HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Mathematik 1 Infotronik (20)

Gerald Kupris

10.01.2013

Weiterer Plan für dieses Semester

16. (13.12.2012): Lineare Abbildung, 2D Abbildungen, 2D Grafik

17. (19.12.2012): Projektion, Verschiebung, homogene Koordinaten

18. (20.12.2012): Drehung um einen beliebigen Punkt, Scherung

Feiertage

19. (09.01.2013): Definition von Eigenvektoren und Eigenwerten

20. (10.01.2013): Berechnung von Eigenvektoren und Eigenwerten

21. (16.01.2013): Eigenschaften von Eigenvektoren und Eigenwerten

22. (17.01.2013): Anwendung von Eigenvektoren und Eigenwerten

23. (23.01.2013): Anwendung von Eigenvektoren und Eigenwerten

24. (24.01.2013): Wiederholung, Prüfungsvorbereitung

Wiederholung: Eigenvektor und Eigenwert

Ein **Eigenvektor** einer Abbildung ist in der linearen Algebra ein vom Nullvektor verschiedener Vektor, dessen **Richtung** durch die Abbildung nicht verändert wird.

Ein Eigenvektor wird also nur gestreckt, und man bezeichnet den Streckungs-faktor als **Eigenwert** der Abbildung.

Eigenwerte charakterisieren wesentliche Eigenschaften linearer Abbildungen, etwa ob ein entsprechendes lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist oder nicht.

In vielen Anwendungen beschreiben Eigenwerte auch physikalische Eigenschaf-ten eines mathematischen Modells.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren

Zur Bestimmung der Eigenwerte λ und der Eigenvektoren $\boldsymbol{v}$ einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ kann man folgendermaßen vorgehen:

(1) Bestimme alle Eigenwerte λ aus der charakteristischen Gleichung

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{E}| = 0.$$

(2) Bestimme zu jedem Eigenwert λ einen Eigenvektor $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ aus der Gleichung

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\,\boldsymbol{E})\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

Zusammenfassung: Bestimmung der Eigenwerte

Es sei $A \in K^{n\times n}$. Aus der Bedingung $Av = \lambda v$ folgt $(A - \lambda I)v = 0$.

Der Nullvektor ist in der Eigenvektordefinition ausgeschlossen, da $A0 = 0$ stets gilt. Wir suchen also nichttriviale Lösungen von

$$(A - \lambda I)v = 0\ .$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem, es besitzt also nichttriviale Lösungen genau dann, wenn $\mathrm{rang}(A - \lambda I) < n$ ist, also genau dann, wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0\ .$$

Dies ist ein Polynom n-ten Grades in λ (das **charakteristische Polynom** von A). Seine Nullstellen sind die gesuchten Eigenwerte.

Anleitung zur Bestimmung von Eigenvektor und Eigenwert

„Schritt-für-Schritt“:

1. Die Eigenwerte werden über die charakteristische Gleichung bestimmt (Nullstellen des charakteristischen Polynoms).
2. Die gefundenen Eigenwerte werden in die Gleichung $(A - \lambda E) \cdot x = 0$ eingesetzt.
3. Das Gleichungssystem wird gelöst, dadurch wird ein Eigenvektor (von vielen möglichen) zu dem jeweiligen Eigenwert gefunden.
4. Probe: der gefundene Vektor wird mit der Matrix multipliziert, um zu überprüfen, ob es sich tatsächlich um einen Eigenvektor handelt.

Wiederholung: Berechnung der Eigenwerte

Die Gleichung

$$(A - \lambda E) \cdot x = 0$$

die Eigenwerte definiert, stellt ein homogenes lineares Gleichungssystem dar.

Da $x \neq 0$ vorausgesetzt wird, ist dieses genau dann lösbar wenn gilt:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Expandiert man die Determinante auf der linken Seite, so erhält man ein Polynom n-ten Grades in λ. Dieses wird charakteristisches Polynom genannt, und dessen Nullstellen sind die Eigenwerte, also die Lösungen der Gleichung

$$\alpha_n \cdot \lambda^n + \alpha_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_0 = 0$$

Berechnung der Eigenvektoren

Für einen Eigenwert λ lassen sich die Eigenvektoren aus der Gleichung

$$(A - \lambda E) \cdot x = 0$$

bestimmen.

Die Eigenvektoren spannen einen Raum auf, dessen Dimension als geometrische Vielfachheit des Eigenwertes bezeichnet wird. Für einen Eigenwert λ der geometrischen Vielfachheit μ lassen sich also linear unabhängige Eigenvektoren

$$x_1, \dots, x_\mu$$

finden, so dass die Menge aller Eigenvektoren zu λ gleich der Menge der Linearkombinationen von $x_1, \dots, x_\mu$ ist.

$x_1, \dots, x_\mu$ heißt dann Basis aus Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom wird als Determinante derjenigen Matrix berechnet, die entsteht, wenn in A von den Hauptdiagonalelementen jeweils λ abgezogen wird.

Die Spur einer Matrix A (spur A) ist die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen.

Für $n = 2$ und $n = 3$ ist das ausgeschrieben:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{spur} A\,\lambda + \det A \qquad (n = 2)$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \operatorname{spur} A\,\lambda^2 - c_2\lambda + \det A \qquad (n = 3)$$

c_2 ist für $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix}$ definiert als $c_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix}$.

Zur Erinnerung: Quadratische Gleichung

allgemeine Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Normalform

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (p, q \in \mathbb{R})$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

wenn die Diskriminante D negativ ist:

$$\sqrt{D} = i\sqrt{|D|} = i\sqrt{-D}$$

Eigenwerte Beispiel

Gegeben sei die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Subtraktion der mit λ multiplizierten Einheitsmatrix von A:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Ausrechnen der Determinante dieser Matrix (mit Hilfe der Regel von Sarrus):

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (0-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) + 4 + 2 - (2\lambda + 2 + \lambda + 12 - 4\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 \\ &= -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte entsprechen den Nullstellen des Polynoms, d. h. die rechte Seite der obigen Gleichung gleich Null setzen und man erhält: $\lambda_{1,2} = 2, \ \lambda_3 = -2$.

Eigenvektoren Beispiel

Gegeben ist wie im vorigen Beispiel die quadratische Matrix *A*:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = -2$ wurden schon berechnet. Zunächst werden hier die Eigenvektoren (und der durch die Eigenvektoren aufgespannte Eigenraum) zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ berechnet.

$$A - 2 \cdot E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren Beispiel 3

Man muss also das folgende lineare Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bringt man die Matrix auf das obere Dreiecksform erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung (und damit die gesuchten Eigenvektoren) ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^\top$ und alle seine Vielfachen (nicht jedoch das Nullfache des Vektors, da Nullvektoren niemals Eigenvektoren sind).

Eigenvektoren Beispiel 3

Für den Eigenwert $\lambda_2 = -2$ geht man genauso vor:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wieder bringt man die Matrix auf Dreiecksform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hier ist die Lösung der Vektor $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^\top$ wieder mit allen seinen Vielfachen.

Probe 1 Beispiel

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Probe 2 Beispiel

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

$$\lambda_3 = -2$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte Beispiel 1

Für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \\ \lambda_1 &= 4\,, \qquad \lambda_2 = -1\,. \end{aligned}$$

Eigenvektoren Beispiel 1 (1)

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = 0$$

$$\lambda_1 = 4$$

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 1 \\ 6 & 1-4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2{,}5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0$$

$$y_1 = 0$$

Eigenvektoren Beispiel 1 (2)

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = 0$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\begin{pmatrix} 2+1 & 1 \\ 6 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 1$$

$$y_2 = -3$$

Die Lösung (und damit der gesuchte Eigenvektoren) ist der Vektor $(1, -3)^T$ und alle seine Vielfachen (nicht jedoch das Nullfache des Vektors, da Nullvektoren niemals Eigenvektoren sind).

Probe Beispiel 1

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}$$

$$\lambda = -1$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte Beispiel 2

Für $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)^2 - 4\cdot(-4) = \lambda^2 - 6\lambda + 25\,. \end{aligned}$$

Da die Diskriminante $\frac{(-6)^2}{4} - 25 < 0$ ist, hat diese quadratische Gleichung für λ keine reellen Lösungen. Es gibt also keine Eigenwerte.

Das ist plausibel: A ist gleich dem Fünffachen einer Rotationsmatrix (zum Winkel $\alpha = -\arcsin\frac{4}{5} \approx 0{,}927 \mathrel{\widehat{=}} 53{,}1^\circ$). Da alle Vektoren gedreht werden, gibt es keine Eigenvektoren, daher auch keine Eigenwerte.

Beispiel 3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - tE = \begin{pmatrix} -t & -1 & 0 \\ -2 & 1-t & 0 \\ 1 & 0 & 1-t \end{pmatrix}$$

Dann ist: $\det(A - tE) = -t(t-1)^2 + 2(t-1) = -t^3 + 2t^2 + t - 1$

Dieses heißt das **charakteristische Polynom**.
Die Nullstellen des Polynoms sind die gesuchten Eigenwerte.

Eigenvektoren und Eigenwerte von bekannten Matrizen

Spiegelung: Eigenvektoren senkrecht zur Spiegelachse, $\lambda=-1$

Streckung: Eigenvektoren parallel zur Streckachse, $\lambda=a$

Skalierung: alle Vektoren sind Eigenvektoren, $\lambda=a$

Rotation: keine Eigenvektoren (außer $\varphi=0°$, $\varphi=k\cdot\pi$, $\lambda=1$, $\lambda=-1$)

Projektion: Eigenvektoren parallel zur Projektionsgerade, $\lambda=1$

Verschiebung: Eigenvektoren parallel zur Verschiebungsrichtung

Permutation: Eigenvektoren senkrecht zur 45° Geraden, $\lambda=-1$

Scherung: Eigenvektoren längs der Scherachse, $\lambda=1$

Beispiel: Spiegelung an der y-Achse (1)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

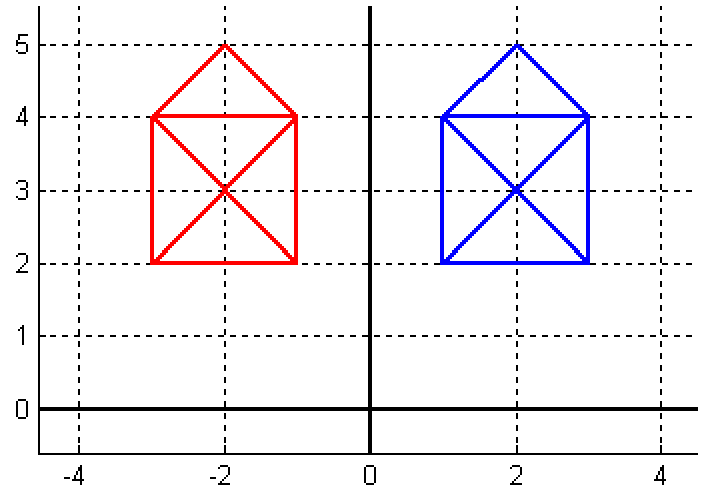
$$\det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \pm \sqrt{1}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -1$$



Beispiel: Spiegelung an der y-Achse (2)

$$(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0$$

$$\lambda_1=1$$

$$\begin{pmatrix}-1-1 & 0\\ 0 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}-1-1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$x_1=0$$

$$y_1\in\Re$$

$$(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0$$

$$\lambda_2=-1$$

$$\begin{pmatrix}-1+1 & 0\\ 0 & 1+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$x_2\in\Re$$

$$y_2=0$$

Beispiel: Streckung entlang der x-Achse (1)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

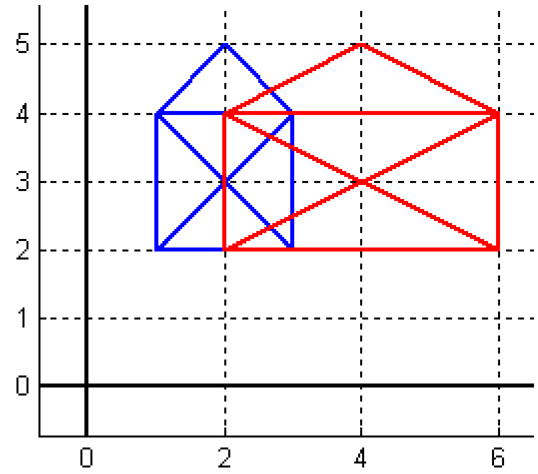
$$\det\begin{pmatrix} a-\lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (a+1)\lambda + a = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+1}{2} \pm \frac{a-1}{2}$$

$$\lambda_1 = a$$

$$\lambda_2 = 1$$



Beispiel: Streckung entlang der x-Achse (2)

$$(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0$$

$$\lambda_1 = a$$

$$\begin{pmatrix} a-a & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1-a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \in \Re$$

$$y_1 = 0$$

$$(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0$$

$$\lambda_2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 = 0$$

$$y_2 \in \Re$$

Beispiel: Vergrößerung um den Faktor a (1)

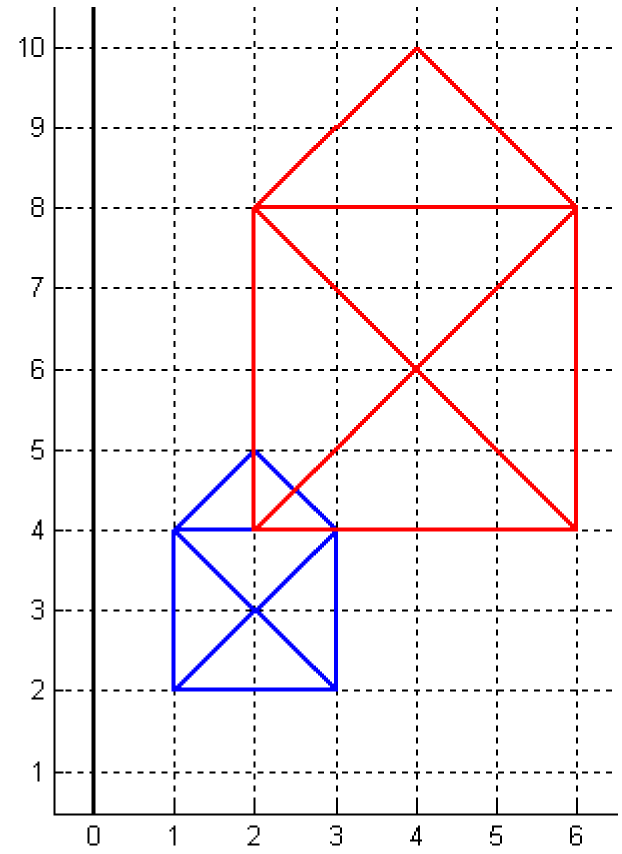
$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} a-\lambda & 0 \\ 0 & a-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2a\lambda + a^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2a}{2} \pm \sqrt{a^2 - a^2}$$

$$\lambda_1 = a$$



Beispiel: Vergrößerung um den Faktor a (2)

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = 0$$

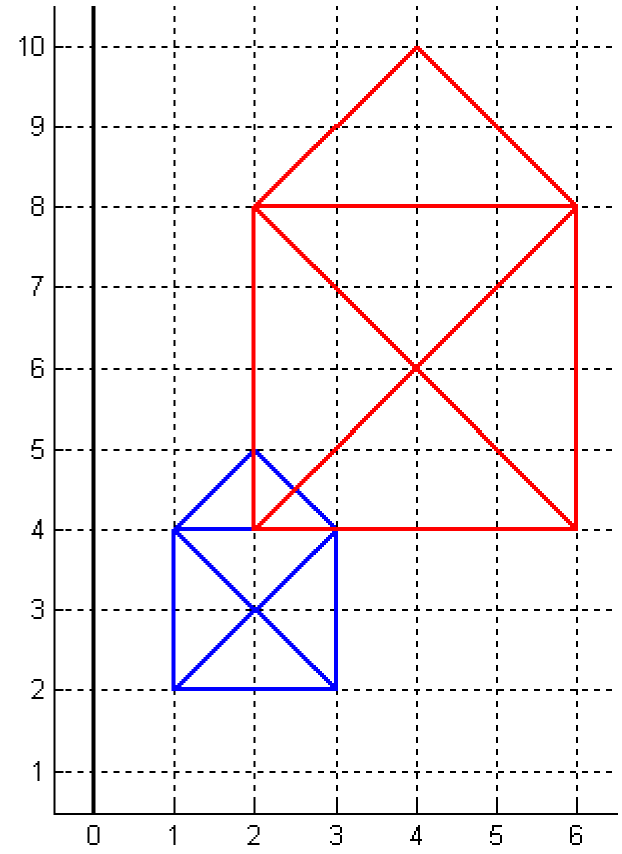
$$\lambda_1 = a$$

$$\begin{pmatrix} a - a & 0 \\ 0 & a - a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \in \Re$$

$$y_1 \in \Re$$



Beispiel: Rotation um den Winkel φ (1)

