# Grundlagen der Informatik

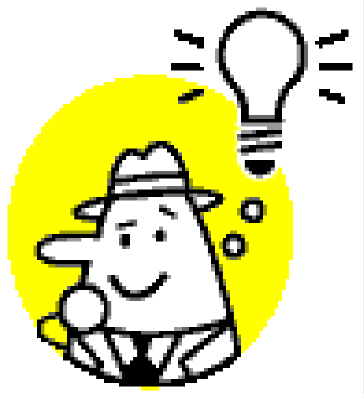
## Aussagenlogik

Prof. Dr. Peter Jüttner

# Aussagenlogik

**Kalkül zum logischen Schließen (Formalisierung)**

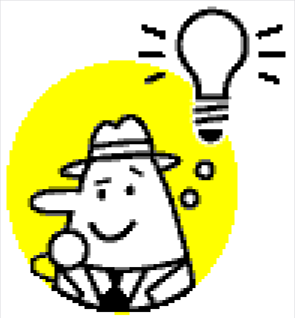
**Entspricht der „menschlichen Denkweise“ durch „logische Denken“ zu einem Ergebnis zu kommen (im Gegensatz zu empirischen Schließen)**



# Aussagenlogik

**Kalkül zum logischen Schließen (Formalisierung)**

**„Wenn die Strasse nass ist, dann hat es geregnet“**
- **wahr bei empirischem Schließen**
- **falsch bei logischem Schließen (die Strasse könnte auch durch andere Ursachen nass geworden sein)**



# Aussagenlogik

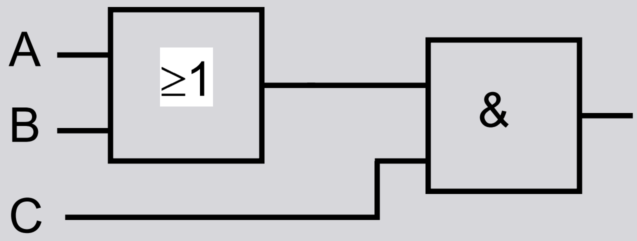
**Definition: Eine *Aussage* ist ein „Objekt“, dem sich eindeutig ein Wahrheitswert wahr (true, T) oder falsch (false, F) zuordnen lässt.**

**Es existieren keine „Werte“ zwischen wahr und falsch („vielleicht“, mit 50% Wahrscheinlichkeit“)**

# Aussagenlogik

## Verwendung in der Informatik:

- **Konstruktion / Definition von binären Schaltwerken (logische Grundstruktur von Rechnern)**

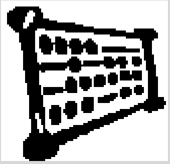



- **Programmiersprachen / Programmen zur Definition von Fallunterscheidungen**

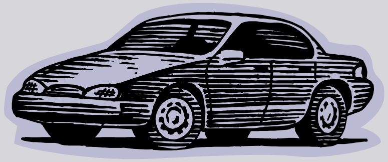
# Aussagenlogik

**Beispiele:**

- „es regnet“



- „3+5 = 8“



- „Mein Auto hat 300PS“

- „Die Erde ist eine Scheibe“

# Aussagenlogik

## Verwendung in der Informatik:

- Programmiersprachen / Programmen zur Definition von Fallunterscheidungen

```
if (a<b)  && (c>d)
{ a = a*2;
  b = c+d;
};
else
{  a = b*2;
   b = a+d;
};
```

# Aussagenlogik

**Aussagen können mittels logischer Verknüpfungen (Operatoren) zu weiteren (neuen) Aussagen verbunnden werden.**

**Beispiele:**

- **„es regnet und 3+5 = 8“**
- **„es regnet oder 3+5 = 8“**
- **„ich warte schon seit 30 Minuten und wurde immer noch nicht bedient“**

# Aussagenlogik

**Die Verknüpfung wird mittels einer Wahrheitstabelle definiert. Diese legt den Wert der Verknüpfung (wahr, falsch) in Abhängigkeit der verknüpften Aussagen fest.**

**Festlegungen:**

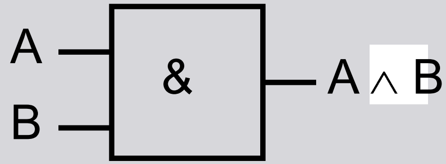
- **A, B, ... stehen für (beliebige) Aussagen (Variable)**
- **F (false) steht für (immer) falsch, unwahr**
- **T (true) steht für (immer) richtig, wahr**

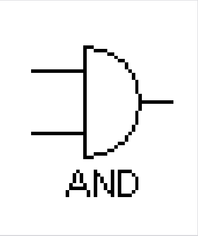
# Aussagenlogik

## logische Verknüpfungen (Operatoren)

- ∧ ***Und-Verknüpfung*** (Konjunktion) zweier Aussagen A, B
  Gesamtaussage ist wahr, wenn A und B wahr sind

| A | B | A ∧ B |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |




Darstellung als Wertetabelle (Wahrheitstabelle, Wahrheitstafel)

# Aussagenlogik

## *Und-Verknüpfung*

**Beispiele:**

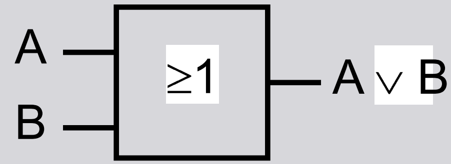
- **A $\wedge$ B**
- **„Es regnet und die Strass wird nass“**
- **„Alle Zahlen kleiner 4 sind Primzahlen und nicht durch 5 ganzzahlig teilbar„**

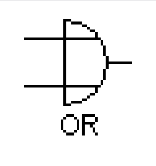
# Aussagenlogik

## logische Operatoren

- ∨ ***Oder-Verknüpfung*** (Disjunktion) zweier Aussagen A, B
  Gesamtaussage ist wahr, wenn mindestens (!) eine der Aussagen A oder B wahr ist

| A | B | A ∨ B |
|---|---|---|
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | T |



# Aussagenlogik

## *Oder-Verknüpfung*

**Beispiele:**

- **„Es regnet nicht oder die Strass wird nass“**
- **„Heute ist Montag oder Dienstag“**

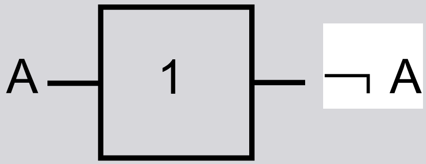
# Aussagenlogik

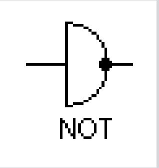
## logische Operatoren

- ¬ ***Negation*** einer Aussage A

  Ergebnis falsch, wenn A wahr und umgekehrt

| A | ¬ A |
|---|---|
| F | T |
| T | F |



# Aussagenlogik

## ***Negation***

**Beispiele:**

- **„Es regnet nicht“**
- **„Nicht alle Zahlen sind kleiner als 100“**

# Aussagenlogik

## logische Operatoren

- $\Rightarrow$ ***<u>Implikation</u>*** zweier Aussagen A und B

  Ergebnis wahr, wenn entweder A falsch oder A und B wahr

| A | B | $A \Rightarrow B$ |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | F |
| T | T | T |

# Aussagenlogik

***Implikation***

**Beispiele:**

- **„Wenn es regnet, dann wird die Strasse nass“**
- **„Wenn zwei Zahlen kleiner sind als 100, dann ist auch ihr Durchschnitt kleiner als 100“**
- **„Wenn die Sonne um die Erde kreist, dann auch alle Sterne“**

# Aussagenlogik

## ***Implikation***

**Anmerkungen:**

- **Aus einer falschen Aussage darf alles (auch Falsches) geschlossen werden (Implikation wird wahr)**
- **Nur aus einer richtigen Aussage darf nicht Falsches geschlossen werden (Implikation wird falsch)**
- **manchmal wird auch "→" als Implikationssymbol verwendet**

# Aussagenlogik

## *Implikation*

**Anmerkungen:**

- **Aus A $\Rightarrow$ B folgt nicht B $\Rightarrow$ A (s. Wahrheitstabelle)**
- **$a<100 \wedge b < 100 \Rightarrow (a+b)/2 < 100$**
- **$(a+b)/2 < 100 \Rightarrow a<100 \wedge b < 100$ (falsch!)**

# Aussagenlogik

## logische Operatoren

- ⇔ ***<u>Äquivalenz</u>*** zweier Aussagen A und B

  Ergebnis wahr, wenn entweder A und B falsch oder A und B wahr

| A | B | A ⇔ B |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | T |

# Aussagenlogik

## ***Äquivalenz***

**Beispiele:**

- **„Genau dann wenn es regnet, wird die Strasse nass“**
- **„Genau dann wenn zwei ganze Zahlen durch 2 teilbar sind, ist ihr Produkt durch 4 teilbar “**

# Aussagenlogik

## ***Äquivalenz***

**Anmerkungen:**

- **auch darstellbar durch zwei Implikationen mit Und-Verknüpfung (A $\Leftrightarrow$ B gilt genau dann wenn A $\Rightarrow$ B und B $\Rightarrow$ A gelten**
- **eine falsche Aussage ist zu einer falschen Aussage äquivalent**
- **manchmal wird auch "$\leftrightarrow$" als Implikationssymbol verwendet**

# Aussagenlogik

## Definition ***Aussagenlogische Formeln*** (Syntax)

**1. Atomare Aussagen sind Formeln**

**2. Sind A und B Formel, dann sind auch**

- $(A \wedge B)$ „es gelten die Aussagen A und B" (Und-Verknüpfung)
- $(A \vee B)$ „es gilt A oder B" (Oder-Verknüpfung)
- $\neg A$ „es gilt die Negation von A (nicht A)" (Negation)
- $(A \Rightarrow B)$ „falls A gilt, dann auch B" (Implikation)
- $(A \Leftrightarrow B)$ „wenn A gilt, dann auch B und umgekehrt") (Äquivalenz)

**aussagenlogische Formeln**

Atomare Formeln sind dabei entweder Wahrheitswerte (T, F) oder Variable für Wahrheitswerte

# Aussagenlogik

## Definition *Belegung*

Man erhält die *Belegung* einer Formel, in dem man jeder Variablen einen Wert (T, F) zuordnet.

Jede Belegung einer Formel ergibt einen Wahrheitswert (durch Auswerten der logischen Operationen)

Aussagenlogische Formeln bekommen erst durch eine Belegung einen „Sinn“

# Aussagenlogik

**weitere Definitionen**

**Eine Formel ist *erfüllbar*, wenn es mindestens eine Belegung gibt, deren Auswertung der Wert wahr liefert.**

**Anmerkung:**
**rein formal ist eine „unsinnige Formel“ u.U. erfüllbar:**

**„Wenn die Sonne um die Erde kreist, dann auch alle Sterne“**

# Aussagenlogik

**weitere Definitionen**

**Eine Formel heißt *Tautologie*, wenn jede Belegung den Wert wahr liefert.**

**Beispiel:**

$A \Rightarrow (B \vee \neg B)$

**„Kräht der Hahn auf dem Mist, ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist“**

# Aussagenlogik

**weitere Beispiel:**

**„Es regnet $\wedge$ die Strasse ist nass“**

**„Es regnet $\Rightarrow$ die Strasse ist nass“**

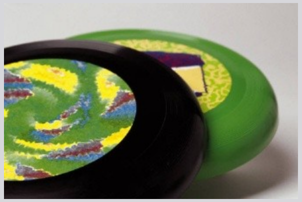
# Aussagenlogik

**weitere Definitionen**

**Eine Formel heißt *unerfüllbar* (*Widerspruch*, *Kontradiktion*) wenn es keine Belegung gibt, die die Formel erfüllt.**

**Beispiel:**

**$B \land \neg B$**



**„Die Erde ist eine Scheibe und die Erde ist eine Kugel“**

# Aussagenlogik

**weitere Definitionen**

**Zwei Formeln $F_1$ und $F_2$ heißen äquivalent (gleichwertig) wenn jede Belegung der Formeln zum gleichen Wert führt.**

**Schreibweise: $F_1 \cong F_2$**

**Beispiel:**

$$A \lor B \cong B \lor A$$

# Aussagenlogik

## wichtige Äquivalenzen:

seien $F_1$, $F_2$ und $F_3$ Formeln, dann gilt:

- $F_1 \wedge F_2 \cong F_2 \wedge F_1$ (Kommutativität)
- $F_1 \vee F_2 \cong F_2 \vee F_1$

- $(F_1 \wedge F_2) \wedge F_3 \cong F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3)$ (Assoziativität)
- $(F_1 \vee F_2) \vee F_3 \cong F_1 \vee (F_2 \vee F_3)$

- $(F_1 \wedge F_2) \vee F_3 \cong (F_1 \vee F_3) \wedge (F_2 \vee F_3)$ (Distributivität)
- $(F_1 \vee F_2) \wedge F_3 \cong (F_1 \wedge F_3) \vee (F_2 \wedge F_3)$

# Aussagenlogik

## wichtige Äquivalenzen:

seien $F_1$, $F_2$ und $F_3$ Formeln, dann gilt:

- $F_1 \wedge F_1 \cong F_1$ (Idempotenz)
- $F_1 \vee F_1 \cong F_1$

- $\neg(F_1 \wedge F_2) \cong \neg F_1 \vee \neg F_2$ (De Morgan‘sche Regeln)
- $\neg(F_1 \vee F_2) \cong \neg F_1 \wedge \neg F_2$

- $\neg(\neg F_1) \cong F_1$ (Doppelte Verneinung)

# Aussagenlogik

## wichtige Äquivalenzen:

seien $F_1$ und $F_2$ Formeln, T eine Tautologie, K eine Kontradiktion, dann gilt:

- $F_1 \wedge T \cong F_1$ (Kürzungsregel)
- $F_1 \vee F \cong F_1$
- $F_1 \Rightarrow F_2 \cong \neg F_1 \vee F_2$ (Implikationsregel)

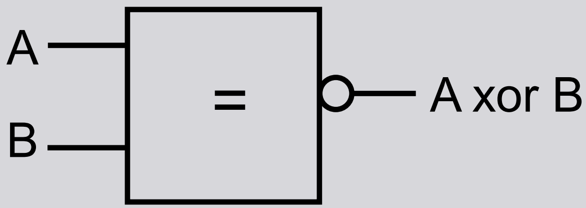
# Aussagenlogik

**einige weitere (abgeleitete*⁾) logische Operatoren**

- XOR (exklusives oder) zweier Aussagen A und B

  Ergebnis wahr, wenn A und B ungleich

| A | B | A xor B |
| --- | --- | --- |
| F | F | F |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | F |




*) abgeleitete heißt, dass diese Operatoren durch die bereits definierten dargestellt werden können

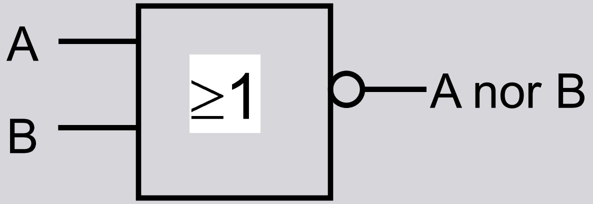
# Aussagenlogik

**einige weitere (abgeleitete*)) logische Operatoren**

- NOR (negiertes oder) zweier Aussagen A und B

  Ergebnis wahr, wenn A und B beide unwahr

| A | B | A nor B |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | F |
| T | F | F |
| T | T | F |




*) abgeleitete heißt, dass diese Operatoren durch die bereits definierten dargestellt werden können

