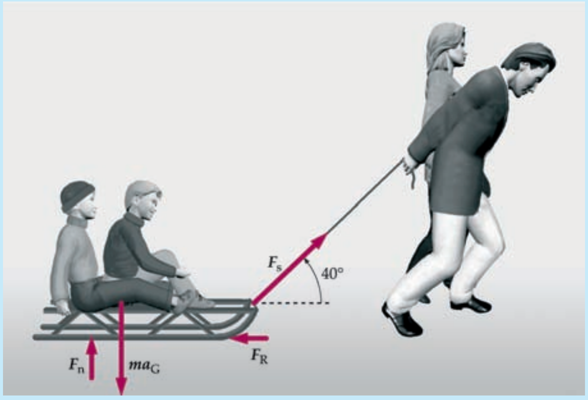
Verständnisfrage 5.1

Das Auto in Übung 5.1 soll unter dem steilsten Neigungswinkel geparkt werden, wobei alle vier Bremsen angezogen sind. Würde das Auto das Gefälle hinabrutschen, wenn nur zwei Bremsen angezogen wären?

Beispiel 5.3: Kräfte am Schlitten

Zwei Kinder, die auf einem Schlitten im Schnee sitzen, bitten darum, gezogen zu werden. Die Eltern ziehen die beiden an einem Seil, das einen Winkel von 40° zur Horizontalen bildet (Abbildung 5.8). Die Kinder haben zusammen eine Masse von 45 kg, und der Schlitten hat eine von 5,0 kg. Der Haftreibungskoeffizient beträgt $\mu_{\mathrm{R,h}} = 0{,}20$, während der Gleitreibungskoeffizient $\mu_{\mathrm{R,g}} = 0{,}15$ ist. Anfangs ruht der Schlitten. Gesucht sind der Betrag der Reibungskraft, die der Schnee auf den Schlitten ausübt, sowie die Beschleunigung der Kinder und des Schlittens, wenn die Zugkraft im Seil a) 100 N und b) 140 N beträgt.



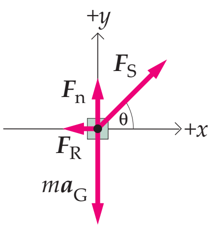
5.8

Problembeschreibung: Als Erstes müssen wir ermitteln, ob die Haftreibung oder die Gleitreibung wirkt. Dazu untersuchen wir, ob die gegebenen Zugkräfte der Beziehung $|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,h}}| \le \mu_{\mathrm{R,h}}\,|\boldsymbol{F}_\mathrm{n}|$ genügen. Im Anschluss daran können wir den richtigen Ausdruck für die Reibungskraft auswählen und daraus die Reibungskraft $|\boldsymbol{F}_\mathrm{R}|$ berechnen.

Lösung:

Teilaufgabe a

1. Zeichnen Sie ein Kräftediagramm für den Schlitten (Abbildung 5.9).



5.9

2. Schreiben Sie die Gleichung für die Haftreibung auf. Solange diese erfüllt ist, beginnt der Schlitten nicht zu gleiten:

$$|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,h}}| \le \mu_{\mathrm{R,h}}\,|\boldsymbol{F}_\mathrm{n}|$$

3. Wenden Sie $\sum F_{i,y} = m\,a_y$ auf den Schlitten an und stellen Sie die Gleichung nach der Normalkraft um:

$$\sum F_{i,y} = m\,a_y$$

$$|\boldsymbol{F}_\mathrm{n}| + |\boldsymbol{F}_\mathrm{S}|\sin\theta - m\,g = 0 \Rightarrow |\boldsymbol{F}_\mathrm{n}| = m\,g - |\boldsymbol{F}_\mathrm{S}|\sin\theta$$

4. Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m\,a_x$ mit $a_x = 0$ auf den Schlitten an und stellen Sie die Gleichung nach der Haftreibungskraft um:

$$\sum F_{i,x} = m\,a_x$$

$$-|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,h}}| + |\boldsymbol{F}_\mathrm{S}|\cos\theta = 0 \Rightarrow |\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,h}}| = |\boldsymbol{F}_\mathrm{S}|\cos\theta$$

5. Setzen Sie die Ergebnisse aus Schritt 4 und 5 in das Ergebnis aus Schritt 2 ein:

$$|\boldsymbol{F}_\mathrm{S}|\cos\theta \le \mu_{\mathrm{R,h}}\,(m\,g - |\boldsymbol{F}_\mathrm{S}|\sin\theta)$$

6. Prüfen Sie anhand der Ungleichung aus Schritt 3, ob der Schlitten bei der gegebenen Zugkraft von 100 N noch nicht gleitet:

$$\begin{aligned}(100\ \mathrm{N})\cos 40° &\le 0{,}20\,[(50\ \mathrm{kg})\cdot(9{,}81\ \mathrm{N\cdot kg^{-1}}) \\ &\quad -(100\ \mathrm{N})\sin 40°] \\ 77\ \mathrm{N} &\le 85\ \mathrm{N}\end{aligned}$$

Da die Ungleichung *erfüllt ist*, gleitet der Schlitten *nicht*.

7. Da der Schlitten nicht gleitet, ist die Reibungskraft die Haftreibungskraft. Ihr Betrag kann aus dem Ausdruck für $|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,h}}|$ aus Schritt 4 berechnet werden:

$$a_x = 0$$

$$|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,h}}| = |\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}|\cos\theta = (110\ \mathrm{N})\cos 40° = \boxed{77\ \mathrm{N}}$$

Teilaufgabe b

1. Nehmen Sie nun eine ähnliche Prüfung wie in Schritt 5 von Teilaufgabe a mit $|\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}| = 140$ N vor. Wenn die Beziehung erfüllt ist, gleitet der Schlitten nicht:

$$\begin{aligned}(140\ \mathrm{N})\cos 40° &\le 0{,}20[(50\ \mathrm{kg})\cdot(9{,}81\ \mathrm{N\cdot\ kg^{-1}}) \\ &\quad -(140\ \mathrm{N})\sin 40°] \\ 107\ \mathrm{N} &\le 80\ \mathrm{N}\end{aligned}$$

Da die Ungleichung nun *nicht* erfüllt ist, *gleitet* der Schlitten.

2. Da der Schlitten gleitet, ist die Reibungskraft nun eine Gleitreibungskraft, bei der $|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,g}}| = \mu_{\mathrm{R,g}}\,|\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}|$ gilt. In Schritt 3 der Teilaufgabe a haben wir die Formel $\sum F_{i,y} = m\,a_y$ auf den Schlitten angewendet und dabei festgestellt, dass $|\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}| = m\,g - |\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}|\sin\theta$ ist. Berechnen Sie damit die Gleitreibungskraft:

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,g}}| &= \mu_{\mathrm{R,g}}\,|\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}| \\ |\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,g}}| &= \mu_{\mathrm{R,g}}\,(m\,g - |\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}|\sin\theta) \\ &= 0{,}15\,[(50\ \mathrm{kg})\cdot(9{,}81\ \mathrm{N\cdot\ kg^{-1}}) \\ &\quad -(140\ \mathrm{N})\sin 40°] \\ &= \boxed{60\ \mathrm{N}}\end{aligned}$$

3. Wenden Sie $\sum F_{i,x} = m\,a_x$ auf den Schlitten an und stellen Sie die Gleichung nach der Reibungskraft um. Setzen Sie anschließend das Ergebnis aus Schritt 2 von Teilaufgabe b für $|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,g}}|$ ein und berechnen Sie daraus die Beschleunigung:

$$\sum F_{i,x} = m\,a_x$$

$$-|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,g}}| + |\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}|\cos\theta = m\,a_x \Rightarrow$$

$$a_x = \frac{-|\boldsymbol{F}_{\mathrm{R,g}}| + |\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}|\cos\theta}{m}$$

und somit

$$\begin{aligned}a_x &= \frac{-60\ \mathrm{N} + (140\ \mathrm{N})\cos 40°}{50\ \mathrm{kg}} \\ &= \boxed{0{,}94\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}}\end{aligned}$$

Plausibilitätsprüfung: Wir erwarten eine Beschleunigungskomponente a_x größer oder gleich null und damit, dass die Reibungskraft betragsmäßig kleiner oder gleich der x-Komponenten der Zugkraft ist. In Teilaufgabe a sind der Betrag der Reibungskraft und die x-Komponente der Zugkraft beide gleich 77 N, während in Teilaufgabe b der Betrag der Reibungskraft gleich 60 N ist und die x-Komponente der Zugkraft $(140\ \mathrm{N})\cos 40° = 107$ N beträgt.

Weitergedacht: Wir halten zwei wichtige Punkte fest: 1) Die Normalkraft ist kleiner als die auf die Kinder und auf den Schlitten wirkende Gravitationskraft. Das liegt daran, dass die vertikale Komponente der Zugkraft mithilft, der Gravitationskraft entgegenzuwirken. 2) In Teilaufgabe a ist die Haftreibungskraft kleiner als $\mu_{\mathrm{R,h}}\,|\boldsymbol{F}_{\mathrm{n}}|$.

Übung 5.2: Mit welcher maximalen Kraft können die Eltern bei dem angegebenen Winkel an dem Seil ziehen, ohne dass der Schlitten zu gleiten beginnt?