HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences



Mathematik 1 Infotronik (4)

Gerald Kupris

24.10.2012

Vorlesungsinhalte Vektorrechnung

1. Definition von Vektoren
2. Einfache Rechenregeln
3. Koordinatendarstellung von Vektoren
4. Beträge von Vektoren
5. Rechenregeln in der Koordinatendarstellung
6. Koordinatendarstellung mit Winkelfunktionen
7. Skalarprodukt
8. Vektorprodukt
9. Spatprodukt
10. Rechnen mit Vektoren

Wiederholung: Skalarprodukt von Vektoren

Das Skalarprodukt (auch **inneres Produkt** oder Punktprodukt) ist eine mathematische Verknüpfung. Das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnet sich nach der Formel:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|\,|\vec{y}|\,\cos\measuredangle(\vec{x}, \vec{y}) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + \ldots + x_n\,y_n$$

Wie bei der normalen Multiplikation kann das Multiplikationszeichen auch weggelassen werden:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}\vec{y}$$

Es gibt eine einfache Methode das Skalarprodukt zu berechnen, und zwar durch komponentenweises Multiplizieren der Koordinaten der Vektoren und anschließendes Aufsummieren. Diese Berechnungsmethode für das Skalarprodukt wird oft verwendet, um **Winkel** zwischen zwei Vektoren und die **Länge** von Vektoren zu bestimmen.

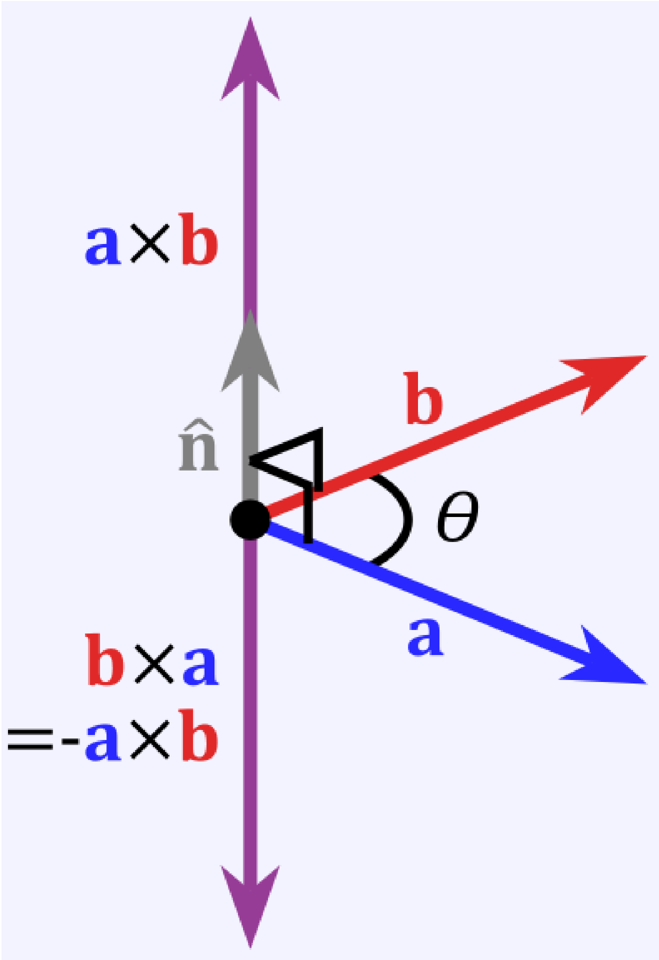
Das Skalarprodukt darf nicht mit der skalaren Multiplikation verwechselt werden! Hierbei wird ein Vektor mit einem Skalar des Vektorraums multipliziert, meistens also einer reellen oder komplexen Zahl.

Wiederholung: Vektorprodukt von Vektoren

Das **Vektorprodukt** (auch **Kreuzprodukt**, vektorielles Produkt oder **äußeres Produkt** genannt) zweier Vektoren **a** und **b** im dreidimensionalen reellen Vektorraum ist ein Vektor, der senkrecht auf der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht und mit ihnen ein Rechtssystem bildet. Die Länge dieses Vektors ist die **Flächengröße** des Parallelogramms mit den Seiten **a** und **b**.

Das Kreuzprodukt tritt in der Physik beispielsweise bei der Lorentzkraft oder dem Drehmoment auf.
Das Kreuzprodukt wird mit einem Kreuz als Multiplikationszeichen geschrieben.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(|\vec{a}| \, \left|\vec{b}\right| \, \sin\theta \right) \, \vec{n} \, .$$



Spatprodukt von Vektoren

Das Spatprodukt ist das Skalarprodukt aus dem Kreuzprodukt zweier Vektoren und einem dritten Vektor. Es ergibt das **Volumen** des durch die drei Vektoren aufgespannten Spats (Parallelepipeds).

Es wird auch **gemischtes Produkt** genannt und ist identisch mit der aus diesen Vektoren gebildeten Determinanten, also:

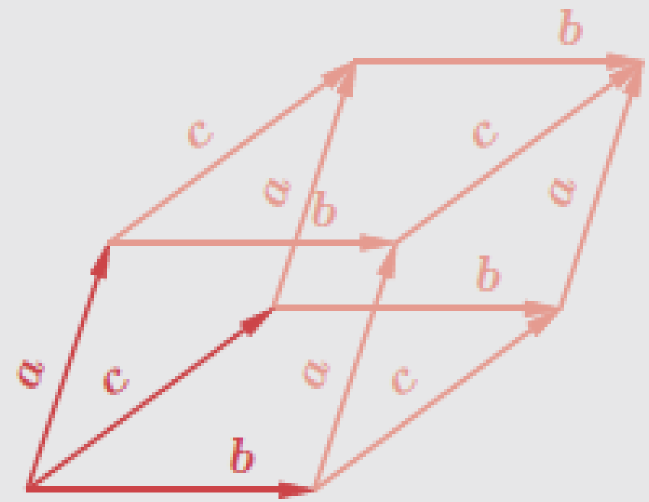
$$V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} = \det \left(\vec{a}\vec{b}\vec{c} \right).$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

In der Linearen Algebra ist die **Determinante** eine spezielle Funktion, die einer quadratischen Matrix oder einem linearen Endomorphismus eine Zahl zuordnet.

Spat oder Parallelepiped

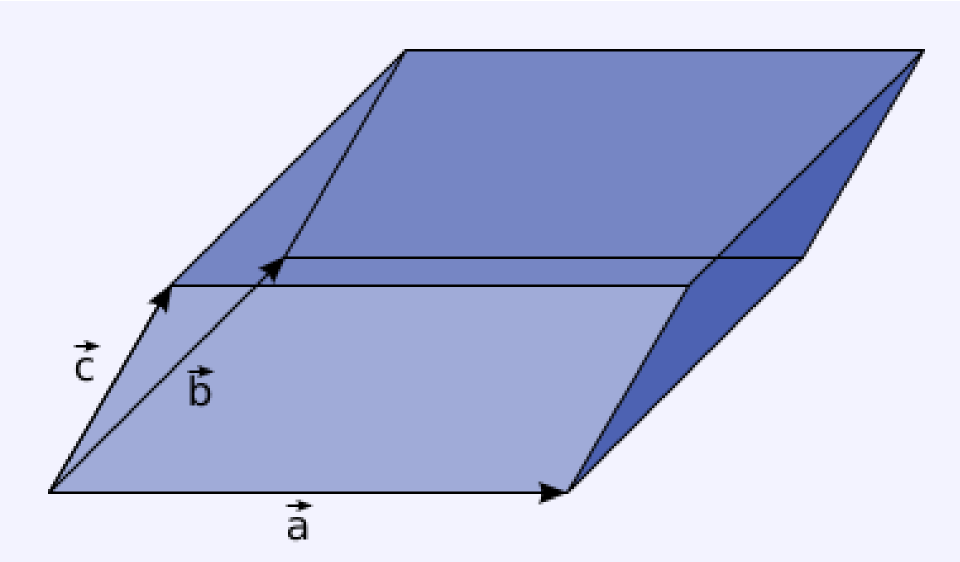
Drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$, die nicht in einer Ebene liegen, spannen einen **Spat** oder ein **Parallelepiped** auf. Jeder Vektor definiert genau vier der insgesamt zwölf Kanten. Dadurch verlaufen jeweils vier Kanten parallel und sind gleich lang. Gegenüberliegende Seiten werden durch deckungsgleiche Parallelogramme begrenzt.



Das Spatprodukt $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ von drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ ist definiert durch

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) .$$

Spatprodukt



$$V = A_g \cdot h$$

$$A_g = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

$$h = |\vec{c}| \cos\alpha = \hat{e}_{(\vec{a}\times\vec{b})} \cdot \vec{c}$$

$$V = A_g \cdot h = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| (\hat{e}_{(\vec{a}\times\vec{b})} \cdot \vec{c}) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Für das Spatprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ gilt:

$$[\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{c}] = a_1(b_2\, c_3 - b_3\, c_2) + a_2(b_3\, c_1 - b_1\, c_3) + a_3(b_1\, c_2 - b_2\, c_1).$$

Aufgaben

Gegeben seien die drei Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie:

a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (3\,\mathbf{c})$

b) $(2\,\mathbf{a}) \times (-\mathbf{b} + 5\,\mathbf{c})$

c) Spatprodukt $[\,\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\,]$

Vorzeichen des Spatprodukts

Das Vorzeichen des Spatproduktes der drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ gibt Auskunft darüber, ob die Vektoren ein Rechtssystem oder ein Linkssystem bilden:

- $[\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\,] > 0 \iff$ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ bilden ein Rechtssystem
- $[\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\,] = 0 \iff$ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ liegen in einer Ebene
- $[\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\,] < 0 \iff$ $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ bilden ein Linkssystem

Skalarprodukt: bei Vertauschung der Vektoren ändert sich das Vorzeichen nicht.
Das Skalarprodukt ist symmetrisch.

Vektorprodukt: bei Vertauschung der Vektoren ändert sich das Vorzeichen.
Das Vektorprodukt ist antikommutativ oder schiefsymmetrisch.

Daraus folgt: $[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{b}\ \boldsymbol{c}\,] = -[\,\boldsymbol{a}\ \boldsymbol{c}\ \boldsymbol{b}\,]$

Zusammenfassung Vektorprodukte

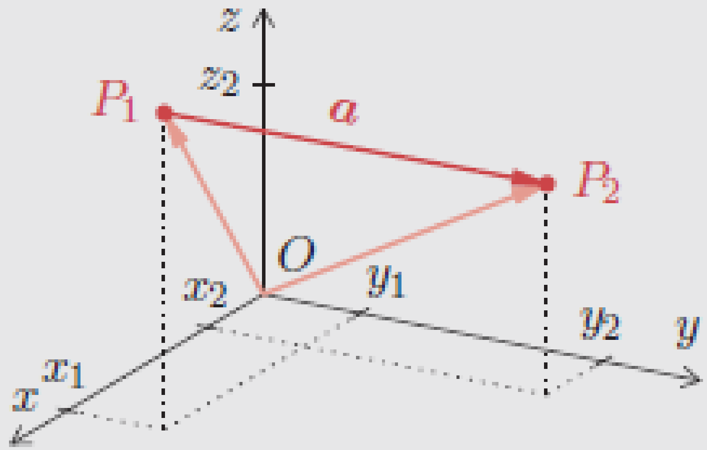
Name	Operanden	Ergebnis
skalare Multiplikation	Vektor · Skalar	Vektor
Skalarprodukt	Vektor · Vektor	Skalar
Vektorprodukt	Vektor x Vektor	Vektor
Spatprodukt	Vektor x Vektor · Vektor	Skalar

Zwei Punkte

Den Vektor $\boldsymbol{a}$ vom Punkt $P_1\,(x_1\,|\,y_1\,|\,z_1)$ zum Punkt $P_2\,(x_2\,|\,y_2\,|\,z_2)$ nennt man den **Verbindungsvektor**. Er hat die Koordinaten

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Ein **Ortsvektor** ist ein Verbindungsvektor vom Ursprung $O\,(0\,|\,0\,|\,0)$ zu einem Punkt.



Abstand zwischen zwei Punkten:
Berechne den Verbindungsvektor zwischen diesen Punkten und nimm den Betrag davon.

Mitte zwischen zwei Punkten:
Berechne den Verbindungsvektor zwischen den Punkten, teile ihn durch zwei und addiere ihn zum ersten Punkt. Ähnliches gilt für beliebige Verhältnisse.

Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Die Vektoren $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ nennt man linear unabhängig, falls die Gleichung

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

nur die triviale Lösung $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ besitzt. Andernfalls heißen die Vektoren linear abhängig.

Zwei Vektoren $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie parallel sind.

Drei Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ und $\boldsymbol{a}_3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Spatprodukt der drei Vektoren null ist:

$$[\,\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3\,] = 0.$$

Parallele und senkrechte Vektoren

Sind zwei Vektoren parallel, so gilt: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$

Berechnung der Länge eines Vektors: $|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$

Stehen zwei Vektoren aufeinander senkrecht (orthogonal), so gilt: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

Damit lässt sich auf einfache Weise überprüfen, ob zwei Vektoren zueinander parallel oder orthogonal sind.

Ist einer der beiden Vektoren ein Einheitsvektor, so ergibt das Skalarprodukt die Länge der Projektion des anderen Vektors auf die vom Einheitsvektor definierte Gerade.

Komplanare Vektoren

Aufgabenstellung:

Die Vektoren ***a*** ,***b*** und ***c*** werden als komplanar bezeichnet, wenn sie auf einer Ebene liegen. Wie kann man feststellen, ob diese drei Vektoren auf der selben Ebene liegen?

Vorgehensweise:

Wenn die drei Vektoren ***a*** ,***b*** und ***c*** auf einer Ebene liegen, dann ist das Spat-Produkt dieser drei Vektoren gleich null (das Volumen des aufgespannten Parallelepipeds ist gleich null).

$$[a, b, c] = 0$$

Aufgabe (Prüfungsaufgabe vom vorigen Jahr)

Stellen Sie fest, ob die drei Punkte P_1, P_2 und P_3 auf einer Geraden liegen:

a) $P_1 = (5; 16; 8)$, $P_2 = (1; 6; 6)$, $P_3 = (-1; 1; 5)$

b) $P_1 = (2; 12; 3)$, $P_2 = (3; 4; 2)$, $P_3 = (-1; 0; 2)$

Hinweis: Die Punkte P_1, P_2 und P_3 liegen genau dann in einer Geraden, wenn die beiden Vektoren $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_1P_3}$ parallel oder antiparallel (kollinear) sind.

Lösung:

a) Wir bestimmen die Vektoren:

$P_1 = (5; 16; 8)$, $P_2 = (1; 6; 6)$, $P_3 = (-1; 1; 5)$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 6-16 \\ 6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -1-5 \\ 1-16 \\ 5-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ -3 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix};$$

Dann wird das Vektorprodukt berechnet:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30-30 \\ 12-12 \\ 60-60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Das Vektorprodukt ist Null, die beiden Vektoren sind parallel, die Punkte liegen auf einer Geraden.

b) Das Vektorprodukt ist nicht Null, die beiden Vektoren sind nicht parallel, die Punkte liegen nicht auf einer Geraden.

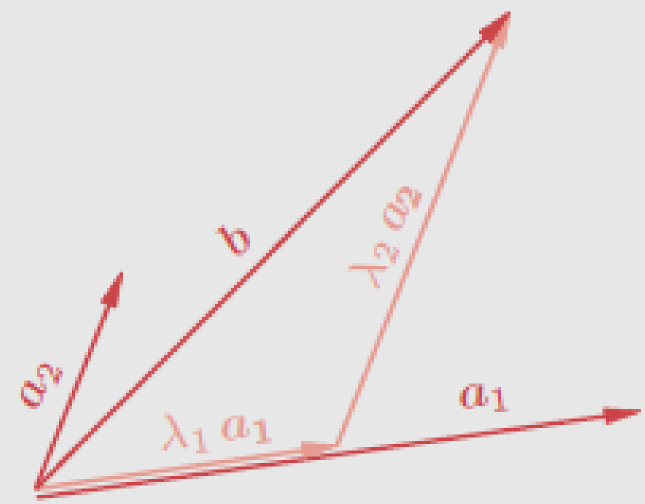
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Komponentenzerlegung in der Ebene

Falls die beiden Vektoren $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ linear unabhängig und die drei Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ und $\boldsymbol{b}$ linear abhängig sind, nennt man

$$\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2$$

die **Komponentenzerlegung** des Vektors $\boldsymbol{b}$ in Richtung der Vektoren $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$.



Komponentenzerlegung im Raum

Falls die drei Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ und $\boldsymbol{a}_3$ linear unabhängig sind, nennt man

$$\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3$$

die Komponentenzerlegung des Vektors $\boldsymbol{b}$ in Richtung der Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ und $\boldsymbol{a}_3$. Für die Koeffizienten λ_1, λ_2 und λ_3 gilt:

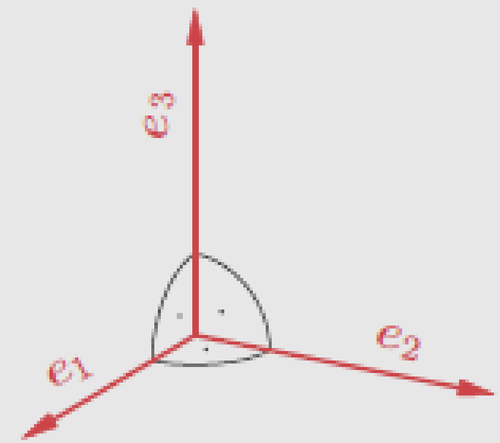
$$\lambda_1 = \frac{[\boldsymbol{b},\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3]}, \quad \lambda_2 = \frac{[\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3]}, \quad \lambda_3 = \frac{[\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{b}]}{[\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3]}.$$

Basisvektoren und Koordinaten

Drei Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{e}_3$, die paarweise senkrecht aufeinander stehen und in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, bezeichnet man als Basisvektoren. Jeder Vektor $\boldsymbol{a}$ lässt sich durch

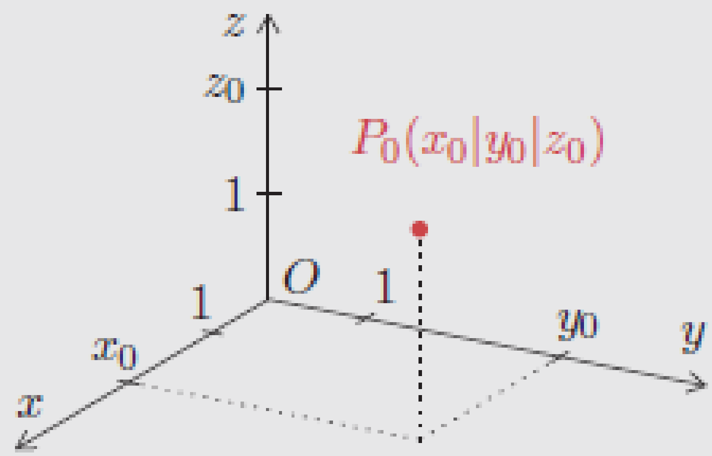
$$\boldsymbol{a} = a_1\, \boldsymbol{e}_1 + a_2\, \boldsymbol{e}_2 + a_3\, \boldsymbol{e}_3$$

darstellen. Dabei nennt man die Skalare a_1, a_2 und a_3 die Koordinaten und die Vektoren $a_1\, \boldsymbol{e}_1$, $a_2\, \boldsymbol{e}_2$ und $a_3\, \boldsymbol{e}_3$ die Komponenten des Vektors $\boldsymbol{a}$.



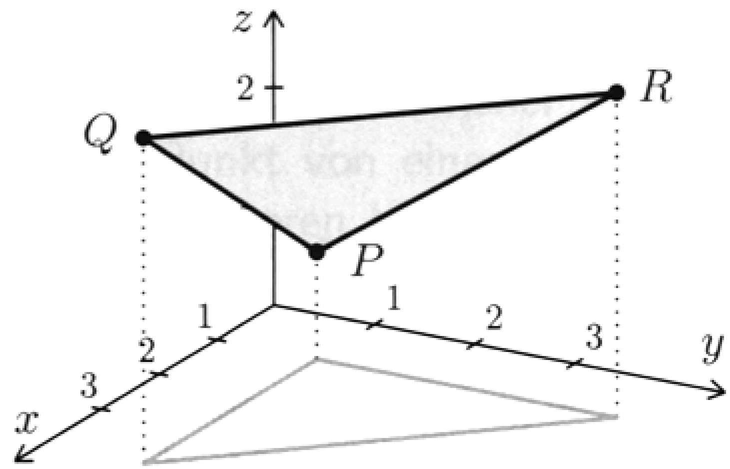
Kartesisches Koordinatensystem im Raum

Ein Achsenkreuz aus drei paarweise senkrechten Geraden, die sich im **Ursprung** O schneiden, nennt man ein **kartesisches Koordinatensystem**. Die Einheitslängen sind auf allen drei Achsen gleich und die Einheitsvektoren in Richtung der Geraden bilden ein Rechtssystem. Ein Punkt $P_0\,(x_0\,|\,y_0\,|\,z_0)$ wird durch seine **Koordinaten** beschrieben.



Flächeninhalt eines Dreiecks

Die drei Punkte $P(1\,|\,1\,|\,1)$, $Q(4\,|\,1\,|\,3)$ und $R(1\,|\,4\,|\,3)$ bilden ein Dreieck. Zur Berechnung des Flächeninhalts verwenden wir den Verbindungsvektor $\boldsymbol{a}$ von P nach Q, den Verbindungsvektor $\boldsymbol{b}$ von P nach R und bestimmen den Vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$:



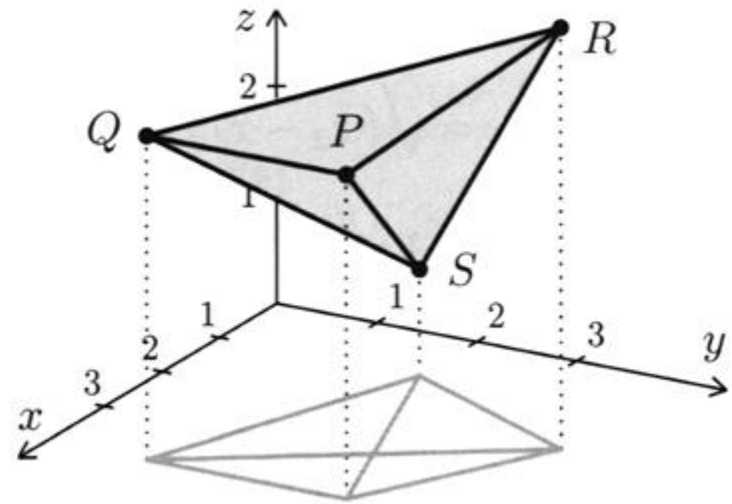
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Den Flächeninhalt des Dreiecks A erhalten wir aus dem Betrag des Vektors $\boldsymbol{c}$:

$$A = \frac{1}{2}\,|\boldsymbol{c}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 9^2} = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Volumen eines Tetraeders

Die vier Punkte $P(4|3|3)$, $Q(4|1|3)$, $R(2|4|4)$ und $S(1|2|1)$ bilden ein Tetraeder. Zur Berechnung des Volumens verwenden wir den Verbindungsvektor $\boldsymbol{a}$ von P nach Q, den Verbindungsvektor $\boldsymbol{b}$ von P nach R und den Verbindungsvektor $\boldsymbol{c}$ von P nach S:



$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Das Volumen des Tetraeders erhalten wir dann aus dem Spatprodukt dieser Vektoren:

$$V = \frac{1}{6}\left|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\right| = \frac{1}{6}|-14| = \frac{7}{3}.$$

Aufgabe (Prüfungsaufgabe vom vorigen Jahr)

Die vier Punkte A, B, C und D mit den Koordinaten:

$P_A = (2; 1; 1)$
$P_B = (11; 2; 2)$
$P_C = (6; 12; 3)$
$P_D = (5; 3; 9)$

bilden einen ungleichseitigen Tetraeder mit der dreieckigen Grundfläche ABC und der Spitze D. Berechnen Sie:

a) das Volumen des Tetraeders,
b) die Oberfläche des Tetraeders.
c) die Koordinaten des Schwerpunktes der dreieckigen Grundfläche ABC.

Hinweis: der Schwerpunkt eines Dreiecks ist der Schnittpunkt aller Seitenhalbierenden eines Dreiecks, also der Strecken, die eine Ecke eines Dreiecks mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite verbindet.

Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München 2010

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences
HDU

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf