HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Mathematik 1 Infotronik (11)

Gerald Kupris

28.11.2012

Lineare Algebra

Lineare Algebra

Die Lineare Algebra (auch Vektoralgebra) ist ein Teilgebiet der Mathematik, das sich mit Vektorräumen und linearen Abbildungen zwischen diesen beschäftigt. Dies schließt insbesondere auch die Betrachtung von linearen Gleichungssystemen und Matrizen mit ein.

Vektorräume und deren lineare Abbildungen sind ein wichtiges Hilfsmittel in vielen Bereichen der Mathematik. Außerhalb der reinen Mathematik finden sich Anwendungen u. a. in den Naturwissenschaften und in der Wirtschaftswissenschaft (z. B. in der Optimierung).

Die lineare Algebra entstand aus zwei konkreten Anforderungen heraus: einerseits dem Lösen von **linearen Gleichungssystemen**, andererseits der rechnerischen Beschreibung geometrischer Objekte, der so genannten **analytischen Geometrie**.

Geschichte der Linearen Algebra

Im Jahr 1750 veröffentlichte Gabriel Cramer die nach ihm benannte cramersche Regel. Damit war man erstmals im Besitz einer Lösungsformel für viele lineare Gleichungssysteme. Die Cramersche Regel gab zudem entscheidende Impulse für die Entwicklung der Determinantentheorie in den folgenden fünfzig Jahren.

Die Geschichte der modernen linearen Algebra reicht zurück bis in die Jahre 1843 und 1844.

1843 erdachte William Rowan Hamilton (von dem der Begriff Vektor stammt) mit den Quaternionen eine Erweiterung der komplexen Zahlen.

1844 veröffentlichte Hermann Graßmann sein Buch „Die lineare Ausdehnungslehre“. Arthur Cayley führte dann 1857 mit den 2×2-Matrizen eine der grundlegendsten algebraischen Ideen ein.

William Rowan Hamilton
1805 - 1865

Lineare Gleichungssysteme

Als lineares Gleichungssystem bezeichnet man ein System aus linearen Gleichungen, die mehrere unbekannte Größen (Variable) enthalten.

Derartige Gleichungssysteme erhält man aus vielen alltäglichen Fragestellungen, z.B:

In welchem Verhältnis muss man eine 30%-ige Lösung und eine 60%-ige Lösung mischen, um eine 40%-ige Lösung zu erhalten?

Ein Vater und ein Sohn sind zusammen 62 Jahre alt. Vor sechs Jahren war der Vater viermal so alt wie damals der Sohn. Wie alt ist jeder?

Christina kauft vom Artikel A zehn Stück und zwölfmal Artikel B. Daniel dagegen kauft fünfzehn Stück von A, aber nur zwei von B. Christina bezahlt 38 Euro, Daniel 19,40 Euro. Was sind die Einzelpreise von A und B?

Lineare Gleichungssysteme können in Formen vorliegen, in denen sie leicht gelöst werden können. Vielfach werden beliebige Gleichungssysteme mittels eines Algorithmus in eine entsprechende Gestalt gebracht, um anschließend eine Lösung zu finden.

Analytische Geometrie

Der andere Ursprung der linearen Algebra findet sich in der rechnerischen Beschreibung des 2- und 3-dimensionalen (euklidischen) Raumes, auch „Anschauungsraum“ genannt.

Mit Hilfe eines Koordinatensystems können Punkte im Raum durch Tripel (x_1,x_2,x_3) von Zahlen beschrieben werden. Der Abbildungtyp der Verschiebung führt zum Begriff des Vektors, der Richtung und Betrag der Verschiebung angibt. Viele physikalische Größen, beispielsweise Kräfte, haben stets diesen Richtungsaspekt.

Da man auch Vektoren durch Zahlentripel (a_1,a_2,a_3) beschreiben kann, verschwimmt die Trennung zwischen Vektoren und Punkten: einem Punkt P entspricht sein Ortsvektor, der vom Koordinatenursprung nach P zeigt.

Viele der in der klassischen Geometrie betrachteten Abbildungstypen, beispielsweise Drehungen um Achsen durch den Ursprung oder Spiegelungen an Ebenen durch den Ursprung, gehören zur Klasse der linearen Abbildungen.

Vektorräume und lineare Algebra

Der Begriff des Vektorraumes entsteht als Abstraktion der obigen Beispiele: Ein Vektorraum ist eine Menge, deren Elemente Vektoren genannt werden.

In gewisser Weise ist der Begriff des Vektorraums für die Lineare Algebra bereits zu allgemein. Man kann jedem Vektorraum eine Dimension zuordnen, beispielsweise hat die Ebene Dimension 2 und der Raum Dimension 3.

Es gibt aber Vektorräume, der Dimension n oder deren Dimension nicht endlich ist, und viele der bekannten Eigenschaften gehen verloren.

Die Lineare Abbildung

Die lineare Abbildung (auch linearer Operator) ist eine Funktion zwischen zwei Vektorräumen über dem selben Körper, bei der es unerheblich ist, ob man zwei Vektoren zuerst addiert und dann deren Summe mittels der Funktion abbildet oder zuerst die Vektoren abbildet und dann die Summe der Bilder bildet. Gleiches gilt für die Multiplikation mit einem Skalar (z. B. einer reellen Zahl).

Eine Funktion oder Abbildung ist eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (Funktionsargument, unabhängige Variable, x-Wert) genau ein Element der anderen Menge (Funktionswert, abhängige Variable, y-Wert) zuordnet.

Ein Körper ist im mathematischen Teilgebiet der Algebra eine ausgezeichnete algebraische Struktur, in der die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division wie bei den „normalen“ (reellen) Zahlen durchgeführt werden können.

Die Definition sorgt dafür, dass in einem Körper in der "gewohnten" Weise Addition, Subtraktion und Multiplikation funktionieren (und die Division mit Ausnahme der verbotenen Division durch 0).

Vektorraum

Ein Vektorraum oder linearer Raum ist eine algebraische Struktur, die in fast allen Zweigen der Mathematik verwendet wird. Die Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren. Sie können addiert werden oder mit Skalaren multipliziert, das Ergebnis ist wieder ein Vektor desselben Vektorraums. Entstanden ist der Begriff aus der Abstraktion des euklidischen Raumes auf wesentliche Eigenschaften, die dann auf abstraktere Objekte wie Funktionen oder Matrizen übertragbar sind.

Die skalaren Zahlen, mit denen man einen Vektor multiplizieren kann, stammen aus einem Körper, deswegen ist ein Vektorraum immer ein Vektorraum „über“ einem bestimmten Körper. Man spricht beispielsweise von einem Vektorraum über den reellen Zahlen. In den meisten Anwendungen legt man diese oder die komplexen Zahlen zugrunde.

Eine Basis eines Vektorraums ist eine Menge von Vektoren, die es erlaubt, jeden Vektor durch eindeutige Koordinaten zu beschreiben. Wird mit Vektoren gerechnet, so wird mit deren Koordinaten gerechnet. Die Anzahl der Basisvektoren wird Dimension des Vektor-raums genannt. Sie ist unabhängig von der Wahl der Basis und kann auch unendlich sein.

Vektoren

Vektoren können durch ihre Komponenten beschrieben werden, die (je nach Anwendung) als Spaltenvektor oder Zeilenvektor geschrieben werden.

Beispiel 3 dimensionaler Spaltenvektor: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Beispiel 4 dimensionaler Zeilenvektor: $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

In der Literatur werden Vektoren unterschiedlich von anderen Größen unterschieden: Es werden Kleinbuchstaben, fettgedruckte Kleinbuchstaben, unterstrichene Kleinbuchstaben oder Kleinbuchstaben mit einem Pfeil darüber benutzt.
Einzelne Elemente eines Vektors werden bei Spaltenvektoren in der Regel durch einen Index angegeben: Das 2. Element des oben angegebenen Vektors *a* wäre dann a_2=7.
In Zeilenvektoren wird manchmal eine Hochzahl verwendet, wobei man aufpassen muss, ob eine Vektorindizierung oder ein Exponent vorliegt: Mit dem obigen Beispiel *b* hat man etwa $b^4=7$.

Definition Vektoren

Mit $\Re^n$ bezeichnet man die Mengen aller n-Tupel reeller Zahlen, das heißt:

$$\Re^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \Re, \ldots x_n \in \Re \right\}$$

Die Elemente $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \Re^n$ heißen **Vektoren**.

Wiederholung: Addition und Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z \qquad \vec{b} = b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y + b_3\vec{e}_z$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e_x} + (a_2 + b_2)\vec{e_y} + (a_3 + b_3)\vec{e_z} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{e_x} + (a_2 - b_2)\vec{e_y} + (a_3 - b_3)\vec{e_z} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Das kann geometrisch nachvollzogen werden!

Addition und Subtraktion von Vektoren

Addition und Subtraktion von Vektoren sind komponentenweise definiert:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \pm y_1 \\ x_2 \pm y_2 \\ \vdots \\ x_n \pm y_n \end{pmatrix}$$

Voraussetzung: Die Vektoren enthalten die selbe Anzahl von Elementen.

Wiederholung: Skalare Multiplikation von Vektoren

Bei der skalaren Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl wird jede Komponente mit dieser Zahl multipliziert.

$$\lambda \boldsymbol{a} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$$

Um einen Vektor zu **normieren**, wird er mit dem Kehrwert seines Betrages skalar multipliziert. Somit ist der Betrag eines normierten Vektors immer gleich Eins.

Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar

Die Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar ist komponentenweise definiert:

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot x_1 \\ \lambda \cdot x_2 \\ \vdots \\ \lambda \cdot x_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \Re$$

Wiederholung: Einfache Rechenregeln für Vektoren: Kommutativgesetz

Vertauschungsgesetz

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Anwendung auf Vektoren:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

Wiederholung: Einfache Rechenregeln für Vektoren: Assoziativgesetz

Verknüpfungsgesetz oder auch **Verbindungsgesetz**

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Anwendung auf Vektoren:

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

Wiederholung: Einfache Rechenregeln für Vektoren: Distributivgesetz

Verteilungsgesetz

$$\lambda \cdot (b + c) = (\lambda \cdot b) + (\lambda \cdot c)$$

Punktrechnung geht vor Strichrechnung!

Anwendung auf Vektoren:

$$\lambda \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = (\lambda \cdot \vec{b}) + (\lambda \cdot \vec{c})$$

λ: Skalar
b, c: Vektoren

Und noch einmal: die Lineare Abbildung

Die lineare Abbildung (auch linearer Operator) ist eine Funktion zwischen zwei Vektorräumen über dem selben Körper, bei der es unerheblich ist, ob man zwei Vektoren zuerst addiert und dann deren Summe mittels der Funktion abbildet oder zuerst die Vektoren abbildet und dann die Summe der Bilder bildet.
Gleiches gilt für die Multiplikation mit einem Skalar (z. B. einer reellen Zahl).

Eine Funktion oder Abbildung ist eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (Funktionsargument, unabhängige Variable, x-Wert) genau ein Element der anderen Menge (Funktionswert, abhängige Variable, y-Wert) zuordnet.

Eine Abbildung ***f*** heißt linear, falls gelten:

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \mid \vec{x}, \vec{y} \in \Re^n$$

$$f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \Re^n, \lambda \in \Re$$

Und noch einmal: die Lineare Abbildung

Eine Lineare Abbildung kann als Kombination von Addition und Multiplikation dargestellt werden:

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Diese Anordnung der Koeffizienten wird als Matrix bezeichnet.

Matrizen

In der Mathematik versteht man unter einer Matrix (Plural: Matrizen) eine rechteckige Anordnung (Tabelle) von Elementen bzw. mathematischen Objekten mit denen man rechnen (z. B. addieren, multiplizieren) kann. Eine Matrix wird durch ein 'Raster' von Zahlen angegeben. Hier ist eine Matrix mit 4 Zeilen und 3 Spalten:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 9 \\ 4 & 8 & 2 \\ 8 & 3 & 7 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizen werden meistens mit Großbuchstaben bezeichnet.

Matrixelemente werden durch zwei Indizes angegeben. Dabei werden die Elemente durch Kleinbuchstaben dargestellt: $m_{2,3}=2$ ist das Element in der 2. Zeile der 3. Spalte. (statt "in der 3. Spalte der 2. Zeile", denn so läßt sich $m_{2,3}$ leichter lesen).

Matrix

Ein rechteckiges Zahlenschema aus m Zeilen und n Spalten

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

nennt man eine **(m, n)-Matrix**.

Definition Matrix

Eine ***m* × *n*** Matrix A ist ein rechtwinkeliges Schema aus ***m·n*** rellen Zahlen mit m Zeilen und n Spalten, das heißt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A \in \Re^{m \times n}$$

Sonderformen einer Matrix

Eine Matrix, bei der die Anzahl der Zeilen und Spalten gleich ist, nennt man eine **quadratische Matrix**.

Eine Matrix, die aus einer einzigen

- Zeile besteht, nennt man **Zeilenvektor** $z = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix},$
- Spalte besteht, nennt man **Spaltenvektor** $s = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$

Und noch einmal: Die Lineare Abbildung

Jedes Element des Ergebnisvektors ist eine Linearkombination der Elemente des Ausgangsvektors.

Daher lässt sich jede lineare Abbildung darstellen als:

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \\ y_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \\ \vdots \\ y_m = a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \end{pmatrix}$$

Und noch einmal: Die Lineare Abbildung

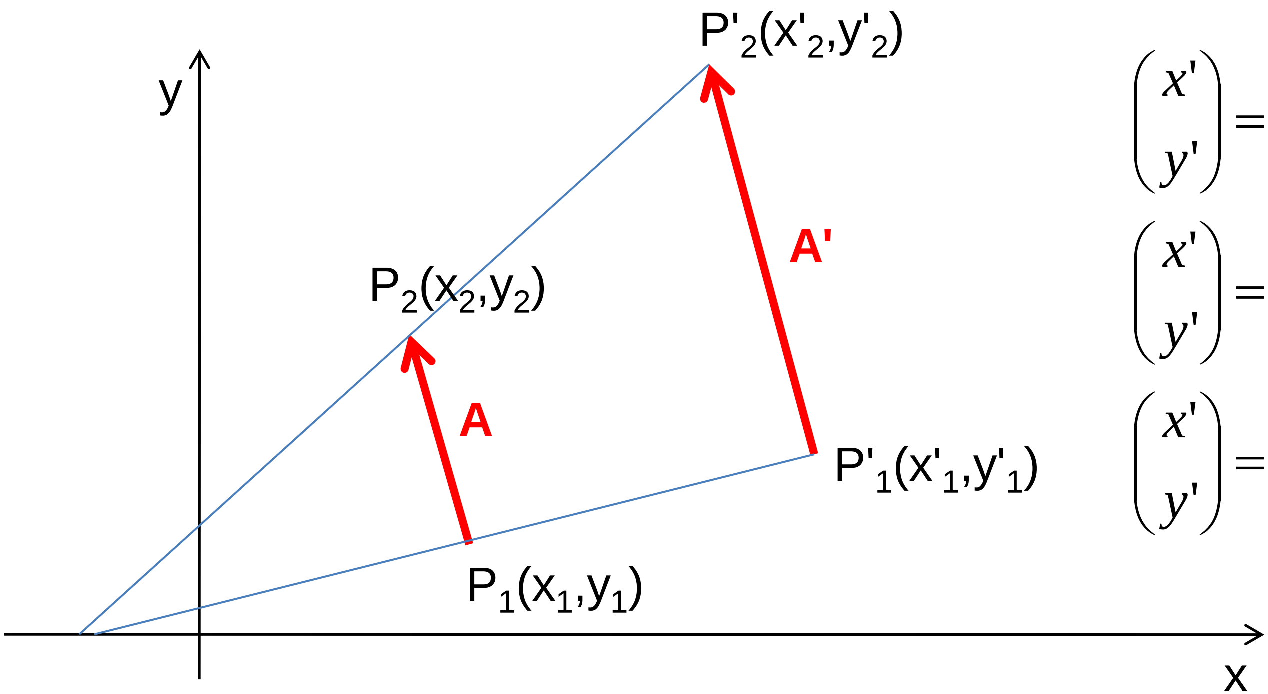
$$\vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = f\left(\vec{x}\right) = A \cdot \vec{x}$$

$A = [\ f\ ]$ wird als Abbildungsvorschrift oder als die darstellende Matrix von f bezeichnet.

Beispiele für lineare Abbildungen

Beispiel: Projektion im zweidimensionalen Raum



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' = a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y \\ y' = a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

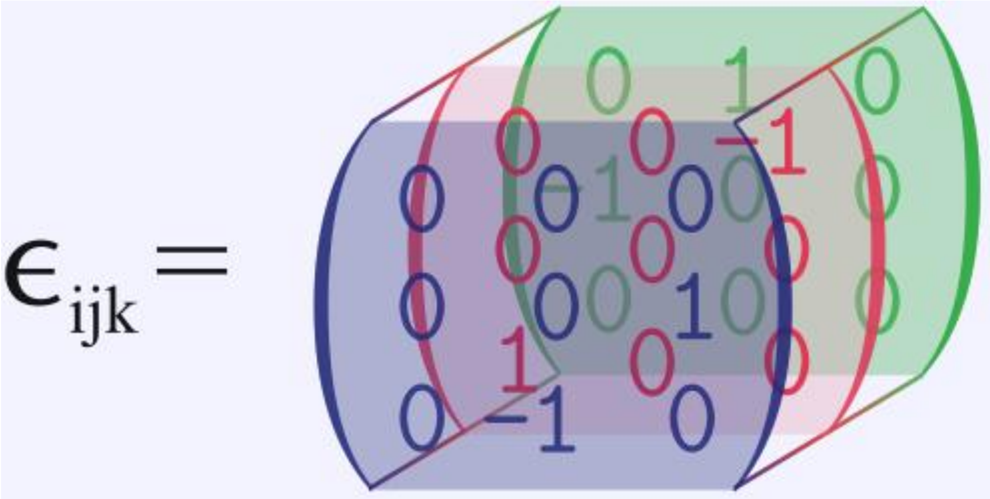
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

A ist die lineare Abbildung (Funktion, Abbildungsvorschrift) zur Projektion im zweidimensionalen Raum.

Tensoren

Der verallgemeinerte Begriff dieser Gebilde ist **Tensor**: Skalare sind Tensoren 0. Stufe, Vektoren Tensoren 1. Stufe, Matrizen Tensoren 2. Stufe. Ein Tensor n-ter Stufe kann durch einen n-dimensionalen Zahlen-Würfel repräsentiert werden.

In seiner modernen Bedeutung, als Verallgemeinerung von Skalar, Vektor, Matrix, wird das Wort *Tensor* erstmals von Woldemar Voigt in seinem Buch *Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle in elementarer Darstellung* (1898) eingeführt.



In der Physik hingegen spricht man zwar häufig von Tensoren, meint aber damit Tensorfelder. Ein Tensorfeld ist eine Abbildung, die jedem Punkt des Raums einen Tensor zuordnet; viele physikalische Feldtheorien handeln von Tensorfeldern.

Beispiele für Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 8 \\ -3 & 8 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 23 & 57 & 34 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} -4{,}5 \\ 2{,}38 \\ 3{,}14 \end{pmatrix}$$

Skalar als Matrix

Eine $(1,1)$-Matrix x ist eine Matrix mit einer einzigen Zeile und einer einzigen Spalte, also ein Skalar $x = (\, a_{11}\,)$.

Transponieren einer Matrix

Wenn in einer Matrix **A** die Zeilen und die Spalten miteinander vertauscht werden, so erhält man die Transponierte $\mathbf{A}^T$ der Matrix **A**.

Ist **A** eine Matrix vom Typ (m,n), so ist ihre Transponierte $\mathbf{A}^T$ vom Typ (n,m).

Durch zweimaliges Transponieren erhält man wieder die Ausgangsmatrix $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$.

Durch Transponieren geht ein Zeilenvektor in einen Spaltenvektor über und umgekehrt.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 8 \\ -3 & 8 & 6 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 0 \\ -2 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Quadratische Matritzen

Eine Matrix, bei der die Anzahl der Spalten gleich der Anzahl der Zeilen ist, wird eine quadratische Matrix genannt. Quadratische Matrizen spielen in den naturwissenschaftlich-technischen Anwendungen eine besondere Rolle.

Die Hauptdiagonale einer quadratischen Matrix verläuft von links oben nach rechts unten. Sie verbindet die Diagonalelemente a_{ii} (i=1 … n) miteinander.
Die Nebendiagonale verläuft von rechts oben nach links unten.
Transponieren bedeutet bei einer quadratischen Matrix A: Spiegelung der Elemente von A an der Hauptdiagonalen.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

Eine n-reihige Quadratische Matrix $\mathbf{A = (a_{i,k})}$ heißt Diagonalmatrix, wenn alle außerhalb der Hauptdiagonale liegenden Elemente gleich Null sind.

$a_{i,k} = 0$ für alle $i \neq k$ (i,k = 1, 2 …n)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix und Nullmatrix

Eine Einheitsmatrix ist ein Sonderfall einer Diagonalmatrix. Eine n-reihige Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $a_{ii} = 1$ (i = 1, 2 …n) heißt n-reihige Einheitsmatrix.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix, bei der alle Elemente den Wert null haben, bezeichnet man als **Nullmatrix** $\mathbf{0}$. Eine Nullmatrix muss nicht quadratisch sein.

Dreiecksmatrix

Eine n-reihige quadratische Matrix **A = ($\mathbf{a_{i,k}}$)** wird als Dreiecksmatrix bezeichnet, wenn alle Elemente ober- oder unterhalb der Hauptdiagonale Null sind.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

Untere Dreiecksmatrix

Obere Dreiecksmatrix

Symmetrische Matrix

Eine n-reihige **quadratische** Matrix $\mathbf{A = (a_{i,k})}$ heißt symmetrisch, wenn gilt:

$a_{ik} = a_{ki}$ für alle i und k (i,k = 1, 2 ….n)

Bei einer symmetrischen Matrix sind die Elemente stets spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen angeordnet.
Daher gilt für eine symmetrische Matrix **A** stets: $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 8 & 0 \\ -2 & 8 & 6 & 7 \\ 3 & 0 & 7 & -1 \end{pmatrix}$$

Eine Matrix, die sich durch Transponieren nicht ändert, nennt man **symmetrisch**. Eine symmetrische Matrix ist immer quadratisch.

Schiefsymmetrische Matrix

Eine n-reihige quadratische Matrix **A = ($a_{i,k}$)** heißt schiefsymmetrisch, wenn gilt:

$a_{ik} = - a_{ki}$ für alle i und k (i,k = 1, 2 ….n)

Bei einer schiefsymmetrischen Matrix sind sämtliche Diagonalelemente gleich Null.
Beim Transponieren einer schiefsymmetrischen Matrix ändert sich ihr Vorzeichen.
Daher gilt für eine schiefsymmetrische Matrix **A** stets: $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 & 3 \\ -4 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & -8 & 0 & 7 \\ -3 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Gleichheit von Matrizen

Zwei Matrizen **A = ($a_{i,k}$)** und **B = ($b_{i,k}$)** vom gleichen Typ heißen gleich **A = B**, wenn gilt:

$$a_{ik} = b_{ik} \quad \text{für alle } i,k \ (i = 1, 2 \ldots m;\ k = 1, 2 \ldots n)$$

Gleiche Matrizen stimmen in ihrem Typ und in sämtlichen einander entsprechenden Elementen überein.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$$A = B \neq C$$

Die Matrizen A und B sind von derselben Dimension, wenn sowohl die Anzahl der Zeilen bei A und B als auch die Anzahl der Spalten bei A und B gleich sind. Zwei Matrizen derselben Dimension sind genau dann **gleich**, wenn alle entsprechenden Elemente in jeder Zeile und Spalte gleich sind.

Matrizenrechnung: Addition

Addition und Subtraktion von Matrizen sind komponentenweise definiert:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Komponentenweises Addieren - Voraussetzung: die Strukturen (Anzahl der Zeilen und Anzahl der Spalten) müssen bei beiden Matrizen identisch sein.

Zwei Matrizen derselben Dimension werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die entsprechenden Elemente in jeder Zeile und jeder Spalte einzeln addiert bzw. subtrahiert.

Matrizenrechnung: Multiplikation mit einem Skalar

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar ist komponentenweise definiert:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \cdots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \Re$$

Eine Matrix wird mit einem Skalar multipliziert, indem man jedes einzelne Element der Matrix mit dem Skalar multipliziert.

Rechenregeln der Matrizenrechnung

Für die Rechnung mit Matrizen gelten die bekannten Gesetze:

Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz),
Distributivgesetz (Verteilungsgesetz),
Assoziativgesetz (Verknüpfungsgesetz).

Es seihen $A, B \in \Re^{m \times n}$ und $\lambda, \mu \in \Re$. Dann gelten:

$$A + B = B + A$$

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$$

$$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$$

Beispielaufgaben

1. Gegeben seihen die beiden Matrizen A und B. Wie lautet jeweils die Summe C = A + B und die Differenz D = A - B ?
   Bilden Sie jeweils auch die transponierten Matrizen C^T und D^T.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 8 \\ 6 & 6 & 9 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

d) Multiplizieren Sie die Matrizen C, D, C^T und D^T jeweils mit λ_1=-2 und λ_2= 3.

Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München 2010

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf