Komplexe Zahlen $(i^{4n} = 1;\ i^{4n+1} = i;\ i^{4n+2} = -1;\ i^{4n+3} = -i)$

Kart. -> Polar: $z = x + iy$; $r = \sqrt{x^2+y^2}$; $\varphi = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{r}) & y \geq 0 \\ -\arccos & y < 0 \end{cases} \Rightarrow r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Polar -> kart: $z = r(\cos^{\pm}\varphi + i\sin^{\pm}\varphi)$; $re^{\pm i\varphi}$; $x = r\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi \Rightarrow z = x + iy$

Multipl. $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \Rightarrow \cos(\varphi_1 + \varphi_2)$

Division $\frac{z_1}{z_2} = ((x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)) \cdot \frac{1}{x^2+y^2}$

Potenz $z^n = [r(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}$

Wurzel $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\varphi\cdot\frac{1}{n}}(e^{i\frac{2\pi k}{n}})\ (k = 0,1,2,\dots,n-1)$

Wichtige Zahlen $e^{i0} = 1$; $e^{\pm i\pi} = -1$; $e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$; $e^{\pm i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)$

$e^{\pm i\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$; $e^{\pm i\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3} \pm i)$

konj. Komplex erweitern: $(a + jb)\cdot(a - jb) = a^2 + b^2$

$\pi = 180$ $\quad \pi/2 = 90$ $\quad -i^2 = -1$ $\quad e^{e^{-i}} = e^{\cos(-1) + i\sin(-1)}$

Relation beschr. Menge R mit $R \subseteq M_1 \times M_2$

wenn zu jedem (x,y) ein (y,x) in R vorh. ist => symmetrisch

$xRy \Rightarrow yRx$ | $xRy = yRx$ dann muss $y = x$ Erg. sein

wenn jedes $x \in M$ in als (x,x) in R vorh. ist => reflexiv

xRx $\quad y = x$ setzen und auflösen

für alle (x,y) und (y,x) in R muss gelten $x = y$ => antisymmetrisch

wenn (x,y) und (y,z) in R vorh., dann muss auch (x,z) in R vorh. sein => transitiv

Äquivalenzrelation $x \sim y$ = reflexiv, symmetr., transitiv

partielle Ordnung $x \preceq y$ = reflexiv, antisymm., transitiv

vollständiges Repräsentantensystem: restklassen $[0] - [n]$

Restklassen als Menge beschreiben

lineare (totale Ordnung) Elemente können in eine Reihenfolge gebracht werden

---

Winkelumformungen (satz v. Moivre) $(\cos\varphi + \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + \sin n\varphi$

$\sin\alpha$ kann als Imaginärteil einer komplexen Zahl interpretiert werden, $\cos\alpha$ als Realteil | $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$

$\sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha + i\sin\alpha$ | $\sin 2\varphi = 2\cos\varphi\sin\varphi$

trig. Pytag. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

---

kompl. Schwingungen: $A(t) = \operatorname{Im}(\underline{A}(t))$

$\underline{A}(t) = A_0 e^{i\alpha_0} e^{i\omega t}$ mit $\underline{A}_0 = A_0 e^{i\alpha_0} = \underline{A}_0 \Rightarrow \underline{A}(t) = \underline{A}_0 e^{i\omega t}$

$\underline{A}(t) = A_0\cos(\omega t + \alpha_0) + i\underbrace{A_0\sin(\omega t + \alpha_0)}_{} \Rightarrow A(t)$

Superposition: $A(t) + B(t) = C(t)$

$\underline{A}_0 + \underline{B}_0 = \underline{C}_0 \Rightarrow \underline{A}_0 = x + iy$; $\underline{B}_0 = x_1 + iy$; $\underline{C}_0 = x + iy$

$\Rightarrow \underline{C}_0 = C_0 e^{i\gamma_0}$ mit $C_0 \hat{=} r \Rightarrow \underline{C}(t) = C_0 e^{i(\omega t + \gamma_0)}$

$\underline{C}(t) = C_0\cos(\omega t + \gamma_0) + i\underbrace{C_0\sin(\omega t + \gamma_0)}_{} \Rightarrow C(t)$:

$C(t) = C_0\sin(\omega t + \gamma_0)$

reelle Form

$\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$ / $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$

Erfüllungsmenge $(M_\varphi\, f x_1, x_2) = \{\text{Menge}, \text{Menge}\}$

Formel $\varphi(x_1, x_2)$: x_1, x_2 als KO-achsen sehen.

