HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences



Mathematik 1 Infotronik (16)

Gerald Kupris

13.12.2012

Gaußsches Eliminationsverfahren

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichnungssystems kann man mit dem **Gaußschen Eliminationsverfahren** durch folgende Schritte berechnen:

(1) Mithilfe von Äquivalenzumformungen erzeugt man durch Vorwärtselimination eine Dreiecksform.

(2) Aus der Dreiecksform erhält man durch Rückwärtseinsetzen die Lösungsmenge.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren funktioniert für beliebige lineare Gleichungssysteme.

Das Verfahren ist in der Lage zu erkennen, ob es keine Lösung gibt oder ob es unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems gibt.

Umformungen von Gleichungssystemen

Äquivalenzumformungen für lineare Gleichungssysteme

Algebraische Umformungen, die die Lösungsmenge unverändert lassen, bezeichnet man als **Äquivalenzumformungen**. Bei linearen Gleichungssystemen sind folgende Operationen Äquivalenzumformungen:

- Zwei Gleichungen dürfen miteinander vertauscht werden.
- Jede Gleichung darf mit einem beliebigen Faktor ungleich null multipliziert werden.
- Zu jeder Gleichung darf eine beliebige andere Gleichung addiert werden.

Lineares Gleichungssystem in Dreiecksform

Die wesentliche Idee beim Gaußschen Eliminationsverfahren besteht darin, das lineare Gleichungssystem durch Äquivalenzumformungen in Dreiecksform zu bringen. In Dreiecksform enthält das Gleichungssystem unterhalb der Diagonalen keine Einträge.

Rückwärtseinsetzen

Rückwärtseinsetzen

Ein lineares Gleichungssystem in Dreiecksform, bei dem die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Unbekannten ist,

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\
 & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & a_{nn}\,x_n & = & b_n
\end{array}$$

kann man rückwärts lösen. Dabei bestimmt man zuerst x_n aus der letzten Gleichung, dann x_{n-1} aus der zweitletzten, usw. und zum Schluss x_1 aus der ersten Gleichung. Es gibt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn alle Diagonalelemente a_{ii} ungleich null sind.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems kann man mit dem **Gaußschen Eliminationsverfahren** durch folgende Schritte berechnen:

(1) Mithilfe von Äquivalenzumformungen erzeugt man durch Vorwärtselimination eine Dreiecksform.

(2) Aus der Dreiecksform erhält man durch Rückwärtseinsetzen die Lösungsmenge.

Beispiel:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -10 \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & & & = & 5 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -7 \\ & & 3x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & = & 7 \end{array}$$

Besonderheiten beim Gaußschen Eliminationsverfahren (1)

Keine Lösung beim Gaußschen Eliminationsverfahren

Entsteht im Verlauf des Gaußschen Eliminationsverfahrens eine Gleichung der Form

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b, \quad b \neq 0,$$

wobei b eine beliebige Zahl ungleich null ist, dann besitzt das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Beispiel

Besonderheiten beim Gaußschen Eliminationsverfahren (2)

Unendlich viele Lösungen beim Gaußschen Eliminationsverfahren

Entstehen im Verlauf des Gaußschen Eliminationsverfahrens zwei aufeinander folgende Zeilen i und $i+1$ mit einer Zeilenstufe der Breite $p+1$ in der Form

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_{i,k}\,x_k & + & \ldots & + & a_{i,k+p}\,x_{k+p} & + & a_{i,k+p+1}\,x_{k+p+1} & + & \ldots & + & a_{i,n}\,x_n & = & b_i \\ & & & & & & a_{i+1,k+p+1}\,x_{k+p+1} & + & \ldots & + & a_{i+1,n}\,x_n & = & b_{i+1} \end{array}$$

so kann man die p Unbekannten x_{k+1} bis x_{k+p} beliebig wählen.

Beispiel

Besonderheiten beim Gaußschen Eliminationsverfahren (3)

Redundante Gleichungen

Entsteht im Verlauf des Gaußschen Eliminationsverfahrens eine Gleichung der Form

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0,$$

dann kann man diese redundante Gleichung einfach weglassen.

Beispiel

Unterbestimmtes lineares Gleichungssystem

Ein lineares Gleichungssystem, bei dem die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekannten ist, nennt man **unterbestimmt**.

Unterbestimmtes lineares Gleichungssystem

In der Regel besitzt ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Die Lösungen erhält man durch Rückwärtseinsetzen, indem man für die unbestimmten Unbekannten geeignete Parameter einführt. In Ausnahmefällen kann ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem jedoch auch unlösbar sein. Ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem ist niemals eindeutig lösbar.

Überbestimmtes lineares Gleichungssystem

Ein lineares Gleichungssystem, bei dem die Anzahl der Gleichungen größer als die Anzahl der Unbekannten ist, nennt man **überbestimmt**.

Überbestimmtes lineares Gleichungssystem

In der Regel besitzt ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem keine Lösung. In Ausnahmefällen kann es jedoch eindeutig lösbar sein oder sogar unendlich viele Lösungen besitzen.

Weiterer Plan für dieses Semester

16. (13.12.2012): Lineare Abbildung, 2D Abbildungen, 2D Grafik

17. (19.12.2012): Projektion, Verschiebung, homogene Koordinaten

18. (20.12.2012): Drehung um einen beliebigen Punkt, Scherung

Feiertage

19. (09.01.2013): Definition von Eigenvektoren und Eigenwerten

20. (10.01.2013): Berechnung von Eigenvektoren und Eigenwerten

21. (16.01.2013): Eigenschaften von Eigenvektoren und Eigenwerten

22. (17.01.2013): Anwendung von Eigenvektoren und Eigenwerten

23. (23.01.2013): 3D Grafik

24. (24.01.2013): Wiederholung, Prüfungsvorbereitung

Zur Wiederholung: die Lineare Abbildung

Die lineare Abbildung (auch linearer Operator) ist eine Funktion zwischen zwei Vektorräumen über dem selben Körper, bei der es unerheblich ist, ob man zwei Vektoren zuerst addiert und dann deren Summe mittels der Funktion abbildet oder zuerst die Vektoren abbildet und dann die Summe der Bilder bildet.

Gleiches gilt für die Multiplikation mit einem Skalar (z. B. einer reellen Zahl).

Eine Funktion oder Abbildung ist eine Beziehung zwischen zwei Mengen, die jedem Element der einen Menge (Funktionsargument, unabhängige Variable, x-Wert) genau ein Element der anderen Menge (Funktionswert, abhängige Variable, y-Wert) zuordnet.

Eine Abbildung ***f*** heißt linear, falls gelten:

$$f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}) \mid \vec{a}, \vec{b} \in \Re^n$$

$$f(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot f(\vec{a}) \mid \vec{a} \in \Re^n, \lambda \in \Re$$

Ist das eine lineare Abbildung?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ z_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(y_1 - z_1) \\ x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix}$$

Eine Abbildung ***f*** heißt dann linear, falls gelten:

$$f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}) \mid \vec{a}, \vec{b} \in \Re^n$$

$$f(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot f(\vec{a}) \mid \vec{a} \in \Re^n, \lambda \in \Re$$

Rechnen Sie nach, ob diese Abbildung eine lineare Abbildung ist.

Ist das eine lineare Abbildung?

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1{}' \\ y_1{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 - y_1)^2 \\ (x_1 + y_1)^2 \end{pmatrix}$$

Eine Abbildung ***f*** heißt dann linear, falls gelten:

$$f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b}) \mid \vec{a}, \vec{b} \in \Re^n$$

$$f(\lambda \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot f(\vec{a}) \mid \vec{a} \in \Re^n, \lambda \in \Re$$

Rechnen Sie nach, ob diese Abbildung eine lineare Abbildung ist.

Definition Lineare Abbildung

Die lineare Abbildung (auch linearer Operator) ist eine Funktion zwischen zwei Vektorräumen über dem selben Körper, bei der es unerheblich ist, ob man zwei Vektoren zuerst addiert und dann deren Summe mittels der Funktion abbildet oder zuerst die Vektoren abbildet und dann die Summe der Bilder bildet.
Gleiches gilt für die Multiplikation mit einem Skalar (z. B. einer reellen Zahl).

Lineare Abbildungen sind Homomorphismen zwischen Vektorräumen. Jede Matrix stellt eine lineare Abbildung dar; jede lineare Abbildung ist durch eine Matrix repräsentierbar. Damit kann jede lineare Abbildung in allgemeinen Vektorräumen durch die Matrixalgebra beschrieben werden.

Ein Homomorphismus ist eine strukturerhaltende Abbildung in der universellen Algebra. Homomorphismen lassen sich allgemeiner als spezielle Morphismen, also strukturverträgliche Abbildungen, definieren.

Eigenschaften linearer Abbildungen

In linearen Abbildungen sind die Bilder immer nur lineare Kombinationen der ursprünglichen Koordinaten.

Quadrate, Wurzeln usw. haben in linearen Abbildungen nichts verloren.

Sind A und B zwei lineare Abbildungen, so ist die Hintereinanderausführung möglich und $B \cdot A$ ist wieder eine lineare Abbildung.

Ist die Matrix A eine lineare Abbildung, dann gibt es eine andere Matrix A^{-1}, für die gilt: $A \cdot A^{-1} = E$.

Und noch einmal: Die Lineare Abbildung

Eine Lineare Abbildung kann als Kombination von Addition und Multiplikation dargestellt werden:

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ y_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Diese Anordnung der Koeffizienten wird als Matrix bezeichnet.

Und noch einmal: Die Lineare Abbildung

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = f\left(\vec{x}\right) = A \cdot \vec{x}$$

A = [*f*] wird als Abbildungsvorschrift oder als die darstellende Matrix von *f* bezeichnet.

Und noch einmal: die Lineare Abbildung

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{pmatrix}} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \vec{y}$$

Abbildungsmatrix · Augsgangsvektor = Ergebnisvektor

Zweidimensionale Transformation

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \vec{x}'$$

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

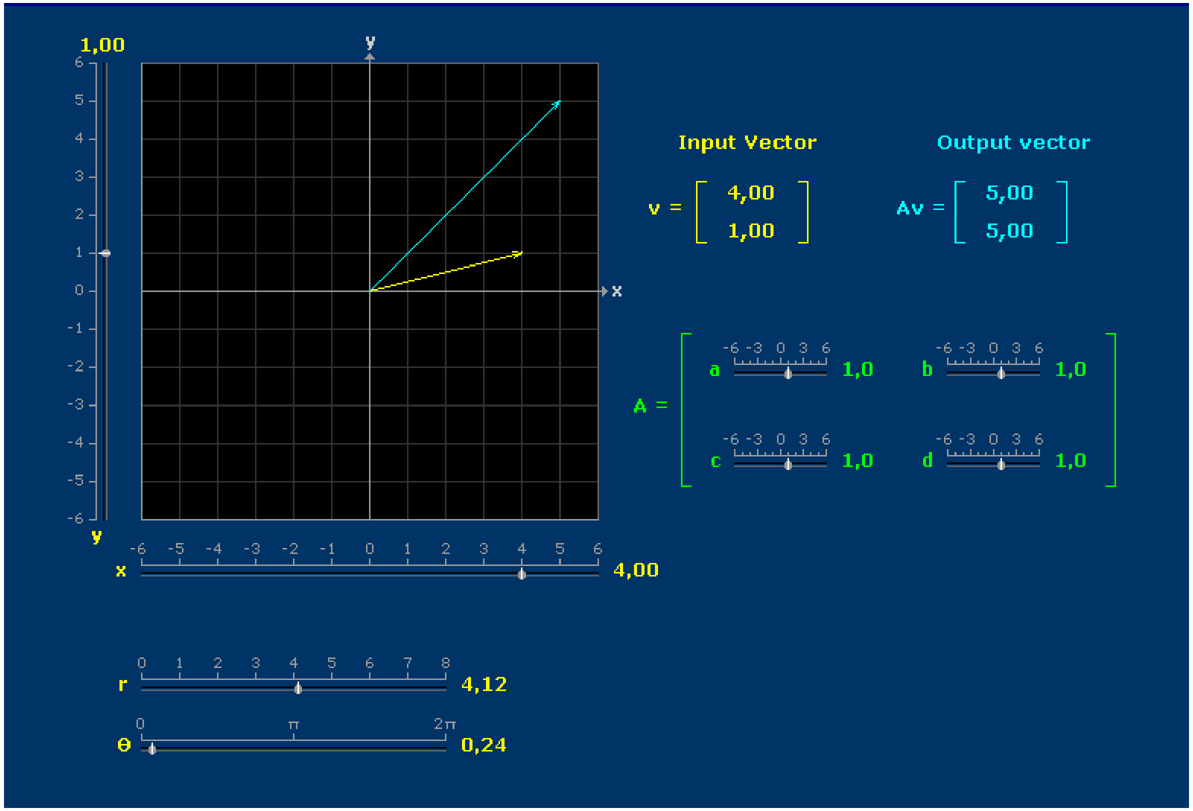
Abbildungsvorschrift
darstellende Matrix
Transformationsmatrix

$$\vec{x}' = f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$$

Beispiel: Mathlet

d'Arbeloff Interactive Math Project : http://math.mit.edu/daimp/

Matrix Vector :http://math.mit.edu/daimp/MatrixVector.html



Einige einfache Transformationen

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Abbildung eines Vektors auf sich selbst

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der x-Achse

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der y-Achse

Spiegelung am Koordinatenursprung

Die Spiegelung am Koordinatenursprung ist eine Kombination der Spiegelung an der y-Achse, dann an der x-Achse.

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Maßstabsveränderung

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Änderung in x-Richtung
a > 1: Streckung
a < 1: Stauchung

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Änderung in y-Richtung
b > 1: Streckung
b < 1: Stauchung

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Änderung in x- und y-Richtung
λ > 1: Streckung
λ < 1: Stauchung
λ=1,41: Vergrößerung um eine DIN-Stufe
λ=0,707: Verkleinerung um eine DIN-Stufe

Drehung um den Koordinatenursprung

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Drehung um den Winkel φ
φ > 0: Drehung nach links
φ < 0: Drehung nach rechts

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

φ = π/2
Drehung um 90° nach links

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

φ = - π/2
Drehung um 90° nach rechts

Drehung um den Koordinatenursprung in eine Richtung und zurück

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$\tilde{R} \cdot R^{-1} = E$$

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Transformation eines komplexen Bildes

Statt Berechnung für jeden einzelnen Punkt erfolgt die Berechnung für eine Matrix, die die Koordinaten aller Punkte enthält, die durch Geraden verbunden sind.

„Das ist das Haus vom Nikolaus.“

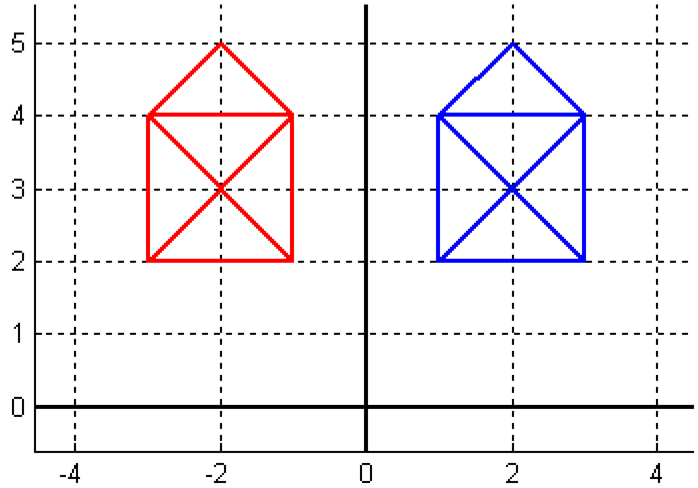
$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der y-Achse

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$

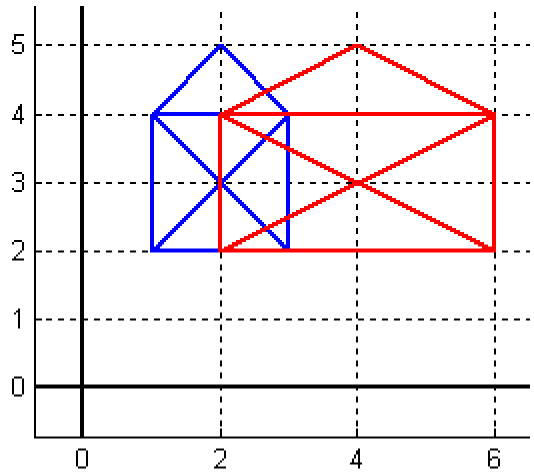


Streckung entlang der x-Achse

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$

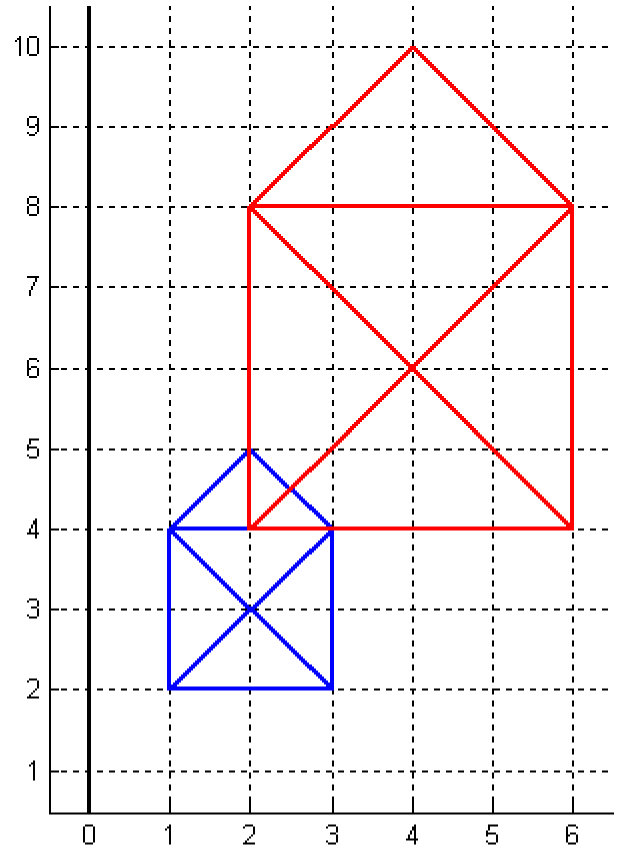


Vergrößerung um den Faktor 2

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



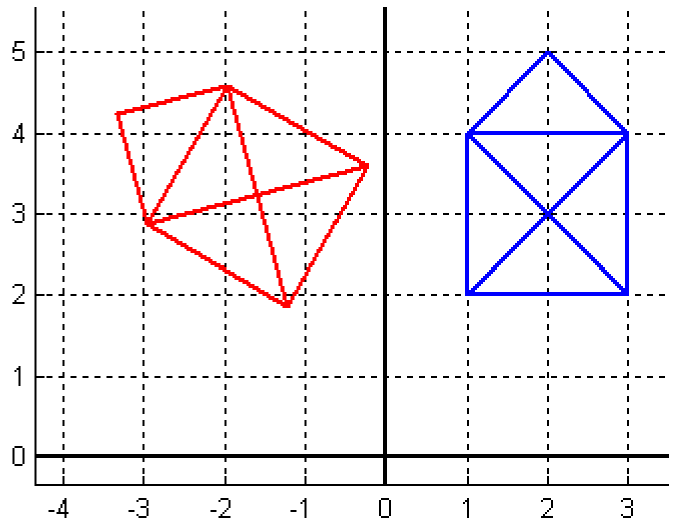
Rotation um 60°

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}866 \\ 0{,}866 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



Verzerrung

Verzerrung ist die Kombination aus Spiegelung, Dehnung und Drehung.

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Quellen

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf