HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Physik für Infotronik (19)

Gerald Kupris

17.12.2012

Physik Themenbereiche (3)

Die Kapazität

Die elektrische Kapazität (Formelzeichen C, von lateinisch capacitas = Fassungsvermögen; Adjektiv kapazitiv) ist eine physikalische Größe, die die Fähigkeit eines zu diesem Zweck gebauten Kondensators oder einer anderen elektrischen Leiteranordnung definiert, elektrische Ladung zu speichern. Die elektrische Kapazität wird als Verhältnis der Ladungsmenge Q zur angelegten Spannung U bestimmt:

$$C = \frac{Q}{U}$$

Die elektrische Kapazität wird in der abgeleiteten SI-Einheit Farad gemessen. Ein Farad (1 F) ist diejenige Kapazität, die beim Anlegen einer Spannung von 1 Volt eine Ladungsmenge von 1 Coulomb (As) speichert:

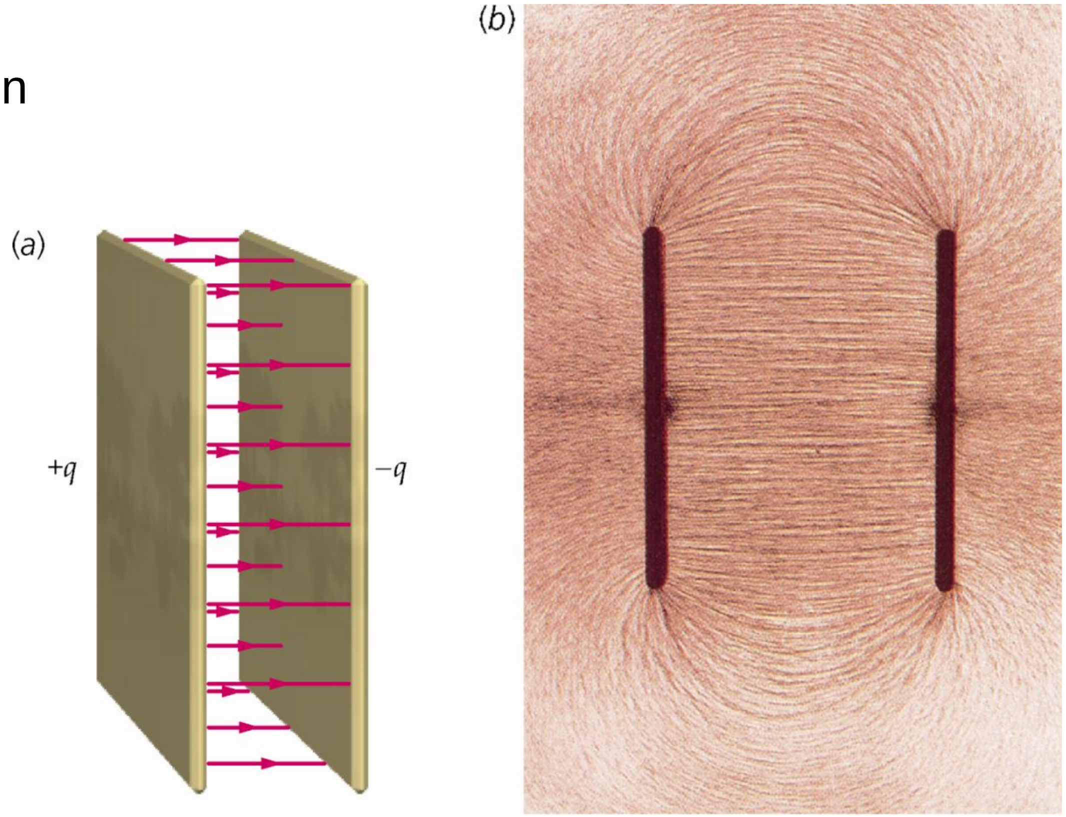
$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{1As}{1V} = 1F$$

1µF = 10^{-6} F
1 nF = 10^{-9} F
1 pF = 10^{-12} F

Ein Kondensator der Kapazität 1 Farad lädt sich bei einem konstanten Ladestrom von 1 Ampere in 1 Sekunde auf die Spannung 1 Volt auf.

Der Plattenkondensator

Eine große Rolle spielt in der Physik der Plattenkondensator, der aus zwei parallelen leitenden Platten aufgebaut ist.



$$U = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{q \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot A}$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{q}{q \cdot d / \varepsilon_0 \cdot A} = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d}$$

Da die Spannung ***U*** proportional zur Ladung ***q*** ist, hängt die Kapazität weder von ***q*** noch von ***U*** ab.

Wiederholung: Elektrische Feldkonstante

Die elektrische Feldkonstante ε_0 (auch: Permittivität des Vakuums) ist die physikalische Konstante, die im internationalen Einheitensystem die SI-Einheit der Ladung (Coulomb) mit den mechanischen Einheiten in Beziehung setzt.

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c_0^2} = \frac{10^7}{4\pi \cdot 299\,792\,458^2} \frac{\mathrm{A^2 s^4}}{\mathrm{kg\,m^3}} \approx 8{,}854\,187\,817\ldots \cdot 10^{-12}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$$

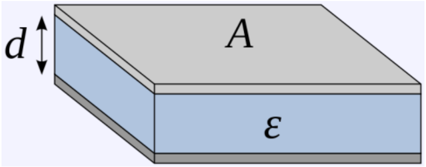
$$\mathrm{F\,m^{-1} = A^2\,s^4\,kg^{-1}\,m^{-3} = A\,s\,V^{-1}\,m^{-1} = C\,V^{-1} m^{-1}}$$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85\ \mathrm{pF} \cdot \mathrm{m}^{-1}$$

Verschiedene Kondensatorformen

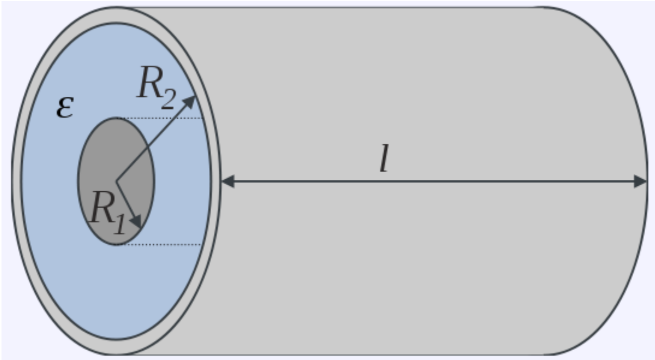
Plattenkondensator

$$C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d}$$



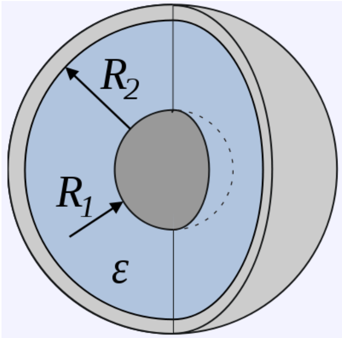
Zylinderkondensator

$$C = 2\pi \cdot \varepsilon \cdot \frac{l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