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\cos\varphi \cdot \lambda + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 0$$

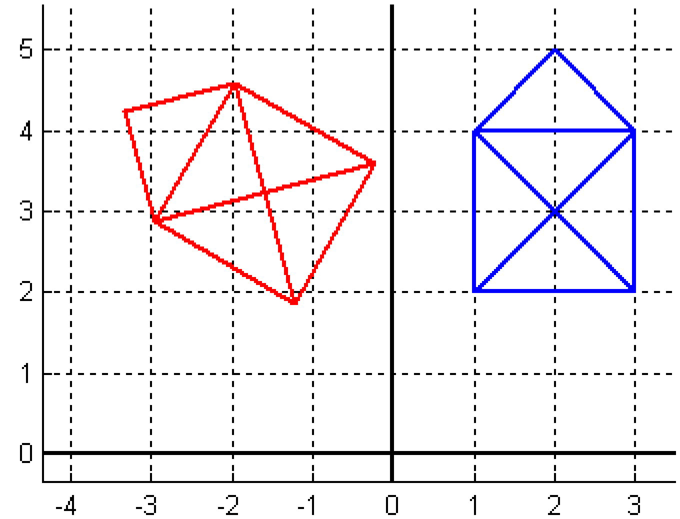
$$\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm \sqrt{-\sin^2\varphi}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -1$$

für φ = (2k) · π

für φ = (2k+1) · π



Beispiel: Rotation um den Winkel φ (2)

$$(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\varphi = 2k\cdot\pi$$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 \in \Re$$

$$y_1 \in \Re$$

$$(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\varphi = (2k+1)\cdot\pi$$

$$\begin{pmatrix} -1+1 & 0 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_2 \in \Re$$

$$y_2 \in \Re$$

Beispiel: Projektion auf einen Vektor mit dem Winkel β (1)

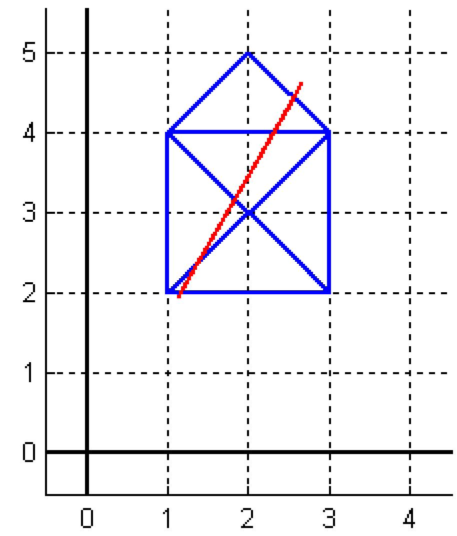
$$A = \begin{pmatrix} \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} \cos^2\beta - \lambda & \sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - (\sin^2\beta + \cos^2\beta)\cdot\lambda = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\sin^2\beta + \cos^2\beta}{2} \pm \frac{\sin^2\beta + \cos^2\beta}{2}$$

$$\lambda_1 = 1$$



Beispiel: Projektion auf einen Vektor mit dem Winkel *β* (2)

$$(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = 0$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\begin{pmatrix} \cos^2\beta - 1 & \sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = r \cdot \cos\beta$$

$$y_1 = r \cdot \sin\beta$$

Beispiel: Permutation (1)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

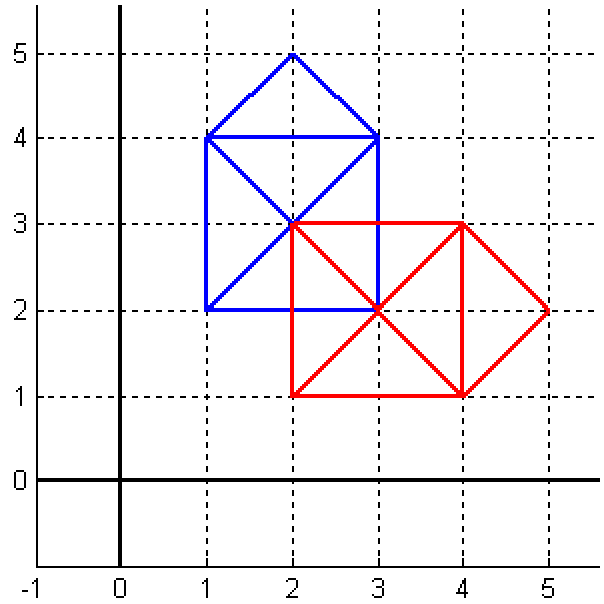
$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0 \pm \sqrt{1}$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = -1$$



Beispiel: Permutation (2)

$$(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0$$

$$\lambda_1=1$$

$$\begin{pmatrix}0-1 & 1\\ 1 & 0-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$x_1\in\Re$$

$$y_1=x_1$$

$$(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0$$

$$\lambda_2=-1$$

$$\begin{pmatrix}0+1 & 1\\ 1 & 0+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$x_2\in\Re$$

$$y_2=-x_1$$

Beispiel: Scherung (1)

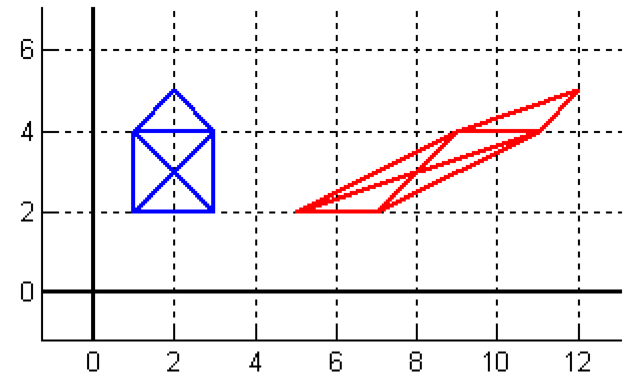
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & a \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1}$$

$$\lambda_1 = 1$$



Beispiel: Scherung (2)

$$(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0$$

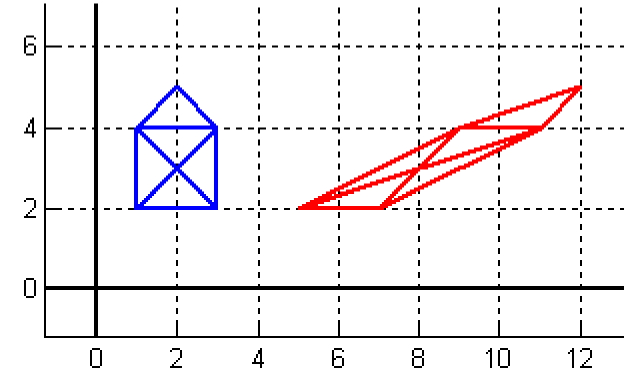
$$\lambda_1=1$$

$$\begin{pmatrix}1-1 & a\\ 0 & 1-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$x_1\in\Re$$

$$y_1=0$$



Noch einmal: Berechnung der Eigenvektoren

Für einen Eigenwert λ lassen sich die Eigenvektoren aus der Gleichung

$$(A - \lambda E) \cdot x = 0$$

bestimmen.

Die Eigenvektoren **spannen einen Raum auf**, dessen Dimension als geometrische Vielfachheit des Eigenwertes bezeichnet wird. Für einen Eigenwert λ der geometrischen Vielfachheit μ lassen sich also linear unabhängige Eigenvektoren

$$x_1, \dots, x_\mu$$

finden, so dass die Menge aller Eigenvektoren zu λ gleich der Menge der Linearkombinationen von $x_1, \dots, x_\mu$ ist.

$x_1, \dots, x_\mu$ heißt dann Basis aus Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

Aufgabe

1. Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren für die Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Überprüfen Sie die gefundenen Ergebnisse durch Proberechnung.

Beispiel

Matrix A: $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Vektor v: $$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot v$$

Eigenwert: $$\lambda = 3$$

Eigenwerte Beispiel 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}$$

$$\lambda_1 = 5{,}37$$

$$\lambda_2 = -0{,}37$$

Eigenvektoren Beispiel 1

$$(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0$$

$$\lambda_1=5{,}37$$

$$\begin{pmatrix}1-5{,}37 & 2\\ 3 & 4-5{,}37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}-4{,}37 & 2\\ 3 & -1{,}37\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$x_1=$$

$$y_1=$$

$$(A-\lambda E)\cdot\vec{x}=0$$

$$\lambda_2=-1$$

$$\begin{pmatrix}2+1 & 1\\ 6 & 1+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=0$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1\\ 6 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$x_2=$$

$$y_2=$$

Quellen

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf