_1 = (-\infty, -8]$.

2.Fall: $x \in I_2 = (2, 12]: \; -x + 12 \geq (x-2)(6+x) \; \Leftrightarrow \; 0 \geq x^2 + 5x - 24$. Nach Fall 1 ist $y = x^2 + 5x - 24 \leq 0$ für $x \in M_2 = [-8, 3]$. $L_2 = I_2 \cap M_2 = (2, 3]$.

3.Fall: $x \in I_3 = (12, +\infty): \; x - 12 \geq (x-2)(6+x) \; \Leftrightarrow \; 0 \geq x^2 + 3x$. Der Graph von $\tilde{y} = x^2 + 3x$ hat die Nullstellen $x_1 = -3, \; x_2 = 0$. Daher ist $\tilde{y} \leq 0$ für $x \in M_3 = [-3, 0]$. $L_3 = I_3 \cap M_3 = \emptyset$.

Ergebnis: $L = (-\infty, -8] \cup (2, 3]$.

j) 1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, 0): \; 3 - x(5-x) < -(x-5)(5-x) \; \Leftrightarrow \; x < \frac{22}{5}$, d.h. $x \in M_1 = (-\infty, \frac{22}{5})$. $L_1 = I_1$.

2.Fall: $x \in I_2 = [0, 5): \; 3 + x(5-x) < -(x-5)(5-x) \; \Leftrightarrow \; 2x^2 - 15x + 22 > 0.$
$y = 2x^2 - 15x + 22$ hat die Nullstellen $x_1 = 2, \; x_2 = \frac{11}{2}$. Daher ist $y > 0$ für $x \in M_2 = (-\infty, 2) \cup (\frac{11}{2}, +\infty)$. $L_2 = I_2 \cap M_2 = [0, 2)$.

3.Fall: $x \in I_3 = (5, +\infty): \; 3 + x(5-x) > (x-5)(5-x) \; \Leftrightarrow \; x < \frac{28}{5}$, d.h. $x \in M_3 = (-\infty, \frac{28}{5})$. $L_3 = I_3 \cap M_3 = (5, \frac{28}{5})$.

Ergebnis: $L = (-\infty, 2) \cup (5, \frac{28}{5})$.

k) Wir lösen die Aufgabe, indem wir die "inneren" Betragsstriche beseitigen und anschließend die Äquivalenz von $|f(x)| \leq a$ und $-a \leq f(x) \leq a$ benutzen. Da die Inhalte der "inneren" Betragsstriche bei $x = -1$ bzw. bei $x = 2$ ihr Vorzeichen wechseln, sind folgende Fälle zu unterscheiden:

1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -1): \; |-x + 2 + x + 1 + 6| \leq 3$ ist für *kein* $x \in I\!R$ erfüllbar. Daher ist $L_1 = \emptyset$.

2.Fall: $x \in I_2 = [-1, 2]: \; |-x + 2 - x - 1 + 6| \leq 3 \; \Leftrightarrow \; |-2x + 7| \leq 3 \; \Leftrightarrow$
$-3 \leq -2x + 7 \leq 3 \; \Leftrightarrow \; 2 \leq x \leq 5$, d.h. $x \in M_2 = [2, 5]$. Daher: $L_2 = \{2\}$.

3.Fall: $x \in I_3 = (2, +\infty): \; |x - 2 - x - 1 + 6| \leq 3$ ist (mit dem Gleichheitszeichen) für alle $x \in I\!R$ erfüllt. Somit: $L_3 = I_3$.

Ergebnis: $L = L_2 \cup L_3 = [2, +\infty)$.

l) Da die Betragsinhalte $x - 1$ bzw. x ihr Vorzeichen bei $x = 1$ bzw. $x = 0$ wechseln und der auftretende Nenner sein Vorzeichen bei $x = -2$ wechselt, betrachten wir folgende 4 Fälle:

1.Fall: $x \in I_1 = (-\infty, -2): \; |x - x + 1| > \dfrac{-x}{x+2} \; \Leftrightarrow \; x + 2 < -x \; \Leftrightarrow \; x < -1$, d.h. $x \in M_1 = (-\infty, -1)$. $L_1 = (-\infty, -2)$.

2.Fall: $x \in I_2 = (-2, 0]: \; |x - x + 1| > \dfrac{-x}{x+2} \; \Leftrightarrow \; x + 2 > -x \; \Leftrightarrow \; x > -1$, d.h. $x \in M_2 = (-1, +\infty)$. Folglich: $L_2 = (-1, 0]$.

3.Fall: $x \in I_3 = (0, 1]: \; |x - x + 1| > \dfrac{x}{x+2} \; \Leftrightarrow \; x + 2 > x$. Dies ist für alle $x \in I\!R$ erfüllt, d.h. $x \in M_3 = I\!R$. Daher: $L_3 = (0, 1]$.

4.Fall: $x \in I_4 = (1, +\infty): \; |x + x - 1| > \dfrac{x}{x+2} \Leftrightarrow (2x-1)(x+2) > x$ (da $2x - 1 > 0$ für $x \in I_4$) $\; \Leftrightarrow \; 2x^2 + 2x - 2 > 0$. Da $y = 2x^2 + 2x - 2$ die Nullstellen $x_{1,2} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{3})$ besitzt, ist $y > 0$ für $x \in M_4 = (-\infty, \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{3})) \cup (\frac{1}{2}(-1 + \sqrt{3}), +\infty)$. Somit: $L_4 = (1, +\infty)$.

Ergebnis: $L = (-\infty, -2) \cup (-1, +\infty) = I\!R \setminus [-2, -1]$.

Blatt 2

A 2.1 Die folgenden Brüche sind als Dezimalzahlen zu schreiben:

a) $\frac{13}{16}$ b) $\frac{110}{111}$ c) $\frac{1\,111\,111}{25\,000\,000}$ d) $\frac{47}{45}$ e) $\frac{40\,034}{19\,998}$ f) $\frac{59\,457}{29\,700}$

(Eine vermutete Periodizität ist durch Rückumwandlung in einen Bruch (vgl. A 2.2) zu bestätigen.)

A 2.2 Wandeln Sie die folgenden Dezimalzahlen in Brüche um und kürzen Sie so weit wie möglich:

a) $0.21\,875$ b) $1.\overline{00\,423}$ c) $1.00\,\overline{423}$ d) 1.0666 e) $1.0\overline{6}$ f) $0.\overline{9}$

A 2.3 Entscheiden Sie, welche der Zahlen a, b die größere ist:

a) $a = \frac{36}{71}$, $b = \frac{41}{81}$ b) $a = \frac{122}{999}$, $b = \frac{122\,122}{1\,000\,000}$

c) $a = \frac{1\,929}{15\,625}$, $b = \frac{19753}{160\,000}$ d) $a = -\frac{212\,957}{249\,993}$, $b = -\frac{212\,963}{250\,000}$

A 2.4 Folgende Terme sind zu vereinfachen:

a) $2(a-3b+c)+d(3-a)-c-a(2-d)-3(d-2b)$
b) $a(2b+c)-b(c+2a)+c(b-a)$
c) $3(3a-2b)-[3(2a-4b-c)-2(a-2c+4b)]$

A 2.5 Man vereinfache:

a) $(a-2b)(a-c)-(c-2b)(2b-a)$
b) $(6a+2)(5b-1)(c+1)-(3a+1)(1-5b)(-2c-2)$
c) $2(a+2b)(a-3b)(b+a)+(3b-2a)(4b-a)(b-a)$

A 2.6 Die folgenden Summen lassen sich zu einem Produkt zusammenfassen:

a) $3a^2+16ab+16b^2$ b) $4a^3c+4a^2bd-12a^2bc-12ab^2d+9ab^2c+9b^3d$
c) $4a^3+5a^2b-2ab^2-3b^3$
d) $a^3b+a^3c-a^2b^2+3a^2bc+4a^2c^2-4ab^2c+4ac^3-4b^2c^2-4bc^3$

