__Bsp.:__ $x^2 = 3x$ über $\mathbb{G} = \mathbb{R}$

mit $T = \frac{1}{x}$ mult. $\mathbb{D}_T = \{x \neq 0\}$

__1. Fall:__ $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G} \cap D_T \cap \{T \neq 0\}$

$= \mathbb{R} \cap \{x \neq 0\} \cap \mathbb{R} = \{x \neq 0\}$

$x^2 = 3x \quad | \cdot \frac{1}{x} \quad (\neq 0)$

$\Leftrightarrow x = 3 \quad \in \mathbb{G}_1$

$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{3\}$

__2. Fall:__ $\mathbb{G}_2 = \mathbb{G} \cap D_T \cap \{T = 0\}$

$= \mathbb{R} \cap \{x \neq 0\} \cap \emptyset = \emptyset$

$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \emptyset$

__3. Fall:__ $\mathbb{G}_3 = \mathbb{G} \setminus \mathbb{D}_T = \mathbb{R} \setminus \{x \neq 0\} = \{x = 0\}$

$x^2 = 3x$

$x = 0$ in obige Gleichung eingesetzt $\Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ Jedes Element aus $\mathbb{G}_3$ ist Lösung

$\Rightarrow \mathbb{L}_3 = \{0\}$

insgesamt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \{0; 3\}$

__Bem.:__ Versuche Multiplikation mit bzw. Division durch einen Term zu vermeiden, z. B.

$x^2 = 3x$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ oder $x - 3 = 0$

$\mathbb{L} = \{0; 3\}$

2) $x - 1 = 0$ über $G = \mathbb{R}$

Wir wollen unbedingt die Gl. mit $\frac{x-2}{x-1}$ multiplizieren.

$$T = \frac{x-2}{x-1} \qquad D_T = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

<u>1. Fall</u>

$$G_1 = G \cap D_T \cap \{T \neq 0\}$$
$$= \mathbb{R} \cap \{x \neq 1\} \cap \{x \neq 2\}$$
$$= \{x \neq 1, x \neq 2\}$$

$$x - 1 = 0 \quad \Big| \cdot \frac{x-2}{x-1} \neq 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 2 \notin G_2 \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \emptyset$$

<u>2. Fall:</u>

$$G_2 = G \cap D_T \cap \{T = 0\}$$
$$= \mathbb{R} \cap \{x \neq 1\} \cap \{x = 2\}$$

$$x - 1 = 0$$
$$x = 2 \quad \lightning$$
$$\mathbb{L}_2 = \emptyset$$

<u>3. Fall:</u>

$$G_3 = G \setminus D_T = \{x = 1\}$$
$$x - 1 = 0$$
$$x = 1$$

eingesetzt: $0 = 0$ ✓

$\Rightarrow x = 1$ ist Lösung

$$\mathbb{L}_3 = \{1\}$$

$$\mathbb{L} = \emptyset \cup \emptyset \cup \{1\} = \{1\}$$

Ungleichung $T_1 \leq T_2$ über $\mathbb{G}$ (mit T multiplizieren)

T definiert: $\mathbb{G} \cap \mathbb{D}_T$

T nicht def.: $\mathbb{G} \setminus \mathbb{D}_T$ (4. Fall)

$T_1 \leq T_2$

$\vdots$

$\mathbb{L}_4$

$T>0$: $\mathbb{G} \cap \mathbb{D}_T \cap \{T>0\}$ (1. Fall)

$T_1 \leq T_2 \mid \cdot T \ (>0)$

$\Leftrightarrow T_1 T \leq T_2 T$

$\vdots$

$\mathbb{L}_1$

$T<0$: $\mathbb{G} \cap \mathbb{D}_T \cap \{T<0\}$ (2. Fall)

$T_1 \leq T_2 \mid \cdot T \ (<0)$

$T_1 T \geq T_2 T$

$\vdots$

$\mathbb{L}_2$

$T=0$: $\mathbb{G} \cap \mathbb{D}_T \cap \{T=0\}$ (3. Fall)

$T_1 \leq T_2$

$T = 0$

$\vdots$

$\mathbb{L}_3$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 \cup \mathbb{L}_4$$

Bsp.: $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x-1} \geq 0$ über $\mathbb{G} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

mit $T = x - 1$ multiplizieren ; $\mathbb{D}_T = \mathbb{R}$

1. Fall: $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G} \cap \mathbb{D}_T \cap \{T > 0\}$

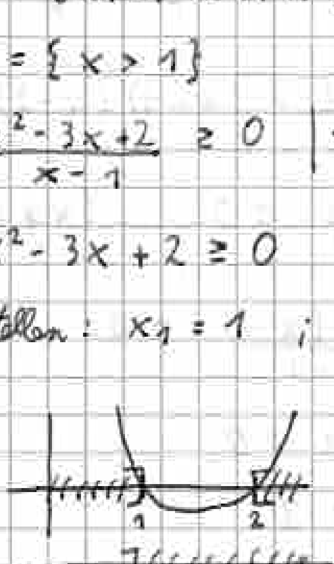
$= \{x \neq 1\} \cap \mathbb{R} \cap \{x > 1\}$

$= \{x > 1\}$

$\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x-1} \geq 0 \quad \Big| \cdot x - 1$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$

Nullstellen: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$



$\mathbb{L}_1 = [2 ; +\infty[$

$= \{x \geq 2\}$

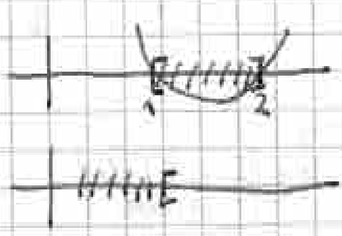
2. Fall: $\mathbb{G}_2 = \mathbb{G} \cap \mathbb{D}_T \cap \{T<0\}$

$= \{x \neq 1\} \cap \mathbb{R} \cap \{x<1\} =$

$= \{x < 1\}$

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1} \geq 0 \quad \Big| \cdot (x-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 2 \leq 0$$



$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \emptyset$

3. Fall: $\mathbb{G}_3 = \mathbb{G} \cap \mathbb{D}_T \cap \{T=0\}$

$= \{x \neq 1\} \cap \mathbb{R} \cap \{x=1\} = \emptyset$

$\Rightarrow \mathbb{L}_3 = \emptyset$

4. Fall: $\mathbb{G}_4 = \mathbb{G} \setminus \mathbb{D}_T = \{x \neq 1\} \setminus \mathbb{R} = \emptyset$

$\Rightarrow \mathbb{L}_4 = \emptyset$

insgesamt: $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \underbrace{\mathbb{L}_2}_{\emptyset} \cup \underbrace{\mathbb{L}_3}_{\emptyset} \cup \underbrace{\mathbb{L}_4}_{\emptyset} = [2; \infty[$

Bem: $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

$$\frac{x^2-3x+2}{x-1} \geq 0 \qquad (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x - 2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 2$$

2. Anwenden einer Funktion $f(x)$ auf beiden Seiten

Gleichung: $T_1 = T_2$ über $\mathbb{G}$

Will man auf beiden Seiten der Gleichung eine Funktion anwenden, so ist dies nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn $f(x)$ auf $T_1(\mathbb{G}) \cup T_2(\mathbb{G})$ (d.h. auf der linken und rechten Seite) definiert und injektiv (z.B. streng monoton fallend/steigend) ist.

$$T(\mathbb{G}) = \{ T(a_1, \dots, a_n) \mid (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{G} \}$$

Bildmenge von T

Ist $f(x)$ auf $T_1(\mathbb{G}) \cup T_2(\mathbb{G})$ definiert, aber nicht injektiv, so muss am Ende der Rechnung eine Probe durchgeführt werden.

$$T_1 = T_2 \quad | \; f(\dots)$$

$$\Rightarrow f(T_1) = f(T_2) \quad \dots \quad \Rightarrow \mathbb{L} + \text{Probe}$$

(Pfeil nur in eine Richtung, da keine Äquivalenzumformung)

<u>Bsp:</u> $\sqrt{x}$; $\ln x$; e^x sind streng monoton steigend

Beachte, dass $\sqrt{x}$ nur für $x \geq 0$ und $\ln x$ nur für $x > 0$ definiert sind. x^2 ist für $x \geq 0$ streng monoton steigend und für $x \leq 0$ streng monoton fallend.

