Physik für Infotronik (7)

Gerald Kupris

29.10.2012

Arbeit und kinetische Energie

1 Messung und Maßeinheiten

Teil 1: Mechanik

2 Eindimensionale Bewegung
3 Bewegung in zwei und drei Dimensionen
4 Die Newtonschen Axiome
5 Anwendungen der Newtonschen Axiome
6 Arbeit und kinetische Energie
7 Energieerhaltung
8 Der Impuls
9 Drehbewegungen
10 Der Drehimpuls
11 Gravitation
12 Statisches Gleichgewicht und Elastizität
13 Fluide

Wiederholung: Arbeit einer konstanten Kraft

Arbeit ist die Übertragung von Energie durch Kraft.

In der Physik ist Arbeit Kraft mal Weg: Wenn auf einen Körper auf der geraden Strecke vom Punkt A zum Punkt B eine konstante Kraft wirkt, dann verrichtet die Kraft am Körper die Arbeit W (von engl. „Work“).

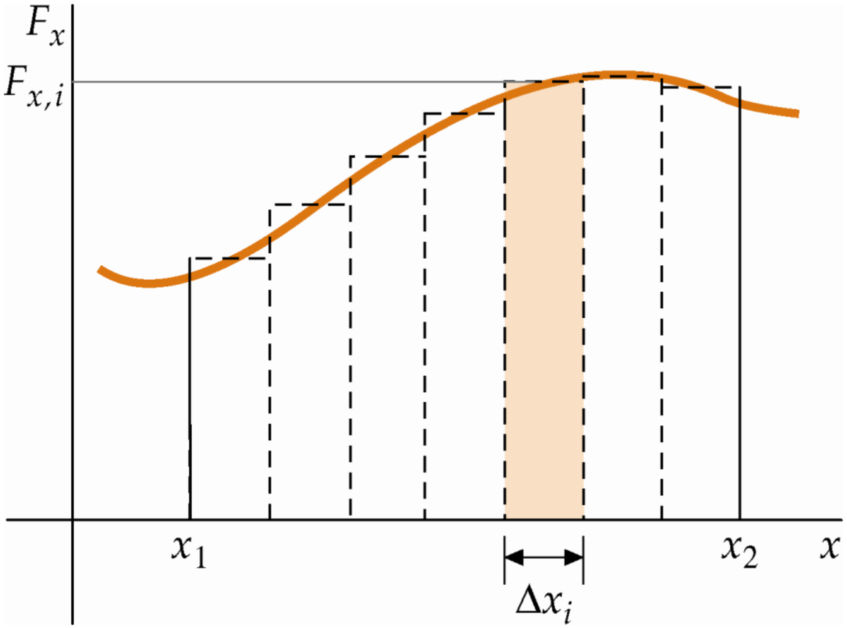
Die Bedeutung des physikalischen Begriffs Arbeit beruht auf folgendem Sachverhalt: Bewirkt die betrachtete Kraft die Bewegung des Körpers, so erhöht sich seine potentielle Energie auf dem Weg von A nach B um die an ihm verrichtete Arbeit W.

Auf dem Rückweg wird bei unveränderter Kraft die negative Arbeit verrichtet.

$$W = F_x \, \Delta x = |F| \cos \theta \, | \Delta x |$$

Einheit der Arbeit: **Joule** $1\ J = 1\ N \cdot m = 1\ kg\ m^2 / s^2$

Wiederholung: Arbeit einer ortsabhängigen Kraft



$$W \approx \sum_{i=1}^{N} W_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}(\mathbf{s}_i)\Delta\mathbf{s}_i \,.$$

$$W = \int_{\mathbf{s}_1}^{\mathbf{s}_2} \mathbf{F}(\mathbf{s})\,\mathrm{d}\mathbf{s}\,,$$

Die Arbeit, die eine ortsabhängige Kraft verrichtet, kann grafisch als die Fläche unter der Kurve $F_x(x)$ dargestellt werden.

Wiederholung: Die Leistung P

Die Definition der Arbeit macht keine Aussage darüber, wie lange es dauert, diese Arbeit zu verrichten. Die Rate, mit der eine Kraft Arbeit verrichtet wird Leistung P genannt (von engl. „Power“).

Die Leistung P ist der Quotient aus verrichteter Arbeit ΔW oder dafür aufgewendeter Energie ΔE und der dazu benötigten Zeit Δt

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \; .$$

Die Einheit für die Leistung ist das **Watt**.

$$1\,\mathrm{W} = 1\,\frac{\mathrm{Nm}}{\mathrm{s}} \qquad 1\,\mathrm{W} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^3}}$$

Wiederholung: Mechanische Leistung

Bei zeitlich veränderlicher Leistung gibt es eine Augenblicksleistung beziehungsweise Momentanleistung P(t), die sich aus dem Grenzwert ergibt, wenn der Zeitabschnitt Δt gegen null geht:

$$P(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} \ , \ P(t) = \frac{\mathrm{d}W(t)}{\mathrm{d}t} \ .$$

Um in einer Zeit dt eine Strecke ds mit der Geschwindigkeit v gegen eine Kraft F zurück-zulegen, ist also eine Leistung P nötig.

