Mathematik 1 – AI

Blatt 1

A1 a) ja b) nein c) ja, d) ja e) nein

f) ja g) ja h) ja, i) nein k) ja

A2 a)

$$2(x-4) = 8x-(x-1)$$
$$2x-8 = 8x-x+1$$
$$2x-8 = 7x+1$$
$$-9 = 5x$$
$$x = -\frac{9}{5} = -1{,}8$$

$\Rightarrow A = \{-\frac{9}{5}\}$

$$x^2+1 = 5$$
$$x^2 = 4$$
$$x = \pm 2$$

$\Rightarrow B = \{+2\}$

$$x^3-3x^2+2x = 0$$
$$x(x^2-3x+2) = 0$$

$x = 0$ $x^2-3x+2 = 0$

$x_1 = 0,\ x_{2,3} = \frac{+3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm1}{2}$

$x_2 = 2,\ x_3 = 1$

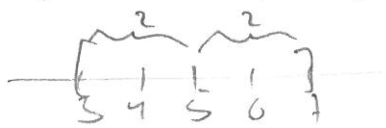
$\Rightarrow C = \{0;1;2\}$

$450 = 45\cdot10 = 5\cdot9\cdot5\cdot2 =$
$= 2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5$

$\Rightarrow$ Teiler von 450:
$\{1,2,3,5,6,9,10,15,25,18,30,50,45,75,90,150,225,450\}$

---

b) $A = \{x\in\mathbb{N} \mid 2\mid x-1\}$, $B = \{x\in\mathbb{N} \mid |x-5|\leq2\}$



$C = \{x\in\mathbb{N} \mid$ es gibt ein $y\in\mathbb{N}$ mit $x=y^2\}$, $D = \{x\in\mathbb{R} \mid (x+8)(x-5)=0\}$

$E = \{x\in\mathbb{N} \mid x$ teilt $12\}$, $F = \{x\in\mathbb{N} \mid 5\mid x-1\}$

A3 $M := \{1, 2\}$, $N := \{2, 3, 4\}$

a) falsch b) falsch c) falsch d) wahr, e) wahr

f) wahr g) falsch h) falsch

A4 a) $A = \{0, 1, 2, 3\}$

$$P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{0,1,2\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{1,2,3\}, \{0,1,2,3\}\}$$

$$M = \{0,1\}^2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$$

$$P(M) = \{\emptyset, \{(0,0)\}, \{(0,1)\}, \{(1,0)\}, \{(1,1)\}, \{(0,0),(0,1)\}, \{(0,0),(1,0)\}, \{(0,0),(1,1)\}, \{(0,1),(1,0)\}, \{(0,1),(1,1)\}, \{(1,0),(1,1)\}, \{(0,0),(0,1),(1,0)\}, \{(0,0),(0,1),(1,1)\}, \{(0,0),(1,0),(1,1)\}, \{(0,1),(1,0),(1,1)\}, \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}\}$$

b) $\# \text{Teams} = \binom{22}{11} = \frac{22!}{11!\,11!} = 705432$

Wähle aus 22 Personen 11 aus → eine Mannschaft; die übrigen 11 bilden die weitere Mannschaft.

c) $S = \{\text{Eigentümer von Segelbooten}\}$ $|S| = 48$

$M = \{\text{Eigentümer von Motorbooten}\}$ $|M| = 33$

$S \cup M = \{\text{Mitglieder des Bootsklubs}\}$, $|S \cup M| = 75$

Ges.: $|S \cap M|$

$|S \cup M| = |S| + |M| - |S \cap M|$

$\Leftrightarrow |S \cap M| = |S| + |M| - |S \cup M| = 48 + 33 - 75 = \underline{\underline{6}}$

d) 100 Studenten, je drei Fragen beantworten

$F_i = \{$Studenten, die Frage i richtig beantwortet haben$\}$ $(i=1,2,3)$

$|F_1| = 35, \quad |F_2| = 25, \quad |F_3| = 60$

$|F_1\cap F_2| = 15, \quad |F_1\cap F_3| = 25, \quad |F_2\cap F_3| = 18$

$|F_1\cap F_2\cap F_3| = 10.$

$F_1\cup F_2\cup F_3 = \{$Studenten, die mindestens eine Frage richtig beantwortet haben$\}$

$$|F_1\cup F_2\cup F_3| = |F_1| + |F_2| + |F_3| - |F_1\cap F_2| - |F_1\cap F_3| - |F_2\cap F_3| + |F_1\cap F_2\cap F_3| =$$

$$= 35+25+60-15-25-18+10 = 72$$

$\Rightarrow$ $100-72 = 28$ Studenten haben keine Frage richtig beantwortet

---

A5 a) $A\cap\overline{(A\cup B)} = A\cap(\bar A\cap\bar B) = \underbrace{A\cap\bar A}_{\emptyset}\cap\bar B = \emptyset\cap\bar B = \emptyset$

$(A\cup B)\cap(\bar A\cap\bar B) = (\underbrace{A\cap\bar A}_{\emptyset}\cap\bar B)\cup(\underbrace{B\cap\bar A\cap\bar B}_{\emptyset}) = \emptyset\cup\emptyset = \emptyset$

$A\setminus(A\setminus B) = A\setminus(A\cap\bar B) = A\cap\overline{(A\cap\bar B)} = A\cap(\bar A\cup B)$

$= \underbrace{(A\cap\bar A)}_{\emptyset}\cup(A\cap B) = A\cap B$

$\overline{(\overline{A\cap B}\cup C)\cap\bar B} = (\overline{\overline{A\cap B}\cup C})\cup B = (\underbrace{A\cap B\cap\bar C}_{\subseteq B})\cup B = B$

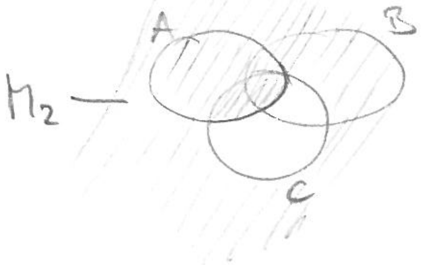
b) $M_1 := (A\cup B)\cap(A\cup C\cup\bar B)\cap\bar C = [(A\cap A)\cup(A\cap C)\cup(A\cap\bar B)\cup(B\cap A)\cup(B\cap C)\cup(\underbrace{B\cap\bar B}_{\emptyset})]\cap\bar C = [A\cup\underbrace{(A\cap C)\cup(A\cap\bar B)\cup(B\cap A)}_{\subseteq A}\cup(B\cap C)]\cap\bar C$

$= [A\cup(B\cap C)]\cap\bar C = (A\cap\bar C)\cup(\underbrace{B\cap C\cap\bar C}_{\emptyset}) = \underline{\underline{A\cap\bar C}}$

$$M_2 := (A\cap B)\cup(A\cap C\cap\bar B)\cup\bar C =$$

$$= \Big[\underbrace{(A\cup A)}_{A}\cap\underbrace{(A\cup C)\cap(A\cup\bar B)\cap(B\cup A)}_{\supseteq A}\cap(B\cup C)\cap\underbrace{(B\cup\bar B)}_{\Omega}\Big]\cup\bar C$$

$$= \big[A\cap(B\cup C)\big]\cup\bar C = (A\cup\bar C)\cap(\underbrace{B\cup\underbrace{C\cup\bar C}_{\Omega}}_{\Omega}) = \underline{\underline{A\cup\bar C}}$$

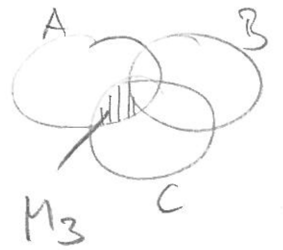


$M_1\subseteq M_2$

$$M_3 := (A\setminus B)\cap(B\cup C) = (A\cap\bar B)\cap(B\cup C) =$$

$$= (\underbrace{A\cap\underbrace{\bar B\cap B}_{\emptyset}}_{\emptyset})\cup(A\cap\bar B\cap C) = A\cap\bar B\cap C$$

$M_3\subseteq M_2$



$M_3\cap M_1=\emptyset$

A6 $M=\{x\mid x\in\mathbb{N},\ x \text{ teilt } 63\}$ $\quad 63 = 9\cdot 7 = 3^2\cdot 7$

$=\{1,3,7,9,21,63\}$

a) i) $x\preceq x$, da $x\mid x$ gilt

ii) $x\preceq y$ und $y\preceq x$, d.h. $x\mid y$ und $y\mid x$,

also $y=ax$, $x=by$ $\Rightarrow$ $y=aby$, $x=bax$

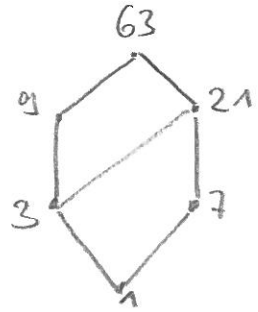
$\Rightarrow$ $ab=1$ und $ba=1$ $\Rightarrow$ (da $a,b\in\mathbb{N}$) $a=b=1$

Somit folgt $x=y$

iii) $x\preceq y$ und $y\preceq z$, d.h. $x\mid y$ und $y\mid z$, also $y=ax$, $z=by$

$\Rightarrow$ $z=by=bax$, also $x\mid z$, d.h. $x\preceq z$.

b) Hasse-Diagramm



c) $\leq$ ist keine lineare Ordnung, da z.B. 3 und 7 bzgl. $\leq$ nicht vergleichbar sind.

A7 $x \sim_7 y \iff x-y$ ist durch 7 teilbar, $x,y \in \mathbb{Z}$

a) $x \sim_7 x$, denn $x-x=0$ ist durch 7 teilbar

$x \sim_7 y \Rightarrow y \sim_7 x$, denn ist $x-y$ durch 7 teilbar, so auch $y-x=-(x-y)$

$x \sim_7 y$ und $y \sim_7 z$, d.h. $7 \mid (x-y)$ und $7 \mid (y-z)$. Daher gilt $x-y=a\cdot 7$ und $y-z=b\cdot 7$ für geeignete $a,b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x-z=(x-y)+(y-z)=a\cdot 7+b\cdot 7=(a+b)\cdot 7$,

d.h. $7 \mid (x-z)$ und somit gilt $x \sim_7 z$.

b) $[0]=\{x \mid x\in\mathbb{Z},\ x\sim_7 0, \text{ d.h. } 7\mid x\}=$

$=\{k\cdot 7 \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$[1]=\{x \mid x\in\mathbb{Z},\ x\sim_7 1, \text{ d.h. } 7\mid (x-1)\}=$

$=\{1+k\cdot 7 \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$[2]=\{x \mid x\in\mathbb{Z},\ x\sim_7 2, \text{ d.h. } 7\mid (x-2)\}=$

$=\{2+k\cdot 7 \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$[3]=\{x \mid x\in\mathbb{Z},\ x\sim_7 3, \text{ d.h. } 7\mid (x-3)\}=\{3+k\cdot 7 \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$[4]=\{x \mid x\in\mathbb{Z},\ x\sim_7 4, \text{ d.h. } 7\mid (x-4)\}=\{4+k\cdot 7 \mid k\in\mathbb{Z}\}$

$[5] = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \sim_7 5, \text{ d.h. } 7 \mid (x-5)\}$

$= \{5 + k \cdot 7 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$[6] = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \sim_7 6, \text{ d.h. } 7 \mid (x-6)\}$

$= \{6 + k \cdot 7 \mid k \in \mathbb{Z}\}$

$[7] = \{x \mid x \in \mathbb{Z},\ x \sim_7 7, \text{ d.h. } 7 \mid (x-7)\}$

$= \{7 + k \cdot 7 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{t \cdot 7 \mid t \in \mathbb{Z}\} = [0]$

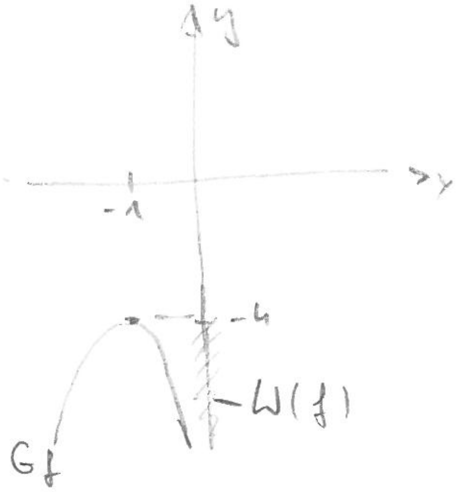
$[8] = [1], \ldots$

$\Rightarrow$ vollst. Repräsentantensystem: $[0], [1], [2], \ldots, [6]$.

A8 a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -2x^2 - 4x - 6$

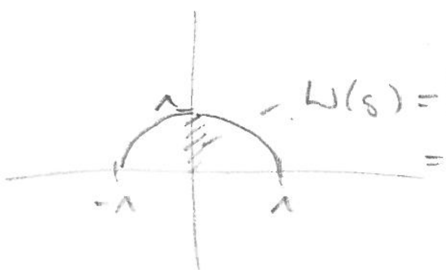
$-2x^2 - 4x - 6 = -2(x^2 + 2x + 3) = -2[\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{(x+1)^2} - 1 + 3]$

$= -2[(x+1)^2 + 2] = -2(x+1)^2 - 4$

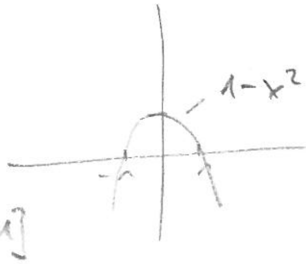


$\Rightarrow W(f) = \{y \leq -4\} =]-\infty; -4]$

b) $g: [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$



$W(g) = [0; 1]$
$= \{x \mid x \in \mathbb{R},\ 0 \leq x \leq 1\}$



A5 a) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto \bar{x} = \text{Quersumme von } x\}$

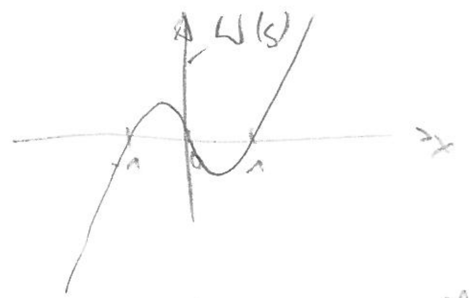
Zu bel. $y \in \mathbb{N}$ sei $x = \underbrace{11\ldots1}_{y\text{-mal}} \Rightarrow \bar{x} = y$

$\Rightarrow f$ ist surjektiv

Da jedoch $12 \mapsto 3$, $111 \mapsto 3$ gilt, ist f nicht injektiv.

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - x$

$x^3 - x = x(x^2 - 1)$ Nst. sind $0, \pm 1$



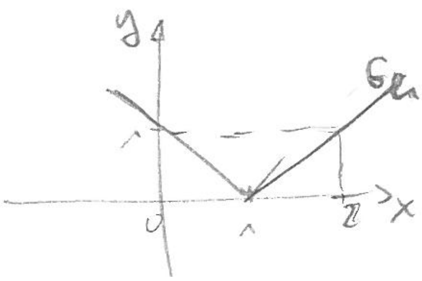
$g(-1) = -1 + 1 = 0$

$g(1) = 1 - 1 = 0$

$\Rightarrow g$ ist nicht injektiv

Wg. $W(g) = \mathbb{R}$ ist g surjektiv.

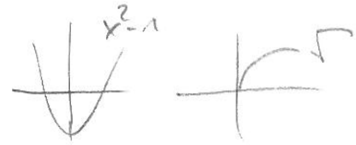
c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x - 1|$

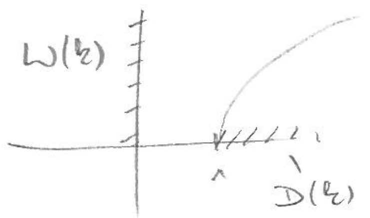


$\Rightarrow h$ nicht injektiv, da $h(0) = 1$, $h(2) = 1$

h nicht surjektiv,
da $W(h) = \mathbb{R}_0^+ \subsetneq \mathbb{R}$, ist h nicht surjektiv

d) $k: \{x \geq 1\} \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$



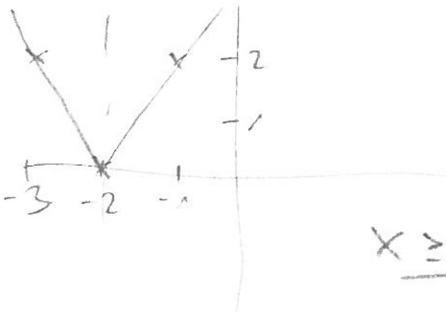


$W(k) = \mathbb{R}_0^+ \Rightarrow k$ ist surjektiv

k ist injektiv

$\Rightarrow k$ ist bijektiv.

A10 a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto |2x+4|$



f ist surjektiv, jedoch nicht injektiv

$f_1 = f|\{x \geq -2\}$ u. $f_2 = f|\{x \leq -2\}$ sind bijektiv

$\underline{x \geq -2}$: $|2x+4| = 2x+4$

$y = 2x+4$

$y - 4 = 2x \quad |:2$

$\frac{1}{2}y - 2 = x$

$x \leftrightarrow y: \ f_1^{-1}(x) = \frac{1}{2}x - 2$

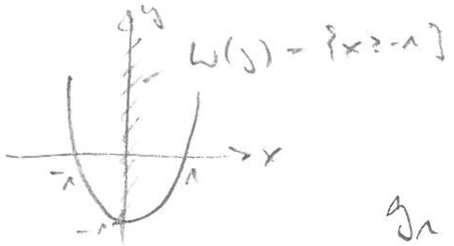
$\underline{x \leq -2}$: $|2x+4| = -2x-4$

$y = -2x-4$

$y + 4 = -2x \quad |:-2$

$-\frac{1}{2}y - 2 = x \qquad x \leftrightarrow y: \ f_2^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x - 2$

b) $g: \mathbb{R} \to \{y \geq -1\},\ x \mapsto x^2 - 1$



g ist surjektiv, jedoch nicht injektiv, da z. B. $g(-1) = g(1) = 0$

$g_1 = g|\{x \geq 0\}$ u. $g_2 = g|\{x \leq 0\}$ sind bijektiv.

$\underline{x \geq 0}$: $y = x^2 - 1$

$y + 1 = x^2$

$\sqrt{y+1} = x$

pos., da $x \geq 0$

$\Rightarrow g_1^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

$\underline{x \leq 0}$: $y = x^2 - 1$

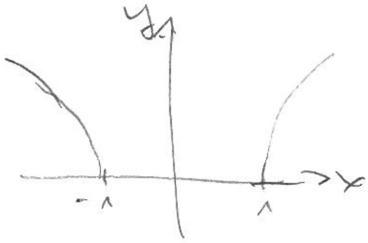
$y + 1 = x^2$

$-\sqrt{y+1} = x$

neg., da $x \leq 0$

$\Rightarrow g_2^{-1} = -\sqrt{x+1}$

c) $h: \{|x| \geq 1\} \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto \sqrt{x^2-1}$



h ist surjektiv, jedoch nicht injektiv

$h_1 = h|\{x \geq 1\}$ u. $h_2 = h|\{x \leq -1\}$ sind bijektiv

$\underline{x \geq 1}$: $y = \sqrt{x^2-1} \quad |()^2$

$y^2 = x^2 - 1$

$x^2 = y^2 + 1$

$x = \underset{(-)}{+}\sqrt{y^2+1}$

↑ pos. Wurzel, da $x \geq 1$

$x \leftrightarrow y$: $h_1^{-1}: \{x \geq 0\} \to \{y \geq 1\}$

$x \mapsto \sqrt{x^2+1}$

$\underline{x \leq -1}$: $y = \sqrt{x^2-1} \quad ()^2$

$y^2 = x^2 - 1$

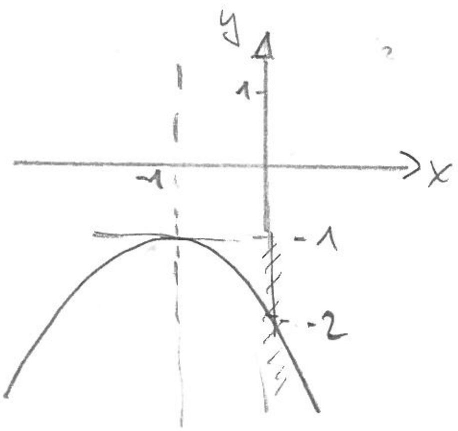
$x^2 = y^2 + 1$

$x = \overset{(+)}{-}\sqrt{y^2+1}$

↑ neg. Wurzel, da $x \leq -1$

$\Leftrightarrow h_2^{-1}: \mathbb{R}_0^+ \to \{x \leq -1\},\ x \mapsto -\sqrt{x^2+1}$

d) $k: \mathbb{R} \to \{y \leq -1\},\ x \mapsto -(x+1)^2 - 1$



k ist surjektiv, jedoch nicht injektiv

$k_1 = k|\{x \geq -1\}$ u. $k_2 = k|\{x \leq -1\}$ sind bijektiv

$\underline{x \geq -1}$: $y = -(x+1)^2 - 1$

$-y - 1 = (x+1)^2 \quad |\sqrt{\ }$

$\underset{(-)}{+}\sqrt{-y-1} = x + 1$

↑ pos. Wurzel wg. $x \geq -1$ $(x+1 \geq 0)$

$x = \sqrt{-y-1} - 1$

$x \leftrightarrow y$: $k_1^{-1}(x) = \sqrt{-y-1} - 1$

$\underline{x \leq -1}$: $y = -(x+1)^2 - 1$

$-y - 1 = (x+1)^2$

$\overset{(+)}{-}\sqrt{-y-1} = x + 1$

↑ neg. Wurzel wg. $x + 1 \leq 0$

$x = -\sqrt{-y-1} - 1$

$x \leftrightarrow y$: $k_2^{-1}(x) = -\sqrt{-y-1} - 1$