

Physik für Infotronik (9)

Gerald Kupris

08.11.2012

Der Impuls

Wiederholung: Energieerhaltungssatz

Der Energieerhaltungssatz sagt aus, dass die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems sich nicht mit der Zeit ändert. Zwar kann Energie zwischen verschiedenen Energieformen umgewandelt werden, beispielsweise von Bewegungsenergie in Wärme. Es ist jedoch nicht möglich, innerhalb eines abgeschlossenen Systems Energie zu erzeugen oder zu vernichten: Die Energie ist eine Erhaltungsgröße.

Die Gesamtenergie in einem abgeschlossenen System bleibt konstant.

Unter einem abgeschlossenen System versteht man ein System ohne Energie-, Informations- oder Stoffaustausch und ohne Wechselwirkung mit der Umgebung.

Allgemeiner Energieerhaltungssatz:

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} + E_{wärm} + E_{chem} + \ldots.. = \text{const.}$$

Energieerhaltungssatz der klassischen Mechanik:

$$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = T + V = \text{const.}$$

Wiederholung: Impuls

Man kann sich den Impuls als ein Maß für die Schwierigkeit vorstellen, ein Teilchen, das eine bestimmte Masse und eine bestimmte Geschwindigkeit hat, innerhalb einer bestimmten Zeit zum Stillstand zu bringen.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

1 N · s = 1 kg · m · s^{-1}

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d\left(m \cdot \vec{v}\right)}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

Die auf ein Teilchen einwirkende Kraft ist gleich der zeitlichen Änderung des Teilchen-impulses.

Satz der Erhaltung des Impulses: Wenn die Summe aller äußeren Kräfte auf ein System null ist, dann bleibt der Gesamtimpuls des Systems konstant.

Dieser Satz ist weiter anwendbar als der Satz von der Erhaltung der mechanischen Energie, weil die inneren Kräfte, die von einem Teilchen des Systems auf ein anderes ausgeübt werden, oft nicht konservativ sind.

Beispiel: Auffangen im Weltall

Die Astronautin Lucy mit einer Masse von 60 kg unternimmt einen Weltraum-spaziergang, um einen Kommunikationssatteliten zu reparieren. Plötzlich will sie etwas in ihrem Handbuch nachschlagen. Sie haben das Buch zufällig dabei und werfen ihr das Buch mit einer Geschwindigkeit von 4,0 m/s relativ zum Raumschiff zu. Bevor sie das 3 kg schwere Buch auffängt, ist Lucy bezüglich des Raumschiffs in Ruhe.

Berechnen Sie:

a) die Geschwindigkeit von Lucy, unmittelbar nachdem sie das Buch aufgefangen hat,

b) die kinetische Energie des Systems Buch - Astronautin am Anfang und am Ende des Vorgangs,

c) den Kraftstoß, den das Buch auf Lucy ausgeübt hat.

Beispiel: Auffangen im Weltall

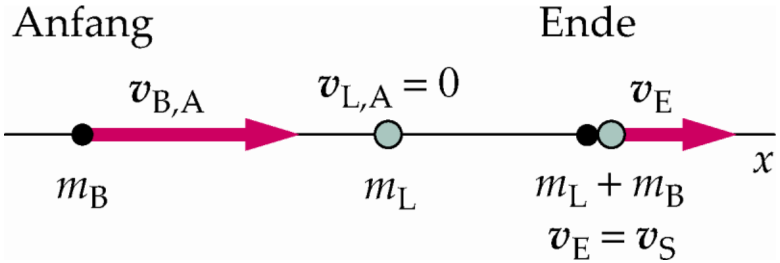
Teilaufgabe a):

Anwenden des Impulserhaltungssatzes:

$$m_B\, v_{B,A} + m_L\, v_{LA} = (m_B + m_L)v_E$$

$$v_E = \frac{m_B\, v_{B,A} + m_L\, v_{LA}}{m_B + m_L}$$

$$= \frac{3.0\text{ kg } 4.0\text{ m/s} + 60\text{ kg } 0\text{ m/s}}{3.0\text{ kg} + 60\text{ kg}} = 0.19\text{ m/s}$$