A 2.7 Durch Anwendung binomischer Formeln vereinfache man:

a) $(a+b)^2+(a-b)^2$ b) $(a-b)^2-(-a-b)^2$
c) $(b-a)^2-(a-b)^2$ d) $(a+b)^2+(a^2-b^2)$
e) $a^2-b^2-(a-b)^2$ f) $(a+b+c)^2-(a+b)^2-(a+c)^2-(b+c)^2$
g) $(a+b-c)^2+(a+c)^2+(b+c)^2$ h) $(a-b-c)^2+(a+b)^2-(b+c)^2$

A 2.8 Man schreibe als Quadrat eines Binoms:

a) $4a^2+12ab+9b^2$ b) $a-\frac{4\sqrt{a}}{b}+\frac{4}{b^2}$ c) $b+\frac{1}{b}+2$ d) $\frac{2}{a^2}+\frac{a^2}{8}-1$

A 2.9 Die folgenden Terme sind mit Hilfe quadratischer Ergänzung möglichst weitgehend zusammenzufassen:

a) x^2+4x+6 b) x^2-6x+8 c) $2y^2-8y+4$ d) $x^2-y^2+6x+4y+5$

e) $3x^2+4y^2-6x+16y+20$ f) $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}+1$ g) $x^2y^2+2x+\frac{2}{y^2}$

A 2.10 Berechnen Sie:

a) $\frac{7}{8}-\frac{3}{8}+1\frac{5}{8}-\frac{9}{8}$ b) $\frac{7}{3}-\frac{5}{6}-\frac{11}{12}+\frac{1}{4}$

c) $(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}+\frac{1}{6}-\frac{9}{8})\cdot(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{6})$ d) $(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}-\frac{3}{4}-\frac{9}{10})\cdot(\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{18})$

e) $(\frac{1}{4}-\frac{1}{12}+\frac{5}{24}+\frac{5}{8}):(\frac{2}{9}-\frac{7}{18}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6})$ f) $(\frac{2}{15}-\frac{1}{10}+\frac{1}{5}):(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{9}-\frac{2}{45})$

A 2.11 Man vereinfache so weit wie möglich:

a) $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}$ b) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$

c) $\frac{1}{a+2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{b-3}$ d) $\frac{b-4a}{a+b}+\frac{2a^2+5ab+3b^2}{(a+b)^2}-1$

e) $\frac{a}{b^2c}+\frac{c}{ab^2}-\frac{2}{b^2}$ f) $\frac{u-10}{u+2}-\frac{2u+3}{u-2}+\frac{u^2+7u+10}{u^2-4}$

g) $\frac{3}{a-1}+\frac{6}{1-a^2}-\frac{5}{a+1}$ h) $\frac{2z-1}{z+2}+\frac{3z+4}{z-3}-\frac{5z^2+3z+11}{z^2-z-6}$

i) $\frac{3}{b+1}+\frac{1}{b+2}+\frac{3b-1}{1-b^2}+\frac{3}{2-b}+\frac{2b+10}{b^2-4}$ j) $\frac{1}{a-b}-\frac{4a-6b}{a^2+3ab+2b^2}-\frac{3a+23b}{b^2-a^2}$

k) $\frac{a+b}{b-a}\cdot\frac{4(b^2-a^2)}{2a+2b}$ l) $\frac{a^2+a-2}{a^2-a}\cdot\frac{a^2-4a+3}{a^2-a-6}$

m) $\frac{a^2-2ab+b^2}{2a+2b}:\frac{b^2-a^2}{2a^2+4ab+2b^2}$ n) $\frac{a^2+a-2}{a^2-a}:\frac{a^2-4a+3}{a^2-a-6}$

o) $\dfrac{b-\frac{a+b}{ab+1}}{a-\frac{a^2b-ab}{1+ab}}$ p) $\dfrac{a-\frac{a^2}{a-\frac{b^2}{a}}}{b-\frac{b}{1+\frac{a}{b}}}$ q) $\dfrac{\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}}$ r) $\dfrac{\frac{2ab^2}{b^4-a^4}-\frac{a}{b^2+a^2}}{\frac{1}{a+b}+\frac{a}{b^2-a^2}}$

A 2.12 Die folgenden physikalischen Formeln sind nach den angegebenen Größen umzustellen. (Zur Bedeutung der auftretenden Symbole vgl. z.B. [DES].)

a) (temperaturabh. elektr. Widerstand) $R = R_0(1+\alpha(T-T_0))$ nach T,

b) (Leistungszahl der Kältemaschine) $\epsilon = \frac{T_2}{T_1-T_2}$ nach T_1, T_2,

c) (Mischungsregel) $m_1c_1(T_1-T_m) = (m_2c_2+C)(T_m-T_2)$ nach T_1, T_m, c_2,

d) (relativistische Geschwindigkeit) $u = \frac{u'+v}{1-u'vc_0^{-2}}$ nach c_0^2, u', v,

e) (Brennweite zweier Linsen) $D = (n-1)(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2})$ nach r_1,

f) (resultierende Brennkraft zweier Linsen) $\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1}+\frac{1}{f_2}-\frac{e}{f_1f_2}$ nach f, f_2,

g) (Rydbergkonstante des Atoms X) $R_X = \frac{m_e e^4}{8h^3c_0\epsilon_0^2(1+\frac{m_e}{m_k})}$ nach m_k, m_e.

(1)

Lösung zu BlaH 2

$\boxed{\text{L 2.1}}$ a) 0.8125. b) $0.\overline{990}$. c) $0.0444\,4444$. d) $1.0\overline{4}$. e) $2.\overline{0019}$. f) $2.00.\overline{19}$.

$\boxed{\text{L 2.2}}$ a) $\frac{21\,875}{100\,000} = \frac{7}{32}$. b) $x = 1.\overline{00423}$, $100\,000x = 100\,423.\overline{00423} \Rightarrow$

$99\,999x = 100\,422 \Rightarrow x = \frac{100\,422}{99\,999} = \frac{11\,158}{11\,111}$.

c) $x = 1.00\overline{423}$, $1000x = 1004.23\overline{423} \Rightarrow 999x = 1003.23 \Rightarrow x = \frac{1003.23}{999} = \frac{100323}{99\,900} = \frac{11\,147}{11\,100}$. d) $\frac{10\,666}{10\,000} = \frac{5\,333}{5\,000}$.

e) $x = 1.0\overline{6}$, $10x = 10.\overline{6} \Rightarrow 9x = 9.6 \Rightarrow x = \frac{9.6}{9} = \frac{96}{90} = \frac{16}{15}$.

f) $x = 0.\overline{9}$, $10x = 9.\overline{9} \Rightarrow 9x = 9 \Rightarrow x = 1$.

$\boxed{\text{L 2.3}}$ a) $a = 0.507\,042\ldots > b = 0.506\,172\ldots$. b) $b = 0.122\,122 < a = 0.\overline{122}$.
c) $a = 0.123\,456 < b = 0.123\,456\,25$. d) $a = -0.\overline{851} > b = -0.851\,852$.

$\boxed{\text{L 2.4}}$ a) $2a - 6b + 2c + 3d - da - c - 2a + ad - 3d + 6b = c$.
b) $2ab + ac - bc - 2ab + cb - ca = 0$.
c) $9a - 6b - [6a - 12b - 3c - 2a + 4c - 8b] = 5a + 14b - c$.

$\boxed{\text{L 2.5}}$ a) $(a-2b)(a-c) + (c-2b)(a-2b) = (a-2b)(a-c+c-2b) = (a-2b)^2$.
b) $(5b-1)(c+1)(6a+2-2(3a+1)) = 0$.
c) $2(a^2 - ab - 6b^2)(b+a) + (12b^2 - 11ab + 2a^2)(b-a) = 2(a^3 - 7ab^2 - 6b^3) + 12b^3 - 23ab^2 + 13a^2b - 2a^3 = ab(13a - 37b)$.

$\boxed{\text{L 2.6}}$ a) $3a(a+4b) + 4b(a+4b) = (3a+4b)(a+4b)$.
b) $4a^2(ac+bd) - 12ab(ac+bd) + 9b^2(ac+bd) = (ac+bd)(4a^2 - 12ab + 9b^2) = (ac+bd)(2a-3b)^2$.
c) $a^2(4a-3b) + 2ab(4a-3b) + b^2(4a-3b) = (a^2+2ab+b^2)(4a-3b) = (a+b)^2(4a-3b)$.
d) $a^2b(a-b) + a^2c(a-b) + 4bc^2(a-b) + 4abc(a-b) + 4ac^2(a-b) + 4c^3(a-b) = (a-b)[a^2(b+c) + 4c^2(b+c) + 4ac(b+c)] = (a-b)(b+c)(a^2 + 4ac + 4c^2) = (a-b)(b+c)(a+2c)^2$.

$\boxed{\text{L 2.7}}$ a) $a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2 = 2(a^2 + b^2)$.
b) $a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2) = -4ab$. c) $(b-a)^2 - (b-a)^2 = 0$.
d) $(a+b)^2 + (a+b)(a-b) = (a+b)(a+b+a-b) = 2a(a+b)$.
e) $(a+b)(a-b) - (a-b)^2 = (a-b)(a+b-a+b) = 2b(a-b)$.
f) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc - (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 + 2ac + c^2) - (b^2 + 2bc + c^2) = -(a^2 + b^2 + c^2)$.
g) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc + a^2 + 2ac + c^2 + b^2 + 2bc + c^2 = 2(a^2 + b^2 + ab) + 3c^2$.
h) $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc + a^2 + 2ab + b^2 - b^2 - 2bc - c^2 = 2a(a-c) + b^2$.

$\boxed{\text{L 2.8}}$ a) $(2a + 3b)^2$. b) $(\sqrt{a} - \frac{2}{b})^2$. c) $(\sqrt{b} + \frac{1}{\sqrt{b}})^2$. d) $(\frac{\sqrt{2}}{a} - \frac{a}{2\sqrt{2}})^2$.

$\boxed{\text{L 2.9}}$ a) $(x+2)^2 + 2$ b) $(x-3)^2 - 1$. c) $2(y^2 - 4y) + 4 = 2(y-2)^2 - 4$.
d) $(x+3)^2 - (y-2)^2$. e) $3(x^2 - 2x) + 4(y^2 + 4y) + 20 = 3(x-1)^2 + 4(y+2)^2 + 1$.
f) $(\frac{x}{y} + \frac{y}{x})^2 - 1$. g) $(xy + \frac{1}{y})^2 + \frac{1}{y^2}$.

$\boxed{\text{L 2.10}}$ a) $\frac{7 - 3 + 13 - 9}{8} = 1$. b) $\frac{28 - 10 - 11 + 3}{12} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$.
c) $\frac{32 - 18 + 4 - 27}{24} \cdot \frac{3 + 4 + 1}{6} = -\frac{9}{24} \cdot \frac{8}{6} = -\frac{1}{2}$.
d) $\frac{10 - 4 - 15 - 18}{20} \cdot \frac{2 + 3 + 6 - 1}{18} = -\frac{27}{20} \cdot \frac{10}{18} = -\frac{3}{4}$.
e) $\frac{6 - 2 + 5 + 15}{24} : \frac{4 - 7 + 6 + 3}{18} = 1 : \frac{1}{3} = 3$.
f) $\frac{4 - 3 + 6}{30} : \frac{45 - 30 - 15 - 10 - 4}{90} = \frac{7}{30} : (-\frac{14}{90}) = -\frac{3}{2}$.

$\boxed{\text{L 2.11}}$ a) $\frac{bc + 2ac + ab}{abc}$. b) $\frac{a + b + c}{abc}$. c) $\frac{7a - ab + 8}{2(a+2)(b+3)}$.
d) $\frac{(b-4a)(a+b) + 2a^2 + 5ab + 3b^2 - a^2 - 2ab - b^2}{(a+b)^2} = \frac{-3(a^2 - b^2)}{(a+b)^2} = -\frac{3(a-b)}{a+b}$. e) $\frac{a^2 + c^2 - 2ac}{ab^2c} = \frac{(a-c)^2}{ab^2c}$.
f) $\frac{(u-10)(u-2) - (2u+3)(u+2) + u^2 + 7u + 10}{(u+2)(u-2)} = -\frac{12}{u+2}$.
g) $\frac{3(a+1) - 6 - 5(a-1)}{(a-1)(a+1)} = -\frac{2}{a+1}$
h) $\frac{(2z-1)(z-3) + (3z+4)(z+2) - 5z^2 - 3z - 11}{(z+2)(z-3)} = 0$.
i) $\frac{3(b-1) - 3b + 1}{b^2 - 1} + \frac{b - 2 - 3(b+2) + 2b + 10}{b^2 - 4} = \frac{-2(b^2-4) + 2(b^2-1)}{(b^2-1)(b^2-4)} = \frac{6}{(b^2-1)(b^2-4)}$.
j) $\frac{(a+b)(a+2b) - (4a-6b)(a-b) + (3a+23b)(a+2b)}{(a-b)(a+b)(a+2b)} = \frac{42ab + 42b^2}{(a-b)(a+b)(a+2b)} = \frac{42b}{(a-b)(a+2b)}$.
k) $\frac{(a+b) \cdot 4(b+a)(b-a)}{(b-a) \cdot 2(a+b)} = 2(a+b)$. l) $\frac{(a-1)(a+2)(a-1)(a-3)}{a(a-1)(a-3)(a+2)} = \frac{a-1}{a}$.
m) $\frac{(a-b)^2 \cdot 2(a+b)^2}{2(a+b)(b-a)(b+a)} = b - a$. n) $\frac{(a-1)(a+2)(a-3)(a+2)}{a(a-1)(a-1)(a-3)} = \frac{(a+2)^2}{a(a-1)}$.

2

Lösung zu Blatt 2

o) $\dfrac{b(ab+1)-a-b}{a(1+ab)-a^2b+ab} = \dfrac{a(b^2-1)}{a(b+1)} = b-1.$

p) $\dfrac{a-\dfrac{a^3}{a^2-b^2}}{b-\dfrac{b^2}{b+a}} = \dfrac{\dfrac{a(a^2-b^2)-a^3}{(a-b)(a+b)}}{\dfrac{b(b+a)-b^2}{b+a}} = -\dfrac{b}{a-b}\,.$

q) $\dfrac{\dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2y^2}}{\dfrac{x^2-y^2}{x^2y^2}} = \dfrac{(x+y)^2}{(x+y)(x-y)} = \dfrac{x+y}{x-y}\,.$

r) $\dfrac{\dfrac{2ab^2-a(b^2-a^2)}{(b^2-a^2)(b^2+a^2)}}{\dfrac{b-a+a}{b^2-a^2}} = \dfrac{ab^2+a^3}{b(b^2+a^2)} = \dfrac{a}{b}\,.$

L 2.12 a) $\alpha(T-T_0) = \dfrac{R}{R_0} - 1 = \dfrac{R-R_0}{R_0} \;\Rightarrow\; T = T_0 + \dfrac{R-R_0}{\alpha R_0}\,.$

b) $\epsilon(T_1-T_2) = T_2 \;\Rightarrow\; T_1 = T_2(\frac{1}{\epsilon}+1),\; T_2 = \dfrac{T_1}{\frac{1}{\epsilon}+1} = \dfrac{\epsilon T_1}{1+\epsilon}\,.$

c) $T_1 = T_m + \dfrac{(m_2c_2+C)(T_m-T_2)}{m_1c_1}\,, \quad m_1c_1T_1 + (m_2c_2+C)T_2 =$

$m_1c_1T_m + (m_2c_2+C)T_m \;\Rightarrow\; T_m = \dfrac{m_1c_1T_1+(m_2c_2+C)T_2}{m_1c_1+m_2c_2+C}\,,$

$\dfrac{m_1c_1(T_1-T_m)}{T_m-T_2} = m_2c_2 + C \;\Rightarrow\; c_2 = \dfrac{1}{m_2}\left(\dfrac{m_1c_1(T_1-T_m)}{T_m-T_2} - C\right).$

d) $1 - \dfrac{u'v}{c_0^2} = \dfrac{u'+v}{u} \;\Rightarrow\; \dfrac{u'v}{c_0^2} = \dfrac{u-u'-v}{u} \;\Rightarrow\; c_0^2 = \dfrac{uu'v}{u-u'-v}\,,$

$u(1-\dfrac{u'v}{c_0^2}) = u' + v \quad (+) \Rightarrow\; u - v = u'(1+\dfrac{uv}{c_0^2}) \;\Rightarrow\; u' = \dfrac{c_0^2(u-v)}{c_0^2+uv}\,.$

Andererseits folgt aus $(+)$: $\;u - u' = v(1+\dfrac{uu'}{c_0^2}) \;\Rightarrow\; v = \dfrac{c_0^2(u-u')}{c_0^2+uu'}\,.$

e) $\dfrac{1}{r_1} = \dfrac{D}{n-1} - \dfrac{1}{r_2} = \dfrac{Dr_2-n+1}{(n-1)r_2} \;\Rightarrow\; r_1 = \dfrac{(n-1)r_2}{Dr_2-n+1}\,.$

f) $\dfrac{1}{f} = \dfrac{f_2+f_1-e}{f_1f_2} \;\Rightarrow\; f = \dfrac{f_1f_2}{f_1+f_2-e}\,,$

$\dfrac{1}{f} - \dfrac{1}{f_1} = \dfrac{1}{f_2}(1-\dfrac{e}{f_1}) \;\Rightarrow\; \dfrac{f_1-f}{ff_1} = \dfrac{1}{f_2}\cdot\dfrac{f_1-e}{f_1} \;\Rightarrow\; f_2 = \dfrac{f(f_1-e)}{f_1-f}\,.$

g) $1 + \dfrac{m_e}{m_k} = \dfrac{m_ee^4}{8h^3c_0\epsilon_0^2R_X}\,. \quad (*)$

$\Rightarrow\; \dfrac{m_e}{m_k} = \dfrac{m_ee^4-8h^3c_0\epsilon_0^2R_X}{8h^3c_0\epsilon_0^2R_X} \;\Rightarrow\; m_k = \dfrac{8h^3c_0\epsilon_0^2R_Xm_e}{m_ee^4-8h^3c_0\epsilon_0^2R_X}\,.$

Aus (*) folgt andererseits $\;1 = m_e\left(\dfrac{e^4}{8h^3c_0\epsilon_0^2R_X} - \dfrac{1}{m_k}\right) =$

$m_e\left(\dfrac{m_ke^4-8h^3c_0\epsilon_0^2R_X}{8h^3c_0\epsilon_0^2R_Xm_k}\right) \;\Rightarrow\; m_e = \dfrac{8h^3c_0\epsilon_0^2R_Xm_k}{m_ke^4-8h^3c_0\epsilon_0^2R_X}\,.$

Blatt 2a

A 2.13 Ermitteln Sie die folgenden Summen:

a) $\sum\limits_{i=1}^{4} \frac{i}{i+2}$ b) $\sum\limits_{i=4}^{7} \frac{i^2}{i-3}$ c) $\sum\limits_{i=2}^{6} \frac{(-1)^i}{i}$ d) $\sum\limits_{i=1}^{5} \frac{(-i)^i}{i!}$

e) $\sum\limits_{i=1}^{10} i$ f) $\sum\limits_{j=6}^{16} 2$ g) $\sum\limits_{i=1}^{5} (2i-1)$ h) $\sum\limits_{i=100}^{110} (100-i)$

i) $\sum\limits_{k=10}^{25} \frac{2(k-10)}{5}$ j) $\sum\limits_{i=50}^{60} \frac{i^2-1}{i+1}$ k) $\sum\limits_{j=0}^{4} \frac{1}{3^j}$ l) $\sum\limits_{i=1}^{5} 2^{4-i}$ m) $\sum\limits_{i=1}^{16} \frac{1}{i(i+1)}$

A 2.14 Man schreibe mit dem Summenzeichen:

a) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ b) $a+3a+5a+7a$ c) $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}$

d) $1+2+4+8+16+32$ e) $-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}$ f) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$

g) $\frac{a}{20}-\frac{a}{120}+\frac{a}{300}-\frac{a}{560}$ h) $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{17}+\frac{5}{26}$

i) $\frac{x}{x+2y}+\frac{2x+y}{3x+4y}+\frac{3x+2y}{5x+6y}+\frac{4x+3y}{7x+8y}+\frac{5x+4y}{9x+10y}$

A 2.15 Für beliebige $n \in \mathbb{N}^+$ ermittle man:

a) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2i} - \sum\limits_{i=2}^{n+1} \frac{1}{2i-2}$ b) $\sum\limits_{k=0}^{n} k^2 + 2\sum\limits_{k=0}^{n} k + n + 1$ c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \ln \frac{k}{k+1}$

d) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}$ e) $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{(3i-2)(3i+1)}$ f) $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{4j^2-1}$

A 2.16 Folgende Doppelsummen sind zu berechnen:

a) $\sum\limits_{i=3}^{5}\sum\limits_{j=1}^{3} (i-j)^2$ b) $\sum\limits_{j=4}^{6}\sum\limits_{i=1}^{3} (2i+3j)$ c) $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{3} i \cdot j^2$

d) $\sum\limits_{i=0}^{4}\sum\limits_{j=0}^{i} \frac{i}{j+1}$ e) $\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{i=1}^{j-1} (-1)^{i+j}(j+1)^i$ f) $\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{i=5}^{8-j} \frac{i-j}{i+j}$

A 2.17 Die folgenden Ausdrücke lassen sich jeweils zu *einer* Doppelsumme zusammenfassen. Geben Sie diese an und berechnen Sie ihren Wert.

a) $\sum\limits_{j=0}^{2}\sum\limits_{i=2}^{4} (i-1)^j + \sum\limits_{j=3}^{5}\sum\limits_{i=j}^{4} (i-1)^j$ b) $\sum\limits_{j=1}^{3}\sum\limits_{i=2}^{4} \frac{j+1}{i-1} + \sum\limits_{i=5}^{6}\sum\limits_{j=1}^{7-i} \frac{j+1}{i-1}$

Lösungshinweise zu Blatt 2a

$\boxed{\text{H 2.13}}$ Das **Summenzeichen** (als abkürzende Schreibweise) ist für $n \in I\!N^+$, $a_i \in I\!R$, $i = 1, 2, ..., n$, durch $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$ definiert.

Es gelten die **Rechenregeln:**

$$\boxed{\begin{array}{ll} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k & \sum\limits_{i=1}^{n}(a_i + b_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{i=1}^{n} b_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \quad (c \text{ const.}) & \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{i=1}^{r} a_i + \sum\limits_{i=r+1}^{n} a_i \quad (r < n) & \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \sum\limits_{j=1-k}^{n-k} a_{j+k} = \sum\limits_{l=1+k}^{n+k} a_{l-k} \end{array}}$$

Vereinbarung: $\sum\limits_{i=s}^{r} a_i = 0$, falls $s > r$.

Für $n, m \in I\!N^+$, $a_{ij} \in I\!R$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$, definiert man die **Doppelsumme** durch

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{i=1}^{n}(a_{i1} + a_{i2} + ... + a_{im}) = \begin{array}{l} a_{11} + a_{12} + ... + a_{1m} + \\ a_{21} + a_{22} + ... + a_{2m} + \\ \;\;... \quad\;\; ... \quad\;\; ... + \\ a_{n1} + a_{n2} + ... + a_{nm}. \end{array}$$

Zusätzlich zu den obigen Rechenregeln gilt:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j}$$

e) Es ist ~~(vgl. A 2.30)~~ $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2}n(n+1)$ j) Beachte: $\frac{i^2-1}{i+1} = \frac{(i+1)(i-1)}{i+1} = i - 1$.

k) $\sum \frac{1}{3^j} = \sum (\frac{1}{3})^j$; weiter s. A 2.30b. l) $\sum 2^{4-i} = 2^4 \sum (\frac{1}{2})^i$; ~~weiter s. A 2.30b.~~

m) Brüche der Gestalt $\frac{1}{(x+a)(x+b)}$ zerlege man in "Partialbrüche". Dazu macht man den Ansatz: $\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b}$, multipliziert diese Gleichung mit dem Hauptnenner und erhält so: $1 = A(x+b) + B(x+a)$.

Da diese Gleichung für alle $x \in I\!R$ gelten soll, müssen die Koeffizienten der unterschiedlichen x-Potenzen auf beiden Seiten der Gleichung übereinstimmen ("Koeffizientenvergleich"), d.h., es muß gelten:

$A + B = 0$ und $Ab + Ba = 1$. Daraus ergibt sich: $A = \frac{1}{b-a}$, $B = -\frac{1}{b-a}$. Somit ist $\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{x+a} - \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{x+b}$. (*)

Auf diese Weise erhält man z.B. $\frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}$.

"Partialbruchzerlegung" ist Stoff der Vorlesung Ing.-Math. I → vgl. dort!

$\boxed{\text{H 2.15}}$ a) Beachte: $2i - 2 = 2(i-1) = 2j$ mit $i - 1 = j$.

b) Verwende: $n + 1 = \sum\limits_{k=0}^{n} 1$. c) $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$.

d), e) siehe H 2.13m (*). f) $\frac{1}{4j^2-1} = \frac{1}{(2j+1)(2j-1)}$; weiter nach H 2.13m (*).

$\boxed{\text{H 2.17}}$ Ordnet man die bei den Summationen zu berücksichtigenden Indexpaare in einem (i, j)-Schema an, so ergibt sich folgendes Bild:

a)

$i \setminus j$	0	1	2	3	4
2	x	x	x		
3	x	x	x	o	
4	x	x	x	o	o

b)

$i \setminus j$	1	2	3
2	x	x	x
3	x	x	x
4	x	x	x
5	o	o	
6	o		

Bei den vorgegebenen Summationen werden in der ersten Doppelsumme die mit (x) markierten Indexpaare, in der zweiten Doppelsumme die mit o markierten berücksichtigt. Eine einzige Doppelsumme erhält man, wenn
bei a) die Indexpaare zunächst in j-, danach in i-Richtung,
bei b) die Indexpaare zunächst in i-, danach in j-Richtung summiert werden.
Ferner ist es zweckmäßig, in a) und b) $k = i - 1$ und bei b) $l = j + 1$ als neue Summationsindizes einzuführen.

Lösung zu Blatt 2a

L 2.13 a) $\frac{1}{3}+\frac{2}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{6}=2.1$. b) $\frac{16}{1}+\frac{25}{2}+\frac{36}{3}+\frac{49}{4}=52.75$.
c) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{23}{60}$. d) $-1+\frac{4}{2}-\frac{27}{6}+\frac{256}{24}-\frac{3125}{120}=-\frac{151}{8}$.

e) Mit H 2.13e ergibt sich $\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11=55$.

f) $\sum\limits_{j=6}^{16} 2 = 2\sum\limits_{j=6}^{16} 1^j = 2(1^6+1^7+\ldots+1^{16}) = 2\cdot 11 = 22$.

g) $\sum\limits_{i=1}^{5}(2i-1) = 2\sum\limits_{i=1}^{5} i - \sum\limits_{i=1}^{5} 1^i = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6 - 5 = 25$ mit H 2.13e.

h) $\sum\limits_{i=100}^{110}(100-i) = -\sum\limits_{i=100}^{110}(i-100)$. Setze $k=i-100 \Rightarrow$
$-\sum\limits_{k=0}^{10} k = -\sum\limits_{k=1}^{10} k = -\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11 = -55$ mit H 2.13e.

i) $\sum\limits_{k=10}^{25}\frac{2(k-10)}{5} = \frac{2}{5}\sum\limits_{k=10}^{25}(k-10)$. Setze $j=k-10 \Rightarrow$
$\frac{2}{5}\sum\limits_{j=0}^{15} j = \frac{2}{5}\sum\limits_{j=1}^{15} j = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 15\cdot 16 = 48$ mit H 2.13e.

j) Nach H 2.13j erhält man $\sum\limits_{i=50}^{60}(i-1) = \sum\limits_{j=49}^{59} j = \sum\limits_{j=1}^{59} j - \sum\limits_{j=1}^{48} j =$
$\frac{1}{2}\cdot 59\cdot 60 - \frac{1}{2}\cdot 48\cdot 49 = 594$ mit H 2.13e.

k) $\sum\limits_{i=0}^{4}(\frac{1}{3})^j = \frac{(\frac{1}{3})^5-1}{\frac{1}{3}-1} = \frac{121}{81}$ mit H 2.13k.

l) $2^4\sum\limits_{i=1}^{5}(\frac{1}{2})^i = 2^4\left(\frac{(\frac{1}{2})^6-1}{\frac{1}{2}-1}-1\right) = \frac{31}{2}$ mit H 2.13l.

m) Mit H 2.13m ergibt sich $\sum\limits_{i=1}^{16}(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}) = \sum\limits_{i=1}^{16}\frac{1}{i} - \sum\limits_{j=2}^{17}\frac{1}{j} = 1-\frac{1}{17} = \frac{16}{17}$.

L 2.14 a) $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{1}{i}$. b) $a\sum\limits_{i=1}^{4}(2i-1)$. c) $\sum\limits_{i=1}^{4}(-1)^{i+1}\frac{i}{i+1}$.
d) $\sum\limits_{i=0}^{5}2^i$. e) $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{(-1)^i}{2i}$. f) $\sum\limits_{i=0}^{4}\frac{1}{2^i}$. g) $\frac{a}{10}\sum\limits_{i=1}^{4}\frac{(-1)^{i+1}}{2i(2i-1)}$.
h) $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{i}{i^2+1}$. i) $\sum\limits_{i=1}^{5}\frac{ix+(i-1)y}{(2i-1)x+2iy}$.

L 2.15 a) $\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \frac{1}{2}\sum\limits_{i=2}^{n+1}\frac{1}{i-1} = \frac{1}{2}(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{j}) = 0$.

b) $\sum\limits_{k=0}^{n}(k+1)^2 = \sum\limits_{j=1}^{n+1} j^2 = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)$ ~~nach A 2.30d.~~

c) Mit H 2.15c ergibt sich $\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k - \sum\limits_{j=2}^{n+1}\ln j = \ln 1 - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$.

d) Mit H 2.15d erhält man $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i+1} =$
$\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{i} - \sum\limits_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j} = \frac{1}{1}-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.

e) Mit H 2.15e erhält man $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{3i-2} - \frac{1}{3}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{3i+1}$. Ersetzt man in der zweiten Summe i durch $k-1$, so ergibt sich:
$\frac{1}{3}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{3i-2} - \sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{3k-2}\right) = \frac{1}{3}(\frac{1}{1}-\frac{1}{3(n+1)-2}) = \frac{n}{3n+1}$.

f) Mit H 2.15f erhält man $\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{4j^2-1} = \frac{1}{2}(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{2j-1} - \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{2j+1}) =$ (mit $j=k-1$ in der zweiten Summe) $\frac{1}{2}(\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{2j-1} - \sum\limits_{k=2}^{n+1}\frac{1}{2k-1}) = \frac{1}{2}(\frac{1}{1}-\frac{1}{2(n+1)-1}) = \frac{n}{2n+1}$.

L 2.16 a) $\sum\limits_{i=3}^{5}[(i-1)^2+(i-2)^2+(i-3)^2] = [2^2+1^2+0^2]+[3^2+2^2+1^2]+[4^2+3^2+2^2] = 48$.

b) $2\sum\limits_{j=4}^{6}1^j\cdot\sum\limits_{i=1}^{3} i + 3\sum\limits_{i=1}^{3}1^i\cdot\sum\limits_{j=4}^{6} j = 2\cdot 3(1+2+3)+3\cdot 3(4+5+6) = 171$.

Beachte: $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m}(a_i+b_j) = m\sum\limits_{i=1}^{n}a_i + n\sum\limits_{j=1}^{m}b_j \neq \sum\limits_{i=1}^{n}a_i + \sum\limits_{j=1}^{m}b_j$.

c) $\sum\limits_{i=1}^{4}\sum\limits_{j=1}^{3} i\cdot j^2 = \sum\limits_{i=1}^{4} i\cdot\sum\limits_{j=1}^{3} j^2 =$
$\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 5(1+2^2+3^2) = 140$.

d) Als Summanden ergeben sich für:
$i=0:$ 0
$i=1:$ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}$
$i=2:$ $\frac{2}{1}+\frac{2}{2}+\frac{2}{3}$
$i=3:$ $\frac{3}{1}+\frac{3}{2}+\frac{3}{3}+\frac{3}{4}$
$i=4:$ $\frac{4}{1}+\frac{4}{2}+\frac{4}{3}+\frac{4}{4}+\frac{4}{5}$
Insgesamt: $\sum\limits_{i=0}^{4}\sum\limits_{j=0}^{i}\frac{i}{j+1} = 20.55$.

e) Als Summanden ergeben sich für:
$j=1:$ 0
$j=2:$ -3
$j=3:$ $4-4^2$
$j=4:$ $-5+5^2-5^3$
Insgesamt: $\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{i=1}^{j-1}(-1)^{i+j}(j+1)^i$
$=-120$.

f) Als Summanden ergeben sich für:
$j=1:$ $\frac{4}{6}+\frac{5}{7}+\frac{6}{8}$
$j=2:$ $\frac{3}{7}+\frac{4}{8}$
$j=3:$ $\frac{2}{8}$
$j=4$ 0
Insgesamt: $\sum\limits_{j=1}^{4}\sum\limits_{i=5}^{8-j} = \frac{139}{42}$.

L 2.17 Unter Verwendung von H 2.17 erhält man:

a) $\sum\limits_{i=2}^{4}\sum\limits_{j=0}^{i}(i-1)^j$ oder (mit $k=i-1$) $\sum\limits_{k=1}^{3}\sum\limits_{j=0}^{k+1}k^j = 139$.

b) $\sum\limits_{j=1}^{3}\sum\limits_{i=2}^{7-j}\frac{j+1}{i-1}$ oder (mit $k=j+1,\ l=i-1$) $\sum\limits_{k=2}^{4}\sum\limits_{l=1}^{7-k}\frac{k}{l} = 18.15$.

Blatt 1

A 1.1 Bei welchen der folgenden Beispiele handelt es sich im mathematischen Sinn um *Mengen* ?

a) Die Menge der Buchstaben des Namens " Gauß ".
b) Die ganzen Zahlen, deren Quadrat kleiner als 10 ist.
c) Die Menge der netten Professoren.
d) Die Primzahlen, die größer als 5 und kleiner als 20 sind.
e) Die Menge der im Jahre 2050 in Dresden geborenen Kinder.
f) Die Niederschlagsmenge von Aachen im Juli 1998.
g) Die Äpfel, Birnen und Pflaumen, die Herr Y in seinem Garten 1997 geerntet hat.
h) Die reellen Zahlen, deren Betrag kleiner als 1 ist.
i) Die Geraden in der x, y-Ebene, die mit der Geraden $y = 2x - 3$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen.

Die auftretenden Mengen (im mathematischen Sinn) beschreibe man mit Hilfe der mengenbildenden Eigenschaft und gebe - falls möglich - auch die aufzählende Schreibweise an.

A 1.2 Gegeben seien die Mengen $A = \{1, 4, 5\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ und die Grundmenge $G = \{x \in I\!N \mid 0 < x \leq 10\}$.

a) Man bilde $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $\overline{A \cap B}$, $\overline{A} \setminus B$, $\overline{B \cap \overline{A}} \cup A$, $A \times \overline{B}$.
b) Geben Sie alle Teilmengen von A an.

A 1.3 Von den Mengen $M = \{x \in I\!R \mid -2 \leq x < 3\} = [-2, 3)$ und $N = \{n \in I\!N \mid n \leq 5\}$ sind $M \cup N$, $M \cap N$, $M \setminus N$, $N \setminus M$ zu bilden (vgl. auch A 2.23).

A 1.4 Überzeugen Sie sich anschaulich (mit Hilfe von Venn-Diagrammen) davon, daß bezüglich einer Grundmenge G mit $A \subset G$, $B \subset G$ gilt:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

A 1.5 Gegeben seien die Grundmenge $G = \{x \mid x$ ist ein am 1.1.1999 an einer Universität oder Kunst- oder Fachhochschule Deutschlands immatrikulierter Student$\}$ und die Mengen

$A = \{x \in G \mid x$ stammt aus Sachsen $\}$,
$B = \{x \in G \mid x$ studiert Maschinenbau $\}$,
$C = \{x \in G \mid x$ erhält BAföG $\}$,
$D = \{x \in G \mid x$ spielt Klavier $\}$.

Welche Personengruppen werden charakterisiert durch

a) $A \cap B \cap C \cap D$, b) $(B \cap (\overline{A} \cup C)) \cup \overline{D}$, c) $\overline{(\overline{A \cap C}) \cup A}$, d) $\overline{\overline{(B \cap D)} \cap (\overline{B} \cup D)}$?

A 1.6 Sind die Mengen $X = \{x \in I\!R \mid x^2 + x - 2 < 0\}$ und $Z = \{z \in I\!R \mid -z^2 + z + 2 \geq 0\}$ disjunkt ?

A 1.7 In welchen Relationen ($=$ oder $\subset$) stehen die folgenden Mengen zueinander?

a) $X = \{x \in I\!N \mid x|6$ (gelesen: x ist Teiler von 6)$\}$,
$Y = \{y \in I\!R \mid (y^2 - 7y + 6)(y^2 - 5y + 6) = 0\}$,
$Z = \{z \in I\!R \mid z^2 - 3z + 2 = 0\}$.

b) $A = \{a \in I\!R \mid a^2 + 5 = 0\}$,
$B = \{b \in I\!N \mid b^2 - 1.5b + 0.5 = 0\}$, $C = \{c \in I\!R \mid c^2 - 1.5c + 0.5 = 0\}$.

A 1.8 In der Menge der ebenen Vierecke seien folgende Mengen gegeben:

$A = \{a \mid a$ ist ein Viereck $\}$, $B = \{b \mid b$ ist ein Parallelogramm $\}$,
$C = \{c \mid c$ ist ein Rechteck $\}$, $D = \{d \mid d$ ist ein Rhombus $\}$,
$E = \{e \mid e$ is ein Parallelogramm mit einem Innenwinkel von $90^0\}$,
$F = \{f \mid f$ ist ein Quadrat $\}$.

a) Welche Relationen bestehen zwischen diesen Mengen?
b) Interpretieren Sie die Aussagen:
(i) $x \in C \cap D$, (ii) $x \in B \setminus C$, (iii) $x \in C \setminus \overline{F}$, (iv) $x \in D \setminus \overline{B}$.

A 1.9 Von den 100 Gurken, die in einer Gärtnerei geerntet wurden, weichen 93 um höchstens 2 cm vom Sollmaß der Güteklasse Q ab (diese bilden die Menge A), 58 sind etwas länger als das Sollmaß (bilden die Menge B), 55 überschreiten das Sollmaß um höchstens 2 cm (bilden die Menge C). Wie viele Gurken unterschreiten das Sollmaß um mehr als 2 cm (Menge D) ?

A 1.10 In der x, y-Ebene sind vier Punktmengen gegeben:

$A = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid -1.5 \leq x \leq 1.5$ und $0 \leq y \leq 3 - 2|x|\}$,
$B = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid -2 \leq x \leq 2$ und $0 \leq y < 1\}$,
$C = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid y \geq x\}$, $D = \{(x, y) \in I\!R^2 \mid -y \leq x\}$.

a) Man stelle folgende Mengen graphisch dar:

(i)	A, B, C, D	(ii)	$E = C \cap D$	(iii)	$A \cap B$
(iv)	$A \setminus B$	(v)	$A \setminus C$	(vi)	$B \setminus D$
(vii)	$A \cap B \cap E$	(viii)	$A_1 = (A \cup B) \cap E$	(ix)	$E \setminus (A \cap B)$

b) Beschreiben Sie formelmäßig die Menge A_2, die durch Spiegelung von A_1 an der Geraden $y = x$ entsteht.
c) Wie hat man $A_1 \cup A_2$ zu spiegeln, damit $A_1 \cup A_2$ zusammen mit seinem Spiegelbild einen zur x- und y-Achse symmetrischen vierzackigen Stern ergibt ?

A 1.11 Gegeben seien die Intervalle
$I_1 = [-4, 3]$, $I_2 = [0, 4)$, $I_3 = (-1, 1)$, $I_4 = [4, 6)$, $I_5 = (-\infty, 5)$.
Skizzieren Sie diese Intervalle und bilden Sie:

a) $I_1 \cup I_2$ b) $I_1 \cap I_2$ c) $I_1 \cup I_3$ d) $I_1 \cap I_3$ e) $I_1 \setminus I_2$
f) $I_2 \setminus I_3$ g) $I_1 \cap I_4$ h) $I_1 \cup I_5$ i) $I_2 \cap I_4$ j) $I_2 \cup I_4$
k) $I_2 \cup I_3 \cup I_4$ l) $(I_4 \cap I_5) \cup I_2$ m) $I_4 \cap (I_5 \cup I_2)$ n) $(I_1 \cap I_5) \cup (I_2 \cap I_3)$

Lösung zu Blatt 1

1

$\boxed{\text{L 1.1}}$ a) $M = \{\,x \mid x$ ist Buchstabe des Namens "Gauß"$\} = \{$G, a, u, ß$\}$
b) $M = \{\,x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 10\} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3\} = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.
(Beachte: Die Reihenfolge innerhalb der Aufzählung ist beliebig.)
c) Keine Menge, da nicht von jedem Professor eindeutig und objektiv entschieden werden kann, ob er nett ist oder nicht.
d) $M = \{\,x \in \mathbb{N} \mid 5 < x < 20$ und x ist nur durch 1 und durch sich selbst teilbar$\}$ $= \{7, 11, 13, 17, 19\}$
e) $M = \{\,x \mid x$ ist ein im Jahre 2050 in Dresden geborener Mensch$\}$.
Eine Aufzählung der Mengenelemente ist erst im Jahre 2051 möglich.
f) Keine Menge.
g) $M = \{\,x \mid x$ ist Apfel oder Birne oder Pflaume und wurde 1997 von Herrn Y in seinem Garten geerntet$\}$
h) $M = \{\,x \in \mathbb{R} \mid |x| < 1\} = (-1, 1)$.
Anstelle einer unmöglichen Aufzählung der unendlich vielen zu M gehörigen reellen Zahlen benutzt man die Intervallschreibweise (vgl. auch A 2.23).
i) $M = \{\,g \mid g: \ y = 2x + a, \ a \neq -3\}$.

$\boxed{\text{L 1.2}}$ a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10\} = G \setminus \{6\}$, $\quad A \cap B = \{1, 5\}$,
$A \setminus B = \{4\}$, $\quad B \setminus A = \{2, 3, 7, 8, 9, 10\}$, $\quad \overline{A \cap B} = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10\} = G \setminus \{1, 5\}$, $\overline{A} \setminus B = \{2, 3, 6, 7, 8, 9, 10\} \setminus B = \{6\}$, $\overline{(B \cap \overline{A})} \cup A = \overline{\{2, 3, 7, 8, 9, 10\}} \cup A = \{1, 4, 5, 6\} \cup A = \{1, 4, 5, 6\}$, $A \times \overline{B} = \{(1,4), (1,6), (4,4), (4,6), (5,4), (5,6)\}$
b) $\{1\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{4, 5\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\emptyset$.

$\boxed{\text{L 1.3}}$ $M \cup N = [-2, 3] \cup \{4, 5\}$, $\quad M \cap N = \{0, 1, 2\}$, $\quad M \setminus N = [-2, 0) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, 3)$, $\quad N \setminus M = \{3, 4, 5\}$.

$\boxed{\text{L 1.4}}$

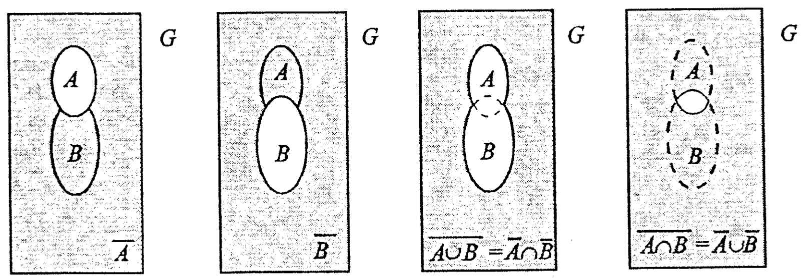


Bild L 1.4

$\boxed{\text{L 1.5}}$ a) Die Gruppe umfaßt alle Klavier spielenden sächsischen Maschinenbau-Studenten, die am 1.1.1999 an einer Universität oder Fachhochschule Deutschlands immatrikuliert sind und BAföG erhalten.
b) Die Gruppe umfaßt alle am 1.1.1999 an einer Universität oder Fachhochschule Deutschlands immatrikulierten Studenten, die aus Sachsen stammen, Maschinenbau studieren und kein BAföG erhalten, oder die nicht Klavier spielen.
c) Da nach A 1.4 $\overline{(A \cap C)} \cup A = (A \cap C) \cap \overline{A} = \emptyset$ gilt, gehört keine Person zur Gruppe.
d) $(B \cap D) \cup \overline{(\overline{B} \cup D)} = (B \cap D) \cup (B \cap \overline{D}) = B \cap (D \cup \overline{D}) = B$: Die Gruppe umfaßt alle am 1.1.1999 an einer Universität oder Fachhochschule Deutschlands immatrikulierten Maschinenbau-Studenten.

$\boxed{\text{L 1.6}}$ Da die quadratische Parabel $y = x^2 + x - 2$ nach oben geöffnet ist und die Nullstellen $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ hat, ist $x^2 + x - 2 < 0$ für $x \in (-2, 1)$, d.h. $X = (-2, 1)$.
Die quadratische Parabel $y = -z^2 + z + 2$ ist nach unten geöffnet und hat die Nullstellen $z_1 = -1$, $z_2 = 2$. Daher ist $-z^2 + z + 2 \geq 0$ für $z \in [-1, 2]$, d.h. $Z = [-1, 2]$. $X \cap Z = [-1, 1)$. Somit sind X und Z nicht disjunkt.

$\boxed{\text{L 1.7}}$ a) $X = \{1, 2, 3, 6\}$, $Y = \{1, 2, 3, 6\}$, $Z = \{1, 2\}$.
Daher gilt: $X = Y$, $Z \subset X$, $Z \subset Y$.
b) $A = \emptyset$, $B = \{1\}$, $C = \{\frac{1}{2}, 1\}$. Daher gilt: $A \subset B$, $A \subset C$, $B \subset C$.

$\boxed{\text{L 1.8}}$ a) Es gilt: $F \subset E = C \subset B \subset A$ und $F \subset D \subset B \subset A$.
b) (i) x ist ein Quadrat. (ii) x ist ein Parallelogramm, aber kein Rechteck.
(iii) x ist ein Quadrat. (iv) x ist ein Rhombus.

$\boxed{\text{L 1.9}}$ Wir bezeichnen mit G die Menge der in der Gärtnerei geernteten Gurken, mit Δl die Differenz zwischen der Länge x einer Gurke und dem Sollmaß und mit $[X]$ die Anzahl der Gurken, die zur Menge X gehören. Mit
$A = \{x \in G \mid |\Delta l| \leq 2\} = \{x \in G \mid -2 \leq \Delta l \leq 2\}$, $[A] = 93$,
$B = \{x \in G \mid \Delta l > 0\}$, $[B] = 58$, $\quad C = \{x \in G \mid 0 < \Delta l \leq 2\}$, $[C] = 55$,
$D = \{x \in G \mid \Delta l < -2\}$, $[D] = ?$
kann G in der Form $G = D \cup A \cup (B \setminus C)$ dargestellt werden (vgl. H 1.9). Da D, A, $B \setminus C$ disjunkt sind, ergibt sich:
$[G] = [D] + [A] + [B] - [C] \Rightarrow [D] = [G] - [A] - [B] + [C] = 100 - 93 - 58 + 55 = 4$,
d.h. 4 Gurken unterschreiten das Sollmaß um mehr als 2 cm.

$\boxed{\text{L 1.10}}$ a) s. Bilder L 1.10a (i1-i4), (ii), (iii), (iv), (v), (vi), (vii), (viii), (ix).

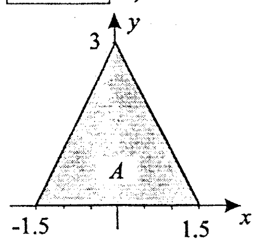


Bild L 1.10a(i1)

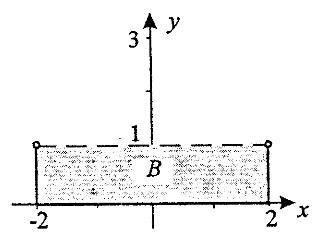


Bild L 1.10a(i2)

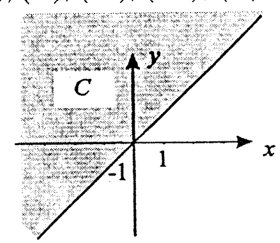


Bild L 1.10a(i3)

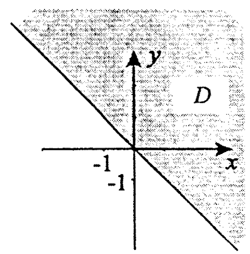


Bild L 1.10a(i4)

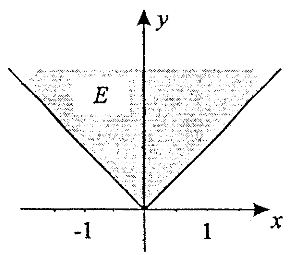


Bild L 1.10a(ii)

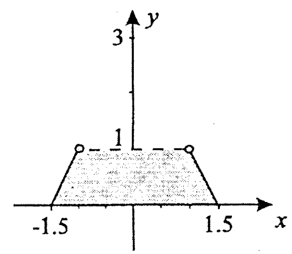


Bild L 1.10a(iii)

②

Lösung zu Blatt 1

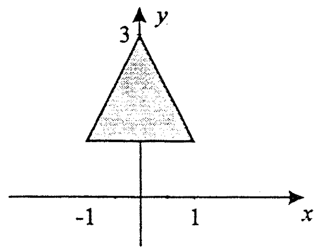


Bild L 1.10a(iv)

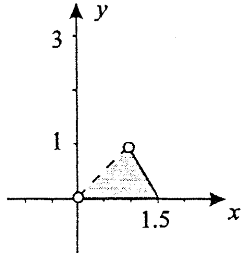


Bild L 1.10a(v)

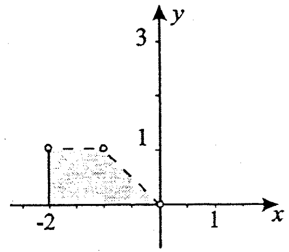


Bild L 1.10a(vi)

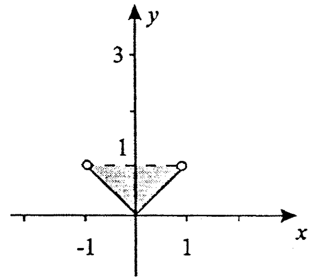


Bild L 1.10a(vii)

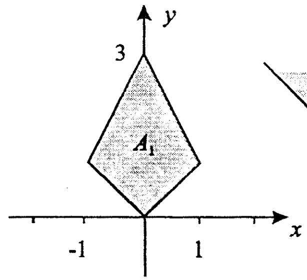


Bild L 1.10a(viii)

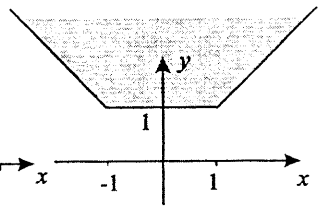


Bild L 1.10a(ix)

b) Da sich A_1 z.B. durch

$$A_1 = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid -1 \le x \le 0 \ \wedge\ -x \le y \le 3+2x\} \ \cup$$
$$\{(x,y) \in I\!R^2 \mid \ 0 \le x \le 1 \ \wedge\ x \le y \le 3-2x\}$$

beschreiben läßt, erhält man A_2, indem man in A_1 x und y vertauscht:

$$A_2 = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid -1 \le y \le 0 \ \wedge\ -y \le x \le 3+2y\} \ \cup$$
$$\{(x,y) \in I\!R^2 \mid \ 0 \le y \le 1 \ \wedge\ y \le x \le 3-2y\}$$

c) Man hat $A_1 \cup A_2$ an der Geraden $y = -x$ zu spiegeln. Dabei ergibt sich als Spiegelung von A_1:

$$A_4 = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid -1 \le -y \le 0 \ \wedge\ y \le -x \le 3-2y\} \ \cup$$
$$\{(x,y) \in I\!R^2 \mid \ 0 \le -y \le 1 \ \wedge\ -y \le -x \le 3+2y\}$$

$$= \{(x,y) \in I\!R^2 \mid \ 0 \le y \le 1 \ \wedge\ 2y-3 \le x \le -y\} \ \cup$$
$$\{(x,y) \in I\!R^2 \mid -1 \le y \le 0 \ \wedge\ -2y-3 \le x \le y\};$$

als Spiegelung von A_2:

$$A_3 = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid -1 \le -x \le 0 \ \wedge\ x \le -y \le 3-2x\} \ \cup$$
$$\{(x,y) \in I\!R^2 \mid \ 0 \le -x \le 1 \ \wedge\ -x \le -y \le 3+2x\}$$
$$= \{(x,y) \in I\!R^2 \mid \ 0 \le x \le 1 \ \wedge\ 2x-3 \le y \le -x\} \ \cup$$
$$\{(x,y) \in I\!R^2 \mid -1 \le x \le 0 \ \wedge\ -3-2x \le y \le x\}.$$

Bemerkung: Man kann auch von A_1 in der Darstellung

$A_1 = \{(x,y) \in I\!R^2 \mid 0 \le y \le 1 \wedge -y \le x \le y\} \ \cup$ $\{(x,y) \in I\!R^2 \mid 1 \le y \le 3 \ \wedge\ \frac{1}{2}(y-3) \le x \le \frac{1}{2}(3-y)\}$ ausgehen.

Zur graphischen Darstellung von $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ s. Bild L 1.10b.

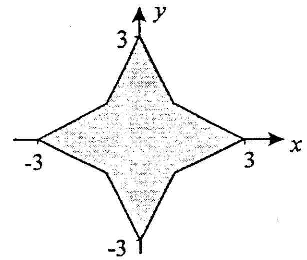


Bild L 1.10b

$\boxed{\textbf{L 1.11}}$ **a)** $[-4,4)$. **b)** $[0,3]$. **c)** I_1. **d)** I_3. **e)** $[-4,0)$. **f)** $[1,4)$.
g) $\emptyset$. **h)** I_5. **i)** $\emptyset$. **j)** $[0,6)$. **k)** $(-1,6)$. **l)** $[0,5)$. **m)** $[4,5)$. **n)** I_1.