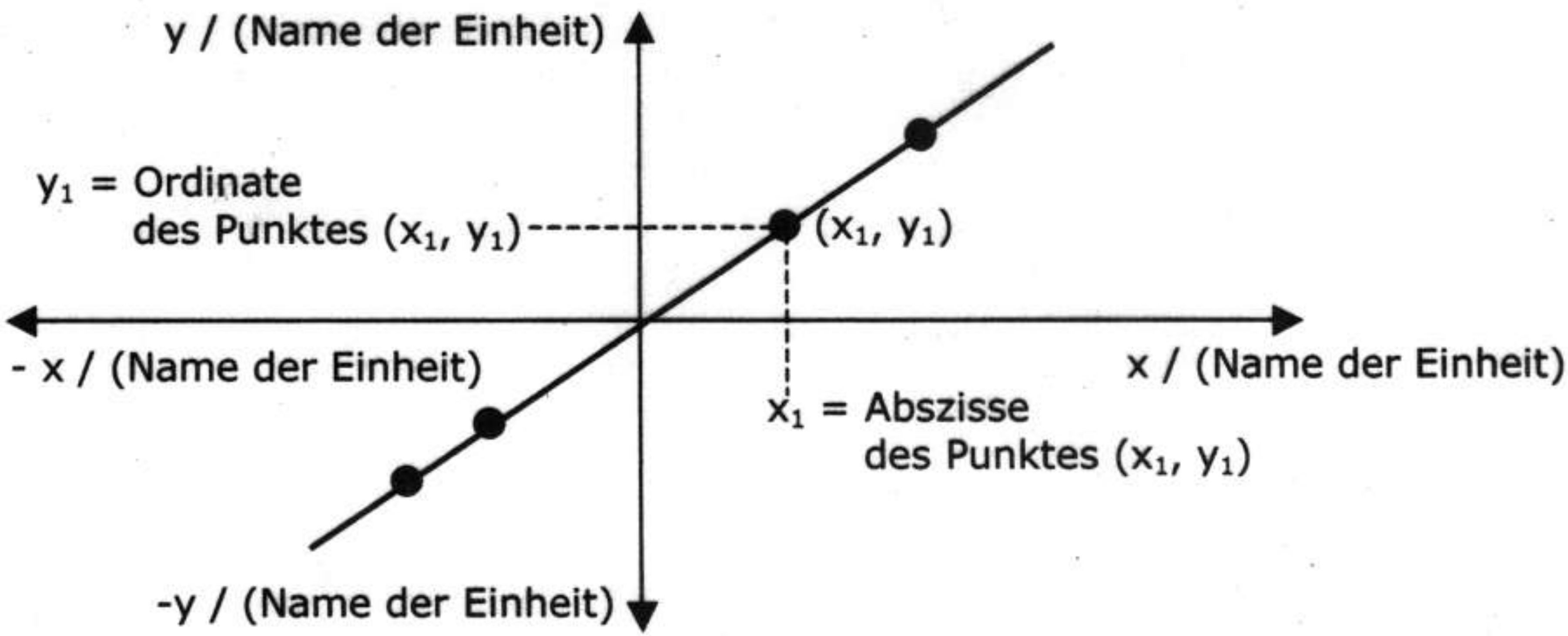
Mathematik für Infotronik (17)

Gerald Kupris

17.11.2010

Grafische Beschreibung einer Funktion

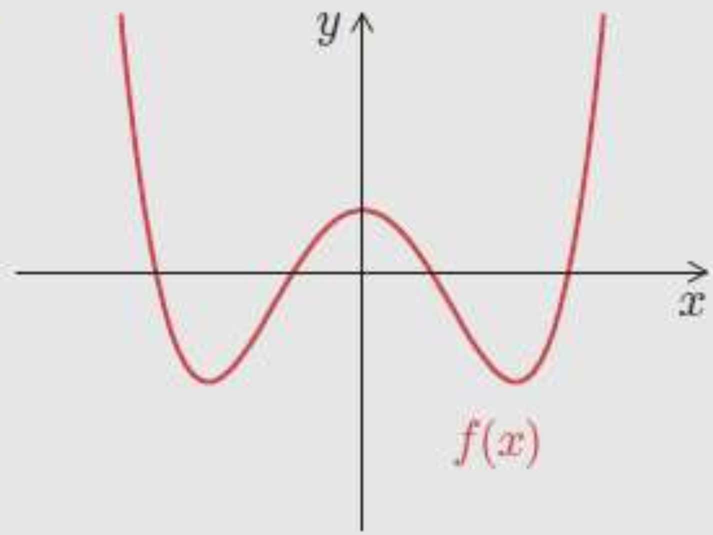


Gerade Funktion

Man bezeichnet f als eine **gerade Funktion** auf dem Intervall I, falls für alle $x \in I$

$$f(-x) = f(x).$$

Das Schaubild einer geraden Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.

