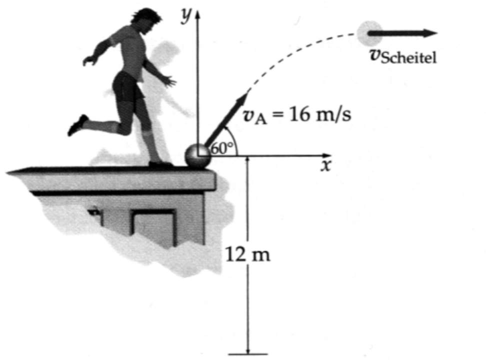
Aufgabenblatt Physik Nr. 4, 03.06.2011

Lösungen:

Aufgabe 1

Teilaufgabe a

1. Fertigen Sie eine Skizze der Trajektorie an (Abbildung 7.10). Zeichnen Sie Koordinatenachsen sowie die Anfangslage des Balls und seinen Ort im Scheitelpunkt seiner Flugbahn ein. Wählen Sie y so, dass in Höhe des Dachs $y = 0$ ist.



7.10

2. Wenden Sie den Zusammenhang zwischen Gesamtarbeit und Energie für Systeme an. Wählen Sie Ball und Erde als betrachtetes System. Nachdem der Ball angetreten worden ist, gibt es bis zum Aufprall auf den Boden keine äußeren Kräfte, die an ihm Arbeit verrichten (vom Luftwiderstand soll abgesehen werden):

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} - W_{\text{nk}}$$
$$0 = \Delta E_{\text{mech}} - 0$$
$$E_{\text{mech,E}} = E_{\text{mech,A}}$$

3. Die Gravitationskraft verrichtet Arbeit an dem System. Diese Arbeit ergibt sich aus der potenziellen Energie der Gravitation $m\,g\,y$:

$$E_{\text{mech,Scheitel}} = E_{\text{mech,A}}$$
$$\tfrac{1}{2}\,m\,v_{\text{Scheitel}}^2 + m\,g\,y_{\text{Scheitel}} = \tfrac{1}{2}\,m\,v_A^2 + m\,g\,y_A$$
$$\tfrac{1}{2}\,m\,v_{\text{Scheitel}}^2 + m\,g\,y_{\text{Scheitel}} = \tfrac{1}{2}\,m\,v_A^2 + 0$$

4. Stellen Sie nach y_{Scheitel} um:

$$y_{\text{Scheitel}} = \frac{v_A^2 - v_{\text{Scheitel}}^2}{2\,g}$$

5. Die Geschwindigkeit im Scheitel der Flugbahn ist gleich der x-Komponente der Anfangsgeschwindigkeit:

$$v_{\text{Scheitel}} = v_{A,x} = v_A \cos\theta$$

6. Setzen Sie die Formel aus Schritt 5 in die aus Schritt 4 ein und berechnen Sie y_{Scheitel}:

$$y_{\text{Scheitel}} = \frac{v_A^2 - v_{\text{Scheitel}}^2}{2\,g} = \frac{v_A^2 - v_A^2\cos^2\theta}{2\,g}$$
$$= \frac{v_A^2\,(1-\cos^2\theta)}{2\,g}$$
$$= \frac{(16\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1})^2\cdot(1-\cos^2 60°)}{2\cdot(9{,}81\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2})} = \boxed{9{,}8\ \text{m}}$$

Teilaufgabe b

1. Es sei jetzt v_E die Geschwindigkeit des Balls kurz vor dem Auftreffen auf dem Boden. Dort ist $y = y_E = -12$ m. Die Energie des Balls ist demzufolge:

$$E_{\text{mech,E}} = \tfrac{1}{2}\,m\,v_E^2 + m\,g\,y_E$$

2. Setzen Sie die mechanische Energie am Ende gleich der mechanischen Energie am Anfang:

$$\tfrac{1}{2}\,m\,v_E^2 + m\,g\,y_E = \tfrac{1}{2}\,m\,v_A^2 + 0$$

3. Stellen Sie nach v_E um, setzen Sie $y_E = -12$ m ein und berechnen Sie die Endgeschwindigkeit:

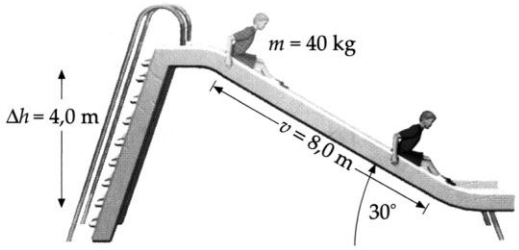
$$v_E = \sqrt{v_A^2 - 2\,g\,y_E} = \sqrt{(16\ \mathrm{m\cdot s^{-1}})^2 - 2\cdot(9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}})\cdot(-12\ \mathrm{m})} = \boxed{22\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

Aufgabe 2:

Problembeschreibung: Während das Kind die Rutsche hinunterrutscht, wird ein Teil der potenziellen Energie, die es zu Beginn hat, in kinetische Energie und ein anderer Teil durch die Reibung in Wärmeenergie umgewandelt. Wir wählen Kind, Rutsche und Erde als System und wenden den Energieerhaltungssatz an.

Lösung:

1. Fertigen Sie eine Skizze des Systems aus Kind, Rutsche und Erde an, die sowohl den Anfangs- als auch den Endzustand zeigt (Abbildung 7.27).



7.27

2. Schreiben Sie die Gleichung für die Energieerhaltung auf:

$$W_{ext} = \Delta E_{mech} + \Delta E_{Wärme} = (\Delta E_{pot} + \Delta E_{kin}) + |\boldsymbol{F}_{R,g}|\, s_{rel}$$

3. Die kinetische Energie am Anfang ist null. Die Geschwindigkeit am Ende der Rutsche ergibt sich aus der kinetischen Energie am Ende:

$$\Delta E_{kin} = E_{kin,E} - 0 = \tfrac{1}{2}\, m\, v_E^2$$

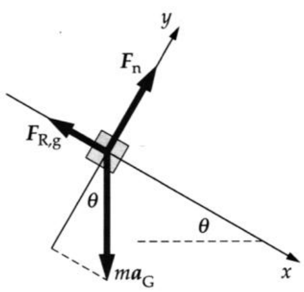
4. Auf das System wirken keine äußeren Kräfte:

$$W_{ext} = 0$$

5. Die Änderung der potenziellen Energie hängt von der Höhendifferenz Δh ab (die negativ ist):

$$\Delta E_{pot} = m\, g\, \Delta h$$

6. Um die Gleitreibungskraft $F_{R,g}$ zu berechnen, wenden wir das zweite Newton'sche Axiom auf das Kind an. Dazu zeichnen wir das entsprechende Kräftediagramm (Abbildung 7.28).



7.28

7. Nun wenden wir das zweite Newton'sche Axiom an. Die Normalkomponente der Beschleunigung ist null. Zur Berechnung von $|\boldsymbol{F}_n|$ ermitteln wir die Komponente in Normalenrichtung. Anschließend berechnen wir unter Verwendung von $|\boldsymbol{F}_{R,g}| = \mu_{R,g}\,|\boldsymbol{F}_n|$ den Betrag der Reibungskraft $\boldsymbol{F}_{R,g}$:

$$|\boldsymbol{F}_n| - m\, g\, \cos\theta = 0$$

und damit

$$|\boldsymbol{F}_{R,g}| = \mu_{R,g}\,|\boldsymbol{F}_n| = \mu_{R,g}\, m\, g\, \cos\theta$$

8. Die Strecke $s = s_{rel}$ und Δh sind über den Sinus verknüpft:

$$|\Delta h| = s\, \sin\theta$$

9. Setzt man dies alles in die Formel aus Schritt 2 ein, ergibt sich:

$$0 = m\,g\,\Delta h + \tfrac{1}{2}\,m\,v_E^2 + |\boldsymbol{F}_{R,g}|s$$
$$= -m\,g\,s\,\sin\theta + \tfrac{1}{2}\,m\,v_E^2 + \mu_{R,g}\,m\,g\,\cos\theta\,s$$

10. Umstellen nach v_E ergibt:

$$v_E^2 = 2\,g\,s \cdot (\sin\theta - \mu_{R,g}\cos\theta)$$
$$= 2 \cdot (9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}) \cdot (8{,}0\ \mathrm{m}) \cdot (\sin 30° - 0{,}35\cos 30°)$$
$$= 30{,}9\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-2}}$$

und damit

$$v_E = \boxed{5{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$$

Weitergedacht: Das Ergebnis für v_E^2 in Schritt 10 hängt nicht von der Masse des Kinds ab. Dies sollte auch so sein, da alle auf das Kind wirkenden Kräfte proportional zur Masse m sind.

Aufgabe 3:

L7.23 a) Das betrachtete System umfasst das Auto und die Erde. Beim Rutschen des Autos auf einer horizontalen Straße wird seine kinetische Energie infolge der längs der Strecke Δs wirkenden Reibungskraft $|\boldsymbol{F}_{R,g}|$ in Wärmeenergie umgewandelt. Für diese gilt

$$\Delta E_{\text{Wärme}} = |\boldsymbol{F}_{R,g}|\,\Delta s\,.$$

Aus dem Zusammenhang zwischen der verrichteten Arbeit und der Gesamtenergie bei Vorliegen von Gleitreibung ergibt sich

$$W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{mech}} + \Delta E_{\text{Wärme}} = \Delta E_{\text{mech}} + |\boldsymbol{F}_{R,g}|\,\Delta s\,. \qquad (1)$$

Da sich nur die kinetische Energie ändert und diese am Schluss null ist, gilt weiterhin

$$\Delta E_{\text{mech}} = \Delta E_{\text{kin}} = -E_{\text{kin,A}}\,,$$

wobei der Index A den Anfangszustand bezeichnet. Außerdem wird am System keine äußere Arbeit verrichtet, d. h., es ist $W_{\text{ext}} = 0$. Damit wird Gleichung 1 zu

$$0 = -\tfrac{1}{2}\,m\,v_A^2 + |\boldsymbol{F}_{R,g}|\,\Delta s\,.$$

Somit erhalten wir für die durch Reibung freigesetzte Wärmeenergie

$$|\boldsymbol{F}_{R,g}|\,\Delta s = \tfrac{1}{2}\,m\,v_A^2 = \tfrac{1}{2}\,(2000\ \mathrm{kg})\,(25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}})^2$$
$$= 6{,}25 \cdot 10^5\ \mathrm{J} = 6{,}3 \cdot 10^5\ \mathrm{J}\,.$$

b) Der Gleitreibungskoeffizient verknüpft die Gleitreibungskraft mit der auf die Straße wirkenden Normalkraft: $|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,g}}| = \mu_{\mathrm{R,g}}\, m\, g$. Umformen ergibt

$$\mu_{\mathrm{R,g}} = \frac{|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,g}}|}{m\, g}\,.$$

Für die aufgrund der Reibung abgegebene Wärmeenergie gilt gemäß der in Teilaufgabe a aufgestellten Beziehung

$$\Delta E_{\text{Wärme}} = |\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,g}}|\, \Delta s\,, \quad \text{also} \quad |\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,g}}| = \frac{\Delta E_{\text{Wärme}}}{\Delta s}\,.$$

Dies setzen wir in die Gleichung für den Gleitreibungskoeffizienten ein und erhalten für diesen

$$\mu_{\mathrm{R,g}} = \frac{\Delta E_{\text{Wärme}}}{m\, g\, \Delta s} = \frac{6{,}25 \cdot 10^5\ \mathrm{J}}{(2000\ \mathrm{kg})\,(9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}})\,(60\ \mathrm{m})}$$
$$= 0{,}53\,.$$