<u>Ungleichung:</u> $T_1 \leq T_2$ über $\mathbb{G}$

(bzw. $T_1 < T_2$ über $\mathbb{G}$)

Ist $f(x)$ auf $T_1(\mathbb{G}) \cup T_2(\mathbb{G})$ definiert und

- streng monoton steigend, so rechne wie folgt

$$\begin{aligned} & T_1 \leq T_2 \quad | \; f(\ldots) \\ \Leftrightarrow\; & f(T_1) \leq f(T_2) \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} \text{bzw. } & T_1 < T_2 \quad | \; f(\ldots) \\ \Leftrightarrow\; & f(T_1) < f(T_2) \end{aligned} \right)$$

- streng monoton fallend, so rechne wie folgt

$$\begin{aligned} & T_1 \leq T_2 \quad | \; f(\ldots) \\ \Leftrightarrow\; & f(T_1) \geq f(T_2) \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} \text{bzw. } & T_1 < T_2 \quad | \; f(\ldots) \\ \Leftrightarrow\; & f(T_1) > f(T_2) \end{aligned} \right)$$

<u>Bsp:</u> $\underbrace{x^2}_{\geq 0} > \underbrace{4}_{\geq 0}$ $\qquad \sqrt{x}$ ist auf $x \geq 0$ definiert und streng monoton steigend

$$\begin{aligned} & x^2 > 4 \quad | \; \sqrt{\ldots} \\ \Leftrightarrow\; & \underbrace{\sqrt{x^2}}_{|x|} > \sqrt{4} \\ \Leftrightarrow\; & |x| > 2 \end{aligned} \qquad \left(\begin{aligned} \sqrt{x^2} &= |x| \\ (\sqrt{x})^2 &= x \end{aligned} \right)$$

d.h. $x > 2$ oder $x < -2$

2.2 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

<u>Allg. Form</u> (implizite)

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \qquad \text{Gl.}$$

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \leq b \qquad \text{Ungl.}$$

(bzw. $\geq, <, > b$)

(mindestens ein $a_i \neq 0$)

Ist $a_i \neq 0$, so kann die Gl. / Ungl. nach x_i umgestellt werden (explizite Form)

$$(\#) \qquad x_i = \frac{1}{a_i}\left(b - a_1 x_1 - \dots - a_{i-1} x_{i-1} - a_{i+1} x_{i+1} - \dots - a_n x_n\right)$$

bei Ungl. müssen die Fälle $a_i > 0$ und $a_i < 0$ unterschieden werden.

In (#) kann man $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ als freie Parameter auffassen $\Rightarrow$ ∞-viele Lösungen
$\mathbb{L}$ ist eine sog. $(n-1)$-dim. Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

A) Lineare Gl. / Ungl. in einer Unbestimmten

Gl.: $\quad a_1 x_1 = b \quad$ in der Unbestimmten x_1 über $G = \mathbb{R}$
$(a_1 \neq 0)$

$$a_1 x_1 = b \quad | : a_1$$

$$x_1 = \frac{b}{a_1}$$

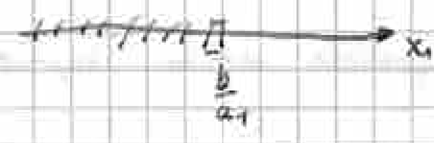
$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{ \frac{b}{a_1} \right\} \;\hat{=}\;$ Punkt auf der Zahlengeraden

Ungl.: $a_1 x_1 \leq b$ in der Unbestimmten x_1 über $\mathbb{G} = \mathbb{R}$ $(a_1 \neq 0)$