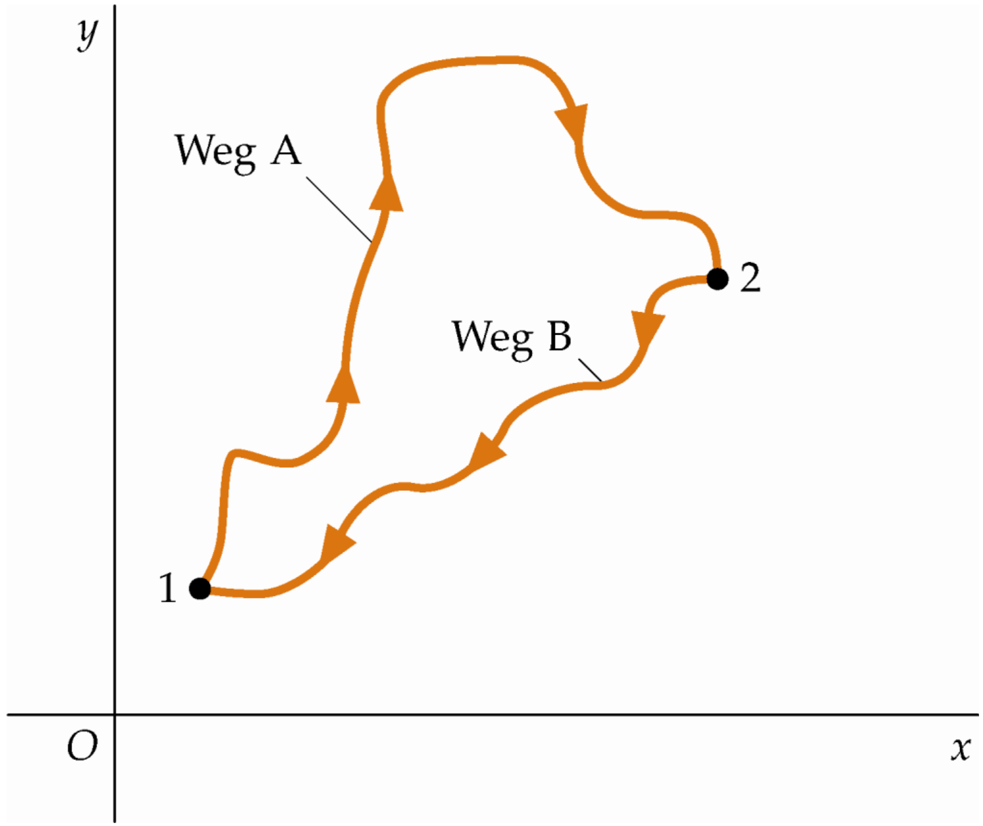
$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

$$P = \frac{F\,\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = F \cdot v \qquad P = \frac{\vec{F}\,\mathrm{d}\vec{s}}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

Konservative Kräfte

Eine Kraft ist konservativ, wenn die Arbeit, die sie an einem Teilchen verrichtet, das sich von einem Punkt 1 zu einem anderen Punkt 2 bewegt, unabhängig von dem Weg des Teilchens zwischen diesen beiden Punkten ist.

Eine Kraft ist konservativ, wenn die Gesamtarbeit die sie an einem Teilchen verrichtet, das sich auf einer beliebigen geschlossenen Bahn bewegt, null ist.



Beispiele

Konservative Kraft
Konservative Arbeit

Wenn ein Skiläufer mit einem Skilift auf einen Hügel der Höhe h fährt, beträgt die Arbeit, die die Gravitationskraft an dem Skiläufer verrichtet. $-m \cdot g \cdot h$, wobei m die Masse des Skiläufers ist.
Dagegen ist die Arbeit, die die Gravitationskraft beim Abfahren an ihm verrichtet, unabhängig von der Form des Hügels immer $+m \cdot g \cdot h$.
Somit ist die Gesamtarbeit, die die Gravitationskraft während einer vollen Runde hinauf und hinab verrichtet unabhängig vom Weg gleich null.

Nichtkonservative Kraft
Nichtkonservative Arbeit

Ein Block, wird geradlinig auf dem Tisch erst von einem Punkt A zu einem Punkt B und anschließend wieder zurück verschoben, sodass er zum Schluss wieder bei A ist. Während er sich bewegt, wirkt auf ihn die Reibungskraft, die seiner Bewegung entgegengesetzt ist. Damit wirkt die Kraft, mit der der Block geschoben wird, in Bewegungsrichtung. Demzufolge ist die beim Schieben verrichtete Arbeit sowohl auf der Hinrichtung als auch auf der Rückrichtung positiv.

Die Energie

Definition: Die Energie eines Systems ist seine Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.

Energie ist nötig, um einen Körper zu beschleunigen oder um ihn entgegen einer Kraft zu bewegen, um eine Substanz zu erwärmen, um ein Gas zusammen-zudrücken, um elektrischen Strom fließen zu lassen oder um elektromagnetische Wellen abzustrahlen.

Pflanzen, Tiere und Menschen benötigen Energie, um leben zu können. Energie benötigt man auch für den Betrieb von Computersystemen, für Telekommunikation und für jegliche wirtschaftliche Produktion.

Energie kann in verschiedenen Energieformen vorkommen. Hierzu gehören beispielsweise potentielle Energie, kinetische Energie, chemische Energie oder thermische Energie. Die Arbeit wandelt Energie zwischen verschiedenen Energieformen um.

Potenzielle Energie

Die potenzielle Energie (auch Höhen- oder Lageenergie) ist eine der Formen von Energie in der Physik.

Es handelt sich dabei um diejenige Energie, welche ein Körper durch seine Position oder Lage in einem **konservativen** Kraftfeld (etwa einem Gravitationsfeld oder elektrischen Feld) enthält. Man spricht daher auch von Lageenergie.

Ein bestimmter Ort in diesem Feld dient dabei als Bezugspunkt; beim Gravitationsfeld der Erde kann dies beispielsweise die Erdoberfläche sein. Die Begriffe Potenzial und potenzielle Energie sind eng verwandt und unterscheiden sich nur um einen konstanten Faktor (in der Mechanik die Masse, in der Elektrostatik die elektrische Ladung). Als Formelzeichen für die potenzielle Energie wird üblicherweise **V** oder $\mathbf{E_{pot}}$ verwendet.

$$E_{pot}(r) = -\int_{r1}^{r2} F(r)\,dr$$

Potenzielle Energie

Wir definieren die potenzielle Energie so, dass die von einer **konservativen** Kraft verrichtete Arbeit gleich der Abnahme der potenziellen Energie ist:

$$W = \int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\Delta E_{\text{pot}}$$

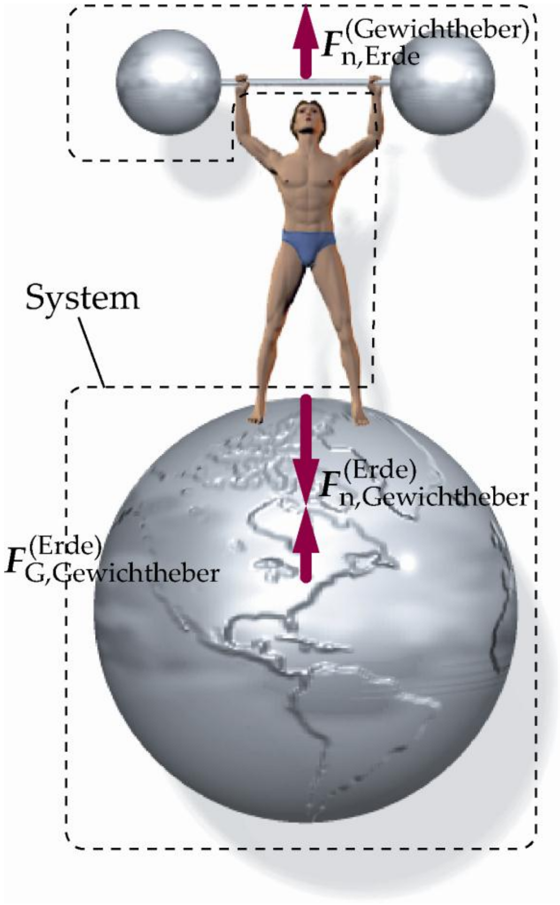
$$\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{pot},2} - E_{\text{pot},1} = -\int_1^2 \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

Potenzielle Energie der Gravitationskraft:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E_{\text{pot}} &= -\boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -(-m\,g\,\hat{\boldsymbol{y}}) \cdot (\mathrm{d}x\,\hat{\boldsymbol{x}} + \mathrm{d}y\,\hat{\boldsymbol{y}} + \mathrm{d}z\hat{\boldsymbol{z}}) \\ &= +m\,g\,\mathrm{d}y \end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} = 0 \qquad \hat{\boldsymbol{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{y}} = 1$$

Potenzielle Energie der Gravitationskraft



In der Nähe der Erdoberfläche:

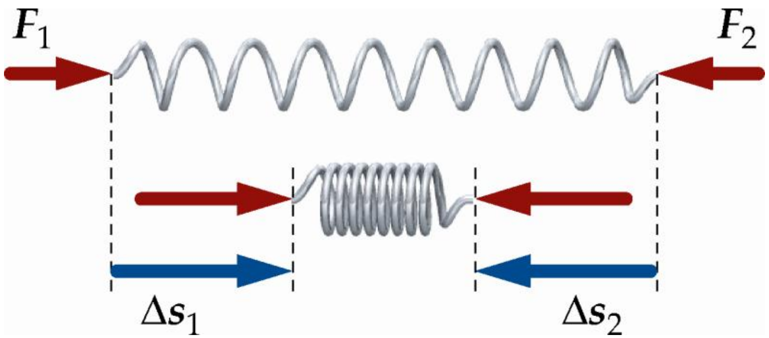
$$\boldsymbol{F} = -m\, g\, \hat{\boldsymbol{y}}$$

$$E_{pot} = \int m\, g\, \mathrm{d}y = m\, g\, y + E_{pot,0}$$

$$E_{pot} = E_{pot,0} + m\, g\, y$$

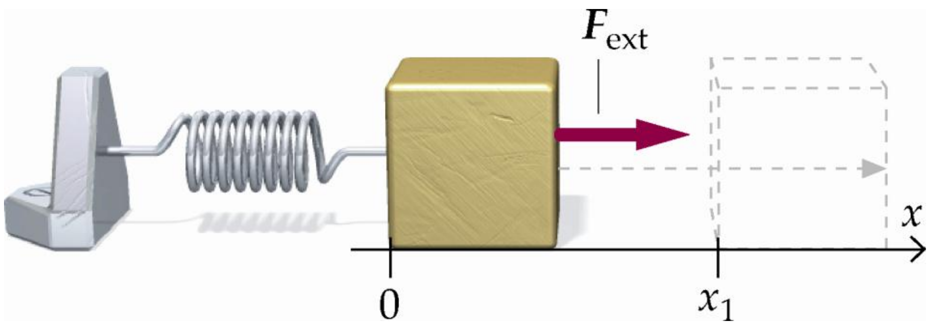
$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$$

Potenzielle Energie einer Federkraft



$$dE_{pot} = -F \cdot ds = -F_x \cdot dx = -(k_F x)dx = k_F x \cdot dx$$

$$E_{pot} = \int k_F x \cdot dx = \frac{1}{2} k_F x^2 + E_{pot,0}$$



$$E_{pot} = \frac{1}{2} k_F x^2$$

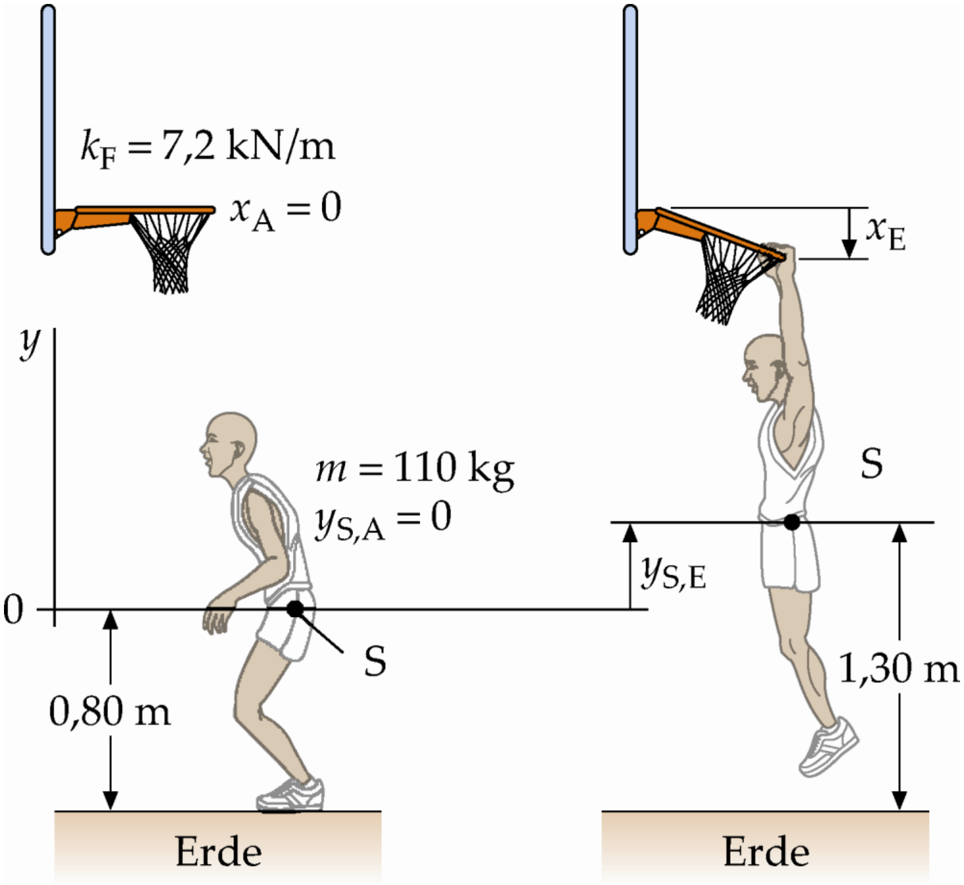
Beispiel: die potenzielle Energie eines Basketballspielers

Das System besteht aus einem Basketballspieler mit einer Masse von 110 kg, aus dem Ring des Basketballkorbs und der Erde.

Wie groß ist die potentielle Energie des Systems, wenn der Basketballspieler vorn am Korb hängt?

Der Massemittelpunkt des Spielers hat eine Höhe von 0,8 m wenn der Spieler steht und 1,3 m, wenn der Spieler am Korb hängt.

Die Federkonstante des Korbrings beträgt 7,2 kN/m und das vordere Ende des Korbrings wird s = 15 cm nach unten gezogen.



Kinetische Energie

Die kinetische Energie (von griechisch kinesis = Bewegung) oder auch Bewegungs-energie ist die Energie, die ein Objekt aufgrund seiner Bewegung enthält.

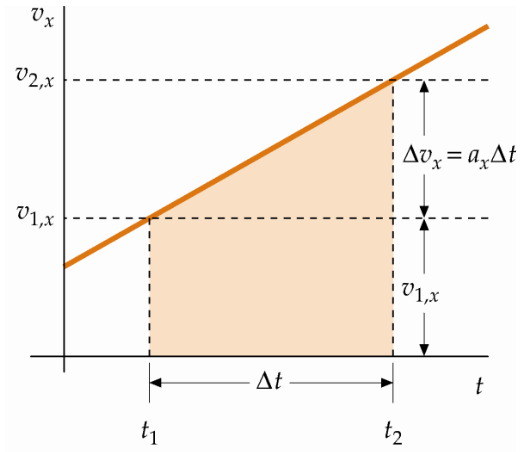
Sie entspricht der Arbeit, die aufgewendet werden muss, um das Objekt aus der Ruhe in die momentane Bewegung zu versetzen. Sie hängt von der Masse m und von der Geschwindigkeit v des bewegten Körpers ab.

Als Formelzeichen für die kinetische Energie wird in der theoretischen Physik üblicher-weise **T** verwendet, seltener auch $\mathbf{E_{kin}}$.

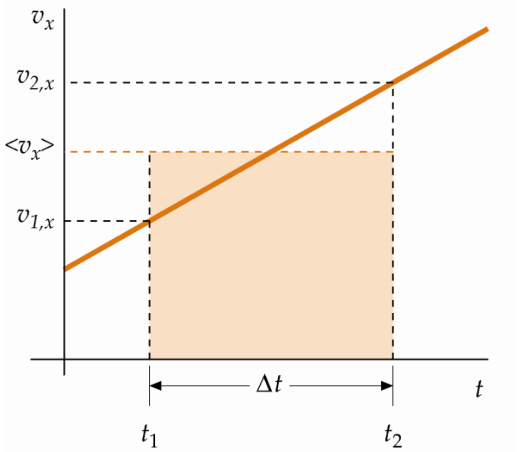
$$E_{kin} = \frac{m}{2} v^2$$

$$E_{kin} = \frac{m}{2} (v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2)$$

Gleichförmig beschleunigte Bewegung



(a)



(b)

$v_x = v_{0,x} + a_x t$ (bei a_x konstant)

Dies ist die Gleichung einer Gerade in einem v_x- t - Diagramm. Die Verschiebung Δx entspricht dem Flächeninhalt unter der Kurve.

$$\Delta x = v_{1,x} \Delta t + \tfrac{1}{2} a_x (\Delta t)^2$$

Mit $t_1 = 0$ und $t_2 = t$ ergibt sich:

$$x - x_0 = v_{0,x} t + \tfrac{1}{2} a_x t^2$$

Bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die mittlere Geschwindigkeit der Mittelwert zwischen Anfangs- und Endgeschwindigkeit.

$$\langle v_x \rangle = \tfrac{1}{2}\left(v_{1,x} + v_{2,x}\right)$$

Gleichförmig beschleunigte Bewegung

$$v_x = v_{0,x} + a_x \cdot \Delta t \qquad (a_x = const.)$$

$$\Delta t = \frac{v_x - v_{0,x}}{a_x}$$

$$\Delta x = v_{0,x} \cdot \Delta t + \tfrac{1}{2} a_x (\Delta t)^2$$

$$\Delta x = v_{0,x} \cdot \frac{v_x - v_{0,x}}{a_x} + \tfrac{1}{2} a_x \left(\frac{v_x - v_{0,x}}{a_x} \right)^2$$

$$2a_x \Delta x = 2v_{0,x}(v_x - v_{0,x}) + (v_x - v_{0,x})^2$$

$$t_1 = 0 \qquad t_2 = t$$

$$v_x^{\ 2} = v^2{}_{0,x} + 2a_x \Delta x$$

$$x - x_0 = v_{0,x} \cdot t + \tfrac{1}{2} a_x t^2$$

Kinetische Energie

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich unter Wirkung der Kraft F entlang der x-Achse:

$$F_x = m\,a_x$$

Bei konstanter Kraft ist auch die Beschleunigung konstant:

$$v_{E,x}^2 = v_{A,x}^2 + 2\,a_x\,\Delta x$$

$$F_x = m\,a_x \qquad a_x = \frac{1}{2\,\Delta x}\left(v_{E,x}^2 - v_{A,x}^2\right)$$

$$F_x\,\Delta x = \tfrac{1}{2}\,m\,v_{E,x}^2 - \tfrac{1}{2}\,m\,v_{A,x}^2$$

$$W = \tfrac{1}{2}\,m\,v_{E,x}^2 - \tfrac{1}{2}\,m\,v_{A,x}^2$$

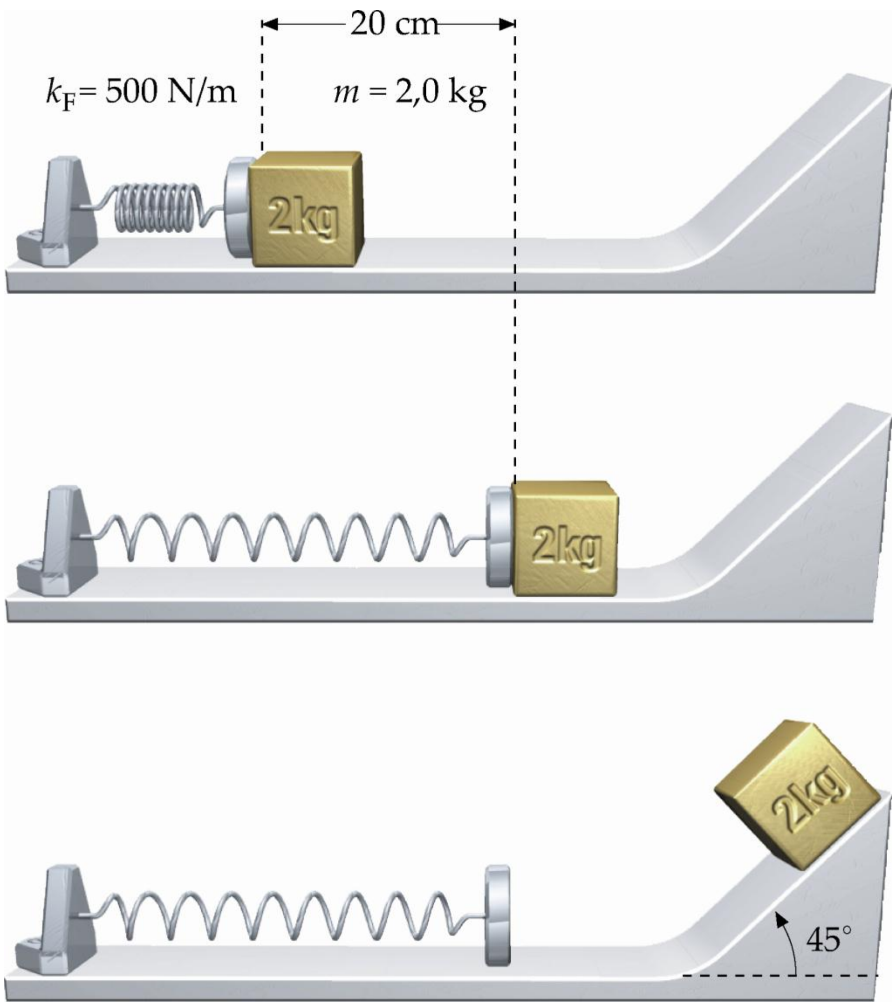
$$E_{kin} = \tfrac{1}{2}\,m\,v^2$$

$$W = \Delta E_{kin}$$

Die kinetische Energie hängt vom *Betrag* der Geschwindigkeit eines Teilchens und nicht von seiner Geschwindigkeit selbst ab. Ändert sich die Richtung der Geschwindigkeit, während ihr Betrag gleich bleibt, bleibt auch die kinetische Energie dieselbe.

Beispiel: ein Block zwischen Feder und geneigter Ebene

Ein Block mit einer Masse von 2,0 kg liegt auf einer reibungsfreien horizontalen Oberfläche. Anfangs wird er gegen eine Feder mit einer Federkonstante von 500 N/m gedrückt, sodass die Feder 20 cm zusammengedrückt ist. Nun wird der Block losgelassen. Während sich die Feder entspannt, beschleunigt die Federkraft den Block auf der Oberfläche und anschließend eine reibungsfreie, um 45° geneigte Rampe hinauf.



a) Wie weit bewegt sich der Block auf der Rampe, bis er kurz zur Ruhe kommt?
b) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Blockes wenn er sich von der Feder löst?
c) Welche Arbeit verrichtet die Normalkraft an dem Block?

Energieerhaltungssatz

Der Energieerhaltungssatz sagt aus, dass die Gesamtenergie eines abgeschlossenen Systems sich nicht mit der Zeit ändert. Zwar kann Energie zwischen verschiedenen Energieformen umgewandelt werden, beispielsweise von Bewegungsenergie in Wärme. Es ist jedoch nicht möglich, innerhalb eines abgeschlossenen Systems Energie zu erzeugen oder zu vernichten: Die Energie ist eine Erhaltungsgröße.

Die Gesamtenergie in einem abgeschlossenen System bleibt konstant.

Unter einem abgeschlossenen System versteht man ein System ohne Energie-, Informations- oder Stoffaustausch und ohne Wechselwirkung mit der Umgebung.

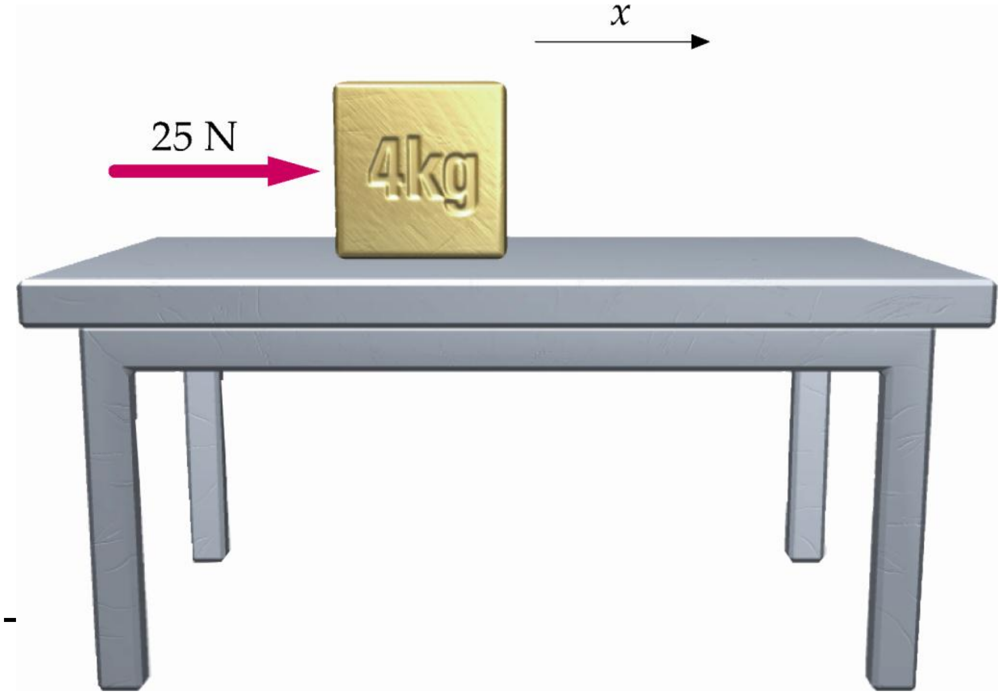
Allgemeiner Energieerhaltungssatz:

$$E_{ges} = E_{kin} + E_{pot} + E_{wärm} + E_{chem} + \ldots.. = \text{const.}$$

Energieerhaltungssatz der klassischen Mechanik:

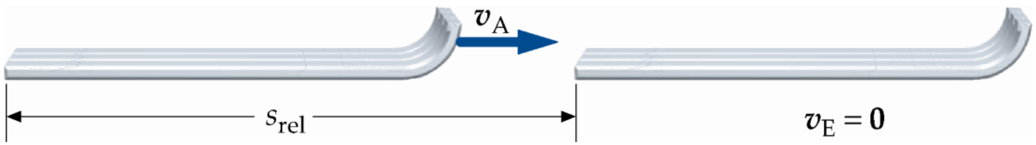
$$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = T + V = \text{const.}$$

Aufgaben mit Gleitreibung



Eine 4,0 kg Kiste wird mit einer Kraft von 25 N aus dem Stand 3,0 m weit auf einem horizontalen Tisch geschoben. Der Gleit-reibungskoeffizient zwischen Tisch und Kiste beträgt 0,35. Berechnen Sie:

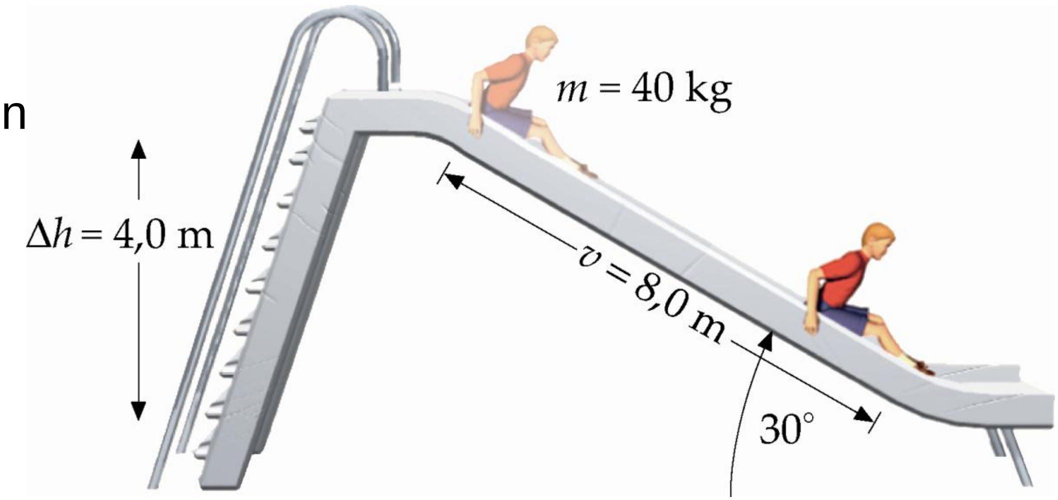
a) die äußere Arbeit, die an dem System aus Kiste und Tisch verrichtet wird.
b) die Energie, die durch die Reibung umgewandelt wird,
c) die kinetische Energie und die Geschwindigkeit der Kiste nach den 3 m.



Ein Schlitten gleitet, ohne gezogen zu werden mit einer Anfangsgeschwindigkeit von 4,0 m/s auf einer horizontalen, schneebedeckten Fläche. Der Gleitreibungskoeffizient beträgt 0,14. Wie weit gleitet der Schlitten, ehe er zum Stillstand kommt?

Beispiel: die Rutsche auf dem Spielplatz

Ein Kind mit einer Masse von 40 kg rutscht aus der Ruhe heraus eine 8,0 m lange Rutsche hinunter, die einen Winkel von 30° zur Horizontalen bildet. Der Gleitreibungskoeffizient zwischen Kind und Rutsche beträgt 0,35.

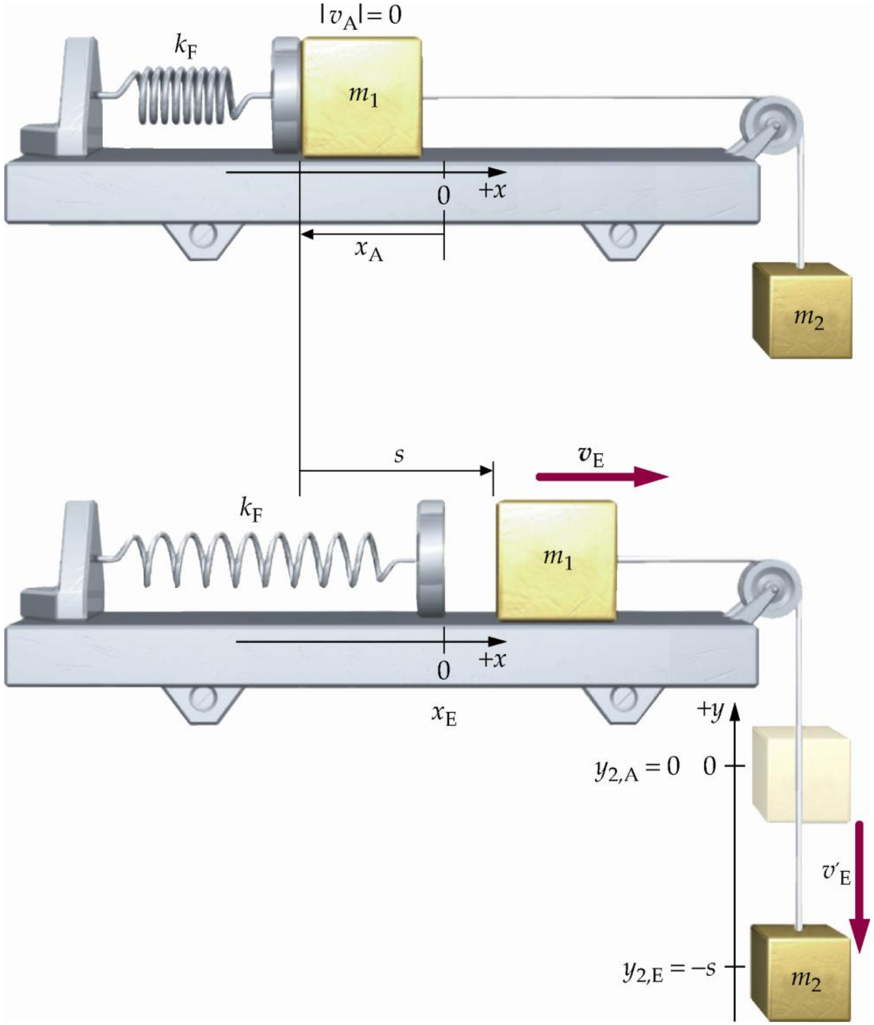


Welche Geschwindigkeit hat das Kind am Ende der Rutsche?

Beispiel: Block, Gewicht und Feder

Ein Gewicht mit der Masse m_2 = 4 kg hängt an einem leichten Seil, das über eine masselose, reibungsfreie Rolle mit einem Block von m_1 = 6 kg verbunden ist, der auf einer horizontalen Fläche liegt. Der Gleitreibungskoeffizient ist 0,2. Zunächst wird der 6 kg Block gegen eine Feder mit einer Federkonstanten von 180 N/m gedrückt, wodurch diese 30 cm zusammengedrückt wird.

Wie schnell bewegen sich der Block und das Gewicht, nachdem der Block losgelassen wurde und das Gewicht 40 cm gesunken ist?



Aufgaben (1)

1. Welche Arbeit ist notwendig, um eine Kiste von 1 t Masse auf ein Podest in 2 m Höhe zu bringen

   a) durch senkrechtes Anheben,

   b) durch Schieben auf einer um 20° geneigten Ebene unter Berücksichtigung von Gleitreibungskräften ($\mu = 0{,}3$)?

a) nur Hebearbeit:

$$W_H = F \cdot \Delta x$$

b) Hebearbeit und Gleitarbeit:

$$W_{ges} = W_H + W_G$$

Aufgaben (2)

2. Welche Arbeit müssen Pferde verrichten, um einen Wagen (Masse: 700 kg) eine Strecke von 5 km zu ziehen

   a) auf einer guten horizontalen Straße (Rollreibungszahl 0,04),

   b) auf einem schlechten horizontalen Feldweg (Rollreibungszahl 0,1)?

3. Ein Aufzug mit der Masse von 2 t soll aus der Ruhe nach oben gleichmäßig auf eine Geschwindigkeit von 10 m/s beschleunigt werden. Die hierbei erreichte Höhe beträgt 50 m.
   Wie groß ist die dabei aufzuwendende Gesamtarbeit?
   (Alle Reibungskräfte werden vernachlässigt!)

Aufgaben (3)

4. Welche Anfangsgeschwindigkeit (in km/h) hat ein senkrecht nach oben abgefeuertes Geschoss (unter Vernachlässigung der Luftreibung), wenn in der Höhe h = 2 km kinetische und potentielle Energie gleich groß sind?

   1. Ansatz: Satz der Erhaltung der Energie:

   $$E_{mech} = E_{kin} + E_{pot} = \text{const.}$$

   Im Moment des Abfeuerns besteht die gesamte Energie aus kinetischer Energie:

   $$E_{mech} = \tfrac{1}{2}\, m\, v^2_S$$

   2. Ansatz: Das Geschoss fliegt insgesamt 4 km hoch, die Anfangsgeschwindigkeit entspricht der Endgeschwindigkeit eines Falls aus 4 km:

   $$v = g \cdot t \qquad t^2 = 2 \cdot h\ g$$

Aufgaben (4)

5. Die Internationale Raumstation ISS (Masse m = 450 t) umkreiste anfangs die Erde in einer Flughöhe von 400 km.

   a) Wie groß war die exakte Bahngeschwindigkeit (in km/h) der Raumstation bei Annahme einer exakten Kreisbahn, bei der Zentrifugalkraft und Gravitationskraft genau gleich sind?

   b) Zwischenzeitlich wurde dann die Flughöhe um 18 Meilen erhöht. Wieviel Prozent der anfänglichen Bewegungsenergie waren für dieses Manöver erforderlich? (Erdradius: 6,371 10^6 m, 1 Meile = 1,61 km).

Lösungen der Aufgaben

1. a) 19,62 kJ
   b) 35,79 kJ

2. a) 1,37 MJ
   b) 3,43 MJ

3. 1,08 MJ

4. 1008,5 km/h

5. a) 27607 km/h
   b) 0,85%

Literatur und Quellen

Paul A. Tipler, Gene Mosca: Physik für Wissenschaftler und Ingenieure, Spektrum Akademischer Verlag, August 2009

http://de.wikipedia.org/

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences
HDU

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf