Mathematatik 1 Infotronik (17)

Gerald Kupris

14.12.2012

Weiterer Plan für dieses Semester

16. (13.12.2012): Lineare Abbildung, 2D Abbildungen, 2D Grafik

17. (19.12.2012): Projektion, Verschiebung, homogene Koordinaten

18. (20.12.2012): Drehung um einen beliebigen Punkt, Scherung

Feiertage

19. (09.01.2013): Definition von Eigenvektoren und Eigenwerten

20. (10.01.2013): Berechnung von Eigenvektoren und Eigenwerten

21. (16.01.2013): Eigenschaften von Eigenvektoren und Eigenwerten

22. (17.01.2013): Anwendung von Eigenvektoren und Eigenwerten

23. (23.01.2013): 3D Grafik

24. (24.01.2013): Wiederholung, Prüfungsvorbereitung

Definition Lineare Abbildung

Die lineare Abbildung (auch linearer Operator) ist eine Funktion zwischen zwei Vektorräumen über dem selben Körper, bei der es unerheblich ist, ob man zwei Vektoren zuerst addiert und dann deren Summe mittels der Funktion abbildet oder zuerst die Vektoren abbildet und dann die Summe der Bilder bildet.
Gleiches gilt für die Multiplikation mit einem Skalar (z. B. einer reellen Zahl).

Lineare Abbildungen sind Homomorphismen zwischen Vektorräumen. Jede Matrix stellt eine lineare Abbildung dar; jede lineare Abbildung ist durch eine Matrix repräsentierbar. Damit kann jede lineare Abbildung in allgemeinen Vektorräumen durch die Matrixalgebra beschrieben werden.

Ein Homomorphismus ist eine strukturerhaltende Abbildung in der universellen Algebra. Homomorphismen lassen sich allgemeiner als spezielle Morphismen, also strukturverträgliche Abbildungen, definieren.

Und noch einmal: Die Lineare Abbildung

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = f\left(\vec{x}\right) = A \cdot \vec{x}$$

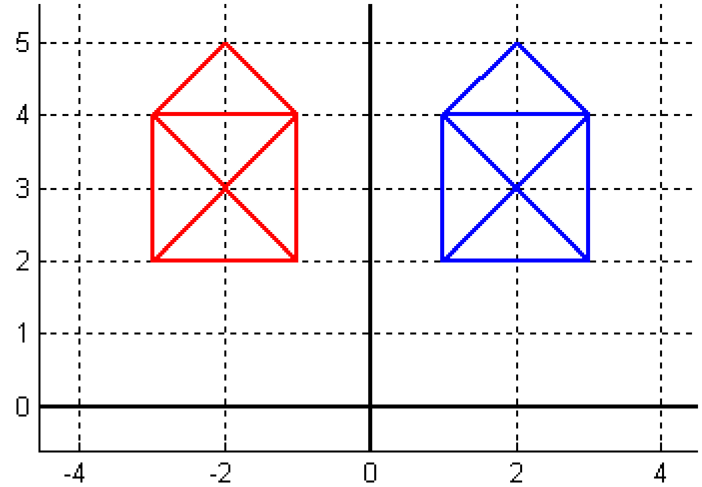
A = [*f*] wird als Abbildungsvorschrift oder als die darstellende Matrix von *f* bezeichnet.

Wiederholung: Spiegelung an der y-Achse

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$

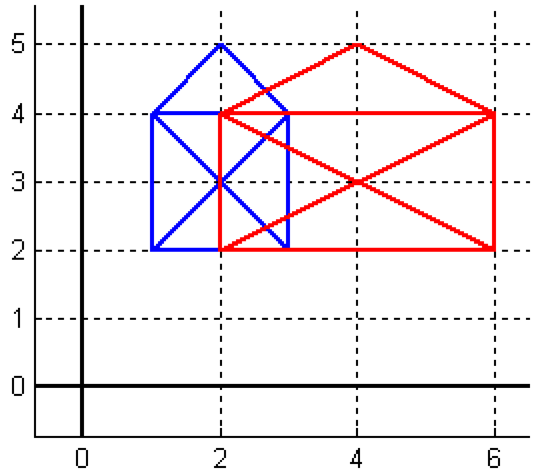


Wiederholung: Streckung entlang der x-Achse

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$

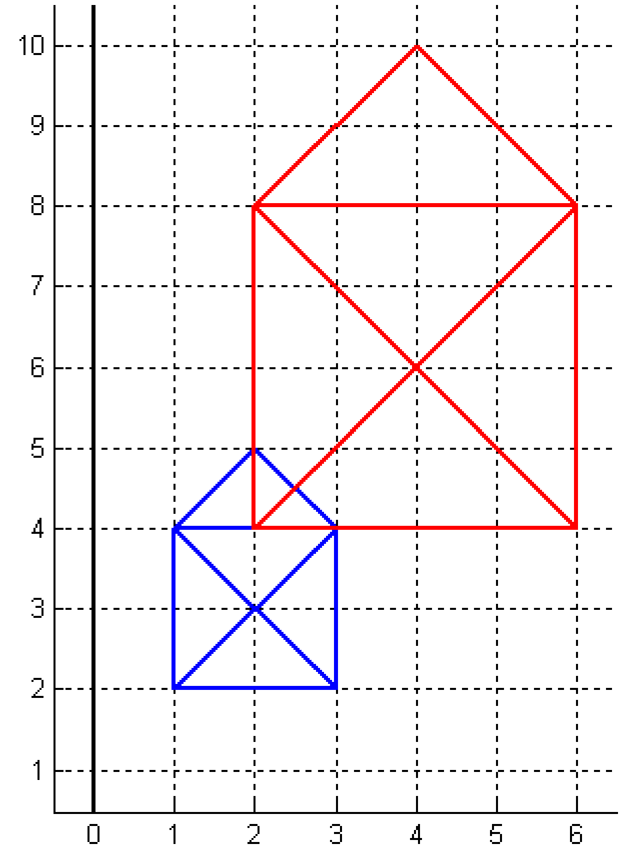


Wiederholung: Vergrößerung um den Faktor 2

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



Drehung um den Koordinatenursprung

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Drehung um den Winkel φ
φ > 0: Drehung nach links
φ < 0: Drehung nach rechts

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

φ = π/2
Drehung um 90° nach links

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

φ = - π/2
Drehung um 90° nach rechts

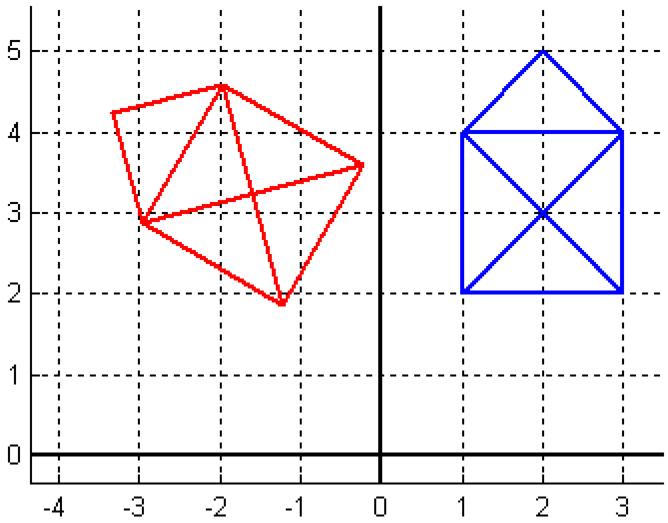
Wiederholung: Rotation um 60°

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

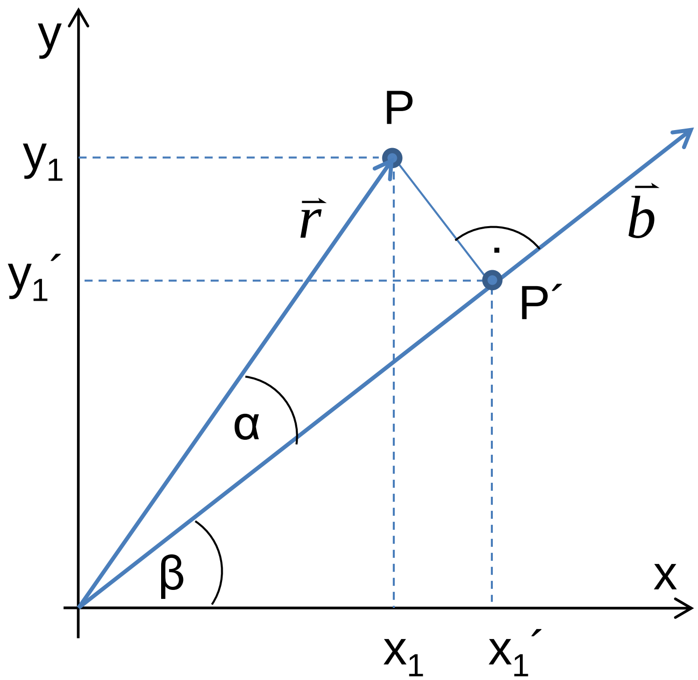
$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}866 \\ 0{,}866 & 0{,}5 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



Projektion

Projektion = Lot eines Punktes auf einer Geraden.



$$\vec{b} = b \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \vec{e}_b$$ Einheitsvektor in Richtung der Geraden $\vec{b}$

Wiederholung / Erinnerung:

Skalarprodukt = Projektion von $\vec{r}$ auf $\vec{e}_b$

Skalarprodukt $= r \cdot e_b \cdot \cos\alpha$

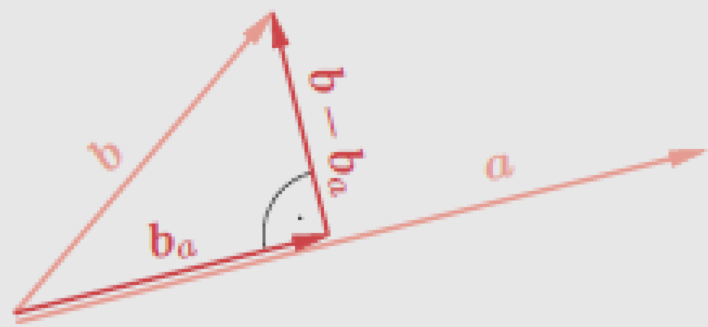
$= r \cdot 1 \cdot \cos\alpha$

Senkrechte Projektion

Die senkrechte Projektion des Vektors $\boldsymbol{b}$ in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ ist definiert durch

$$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{a}} = |\boldsymbol{b}| \cos \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2} \boldsymbol{a}.$$

Diese Projektion ist ein Vektor in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ mit der Länge $|\boldsymbol{b}| \cos \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.



Ist einer der beiden Vektoren ein Einheitsvektor, so ergibt das Skalarprodukt die Länge der Projektion des anderen Vektors auf die vom Einheitsvektor definierte Gerade.

Wiederholung: Skalarprodukt von Vektoren

Das Skalarprodukt (auch **inneres Produkt** oder Punktprodukt) ist eine mathematische Verknüpfung. Das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnet sich nach der Formel:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|\,|\vec{y}|\, \cos \measuredangle (\vec{x}, \vec{y}) = x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \ldots + x_n\, y_n$$

Wie bei der normalen Multiplikation kann das Multiplikationszeichen auch weggelassen werden:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}\vec{y}$$

Es gibt eine einfache Methode das Skalarprodukt zu berechnen, und zwar durch komponentenweises Multiplizieren der Koordinaten der Vektoren und anschließendes Aufsummieren. Diese Berechnungsmethode für das Skalarprodukt wird oft verwendet, um **Winkel** zwischen zwei Vektoren und die **Länge** von Vektoren zu bestimmen.

Das Skalarprodukt darf nicht mit der Skalaren Multiplikation verwechselt werden!
Hierbei wird ein Vektor mit einem Skalar des Vektorraums multipliziert, meistens also einer reellen oder komplexen Zahl.

Projektion

$$\vec{r}\cdot\vec{e}_b=(x_1;y_1)\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}=x_1\cdot\cos\beta+y_1\sin\beta$$

$$\begin{pmatrix}x_1{}'\\ y_1{}'\end{pmatrix}=\left(\vec{r}\cdot\vec{e}_b\right)\cdot\vec{e}_b$$

Richtung des neuen Vektors

$$\begin{pmatrix}x_1{}'\\ y_1{}'\end{pmatrix}=\left(x_1\cdot\cos\beta+y_1\sin\beta\right)\cdot\begin{pmatrix}\cos\beta\\ \sin\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1{}'\\ y_1{}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\cdot\cos^2\beta+y_1\sin\beta\cos\beta\\ x_1\cdot\cos\beta\cos\beta+y_1\sin^2\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1{}'\\ y_1{}'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta\\ \sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1=L\cdot\vec{x}$$

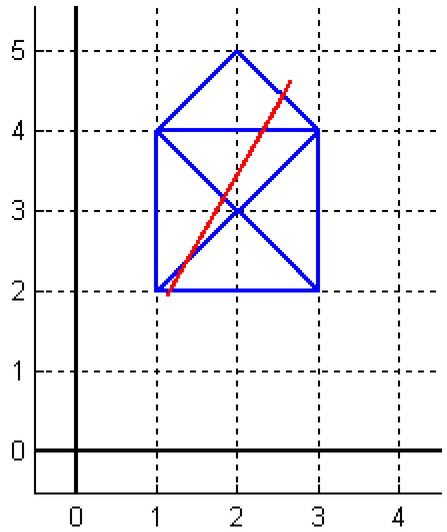
Projektion auf Vektor mit β=60°

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}433 \\ 0{,}433 & 0{,}75 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



Spezialfall: Projektion auf x-Achse

$$\beta = 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0\cdot 1 \\ 0\cdot 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spezialfall: Projektion auf y-Achse

$$\beta = \pi / 2$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\beta & \sin\beta\cos\beta \\ \sin\beta\cos\beta & \sin^2\beta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1\cdot 0 \\ 1\cdot 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Parallelverschiebung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + a_x \\ y_1 + a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + a_x \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot y_1 + a_y \end{pmatrix}$$

zwei Zeilen reichen nicht zur Darstellung in Vektor- bzw. Matrix-Schreibweise.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + a_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot y_1 + a_y \cdot 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

künstliche Erweiterung der Vektoren um eine Zeile, es gibt aber nach wie von nur die beiden Komponenten x_1 und y_1.

Homogene Koordinaten in 2D

Rotation, Skalierung und Scherung eines zweidimensionalen Objektes lassen sich je durch eine 2 x 2 Matrix beschreiben, eine Translation des Objektes dagegen durch einen 2 x 1 Vektor. Hinderlich ist dabei, dass die drei erstgenannten Operationen eine Matrizen-multiplikation erfordern, die **Translation** hingegen eine **Vektoraddition**.
Um eine Translation ebenfalls als Matrixoperation berechnen zu können, wird der Raum um eine weitere Dimension erweitert. Eine **Translation** im dreidimensionalen Raum lässt sich nun durch eine **Matrizenmultiplikation mit einer 3 x 3 Matrix** beschreiben.
Die Transformation von kartesischen Koordinaten zu homogenen Koordinaten erfolgt durch:

$$(x, y)^T \rightarrow (x, y, 1)^T$$

Die Abbildung eines Punktes $\boldsymbol{P_{x,y,z}}$ von einem Koordinatensystem in ein anderes geschieht durch die Multiplikation mit der homogenen Matrix :

$$(x', y', w')^T = \underline{M} \cdot (x, y, w)^T$$

Aufgrund der Assoziativität von Matrizenmultiplikationen können mehrere aufeinander-folgende Multiplikationen zu einer einzigen Gesamtmatrix zusammengefasst werden.

Warum homogene Koordinaten?

Eine Abbildung ***f*** heißt linear, falls gelten:

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \mid \vec{x}, \vec{y} \in \Re^n$$

$$f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \Re^n, \lambda \in \Re$$

2D-Verschiebung in kartesischen Koordinaten (2x2)

ist keine lineare Abbildung!

2D-Verschiebung in homogenen Koordinaten (3x3)

ist eine lineare Abbildung!

Jede Matrix stellt eine lineare Abbildung dar; jede lineare Abbildung ist durch eine Matrix repräsentierbar. Damit kann jede lineare Abbildung in allgemeinen Vektorräumen durch die Matrixalgebra beschrieben werden.

Parallelverschiebung: Reverse Verschiebung

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_x \\ 0 & 1 & -a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

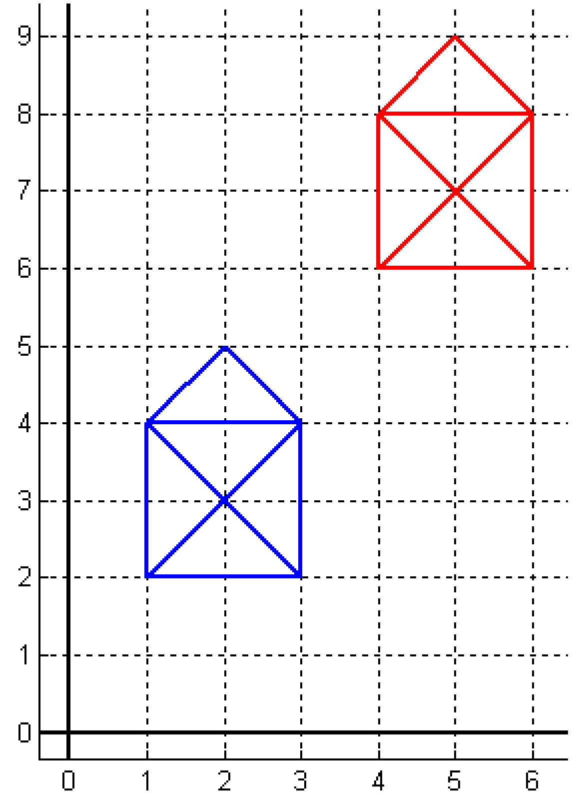
$$T \cdot T^{-1} = E$$

Verschiebung um a_x und a_y

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



Andere 2D-Abbildungen in homogenen Koordinaten

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skalierung in x- und y-Richtung
λ > 1: Streckung
λ < 1: Stauchung

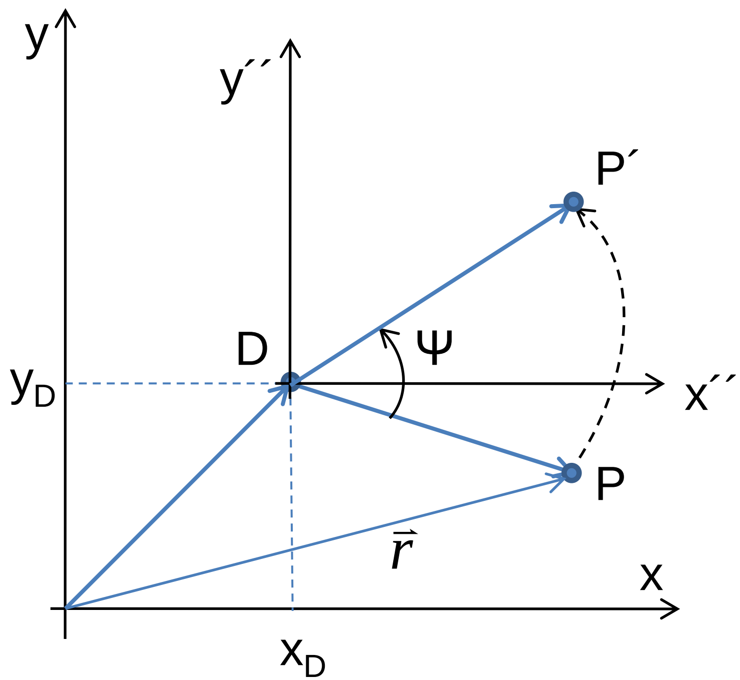
$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der x-Achse

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Drehung um den Winkel φ
φ > 0: Drehung nach links
φ < 0: Drehung nach rechts

Drehung um einen beliebigen Punkt D



Zerlegung der Operation in drei Schritte:

1. Verschiebung des Koordinatenursprungs in den Punkt D
2. Drehung um den Punkt D
3. Rückverschiebung in den Koordinatenursprung

Drehung um einen beliebigen Punkt D

1. Verschiebung des Koordinatenursprungs in den Punkt D

$$x_1'' = x_1 - x_D$$
$$y_1'' = y_1 - y_D$$

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ y_1'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_D \\ 0 & 1 & -y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_D \\ 0 & 1 & -y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'' = T \cdot \vec{r}$$

Drehung um einen beliebigen Punkt D

2. Drehung um den Punkt D

$$\begin{pmatrix} x_1''' \\ y_1''' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1'' \\ y_1'' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}''' = R \cdot \vec{r}''$$

Drehung um einen beliebigen Punkt D

3. Rückverschiebung in den Koordinatenursprung

$$x_1' = x_1''' + x_D$$
$$y_1' = y_1''' + y_D$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & +x_D \\ 0 & 1 & +y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1''' \\ y_1''' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & +x_D \\ 0 & 1 & +y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}' = T^{-1} \cdot \vec{r}'''$$

Zusammenfassung: Drehung um einen beliebigen Punkt D

$$\vec{r}\,' = T^{-1} \cdot \vec{r}\,''' = T^{-1} \cdot R \cdot \vec{r}\,'' = T^{-1} \cdot R \cdot T \cdot \vec{r}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & +x_D \\ 0 & 1 & +y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_D \\ 0 & 1 & -y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & x_D(1-\cos\varphi) + y_D \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & x_D(-\sin\varphi) + y_D(1-\cos\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}\,' = T^{-1} \cdot R \cdot T \cdot \vec{r} = T^{-1} \cdot (R \cdot T) \cdot \vec{r} = (T^{-1} \cdot R) \cdot T \cdot \vec{r}$$

Transformation eines komplexen Bildes

Statt Berechnung für jeden einzelnen Punkt erfolgt die Berechnung für eine Matrix, die die Koordinaten aller Punkte enthält, die durch Geraden verbunden sind.

„Das ist das Haus vom Nikolaus."

Drehung um den Punkt D $x_D=2$, $y_D=5$ um 120°.

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' & x_5' \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' & y_5' \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

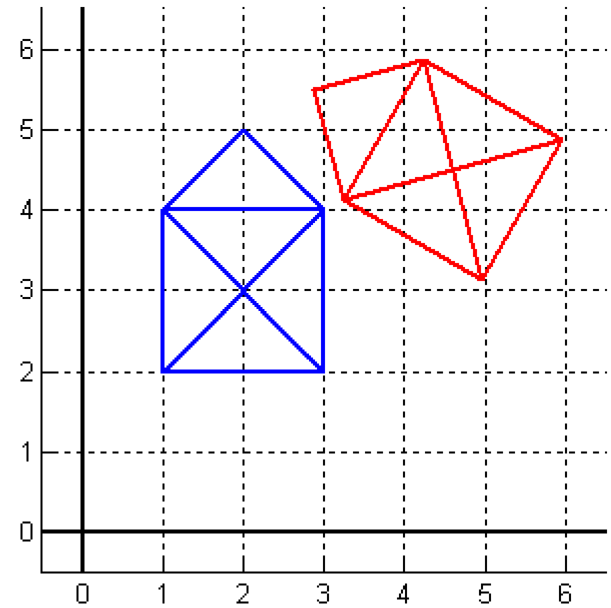
Rotation um φ um den Punkt x_D und y_D

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & x_D(1-\cos\varphi) + y_D \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & x_D(-\sin\varphi) + y_D(1-\cos\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}866 & 6{,}196 \\ 0{,}866 & 0{,}5 & -0{,}196 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



Beweis, dass es sich um eine lineare Abbildung handelt

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & x_D(1-\cos\varphi)+y_D\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & x_D(-\sin\varphi)+y_D(1-\cos\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine Abbildung ***f*** heißt dann linear, falls gelten:

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \mid \vec{x},\vec{y} \in \Re^n$$

$$f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \Re^n, \lambda \in \Re$$

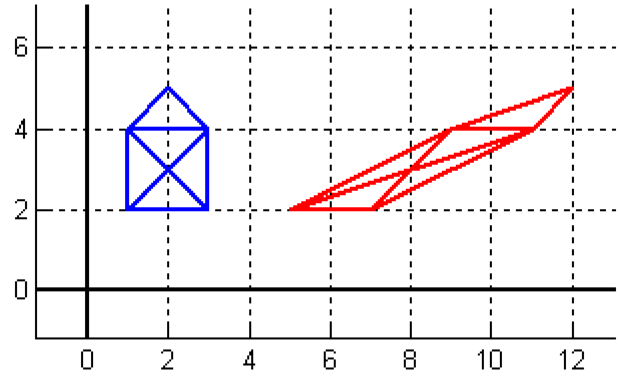
Rechnen Sie nach, ob diese Abbildung eine lineare Abbildung ist.

Scherung

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



Scherung

Unter einer Scherung oder auch Transvektion versteht man in der Geometrie der Ebene Abbildungen der Ebene auf sich selbst, bei denen der Flächeninhalt erhalten bleibt.

Bei einer Scherung bleibt eine Gerade der Ebene (die Fixpunktgerade oder Achse der Scherung) fix, das heißt, jeder Punkt dieser Geraden wird auf sich abgebildet. Alle anderen Punkte der Ebene werden parallel zur Achse verschoben, dabei ist die Länge des Verschiebungsvektors eines Punktes proportional zum Abstand dieses Punktes von der Achse. Alle Geraden, die parallel zur Achse sind, werden auf sich abgebildet, sind also Fixgeraden. Strecken auf diesen Geraden werden längentreu abgebildet.

Bei einer Scherung bleibt also der Abstand jedes Punktes zur Achse unverändert. Damit werden Rechtecke und Dreiecke, bei denen eine Seite parallel zur Achse ist, auf Parallelogramme bzw. Dreiecke abgebildet, die (auf diese Seite) eine gleich lange Höhe haben

Matrixdarstellung der Scherung

Wählt man in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem, bei dem die x-Achse mit der Achse der Scherung zusammenfällt, dann wird diese Scherung durch die lineare Abbildung dargestellt.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + my \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Für algebraische Untersuchungen ist es bequem, die betrachteten affinen Abbildungen als 3x3-Matrizen (erweiterte Abbildungsmatrizen) bezüglich einer festen Basis darzustellen. Das entspricht einer Darstellung der affinen Abbildung in homogenen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & v_1 \\ m_{21} & m_{22} & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Scherung in der Mechanik

In der Mechanik, speziell der Kontinuumsmechanik bezeichnet man als Scherung bestimmte Verformungen eines dreidimensionalen Körpers. Dabei werden Massenelemente des Körpers in eine gemeinsame Richtung parallel zu einer festen Ebene im Körper verschoben und die Länge des Verschiebungsvektors ist proportional zum Abstand des Massenelementes von der festen (Fixpunkt-)Ebene.

Der Begriff deckt sich also (als Abbildung) mit der spezielleren Verallgemeinerung auf drei Dimensionen aus dem vorigen Abschnitt. Wählt man das Koordinaten-system so, dass die unverschobene Ebene die xy-Ebene des kartesischen Koordinatensystems bildet und alle Verschiebungen parallel zur x-Achse erfolgen, dann lässt sich die dreidimensionale Scherung durch die lineare Abbildung beschreiben:

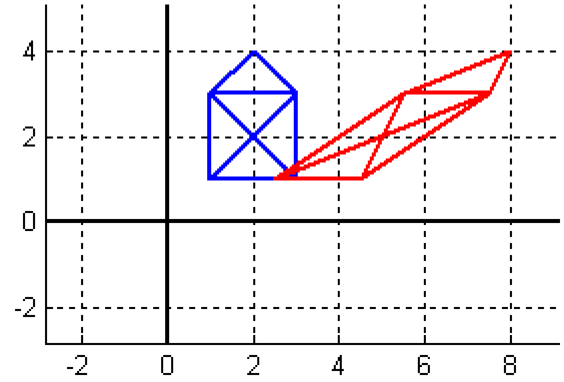
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \Delta x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Scherung

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$

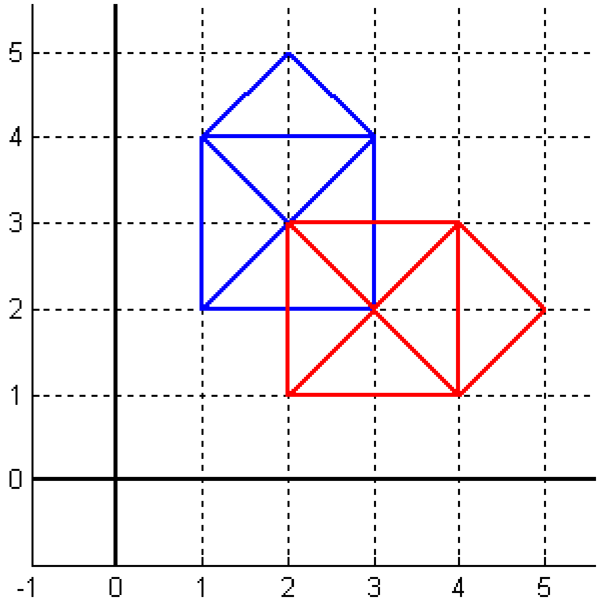


Permutation

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$

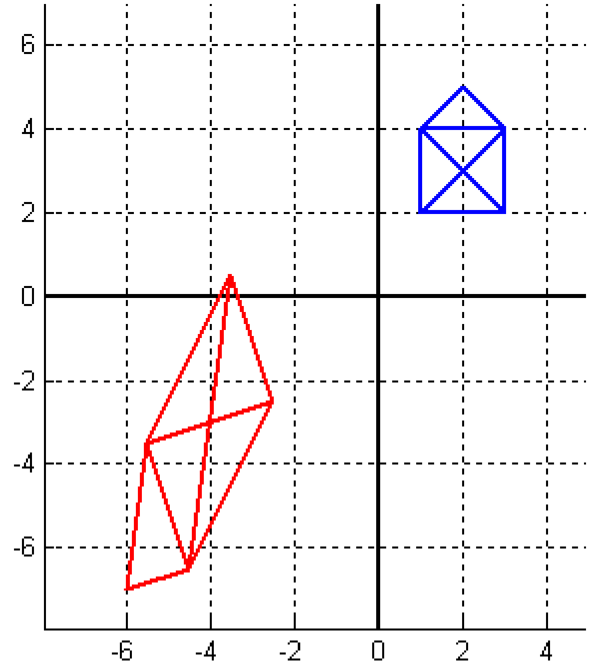


Willkürliche Kombinantion

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 \\ -1{,}5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



Quellen

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf