Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (5)

Gerald Kupris

14.10.2010

Verschiebung jede zweite Woche (abwechselnd mit BWL)

	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag
1	Digitaltechnik 1 Bö E 101		GET gem. mit MK-1 Ku C 106	Physik Ku A 111
2	Mathematik 1 Ku E 204	Einführung in die Programmierung Jr ITC-Computerraum	Mathematik 1 Ku E 102	GET gem. mit MK-1 Fr C 106
3	Physik Ku E 204	Einführung in die Programmierung Jr ITC-Computerraum		Mathematik 1 Ku E 102
4		Grundlagen der Informatik Jr ITC-Computerraum	Grundlagen der Betriebswirtschaft Schm E 102	
5		Grundlagen der Informatik Jr ITC-Computerraum		

Plan der Vorlesungen Mathematik

06.10.2010:	Mathe Grundlagen 1: Mengen und Zahlenarten
07.10.2010:	Mathe Grundlagen 2: Intervalle und Gleichungen
11.10.2010:	Mathe Grundlagen 3: Quadratische Gleichungen und Ungleichungen
13.10.2010:	Mathe Grundlagen 4: Binominalkoeffizienten, Pythagoras, Trigonometrie
14.10.2010:	Vektorrechnung 1
18.10.2010:	Vektorrechnung 2
20.10.2010:	Vektorrechnung 3
20.10.2010:	Vektorrechnung 4
25.10.2010:	Komplexe Zahlen 1
27.10.2010:	Komplexe Zahlen 2
01.11.2010:	Komplexe Zahlen 3
03.11.2010:	Komplexe Zahlen 4

Vorlesungsinhalte Vektorrechnung

1. Definition von Vektoren
2. Einfache Rechenregeln
3. Koordinatendarstellung von Vektoren
4. Beträge von Vektoren
5. Rechenregeln in der Koordinatendarstellung
6. Koordinatendarstellung mit Winkelfunktionen
7. Skalarprodukt
8. Vektorprodukt
9. Spatprodukt

Wozu benötigen Sie die Vektorrechnung?

Definition Vektor (Physik)

Es seien A und B Punkte in der Ebene (2 Dimensionen) oder im Raum (3 Dimensionen). Unter einem Vektor $\overrightarrow{AB}$ versteht man eine gerichtete Strecke mit Anfangspunkt (Angriffspunkt) A und Endpunkt B.

Ein freier Vektor wird durch Richtung und Länge eindeutig bestimmt.

Die Länge des Pfeils entspricht dabei dem Betrag des Vektors.

Im Gegensatz dazu: Skalar

Ein Skalar ist eine Größe, die allein durch die Angabe eines Zahlenwertes charakterisiert ist.

Definition Vektor (Mathematik)

Ein **Vektor** (lat. *vector* „jemand, der trägt, zieht oder befördert“; zu lat. *vehere* = fahren) ist in der Mathematik ein Element eines Vektorraums. Das bedeutet unter anderem, dass sich beliebige zwei Vektoren durch Addition zu einem dritten Vektor des gleichen Vektorraums verknüpfen lassen.

Eine Multiplikation zwischen Vektoren kann definiert sein - muss aber nicht.

Damit ist der mathematische Begriff eine Verallgemeinerung der in der Physik benutzten geometrischen Vorstellung eines Vektors als Pfeil mit den Eigenschaften Länge und Richtung.

Vektorraum

Ein **Vektorraum** oder **linearer Raum** ist eine algebraische Struktur, die in fast allen Zweigen der Mathematik verwendet wird. Eingehend betrachtet werden Vektorräume in der Linearen Algebra. Die Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren. Sie können addiert werden oder mit Skalaren multipliziert, das Ergebnis ist wieder ein Vektor desselben Vektorraums.

Die skalaren Zahlen, mit denen man einen Vektor multiplizieren kann, stammen aus einem Körper, deswegen ist ein Vektorraum immer ein Vektorraum „über“ einem bestimmten Körper. Man spricht beispielsweise von einem Vektorraum über den reellen Zahlen. In den meisten Anwendungen legt man die reellen oder die komplexen Zahlen zugrunde.

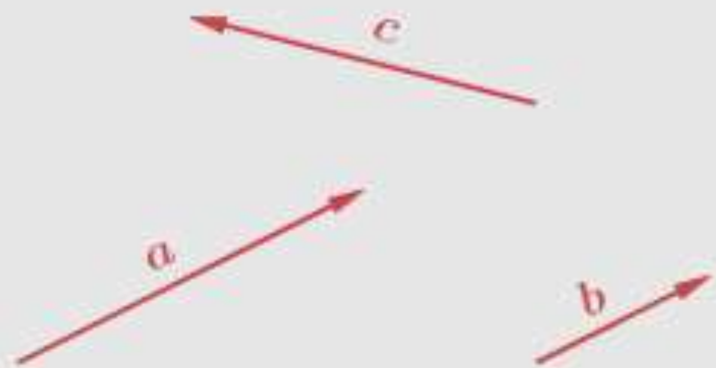
Eine Basis eines Vektorraums ist eine Menge von Vektoren, die es erlaubt, jeden Vektor durch eindeutige Koordinaten zu beschreiben. Wird mit Vektoren gerechnet, so wird mit deren Koordinaten gerechnet.
Die Anzahl der Basisvektoren wird Dimension des Vektorraums genannt. Sie ist unabhängig von der Wahl der Basis und kann auch unendlich sein.

Definition Vektor

Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, ... werden durch **Länge** und **Richtung** festgelegt. Die Länge eines Vektors bezeichnet man auch als **Betrag** des Vektors und verwendet die Schreibweise

$$|\boldsymbol{a}|, |\boldsymbol{b}|, |\boldsymbol{c}|, \ldots$$

Der Betrag eines Vektors ist niemals negativ.



Vektor oder Skalar?

Vektorielle Größen in der Physik besitzen einen Betrag und eine Richtung.

Geschwindigkeit

Masse

Impuls

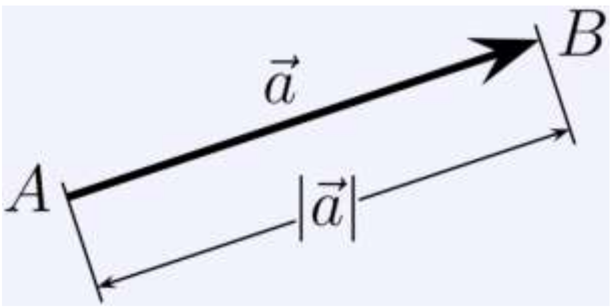
Dichte

Kraft

Temperatur

Zeit

Darstellung von Vektoren



Vektoren werden häufig als Pfeile dargestellt:
A wird in diesem Fall als Ausgangs- oder Startpunkt und B als Spitze oder Endpunkt des Vektors bezeichnet. Die Lage der Pfeilspitze gibt die **Orientierung** des Vektors, die Länge seinen **Betrag** und der Pfeilschaft seine **Richtung** an.
Dieser Vektor kann auch als $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet werden und sein Betrag als $|\overrightarrow{AB}|$ bzw. $\overline{AB}$.

Variablen, die für Vektoren stehen, werden vor allem in der Schulmathematik und in der Physik häufig mit einem Pfeil gekennzeichnet ($\vec{a}$) oder, vor allem im englischsprachigen Raum, fett geschrieben (**a**). In englischen Handschriften wird dies häufig durch Unterstreichung (<u>a</u>) oder ähnliches repräsentiert.
Wie alle Variablen werden auch Vektoren allgemein kursiv gesetzt, unabhängig davon, ob sie fett (englisch) oder mit Pfeil (deutsch) gekennzeichnet sind. Früher war teilweise auch die Schreibweise mit Frakturbuchstaben ($\mathfrak{a}, \mathfrak{A}$) üblich.

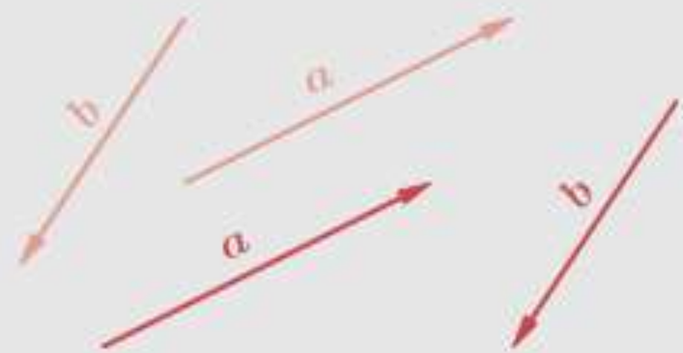
Gleichheit von Vektoren

Ein freier Vektor wird durch Richtung und Länge eindeutig bestimmt;

d.h. zwei Vektoren sind gleich, wenn sie
die gleiche Richtung und
die gleiche Länge haben.