Beispiel: Auffangen im Weltall

Teilaufgabe b):

1. Da sich die Astronautin anfangs in Ruhe befindet, ist die kinetische Anfangsenergie des Systems die kinetische Anfangsenergie des Buches:

   $E_{kin,B,A} = ½\, m_B v^2_{BA} = ½\, 3{,}0\text{ kg }(4\text{ m/s})^2 = 24\text{ J}$

2. Die kinetische Endenergie des Systems ist die kinetische Energie von Buch und Astronautin, die sich zusammen mit der Geschwindigkeit v_E bewegen:

   $E_{kin,E} = ½\,(m_B + m_L)\, v^2_E = ½\, 63\text{ kg }(0{,}19\text{ m/s})^2 = 1{,}1\text{ J}$

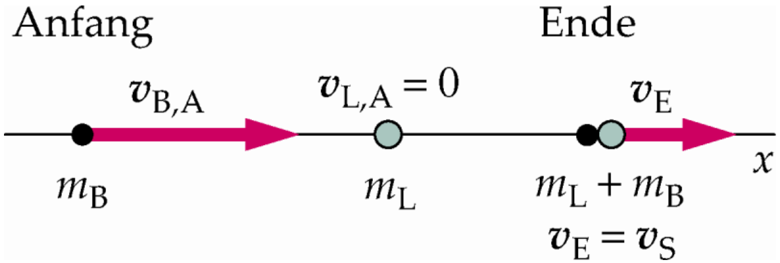
Der größte Teil der kinetischen Energie in diesem Stoß geht durch Umwandlung in Wärme verloren!

Beispiel: Auffangen im Weltall

Teilaufgabe c):

Gleichsetzen des Kraftstoßes auf die Astronautin mit ihrer Impulsänderung:

$$\begin{aligned} \Delta p_L &= m_L \, \Delta v_L \\ &= 60 \text{ kg } (0{,}19 \text{ m/s} - 0) \\ &= 11{,}4 \text{ kg·m/s} = 11{,}4 \text{ N·s} \end{aligned}$$



Erhaltung des Impulses vs. Erhaltung der Energie

Wann benutzt man den Satz der Erhaltung der (mechanischen) Energie und wann benutzt man den Satz der Erhaltung des Impulses?

Der Satz der Erhaltung des Impulses gilt immer und unabhängig von der Energie.

Der Satz der Erhaltung der mechanischen Energie gilt nur in einem konservativen System (d. h. die die Gesamtarbeit an einem Teilchen auf einer beliebigen geschlossenen Bahn ist gleich null).

Bei den meisten Stößen wird mechanische Energie (zumindest teilweise) in eine andere Energieform umgewandelt, das System ist dann **nicht** konservativ.

Wenn die kinetische Gesamtenergie nach dem Stoß dieselbe ist wie davor, dann spricht man von einem **elastischen** Stoß, andernfalls von einem **inelastischen** Stoß.

Ein Extremfall ist der **vollständig inelastische Stoß**, in dem die gesamte kinetische Energie in thermische oder innere Energie des Systems umgewandelt wird und die beiden Körper eine gemeinsame Geschwindigkeit haben (meist, weil sie aneinander haften).

Elastischer oder inelastischer Stoß?

Elastischer und inelastischer Stoß

(vollständig) elastischer Stoß

Die kinetische Gesamtenergie ist nach dem Stoß dieselbe wie davor.

Es wird keine Energie in Wärme umgewandelt.

Es gelten der Satz der Erhaltung des Impulses und der Satz der Erhaltung der mechanischen Energie.

Beispiele:
Kollision von zwei Stahlkugeln,
Kollision von Teilchen

(vollständig) inelastischer Stoß

Die kinetische Gesamtenergie ist nach dem Stoß anders wie davor.

Es wird Energie in Wärme umgewandelt.

Es gilt der Satz der Erhaltung des Impulses. Meist haften die Stoßpartner aneinander.

Beispiele:
Kollision von zwei Knetekugeln,
Ankoppeln von Eisenbahnwagen

Vollständig inelastischer Stoß

In einem vollständig inelastischen Stoß haben die Stoßpartner nach dem Stoß die selbe Geschwindigkeit, oft weil sie aneinander haften. Beispielsweise ist ist der Stoß zwischen einem sich langsam bewegenden Eisenbahnwaggon und einem anfangs ruhenden zweiten Waggon vollständig inelastisch, wenn die beiden Waggons automatisch aneinander gekoppelt werden. Bei einem solchen vollständig inelastischen Stoß sind die Endgeschwindigkeiten der Stoßpartner gleich.

$$v_{1,E} = v_{2,E} = v_S$$

$$(m_1 + m_2) \cdot v_S = m_1 \cdot v_{1,E} + m_2 \cdot v_{2,E}$$

$$v_S = \frac{m_1 \cdot v_{1,E} + m_2 \cdot v_{2,E}}{m_1 + m_2}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{p^2}{2 \cdot m}$$

$$E_{kin,A} = \frac{p^2}{2 \cdot m_1}$$

$$E_{kin,E} = \frac{p^2}{2 \cdot (m_1 + m_2)}$$

Elastischer Stoß

Bei einem elastischen Stoß ist die kinetische Gesamtenergie nach dem Stoß die selbe wie davor. Es gelten der Satz der Erhaltung des Impulses und der Satz der Erhaltung der kinetischen Energie.

$$(m_1 \cdot \vec{v_1}) + (m_2 \cdot \vec{v_2}) = (m_1 \cdot \vec{v_1'}) + (m_2 \cdot \vec{v_2'})$$
$$(m_1 \cdot \vec{v_1}) - (m_1 \cdot \vec{v_1'}) = (m_2 \cdot \vec{v_2'}) - (m_2 \cdot \vec{v_2})$$
$$m_1 \cdot (\vec{v_1} - \vec{v_1'}) = m_2 \cdot (\vec{v_2'} - \vec{v_2})$$

$$\frac{m_1 \cdot |v_1|^2}{2} + \frac{m_2 \cdot |v_2|^2}{2} = \frac{m_1 \cdot |v_1'|^2}{2} + \frac{m_2 \cdot |v_2'|^2}{2}$$
$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} - \frac{m_1 \cdot v_1'^2}{2} = \frac{m_2 \cdot v_2'^2}{2} - \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2}$$
$$\frac{m_1}{2} \cdot (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') = \frac{m_2}{2} \cdot (v_2' - v_2)(v_2' + v_2)$$

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2) \cdot v_1 + 2\ m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1) \cdot v_2 + 2\ m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}$$

Sonderfälle des elastischen Stoßes

Stoß von zwei Körpern gleicher Massen: $m_1 = m_2$

$$v_1' = v_2$$
$$v_2' = v_1$$

Die Geschwindigkeit wird „getauscht“.
Beispiel: Billiardkugeln

Ein leichter Körper stößt auf einen ruhenden Körper wesentlich größerer Masse:
$m_1 << m_2$; $v_2 = 0$

$$v_1' = -v_1$$
$$v_2' = 0$$

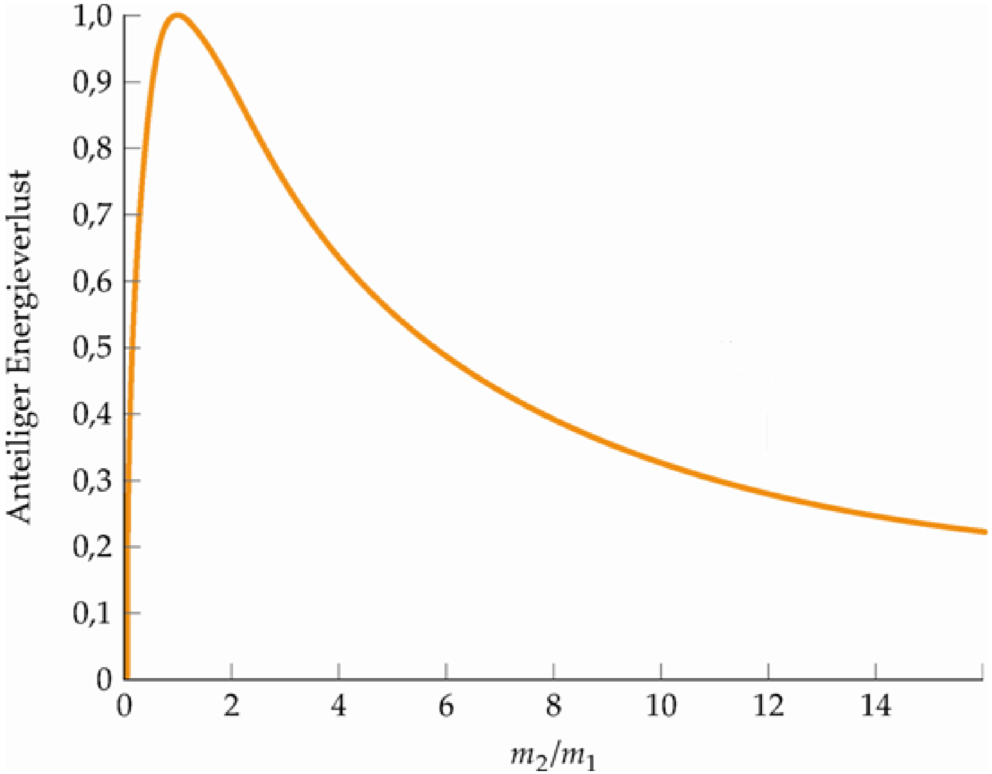
Der schwere Körper bleibt in Ruhe, der leichte Partner wird "reflektiert", d.h. er behält seine kinetische Energie bei, bewegt sich jedoch in umgekehrter Richtung.
Beispiel: Tennisball an der Wand, Stoß von Gasatomen mit schwerer Behälterwand

Abhängigkeit des Energieübertrags vom Massenverhältnis

Hat der Körper 2 eine wesentlich kleinere Masse als Körper 1 (m_2/m_1 geht gegen Null), so prallt Körper 2 elastisch zurück und behält nahezu seine gesamte kinetische Energie.

Haben die beiden Körper die gleiche Masse ($m_1/m_2 = 1$), so gibt Körper 2 seine gesamte kinetische Energie an den Körper 1 ab.

Ist das Massenverhältnis größer als 1, so behält der Körper 2 mit zunehmendem m_2/m_1 immer mehr kinetische Energie.



Die Elastizitätszahl

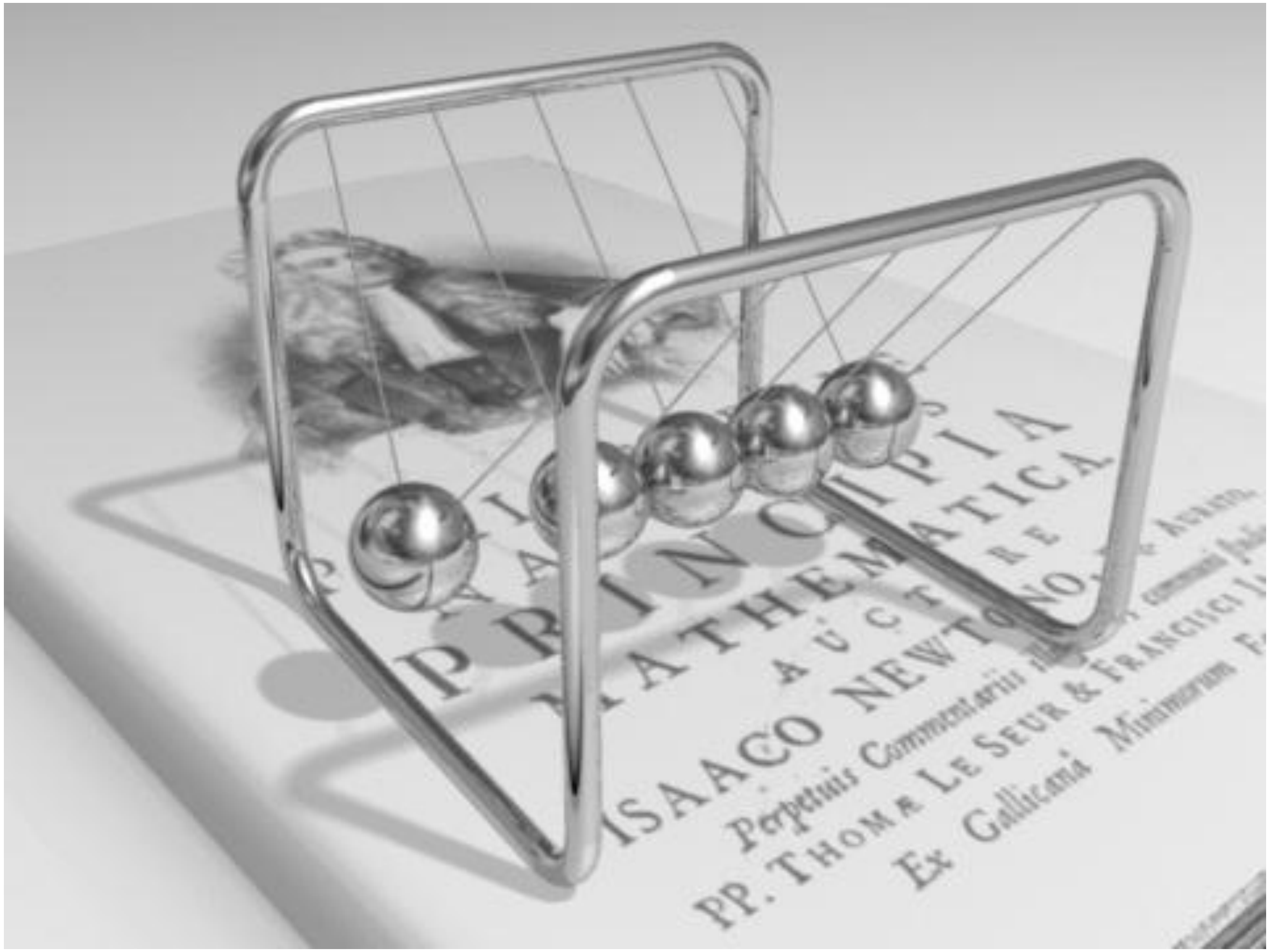
Die meisten realen Stöße sind weder rein elastische Stöße (bei denen sich die Relativgeschwindigkeiten umkehren) noch vollständig inelastische Stöße (bei denen die Relativgeschwindigkeit nach dem Stoß null ist), sondern liegen irgendwo dazwischen.

Um ein Maß für die Elastizität eines Stoßes zu haben, definiert man eine Hilfsgröße. Sie heißt Elastizitätszahl oder Elastizitätskoeffizient e und ist definiert als das Verhältnis der Relativgeschwindigkeiten nach und vor dem Stoß.

$$e = \frac{v_{rel,nach}}{v_{rel,vor}} = \frac{v_{1,E} - v_{2,E}}{v_{2,A} - v_{1,A}}$$

Für einen elastischen Stoß ist e = 1, für einen vollständig inelastischen Stoß ist e = 0.

Kugelstoßpendel



Kugelstoßpendel

Ein Kugelstoßpendel ist eine Anordnung von hintereinander beidseitig aufgehängten Kugeln gleicher Masse und Pendellänge. Wenn man die am weitesten rechts liegende Kugel anhebt und gegen die daneben prallen lässt, wird die am weitesten links liegende Kugel abgestoßen.

Die am weitesten links liegende, ruhende Kugel nimmt den Impuls der aufprallenden Kugel auf und gibt ihn an die rechts daneben liegende Kugel ab, jene dann an die rechts daneben und so weiter. Die am weitesten rechts liegende Kugel kann allerdings keinen Impuls mehr weitergeben und wird abgestoßen.

Dabei handelt es sich um **elastische** Stöße, bei denen der **Impuls** und die **kinetische Energie** erhalten bleiben.

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = const. \qquad E_{kin} = \frac{m}{2} v^2 = const.$$

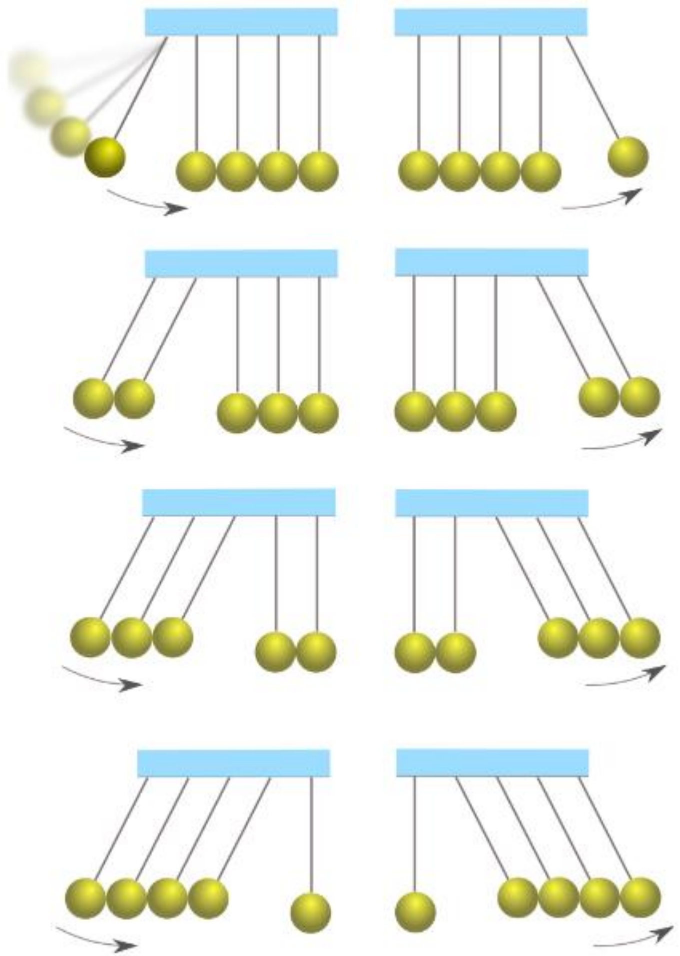
Besonderheit des Kugelstoßpendels

Wenn nur eine Kugel anstößt, dann fliegt auch nur eine Kugel wieder weg.

Wenn zwei Kugeln anstoßen, dann fliegen auch zwei Kugeln wieder weg.

Wenn drei Kugeln anstoßen, dann fliegen auch drei Kugeln wieder weg.

Wenn vier Kugeln anstoßen, dann fliegen auch vier Kugeln wieder weg.



Besonderheit des Kugelstoßpendels

Wenn zwei Kugeln hineingestoßen werden:
Warum fliegt dann nicht nur eine Kugel (mit doppelter Geschwindigkeit) heraus?

Antwort: Satz der Erhaltung der Energie (elastischer Stoß)

Beim elastischen Stoß gelten immer der Satz der Erhaltung der Impulses **und** der Satz der Erhaltung der Energie.

Kann man alle möglichen Kombinationen von ein- und ausfliegenden Kugeln so berechnen?

Nein (siehe Beispiel).
Es müssen noch andere Randbedingungen formuliert werden

Erklärung für das Verhalten des Kugelstoßpendels

Man könnte sich dazu die Kugeln als wirklich getrennte Objekte vorstellen, die Energie und Impuls nur durch einzelne Stöße übertragen.

Wenn dann zwei getrennte Kugeln anfliegen, dann wird zuerst die vordere mit der ersten ruhenden zusammen stoßen und dabei ganz kurz zum Stillstand kommen.

Dieser Stoß wird von der ersten ruhenden weiter an die zweite gegeben, so dass die erste wieder in Ruhe ist und neben der ersten anfliegenden hängt. Der erste Stoß breitet sich weiter durch die Reihe aus und gleichzeitig stößt auch schon die zweite anfliegende Kugel auf die jetzt in Ruhe befindliche erste anfliegende Kugel. Dieser Stoß wird sich auch durch die Reihe weiter fortpflanzen, aber immer hinter dem ersten bleiben.

Wenn der erste Stoß die letzte Kugel erreicht, fliegt die einfach wieder weg, weil sie durch keine weiter aufgehalten wird. Der zweite Stoß erreicht dann die vorletzte Kugel, die aber auch keine weitere mehr hat, an die sie den Stoß abgeben könnte. Also fliegen zwei Kugeln raus.

Stöße in zwei und drei Dimensionen

Für eindimensionale Stöße lassen sich die Richtungen der Anfangs- und Endgeschwind-digkeit durch ein Plus- oder Minuszeichen der Geschwindigkeitskomponenten vor und nach dem Stoß angeben.

Bei der Berechnung von Stößen in zwei oder drei Raumrichtungen muss man den Im-pulserhaltungssatz in vektorieller Form anwenden. Der Impuls bleibt in jeder Raum-richtung (x-, y- und z-Richtung) erhalten.

Der Gesamtimpuls ist die Summe der Anfangsimpulsvektoren aller an dem Stoß be-teiligten Körper. Da bei einem vollständig inelastischen Stoß die Stoßpartner nach dem Stoß dieselbe Geschwindigkeit haben und der Gesamtimpuls erhalten bleibt, gilt:

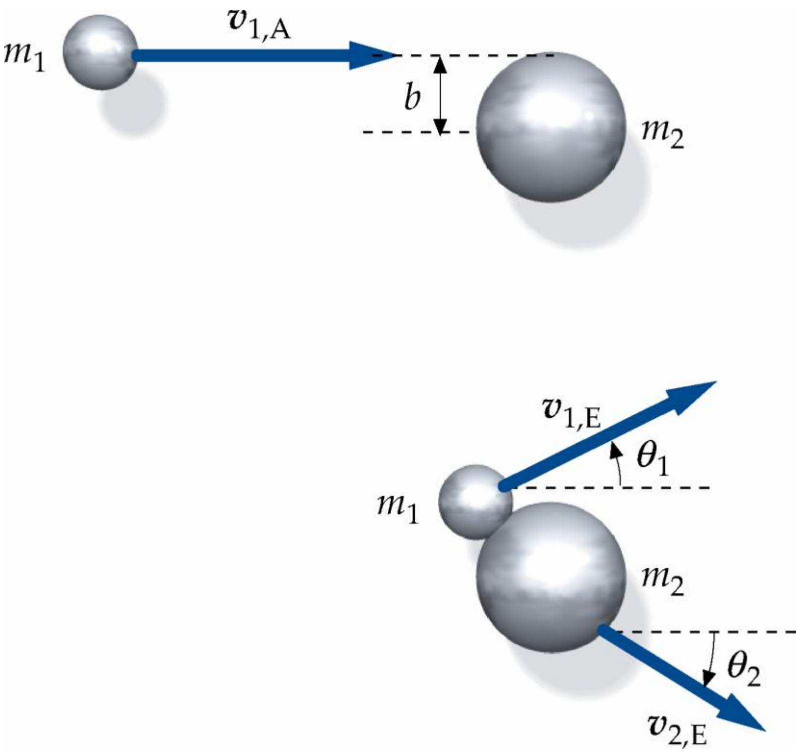
$$m_1 \cdot \vec{v}_{1,A} + m_2 \cdot \vec{v}_{2,A} = (m_1 + m_2)\vec{v}_E$$

Aus dieser Beziehung kann man ablesen, dass die drei Geschwindigkeitsvektoren in einer Ebene liegen müssen, nämlich in der Ebene, in der auch der Stoß stattfindet.

Elastischer Stoß

Elastische Stöße in zwei oder drei Raumrichtungen sind komplizierter als die bislang behandelten Fälle. So muss man unterscheiden, ob die Stoßpartner zentral oder nicht zentral aufeinandertreffen.

Bei einem **zentralen Stoß** liegt die Stoß-normale auf der Verbindungsgeraden zwi-schen den Massemittelpunkten der Körper.

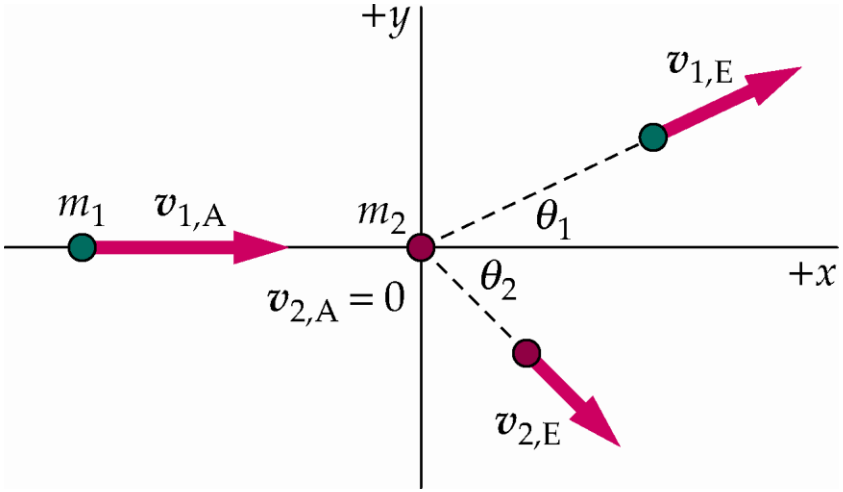


Beim **nichtzentralen Stoß** sind die Masse-mittelpunkte gegeneinander versetzt.
Der Abstand ***b*** wird als Stoßparameter bezeichnet.

Die Ablenkwinkel werden oft experimentell bestimmt und geben Auskunft über den Charakter der Wechselwirkung zwischen den beiden Körpern.

Beispiel: nichtzentraler Stoß

Ein Körper der Masse m_1 mit der Anfangsgeschwindigkeit von 20 m/s stößt nicht zentral auf einen ruhenden Körper der Masse m_2.



Durch den Stoß wird der erste Körper um 25° aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt und bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von 15 m/s weiter.

In welche Richtung bewegt sich der zweite Körper?

Aufgaben

1. Ein Güterwagen mit der Masse von 60 t rollt reibungsfrei einen Ablaufberg mit einem Höhenunterschied von 2 m herab und kuppelt automatisch einen stehenden Wagen (Masse 30 t) an.
   Mit welcher gemeinsamen Geschwindigkeit bewegen sich beide Wagen nach dem Ankuppeln?

2. Aus welcher Höhe fällt ein Körper, der beim Auftreffen am Boden einen Impuls von 100 kg m/s und die kinetische Energie 500 J hat und wie groß ist die Masse dieses Körpers?

3. Ein Eisenbahnwaggon (Masse m_1 = 24 t) rollt mit einer Geschwindigkeit v_1 = 3 m/s auf geraden, ebenen Schienen. Er stößt elastisch mit einem zweiten Waggon (Masse m_2 = 20 t) zusammen, der sich mit der Geschwindigkeit v_2 = 1,8 m/s in die gleiche Richtung bewegt.
   a) Wie groß sind die Endgeschwindigkeiten beider Waggons nach dem Stoß?
   b) Wie groß sind die Endgeschwindigkeiten beider Waggons, wenn der zweite Waggon mit der angegebenen Geschwindigkeit dem ersten Waggon vor dem Stoß entgegenfährt?

Lösungen der Aufgaben

1. 4,176 m/s

2. a) 5,10m
   b) 10 kg

3. a) 6,872 km/h; 11,192 km/h
   b) -4,91 km/h; 12,369 km/h

Literatur und Quellen

Paul A. Tipler, Gene Mosca: Physik für Wissenschaftler und Ingenieure, Spektrum Akademischer Verlag, August 2009

http://de.wikipedia.org/

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences
HDU

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf