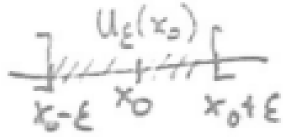
3.5 Extremwerte und Krümmung

Def.: $f:[a;b] \to \mathbb{R}$ besitzt bei $x_0 \in]a;b[$ ein

(isoliertes) $\left\{ \begin{matrix} \text{lokales Maximum} \\ \text{lokales Minimum} \end{matrix} \right\}$, wenn $\left\{ \begin{matrix} f(x) < f(x_0) \\ f(x) > f(x_0) \end{matrix} \right\}$

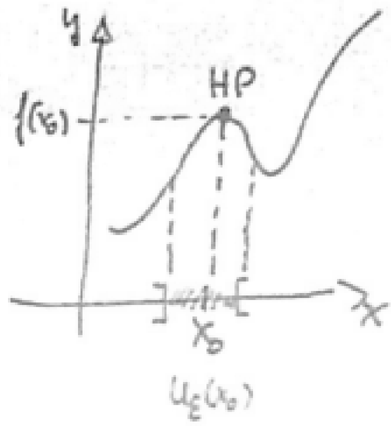
für alle $x \in U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ gilt. (für ein $\varepsilon > 0$)

$U_\varepsilon(x_0) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ „ε-Umgebung von x"

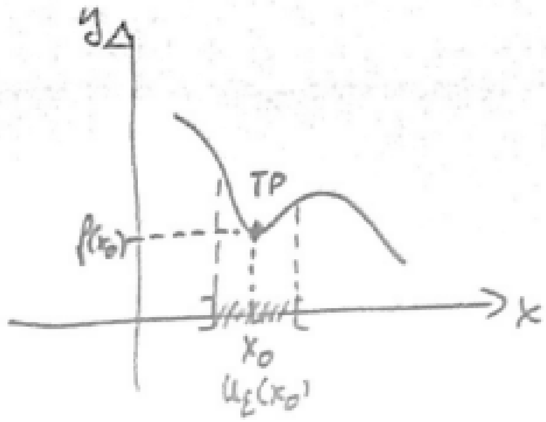


Der Punkt $P(x_0; f(x_0))$ heißt dann $\left\{ \begin{matrix} \text{Hochpunkt (HP)} \\ \text{Tiefpunkt (TP)} \end{matrix} \right\}$.

Ein lokales Maximum/Minimum heißt auch lokales Extremum.



lokales Maximum



lokales Minimum

f hat bei $x_0 \in [a;b]$ ein $\left\{ \begin{matrix} \text{globales Maximum} \\ \text{globales Minimum} \end{matrix} \right\}$,

wenn $\left\{ \begin{matrix} f(x) \le f(x_0) \\ f(x) \ge f(x_0) \end{matrix} \right\}$ für alle $x \in [a;b]$ gilt.

$f(x_0)$ heißt dann globales Maximum bzw. Minimum (von f)

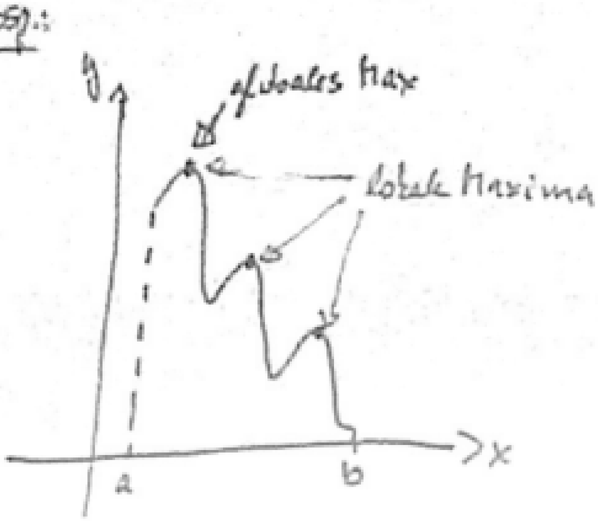
<u>Bem.</u>: Hat f bei $x_1, \dots, x_n$ alle lokalen Extrema,
so gilt:

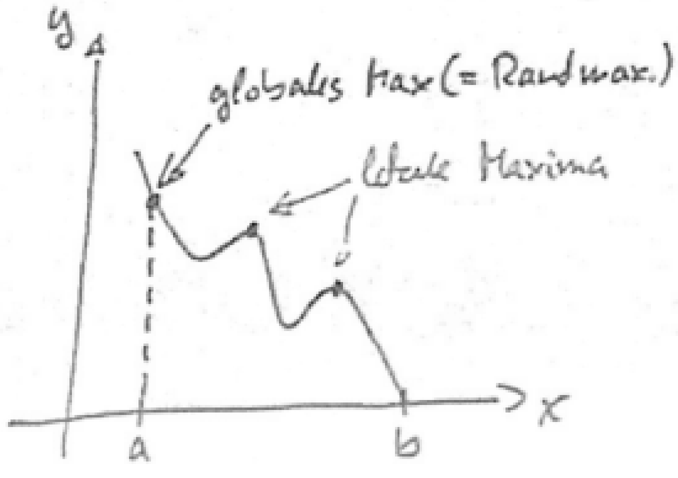
$$\text{globales Maximum/Minimum} = \text{Max/Min}\left\{f(a), f(x_1), \dots, f(x_n), f(b)\right\}$$

Ränder des Intervalls berücksichtigen!

<u>Def.</u>: Hat $f: [a;b] \to \mathbb{R}$ bei $x_0 = a$ oder $x_0 = b$ (Ränder des Intervalls) ein globales Max./Min, so nennt man $f(x_0)$ ein <u>Randmaximum</u>/<u>Randminimum</u>.

<u>Bsp.</u>:





<u>Satz</u>: f sei differenzierbar; $x_0 \in \,]a,b[$

f hat bei x_0 ein lokales $\begin{Bmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{Bmatrix}$

$\Leftrightarrow$ f' wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\begin{Bmatrix} \text{von + nach -} \\ \text{von - nach +} \end{Bmatrix}$.

Satz: (notwendiges Kriterium für Extremum)

f sei stetig differenzierbar, d.h. diffbar und f' sei stetig.

Besitzt f bei $x_0 \in]a;b[$ ein lokales Extremum,

so gilt $\boxed{f'(x_0) = 0}$

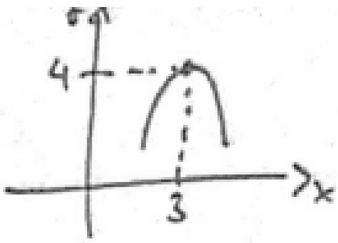
Satz: (hinreichendes Kriterium für Extremum)

f sei zweimal stetig diffbar, d.h. f'' existiert und ist stetig.

Gilt dann $f'(x_0) = 0$ und $\begin{Bmatrix} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{Bmatrix}$ für ein $x_0 \in]a;b[$,

so hat f bei x_0 ein (isoliertes) $\begin{Bmatrix} \text{lokales Minimum} \\ \text{lokales Maximum} \end{Bmatrix}$.

Bsp.: 1) $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$



$f'(x) = -4(x-3) = -4x + 12$

$f''(x) = -4 < 0$

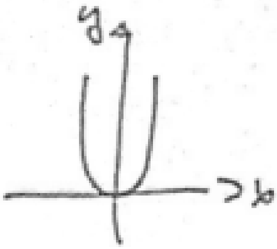
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 3$

$\Rightarrow f$ hat bei $x = 3$ ein lokales Maximum

2) $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$



$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Jedoch ist $f''(0) = 0 \Rightarrow$ Kriterium nicht anwendbar.

$f'(x) = 4x^3$ hat aber bei $x=0$ einen Vorzeichenwechsel

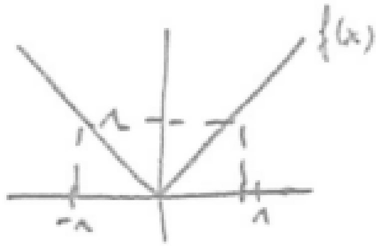
von $-$ nach $+$ $\Rightarrow f$ hat bei $x=0$ ein lokales Minimum.

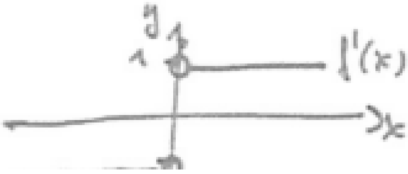
3) $f(x) = |x|$

$$f'(x) = \begin{cases} +1, & \text{für } x > 0 \\ -1, & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

$f'(0)$ existiert nicht.

$f'(x) = \operatorname{sgn}(x) \quad (x \neq 0)$





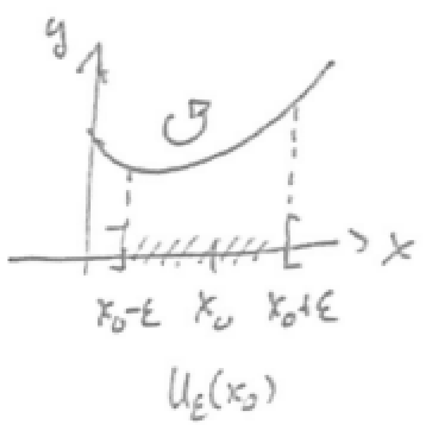
$f'(x)$ hat bei $x=0$ einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$

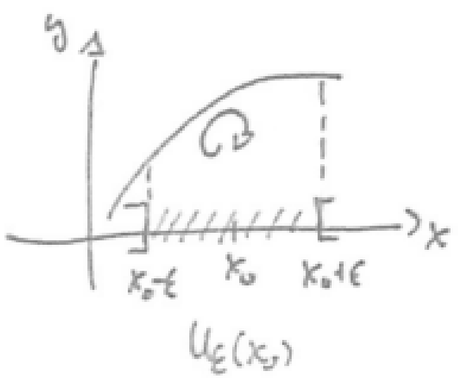
$\Rightarrow f$ hat bei $x=0$ [illegible] Minimum.

<u>Def.</u>: f heißt in einer Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von x_0 (oder bei x_0)

$\left\{\begin{matrix}\text{linksgekrümmt} \\ \text{rechtsgekrümmt}\end{matrix}\right\}$, wenn die Ableitung f' auf $U_\varepsilon(x_0)$

$\left\{\begin{matrix}\text{streng monoton steigt} \\ \text{streng monoton fällt}\end{matrix}\right\}$.





linksgekrümmt

rechtsgekrümmt

<u>Satz</u>: f sei zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt:

f ist bei x_0 $\left\{\begin{matrix}\text{linksgekrümmt} \\ \text{rechtsgekrümmt}\end{matrix}\right\}$ genau dann, wenn $\left\{\begin{matrix}f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0\end{matrix}\right\}$ gilt.

<u>Def.</u>: Der Zahlenwert

$$\boxed{\kappa = \frac{y''(x_0)}{(1+y'(x_0)^2)^{3/2}}} \qquad (y' = f',\ y'' = f'')$$

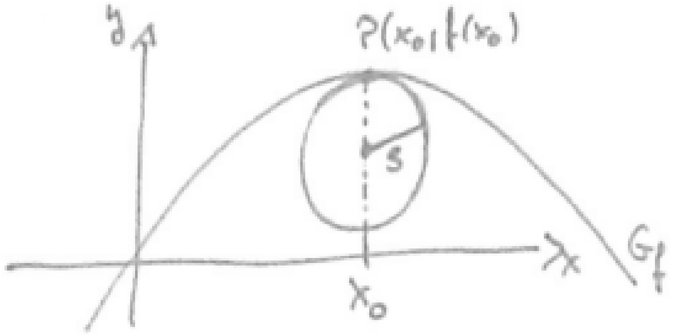
heißt <u>Krümmung</u> der Kurve $y = f(x)$ im Punkt $P(x_0; f(x_0))$

Mit

$$\boxed{\rho = \frac{1}{|\kappa|}}$$

bezeichnet man den <u>Krümmungsradius</u>

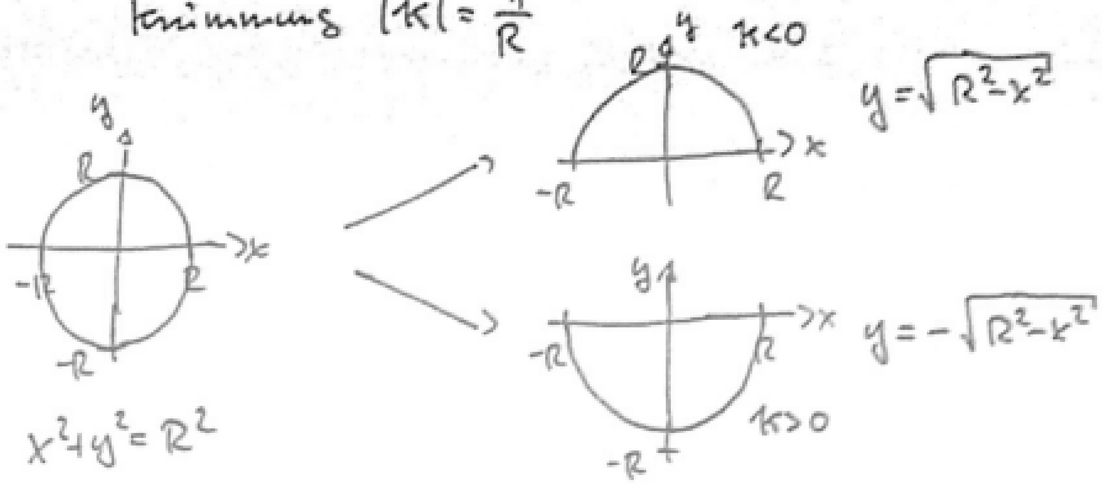
<u>Bem</u>: ρ ist der Radius des Krümmungskreises (Schmiegkreis) an die Kurve $y=f(x)$ im Punkt $P(x_0; f(x_0))$



ρ = Krümmungsradius
= Radius des Krümmungskreises

<u>Bsp</u>: <u>Beh.</u>: Ein Kreis mit Radius R hat konstante Krümmung $|\kappa| = \frac{1}{R}$

<u>Bsp</u>: <u>Beh.</u>: Ein Kreis mit Radius R hat konstante Krümmung $|\kappa| = \frac{1}{R}$



Kreisgleichung nach y umstel

$$x^2+y^2=R^2 \quad |-x^2$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = R^2-x^2 \quad |\pm\sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \pm\sqrt{R^2-x^2}$$

Berechne Krümmung κ für oberen Halbkreis:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2} \; ; \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{R^2-x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$y'' = \frac{-\sqrt{R^2-x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}}{R^2-x^2}$$