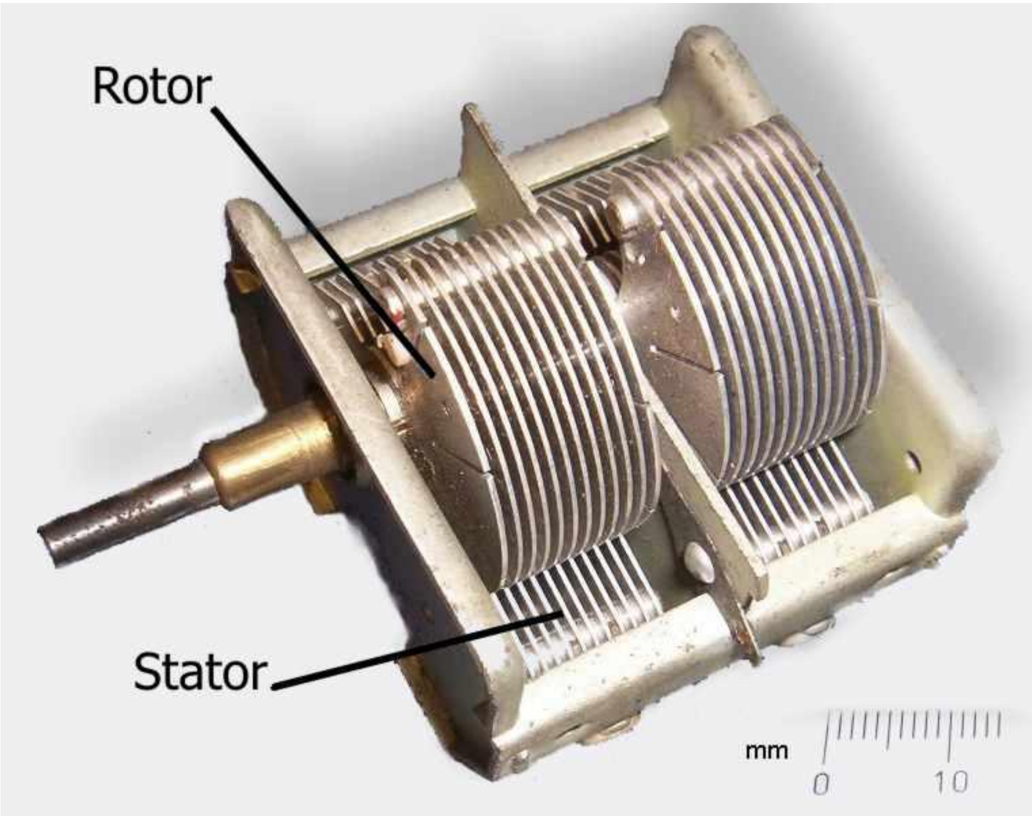


Kugelkondensator

$$C = 4\pi \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)^{-1}$$



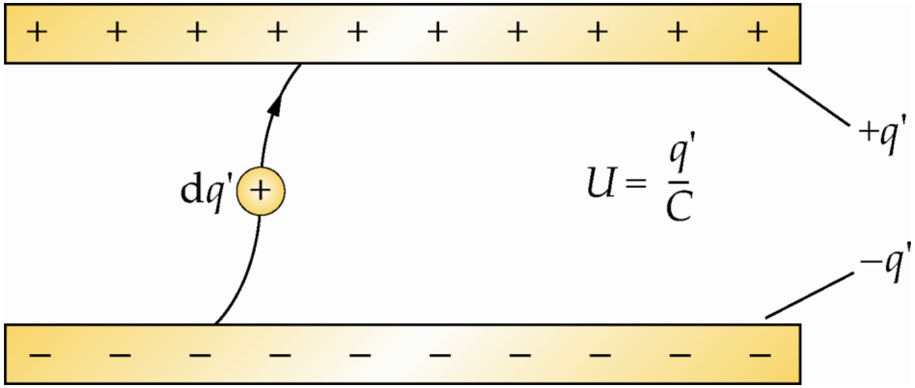
Der Drehkondensator



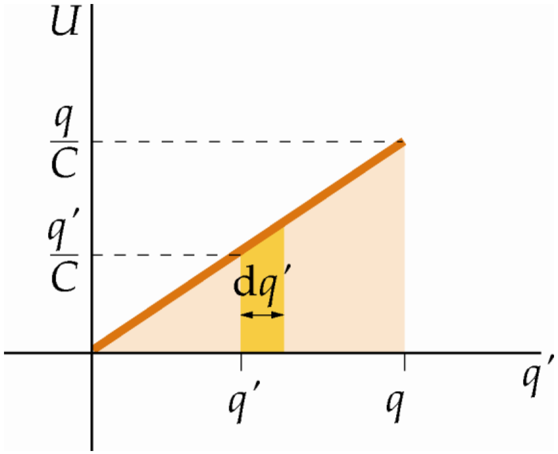
Beim Drehkondensator wird das Kondensatorprinzip der sich gegenüberliegenden Elektrodenplatten besonders deutlich.

Speicherung elektrischer Energie

Wenn eine kleine positive Ladung d*q*‘ vom negativen Leiter zum positiven gebracht wird, steigt ihre elektrische Energie um $dE_{el} = U \cdot dq'$, wobei U die Spannung ist.



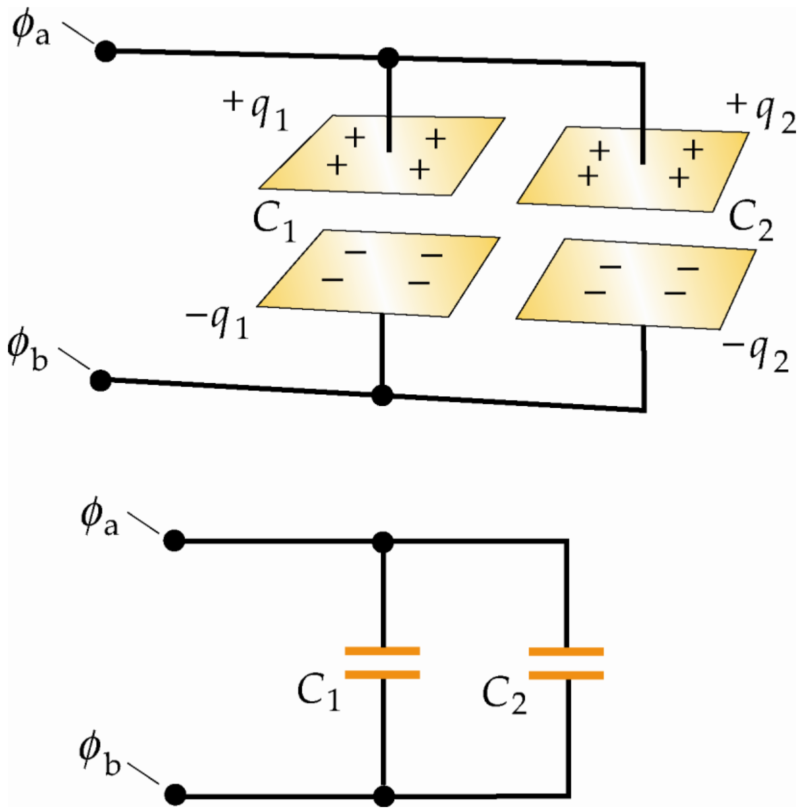
Die Arbeit zum Laden eines Kondensators ist das Integral über U·d*q*‘ von der Anfangsladung *q*‘ = 0 bis zur Endladung *q*‘= *q* . Diese Arbeit ist der Flächeninhalt unter der Kurve, d.h. der Flächeninhalt des Dreiecks mit der Höhe *q*/*C* und der Breite *q*.



$$E_{el} = \int_0^q U \cdot dq' = \frac{1}{2} qU = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} CU^2$$

Parallel geschaltete Kondensatoren

Zwei parallel geschaltete Kondensatoren:
Die oberen Platten sind miteinander verbunden und damit auf dem gleichen Potenzial Φ_a.
Die unteren Platten sind ebenfalls miteinander verbunden und auf dem gleichen Potenzial Φ_b.
Wenn die beiden Kondensatoren die Kapazitäten C_1 und C_2 haben, ergeben sich die gespeicherten Ladungen q_1 und q_2:



$$q_1 = C_1 \cdot U \qquad q_2 = C_2 \cdot U$$

Die gespeicherte Gesamtladung ist dann:

$$q = q_1 + q_2 = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U = (C_1 + C_2) \cdot U$$

Die Ersatzkapazität ergibt sich: $C = C_1 + C_2$

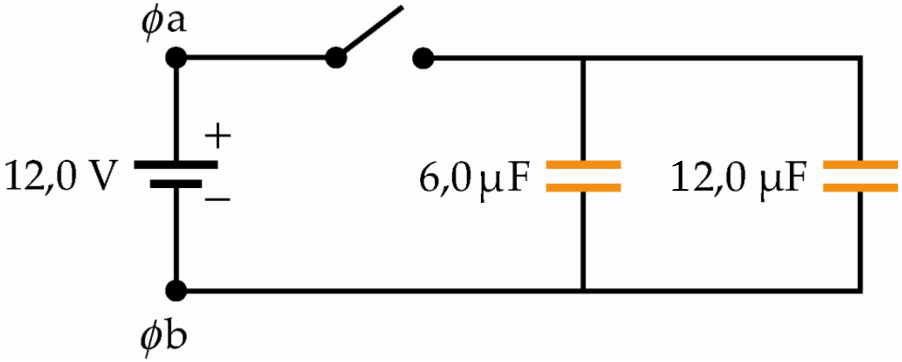
Beispiel: Parallelschaltung

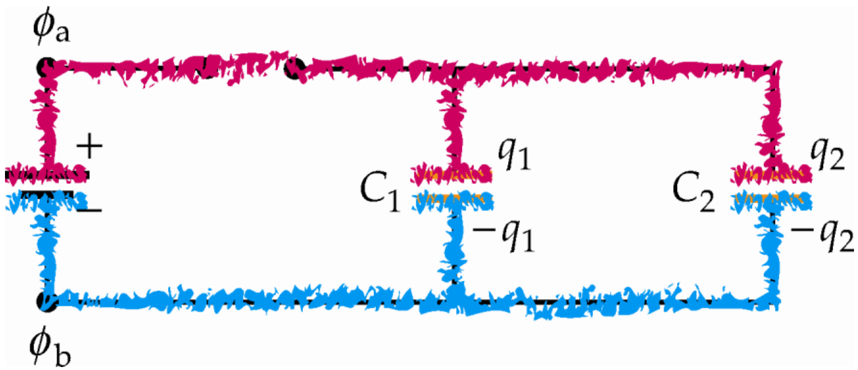
Wir betrachten die gezeigte Schaltung aus einem 6,0 µF Kondensator, einem 12,0 µF Kondensator, einem Schalter und einer 12 V Batterie. Anfangs ist der Schalter geöffnet, die Kondensatoren sind zunächst ungeladen. Wenn der Schalter geschlossen wird, beginnen sich die Kondensatoren zu laden.

a) Wie groß ist danach das Potenzial auf jedem Leiter (der negative Anschluss der Batterie soll als Bezugspunkt das Potenzial null haben) ?

b) Wie hoch ist die Ladung auf jeder Kondensatorplatte?

c) Welche Gesamtladung ist über die Batterie geflossen?





Kondensatoren in Reihenschaltung

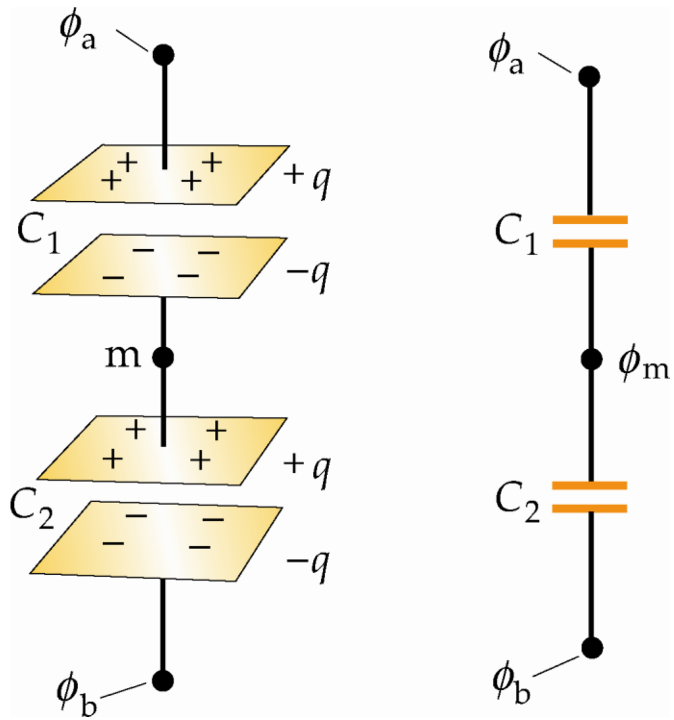
Die Gesamtladung der beiden miteinander verbundenen Kondensatorenplatten in der Mitte ist null.
Die Spannung über dem Kondensatorpaar ist gleich der Summe der Spannungen über die Einzelkondensatoren. Die beiden Kondensatoren sind in Reihe geschaltet.

$$U_1 = \frac{q}{C_1}$$

$$U_2 = \frac{q}{C_2}$$

$$U = \Phi_a - \Phi_b = U_1 + U_2 = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} = q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$



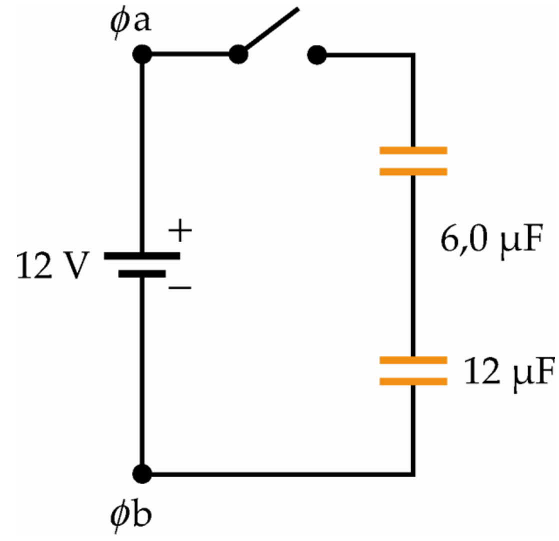
Beispiel: Reihenschaltung

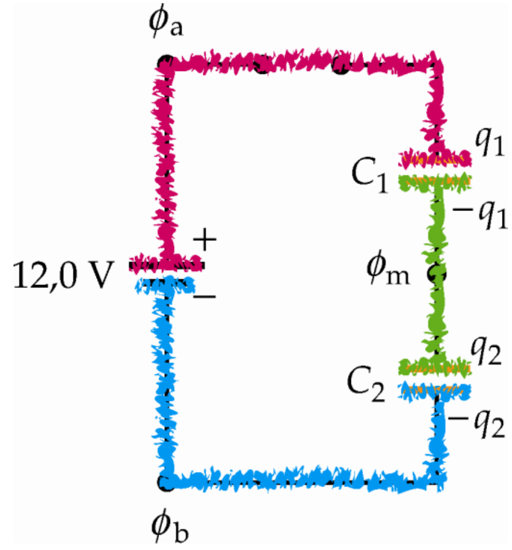
Wir betrachten die gezeigte Schaltung aus einem 6,0 µF Kondensator, einem 12,0 µF Kondensator, einem Schalter und einer 12 V Batterie. Anfangs ist der Schalter geöffnet, die Kondensatoren sind zunächst ungeladen. Wenn der Schalter geschlossen wird, beginnen sich die Kondensatoren zu laden.

a) Wie groß ist danach das Potenzial auf jedem Leiter (der negative Anschluss der Batterie soll als Bezugspunkt das Potenzial null haben) ?

b) Wie hoch ist die Ladung auf jeder Kondensatorplatte?

c) Welche Gesamtladung ist über die Batterie geflossen?





Das Dielektrikum

Als Dielektrikum (Mehrzahl: Dielektrika) wird jede elektrisch schwach- oder nichtleitende, nichtmetallische Substanz bezeichnet, deren Ladungsträger im Allgemeinen nicht frei beweglich sind. Ein Dielektrikum kann sowohl ein Gas, eine Flüssigkeit oder ein Feststoff sein.
Von Dielektrika spricht man üblicherweise, wenn diese Materialien mit elektrischen oder elektromagnetischen Feldern beaufschlagt werden. Dielektrika sind typischerweise unmagnetisch.
Die Dielektrizitätskonstante setzt sich aus der elektrischen Feldkonstante und der materialspezifischen Dielektrizitätszahl (Werte größer 1; die Dielektrizitätszahl von Luft ist annähernd 1 wie im Vakuum) zusammen:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$$

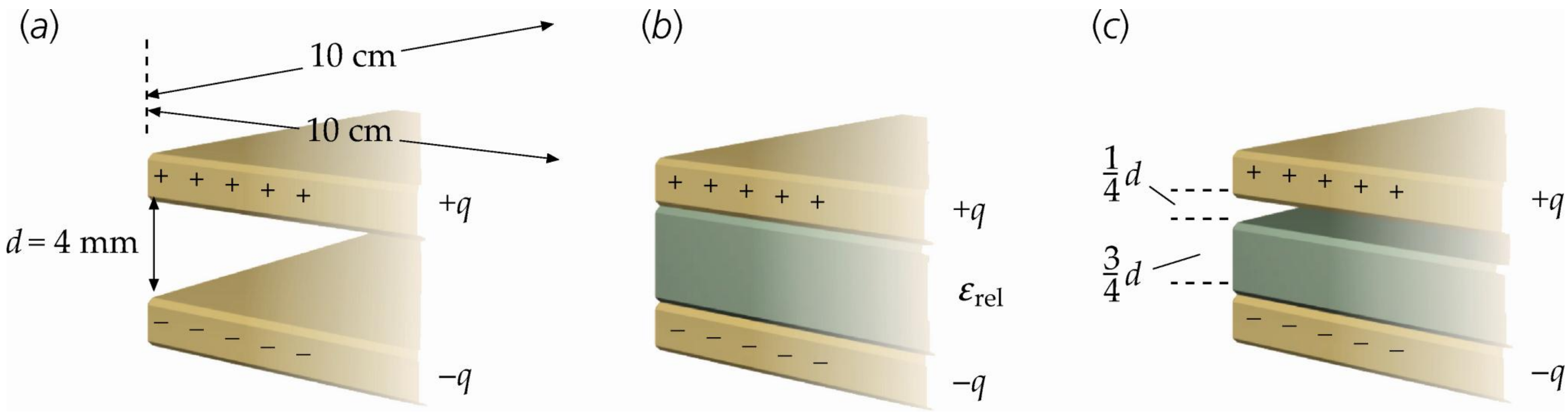
Die Kapazität C eines Kondensators hängt im Wesentlichen vom verwendeten Dielektrikum und dessen Dielektrizitätszahl , der Elektrodenfläche A und dem Abstand d der Elektroden zueinander ab.

$$C = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot \frac{A}{d}$$

Beispiel: Dielektrikum

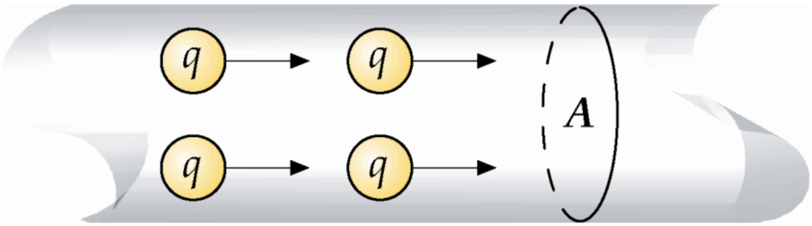
Ein Plattenkondensator besteht aus zwei quadratischen Platten mit einer Kantenlänge von 10 cm mit einem Abstand d = 4,0 mm. Ein Dielektrikum mit einer relativen Dielektrizitätskonstante ε_{rel} = 2,0 hat die Abmessungen 10 cm x 10 cm x 4 mm.

a) Welche Kapazität hat der Kondensator ohne Dielektrikum?
b) Welche Kapazität hat er, wenn die Zwischenräume mit dem Dielektrikum gefüllt sind?
c) Wie groß ist die Kapazität, wenn in dem 4,0 mm breiten Zwischenraum ein Dielektrikum von 10 cm x 10 cm x 3,0 mm eingeführt wird?



Der elektrische Strom

Die Rate, mit der elektrische Ladung durch eine Fläche A (typischerweise ist das der Querschnitt eines leitfähigen Drahtes) fließt - also der Ladungsfluss - bezeichnen wir definitionsgemäß als **elektrischen Strom**.

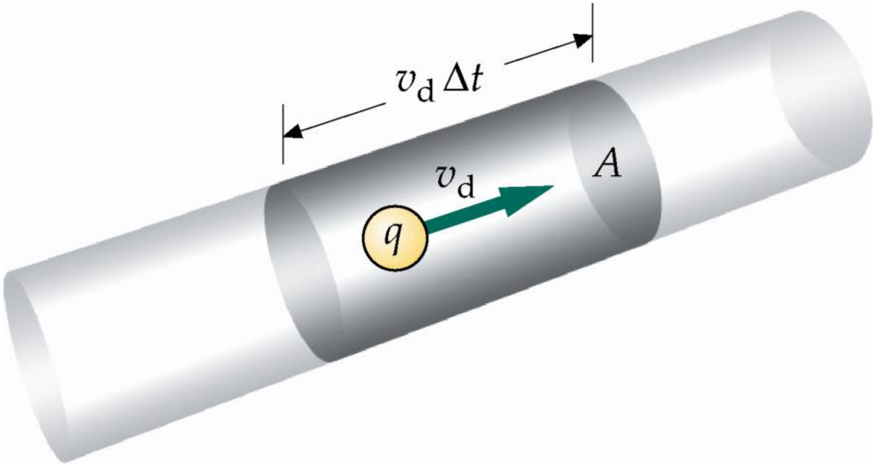


Elektrischer Strom ist die Bezeichnung für den gerichteten Anteil einer Bewegung von Ladungsträgern, zum Beispiel von Elektronen oder Ionen, in einem Festkörper, einer Flüssigkeit, einem Gas oder im Vakuum.

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} \qquad 1A = \frac{1C}{s}$$

Bewegung von Ladungsträgern

Ein äußeres elektrisches Feld übt auf jedes freie Elektron eine Kraft ***-e·E*** aus und be-schleunigt es damit entgegengesetzt zur Feldrichtung.



Die erworbene kinetische Energie geht den Ladungsträgern durch Stöße mit den Gitter-ionen umgehend wieder verloren, aber für kurze Zeit bewegen sich die Elektronen.

Die Elektronen driften entgegengesetzt zur Feldrichtung mit der Driftgeschwindigkeit $\boldsymbol{v_d}$.

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = q \cdot \frac{n}{V} \cdot A \cdot v_d$$

Die Stromdichte

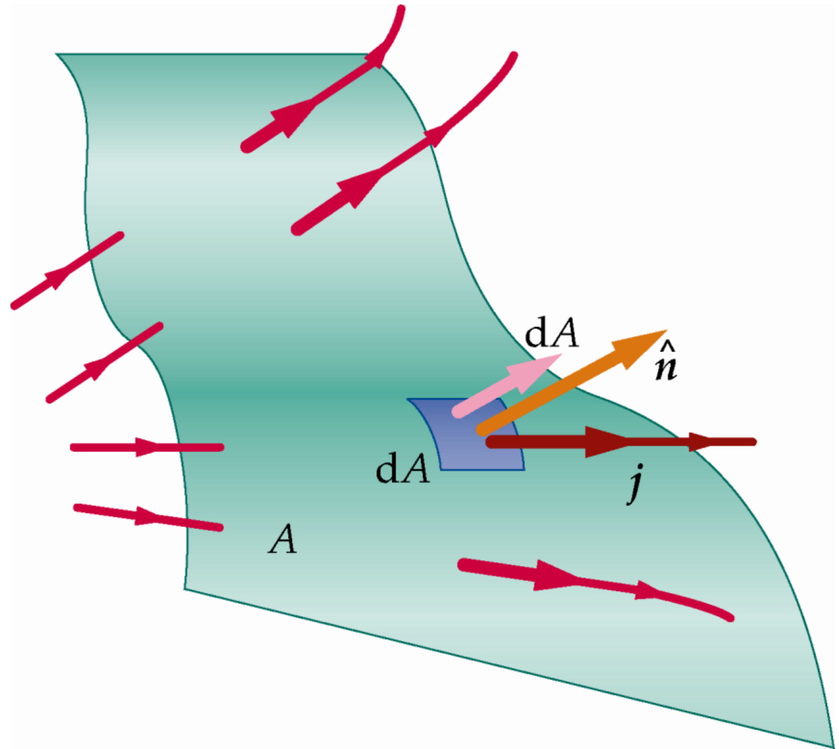
Die Stromdichte ist ein Vektorfeld, dass wir durch Feldlinien veranschaulichen können.

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = q \cdot \frac{n}{V} \cdot A \cdot v_d$$

$$j = q \cdot \frac{n}{V} \cdot v_d$$

$$I = \int_A j \cdot dA = \int_A j \cdot \hat{n} \cdot dA$$

$$I = \int_A j \cdot dA = j \cdot \hat{n} \cdot A = J \cdot A \cdot \cos\Theta$$



Energetische Betrachtung elektrischer Stromkreise

$$-\Delta E_{el} = \Delta q \cdot (\Phi_b - \Phi_a)$$

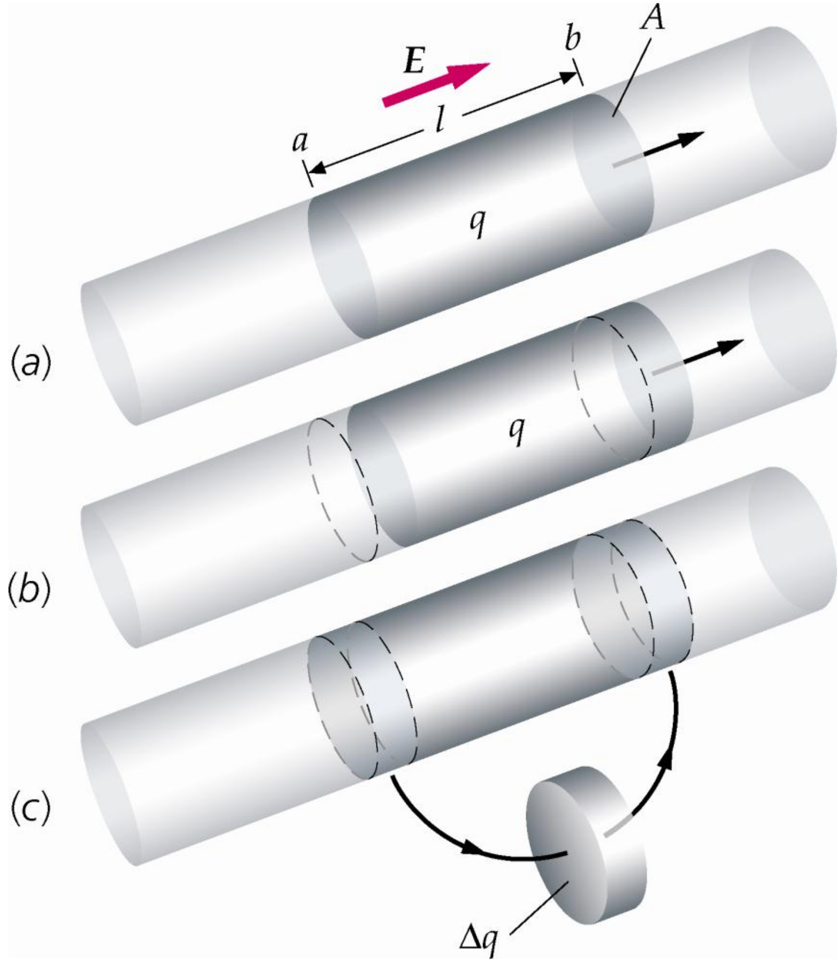
$$-\Delta E_{el} = \Delta q \cdot U$$

$$-\frac{\Delta E_{el}}{\Delta t} = \frac{\Delta q}{\Delta t} \cdot U = I \cdot U$$

$$-\frac{dE_{el}}{dt} = \frac{dq}{dt} \cdot U = I \cdot U$$

$$P = I \cdot U$$

$$P = I \cdot U_R = R \cdot I^2 = \frac{U_R^{\,2}}{R}$$



Entladen eines Kondensators

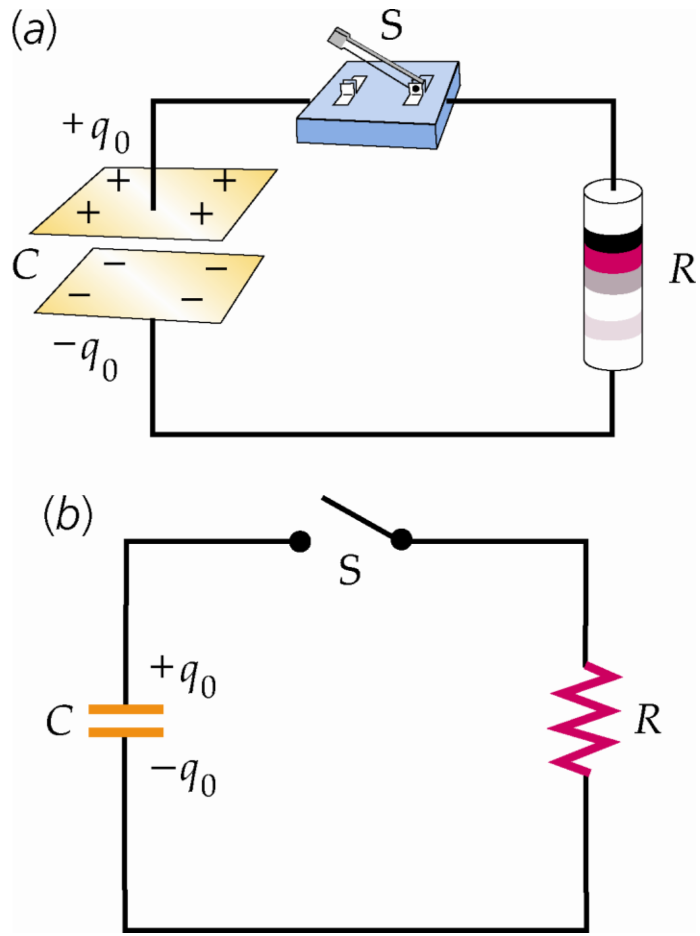
$$\frac{dq}{dt} = -\frac{1}{RC} q$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\int_{q_0}^{q'} \frac{dq}{q} = -\frac{1}{RC} \int_0^{t'} dt$$

$$\ln \frac{q}{q_0} = -\frac{t'}{RC}$$

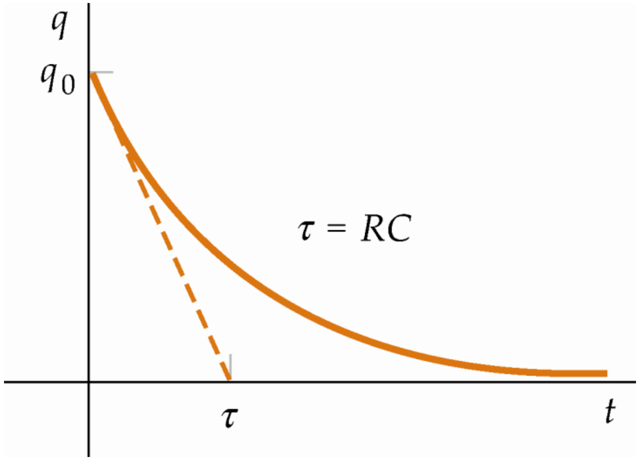
$$q(t) = q_0 \cdot e^{-t/(R\cdot C)}$$



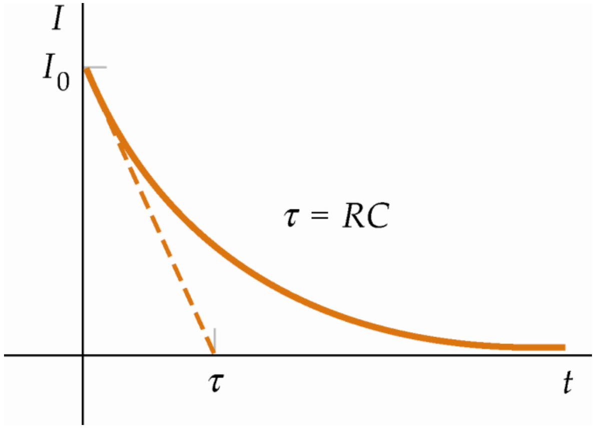
Die Zeitkonstante eines RC-Stromkreises

$$q(t) = q_0 \cdot e^{-t/(R \cdot C)} = q_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

$$\tau = R \cdot C$$



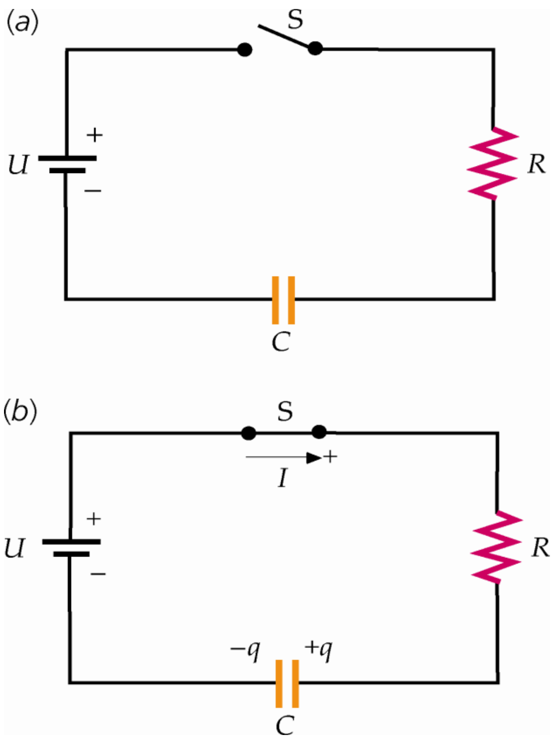
Diesen zeitlichen Verlauf bezeichnet man als exponentiellen Abfall.

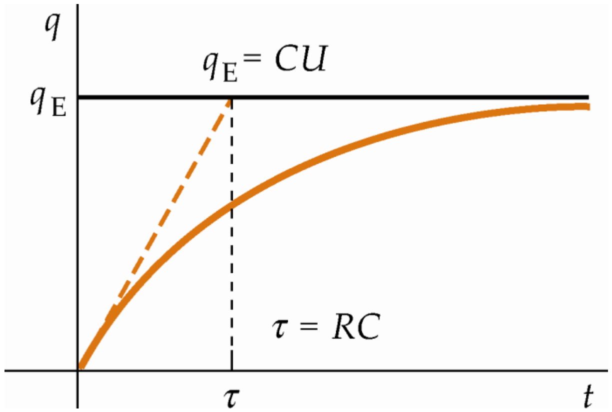


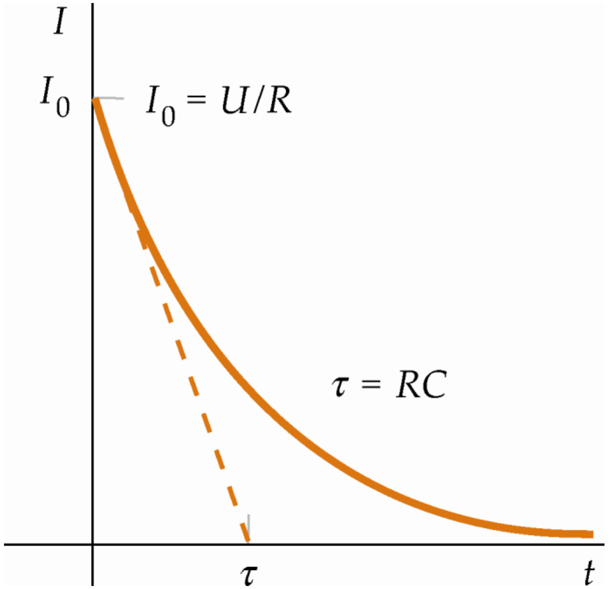
Er tritt in der Natur sehr häufig auf - überall dort, wo die Abnahme einer Größe proportional zu dieser Größe selbst ist.

τ ist die Zeitkonstante des RC-Stromkreises.

Das Aufladen eines Kondensators

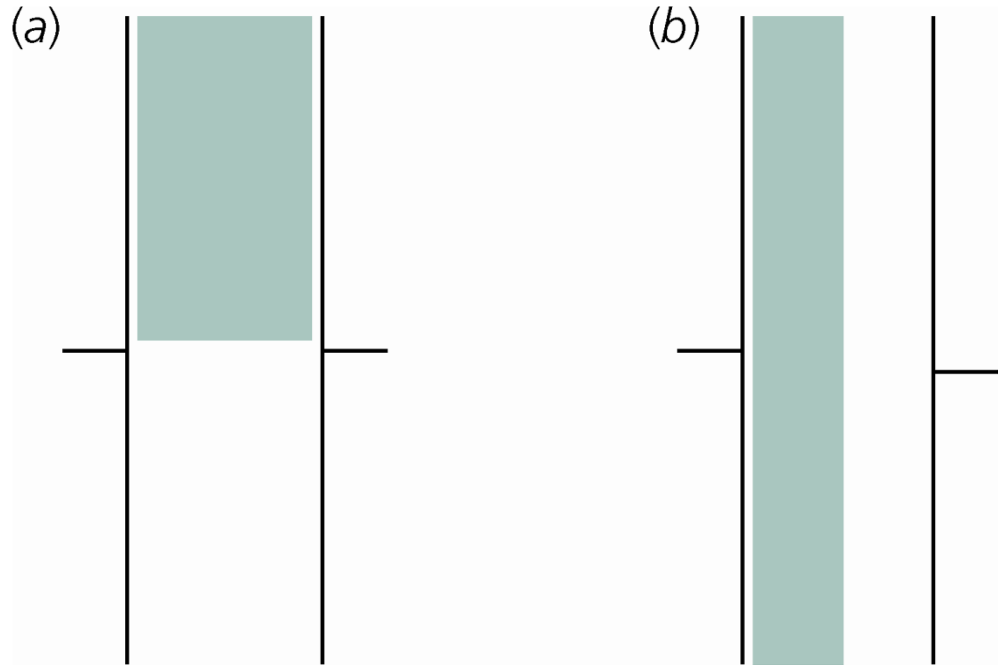






Aufgaben

1. Es werden zwei Kondensatoren A und B mit den gleichen Plattenflächen und Zwischenräumen betrachtet.
   Der Raum zwischen den Platten jedes Kondensators ist wie gezeigt halb mit einem Dielektrikum gefüllt.
   Hat der Kondensator A oder B die höhere Kapazität? Erläutern Sie Ihre Antwort.



2. Ein Plattenkondensator besitzt eine Kapazität von 2,00 µF und einen Plattenabstand von 1,60 mm.
   a) Wie groß kann die maximale Spannung zwischen den Platten sein, ohne dass es in der Luft zum dielektrischen Durchschlag kommt?
   b) Welche Ladung ist bei dieser Spannung gespeichert?

Aufgaben

3. Es soll ein Kondensatornetz mit einer Ersatzkapazität von 2,00 µF und mit einer Durchschlagspannung von 400 V konstruiert werden. Zur Verfügung stehen nur Kondensatoren mit einer Kapazität von 2,00 µF und einer Durchschlagspannung von 100 V. Skizzieren Sie die Schaltung.

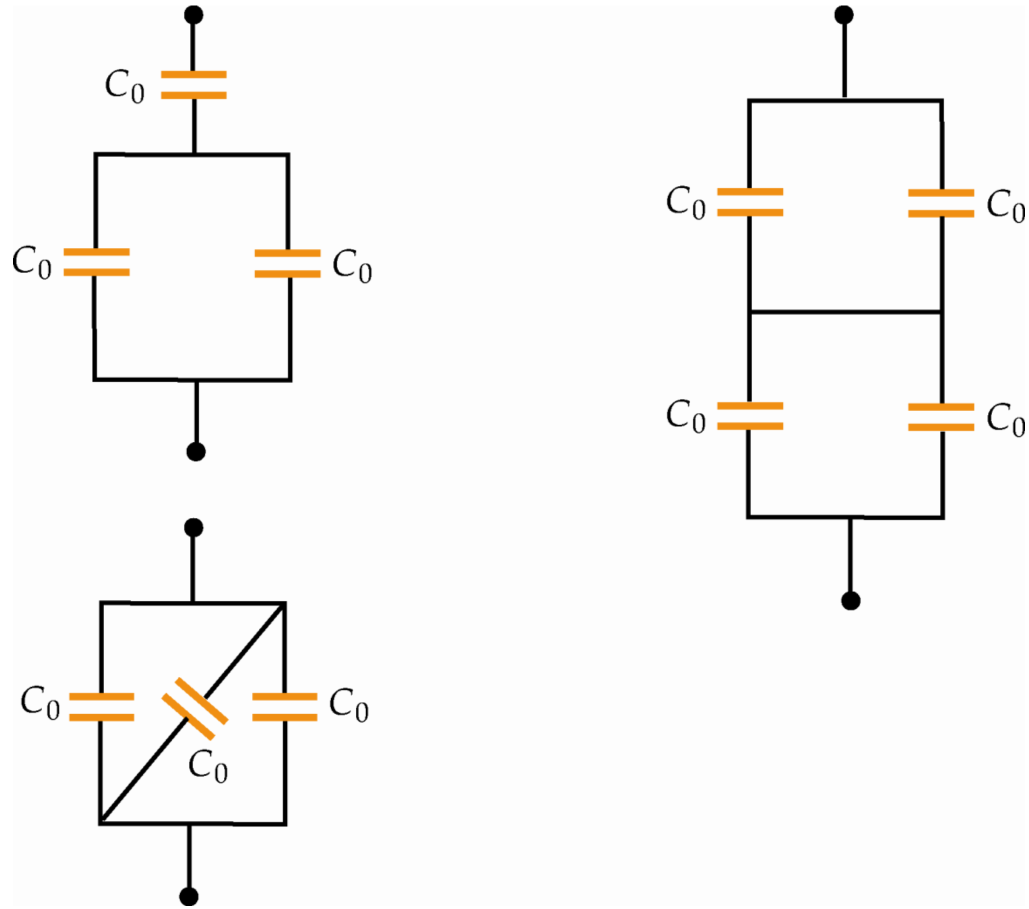
4. Konstruieren Sie einen luftgefüllten Plattenkondensator mit einer Kapazität von 0,100 µF, der auf eine maximale Spannung von 1000 V geladen werden kann, bevor es zum dielektrischen Durchschlag kommt.
   a) Wie groß muss der Abstand zwischen den Platten mindestens sein?
   b) Welchen Flächeninhalt müssen die Platten des Kondensators mindestens haben?

5. Zwei ungeladene Kondensatoren mit den Kapazitäten C_0 und $2C_0$ sind in Reihe geschaltet. Diese Reihenschaltung wird dann an die Anschlüsse einer Batterie angeschlossen. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?
   a) Der Kondensator mit der Kapazität $2C_0$ wird mit der doppelten Ladung geladen wie C_0.
   b) Die Spannung über beide Kondensatoren ist gleich.
   c) Die in jedem Kondensator gespeicherte Energie ist gleich.
   d) Die Ersatzkapazität ist $3\ C_0$.
   e) Die Ersatzkapazität ist $2/3\ C_0$.

Aufgaben

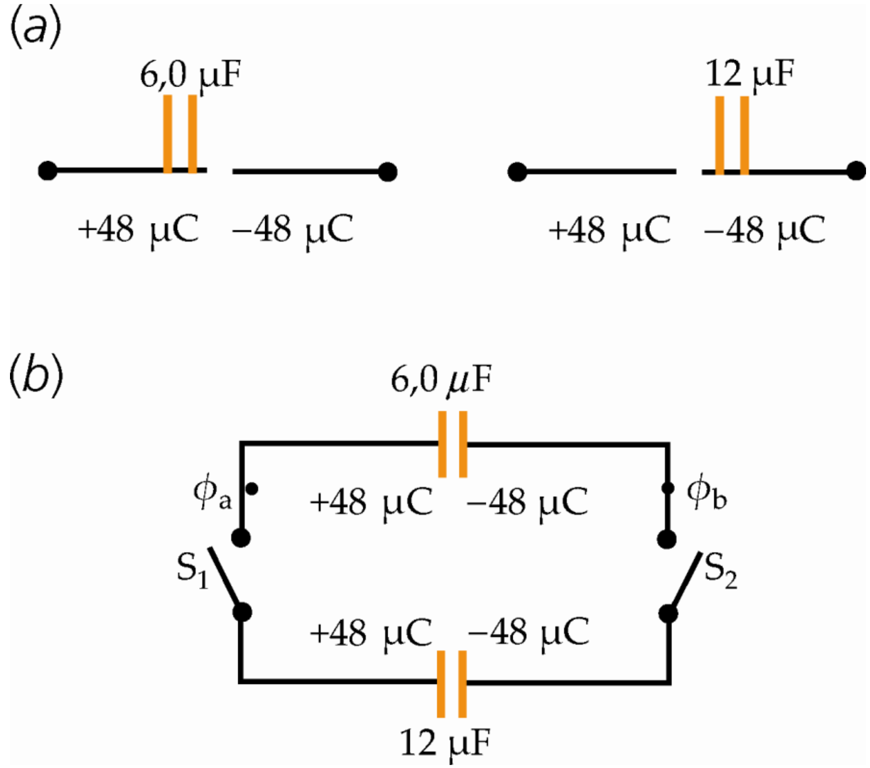
6. Bestimmen Sie die Ersatzkapazität jedes der in der Abbildung gezeigten Kondensatornetze, ausgedrückt durch C_0.

7. Eine Parallelschaltung zweier gleicher 2,00 µF Plattenkondensatoren (ohne Dielektrikum zwischen den Platten) wird an eine 100 V Batterie angeschlossen. Anschließend wird die Verbindung zur Batterie getrennt und der Abstand zwischen den Platten eines der Kondensatoren verdoppelt. Ermitteln Sie die Ladung auf der positiv geladenen Platte jedes Kondensators.



Aufgaben

8. Die beiden Kondensatoren werden vorsichtig von der Batterie getrennt, sodass sich ihre Ladungen auf den Platten nicht ändern.
Anschließend werden sie zu einem Stromkreis zusammen geschaltet, der die beiden Schalter S1 und S2 enthält, wobei die beiden positiv geladenen Platten und die beiden negativ geladenen Platten jeweils auf der gleichen Seite sind.
Ermitteln Sie die Spannung über die Kondensatoren sowie die Ladung auf jedem Kondensator, nachdem die Schalter geschlossen wurden.



Literatur und Quellen

Paul A. Tipler, Gene Mosca: Physik für Wissenschaftler und Ingenieure, Spektrum Akademischer Verlag, August 2009

http://de.wikipedia.org/

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf