Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (21)

Gerald Kupris

29.11.2010

Elementare Funktionen

Die elementaren Funktionen sind in der Mathematik immer wieder auftauchende, grundlegende Funktionen, aus denen sich viele andere Funktionen mittels der Grundrechenarten, Verkettung, Differentiation oder Integration bilden lassen. Dabei gibt es keine allgemeingültige Definition, wann eine Funktion elementar genannt wird und wann nicht.

Die elementaren Funktionen ergeben sich oftmals als Lösungen einer einfachen Differential- oder Funktionalgleichung, und sind deshalb auch für viele Naturwissenschaften wie Physik oder Chemie grundlegend, weil sie immer wieder in den unterschiedlichsten Zusammenhängen auftreten.

- die Potenzfunktionen
- die Radizierung bzw. das Wurzelziehen als Umkehrung der Potenzfunktionen
- die Exponentialfunktion
- der natürliche Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion
- die trigonometrischen Funktionen
- die Arkusfunktionen als Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen
- die hyperbolischen Funktionen
- weitere …

Potenzfunktionen

Eine Funktion f, die sich in der Form

$$f(x) = a\,x^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{R}$$

darstellen lässt, bezeichnet man als **Potenzfunktion**.

Potenzfunktionen mit positiver Hochzahl sind für alle reellen Zahlen definiert, Potenzfunktionen mit negativer Hochzahl sind für alle reellen Zahlen mit Ausnahme der Null definiert. Das Schaubild einer Potenzfunktion mit gerader Hochzahl ist spiegelsymmetrisch zur y-Achse, das Schaubild einer Potenzfunktion mit ungerader Hochzahl ist spiegelsymmetrisch zum Ursprung.

Beispiele

Polynomfunktion

Eine Funktion f, die sich in der Form

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \quad a_n \neq 0,$$

darstellen lässt, bezeichnet man als **Polynom** oder **ganzrationale Funktion** vom Grad n. Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sind dabei beliebige Zahlen, wobei allerdings der höchste Koeffizient a_n nicht null sein darf.

Die beiden Polynome

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, \quad g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n$$

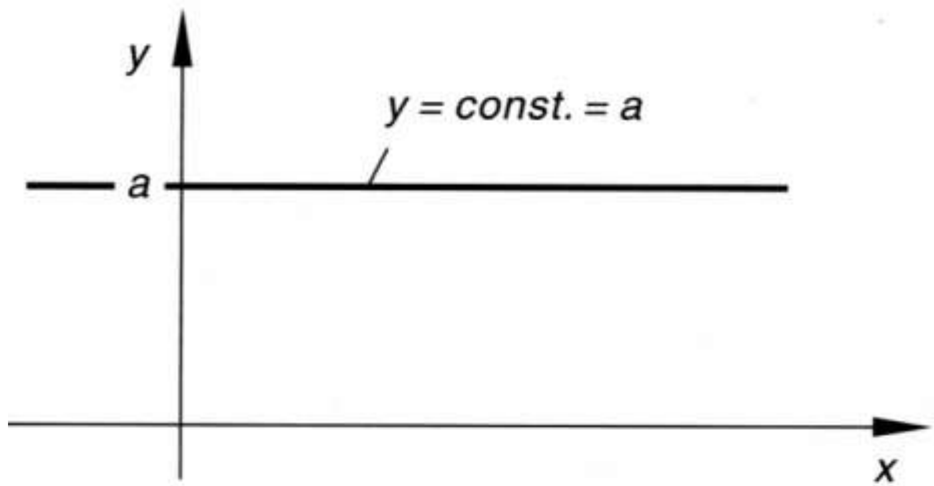
sind genau dann identisch, wenn alle ihre entsprechenden Koeffizienten identisch sind:

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \ldots, \quad a_n = b_n.$$

Konstante Funktion

Polynomfunktionen vom Grade 0 bezeichnet man als konstante Funktionen.

$$y = f(x) = const. = a_0$$

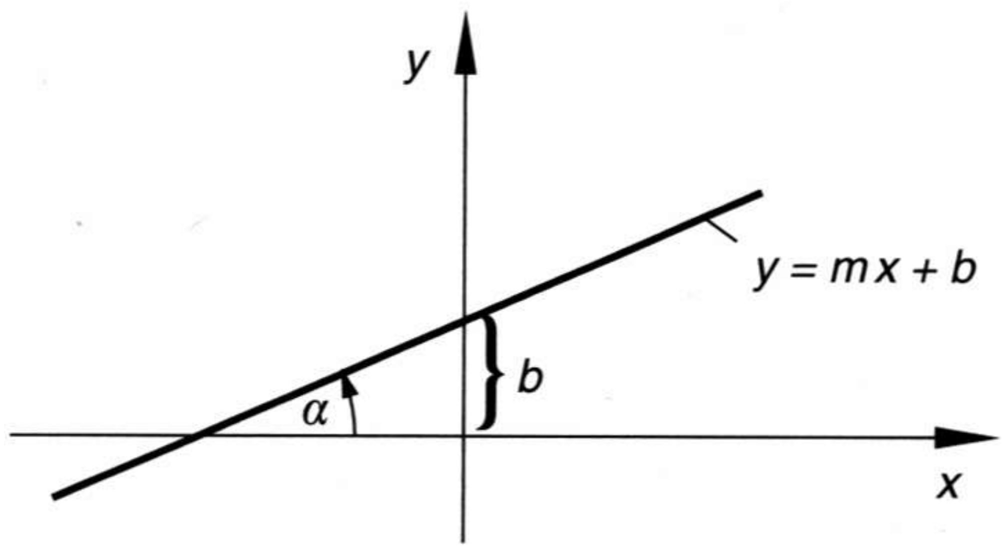


Lineare Funktion

Ein Polynom ersten Grades wird auch als allgemeine lineare Funktion bezeichnet.

$$f: \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad x \mapsto f(x) = m\,x + n\;; \quad m, n \in \mathbb{R}$$

Der Graph einer linearen Funktion ist immer eine Gerade.



Funktionen-Steckbrief

Lineare Funktion

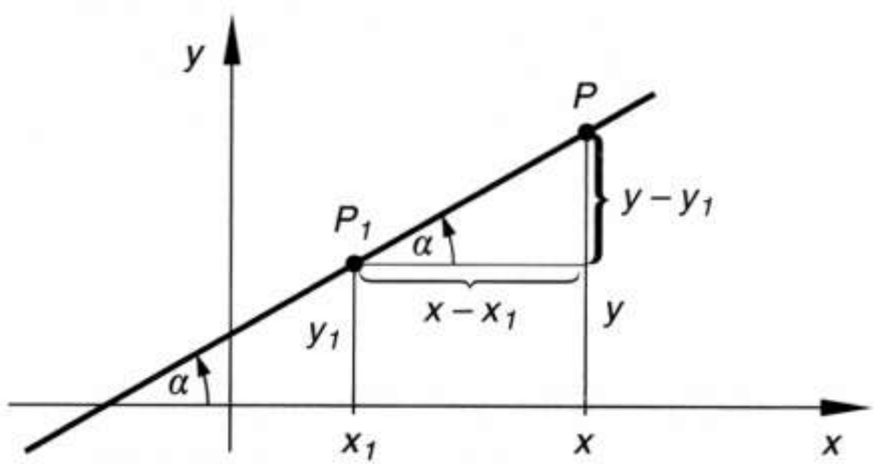
Eigenschaft		
Abbildungsvorschrift		
Definitionsbereich		
Definitionslücken		
Nullstellen		
Polstellen		
Beschränktheit		
Supremum		
Infimum		
Maximum		
Minimum		
Wertebereich		
Periodizität		
Symmetrie		
Monotoniebereiche		
Umkehrfunktion		
Stetigkeitsbereiche		
Konvergenz / Divergenz		
Grenzwert für $x \to \pm\infty$		
Graph		

Punkt-Steigungsform einer Geraden

Die Gleichung einer Geraden durch den Punkt $P_1 = (x_1; y_1)$ mit der Steigung m lautet:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

$$y = f(x) = mx + y_1 - mx_1$$

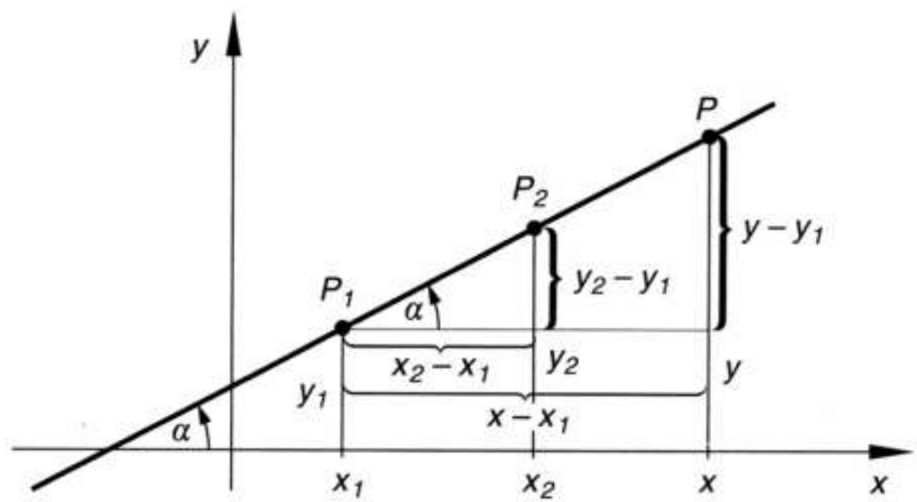


Zwei-Punkte-Form einer Geraden

Die Gleichung einer Geraden durch zwei voneinander verschiedenen Punkte $P_1 = (x_1; y_1)$ und $P_2 = (x_2; y_2)$ lautet:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$y = f(x) = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x + y_1 - \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}x_1$$

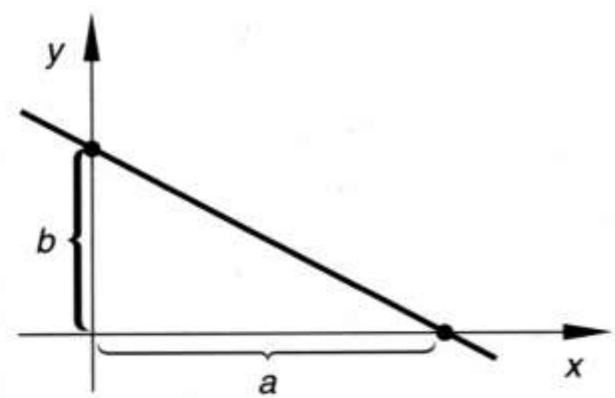


Achsenabscnittsform einer Geraden

Die Gleichung einer Geraden mit den Achsenabschnitten a und b lautet:
(a - Abschnitt auf der x-Achse)
(b - Abschnitt auf der y-Achse)

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$y= f(x)=-\frac{b}{a}x+b$$



Quadratische Funktion

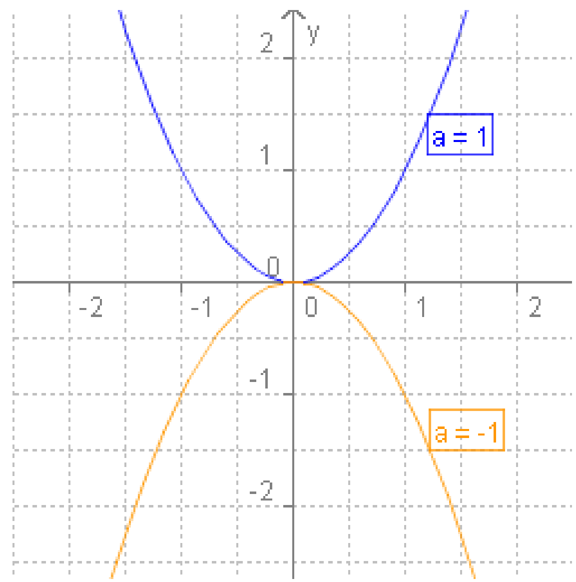
Eine quadratische Funktion (auch ganzrationale Funktion 2. Grades) ist eine Funktion, die als Funktionsterm ein Polynom vom Grad 2 besitzt:

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c \qquad \text{mit } a \neq 0$$

Der Graph ist die Parabel mit der Gleichung $y = a\,x^2 + b\,x + c$.
Für $a = 0$ ergibt sich eine lineare Funktion.

Wie der Wert von a die Form des Graphen verändert, kann man am besten erkennen, wenn man $b = 0$ und $c = 0$ setzt.

Man erhält dann eine Normalparabel mit einem Faktor vor x^2.



$a > 0$: der Graph ist nach oben geöffnet.
$a < 0$: der Graph ist nach unten geöffnet.

Parameter der Quadratischen Funktion

Parameter c

Eine Veränderung des Parameters c bewirkt eine Verschiebung in y-Richtung. Wird *c* um eins erhöht, dann wird der Graph um eine Einheit nach oben verschoben. Wird *c* um eins verringert, wird der Graph dagegen um eine Einheit nach unten verschoben.

Parameter b

Eine Veränderung des Parameters *b* bewirkt eine Verschiebung sowohl in x- als auch in y-Richtung. Wird *b* um eins erhöht, dann wird der Graph um $1 / 2a$ Einheiten nach links und $(2b + 1) / 4a$ nach unten verschoben. Wird *b* um eins verringert, wird der Graph dagegen um $1 / 2a$ Einheiten nach rechts und $(2b - 1) / 4a$ nach oben verschoben.

Am Parameter *b* kann man auch erkennen, mit welcher Steigung die Parabel die y-Achse schneidet. Insbesondere ist zu erkennen, ob die y-Achse mit dem fallenden oder dem ansteigenden Ast der Parabel geschnitten wird. Daraus lassen sich wiederum Rückschlüsse über die Zahl und die mögliche Lage von Nullstellen ziehen.

Hochschule Deggendorf

Funktionen-Steckbrief

Quadratische Funktion

Eigenschaft		
Abbildungsvorschrift		
Definitionsbereich		
Definitionslücken		
Nullstellen		
Polstellen		
Beschränktheit		
Supremum		
Infimum		
Maximum		
Minimum		
Wertebereich		
Periodizität		
Symmetrie		
Monotoniebereiche		
Umkehrfunktion		
Stetigkeitsbereiche		
Konvergenz / Divergenz		
Grenzwert für $x \rightarrow \pm \infty$		
Graph		

Scheitelpunktbestimmung

Der Scheitelpunkt ist maßgeblich für die Lage der Parabel und repräsentiert entweder das absolute Minimum (falls a positiv ist) oder das absolute Maximum (wenn a negativ ist). Die Koordinaten des Scheitelpunkts lassen sich direkt ablesen, wenn der Funktionsterm in die Scheitelpunktsform umgeformt wird:

$$f(x) = a \cdot (x - x_s)^2 + y_s$$

Der Scheitelpunkt hat dann die Koordinaten $S(x_s \mid y_s)$. Der Graph ist achsensymmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse durch x_s.

Eine weitere Möglichkeit zur Berechnung des Scheitelpunktes bietet die Differentialrechnung. Da der Scheitelpunkt immer eine (lokale) Extremstelle (Maximum bzw. Minimum) ist, liefert die Nullstelle der ersten Ableitung der Funktion den x-Wert des Scheitelpunktes.

Beispiel: $f(x) = 2 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 5$

Nullstellen einer quadratischen Funktion

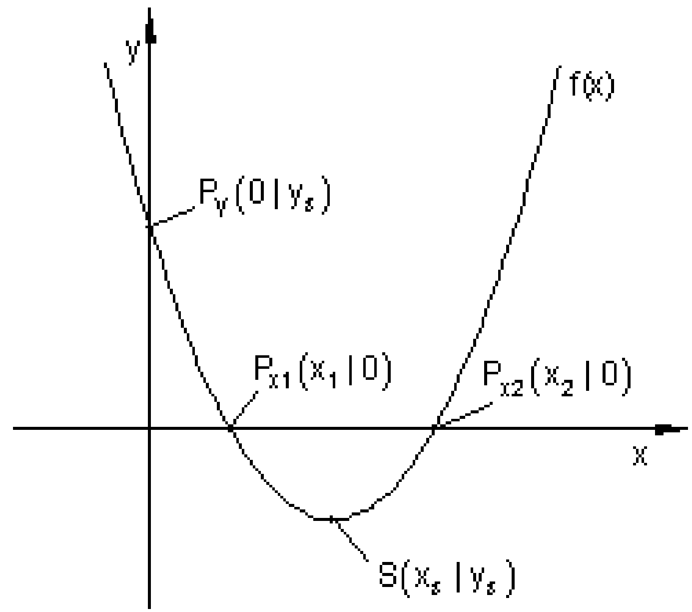
Die Nullstellen einer quadratischen Funktion ergeben sich durch Lösung der Gleichung
f(x)=0 ,
das heißt der quadratischen Gleichung

$ax^2 + bx + c = 0.$

Die Normalform einer quadratischen Gleichung lautet: $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Diskriminante: $D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ $\qquad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$



Lösung der Quadratischen Gleichung

allgemeine Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

„Mitternachtsformel“

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Normalform

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (p, q \in \mathbb{R})$$

$$p = \frac{b}{a} \qquad q = \frac{c}{a}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Kubische Funktion

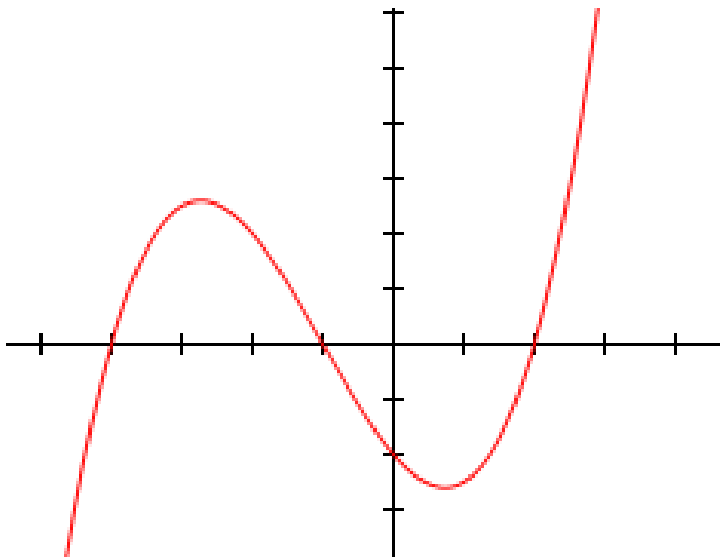
Unter einer kubischen Funktion auf den reellen Zahlen der Form:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad y = f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $\quad$ mit: $a \neq 0$.

Eine kubische Funktion hat in dem Bereich der reellen Zahlen mindestens eine Null-stelle und maximal drei Nullstellen.

Die Nullstellen (y=0) sind dort, wo der Graph die x-Achse schneidet.

Der Funktionsgraph einer jeden kubischen Funktion ist punktsymmetrisch zu seinem Wendepunkt.



Lösung der Kubischen Gleichung

Kubische Gleichungen sind algebraische Gleichungen dritten Grades, also Gleichungen der allgemeinen Form:

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$$

Die kubische Gleichung lässt sich mit Kenntnis aller drei Nullstellen x_1, x_2, x_3 auch so faktorisieren:

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0$$

Ansätze zur Lösung der Kubischen Gleichung:
Sind alle Vorfaktoren ganzzahlig, dann kann man versuchen, durch Polynomdivision zu einer einfacheren quadratischen Gleichung zu kommen, die mit klassischen Verfahren lösbar sind. Dazu braucht man eine bekannte Nullstelle.
Ist der führende Koeffizient a vom Betrag gleich 1, so kann man die ganzzahligen Teiler des letzten Faktors d durchprobieren (auch negative Werte!). Ist a von eins verschieden, so müssen alle Brüche, deren Zähler ein Teiler von d und deren Nenner ein Teiler von a ist, durchprobiert werden.

Eigenschaften von Polynomen

Die Multiplikation eines Polynoms vom Grad n mit einem Polynom vom Grad m ergibt ein Polynom vom Grad $n + m$.

Bei der **Polynomdivision** teil man das Polynom f vom Grad n durch das Polynom g vom Grad m und erhält dann ein neues Polynom h vom Grad $n - m$ und eventuell noch ein Restpolynom r:

$$f(x) : g(x) = h(x) + r(x) : g(x).$$

Wenn die Polynomdivision $f(x) : g(x) = h(x)$ ohne Rest aufgeht, dann hat man das Polynom f in ein Produkt der beiden Polynome g und h zerlegt:

$$f(x) = g(x)\,h(x).$$

Linearfaktor

Falls x_0 eine Nullstelle des Polynoms f vom Grad n ist, geht die Polynomdivision

$$f(x) : (x - x_0) = h(x)$$

ohne Rest auf und man kann f in der Form $f(x) = h(x)\,(x - x_0)$ darstellen. Dabei ist h ein Polynom vom Grad $n - 1$. Man bezeichnet $(x - x_0)$ als **Linearfaktor** von f.

Falls das Polynom f vom Grad n den Linearfaktor $(x - x_0)$ p-fach enthält, also

$$f(x) = h(x)(x - x_0)^p,$$

und das Polynom h vom Grad $n - p$ an der Stelle x_0 nicht null ist, dann bezeichnet man x_0 als **p-fache Nullstelle** oder als eine **Nullstelle mit Vielfachheit p** von f.

Beispiele

Regeln für die Polynomdivision

Falls beide Polynome durch eine gemeinsame Zahl geteilt werden können, dann sollte man das zuerst tun.

Wie bei der schriftlichen Division von Zahlen zieht man auch bei der Polynomdivision vom Dividenden nach und nach passende Vielfache des Divisors ab, bis am Ende möglichst kein Rest mehr bleibt. Dazu wird in jedem Schritt derjenige Summand des Restes eliminiert, bei dem x in der höchsten Potenz steht.

Die Summanden des Quotienten erhält man daher durch Division dieses Summanden der jeweiligen Reste durch den Summanden des Divisors mit der höchsten Potenz von x.

Linearfaktoren und Nullstellen

Ein Polynom vom Grad n lässt sich genau dann komplett in Linearfaktoren zerlegen, wenn es genau n Nullstellen hat. Dabei werden mehrfache Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt.

Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Jedes Polynom lässt sich in ein Produkt aus Polynomen vom Grad 1 oder 2 zerlegen. Polynome vom Grad 2, die keine Nullstellen besitzen,

$$h(x) = x^2 + bx + c \quad \text{mit} \quad b^2 - 4c < 0,$$

verwendet man nur dann, wenn eine Zerlegung in Linearfaktoren nicht möglich ist.

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

http://de.wikipedia.org

http://www.komplexe-zahlen.de

http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_2/basics/b2_1_5.html

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/imaginaer1.htm