

Übungen zur Vorlesung „Mathematik 1“

Angewandte Informatik/Infotronik

Blatt 5

Aufgabe 41.

- a) Skizzieren Sie die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungen und Ungleichungen (in den Unbestimmten x, y).

i) $2x - 3y + 6 = 0$ ii) $x + \frac{3}{2} < 0$ iii) $-\frac{x}{2} + \frac{y}{5} \geq 0$

iv) $-\frac{5}{8}y + 1 = 0$ v) $\frac{5-8x}{2y} = -2$ vi) $-\frac{1}{2}(12x + 3) > \frac{3}{4}(12 - 16y)$

- b) Zeigen Sie, dass die Ebene E, welche die x_1 -Achse bei a_1 , die x_2 -Achse bei a_2 und die x_3 -Achse bei a_3 schneidet, gegeben ist durch die Gleichung

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1$$

- c) Skizzieren Sie die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungen und Ungleichungen (in den Unbestimmten x_1, x_2, x_3).

i) $2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6$ ii) $x_1 - 2x_2 < 4$ iii) $-2x_1 > 7$

iv) $x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 < 1$ v) $x_1 - x_2 + x_3 = 2$ vi) $-2x_2 + 4 \leq 0$

Aufgabe 42.

- a) Lösen Sie folgende Gleichungen und Ungleichungen. (Ungleichungen auch auf direktem Weg ohne Berechnung der Nullstellen!)

i) $8x^2 + 6x - 27 = 0$ ii) $-2x^2 + 11x < 29$ iii) $x(2x - \sqrt{2}) \geq 0$

iv) $2x^4 + 3x^2 - 14 \leq 0$ v) $64x^6 - 204x^3 - 27 = 0$ vi) $-(-2x + 12)(-\frac{1}{2}x + 3) \geq 0$

- b) Führen Sie zunächst eine (vollständige) Faktorisierung durch und lösen Sie anschließend die Gleichung bzw. Ungleichung.

i) $x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$ ii) $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ iii) $x^3 - 3x^2 + x + 4 \leq 0$

iv) $x^6 - x^4 \leq 0$ v) $-2x^5 - 8x^4 + 2x + 8 = 0$ vi) $x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 4x^2 \geq 0$

Aufgabe 43. Geben Sie den Typ des jeweiligen Kegelschnitts an und bestimmen Sie dabei charakteristische Merkmale wie Mittelpunkt, Scheitelwerte, Halbachsen, Exzentrizität usw. und skizzieren sie den Kegelschnitt.

a) $2y^2 - 9x = -12y$ b) $9x^2 + 16y^2 - 18x = 135$ c) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$

d) $x^2 + 2y = 4x$ e) $-9x^2 + 36x + 4y^2 + 16y = 56$ f) $100x^2 + 36y^2 - 400x + 108y = -381$

Aufgabe 44. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Bruchgleichungen.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \frac{4}{x} - \frac{1}{2x} + 2 = \frac{1}{4} & \text{b)} \frac{3}{5x} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3x} - \frac{4}{9} & \text{c)} \frac{18}{2x-3} + \frac{3}{3-2x} = 5 \\ \text{d)} \frac{2}{1-x} - \frac{3}{5-5x} + \frac{5}{4x-4} = \frac{3}{10} & \text{e)} \frac{11}{x^2-25} + \frac{3x-9}{5-x} + \frac{2x+28}{3x+15} & \text{f)} \frac{6x^2-23x-3}{x^2-2x-15} - \frac{10x-15}{x+3} = \frac{30-4x}{x-5} \\ \text{g)} \left(\frac{1}{x} - 2\right) : \left(\frac{x}{3} + 1\right) + \frac{x-1}{x+3} = 1 - \frac{2x+5}{x^2+3x} & \text{h)} \frac{x}{x+\frac{1}{x+\frac{1}{x}}} : \frac{1}{x^2+2} = x^2 + 1 \end{array}$$

Aufgabe 45. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Wurzelgleichungen.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \sqrt{4x+5} = x+2 & \text{b)} \sqrt{x^2+2} = 3x & \text{c)} \sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1 \\ \text{d)} \sqrt{x^2+x} = 1 + \sqrt{x^2-x} & \text{e)} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} = \frac{5}{2} & \text{f)} 5\sqrt{x-1} - 2\sqrt{2x+5} = \sqrt{3x-5} \\ \text{g)} \sqrt{x^2+2} + \sqrt{7-6x} + x = 1 & \text{h)} \frac{7\sqrt{\frac{x+1}{x}} + 5}{7\sqrt{\frac{x}{x+1}} - 5} = 6 & \text{k)} x^2 = \sqrt{6x}\sqrt{5x} + 10x + 20 \end{array}$$

Aufgabe 46. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Exponentialgleichungen.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} 10 \cdot \frac{5}{9}^{4-x} = 2^{2x+1} & \text{b)} 4^{2x-3} \cdot 32^{1-x} = \frac{1}{8} & \text{c)} 4 \cdot 2^{\sqrt{x}} = 0,5^{-x} \\ \text{d)} \frac{2^{5x}}{7^{x+2}} = 10 & \text{e)} (\sqrt{2})^{x+3} = \frac{3 \cdot 13^{4-x}}{(\sqrt{5})^x} & \text{f)} 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x+1} + 54 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} = 42 \\ \text{g)} 3^x + 9^x = \sqrt{3}(\sqrt{3}+1) & \text{h)} 4^{x+2} - 5 \cdot 2^{x+3} = 24 & \text{k)} \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \cdot (8^{x+1} - 4^5) = 16(4^x - 8) \end{array}$$

Aufgabe 47. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Logarithmusgleichungen.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lg(2x+3) + \lg(1-x) = \lg(1-4x) & \text{b)} \log_9(x^2+1) = \log_3(2x-1) \\ \text{c)} \lg(x^2-1) - \lg(4x-1) = \lg\left(\frac{1}{3}\right) & \text{d)} \lg 2 + \lg[(x+2)(3x+5)] = \lg(5x^2-1) \\ \text{e)} \lg(x^2+4) - \log_{\sqrt{10}}(3x+2) = 0 & \text{f)} \lg(2x^2+x-5) + \log_{0,1}(x^2+1) = \lg 2 \end{array}$$

Aufgabe 48. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender goniometrischer Gleichungen.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \sqrt{3} \cdot \tan(x) - 1 = 0, \quad G = [-\pi, \pi] & \text{b)} 4 \sin^2(x) = 3, \quad G = [0, 2\pi] \\ \text{c)} \sin(2x+1) = \frac{1}{2}, \quad G = [-2\pi, 2\pi] & \text{d)} \sin(x) - \sin(\pi-x) = 0, \quad G = [0, 2\pi] \\ \text{e)} 2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) = 0, \quad G = [0, 2\pi] & \text{f)} \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad G = \mathbb{R} \end{array}$$

Aufgabe 49. Bestimmen Sie die Lösungsmengen in Abhängigkeit des Parameters a .

$$\begin{array}{ll} \text{a)} a^2x = 3a^2 - 2a & \text{b)} \frac{1}{a-2x} - \frac{a-1}{a^2+2ax} = \frac{4a-1}{a^2-4x^2} \\ \text{c)} \frac{x+a}{x-a} + \frac{x-2a}{x+a} = \frac{9}{4} & \text{d)} \sqrt{2x^2+2ax+a^2} = x+2a \end{array}$$

Aufgabe 50. Führen Sie jeweils drei Iterationsschritte des Newton-Raphson-Verfahrens zur Bestimmung einer näherungsweisen Lösung folgender Gleichungen durch. Überprüfen Sie jeweils die Konvergenzbedingung für den Startwert x_0 .

$$\begin{array}{ll} \text{a)} x^3 + 2x - 6 = 0, \quad x_0 = 1,5 & \text{b)} x^2 + 2 - e^x = 0, \quad x_0 = 1,5 \\ \text{c)} x^2 - 2 \cos(x) = 0, \quad x_0 = 1,0 & \text{d)} \ln \sqrt{x} = 4 \cdot e^{-0,3x}, \quad x_0 = 5,0 \end{array}$$