Mathematik für Infotronik (35)

Gerald Kupris

17.01.2011

Restliche Stunden Mathematik 1. Semester

10.01.2011 (Mo) 09:45 Uhr: Auswertung Fragebogen, Exponentialfunktion, e-funktion

12.01.2011 (Mi) 09:45 Uhr: Logarithmusfunktion, Logarithmusregeln

12.01.2011 (Mi) 11:45 Uhr: Ableitung und Integration von e-Funktion und Logarithmus

13.01.2011 (Do) 09:45 Uhr: Wiederholung Integration, Integration durch Substitution

17.01.2011 (Mo) 09:45 Uhr: Partielle Integration, Partialbruchzerlegung

19.01.2011 (Mi) 08:00 Uhr: Rechenbeispiele, Flächenberechnung, Schwerpunkt

19.01.2011 (Mi) 09:45 Uhr: Anwendung der Integration, numerische Methoden

20.01.2011 (Do) 09:45 Uhr: allgemeine Wiederholung, Prüfungsvorbereitung

24.01.2011 (Mo) 09:45 Uhr: Rechnen der Probeklausur

08.02.2011 (Di) 11:00 Uhr: Prüfung

Wiederholung: Integration durch Substitution

Wenn man die Funktion unter dem Integral als ein Produkt aus einer verketteten Funktion $f \circ u$ und der inneren Ableitung u' darstellt, dann kann man alternativ auch einfach über die Funktion u integrieren:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) \, \mathrm{d}x = \int f(u) \, \mathrm{d}u.$$

$$\int f(u(x))dx = \frac{\int f(u)du}{u'(x)}$$

Substitution der Grenzen

Bei bestimmten Integralen ist es oft einfacher, anstatt der Rücksubstitution eine Substitution der Integrationsgrenzen durchzuführen:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u=u(a)}^{u=u(b)} g(u)\,\mathrm{d}u.$$

Beispiel: $\int_{-1}^{1} e^{2x}\,dx$

Produktregel der Ableitung

Beim Ableiten eines Produktes zweier Funktionen f und g summiert man das Produkt aus der Ableitung der ersten Funktion f' und der zweiten Funktion g und das Produkt aus der ersten Funktion f und der Ableitung der zweiten Funktion g':

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) \; + \; f(x) \cdot g'(x).$$

Daraus kann man eine Regel zur partiellen Integration einwickeln.

Partielle Integration

Wenn man die Funktion im Integral als ein Produkt einer Funktion f und der Ableitung g' einer Funktion g in der Form

$$\int f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x$$

darstellt, dann kann man die Funktion teilweise integrieren:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x.$$

Partielle Integration

Partielle Integration ist sinnvoll, falls

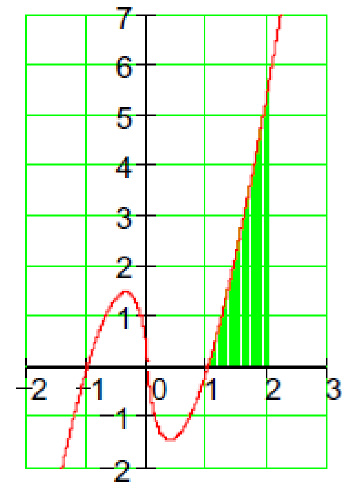
- man eine Stammfunktion g zu g' angeben kann und
- das neue Integral

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

die Berechnung des ursprünglichen Integrals vereinfacht.

Beispiele: Stammfunktion von ln(x)

$$\int_1^2 2x \cdot \ln\left(x^2\right) dx$$



Stammfunktionen gebrochenrationaler Funktionen

Stammfunktionen einer gebrochenrationalen Funktion der Form

$$\int \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_m x^m} \, \mathrm{d}x$$

bestimmt man, indem man

- eine unecht gebrochenrationale Funktion durch Polynomdivision in ein Polynom und eine echt gebrochenrationale Funktion zerlegt und
- eine echt gebrochenrationale Funktion mithilfe einer Partialbruchzerlegung in Summen unterteilt.

Beispiele

Vorgehensweise bei Integration durch Partialbruchzerlegung

Eine unecht gebrochenrationale Funktion wird in eine ganzrationale und eine echt gebrochenrationale Funktion zerlegt.

Die echt gebrochenrationale Funktion wird in eine endliche Summe aus Partialbrüchen zerlegt.

Die Summe aus Partialbrüchen kann gliedweise integriert werden.

Partialbrüche für Linearfaktoren

Jeder Nennernullstelle x_0 einer echt gebrochenrationalen Funktion ordnet man einen Partialbruch zu. Die Form des Partialbruches hängt dabei wie folgt von der Vielfachheit der Nullstelle x_0 ab:

$$
\begin{array}{lcl}
\text{einfache Nullstelle} & \Longrightarrow & \dfrac{A_1}{x-x_0} \\
\text{zweifache Nullstelle} & \Longrightarrow & \dfrac{A_1}{x-x_0} + \dfrac{A_2}{(x-x_0)^2} \\
\vdots & & \\
p\text{-fache Nullstelle} & \Longrightarrow & \dfrac{A_1}{x-x_0} + \dfrac{A_2}{(x-x_0)^2} + \ldots + \dfrac{A_p}{(x-x_0)^p}
\end{array}
$$

Die Konstanten $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_p$ bestimmt man durch Koeffizientenvergleich.

Beispiel

Partialbruchzerlegung für Linearfaktoren

Eine echt gebrochenrationale Funktion, bei der sich der Nenner in Linearfaktoren zerlegen lässt, kann man auf folgende Weise in eine Summe von Partialbrüchen zerlegen:

(1) Bestimme alle Nullstellen des Nenners.

(2) Ordne jeder Nennernullstelle einen geeigneten Partialbruch zu.

(3) Bestimme die Konstanten in den Partialbrüchen so, dass die Summe der Partialbrüche mit der Funktion übereinstimmt.

Beispiel

Partialbrüche für quadratische Funktionen

Jedem quadratischen Faktor $x^2 + bx + c$ im Nenner einer echt gebrochenrationalen Funktion ordnet man einen Partialbruch zu. Die Form des Partialbruches hängt dabei wie folgt von der Vielfachheit des Faktors $x^2 + bx + c$ ab:

$$\begin{array}{lcl}
\text{einfacher Faktor} & \Longrightarrow & \dfrac{B_1 x + C_1}{x^2 + bx + c} \\
\text{zweifacher Faktor} & \Longrightarrow & \dfrac{B_1 x + C_1}{x^2 + bx + c} + \dfrac{B_2 x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} \\
\vdots & & \\
p\text{-facher Faktor} & \Longrightarrow & \dfrac{B_1 x + C_1}{x^2 + bx + c} + \dfrac{B_2 x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \ldots + \dfrac{B_p x + C_p}{(x^2 + bx + c)^p}
\end{array}$$

Die Konstanten $B_1, B_2, \ldots, B_p$ und $C_1, C_2, \ldots, C_p$ bestimmt man durch Koeffizientenvergleich.

Partialbruchzerlegung

Eine gebrochenrationale Funktion lässt sich auch dann in Partialbrüche zerlegen, wenn sich das Nennerpolynom nicht vollständig in Linearfaktoren zerlegen lässt:

(1) Bestimme alle linearen und quadratischen Faktoren des Nenners.

(2) Ordne jedem Faktor einen geeigneten Partialbruch zu.

(3) Bestimme die Konstanten in den Partialbrüchen so, dass die Summe der Partialbrüche mit der Funktion übereinstimmt.

Beispiel

Stammfunktionen bei der Partialbruchzerlegung (Teil I)

Partialbrüche mit einfachen oder mehrfachen reellen Nennernullstellen x_0 lassen sich mit Stammfunktionen folgender Form integrieren:

- $$\int \frac{1}{x - x_0}\,\mathrm{d}x = \ln|x - x_0| + C$$
- $$\int \frac{1}{(x - x_0)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(x - x_0)^{n-1}} + C, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Beispiel

Stammfunktionen bei der Partialbruchzerlegung (Teil II)

Partialbrüche, bei denen sich der Nenner nicht vollständig in Linearfaktoren zerlegen lässt und somit quadratische Faktoren enthält, führt man auf folgende Integrale zurück:

- $\displaystyle\int \frac{2\,x+b}{x^2+b\,x+c}\,\mathrm{d}\,x = \ln\left|x^2+b\,x+c\right| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

Beispiel

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org