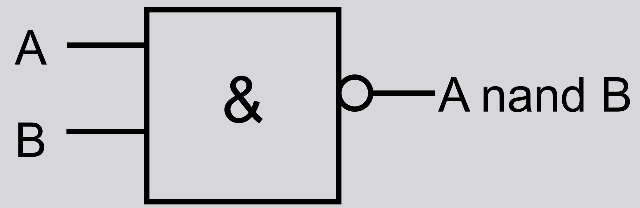
# Aussagenlogik

**einige weitere (abgeleitete*)) logische Operatoren**

- NAND (negiertes und) zweier Aussagen A und B

  Ergebnis wahr, wenn A oder B unwahr

| A | B | A nand B |
|---|---|---|
| F | F | T |
| F | T | T |
| T | F | T |
| T | T | F |




*) abgeleitete heißt, dass diese Operatoren durch die bereits definierten dargestellt werden können

# Aussagenlogik

**Definition: *Konjunktive Normalform***
**Eine Formel F ist in *konjunktiver Normalform (KNF)*, wenn sie eine Konjunktion von Disjunktionen von Literalen ist:**

**Ein *Literal* ist dabei eine atomare Formel oder die Negation einer atomaren Formel (positives bzw. negatives Literal).**

# Aussagenlogik

**Eine Formel F in KNF hat also folgende Form:**

$$
\begin{aligned}
F \;=\; & (L_{11} \vee L_{12} \vee \ldots \vee L_{1m1}) \wedge \\
& (L_{21} \vee L_{22} \vee \ldots \vee L_{2m2}) \wedge \\
& \ldots \\
& (L_{k1} \vee L_{k2} \vee \ldots \vee L_{kmk})
\end{aligned}
$$

**oder:**

$$F = \bigwedge_{i=1}^{k} \left( \bigvee_{j=1}^{mk} L_{ij} \right)$$

**mit $L_{ij}$ Literale**

# Aussagenlogik

**Definition: *Disjunktive Normalform***
**Eine Formel F ist in *disjunktiver Normalform (DNF)*, wenn sie eine Disjunktion von Konjunktionen von Literalen ist:**

## Aussagenlogik

**Eine Formel F in DNF hat also folgende Form:**

$$
\begin{aligned}
F \;=\; & (L_{11} \wedge L_{12} \wedge \ldots \wedge L_{1m1}) \vee \\
& (L_{21} \wedge L_{22} \wedge \ldots \wedge L_{2m2}) \vee \\
& \ldots \\
& (L_{k1} \wedge L_{k2} \wedge \ldots \wedge L_{kmk})
\end{aligned}
$$

**oder:**

$$F = \bigvee_{i=1}^{k} \left( \bigwedge_{j=1}^{mk} L_{ij} \right)$$

**mit $L_{ij}$ Literale**

# Aussagenlogik

**Für jede Formel F gilt: zu F gibt es eine äquivalente Formel in konjunktiver Normalform und eine äquivalente Formel in disjunktiver Normalform.**

**D.h. jede Formel F lässt sich in eine äquivalente Formel F‘ in KNF und in eine äquivalente Formel F“ in DNF überführen.**

# Aussagenlogik

**Hilfssatz: Für Formel $f(x_1, \ldots, x_n)$ gilt:**

$$f(x_1, \ldots, x_n) \cong (x_i \wedge f(x_1, \ldots, x_{i-1}, T, x_{i+1}, \ldots, x_n)) \vee (\neg x_i \wedge f(x_1, \ldots, x_{i-1}, F, x_{i+1}, \ldots, x_n))$$

**Beweis (Hilfssatz):**

**1. Fall: $x_i = T$, daraus folgt $\neg x_i = F$, daraus folgt $(\neg x_i \wedge f(x_1, \ldots, x_{i-1}, F, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = F$**

**2. Fall: $x_i = F$, daraus folgt $\neg x_i = T$, daraus folgt $(x_i \wedge f(x_1, \ldots, x_{i-1}, T, x_{i+1}, \ldots, x_n)) = F$**

# Aussagenlogik

**Beweis (Boole'sches Normalformtheorem, DNF):**

**Durch sukzessive Anwendung des Hilfssatzes auf $x_1, \ldots, x_n$ läßt sich eine Formel in folgende Form überführen:**

$$
\begin{aligned}
f(x_1, \ldots, x_n) \cong\ & (x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge f(T, T, \ldots, T)) \vee \\
& (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge f(F, T, \ldots, T)) \vee \\
& (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge f(T, F, \ldots, T)) \vee \\
& \ldots \\
& (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \ldots \neg x_{n-1} \wedge x_n \wedge f(F, F, \ldots, F, T)) \vee \\
& (\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \ldots \neg x_{n-1} \wedge \neg x_n \wedge f(F, F, \ldots, F, F))
\end{aligned}
$$

**Streiche diejenigen Auswertungen der Formel f, die F ergeben. qed.**

# Aussagenlogik

**Folgerung:**
**Jede Formel F läßt sich durch eine äquivalente Fomel F‘ mittels Und-, Oder-Verknüpfung und Negation darstellen.**

# Aussagenlogik

**Beispiel:**

**$F(x_1, x_2, x_3, x_4) :=$**

**$((x_1 \Rightarrow x_2) \wedge (x_3 \Leftrightarrow x_4)) \vee$**

**$(\neg x_1 \wedge x_4)$**

**Wertetabelle**

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | F(...) |
|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | T |
| F | F | F | T | T |
| F | F | T | F | F |
| F | T | F | F | T |
| T | F | F | F | F |
| F | F | T | T | T |
| F | T | F | T | F |
| F | T | T | F | F |
| T | F | F | T | F |
| T | F | T | F | F |
| T | T | F | F | T |
| F | T | T | T | T |
| T | F | T | T | F |
| T | T | F | T | F |
| T | T | T | F | F |
| T | T | T | T | T |

**Ableitung der DNF**

**(1. Möglichkeit):**

1. **Suche alle Auswertungen mit Ergebniswert T**
2. **Bilde eine Disjunktion aller Werte $x_i$ (negiert, falls F), die zum Ergebniswert T führen**

# Aussagenlogik

**Beispiel DNF:**

$F'(x_1, x_2, x_3, x_4) :=$

$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee$

$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee$

$(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee$

$(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee$

$(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee$

$(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee$

$(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge x_4)$

**Ableitung der KNF analog mit Auswertungen mit Ergebnis F (negieren!)**

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | F(...) |
|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | T |
| F | F | F | T | T |
| F | F | T | F | F |
| F | T | F | F | T |
| T | F | F | F | F |
| F | F | T | T | T |
| F | T | F | T | F |
| F | T | T | F | F |
| T | F | F | T | F |
| T | F | T | F | F |
| T | T | F | F | T |
| F | T | T | T | T |
| T | F | T | T | F |
| T | T | F | T | F |
| T | T | T | F | F |
| T | T | T | T | T |

# Aussagenlogik

**Beispiel KNF:**

$F'(x_1, x_2, x_3, x_4) :=$

$\neg((\neg x_1 \land \neg x_2 \land x_3 \land \neg x_4) \lor$
$(x_1 \land \neg x_2 \land \neg x_3 \land \neg x_4) \lor$
$(\neg x_1 \land x_2 \land \neg x_3 \land x_4) \lor$
$(\neg x_1 \land x_2 \land x_3 \land \neg x_4) \lor$
$(x_1 \land \neg x_2 \land \neg x_3 \land x_4) \lor$
$(x_1 \land \neg x_2 \land x_3 \land \neg x_4) \lor$
$(x_1 \land \neg x_2 \land x_3 \land x_4) \lor$
$(x_1 \land x_2 \land \neg x_3 \land x_4) \lor$
$(x_1 \land x_2 \land x_3 \land \neg x_4))$

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | F(...) |
|---|---|---|---|---|
| F | F | F | F | T |
| F | F | F | T | T |
| F | F | T | F | F |
| F | T | F | F | T |
| T | F | F | F | F |
| F | F | T | T | T |
| F | T | F | T | F |
| F | T | T | F | F |
| T | F | F | T | F |
| T | F | T | F | F |
| T | T | F | F | T |
| F | T | T | T | T |
| T | F | T | T | F |
| T | T | F | T | F |
| T | T | T | F | F |
| T | T | T | T | T |

# Aussagenlogik

**Beispiel KNF:**

$F'(x_1, x_2, x_3, x_4) :=$

$\neg((\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \vee (\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee$
$(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \vee$
$(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \vee ( x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4)) =$

$\neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \wedge \neg(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge \neg x_4) \wedge$
$\neg(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \wedge \neg(\neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \wedge$
$\neg(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \wedge \neg(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4) \wedge$
$\neg(x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge x_4) \wedge \neg(x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4) \wedge$
$\neg( x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4)) =$

$(x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge$
$(x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge$
$(\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$

# Aussagenlogik

**Ableitung der KNF (2. Möglichkeit):**

1.) Ersetze in F jedes Vorkommen einer Teilformel der Bauart
$x \Leftrightarrow y$ durch $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)$ ,
$x \Rightarrow y$ durch $\neg x \vee y$ ,
$\neg\neg x$ durch x,
$\neg(x \wedge y)$ durch $(\neg x \vee \neg y)$ ,
$\neg(x \vee y)$ durch $(\neg x \wedge \neg y)$ ,
bis keine derartige Teilformel mehr vorkommt.

2.) Ersetze jedes Vorkommen einer Teilformel der Bauart
$x \vee (y \wedge z)$ durch $(x \vee y) \wedge (x \vee z)$ ,
$(x \wedge y) \vee z$ durch $(x \vee z) \wedge (y \vee z)$ ,
bis keine derartige Teilformel mehr vorkommt.

# Aussagenlogik

**Beispiel:**

**$F(x_1, x_2, x_3, x_4) := ((x_1 \Rightarrow x_2) \wedge (x_3 \Leftrightarrow x_4))$**

**Ableitung der KNF:**

$x_1 \Rightarrow x_2$ ersetzt durch $\neg x_1 \vee x_2$

$x_3 \Leftrightarrow x_4$ ersetzt durch $(\neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_4 \vee x_3)$

ergibt:

$((\neg x_1 \vee x_2) \wedge ((\neg x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_4 \vee x_3))) \vee (\neg x_1 \wedge x_4)$

# Aussagenlogik

**Folgerung:**
**Jede Formel F läßt sich durch eine äquivalente Fomel F‘ mittels Und-, Oder-Verknüpfung und Negation darstellen.**

# Aussagenlogik

**Definition *<u>Verknüpfungsbasen</u>***
**Eine Menge von aussagenlogischen Operatoren wird als Verknüpfungsbasis bezeichnet.**

**Es gilt:**
**Jede aussagenlogische Formal F ist äquivalent zu einer Formel F‘, die nur die Operatoren $\vee$ und $\neg$ enthält.**

**Beweis:** $A \wedge B \cong \neg(\neg A \vee \neg B)$ **(deMorgan‘sche Regel)**

$A \Rightarrow B \cong \neg A \vee B$ **(Implikationsregel)**

$A \Leftrightarrow B \cong (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$

# Aussagenlogik

## Folgerungen:

- **Jede aussagenlogische Formal F ist äquivalent zu einer Formel F‘, die nur die Operatoren $\wedge$ und $\neg$ enthält.**
  **$((A \vee B) \cong \neg (\neg A \wedge \neg B)$**

# Aussagenlogik

## Definitionen:

- **Die Verknüpfungsbasen {$\vee$, $\neg$} und {$\wedge$, $\neg$} heißen auch *deMorgan'sche Verknüpfungsbasen*.**

- **Die Verknüpfungsbasis {$\vee$, $\wedge$, $\neg$} wird als *Boole'sche Verknüpfungsbasis* bezeichnet**

# Aussagenlogik

**weitere Verknüpfungsbasen:**

- **Frege-Basis: {¬, ⇒}**
- **NAND-Basis: {nand}**
- **NOR-Basis: {nor}**

# Zum Schluss dieses Abschnitts …

**Noch Fragen ??**