$$D = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

Die Determinante D ist die Determinante der Matrix A mit den Elementen 1, 4, 6, 5, -2, 3, 0, 1, und 7.

In Wirklichkeit handelt es sich aber bei dieser Schreibweise um die Darstellung einer Funktion. Es handelt sich in diesem Sinne um eine Rechenvorschrift, um die Werte einer Matrix in eine Zahl zu überführen (die natürlich eine spezielle Bedeutung hat).

Die Determinante ist eine Funktion, die eine Matrix auf einen Skalar abbildet

Die Determinante einer Matrix (also die Zahl) hat dabei ein spezielle Bedeutung. Sie sagt etwas darüber aus, ob das Lineare Gleichungssystem, das der Matrix zu Grunde liegt lösbar ist oder nicht. Dies ist eine der Aussagen, aber wohl auch die Älteste:

Ein lineares Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn die Determinante der Koeffizientenmatrix $\neq 0$ ist.

Auch bezüglich einer Aussage über die Invertierbarkeit einer quadratischen Matrix lässt sich die Determinante heranziehen:

Eine quadratische Matrix ist genau dann invertierbar, wenn ihre Determinante $\neq 0$ ist.

5.3 Berechnung

5.3.1 Determinante einer 2x2 Matrix

Die Rechenregel für die Determinante einer 2x2 Matrix:

$$det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{5.2}$$

Aufgabe: Ermitteln Sie die Determinante der Matrix A:

$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = 2$$

d.h. lösbar

5.3.2 Determinante einer 3x3 Matrix

Die Berechnung einer 3x3 Matrix ist bereits deutlich aufwändiger:

$$\begin{aligned} det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned} \tag{5.3}$$

5.3.3 Die Regel von Sarrus

Die Berechnung einer 3x3 Determinante lässt sich leicht über die Regel nach Sarrus herleiten. Hierzu wird die Determinante nach unten durch die erste und zweite Zeile ergänzt und die Produkte über die diagonalen Achsen summiert bzw. subtrahiert.

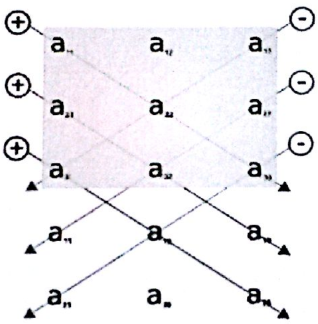

Abbildung 5.1: Regel nach Sarrus (Quelle: wikipedia.de)

Aufgabe: Ermitteln Sie die Determinante der Matrix A unter Zuhilfenahme der Sarrusregel.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \left(0 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - [2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \cdot 3]\right)$$

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$$

$$det A = |A| = 7 - 4 = \underline{3}$$

Anmerk: Sarrus versagt bei größeren Determinanten.

5.4 Laplacscher Entwicklungssatz

Größere Determinanten müssen anhand des Laplacschen Entwicklungssatzes hergeleitet werden. Nach dieser Regel wird die Determinante in viele kleinere Subdeterminanten zerlegt. Man spricht dabei von der Entwicklung nach einer Zeile oder einer Spalte.

Hierzu wählt man folgendes Vorgehen:

1. Man wählt sich eine Zeile oder Spalte der Matrix aus (bevorzugt mit vielen Elementen, die Null sind)
2. Man wählt nun einzeln von links nach rechts oder oben nach unten, die Elemente dieser Zeile
3. Pro gewähltem Element streicht man die zugehörige Zeile UND Spalte
4. Nun multipliziert man dieses Element mit der restlichen Determinante, die durch die Streichung von Zeile und spalte entstanden ist
5. die Teildeterminanten, die dadurch entstehen, werden nun nach der Schachbrettregel addiert bzw. subtrahiert

Bei der Schachbrettregel erhält das nach der obigen Regel gewählte Element das Vorzeichen, das sich ergibt, wenn man die Positionen der Determinante wie ein Schachbrettmuster mit + und - belegt. Begonnen wird dabei mit der Belegung links oben mit einem +:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \vdots \\ - & + & - & + & \vdots \\ + & - & + & - & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{vmatrix} \tag{5.4}$$

Beispiel: In folgendem Beispiel wollen wir eine 3x3 Determinante nach der Laplace-Regel berechnen. Hierzu entwickeln wir die Determinante nach der ersten Zeile.

$$det A = |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

aus Schachbrett

$$\begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ \cancel{3} & 2 & 1 \\ \cancel{1} & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ mit Faktor } +0$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & \cancel{2} & 1 \\ 1 & \cancel{1} & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ mit Faktor } -1$$

$$\begin{vmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{2} \\ 3 & 2 & \cancel{1} \\ 1 & 1 & \cancel{0} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \text{ mit Faktor } +2$$

$$= 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 1 + 2 = \underline{\underline{3}}$$

1. die Elemente der ersten Zeile sind 0, 1 und 2. Die werden dann auch die Faktoren, mit denen wir unsere kleineren Determinanten, die durch die Streichungen entstehen, multiplizieren.
2. gemäßt der Schachbrettregel (1. Zeile des Schachbretts), sind die zugehörigen Vorzeichen +, -, +, also +0, -1 und +2
3. wir betrachten nun das erste Elemente (1. Zeile, erste Spalte), also 0. Durch Streichung der ersten Zeile und ersten Spalte entsteht eine kleinere Determinante $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$
4. Wir multiplizieren nun das 1. Elemente inkl. Vorzeichen mit dieser neuen und kleinere Determinante
5. Wir wählen nun das zweite Elemente und streichen die erste Zeile und die zweite Spalte und erhalten die kleinere Determinante $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$
6. diese Determinante multiplizieren wir nun inkl. dem negativen Vorzeichen mit dieser Determinante
7. ebenso verfahren wir mit dem dritten Elemente
8. Durch aufsummieren dieser Werte erhalten wir nun den Wert der ursprünglichen Determinante

Aufgabe: Entwickeln Sie die Determinante D nach der zweiten Zeile:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_{22} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} \qquad D_{24} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$D = -2 \cdot D_{21} + 3 \cdot D_{22} - 4 \cdot D_{23} + 3 \cdot D_{24}$$
$$= -2 \cdot 0 - 3 \cdot 10 + 4 \cdot 20 - 3 \cdot 10$$
$$= \underline{\underline{20}}$$

Anmerk: In Klausur aus Zeitgründen nichts größeres als 4x4 Determinante

5.5 Berechnung der Inversen einer Matrix

Der Laplacesche Entwicklungssatz verhilft uns nun auch zu einer Berechnungsmethode für die Ermittlung der Inversen A^{-1} einer Matrix A.

Wir erinnern uns, dass galt $A \cdot A^{-1} = E$ mit E als der Einheitsmatrix. Achtung Index gespiegelt

Es gilt: $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & & A_{nn} \end{pmatrix}$$

hierbei ist $A_{ik} = \underbrace{(-1)^{i+k}}_{\text{Schachbrett-regel}} \cdot \underbrace{D_{ik}}_{\text{verkleinerte Determinante}}$

Achtung Elemente „A" nicht a

Dieses Vorgehen wird auch als der. algebraische Komplement von a_{ik} bezeichnet.

D_{ik} = Unterdeterminante von A, durch weglassen der i-ten Zeile und k-ten Spalte.

Hierzu gibt es einiges zu beachten:

1. Beachten Sie die Reihenfolge der Indizes in der Determinante. In der i-ten Zeile und k-ten Spalte befindet sich das algebraische Komplement von A_{ki} und NICHT von A_{ik}!
2. Die Vorzeichen, die sich aus $(-1)^{i+k}$ ergeben, folgen der Schachbrettregel, die wir bereits bei der Berechnung der Determinante verwendet hatten.

Beispiel: Ermitteln Sie die Inverse der Matrix A,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$D_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ Vorzeichen: +

bzw. mit Formel $(-1)^{(1+1)} = +1$

algebraisches Komplement von a_{11}:

$A_{11} = (+1) \cdot D_{11} = -1$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} -1 & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$

$D_{21} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$ Vorzeichen: −

bzw. mit Formel $(-1)^{(2+1)} = -1$

algebraisches Komplement von a_{21}:

$A_{21} = (-1) \cdot 1 = -1$ $\quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} -1 & -1 & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{pmatrix}$

$D_{12} = \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \rightarrow A_{12} = (-1) \cdot 2 = -2$

$D_{13} = \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow A_{13} = 0$

... Ergebnis:

$|A| = -1 \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}$