Mathematik für Infotronik (19)

Gerald Kupris

22.11.2010

Zahlenfolge

Eine Folge ist eine Aufzählung von Objekten, mit der Besonderheit, dass es sich bei einer Folge immer um unendlich viele Objekte handelt. Mathematisch wird man der Unendlichkeit dadurch gerecht, dass man jeder natürlichen Zahl ein Folgenglied zuordnet.

Bei einer **Zahlenfolge** oder kurz **Folge** $(a_k) = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, \ldots$ wird jeder natürlichen Zahl k ein **Folgenglied** a_k aus der Menge der reellen Zahlen zugeordnet:

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \ldots & k, & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1, & a_2, & a_3, & \ldots & a_k, & \ldots \end{array}$$

Definition einer Folge

Bei der **expliziten Definition einer Folge** gibt man eine Formel an, mit der man jedes Folgenglied direkt und unabhängig von allen anderen Folgengliedern berechnen kann.

Beispiel

Man nennt eine Zahlenfolge **alternierend**, falls aufeinanderfolgende Glieder immer verschiedene Vorzeichen haben.

Beispiel

Bei der **rekursiven Definition einer Folge** gibt man ein paar Anfangsglieder an und legt fest, wie sich die restlichen Folgenglieder aus ihren Vorgängergliedern berechnen.

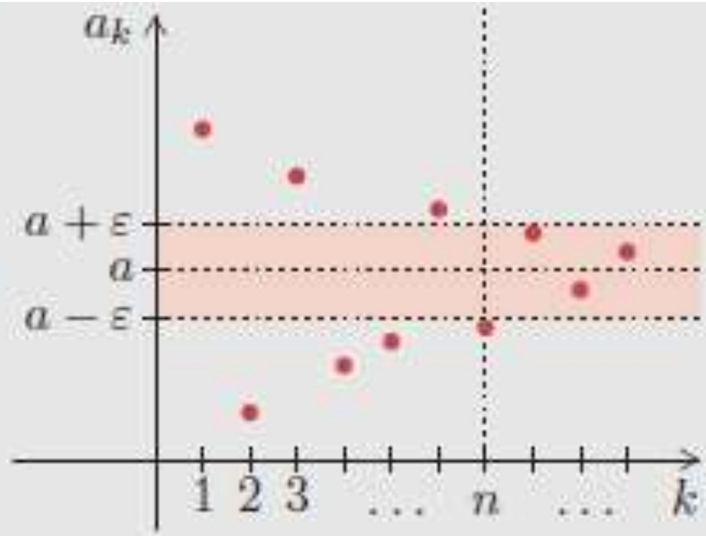
Beispiel

Grenzwert einer Zahlenfolge

Eine Zahlenfolge (a_k) besitzt den **Grenzwert** a, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n gibt, sodass $|a_k - a| < \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $k > n$. Eine Zahlenfolge, die einen Grenzwert besitzt, nennt man **konvergent** und verwendet die Schreibweisen

$$(a_k) \to a \text{ für } k \to \infty \text{ oder } \lim_{k\to\infty} a_k = a.$$

Eine Zahlenfolge, die keinen Grenzwert besitzt, nennt man **divergent**.



Beispiel

Monotone Zahlenfolge

Man nennt eine Zahlenfolge (a_k)

- **monoton fallend**, falls $a_k \geq a_{k+1}$,
- **streng monoton fallend**, falls $a_k > a_{k+1}$,
- **monoton wachsend**, falls $a_k \leq a_{k+1}$,
- **streng monoton wachsend**, falls $a_k < a_{k+1}$,

für alle natürlichen Zahlen k.

Beschränkte Zahlenfolge

Man nennt eine Zahlenfolge (a_k) **beschränkt**, falls der Betrag aller Folgenglieder unterhalb einer festen Schranke C liegt:

$$|a_k| \leq C \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Jede monotone und beschränkte Folge ist konvergent.

Beispiel: rekursiv definierte, konvergente Zahlenfolge

Rechnen mit konvergenten Folgen

Wenn (a_k) und (b_k) konvergente Folgen sind mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$ und $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$, dann gilt:

- Die Folge $(c_k) = (a_k \pm b_k)$ konvergiert auch mit $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k \pm b_k) = a \pm b$.
- Die Folge $(c_k) = (a_k \cdot b_k)$ konvergiert auch mit $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k \cdot b_k) = a \cdot b$.
- Die Folge $(c_k) = \left(\frac{a_k}{b_k}\right)$ konvergiert auch mit $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{a_k}{b_k}\right) = \frac{a}{b}$. Das gilt nur, wenn alle Folgenglieder b_k und der Grenzwert b nicht null sind.

Einschließungsprinzip

Wenn (a_k) und (b_k) konvergente Folgen sind mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = a$ und $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$, und (c_k) eine zwischen (a_k) und (b_k) eingeschlossene Folge ist mit $a_k \leq c_k \leq b_k$, dann gilt:

- Wenn die Folge (c_k) konvergiert, so liegt ihr Grenzwert zwischen den beiden Grenzwerten $a \leq \lim\limits_{k\to\infty} c_k \leq b$.
- Wenn (a_k) und (b_k) denselben Grenzwert $a = b$ haben, dann konvergiert auch die Folge (c_k) gegen diesen gemeinsamen Grenzwert $a = \lim\limits_{k\to\infty} c_k = b$.

Grenzwerte einer Folge und einer Funktion

Wenn die Glieder einer Folge jede noch so große Schranke ab einem bestimmten Index überschreiten und dann immer oberhalb dieser Schranke liegen, dann hat die Folge den **uneigentlichen Grenzwert** ∞. Entsprechend definiert man den uneigentlichen Grenzwert $-\infty$. Folgen mit einem uneigentlichen Grenzwert bezeichnet man als **bestimmt divergent** und ansonsten als **unbestimmt divergent**.

Grenzwerte einer Funktion

An Stellen, an denen eine Funktion eine Definitionslücke besitzt, kann man keinen Funktionswert berechnen. Mit Hilfe von Folgen können wir uns jedoch beliebig nahe an Definitionslücken herantasten. Bei diesem Herantasten an eine Definitionslücke können unterschiedliche Effekte entstehen.

Die Funktion f hat an der Stelle x_0 den **Grenzwert** G, wenn für jede gegen x_0 konvergente Zahlenfolge (x_n) die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))$ gegen G konvergiert. Man verwendet die Schreibweise $f(x) \to G$ für $x \to x_0$ oder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = G$.

Beispiel

Rechnen mit Funktionsgrenzwerten

Wenn f und g Funktionen sind mit $\lim_{x \to x_0} f(x) = F$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) = G$, dann gilt:

- Es existiert auch der Funktionsgrenzwert von $f(x) \pm g(x)$ an der Stelle x_0, nämlich $\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = F \pm G$.
- Es existiert auch der Funktionsgrenzwert von $f(x) \cdot g(x)$ an der Stelle x_0, nämlich $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$.
- Es existiert auch der Funktionsgrenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ an der Stelle x_0, nämlich $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{F}{G}$. Das gilt nur, wenn die Funktion $g(x)$ in einer Umgebung von x_0 und der Grenzwert G nicht null sind.

Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert

Wenn man bei der Grenzwertberechnung einer Funktion f an der Stelle x_0 nur Zahlenfolgen (x_n) betrachtet, die kleinere Werte als x_0 enthalten, dann bezeichnet man den Grenzwert als **linksseitigen Grenzwert** G_L, Zahlenfolgen mit größeren Werten als x_0 erzeugen den **rechtsseitigen Grenzwert** G_R. Man verwendet die Schreibweisen

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = G_\mathrm{L}, \qquad \lim_{x \to x_0+} f(x) = G_\mathrm{R}.$$

Elementare Funktionen

Die elementaren Funktionen sind in der Mathematik immer wieder auftauchende, grundlegende Funktionen, aus denen sich viele andere Funktionen mittels der Grundrechenarten, Verkettung, Differentiation oder Integration bilden lassen. Dabei gibt es keine allgemeingültige Definition, wann eine Funktion elementar genannt wird und wann nicht.

Die elementaren Funktionen ergeben sich oftmals als Lösungen einer einfachen Differential- oder Funktionalgleichung, und sind deshalb auch für viele Naturwissenschaften wie Physik oder Chemie grundlegend, weil sie immer wieder in den unterschiedlichsten Zusammenhängen auftreten.

- die Potenzfunktionen
- die Radizierung bzw. das Wurzelziehen als Umkehrung der Potenzfunktionen
- die Exponentialfunktion
- der natürliche Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion
- die trigonometrischen Funktionen
- die Arkusfunktionen als Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen
- die hyperbolischen Funktionen
- weitere …

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

http://de.wikipedia.org

http://www.komplexe-zahlen.de

http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_2/basics/b2_1_5.html

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/imaginaer1.htm