Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (29)

Gerald Kupris

20.12.2010

Ableitung gebrochenrationaler Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen leitet man nach folgenden Grundsätzen ab:
Zunächst gibt es die Quotientenregel. Sie gilt prinzipiell für alle gebrochen rationalen Funktionen.

Beim Ableiten eines Quotienten zweier Funktionen f und g benutzt man die Formel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}.$$

Es gibt jedoch zwei Fälle, in denen die Ableitung wesentlich einfacher berechnet werden kann:

1. **Fall: Der Nenner enthält keine Summe**
2. **Fall: Der Zähler enthält kein x**

Sonderfälle bei der Ableitung gebrochenrationaler Funktionen

1. Fall: Der Nenner enthält keine Summe

1. Schritt: Zerlege den Funktionsterm in Summanden und erzeuge die Potenzform d.h. (Summanden = Zahl man x-Potenz)
2. Schritt: Leite jeden Summanden für sich ab: Der konstante Faktor bleibt erhalten und wende die Potenzregel an.
3. Schritt: Bringe die Summanden ggf. wieder auf den Hauptnenner.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{8x} = \frac{x^2}{8x} - \frac{4}{8x} = \frac{1}{8}x - \frac{1}{2x} = \frac{1}{8}x - \frac{1}{2}x^{-1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2}x^{-2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{2x^2} = \frac{x^2 + 4}{8x^2}$$

Sonderfälle bei der Ableitung gebrochenrationaler Funktionen

2. Fall: Der Zähler enthält kein x

1. Schritt: Schreibe den Nenner als Faktor mit negativer Hochzahl.
2. Schritt: Leite mit der Kettenregel ab.
3. Schritt: Bringe den Term wieder in die Bruchform.

Beim Ableiten einer verketteten Funktion $f \circ u$ wird die Ableitung der äußeren Funktion f mit der Ableitung der inneren Funktion u multipliziert:

$$(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{4}{x^2+16} = 4 \cdot \left(x^2+16\right)^{-1}$$

$$f'(x) = -\frac{4}{\left(x^2+16\right)^2} \cdot 2x = -\frac{8x}{\left(x^2+16\right)^2}$$

Quotientenregel

3. Fall: alle anderen Terme
In allen anderen Fällen wendet man die Quotientenregel an :

Beispiel:

$$f(x) = \frac{2x-5}{x^2+4}$$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+4) - 2x(2x-5)}{\left(x^2+4\right)^2} = \frac{2x^2+8-4x^2+10x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$= \frac{-2x^2+10x+8}{\left(x^2+4\right)^2} = -2\,\frac{x^2-5x-4}{\left(x^2+4\right)^2}$$

Empfehlungen zur Ableitung gebrochenrationaler Funktionen

1. Es lohnt sich stets, konstante Faktoren auszuklammern und vor den Bruch zu schreiben, damit vereinfacht sich die Berechnung der nächsten Ableitung.

2. Die erste Ableitung kann nach Anwendung der Quotientenregel vom 2. auf den 3. Fall führen und umgekehrt.

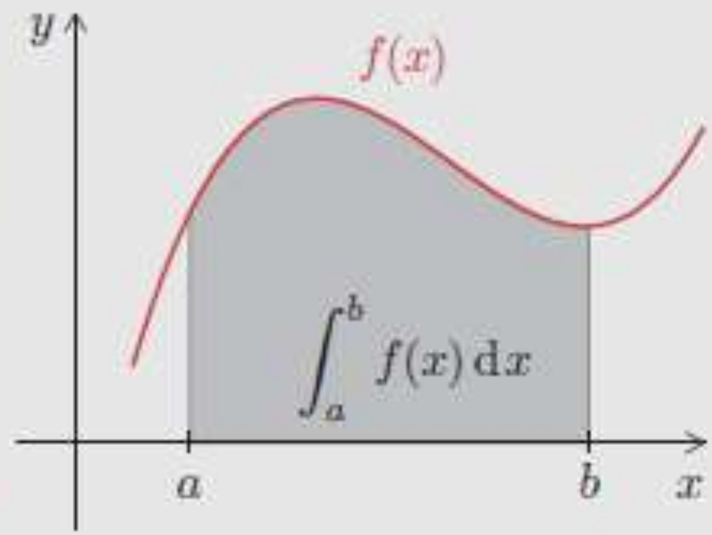
3. Steht im Nenner eines abzuleitenden Terms eine Klammer, die selbst wieder eine Potenz trägt, kann man in der nächsten Ableitung diese Klammer im Zähler ausklammern und dann teilweise kürzen!

Integration

Eine stetige und nicht negative Funktion f begrenzt für x-Werte zwischen a und b mit der x-Achse ein Flächenstück. Für den Inhalt A dieser Fläche verwendet man die Schreibweise mit dem **Integralsymbol**

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

Die Funktion f unter dem Integral bezeichnet man als **Integrand**.



Integrationssymbol

Das Integrationssymbol wurde in Anlehnung an ein langgezogenes „S“ als Anfangs-buchstabe des lateinischen Worts „summa“ bereits im 17. Jahrhundert von dem Mathematiker Gottfried Wilhelm von Leibniz eingeführt.

Bei der Definition des Integralsymbols fungiert die Variable x lediglich als Platzhalter.

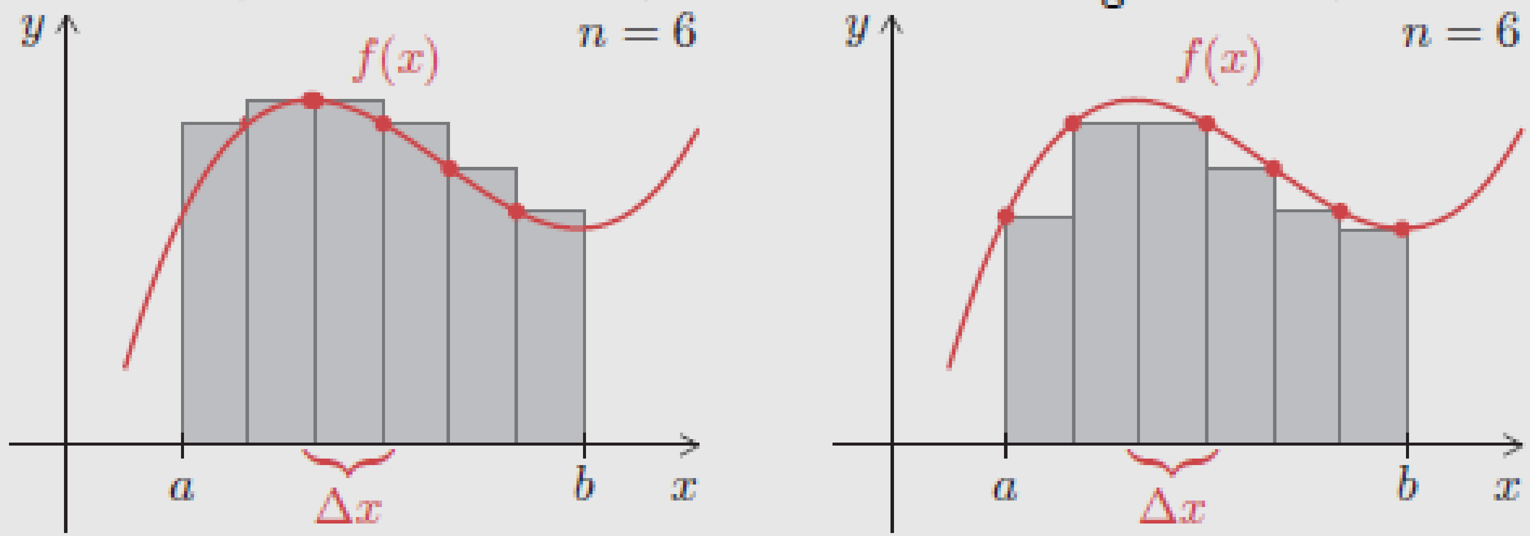
Integrationsvariable

Die Bezeichnung der Integrationsvariable spielt keine Rolle:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \ldots$$

Unter- und Obersumme

Die Fläche unter einer stetigen und nicht negativen Funktion kann durch **Untersumme** und **Obersumme** angenähert werden. Der tatsächliche Wert der Fläche ist sicherlich nicht kleiner als die Untersumme und sicherlich auch nicht größer als die Obersumme.

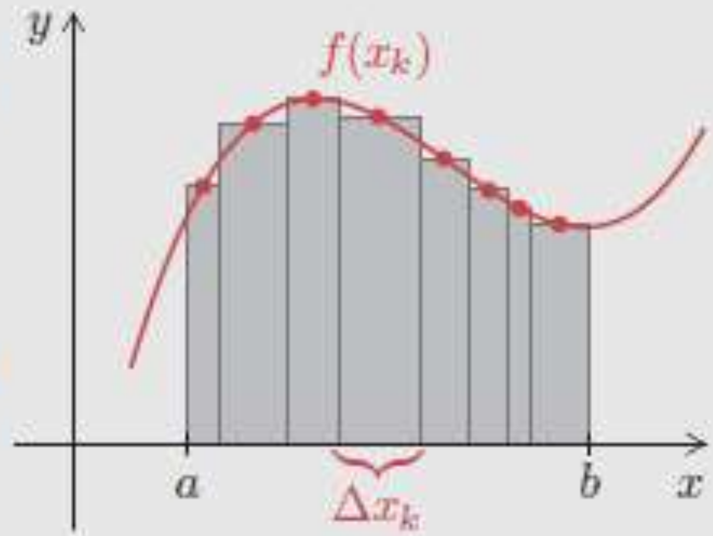


Fläche als Grenzwert von Summen

Die Fläche unter einer stetigen und nicht negativen Funktion f entspricht dem Grenzwert von Summen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k,$$

falls die Grundseiten der Rechtecke Δx_k gegen null streben und der Grenzwert der Rechtecksummen existiert. Dabei ist x_k eine Stelle innerhalb des Rechtecks mit Grundseite Δx_k.



Bestimmtes Integral

Das **bestimmte Integral** einer Funktion f zwischen den Grenzen a und b ist definiert durch den Grenzwert der Summen

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k,$$

wobei Δx_k die Grundseiten der Rechtecke und x_k jeweils eine Stelle innerhalb der Rechtecke bezeichnet.

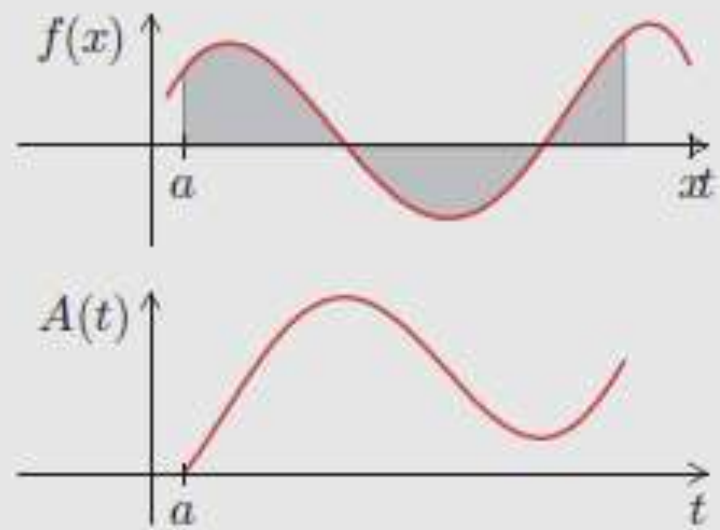
Beispiel

Integralfunktion

Die Integralfunktion

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$$

ist definiert durch den Wert des bestimmten Integrals der Funktion f über dem Intervall $[a, t]$. Dabei wird A als Funktion der variablen Obergrenze t interpretiert.



Beispiel

Ableitung der Integralfunktion

Die Ableitung der Integralfunktion

$$A(t) = \int_a^t f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

ist die Ausgangsfunktion f. Es gilt also

$$A'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}\,x = f(t).$$

Beispiel

Stammfunktion

Eine Funktion F, deren Ableitung die Funktion f ergibt, für die also $F' = f$ gilt, bezeichnet man als **unbestimmtes Integral** oder **Stammfunktion** von f. Die Bestimmung einer Stammfunktion bezeichnet man als **Integration**. Sie ist gewissermaßen die Umkehrung der Differenziation:

$$f(x) \xrightarrow{\text{Integration}} F(x), \qquad F(x) \xrightarrow{\text{Differenziation}} f(x).$$

Für ein unbestimmtes Integral verwendet man die Notation $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Beispiel

Integrationskonstante

Eine Funktion f hat keine eindeutig bestimmte Stammfunktion F. Da die Ableitung einer Konstanten null ist, kann man zu jeder Stammfunktion F eine beliebige Konstante C addieren und erhält wieder eine Stammfunktion:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Beispiel

Stammfunktionen der wichtigsten Funktionen

Funktion	Stammfunktion	Funktion	Stammfunktion
$\int e^x \, dx$	$= e^x + C$	$\int \sin x \, dx$	$= -\cos x + C$
$\int x^a \, dx$	$= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1$	$\int \cos x \, dx$	$= \sin x + C$
$\int \frac{1}{x} \, dx$	$= \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx$	$= \arctan x + C$

Beispiel

Bestimmtes Integral

Das bestimmte Integral einer Funktion f kann man mithilfe einer beliebigen Stammfunktion F von f bestimmen:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Man setzt die Obergrenze b in die Stammfunktion F ein und zieht davon den Wert der Stammfunktion an der Untergrenze a ab.

Beispiel

Arithmetisches und quadratisches Mittel

Bei einer über dem Intervall $[a, b]$ stetigen Funktion f bezeichnet man

- als **Mittelwert** oder **arithmetisches Mittel** den Wert

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x,$$

- als **quadratisches Mittel** den Wert

$$\overline{f} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}\,x.}$$

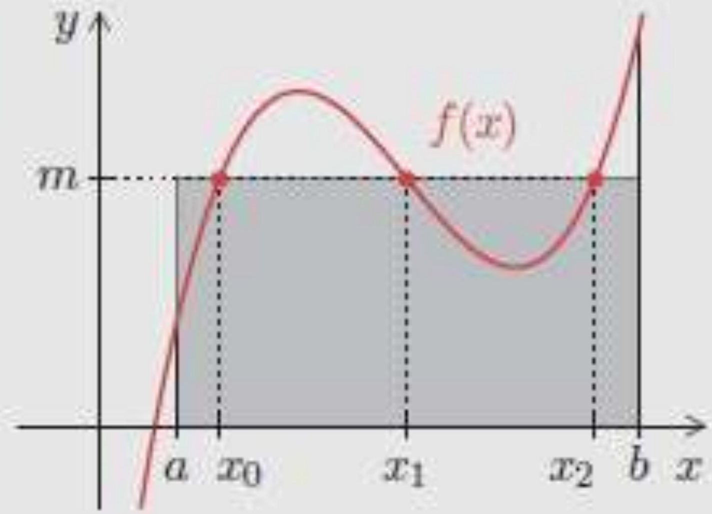
Beispiel

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Bei einer Funktion f, die auf dem Intervall $[a, b]$ stetig ist, gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \in [a, b]$ mit

$$f(x_0) = m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

An der Stelle x_0 stimmt somit der Funktionswert $f(x_0)$ mit dem Mittelwert m überein.



Beispiel

Integrationstechnik

Die Bestimmung der Ableitung einer aus elementaren Funktionen zusammengesetzten Funktion ist mit Hilfe der entsprechenden Ableitungsregeln immer möglich.

Im Gegensatz dazu ist das Finden einer Stammfunktion eine Kunst, die nicht bei allen Funktionen gelingt.

Stammfunktionen elementarer Funktionen
Es gibt einfache Funktionen, die aus elementaren Funktionen zusammengesetzt sind, für die man aber keine Stammfunktion in Form elementarer Funktionen angeben kann.

Die Integration ist die Umkehrung der Differenziation. Dadurch lassen sich aus den Regeln der Differenzialrechnung die Integrationsregeln herleiten.

Integrationsregeln

Bei der Integration darf man einen konstanten Faktor aus dem Integral herausziehen:

$$\int C\,f(x)\,\mathrm{d}x = C\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel

Bei der Integration einer Summe oder Differenz von Funktionen darf man jede Funktion einzeln integrieren:

$$\int f(x) \pm g(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel

Integrationsregeln

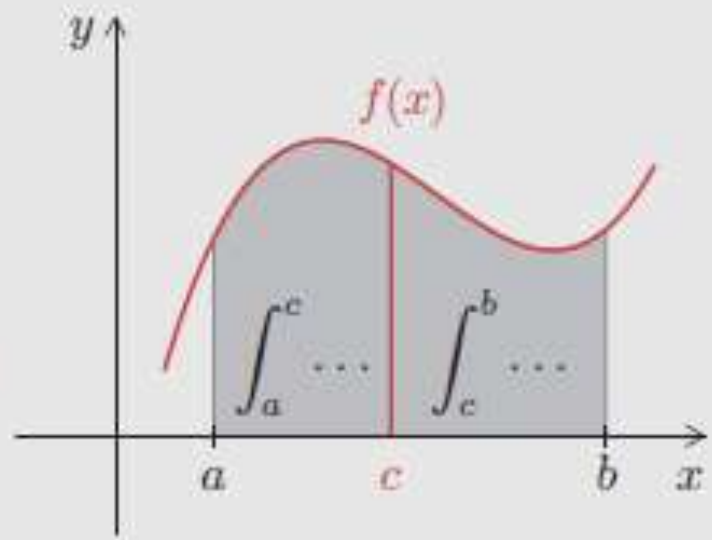
Vertauscht man bei einem bestimmten Integral Ober- und Untergrenze, so ändert sich das Vorzeichen:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ein bestimmtes Integral über dem Intervall $[a, b]$ lässt sich in Teilintegrale aufspalten:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das Aufspalten ist selbst dann noch möglich, wenn c nicht im Intervall $[a, b]$ liegt.



Integrationsregeln

Eine Funktion, die

- ungerade ist, besitzt gerade Stammfunktionen:

$$\int f_u(x)\,\mathrm{d}x = F_g(x) + C.$$

- gerade ist, besitzt, abgesehen von einer Konstanten, ungerade Stammfunktionen:

$$\int f_g(x)\,\mathrm{d}x = F_u(x) + C.$$

Beispiel

Symmetrisches Intervall

Das bestimmte Integral über ein zum Ursprung symmetrisches Intervall $[-a, a]$ einer

- ungeraden Funktion f_u ist immer null:

$$\int_{-a}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

- geraden Funktion f_g hat genau den doppelten Wert wie das Integral über dem halben Intervall $[0, a]$:

$$\int_{-a}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f_g(x)\mathrm{d}x.$$

Beispiel

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org