Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (4)

Gerald Kupris

13.10.2010

Binominalkoeffizient

Der **Binomialkoeffizient** der beiden natürlichen Zahl $m \geq n$ ist definiert durch

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!\,(m-n)!}.$$

Für n ≥ k: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$

Wie lautet der Binominalkoeffizient, wenn n = k ist ?

Wie lautet der Binominalkoeffizient, wenn n < k ist ?

Wie lautet der Binominalkoeffizient, wenn k = 0 ist ?

Binomialkoeffizienten spielen in der abzählenden Kombinatorik eine zentrale Rolle, denn $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Menge mit *n* Elementen *k* Elemente auszuwählen, wobei die Reihenfolge der ausgewählten Elemente nicht berücksichtigt wird.

Binomischer Satz

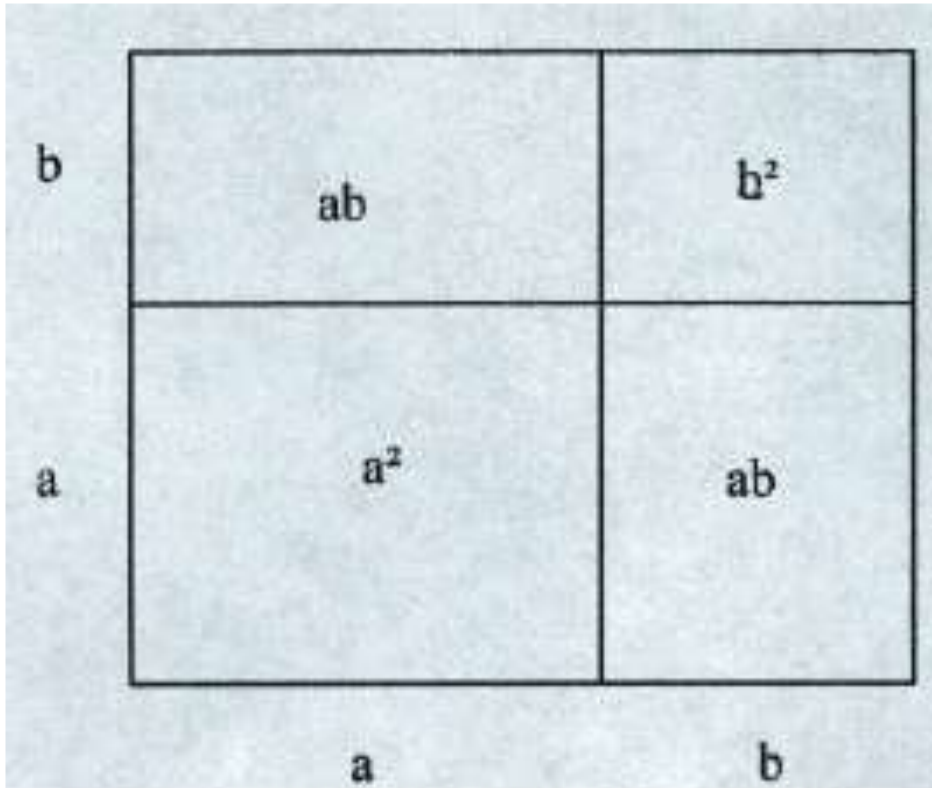
Für jede natürliche Hochzahl n und beliebige Zahlen a und b gilt die Formel

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1} a\, b^{n-1} + b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Für beliebige Zahlen a und b gelten die binomischen Formeln:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2\,a\,b + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Geometrische Herleitung der ersten binomischen Formel



Pascalsches Dreieck

Die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck ergeben sich jeweils aus der Summe der beiden darüber stehenden Koeffizienten:

$$\binom{m+1}{n+1} = \binom{m}{n} + \binom{m}{n+1}.$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
\cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & \\
 & & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & \\
 & & & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & \\
 & & & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & \\
 & & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & \\
 & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & \\
 & \binom{6}{0} & & \binom{6}{1} & & \binom{6}{2} & & \binom{6}{3} & & \binom{6}{4} & & \binom{6}{5} & & \binom{6}{6} & \\
\binom{7}{0} & & \binom{7}{1} & & \binom{7}{2} & & \binom{7}{3} & & \binom{7}{4} & & \binom{7}{5} & & \binom{7}{6} & & \binom{7}{7}
\end{array}$$