$\underline{a_1 > 0}$: $a_1 x_1 \leq b \mid : a_1 \; (>0)$

$x_1 \leq \frac{b}{a_1}$

$\Rightarrow \; \mathbb{L} = \left]-\infty ; \frac{b}{a_1}\right]$



$\underline{a_1 < 0}$: $a_1 x_1 \leq b \mid : a_1 \; (<0)$

$x_1 \geq \frac{b}{a_1}$

$\mathbb{L} = \left[\frac{b}{a_1} ; +\infty\right[$

<u>Intervalle:</u>

abgeschlossene Intervalle: $[a, b] = \{ a \leq x \leq b \}$

halboffene Intervalle $]a, b] = \{ a < x \leq b \}$

$[a, b[= \{ a \leq x < b \}$

offene Intervalle $]a, b[= \{ a < x < b \}$

statt $]a, b]$ schreibt man auch $(a; b]$

-"- $[a, b[$ -"- $[a; b)$

-"- $]a; b[$ -"- $(a; b)$

uneigentliche Intervalle $]-\infty; a]$; $]-\infty; a[$;

$[a; +\infty[$; $]a; +\infty[$;

$]-\infty; +\infty[$

3) Lineare Gleichungen und Ungleichungen in zwei Unbestimmten

Gl.: $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$ $(a_1 \neq 0$ oder $a_2 \neq 0)$ über $G = \mathbb{R}^2$

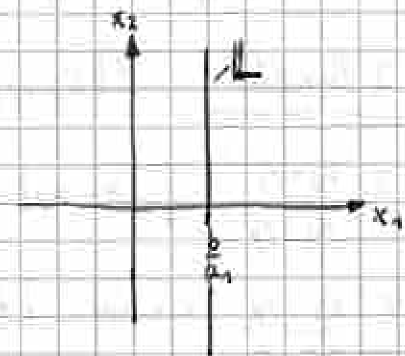
<u>$a_2 = 0$:</u> Dann ist $a_1 \neq 0$

$a_1 x_1 = b \quad | : a_1$ (in den Unbestimmten x_1, x_2)

$x_1 = \frac{b}{a_1}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{ (x_1 ; x_2) \mid x_1 = \frac{b}{a_1} ; x_2 \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (\frac{b}{a_1} ; x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R} \}$ = Parallele zur x_2-Achse



<u>$a_2 \neq 0$</u>

$a_1 x_1 + a_2 x_2 = b \quad | - a_1 x_1$ (implizite Form)

$a_2 x_2 = - a_1 x_1 + b \quad | : a_2$

$x_2 = - \frac{a_1}{a_2} x_1 + \frac{b}{a_2}$ (explizite Form)

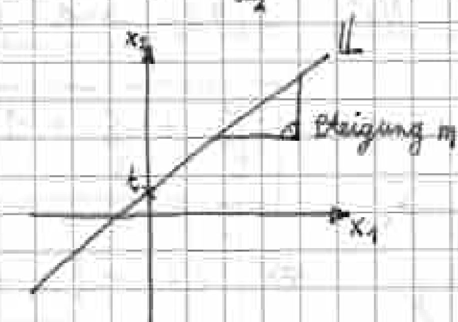
von x_1 abhängig

frei wählbar

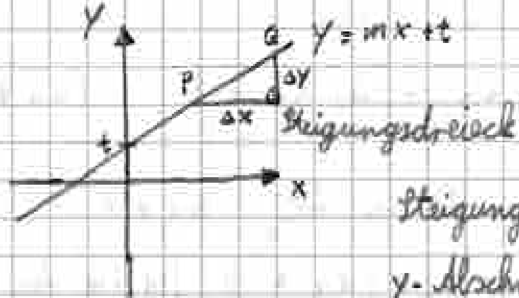
$\mathbb{L} = \{ (x_1, x_2) \mid x_2 = - \frac{a_1}{a_2} x_1 + \frac{b}{a_2} ; x_1 \in \mathbb{R} \}$

Gerade mit Steigung $m = - \frac{a_1}{a_2}$ und

x_2-Abschnitt $t = \frac{b}{a_2}$.



Wdh.: Geradengleichung $y = mx + t$



Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

y-Abschnitt t

Punkte $P(x_P, y_P)$; $Q(x_Q, y_Q)$ $\quad (x_P \neq x_Q)$

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - y_P} \left(= \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} \right)$$

<u>Gerade durch 2 Punkte</u> $P(x_P, y_P)$; $Q(x_Q, y_Q)$ $(x_P \neq x_Q)$

$$(m =) \ \frac{y - y_P}{x - x_P} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - y_P} \quad \Big| \cdot (x - x_P)$$

$$y - y_P = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - y_P} (x - x_P) \quad \Big| + y_P$$

$$\boxed{y = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - y_P} (x - x_P) + y_P}$$

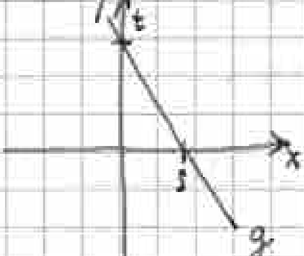
<u>Gerade mit Steigung m durch Punkt $P(x_P, y_P)$</u>

$$m = \frac{y - y_P}{x - x_P} \quad \Big| \cdot (x - x_P)$$

$$y - y_P = m(x - x_P) \quad \Big| + y_P$$

$$\boxed{y = m(x - x_P) + y_P}$$

<u>Gerade mit NST $s\,(\neq 0)$ und y-Abschnitt $t\,(\neq 0)$</u>



$$\boxed{\frac{y}{t} + \frac{x}{s} = 1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{t}{s} x + t}$$

Ungl: $a_1 x_1 + a_2 x_2 \leq b$ (bzw $\geq, <, > b$) über $G = \mathbb{R}^2$

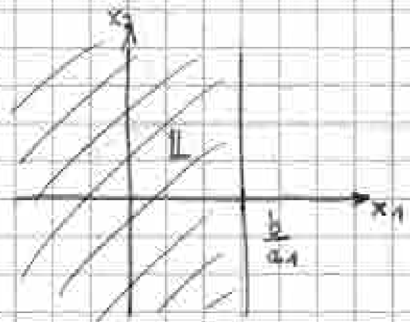
$\boxed{a_2 = 0}$: $a_1 x_1 \leq b$ $a_1 \neq 0$

$\underline{a_1 > 0:}$

$a_1 x_1 \leq b \quad | : a_1$

$\Leftrightarrow \quad x_1 \leq \frac{b}{a_1}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{ (x_1, x_2) \mid x_1 \leq \frac{b}{a_1} \ ; \ x_2 \in \mathbb{R} \}$



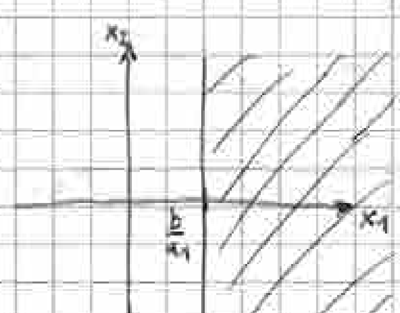
$\mathbb{L}$ ist eine Halbebene

$\underline{a_1 < 0:}$

$a_1 x_1 \leq b \quad | : a_1$

$\Leftrightarrow \quad x_1 \geq \frac{b}{a_1}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{ (x_1; x_2) \mid x_1 \geq \frac{b}{a_1} \ ; \ x_2 \in \mathbb{R} \}$



$\boxed{a_2 \neq 0:}$ $\quad a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$

$\underline{a_2 > 0:}$

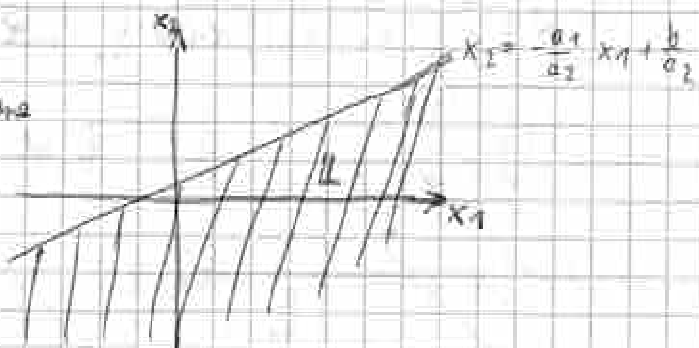
$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \quad | - a_1x_1$$

$$\Leftrightarrow \quad a_2x_2 \leq b - a_1x_1 \quad | : a_2$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2 \leq -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}$$

$$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \leq -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2} \; ; \; x_1 \in \mathbb{R}\}$$

untere Halbebene mit Rand



$\underline{a_2 < 0:}$

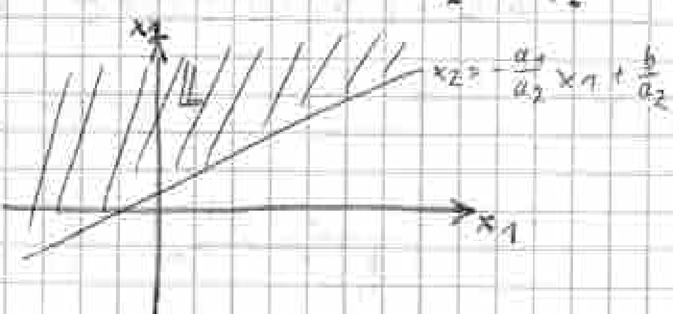
$$a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \quad | - a_1x_1$$

$$\Leftrightarrow \quad a_2x_2 \leq -a_1x_1 + b \quad | : a_2$$

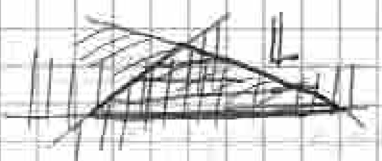
$$\Leftrightarrow \quad x_2 \geq -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}$$

$$\mathbb{L} = \{(x_1 ; x_2) \mid x_2 \geq -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2} \; ; \; x_1 \in \mathbb{R}\}$$

obere Halbebene mit Rand



Bem: Ungleichungssysteme

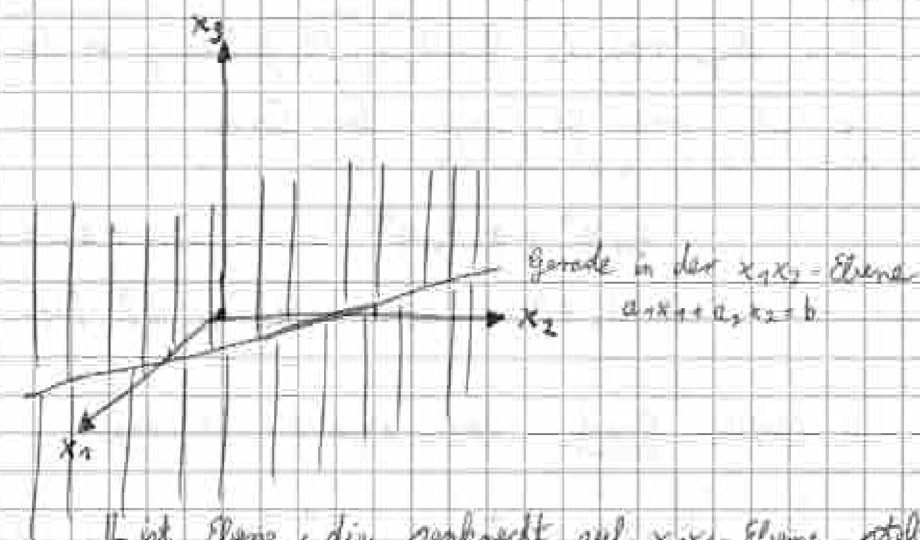


C) Lineare Gleichungen und Ungleichungen in 3 Unbestimmten

Gl: $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ $(a_1 \neq 0$ oder $a_2 \neq 0$ oder $a_3 \neq 0)$ über $G = \mathbb{R}^3$

$\boxed{a_3 = 0:}$ $a_1x_1 + a_2x_2 = b$

$\mathbb{L} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid a_1x_1 + a_2x_2 = b \,;\, x_3 \in \mathbb{R}\}$



𝕃 ist Ebene, die senkrecht auf x_1x_2-Ebene steht

Schnittgerade ist $a_1x_1 + a_2x_2 = b$

$\boxed{a_3 \neq 0:}$ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \quad | -a_1x_1 - a_2x_2$

$a_3x_3 = -a_1x_1 - a_2x_2 + b \quad | : a_3$

$x_3 = -\frac{a_1}{a_3}x_1 - \frac{a_2}{a_3}x_2 + \frac{b}{a_3}$ (explizite Form)

frei wählbar

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_3 = -\frac{a_1}{a_3}x_1 - \frac{a_2}{a_3}x_2 + \frac{b}{a_3} \,;\, x_1 \in \mathbb{R} \,;\, x_2 \in \mathbb{R}\}$

Ebene liegt schief im Raum und schneidet die x_3-Achse bei $\frac{b}{a_3}$

__Ungl.:__ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq b$ (bzw. $\geq, >, < b$)

Die Lösungsmengen $\mathbb{L}$ ist ein sog. __Halbraum__ der von der Ebene $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ (halbseitig) begrenzt wird.

2.3 Algebraische Gleichungen und Ungleichungen

A) Eine Unbestimmte x

__Def.:__

Eine Algebraische Gleichung/Ungleichung in der Unbestimmten x ist eine Gl./Ungl. der Form

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \quad (\text{bzw. } \geq, \leq, <, >)$$

$$\text{mit } a_n \neq 0, \; a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R} \; (\text{oder } \mathbb{C})$$

n heißt __Grad__ der algebr. Gl./Ungl.; der Term

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$a_n \neq 0$ heißt Polynom vom Grad n in der Unbestimmten x; $a_0, \dots, a_n$ heißen Koeffizienten des Polynoms; $a_n x^n$ __Leitterm__ und a_0 __konstanter Term__.

Algebraische Gl./Ungl. (bzw. Polynome) vom Grad $n = 1, 2, 3, \dots$ heißen lineare, quadratische, kubische ... Gl./Ungl. (bzw. Polynome)

Quadratische Gl. / Ungl.

Gl: $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (a_2 \neq 0)$

Lösungsformel für $ax^2 + bx + c = 0$

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

$D = b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante

$D > 0$: Zwei verschiedene (einfache) reelle Lösungen

$x_1 \neq x_2 \; ; \; x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$D = 0$: Eine (zweifache) reelle Lösung

$x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$

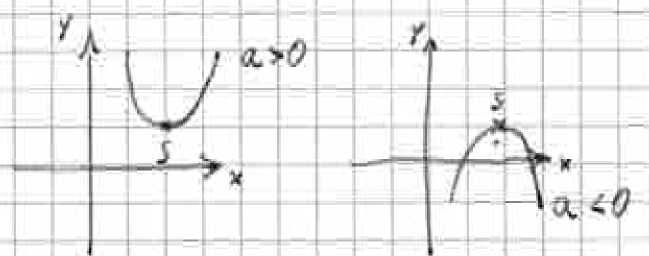
$D < 0$: keine reelle Lösung, aber zwei (einfache) konjugiert komplexe Lösungen

$$x_{1/2} = z_{1/2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}$$

Geometrische Interpretation:

Die Lösungen der quadratischen Gl. sind die Nullstellen der Parabel $y = ax^2 + bx + c$

a heißt Öffnungsfaktor der Parabel



$S(x_S, y_S)$ heißt Scheitel der Parabel

Es gilt $x_S = -\frac{b}{2a}$

$y_S = P(x_S)$ mit $P(x) = ax^2 + bx + c$

$P(x) = ax^2 + bx + c$ (Normalform)

Scheitelpunktform

$$\boxed{P(x) = a(x - x_S)^2 + y_S} \qquad S(x_S, y_S)$$

Produktform

$$\boxed{P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$$

mit $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$