Komplexe Zahlen $(i^{4n} = 1;\ i^{4n+1} = i;\ i^{4n+2} = -1;\ i^{4n+3} = -i)$

kart. -> Polar: $z = x + iy;\ r = \sqrt{x^2+y^2};\ \varphi = \begin{matrix} \arccos(\frac{x}{r}) & y \geq 0 \\ -\arccos & y < 0 \end{matrix} \Rightarrow r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Polar -> kart: $z = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi);\ re^{\pm i\varphi};\ x = r\cos\varphi;\ y = r\sin\varphi \Rightarrow z = x + iy$

Multipl. $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \Rightarrow \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$

Division $\frac{z_1}{z_2} = ((x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)) \cdot \frac{1}{x^2+y^2}$

Potenz $z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}$

Wurzel $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{n}} \cdot (e^{i\frac{2\pi k}{n}})\ (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$

Wichtige Zahlen $e^{i0} = 1;\ e^{\pm i\pi} = -1;\ e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i;\ e^{\pm i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$

$e^{\pm i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i);\ e^{\pm i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm i)$

konj. Komplexe erweitern: $(a + jb) \cdot (a - jb) = a^2 + b^2$

Relation beschr. Menge R mit $R \subseteq M_1 \times M_2$

wenn zu jedem (x,y) ein (y,x) in R vorh. ist => symmetrisch

$xRy \Rightarrow yRx$ | $xRy = yRx$ dann muss $y = x$ Erg. sein

wenn jedes $x \in M$ in als (x,x) in R vorh. ist => reflexiv

xRx $y = x$ setzen und auflösen

für alle (x,y) und (y,x) in R muss gelten $x = y$ => antisymmetrisch

wenn (x,y) und (y,z) in R vorh., dann muss auch (x,z) in R vorh. sein => transitiv

Äquivalenzrelation $x \sim y$ = reflexiv, symmetr., transitiv

partielle Ordnung $x \preceq y$ = reflexiv, antisymm., transitiv

vollständiges Repräsentantensystem: restklassen $[0] - [n]$

Restklassen als Menge beschreiben

lineare (totale Ordnung) Elemente können in eine Reihenfolge gebracht werden

---

Winkelumformungen

$\sin\alpha$ kann als Imaginärteil einer komplexen Zahl interpretiert werden, $\cos\alpha$ als Realteil

$\sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha + \underline{i\sin\alpha}$

trig. Pytag. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

---

kompl. Schwingungen: $A(t) = \mathrm{Im}(\underline{A}(t))$

$\underline{A}(t) = A_0 e^{i\alpha_0} e^{i\omega t}$ mit $A_0 e^{i\alpha_0} = \underline{A}_0 \Rightarrow \underline{A}(t) = \underline{A}_0 e^{i\omega t}$

$\underline{A}(t) = A_0\cos(\omega t + \alpha_0) + i\underbrace{A_0\sin(\omega t + \alpha_0)}$ -> $A(t)$

Superposition: $A(t) + B(t) = C(t)$

$\underline{A}_0 + \underline{B}_0 = \underline{C}_0 \Rightarrow \underline{A}_0 = x + iy;\ \underline{B}_0 = x_1 + iy;\ \underline{C}_0 = x + iy$

$\Rightarrow \underline{C}_0 = C_0 e^{i\gamma_0}$ mit $C_0 \hat{=} r \Rightarrow \underline{C}(t) = C_0 e^{i(\omega t + \gamma_0)}$

$\underline{C}(t) = C_0\cos(\omega t + \gamma_0) + i\underbrace{C_0\sin(\omega t + \gamma_0)}$ -> $C(t)$:

$C(t) = C_0\sin(\omega t + \gamma_0)$

Erfüllungsmenge $(M_\varphi f x_1, x_2) = \{\text{Menge}, \text{Menge}\}$

Formel $\varphi(x_1, x_2)$: x_1, x_2 als KO-achsen sehen.

Jede Funktion der Formel zeichnen. Mögliche Werte von x_1, x_2 sind die Erfüllungsmenge

---

Vollständige Induktion

1 Schritt: Induktionsanfang $\sum_{k=0}^{n} k = \ldots$ $n = \underline{0 \text{ oder }} 1$ setzen

2 Schritt: Indukt. schritt: LS und RS n auf $n+1$ setzen $\sum_{k=0}^{n+1} k = \ldots n+1$

wenn 1 und 2 wahr -> Beweis

Mengen M $(\mathbb{N}_{(0)} = \{(0), 1, 2, \ldots\};\ \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \ldots$

Aufbau $M = \{\ldots\} \vee \emptyset$ | aufz. Schreibw. $M = \{0, 1, \ldots$

Eigensch. $M = \{x \mid x \in G, \text{Eigensch.}\}$ | x teilt $y = \frac{y}{x}$

echte Teilm. $M_1 \subseteq M_2$ $(M_2 > M_1)$ | Teilm. $M_1 \subset M_2$ $(M_2 \geq M_1)$

Potenzmenge von $M = P(M) = \{\emptyset, \ldots\}$ | $M^2 = M \times M$

Binomialkoeff. $\binom{n}{k}$ $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ $(n \geq k)$

$M_1 \cup M_2 = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|$, dann (bei 3) +

$M_1 \cap M_2 = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cup M_2|$

$\cup$ Vereinig. $\cap$ Schnitt Sym. Diff. $M_1 \triangle M_2$

$M_1 \setminus M_2$ Differ./Komplem. M_1 M_2

$M_1 \setminus M_2 = M_1 \cap \bar{M}_2$, $M_1 \triangle M_2 = (M_1 \cap \bar{M}_2) \cup (M_2 \cap \bar{M}_1)$

$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$

$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$

$\underline{M}_1 \cup (\underline{M}_1 \cap M_2) \cup (\underline{M}_1 \cap M_3) = M_1$ (Teilmengen von M_1)

Abbildungen $f: D(f) \mapsto W(f);\ x \mapsto y$

$D(f)$ Definitionsmenge: Werte die x annehmen kan[n]

$W(f)$ Wertemenge: -"- y -"-

$B(f)$ Bildmenge $\hat{=}$ $W(f)$ die y in der Fkt annim[mt]

injektiv nicht inj. es darf nur 1 x pro y geben

surjektiv nicht surj. es muss für jedes y ein x geben

injektiv $\wedge$ surjektiv <-> bijektiv

Umkehrfkt $f^{-1}(x) \leftrightarrow f(x) \Rightarrow 2x = y \Rightarrow 2y = x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$

Scheitelform einer Parabel $ax^2 + bx + c = 0$ =>

$\Rightarrow ax^2 + bx + c + d^2 - d^2 \Rightarrow a(x+d)^2 + c - d^2 = y$

Komposition $f \circ g = g$ in f $f = x^2$ $g = \sqrt{x}$ $f \circ g = \sqrt{x}^2$

Ex. Komp? $B(g) \subseteq D(f) \Rightarrow$ Kompos. existiert

bei verschalt. Fkt. $f \circ (g \circ h)$ $B(g \circ h)$ graphisch ermitt[eln]

$|x| = \begin{matrix} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{matrix}$

Aussagenlogik $(w = 1,\ f = 0)$

A	B	¬A	¬B	A ∧ B	A ∨ B	A -> B	B -> A	A <-> B
w	w	f	f	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	w	f
f	w	w	f	f	w	w	f	f
f	f	w	w	f	f	w	w	w

$\wedge$ and; $\vee$ or; -> Implikation; <-> Äquivalenz

Tautologie: immer wahr; Kontradiktion: immer falsch

Implikation $A \rightarrow B \hat{=} \neg A \vee B$

Äquivalent $A \leftrightarrow B \hat{=} (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

Quantoren ($\exists x$ es gilt (mind.) 1 x; $\forall x$ für alle x / unabhängig von x)

$\exists x_1 \exists x_2$ es gilt (mind.) 1 x_1, x_2 -> Formel = wahr

$\forall x_1 \exists x_2$ unabh. v. x_1 gibt es ein x_2 -> wahr

$\exists x_1 \forall x_2$ x_2 ist egal, es gilt (mind) 1 x_1 -> wahr

$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3$ x_3 ist egal

$\forall x_1 \exists x_2 \exists x_3$ unabh. v. x_1 gibt es (mind) 1 $x_2 \wedge x_3$ -> w[ahr]

$\forall x_1 \forall x_2$ Gleichz. muss für jedes x_1, x_2 wahr sein

$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3$ unabhang. von x_1, x_2 gibt es ein x_3 -> wa[hr]

Pascalsches Dreieck

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

Exponenten v. $(a+b)^x$

ggT und kgV (alle Zahlen Faktorisieren)

ggT : alle kleinsten Potenzen multiplizieren

kgV : alle größten Potenzen multiplizieren

Restklassen ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

addition/division $\bar{a} \oplus \bar{a} = \overline{a+a}$

multiplikation $\bar{a} \odot \bar{a} = \overline{a \cdot a}$

multipl. inverse $\bar{a} \cdot \bar{a}^{-1} = 1$

$\bar{a}^{-1}$ => erw. eukl. Algorythmus (n, x)

$s \cdot a + t \cdot b = 1 \Rightarrow s = a^{-1}$

$x \pm n$!

Logarithmusgesetze

$$\log_a(y_1 \cdot y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$$

$$\log_a\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \log_a y_1 - \log_a y_2$$

$$\log_a(y^r) = r \log_a(y)$$

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(a) = 1$$

$$a^{\log_a(y)} = a$$

$\lg = \log_{10}$ (dekadischer)

$\ln = \log_e$ (natürlicher)

$\mathrm{lb} = \log_2$ (binärer)

$$\log_b(y) = \frac{\log_a(y)}{\log_a(b)}$$

b-adische Systeme (A-10, B-11; C-12, D-13, E-14, F-15)

mit eukl. alg. bis $x = 0 \cdot b + r$, dann reste zusammenf.

Kegelschnitte ($Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$)

Klassifikation:

Kreis $A = B$

Ellipse $A \cdot B > 0$

Hyperbel $A \cdot B < 0$

Parabel $A = 0 \vee B = 0$

e = Brennweite, F = Brennpunkt

M = Mittelpunkt, S = Scheitelpunkt

a = leitlinie (Parabel)

a = große Halbachse, b = kleine Halbachse

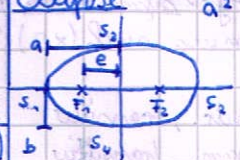
in allgemeine Hauptform bringen durch quadr. Ergänzen

Kreis: $(y - y_M)^2 + (x - x_M)^2 = r^2$

$M = (x_M / y_M)$

Radius r

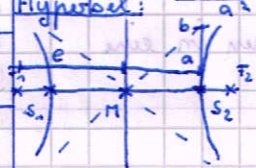
Ellipse $\dfrac{(x - x_M)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1$



$F_{1/2} = x_M \pm e$; $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

$S_{1/2} = x_M \pm a$; $S_{3/4} = y_M \pm b$

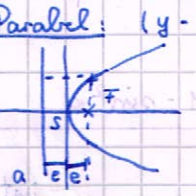
Hyperbel: $\dfrac{(x - x_M)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_M)^2}{b^2} = r$ ($T_1 - T_2 \Leftrightarrow T_2 - T_1$!)



$F_{1/2} = x_M \pm e$; $e = \sqrt{a^2 + b^2}$

$S_{1/2} = x_M \pm a$; Asymptoten $y = y_M \pm \frac{b}{a}(x - x$

Parabel: $(y - y_S)^2 = 2p(x - x_S)$ bzw. $(x - x_S)^2 = 2p(y - y_S)$



$p > 0 \Rightarrow$ nach rechts geöffnet

$p < 0 \Rightarrow$ " links "

$F = x_S \pm e$

$e = \frac{|p|}{2} = \overline{FS}$

$a(x): x = x_S \pm e$

Vektorrechnung

Vektor $\vec{a}$ P_1 $\overrightarrow{P_1P_2} = \vec{a}$

Geradengleichung $g: \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_p + \lambda\vec{a}$

Ebene $E: \vec{r}(\lambda, \mu) = \vec{r}_p + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

(Normalform) $E: \vec{n} \cdot (\vec{r}_a - \vec{r}_p) = 0$ $\quad (\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b})$

Winkel 2 Geraden/Vekt. $\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}\right)$

Schnittpunkt 2 Geraden $g_1 = g_2$ LGS lösen

Abstand 2 Ger. (parallel $a_1 \times a_2 = 0$) $d = \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{a}_1|}$

Abstand Punkt - Gerade $d = \left|\vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} \times (\vec{r}_p - \vec{r}_g)\right|$

Abstand Punkt - Ebene $d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_p - \vec{r}_E)|}{|\vec{n}|}$

Abstand Gerade-Ebene (parallel $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$) $d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_g - \vec{r}_E)|}{|\vec{n}|}$

Schnittp. Ger. - Ebene $r_s = \vec{r}_g + \left|\frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_E - \vec{r}_g)}{\vec{n} \cdot \vec{a}}\right| \cdot \vec{a}$ (Vektor·Ska)

Winkel Ger - Ebene $\varphi = \arcsin\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}\right)$

Abstand 2 Ebenen (parallel $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0$) $d = \frac{|\vec{n}_1 (\vec{r}_{E2} - \vec{r}_{E1})|}{|\vec{n}_1|}$

Schnittgerade 2 Ebenen $\vec{r}(\lambda) = \vec{r} + \lambda\vec{a}$ mit $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$\vec{r} \Rightarrow x_r = 0$ setzen LGS für $E_1 E_2$ lösen

Schnittwinkel 2 Ebenen $\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right)$ komplanar

Volumen Körper (Spatprodukt) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ wenn $0 \Rightarrow$ komplanar 3 Vektoren in 1 E

2 Vektoren (anti) parallel (Kolliniar) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

Lineares Gleichungssystem (Gaußverfahren

in Form

$$\begin{array}{ccc|c} 1 \cdot x_1 & b \cdot x_2 & c \cdot x_3 & d \\ 0 & 1 \cdot x_2 & c \cdot x_3 & d \\ 0 & 0 & 1 \cdot x_3 & d \end{array}$$

$\pm a \cdot$ Zeile $/ \cdot : a$ $(a \in \mathbb{R})$

und auflösen

(bei n Glg. und n+1 unbekannten darf 1 x = 1 gesetzt

Matrizen

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ 3×2 Matrix

Quadratische Matrix $(n \times n)$ n Zeilen, n Spalten

Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | Diago. mat. $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Addition / Subtraktion

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplikation

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} \end{array}$$

mit $c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{21} \cdot b_{12}$

Transponierte A^T

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \quad / \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} \searrow + \searrow + \searrow - \nearrow - \nearrow - \nearrow = \det A = |A$$