Erweitertes Pascalsches Dreieck

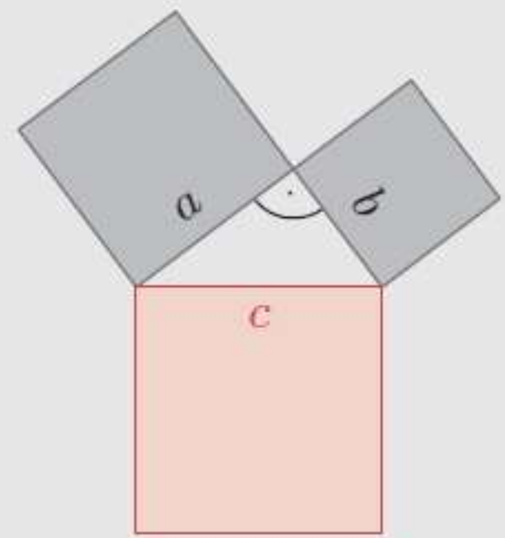
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1
1 13 78 286 715 1287 1716 1716 1287 715 286 78 13 1
1 14 91 364 1001 2002 3003 3432 3003 2002 1001 364 91 14 1
1 15 105 455 1365 3003 5005 6435 6435 5005 3003 1365 455 105 15 1
1 16 120 560 1820 4368 8008 11440 12870 11440 8008 4368 1820 560 120 16 1

Satz des Pythagoras

Der Satz des Pythagoras ist einer der fundamentalen Sätze der euklidischen Geometrie. Er besagt, dass in allen ebenen rechtwinkligen Dreiecken die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypotenusenquadrates ist.

Im rechtwinkligen Dreieck bezeichnet man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite als **Hypotenuse** und die beiden anderen Seiten als **Katheten**. Zwischen der Länge der Hypotenuse c und den Längen der beiden Katheten a und b gilt die Formel

$$c^2 = a^2 + b^2.$$



Aussage des Satz des Pythagoras

Sind *a*, *b*, *c* die Längen der Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks mit *c* als Länge der Hypotenuse, so gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

In Worten: Die Summe der Quadrate über den Katheten ist gleich dem Quadrat über der Hypotenuse.

Die Umkehrung gilt ebenso: Gilt die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ in einem Dreieck mit den Seitenlängen *a*, *b* und *c*, so ist dieses Dreieck rechtwinklig, wobei der rechte Winkel der Seite *c* gegenüber liegt.

Aus dem Satz des Pythagoras folgt: Die Länge der Hypotenuse ist gleich der Quadratwurzel aus der Summe der Kathetenquadrate, es gilt also:

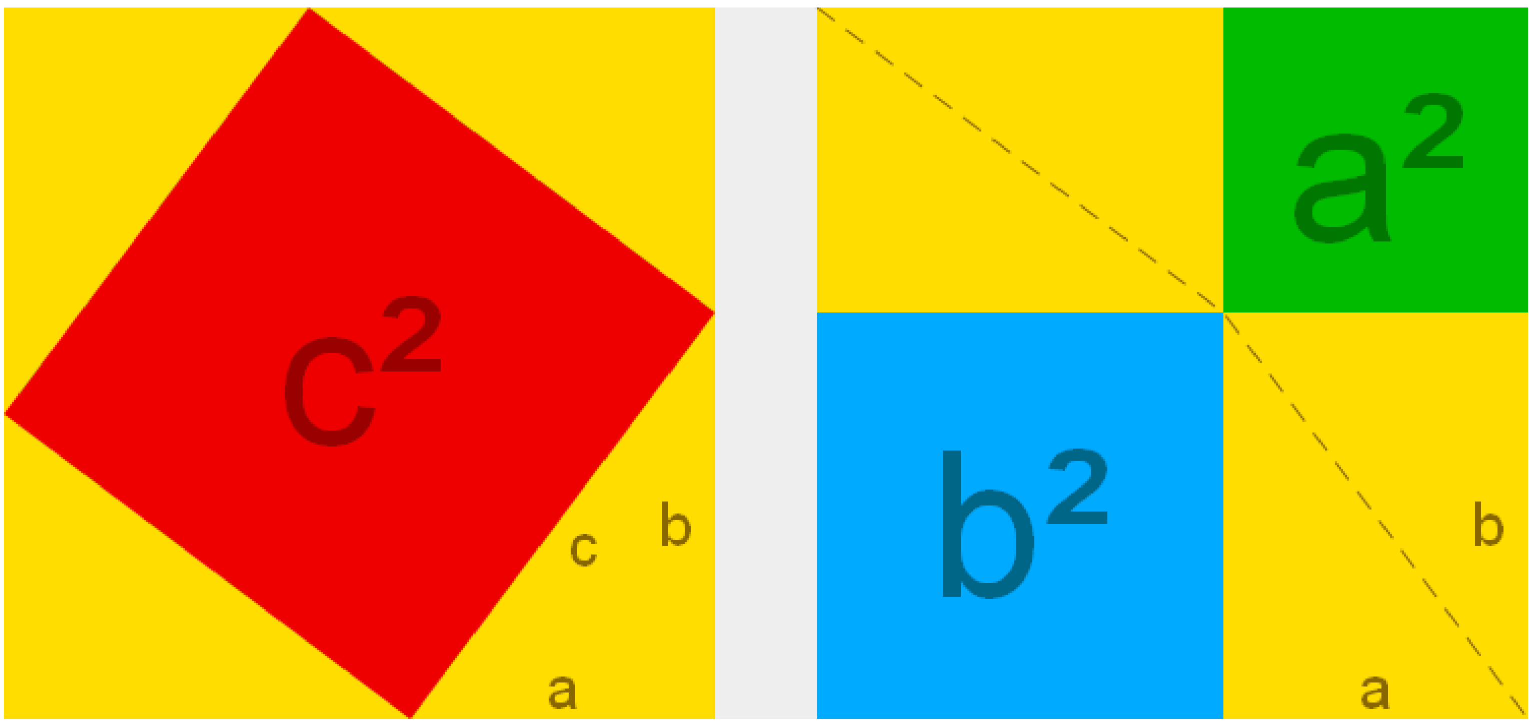
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Die einfachste und wichtigste Anwendung des Satzes ist, aus zwei bekannten Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die Dritte zu berechnen. Die Umkehrung des Satzes kann dazu verwendet werden, um zu überprüfen, ob ein gegebenes Dreieck rechtwinklig ist.

Beweis des Satz des Pythagoras

Für den Satz sind mehrere hundert verschiedene Beweise bekannt. Der Satz des Pythagoras ist damit der meistbewiesene mathematische Satz.

Geometrischer Beweis:



Beweis des Satz des Pythagoras

Algebraische Lösung (siehe rechtes Bild):

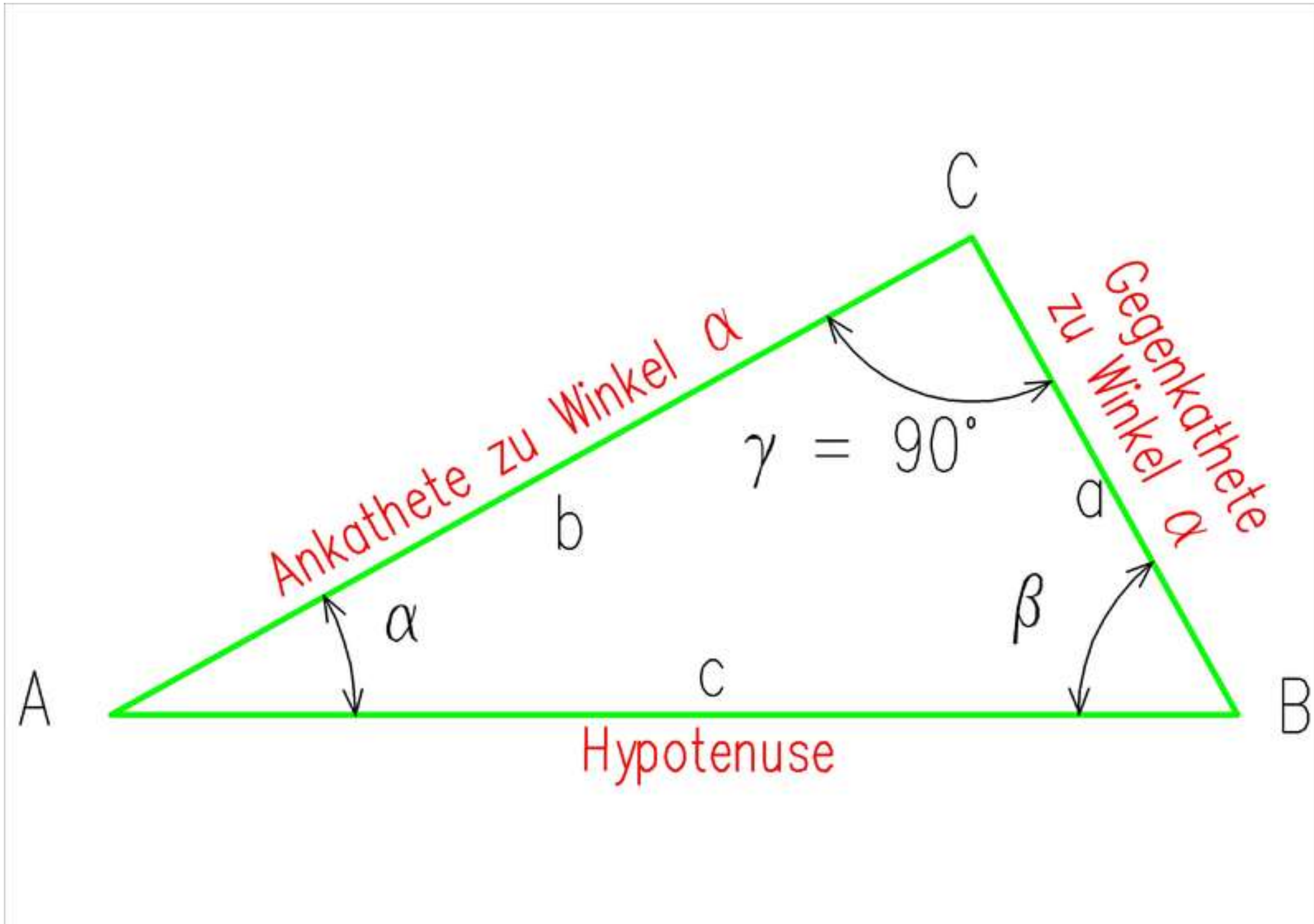
Das große Quadrat hat die Seitenlänge a+b, und somit die Fläche $(a + b)^2$.

Zieht man von dieser Fläche die 4 Dreiecke ab, die jeweils eine Fläche von $ab / 2$ (also insgesamt $2ab$) haben, so bleibt die Fläche c^2 übrig.

Es ist also $(a + b)^2 = 2ab + c^2$.

Aus Auflösung der Klammer folgt $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$. Zieht man nun auf beiden Seiten 2ab ab, bleibt der Satz des Pythagoras übrig.

Rechtwinkliges Dreieck



Definitionen im Rechtwinkeligen Dreieck

$$\text{Sinus von } \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Kosinus von } \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\text{Tangens von } \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\text{Kotangens von } \alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Gegenkathete}}$$

$$\text{Sekans von } \alpha = \frac{c}{b} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Ankathete}}$$

$$\text{Kosekans von } \alpha = \frac{c}{a} = \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Gegenkathete}}$$

Definition der Trigonometrischen Funktionen

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$

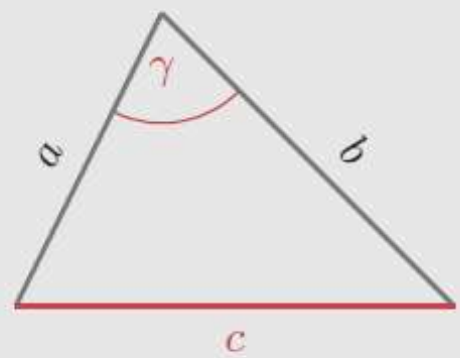
$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

Sinus- und Kosinussatz

Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks und γ der gegenüber der Seite c liegende Winkel, so gilt die Beziehung

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma.$$

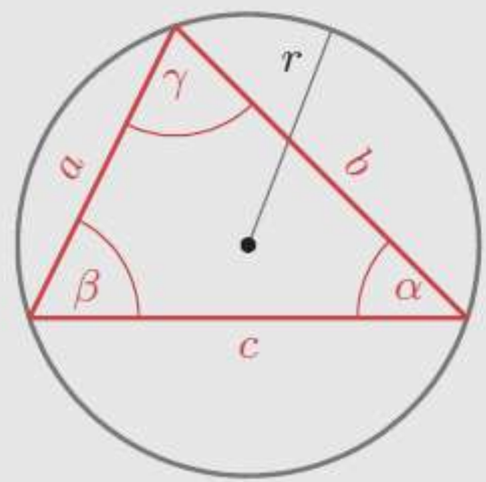
Diese Formel ist eine Verallgemeinerung des Satzes von Phythagoras auf nicht rechtwinklige Dreiecke.



Sind a, b und c die Seiten eines Dreiecks und α, β und γ die jeweils gegenüber liegenden Winkel, so gilt die Beziehung

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2\,r.$$

Dabei ist r der Umkreisradius des Dreiecks.



Trigonometrie im allgemeinen Dreieck

beliebige Dreiecke im Allgemeinen ohne rechten Winkel

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

Trigonometrische Formeln:

Komplementärformeln:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

trigonometrischer Pythagoras:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

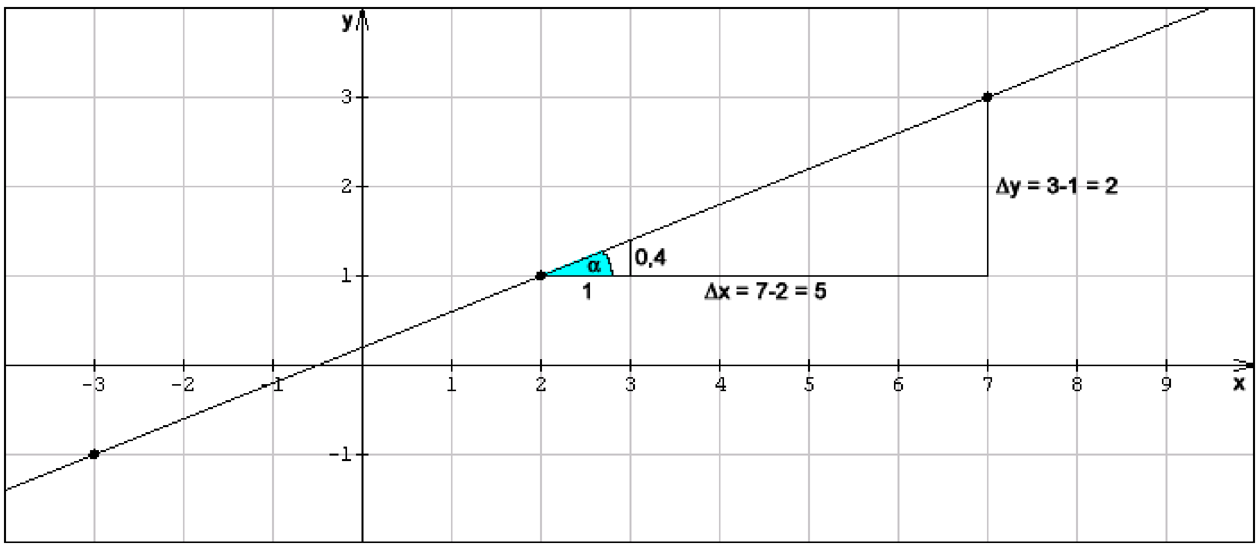
Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \ \cos\beta \mp \sin\alpha \ \sin\beta$$
$$\cos u + \cos v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\cos u - \cos v = -2\sin\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$
$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cos\frac{u-v}{2}$$
$$\sin u - \sin v = 2\cos\frac{u+v}{2}\sin\frac{u-v}{2}$$

Steigung

Die Steigung (auch als Anstieg bezeichnet) ist ein Maß für die Steilheit einer Geraden oder einer Kurve.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



$m = \tan(\alpha)$ $\alpha = \arctan(m)$

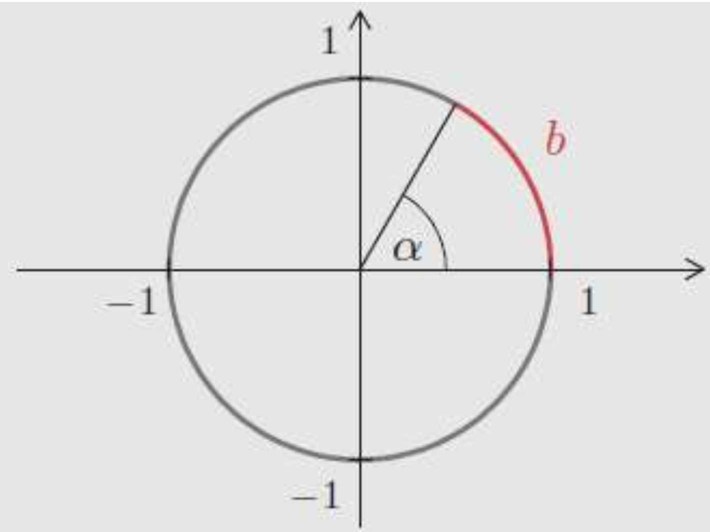
Winkel im Grad- und Bogenmaß

Die **Zahl** π entspricht der Länge eines Halbkreisbogens mit Radius 1.

Das **Bogenmaß** b eines Winkels α im Gradmaß ist die Länge des Kreisbogens im Einheitskreis. Die Umrechnung zwischen dem Bogenmaß und dem Gradmaß erfolgt durch

$$b = \frac{2\pi}{360^\circ}\,\alpha, \quad \alpha = \frac{360^\circ}{2\pi}\,b.$$

Insbesondere entspricht 2π dem Winkel 360°.



Spezielle Werte des Sinus und Kosinus

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
b	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{4}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{1}$	$\frac{1}{2}\sqrt{0}$

Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,
Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium,
Hanser Verlag, München 2010