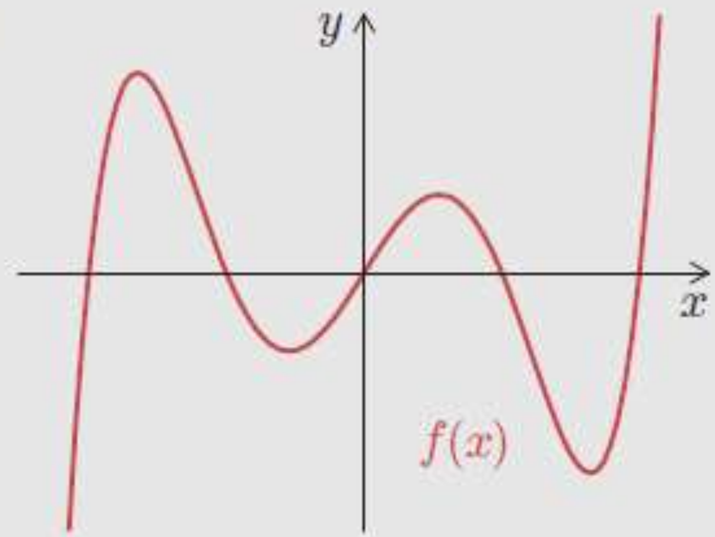


Ungerade Funktion

Man bezeichnet f als eine **ungerade Funktion** auf dem Intervall I, falls für alle $x \in I$

$$f(-x) = -f(x).$$

Das Schaubild einer ungeraden Funktion ist symmetrisch zum Ursprung.



Gerade und ungerade Funktionen

Gerade und ungerade Funktionen haben folgende Eigenschaften:

- Die Summe und die Differenz zweier gerader Funktionen ergeben eine gerade Funktion und die Summe und die Differenz zweier ungerader Funktionen ergeben eine ungerade Funktion.
- Das Produkt zweier gerader oder zweier ungerader Funktionen ergibt eine gerade Funktion und das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ergibt eine ungerade Funktion.
- Der Kehrwert einer geraden Funktion ist eine gerade Funktion und der Kehrwert einer ungeraden Funktion ist eine ungerade Funktion.

Eine Funktion f lässt sich als Summe einer geraden Funktion f_g und einer ungeraden Funktion f_u darstellen

$$f(x) = f_g(x) + f_u(x).$$

Dabei sind die geraden und ungeraden Anteile definiert durch

$$f_g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ und } f_u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Achsensymmetrische und punktsymmetrische Funktionen

Man bezeichnet f als eine **achsensymmetrische Funktion** zur Achse $x = x_0$ auf dem Intervall I, falls für alle $x \in I$

$$f(x_0 - x) = f(x_0 + x).$$

Das Schaubild ist symmetrisch zur Achse $x = x_0$.

Man bezeichnet f als eine **punktsymmetrische Funktion** zum Punkt $(x_0 \mid y_0)$ auf dem Intervall I, falls für alle $x \in I$

$$y_0 - f(x_0 - x) = f(x_0 + x) - y_0.$$

Das Schaubild ist symmetrisch zum Punkt $(x_0 \mid y_0)$.

Beispiele

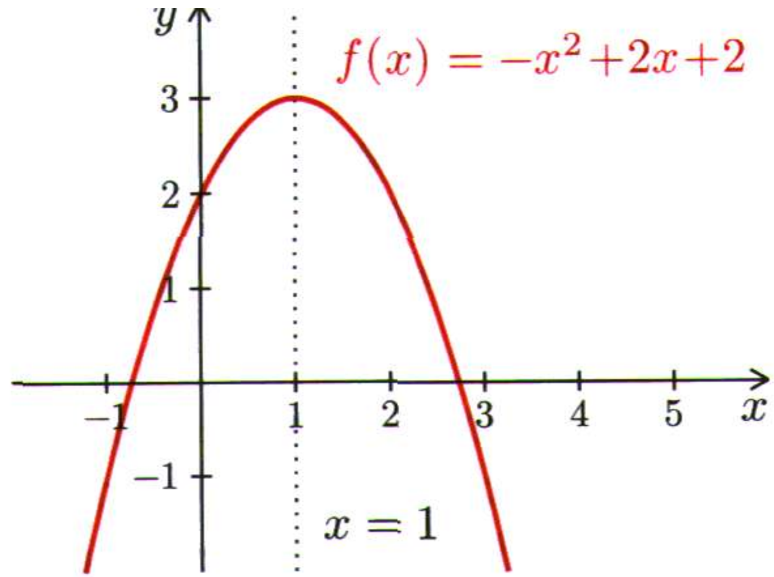
Beispiel: Achsensymmetrische Funktion

Die Funktion

$$f(x) = -x^2 + 2x + 2$$

ist achsensymmetrisch zur Gerade $x = 1$, denn

$$\begin{aligned} f(1-x) &= -(1-x)^2 + 2(1-x) + 2 \\ &= 3 - x^2 \\ f(1+x) &= -(1+x)^2 + 2(1+x) + 2 \\ &= 3 - x^2 \end{aligned}$$



Beispiel: Punktsymmetrische Funktion

Die Funktion

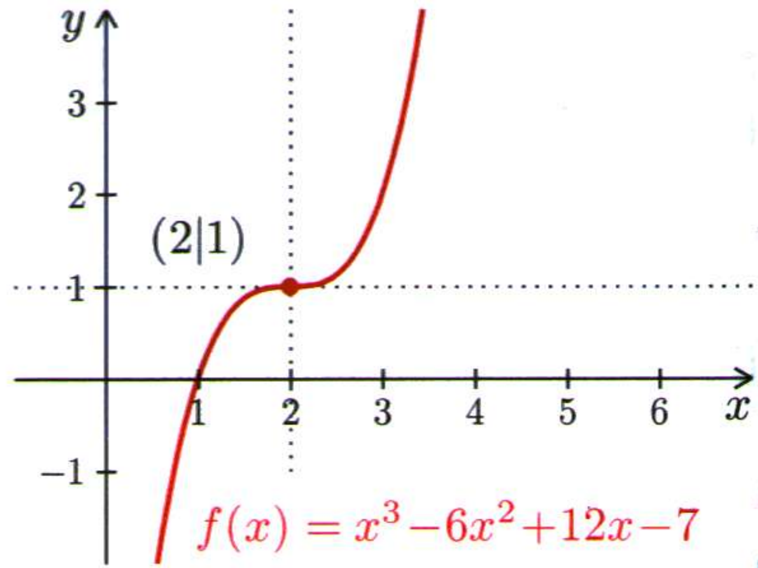
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

ist punktsymmetrisch zum Punkt mit den Koordinaten $(2\,|\,1)$, denn $1 - f(2-x)$ ergibt

$$1 - (2-x)^3 + 6(2-x)^2 - 12(2-x) + 7 = x^3$$

und $f(2+x) - 1$ ergibt

$$(2+x)^3 - 6(2+x)^2 + 12(2+x) - 7 - 1 = x^3.$$



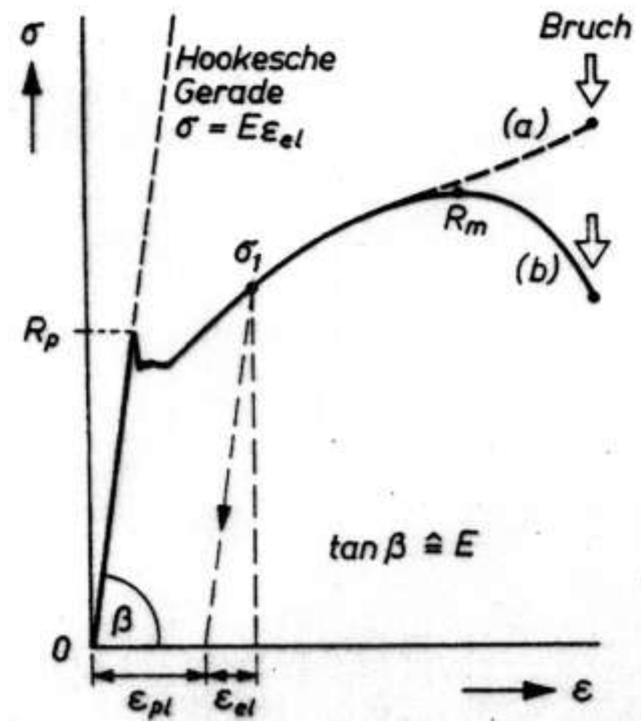
Abschnittsweise definierte Funktion

Eine Funktion, bei der der Definitionsbereich aus endlich vielen Teilintervallen besteht, auf denen jeweils eine separate Funktionsvorschrift gilt, nennt man eine **abschnittsweise definierte Funktion**. Die Grenzen der Teilintervalle nennt man **Nahtstellen**.

Bei abschnittsweise definierten Funktionen ist das Verhalten an den Nahtstellen von Interesse. An den Nahtstellen kann das Schaubild Knicke oder sogar Sprünge haben.

