Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (15)

Gerald Kupris

10.11.2010

Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen (1)

Nach dem Superpositionsprinzip der Physik überlagern sich zwei Schwingungen $y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t+\varphi_1)$ und $y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t+\varphi_2)$ ungestört und ergeben die resultierende

$$y_{res} = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega t+\varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t+\varphi_2) = A_{res} \cdot \sin(\omega t+\varphi_{res})$$

Die resultierende Amplitude A_{res} und die resultierende Phase φ_{res} lassen sich schrittweise aus den Amplituden A_1 und A_2 sowie den Phasenwinkeln φ_1 und φ_2 der Einzelschwingungen berechnen.

1. Übergang von der reellen Form zur komplexen Form:

   Die Schwingungen y_1 und y_2 werden durch komplexe Funktionen dargestellt.

   $$\underline{y}_1 = \underline{A}_1 \cdot e^{j\omega t} \quad \text{und} \quad \underline{y}_2 = \underline{A}_2 \cdot e^{j\omega t}$$

   $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$ sind dabei die komplexen Schwingungsamplituden (Zeiger)

   $$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\varphi 1} \quad \text{und} \quad \underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\,\varphi 2}$$

   Erforderlich sind dafür A_1 und φ_1 sowie A_2 und φ_2.

Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen (2)

2. Superposition in komplexer Form:

Die komplexen Zeiger $\underline{y}_1$ und $\underline{y}_2$ werden zur Überlagerung gebracht und ergeben einen resultierenden komplexen Zeiger $\underline{y}_{res}$:

$$\underline{y}_{res} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = \underline{A}_1 \cdot e^{j\omega t} + \underline{A}_2 \cdot e^{j\omega t} = (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \cdot e^{j\omega t} = \underline{A}_{res} \cdot e^{j\omega t}$$

Die Addition der komplexen Amplituden erfolgt in algebraischer Form.

2a) Umwandlung in die algebraische Form

$$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\varphi 1} = A_1 \cdot \cos\varphi_1 + j \cdot A_1 \cdot \sin\varphi_1$$

$$\underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\varphi 2} = A_2 \cdot \cos\varphi_2 + j \cdot A_2 \cdot \sin\varphi_2$$

2b) Addition in algebraischer Form

$$\underline{A}_{res} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = A_1 \cdot \cos\varphi_1 + j \cdot A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2 + j \cdot A_2 \cdot \sin\varphi_2$$

2c) Rückwandlung des Ergebnisses in die trigonometrische Form

$$\underline{A}_{res} = A_{res} \cdot e^{j\,\varphi res}$$

Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen (3)

3. Rücktransformation aus der komplexen Form in die reelle Form:

   Die resultierende Schwingung $y = A \cdot \sin(\omega t+\varphi)$ ist der Imaginärteil des resultierenden komplexen Zeigers $\underline{y}$:

$$y_{res} = \mathrm{Im}\,(\underline{y}) = \mathrm{Im}\,(\underline{A} \cdot e^{j\omega t}) = A_{res} \cdot \sin(\omega t+\varphi_{res})$$

Beispielaufgaben

1. Gegeben sind jeweils zwei gleichfrequente Wechselspannungen u_1(t) und u_2(t). Bestimmen Sie die durch Superposition entstehende resultierende Wechselspannung mit Hilfe der komplexen Rechnung.

a) $u_1(t) = 120V \cdot \sin(\omega t + 2\pi/3)$, $u_2(t) = 130V \cdot \cos(\omega t - \pi/4)$

b) $$u_1(t) = 100V \cdot \sin(\omega t)$$

$$u_2(t) = 150V \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

Ergebnis: $u(t) = 232\ V \cdot \sin(\omega t + 0{,}48)$

c) $$u_1(t) = -50V \cdot \sin(\omega t)$$

$$u_2(t) = 200V \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

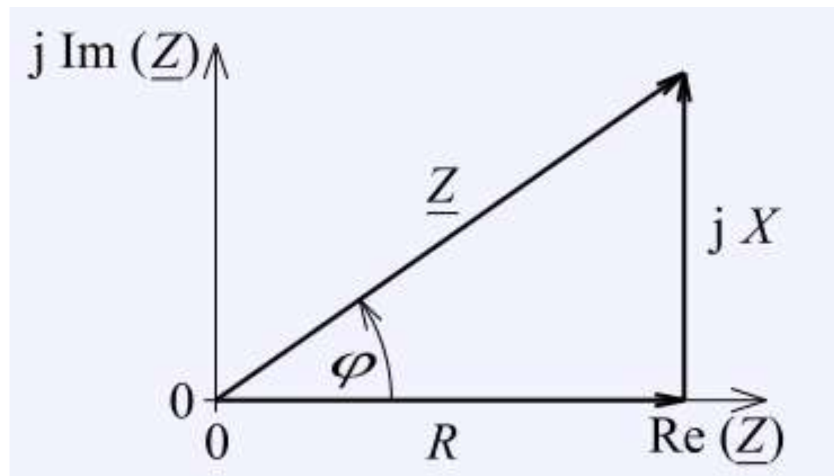
Ergebnis: $u(t) = 180\ V \cdot \sin(\omega t + 1{,}29)$

Ohmsches Gesetz im komplexen Bereich

Das Verhältnis der komplexen Spannung zur komplexen Stromstärke ist unter den genannten Voraussetzungen eine komplexe Konstante. Diese Aussage ist das ohmsche Gesetz für komplexe Größen. Die Konstante wird als komplexer Widerstand oder Impedanz ***Z*** bezeichnet. Auch diese wird in der komplexen Ebene als Zeiger dargestellt, der aber als zeitunabhängige Größe nicht rotiert.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{\hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$\underline{Z} = R + jX$$



$\underline{Z}$ = Impedanz
R = Re($\underline{Z}$) ohmscher Widerstand
X = Im($\underline{Z}$) Blindwiderstand

Ohmscher Widerstand

$$\underline{Z}_R = R = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}\angle 0 = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}$$

Der komplexe Widerstand besteht hier nur aus einem positiven Ohmschen Widerstand.

Kondensator

Kondensator:

$$\frac{\underline{i}}{C} = \frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t} = \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)} \cdot \mathrm{j}\omega = \underline{u}\,\mathrm{j}\omega$$

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j} \cdot \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{Z}_C = \mathrm{j} \cdot X_C = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}}{\hat{\imath}}\angle(-90°)$$

Der komplexe Widerstand besteht hier nur aus einem negativen Blindwiderstand.

$$X_C = -\frac{1}{\omega \cdot C} = -\frac{1}{2\pi f \cdot C}$$

1 Farad:

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{1\,\mathrm{As}}{1\,\mathrm{V}} = 1\,\mathrm{F}$$

Spule

Spule:

$$\frac{\underline{u}}{L} = \frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} = \hat{\imath} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)} \cdot \mathrm{j}\omega = \underline{i}\;\mathrm{j}\omega$$

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \mathrm{j} \cdot \omega L = \omega L \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{Z}_L = \mathrm{j} \cdot X_L = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}}{\hat{\imath}}\angle(90^\circ)$$

Der komplexe Widerstand besteht hier nur aus einem positiven Blindwiderstand.

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi f \cdot L$$

1 Henry: 1 H = 1 Vs / 1A

Zusammenschaltung mehrerer komplexer Widerstände

Sind alle Bauelemente in Reihe geschaltet, so ist es zweckmäßig, den Strom vorzugeben. Man kann so für jedes Element, durch das derselbe Strom fließt, die angelegte Spannung bestimmen und dann alle Spannungen durch Addition der Zeiger zusammenfassen.

Gleichwertig kann man erst alle Widerstände komplex addieren und dann mit dem Strom multiplizieren.

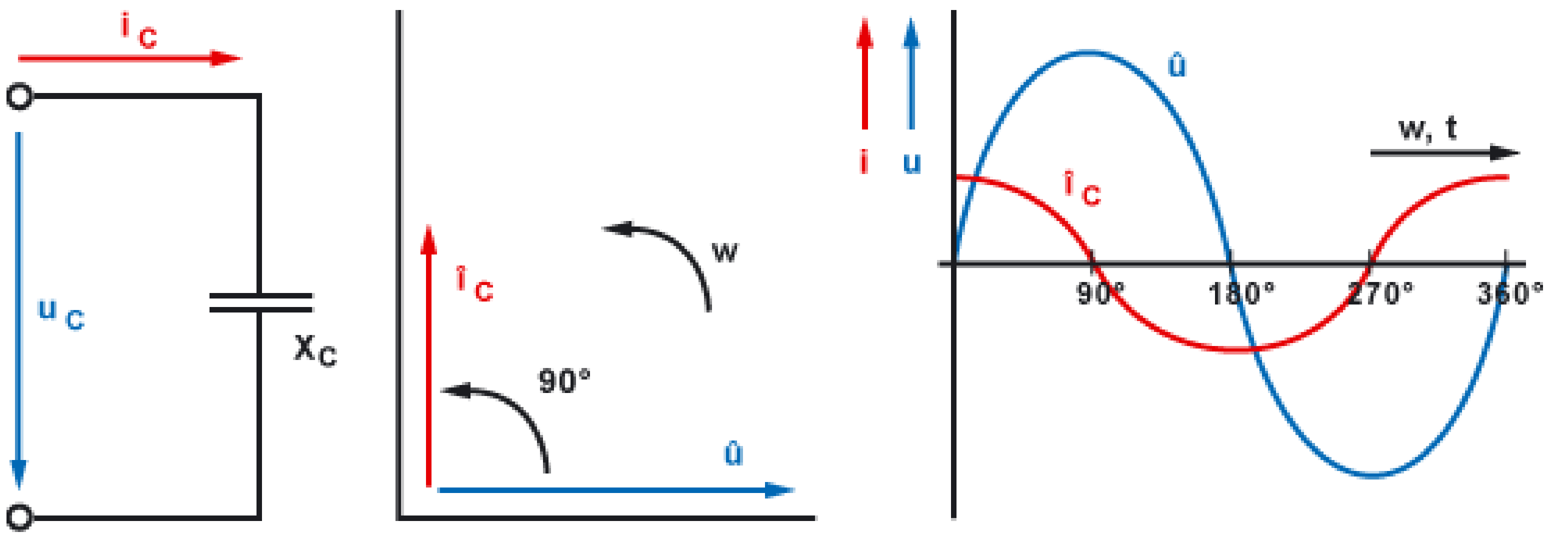
Sind jedoch alle Bauelemente parallel geschaltet, so wird man eine Spannung vorgeben. Man kann den Strom durch jedes Element getrennt berechnen und dann alle komplexen Ströme durch Aneinandersetzung der Zeiger addieren.

Gleichwertig kann man erst alle komplexen Leitwerte addieren und dann mit der Spannung multiplizieren.

Ist die Schaltung eine Mischform, so ist man gezwungen, sie elementar zu zerlegen und jede Teilschaltung getrennt zu berechnen, bevor man sie wieder zusammensetzt.

Phasenverschiebung

φ_u, φ_i	Nullphasenwinkel von ***u(t)***, ***i(t)***
$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$	Phasenverschiebungswinkel zwischen ***u(t)*** und ***i(t)***
$0° < \varphi < 180°$	Spannung eilt Strom um $\boldsymbol{\varphi}$ voraus
$-180° < \varphi < 0°$	Strom eilt Spannung um | $\boldsymbol{\varphi}$ | voraus



Elektrische Leistungsberechnung

Elektrische Leistung ist das Produkt aus Spannung U und Strom I an einem Zweipol.

P = U · I

Strom und Spannung sind im allgemeinen zeitabhängig:

P(t) = u(t) · i(t)

P(t) - Momentanwert der elektrischen Leistung

P(t) > 0 : Energiefluß zum Verbraucher
P(t) < 0 : Energierückfluß zum Generator

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Leistung

Der zeitunabhängige Zeiger wird in DIN 5483-3 und DIN 40110-1 als komplexe Leistung oder komplexe Scheinleistung bezeichnet.

$$\underline{S} = \underline{U}\ \underline{I}^{\star} = S\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)} = P + \mathrm{j}Q$$

Darin sind die in der Wechselstromtechnik üblichen drei Kenngrößen zur Leistung enthalten:

die Scheinleistung S (in VA):

$$S = |\underline{S}| = U\ I$$

die Wirkleistung P (in W), die als arithmetischer Mittelwert über p definiert wird:

$$P = \mathrm{Re}\ \underline{S} = U\ I\ \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

die ebenfalls frei von Schwingungsanteilen (Augenblickswerten) definierte Blindleistung (Verschiebungsleistung) Q (in var):

$$Q = \mathrm{Im}\ \underline{S} = U\ I\ \sin(\varphi_u - \varphi_i)$$

Definition: Reelle Funktion

Der Begriff der Funktion wird in der Mathematik sehr allgemein gefasst. Typischerweise definiert man eine Funktion als eine Abbildung von einer Menge in eine andere Menge. Wir wollen jedoch Abbildungen zwischen reellen Zahlen betrachten.

Unter einer **reellen Funktion** f versteht man eine Abbildung, die jeder reellen Zahl x aus einer **Definitionsmenge** $D \subset \mathbb{R}$ genau eine reelle Zahl y aus einer **Wertemenge** W zuordnet.

$$x \mapsto y = f(x), \quad x \in D.$$

Man bezeichnet x als **unabhängige Variable** und y als **abhängige Variable**.

Strenggenommen sollte man zwischen f und f(x) unterscheiden. f ist der Name der Funktion und f(x) ist der Wert, der x zugeordnet ist. Manchmal sagt man auch Definitions- und Wertebereich anstelle von Definitions- und Wertemenge.

Definitions- und Wertemenge

Maximaler Definitionsbereich, Definitionslücke
Oftmals wird der Definitionsbereich einer Funktion nicht explizit angegeben. In diesem Fall betrachtet man die Funktion auf dem maximal möglichen Definitionsbereich. Definitionslücken sind einzelne Stellen, die nicht im Definitionsbereich liegen.

Beispiele

Wertebereich
Zur Bestimmung des Wertebereichs einer Funktion benötigt man in der Regel einige Informationen über die Funktion, wie etwa die Extremwerte, die Monotonieeigenschaften und das asymptotische Verhalten.

Beispiele

Injektive, surjektive und bijektive Funktion

Eine Funktion $f : D \to W$ heißt

- **injektiv**, falls jeder Funktionswert y ein eindeutiges Argument x mit $f(x) = y$ hat,
- **surjektiv**, falls jede Zahl y aus der Wertemenge W auch tatsächlich mindestens einmal als Funktionswert angenommen wird,
- **bijektiv**, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

Beispiele

Nullstelle, Wertetabelle, Graph

Eine **Nullstelle** einer Funktion f ist ein x-Wert, an dem die Funktion den Wert null hat. Eine Nullstelle erfüllt die Gleichung $f(x) = 0$.

Eine Wertetabelle einer Funktion enthält die Zuordnung der Funktionswerte zu einigen speziellen x-Werten. Damit die Tabelle das Verhalten der Funktion gut beschreibt, müssen die x-Werte geeignet ausgewählt werden.

Beispiele

Die grafische Darstellung der Punkte $(x\,|\,f(x))$ in einem kartesischen Koordinatensystem nennt man **Schaubild** oder **Graph** der Funktion f.

Beispiele

Schnitte mit den Achsen

Schnitte mit x-Achse
Die x-Werte der Schnittpunkte des Schaubilds der Funktion f mit der x-Achse, also die Nullstellen, bestimmt man aus der Gleichung

$$f(x) = 0.$$

Schnitt mit y-Achse
Den y-Wert des Schnittpunktes des Schaubildes der Funktion f mit der y-Achse kann man durch Einsetzen von $x = 0$ in die Funktionsgleichung berechnen, falls $x = 0$ im Definitionsbereich von f liegt.

Beispiele

Funktionsgleichung

Funktionen kann man auch durch implizite Gleichungen definieren. Dabei ist jedoch zu beachten, dass nicht jede implizite Gleichung eine eindeutige Funktion definiert. Unter Umständen werden durch eine implizite Gleichung mehrere Funktionen definiert. Es gibt auch implizite Gleichungen, die gar keine Funktion definieren.

Beispiele

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

http://de.wikipedia.org

http://www.komplexe-zahlen.de

http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_2/basics/b2_1_5.html

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/imaginaer1.htm