Folgerung: Vektoren sind beliebig parallel verschiebbar.

Zwei Vektoren sind genau dann gleich, wenn sie dieselbe Richtung und denselben Betrag haben. Vektoren dürfen beliebig parallel verschoben werden, ohne dass sich ihr Wert ändert.

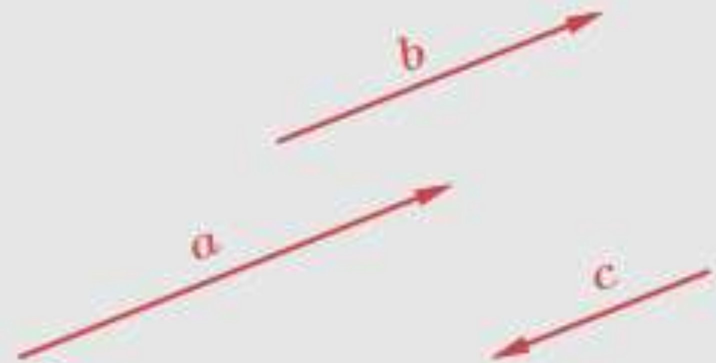


Definitionen

Parallele und antiparallele Vektoren

Zwei Vektoren

- $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ mit derselben Richtung nennt man **parallel**: $\boldsymbol{a} \upuparrows \boldsymbol{b}$,
- $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{c}$ mit entgegengesetzter Richtung nennt man **antiparallel**: $\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{c}$.



Nullvektor, Einheitsvektor

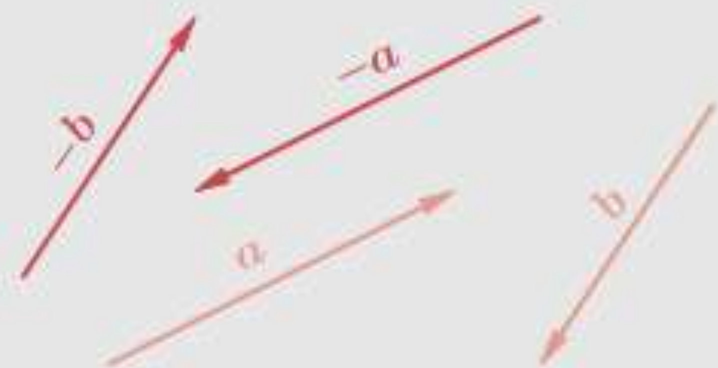
Den Vektor mit der Länge 0 bezeichnet man als **Nullvektor** $\boldsymbol{0}$, es ist $|\boldsymbol{0}| = 0$. Alle Vektoren mit der Länge 1 bezeichnet man als **Einheitsvektoren** $\boldsymbol{e}$, für sie gilt $|\boldsymbol{e}| = 1$.

Definitionen

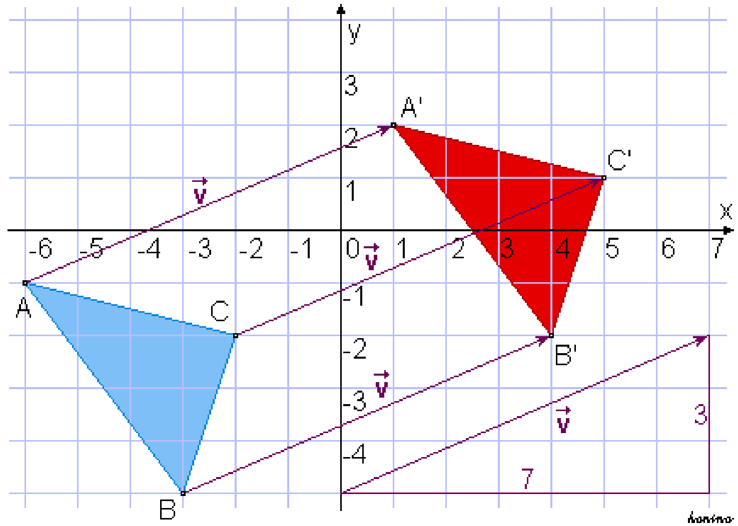
Gegenvektor

Der **Gegenvektor** zum Vektor $\boldsymbol{a}$ ist derjenige Vektor, der antiparallel zu $\boldsymbol{a}$ ist und dieselbe Länge wie $\boldsymbol{a}$ besitzt. Für den Gegenvektor verwendet man die Bezeichnung $-\boldsymbol{a}$:

$$-\boldsymbol{a} \uparrow\downarrow \boldsymbol{a}, \quad |-\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}|.$$

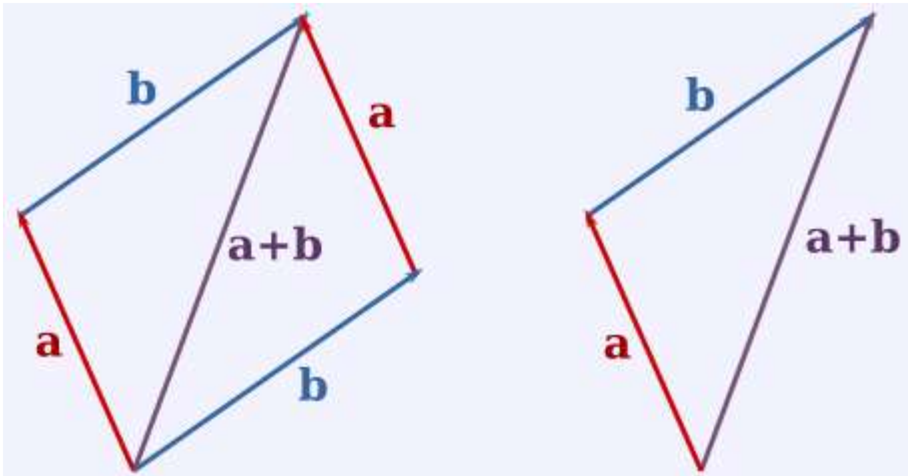


Vektorklassen



Um beispielsweise das Dreieck ABC in der Abbildung an die Position A'B'C' zu verschieben, muss jeder Punkt um 7 Einheiten nach rechts und 3 nach oben verschoben werden. Er bewegt sich dabei längs eines Pfeils $\vec{v}$.
Da diese Pfeile in Länge, Richtung und Orientierung übereinstimmen, fasst man sie zu einer Klasse (Vektorklasse) zusammen, die man ebenfalls kurz mit $\vec{v}$ bezeichnet. Jeder Pfeil ist ein Repräsentant dieser Klasse. Man beschreibt die Klasse durch die Verschiebung, die ihre Pfeile bewirken, im Beispiel: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

Einfache Rechenregeln für Vektoren: Addition



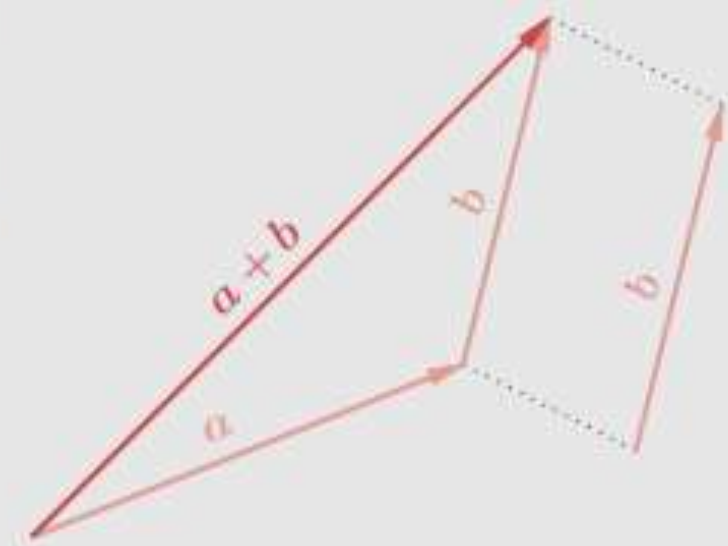
Die Vektoraddition kann man graphisch interpretieren, indem man den Startpunkt des zweiten Vektors mittels Parallelverschiebung auf den Endpunkt des ersten Vektors verschiebt.
Der Pfeil vom Startpunkt des ersten Vektors bis zum Endpunkt des zweiten Vektors repräsentiert den Ergebnisvektor.

Addition von Vektoren

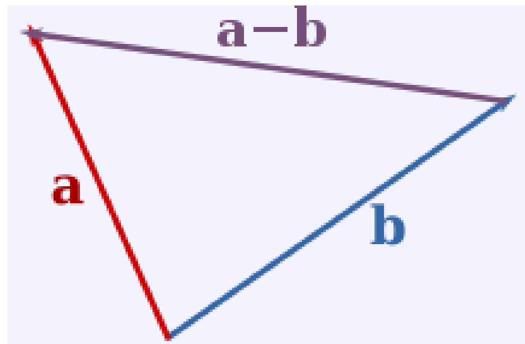
Die Addition der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist durch folgendes Konstruktionsprinzip definiert:

(1) Verschiebe den Vektor $\boldsymbol{b}$ parallel so, dass der Anfangspunkt von $\boldsymbol{b}$ mit dem Endpunkt von $\boldsymbol{a}$ zusammenfällt.

(2) Der Summenvektor $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ startet im Anfangspunkt von $\boldsymbol{a}$ und endet im Endpunkt von $\boldsymbol{b}$.



Einfache Rechenregeln für Vektoren: Subtraktion



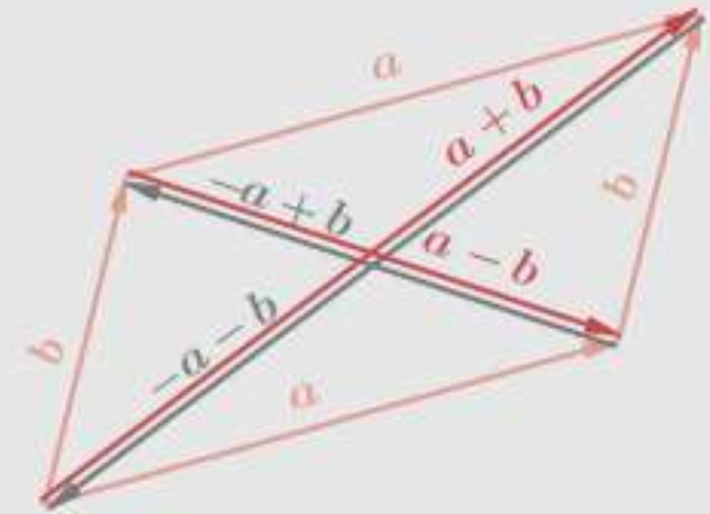
Die geometrische Interpretation der Subtraktion von zwei Vektoren ist: Zwei Vektoren werden subtrahiert, indem man den Startpunkt des Gegenvektors des zweiten Vektors an den Endpunkt des ersten Vektors anschließt.
Geometrisch entspricht die Differenz dem Verbindungsvektor zwischen den Endpunkten des zweiten und des ersten Vektors.

Diagonalen im Parallelogramm

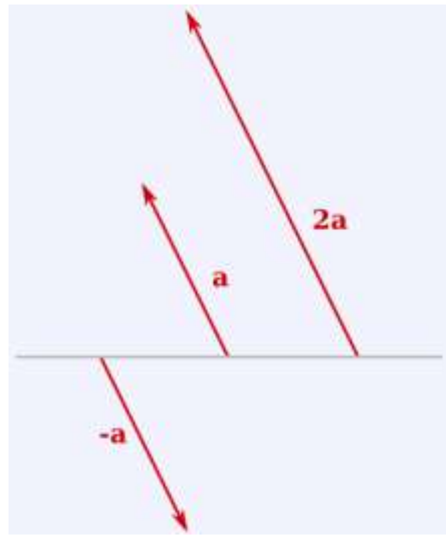
Diagonalen im Parallelogramm

Das Parallelogramm aus den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ besitzt folgende gerichtete Diagonalen:

- $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$
- $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$
- $-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$
- $-\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$



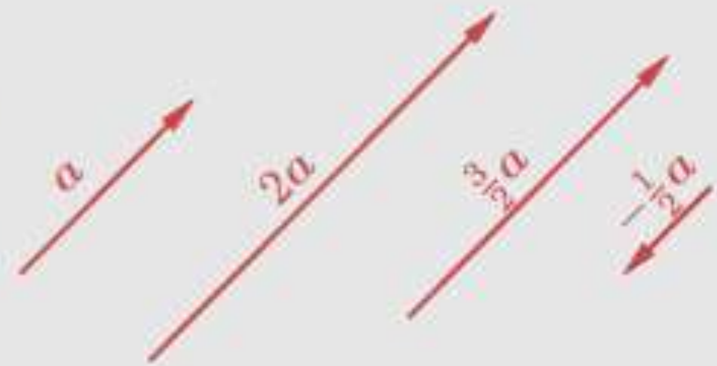
Einfache Rechenregeln für Vektoren:
Skalare Multiplikation



Vektoren können mit reellen Zahlen (Skalaren) multipliziert werden (Skalare Multiplikation).
Die Länge des resultierenden Vektors ist daher $|r| \cdot |\vec{a}|$.
Wenn der Skalar positiv ist, zeigt der resultierende Vektor in dieselbe Richtung, ist er negativ, in die Gegenrichtung.

Multiplikation eines Skalars mit einem Vektor

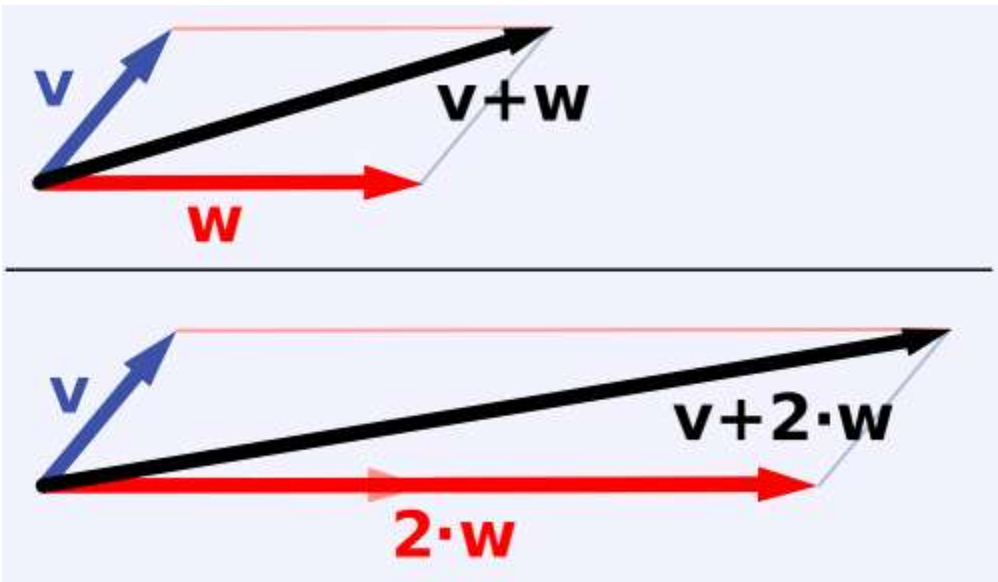
Durch Multiplikation eines Vektors $\boldsymbol{a}$ mit einem Skalar λ wird die Länge des Vektors um den Faktor λ skaliert. Bei positiven Faktoren λ haben $\boldsymbol{a}$ und $\lambda \cdot \boldsymbol{a}$ dieselbe Richtung und bei negativen Faktoren λ haben $\boldsymbol{a}$ und $\lambda \cdot \boldsymbol{a}$ entgegengesetzte Richtungen.



Für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und Skalare λ, μ gilt:

- $(\lambda + \mu)\,\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{a}$
- $\lambda\,(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}$

Kombinierte Mathematik von Vektoren



Vektoraddition und Skalarmultiplikation:

Ein Vektor **v** (blau) wird zu einem anderen Vektor **w** addiert (rot, oben). Unten wird **w** um einen Faktor 2 gestreckt, das Ergebnis ist die Summe **v** + 2·**w**.

Einfache Rechenregeln für Vektoren: Kommutativgesetz

Vertauschungsgesetz

$$a + b = b + a$$

$$a \times b = b \times a$$

Anwendung auf Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Einfache Rechenregeln für Vektoren: Assoziativgesetz

Verknüpfungsgesetz oder auch **Verbindungsgesetz**

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$$

Anwendung auf Vektoren:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

Einfache Rechenregeln für Vektoren: Distributivgesetz

Verteilungsgesetz

$$\lambda \cdot (a + b) = (\lambda \cdot a) + (\lambda \cdot b)$$

Punktrechnung geht vor Strichrechnung!

Anwendung auf Vektoren:

$$\lambda \cdot (\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = (\lambda \cdot \overrightarrow{a}) + (\lambda \cdot \overrightarrow{b})$$

λ : Skalar
a, b: Vektoren

Einheitsvektor in Richtung eines Vektors

Zu jedem beliebigen Vektor $\boldsymbol{a} \neq 0$ kann man durch Multiplikation mit dem Kehrwert des Betrags des Vektors einen Einheitsvektor in Richtung dieses Vektors $\boldsymbol{a}$ erzeugen:

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{a}} = \frac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

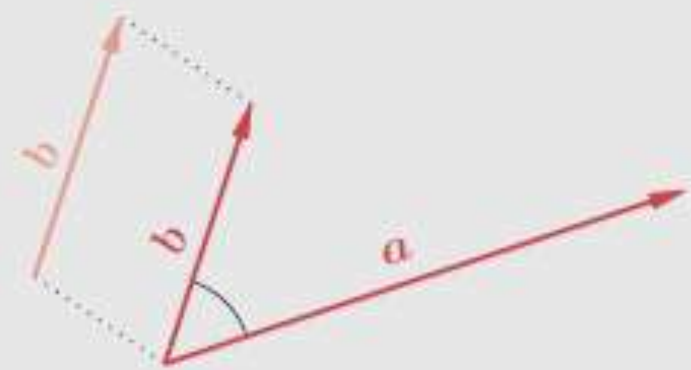
Der Einheitsvektor in Richtung $\boldsymbol{a}$ hat dieselbe Richtung wie $\boldsymbol{a}$ und die Länge 1.

Winkel zwischen zwei Vektoren

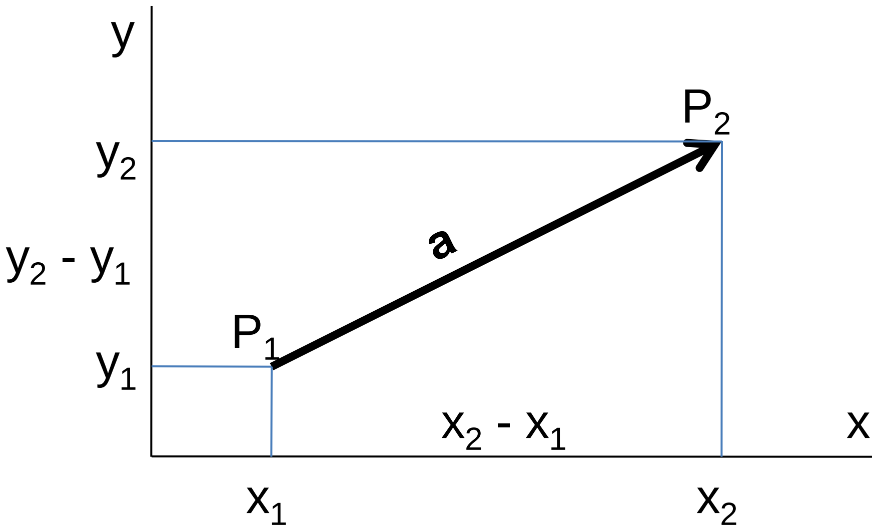
Für den Winkel zwischen zwei Vektoren spielt die Reihenfolge der Vektoren keine Rolle:

$$\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \angle(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}).$$

Vektoren haben Winkel zwischen $0°$ und $180°$, also zwischen 0 und π.



Koordinatendarstellung von Vektoren: 2D



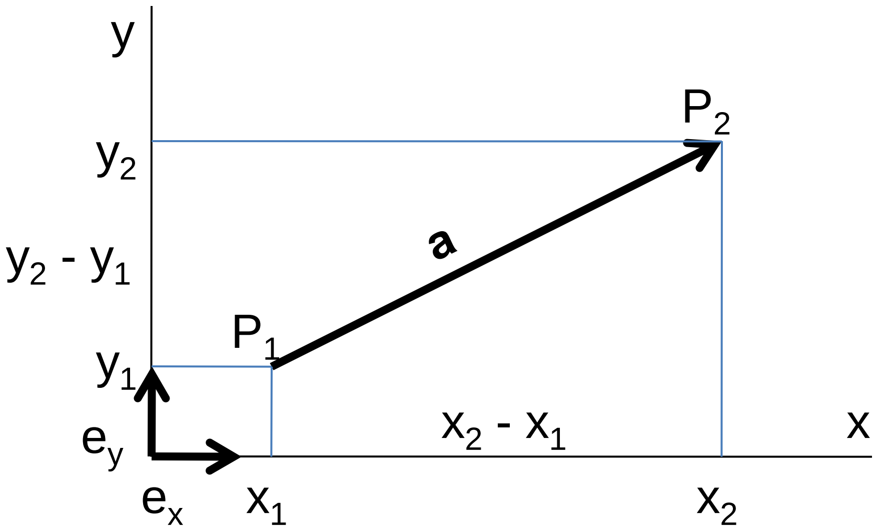
Vektor **a** verbindet die Punkte P_1 und P_2.

Um von zu P_1 zu P_2 gelangen, muss man
$x_2 - x_1$ Einheiten nach rechts und
$y_2 - y_1$ Einheiten nach oben.

Somit kann man die Koordinaten des Vektors a darstellen als:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektoren



$$\mathbf{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um eine Normierung für die absolute Länge zu bekommen, werden so genannte **Einheitsvektoren** festgelegt.

Das sind Grundvektoren der **Länge 1**. Sie zeigen in die Richtung der jeweiligen Koordinatenachsen.

In der linearen Algebra ist ein Einheits- vektor oder normierter Vektor ein Vektor mit der Norm (anschaulich: der Länge) Eins. Einheitsvektoren gibt es also nur in einem normierten Vektorraum.

Aufgaben

1. Nennen Sie zwei vektorielle und zwei skalare physikalische Größen!

2. Was passiert, wenn Sie diese Größen jeweils mit zwei multiplizieren?

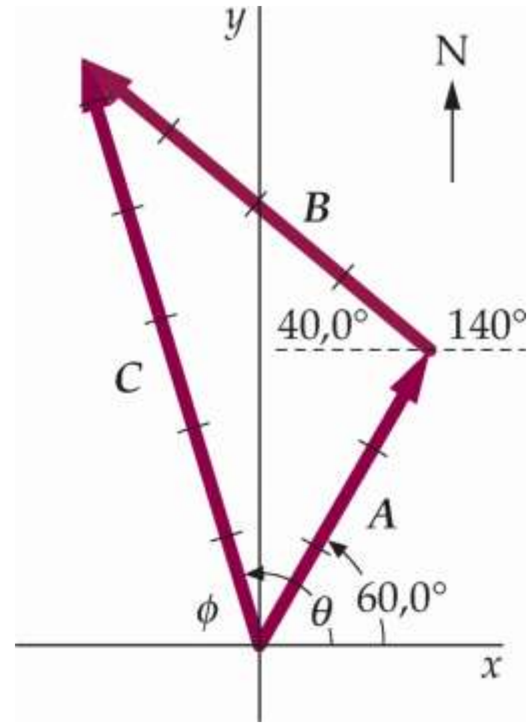
3. Was passiert, wenn Sie diese Größen jeweils mit minus zwei multiplizieren?

4. Welche Entsprechungen haben die folgenden Vektorräume?
   1. eindimensional:
   2. zweidimensional:
   3. dreidimensional:
   4. vierdimensional:
   5. fünfdimensional:

5. Addieren Sie geometrisch zwei Vektoren $\underline{a}$ und $\underline{b}$.
   (nach Zeichnung)

Aufgaben

6. Der Verwalter einer Tropeninsel erhält eine Karte mit dem Auftrag, an einem bestimmten Ort einen Schatz zu vergraben, den die Besucher dann suchen sollen. Hierzu muss er bestimmte Anweisungen befolgen. Der Verwalter möchte die Aufgabe schnell hinter sich bringen, um baden zu gehen. Die Anweisungen besagen, dass er 3,0 km unter einem Winkel von 60,0° nördlich der Ostrichtung und anschließend 4,0 km unter einem Winkel von 40,0° nördlich der Westrichtung gehen soll. In welche Richtung und wie weit muss er laufen, um die Sache möglichst schnell zu erledigen? Ermitteln Sie das Ergebnis:
   a) grafisch oder
   b) unter Verwendung von Vektorkomponenten.



Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,
Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium,
Hanser Verlag, München 2010