Beispiel

Beispiel: abschnittsweise definierte Funktion



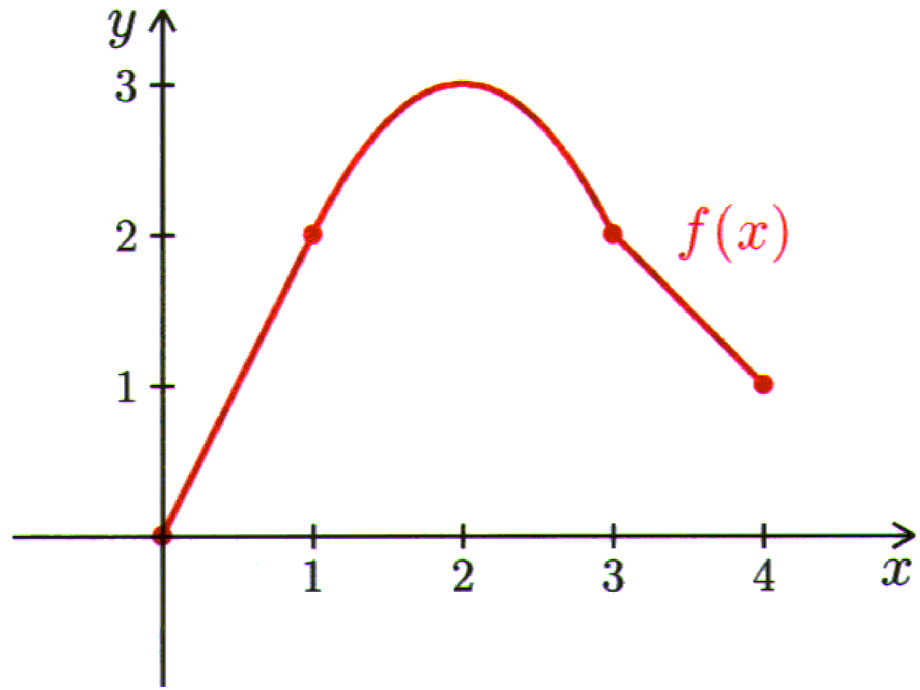
Dehnungs-Spannungs-Diagramm

Beispiel: abschnittsweise definierte Funktion

Die abschnittsweise definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für} \quad 0 \le x < 1 \\ 3 - (x-2)^2 & \text{für} \quad 1 \le x < 3 \\ 5 - x & \text{für} \quad 3 \le x \le 4 \end{cases}$$

besitzt den Definitionsbereich $D = [0,4]$. Sie besteht aus drei Abschnitten, die an den Nahtstellen $x = 1$ und $x = 3$ zusammengesetzt sind. An der Nahtstelle $x = 1$ besitzt das Schaubild keinen Sprung und keinen Knick. An der Nahtstelle $x = 3$ besitzt das Schaubild auch keinen Sprung, aber einen Knick.



Periodische Funktion

Eine Funktion f ist **periodisch** mit der **Periode** $p > 0$, wenn

$$f(x+p) = f(x)$$

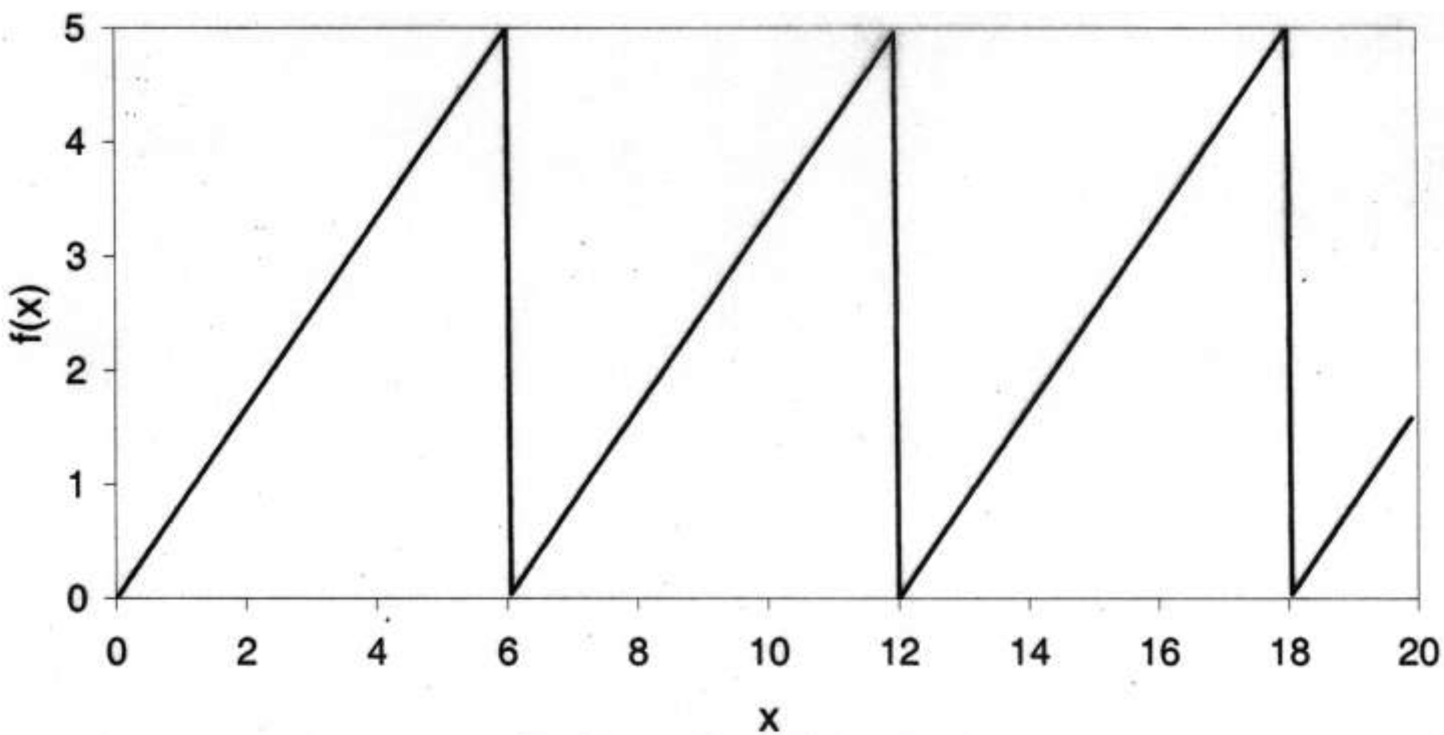
für alle reellen Zahlen x.

Falls p eine Periode der Funktion f ist, dann ist auch $k\,p$ für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ eine Periode von f. Charakterisierend für periodische Funktionen ist die kleinste positive Periode. Bei periodischen Funktionen wiederholt sich eine Art Funktionsprototyp im Abstand der kleinsten positiven Periode.

Bei einer zeitabhängigen Funktion mit Periode p bezeichnet man die Periode auch als **Schwingungsdauer** T und nennt $f = \frac{1}{T}$ die **Frequenz**.

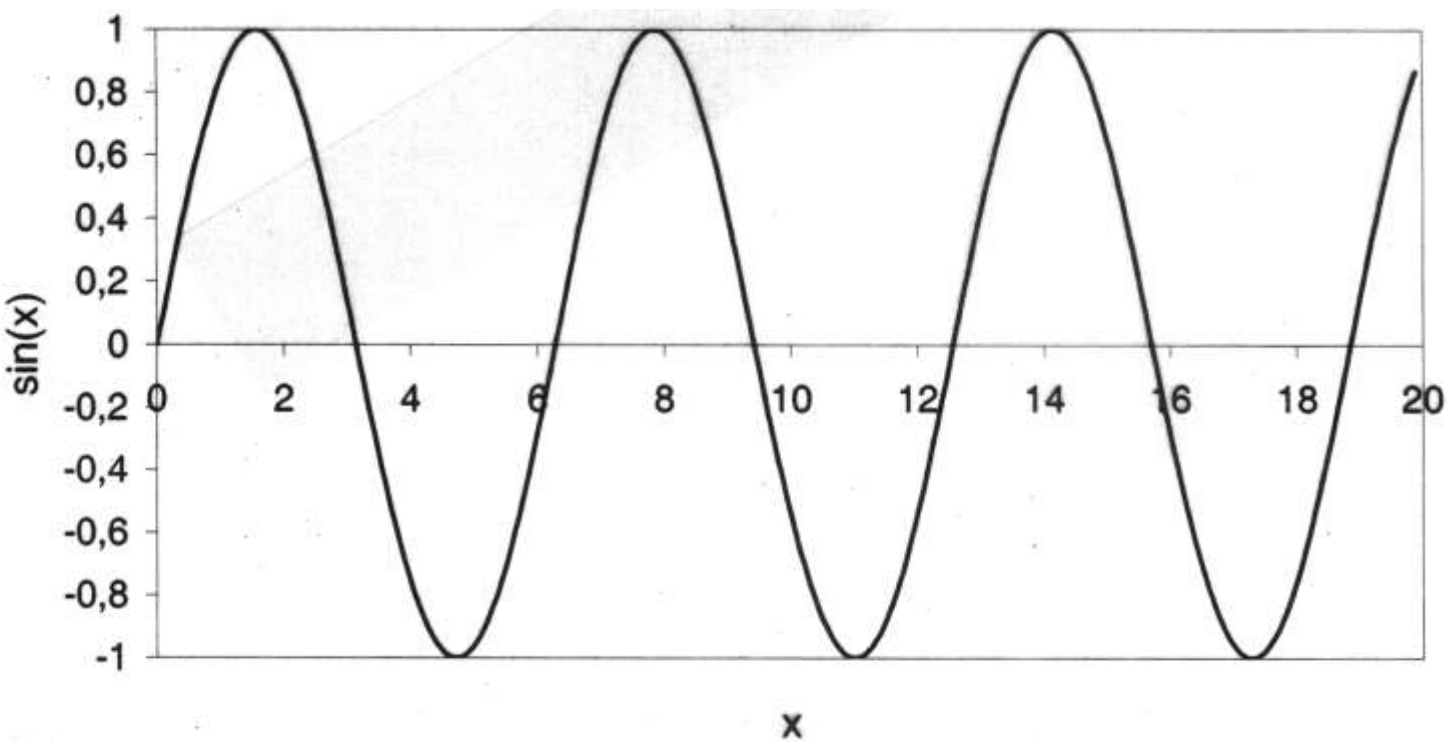
Beispiele

Beispiel: periodische Funktion



Kippfunktion

Beispiel: periodische Funktion



Sinusfunktion

Monotonie von Funktionen

Eine Funktion f ist auf dem Intervall I

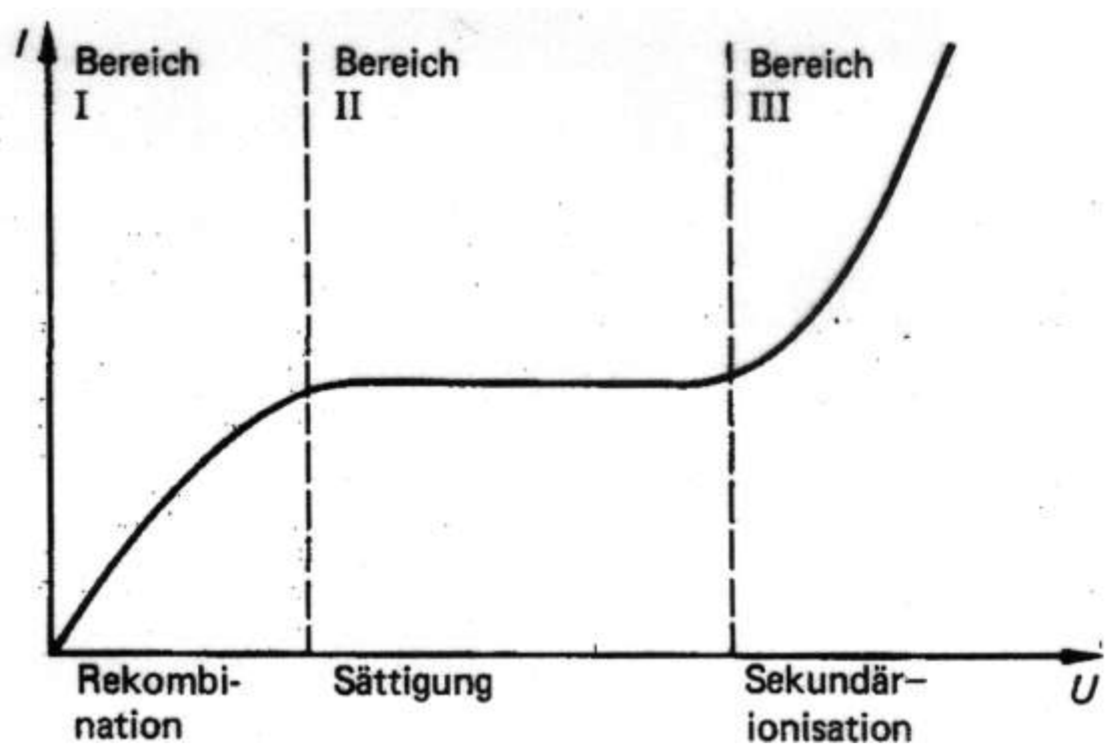
- **monoton fallend**, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- **streng monoton fallend**, falls $f(x_1) > f(x_2)$,
- **monoton wachsend**, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- **streng monoton wachsend**, falls $f(x_1) < f(x_2)$,

für alle Zahlen x_1 und x_2 aus dem Intervall I mit der Eigenschaft $x_1 < x_2$.

Beispiele

Eine Funktion, die auf dem gesamten Definitionsbereich D entweder streng monoton wachsend oder auf dem gesamten Definitionsbereich D streng monoton fallend ist, ist auf dem Definitionsbereich D umkehrbar.

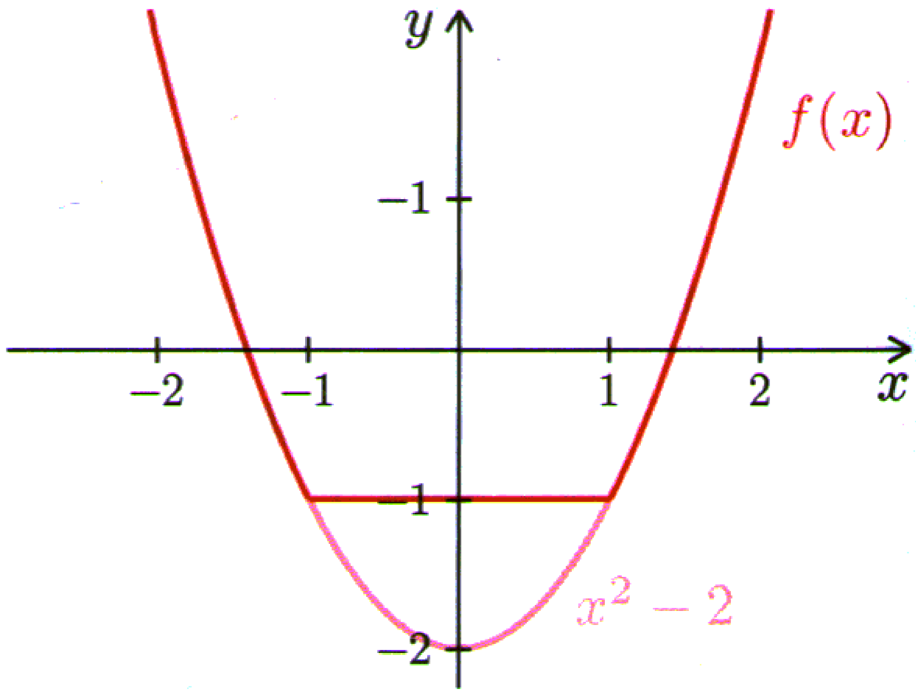
Beispiel: Monotonie einer Funktion



Gasentladungscharakteristik

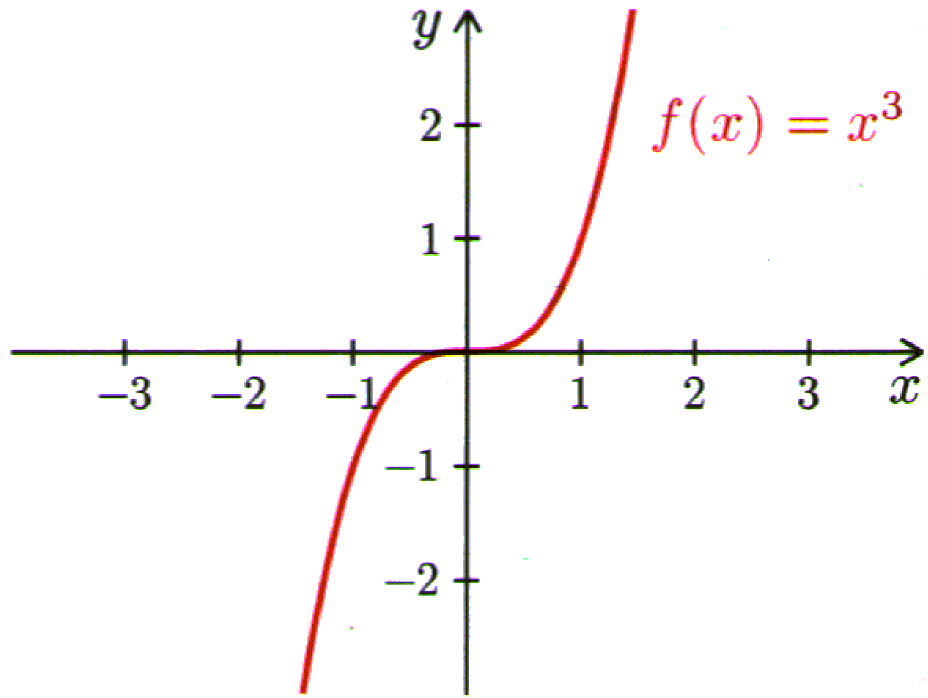
Beispiel: Monotonie einer Funktion

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-1, 1] \\ x^2 - 2 & \text{sonst} \end{cases}$$



monoton wachsend

$$f(x) = x^3$$



streng monoton wachsend

Beschränktheit von Funktionen

Eine Funktion f ist auf dem Intervall I

- **nach unten beschränkt**, falls die Funktionswerte aller Zahlen x aus dem Intervall I oberhalb einer unteren Schranke liegen,
- **nach oben beschränkt**, falls die Funktionswerte aller Zahlen x aus dem Intervall I unterhalb einer oberen Schranke liegen.

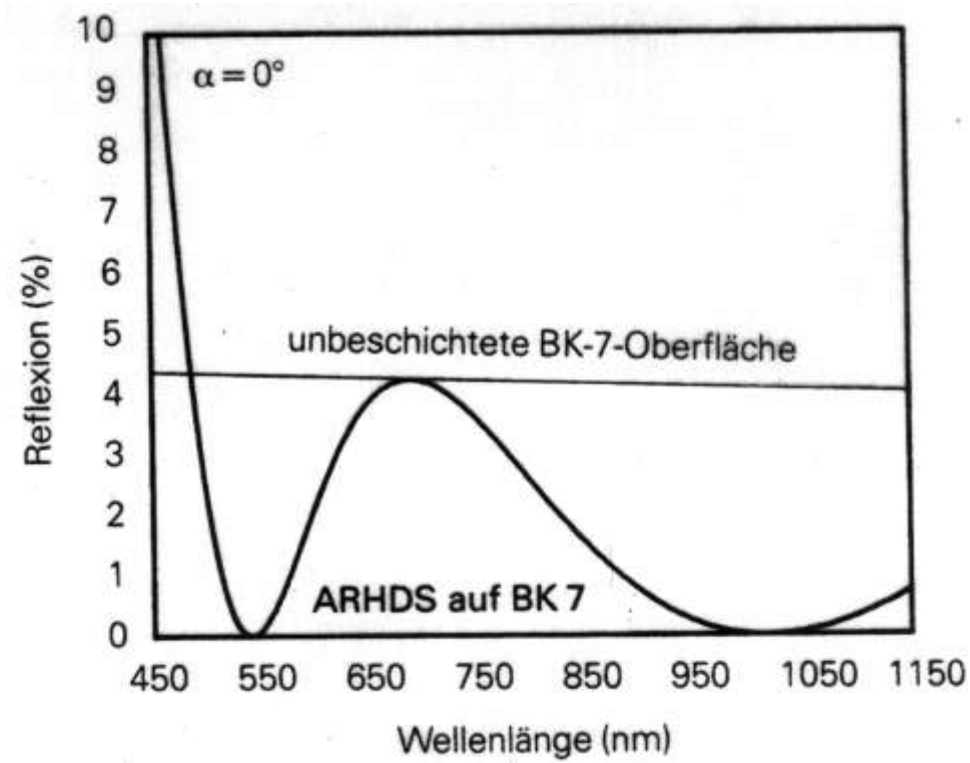
Eine Funktion, die nach unten und nach oben beschränkt ist, heißt **beschränkt**.