Jede Funktion der Formel zeichnen. Mögliche Werte von x_1, x_2 sind die Erfüllungsmenge

---

Vollständige Induktion

1 Schritt: Induktionsanfang $\sum_{k=0}^{n} k = \dots$ n = 0 oder 1 setzen

2 Schritt: Indukt. schritt: LS und RS n auf $n+1$ setzen $\sum_{k=0}^{n+1} k = \dots\ n+1$

wenn 1 und 2 wahr -> Beweis

Mengen M ($\mathbb{N}_{(0)} = \{(0), 1, 2, \dots\}$; $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \dots$

Aufbau $M = \{\dots\} \vee \emptyset$ | aufz. Schreibw. $M = \{0, 1, \dots\}$

Eigensch. $M = \{x \mid x \in G, \text{Eigensch.}\}$ | x teilt $y = \frac{y}{x}$

echte Teilm. $M_1 \subseteq M_2$ ($M_2 \supset M_1$) | Teilm. $M_1 \subset M_2$ ($M_2 \supseteq M_1$)

Potenzmenge von $M = P(M) = \{\emptyset, \dots\}$ | $M^2 = M \times M$

Binomialkoeff. $\binom{n}{k}$ $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ $\quad (n \geq k)$

$M_1 \cup M_2 = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|$, dann (bei 3) +

$M_1 \cap M_2 = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cup M_2|$

$\cup$ Vereinig. $\quad \cap$ Schnitt $\quad$ Sym. Diff. $M_1 \triangle M_2$

$M_1 \setminus M_2$ Differ. / Komplem. M_1 M_2

$M_1 \setminus M_2 = M_1 \cap \bar{M}_2$, $M_1 \triangle M_2 = (M_1 \cap \bar{M}_2) \cup (M_2 \cap \bar{M}_1)$

$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$

$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$

$M_1 \cup (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) = M_1$ (Teilmengen von M_1)

Abbildungen $f: D(f) \mapsto W(f)$; $x \mapsto y$

$D(f)$ Definitionsmenge: Werte die x annehmen kann

$W(f)$ Wertemenge: – " – y – " –

$B(f)$ Bildmenge $\hat{=}$ $W(f)$ die y in der Fkt annimmt

injektiv: nicht inj. es darf nur 1 x pro y geben

surjektiv: nicht surj. es muss für jedes y ein x geben

injektiv $\wedge$ surjektiv <> bijektiv

Umkehrfkt $f^{-1}(x) \leftrightarrow f(x) \Rightarrow 2x = y \Rightarrow 2y = x \Rightarrow y = \frac{1}{2}x$

Scheitelform einer Parabel $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow ax^2 + bx + c + d^2 - d^2 \Rightarrow a(x+d)^2 + c - d^2 = y$

Komposition $f \circ g$ = g in f $\quad f = x^2$ $\quad g = \sqrt{x}$ $\quad f \circ g = \sqrt{x}^2$

Ex. Komp? $B(g) \subseteq D(f) \Rightarrow$ Kompos. existiert

bei verschacht. Fkt. $f \circ (g \circ h)$ $B(g \circ h)$ graphisch ermitteln

$|x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$

Aussagenlogik ($w = 1$, $f = 0$)

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$B \to A$	$A \leftrightarrow B$
w	w	f	f	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	w	f	w	f
f	w	w	f	f	w	w	f	f
f	f	w	w	f	f	w	w	w

$\wedge$ and; $\vee$ or; -> Implikation; <-> Äquivalenz

Tautologie: immer wahr; Kontradiktion: immer falsch

Implikation $A \to B \hat{=} \neg A \vee B$

Äquivalent $A \leftrightarrow B \hat{=} (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$

Quantoren ($\exists x$ es gilt (mind.) 1 x; $\forall x$ für alle x / unabhängig von x)

$\exists x_1 \exists x_2$ Es gilt (mind.) 1 x_1, x_2 -> Formel = wahr

$\forall x_1 \exists x_2$ unabh. v. x_1 gibt es ein x_2 -> wahr

$\exists x_1 \forall x_2$ x_2 ist egal, es gibt (mind) 1 x_1 -> wahr

$\forall x_1 \exists x_2 \forall x_3$ x_3 ist egal

$\forall x_1 \exists x_2 \exists x_3$ unabh. v. x_1 gibt es (mind) 1 $x_2 \wedge x_3$ -> wahr

$\forall x_1 \forall x_2$ Gleiq. muss für jedes x_1, x_2 wahr sein

$\forall x_1 \forall x_2 \exists x_3$ unabhang. von x_1, x_2 gibt es ein x_3 -> wahr

---

Pascalsches Dreieck

1 1 1 2 1 1 3 3 1 4

Exponenten v. $(a+b)^x$

ggT und kgV (alle Zahlen Faktorisieren) ACT

ggT : alle kleinsten Potenzen multiplizieren

kgV : alle größten Potenzen multiplizieren

Restklassen ($\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)

addition/division $\bar{a} \oplus \bar{a} = \overline{a+a}$

multiplikation $\bar{a} \odot \bar{a} = \overline{a \cdot a}$

multipl. inverse $\bar{a} \cdot \bar{a}^{-1} = 1$

$\bar{a}^{-1}$ => erw. eukl. Algorythmus (n, x)

$n \cdot a + t \cdot b = 1 \Rightarrow n = a^{-1}$

$x \pm n$!

Logarithmusgesetze

Expon. $4^x / \log_2$ $\quad 2^{2 \cdot x} / \log_2 \Rightarrow 2x$

$\log_a(y_1 \cdot y_2) = \log_a y_1 + \log_a y_2$

$\log_a\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = \log_a y_1 - \log_a y_2$

$\log_a(y^r) = r \log_a(y)$

$\log_a(1) = 0$

$\log_a(a) = 1$

$a^{\log_a(y)} = a$

$\lg = \log_{10}$ (dekadischer)
$\ln = \log_e$ (natürlicher)
$\operatorname{lb} = \log_2$ (binärer)

$\log_b(y) = \frac{\log_a(y)}{\log_a(b)}$

Goniometrische Gleichungen (je 2 Lsg für 1 x)

$\sin x = a$		$\cos x = a$	
$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
$x_1 = \arcsin a$	$x_1 = \arcsin a$	$x_1 = \arccos a$	$x_1 = \arccos a$
$x_2 = \pi - x_1$	$x_2 = \pi - x_1$	$x_2 = 2\pi - x_1$	$x_2 = 2\pi - x_1$
allg: $x_1 \pm k2\pi$		allg: $x_1 \pm k2\pi$	
$x_2 \pm k2\pi$		$x_2 \pm k2\pi$	

Umformungen

$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \sin x_2$

$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2$

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\sin x_1 \pm \sin x_2 = 2 \sin \frac{x_1 \pm x_2}{2} \cos \frac{x_1 \pm x_2}{2}$

$\cos x_1 + \cos x_2 = 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \cos \frac{x_1 - x_2}{2}$

$\cos x_1 - \cos x_2 = -2 \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2}$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ / $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ / $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Folgen (a_n) (bekannte folge $\frac{1}{n} \Rightarrow 0$)

zur Grenzwertbestimmung zur bekannten Folge $(a_n) = \frac{1}{n}$ $\lim_{n \to \infty} = 0$ zurück führen

bei Wurzeln erweitern $\sqrt{n+a} - \sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+a}+\sqrt{n}}$

$n \to \infty \; \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$

Trivialkriterium: (wenn (a_n) als Folge betrachte Nullf. =)

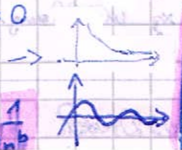
Leibnizkriterium: (bei Folgen $= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (a_n)$)

- $a_0 \geq a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq \lim_{n \to \infty} a_n = 0$
- Nullfolge
- alternierend

=> konvergent

Folge (a_n) ->

Reihe -> $\frac{1}{\sqrt{n^b}}$



bei $\sum_{n=1} (-1)^{n-1} a_n$ schreibt m $\sum (-1)^k a_k$

b-adische Systeme (A-10, B-11, C-12, D-13, E-14, F-15)

mit eukl. alg. bis $x = 0 \cdot b + r$, dann reste zusammenf.

Kegelschnitte ($Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$)

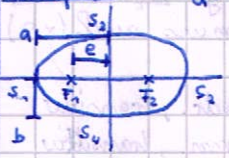
Klassifikation: | e = Brennweite, F = Brennpunkt
Kreis $A = B$ | M = Mittelpunkt, S = Scheitelpunkt
Ellipse $A \cdot B > 0$ | a = Leitlinie (Parabel)
Hyperbel $A \cdot B < 0$ | a = große Halbachse, b = kleine Halbachse
Parabel $A = 0 \vee B = 0$

in allgemeine Hauptform bringen durch quadr. Ergänzen

Kreis: $(y - y_M)^2 + (x - x_M)^2 = r^2$

$M = (x_M / y_M)$
Radius r

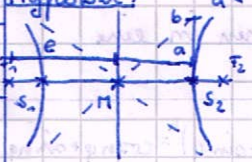
Ellipse $\frac{(x - x_M)^2}{a^2} + \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1$



$F_{1/2} = x_M \pm e$; $e = \sqrt{a^2 - b^2}$

$S_{1/2} = x_M \pm a$; $S_{3/4} = y_M \pm b$

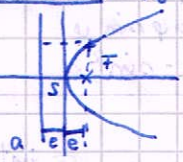
Hyperbel: $\frac{(x - x_M)^2}{a^2} - \frac{(y - y_M)^2}{b^2} = r$ $\quad (T_1 - T_2 \Leftrightarrow T_2 - T_1 !)$



$F_{1/2} = x_M \pm e$; $e = \sqrt{a^2 + b^2}$

$S_{1/2} = x_M \pm a$; Asymptoten $y = y_M \pm \frac{b}{a}(x - x_M)$

Parabel: $(y - y_S)^2 = 2p(x - x_S)$ bzw. $(x - x_S)^2 = 2p(y - y_S)$



$p > 0 \Rightarrow$ nach rechts geöffnet $\quad F = x_S \pm e$

$p < 0 \Rightarrow$ " links " $\quad e = \frac{|p|}{2} = \overline{FS}$

$a(x): x = x_S \pm e$

Newton - Raphson - Verfahren (x_0 möglichst nahe bei N

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

Konvergenz ausreichend belegen: $\frac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{(f'(x_0))^2} < 1$

=> hinreichendes Konvergenzkriterium

Reihe $\sum_{n=0/1}^{\infty} (a_n)$ (Reihe = Folge von Partialsumm

n-te Partialsumme $s_n = (a_0) + a_1 + \ldots + a_n$

Konvergenz:	Divergenz:
Reihe nähert sich einem Grenzwert $\neq \pm\infty$ ~~um~~ an	Reihe nähert sich $\pm\infty$ an

ist die Reihe konvergent, dann ist (a_n) eine Nullfolge $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$

Konvergenzkriterien: Quotientenkriterium (wenn n! vorh.)

$\lim_{n \to \infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ > 1 divergent, < 1 konvergent $\quad = 1$ unbestimmt bei QK

Wurzelkriterium: (bei Potenzen $(a_n) = (\ldots)^n$)

$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ > 1 divergent, < 1 konvergent (kleiner 1)

Betrag

Vektorrechnung

Vektor $\vec{a}$ $\vec{P_1 P_2} = \vec{a}$

Geradengleichung $g: \vec{r}(\lambda) = \vec{r}_p + \lambda \cdot \vec{a}$ $(\vec{a} = r_1 - r_2)$ Punkt-Punkt-Form

Ebene $E: \vec{r}(\lambda,\mu) = r_p + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$

Normalform $\vec{n} \cdot (\vec{r}_a - \vec{r}_p) = 0$ mit $\boxed{\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}}$

Winkel 2 Ger./Vekt. $\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2}{|\vec{a}_1| \cdot |\vec{a}_2|}\right)$

Schnittpunkt 2 Geraden $g_1 = g_2$ LGS lösen

Abstand 2 Geraden $(a_1 \times a_2 = 0)$ $d = \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)|}{|\vec{a}_1|}$

Abstand Punkt - Gerade $d = |\vec{a} \cdot \frac{1}{|\vec{a}|} \times (r_p - r_g)|$

Abstand Punkt - Ebene $d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_p - \vec{r}_E)|}{|\vec{n}|}$

Abstand Gerade - Ebene (parallel $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$) $d = \frac{|\vec{n} \cdot (\vec{r}_g - \vec{r}_E)|}{|\vec{n}|}$

~~Schnittpunkt Ger. - Ebene~~ $\vec{r}_s = \vec{r}_g + \left|\frac{\vec{n} \cdot (\vec{r}_E - \vec{r}_g)}{\vec{n} \cdot \vec{a}}\right| \cdot \vec{a}$ (Vektor · Skal)

~~Winkel Ger. - Ebene~~ $\varphi = \arcsin\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{n}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{n}|}\right)$

Abstand 2 Ebenen (parallel $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = 0$) $d = \frac{|\vec{n}_1 (\vec{r}_{E2} - \vec{r}_{E1})|}{|\vec{n}_1|}$

Schnittgerade 2 Ebenen $\vec{r}(\lambda) = \vec{r} + \lambda\vec{a}$ mit $\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$

$\Rightarrow \vec{r} = x_r = 0$ setzen LGS für $E_1 E_2$ lösen

Schnittwinkel 2 Ebenen $\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}\right)$

Volumen Körper (Spatprodukt) $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ wenn $0 \Rightarrow$ **Komplanar** 3 Vekt. in 1 E

2 Vektoren (anti) parallel (Kollinear) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$

Kurvendiskussion $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$

1 Schritt: $z(x)$ und $n(x)$ vollständig faktorisieren

max. Def bereich, Deflücken: wenn $G = \mathbb{R} \Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus (n(x) = 0)$

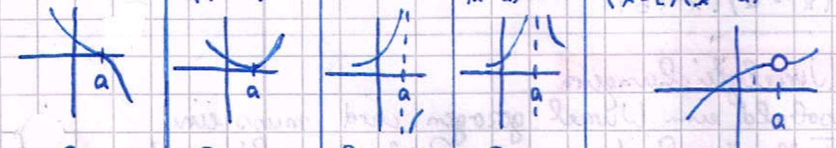
ohne die Nullstellen des Nennerpolynoms

2 Schritt: Kürzen, Nullstellen die sich aus dem Zähler und Nenner komplett kürzen werden zu hebbaren Def-Lücken

Nullstellen des Zählers sind Nullstellen von $f(x)$

Nullstellen des Nenners sind Polstellen von $f(x)$

Nullstelle: $\frac{x-a}{x-b}$ | $\frac{(x-a)^2}{(x-b)}$ — Polstelle: $\frac{x-b}{x-a}$ | $\frac{x-b}{(x-a)^2}$ — heb. Deflücke: $\frac{(x-b)\cancel{(x-a)}}{(x-c)\cancel{(x-a)}}$



2n-1 vielfachheit | 2n vielfachh. | 2n-1 Ordnung | 2n Ordnung

Extrempunkte
1. Ableitung $f'(x) = 0$ setzen
für Max, Min LS und RS
Grenzwert ansehen
LS +, RS − = MAX, sonst MIN

Krümmungsverhalten
2. Ableitung $f''(x) = 0$ setzen
$f''(0) > 0 =$ li, $f''(x) < 0 =$ re

Symmetrieverhalten
$f(x) = f(-x) \Rightarrow$ Achsensym.
$-f(x) = f(-x) \Rightarrow$ Punktsymm.
$f(x) \pm f(-x) \pm -f(x) \Rightarrow$ keine Symmetrie

Asymptoten
senkrechte bei Polstelle
waagrechte $(Z = N)$ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = \frac{L.H}{L.H}$
schräge $(Z > N)$
Polynomdiv $Z(x) : N(x) = A(x) + \frac{Rest}{N(x)}$
$A(x)$ = schräge Asymptote
bei $y = 0$ für $Z < N$

Grenzwerte (bei Polst. L.H.)
$\lim\limits_{x \to a}$ = LS + RS anschauen
$\lim\limits_{x \to \infty}$ = so lang L.H bis die höchste Potenz x^1 ist bzw $\neq x^0$

Fakultäten kürzen
$n! = (n-1)! \cdot n$
$(n+1)! = n!\,(n+1)$
$(n+2)! = n!(n+1)(n+2)$
$n! = (n-2)! \cdot (n-1) \cdot n$

Lineares Gleichungs. (Gaußverfahren)

in Form

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 \cdot x_1 & b \cdot x_2 & c \cdot x_3 & e \\ 0 \cdot x_1 & 1\, x_2 & d \cdot x_3 & f \\ 0 \cdot x_1 & 0 \cdot x_2 & 1 \cdot x_3 & g \end{array}\right)$$

$\pm a \cdot$ Zeile $/ \cdot : a$, $a \in \mathbb{R}$

bei n Glg und n+1 willk. darf 1 n = 1 werden

Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ 2×3 Matrix

Quadr. Matrix = $(n \times n)$ n Zeilen, n Spalten

Einh. Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | Diago. Matrix $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

Addition / Subtraktion

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplikation $(B \cdot A)$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \leftarrow A \\ B \quad \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} \end{array}$$

mit $c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{21} \cdot b_{12}$

Transponierte

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

Determinante

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \searrow + \searrow + \searrow - \nearrow - \nearrow - \nearrow = |\det A|$$

Inverse (mit Gauß)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & b & c & 1 & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 & 1 & 0 \\ g & h & i & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & a^{-1} & b^{-1} & \dots \\ 0 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

Eigenwert $(\det(A - \lambda E) = 0)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow (a-\lambda)(d-\lambda) - b \cdot c = 0$$

Eigenvektor (Zeile × Zeile)

$$\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a-\lambda \\ b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c \\ d-\lambda \end{pmatrix} = \text{Eigenvektor für } \lambda$$

Ableitungsregeln

Produktregel
$f(x) = u(x)\,v(x) \Rightarrow u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$

Quotientenregel
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v(x)^2}$

Kettenregel
$f(x) = u(v(x)) \Rightarrow u'(x) \cdot v'(x)$

Hauptwert des (komp) nat Log $(z = x + \dots)$
$Ln(z) = \ln(r) + i\,Arg(z)$ / Arg = Winkel

Linearfaktordarstellung (erw. eukl.
$\Rightarrow ggT(a,n) = Log(1, \dots) = a \cdot n + b \cdot q$

Majorantenkrit. (2 Reihen)
ist Σa_k konvergent und $|b_k| \geq a_k$ für alle $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \Sigma b_k$ = konvergent

Ableitungen

a^x	$a^x \ln(a)$
$a\cdot e^x$	$e^x \cdot a$
$a\cdot e^{u(x)}$	$u'(x)\, e^{u(x)} \cdot a$
$a \ln x$	$\frac{1}{x}\cdot a$
$a\cdot \ln(u(x))$	$u'(x)\cdot \frac{1}{u(x)}\cdot a$
$a\cdot \sin x$	$\cos x \cdot a$
$a\cdot \cos x$	$-\sin x \cdot a$
$a\cdot \tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}\cdot a$
$a\cdot \arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot a$
$a\cdot \arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot a$
$a\cdot \arctan x$	$\frac{1}{x^2+1}\cdot a$
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\cot$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Integrale

$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n+1} + C$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
$u'(x)\cdot e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$
$u'(x)/u(x)$	$\ln\lvert u(x)\rvert + c$
$1/x$	$\ln\lvert x\rvert + c$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$
$u'(x)\cos(u(x))$	$\sin(u(x)) + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$1/x^2$	$-1/x = (-x^{-1})$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
$1/(1+x^2)$	$\arctan x + c$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\arcsin x + c$
$u(x)\cdot\frac{1}{g(x)}$	

Spezielle Integrale

$\frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2} \vee \frac{Bx+C}{x^2+px+q}$ Scheitelform

$= \frac{B}{2}\ln\lvert x^2+px+q\rvert + \frac{C-\frac{B}{2}p}{b}\arctan\left(\frac{x-…}{b}\right)$

Partialbruchzerlegung $(Z < N)$ $\frac{Z}{N}$

1. Nenner faktorisieren
2. PBZ Term $\frac{A}{Nst_1} + \frac{B}{Nst_2} + \dots + \frac{Cx+D}{Rest\,(q(x))}$ unzerlegbarer Teil von $q(x)$
3. Form $A(ax^2+bx^1+cx^0)+B(ax^2+bx^1+cx^0…$
4. LGS lösen 5. Lösungen in 2. einsetzen und Integr.

	A	B	C
x^2			
x^1			
x^0			

Polynomdivision $Z \geq N$ $\left(\frac{Z}{N}\right)$

Polynomdivision durchführen, einzelteile Integrieren.
Bei Term mit rest siehe Spez. Integ…

Integrationsmethoden

1. bei gebr. rationalen fkt. $\frac{p(x)}{q(x)}$ $p<q$ => Partialbruchzerl.
2. bei gebr. rat. fkt $p \geq q$ => Polynomdivision
3. bei Produkten $p(x)\cdot q(x)$ => Partielle Integration
4. bei verketteten fkt $p(q(x))$ => Substitution

Partielle Integration (bei Produkten)

$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)$
ein $v(x)$ wählen von dem man leicht die …e Stammfkt findet / u' ist optimal $\in \mathbb{R}$, zb
und ein u das abgel. Konst. ist

Substitution (bei verketteten Fkt)

die Fkt zur sub. wählen die man nicht integrieren kann: $\frac{du}{dx} = u'(x) \Rightarrow \frac{du}{u'(x)} = dx \Leftarrow$ einsetzen, integr. und in die Stammfkt. ei…

Ungleichungen (mit bis 3 unbest.)

$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} \geq 1$; a: Schnittpunkt mit x-achse
Fallunterscheidung bei mult. mit x
Vorzeichendrehung bei mult mit $a<0$ $(\leq \Rightarrow \geq)$
Bereiche aus beiden Lösungen $\in \mathbb{L}$

Substitution bei Polynomen

nach der Substitution in faktorisierter Form hinschreiben
$(x^2-a)(x^2+b)$

Wurzelgleichungen

sobald eine Wurzel gezogen wird muss eine Fallunterscheidung und Probe gemacht werden
nur Lsg die in der Probe wahr sind gehören zu $\mathbb{L}$
$/\pm\sqrt{\ }$

VZT (alle Nst, sowie Intervalle $+\infty$ bis $-\infty$)

vollst. fakt., alle Nst und Faktoren aufstellen
VZ im Bereich ermitteln
für $f(x)>0$ sind alle Bereiche mit $>0 \in \mathbb{L}$

Ungleichungen auf direktem Weg lösen => quad. erg. aufl.

$\lvert x-b\rvert \geq c$ $\mathbb{L} = b-c \vee b+c \geq x$

Volumen eines rot Körpers

$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx$

Kurvenlänge

$l = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$

Einheiten (Restklasse)

der ggT einer Zahl und der Restklasse ist 1 => die Zahl hat ein mult inv. in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

lin. (arit.) Mittel

$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

quadr. Mittel

$\bar{f}^q = \sqrt{\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)^2\,dx}$

Sandwich-Lemma

Krümmungsradius (ρ)

$\kappa = \frac{y''(x)}{(1+y'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$ Krümmung
$\rho = \frac{1}{\lvert\kappa\rvert}$

Fläche eines Rechtecks (eingeschl. von $f(x)$)

$2x\cdot y$ $l = 2\cdot x$, $b = y$
$(2x\cdot f(x))' = 0 \Leftarrow \lvert x\rvert$
$l = 2\cdot x$
$b = f(x)$

Schwingformen

reelle: $A(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$
kompl.: $\underline{A}(t) = \underline{A}_0 e^{j\varphi_0} e^{j\omega t}$
$\underline{A}_0$

Bez. x^1 = lin. x^2 quadr x^3 = kubisch

Asymp. im unendl. $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - F(x) = 0$

Längenverhältnis Kreiszylinder

$\frac{h}{r} = h\cdot\frac{1}{r} = \frac{V_0}{\pi}\left(\frac{2\pi}{V_0}\right)^{2/3}\cdot\left(\frac{2\pi}{V_0}\right)^{1/3} = \frac{V_0}{\pi}\cdot\frac{2\pi}{V_0} = 2$

Reelle Schwgg $A = \mathrm{Im}(\underline{A})$

algebr. Form $z = x + iy$