Die kleinste obere Schranke heißt obere Grenze oder **Supremum** der Funktion.

Die größte untere Schranke heißt untere Grenze oder **Infinum** der Funktion.

Beispiele

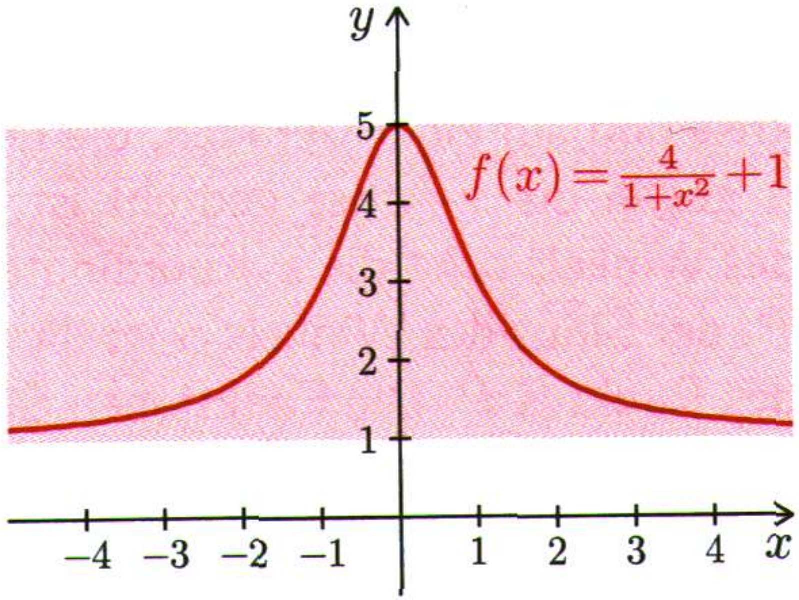
Beispiel: Beschränktheit einer Funktion



Reflexion einer Antireflexschicht als Funktion der Wellenlänge

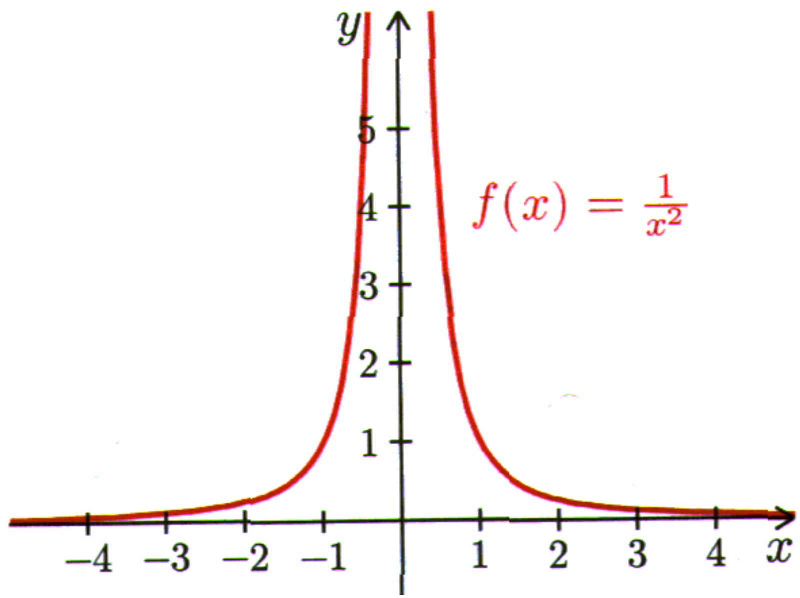
Beispiel: Beschränktheit einer Funktion

$$f(x) = \frac{4}{1+x^2} + 1$$



beschränkte Funktion

$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$



unbeschränkte Funktion

Aufgabe

Bestimmen Sie die Umkehrfunktionen für die folgenden Funktionen. Überprüfen Sie das Ergebnis anhand des Schaubildes und anhand von Beispielwerten.

$$y = f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$y = f(x) = x^2$$

$$y = f(x) = \frac{1}{2x+1} - 1$$

$$y = f(x) = 1 - x^2$$

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

http://de.wikipedia.org

http://www.komplexe-zahlen.de

http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_2/basics/b2_1_5.html

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/imaginaer1.htm