HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences



Mathematik 1 Infotronik (3)

Gerald Kupris

17.10.2012

Achtung: keine Vorlesungen am Donnerstag, 18.10. !

VORLESUNGSPLAN ANGEWANDTE INFORMATIK / INFOTRONIK
Wintersemester 2012/13

Block 1: 08:00 - 09:30
Block 2: 09:45 - 11:15
Block 3: 12:00 - 13:30

1. Semester Bachelor AI (Stand: 18.09.2012)

Block 4: 14:00 - 15:30
Block 5: 15:45 - 17:15
Block 6: 17:30 - 19:00

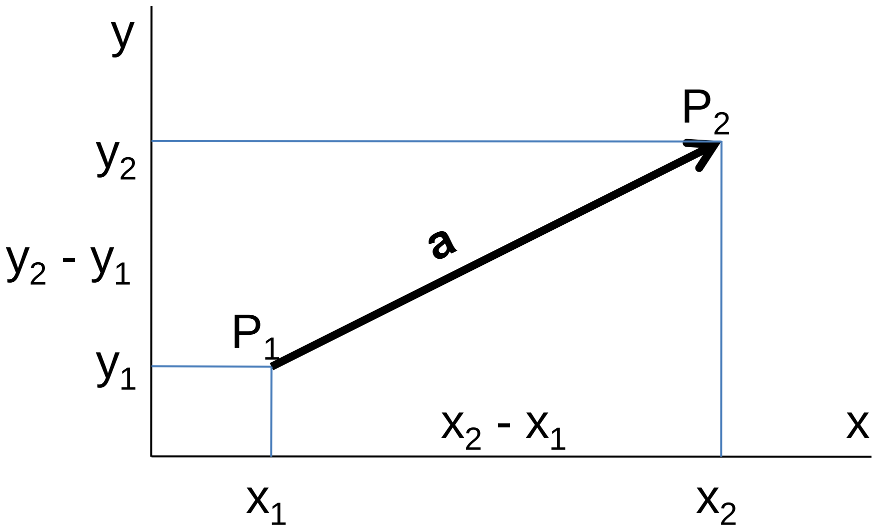
Donnerstag,
18. Oktober

	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
1	Digitaltechnik 1 Bö E 101	Grundlagen der Informatik Jr ITC 1 – E 104	GET Ku E 101	~~Mathematik 1~~ ~~Ku E 006~~	
2	Physik Ku E 001	Grundlagen der Informatik Jr ITC 1 – E 103	Mathematik 1 Ku E 101	~~Physik~~ ~~Ku E 006~~	
3	GET Bö E 001	Einführung in die Programmierung Jr ITC 1 – E 104			
4	Mathematik 1 LB Böhm E 001	Einführung in die Programmierung Jr ITC 1 – E 103			
5	Mathematik 1 LB Böhm E 001				

Vorlesungsinhalte Vektorrechnung

1. Definition von Vektoren
2. Einfache Rechenregeln
3. Koordinatendarstellung von Vektoren
4. Beträge von Vektoren
5. Rechenregeln in der Koordinatendarstellung
6. Koordinatendarstellung mit Winkelfunktionen
7. Skalarprodukt
8. Vektorprodukt
9. Spatprodukt
10. Rechnen mit Vektoren

Wiederholung: Koordinatendarstellung von Vektoren: 2D



Vektor **a** verbindet die Punkte P_1 und P_2.

Um von zu P_1 zu P_2 gelangen, muss man $x_2 - x_1$ Einheiten nach rechts und $y_2 - y_1$ Einheiten nach oben.

Somit kann man die Koordinaten des Vektors a darstellen als:

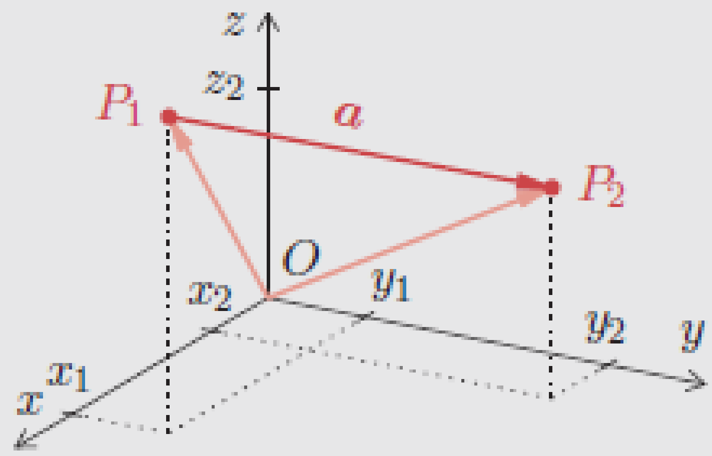
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Wiederholung: Ortsvektor und Verbindungsvektor

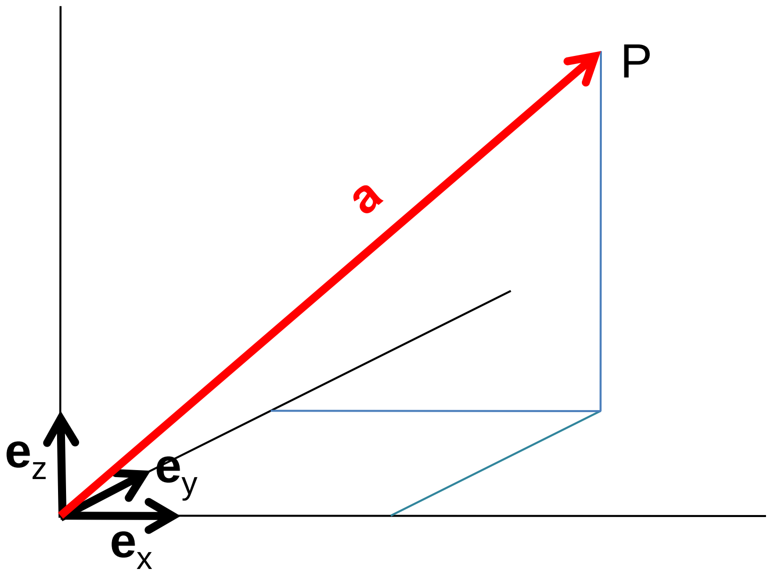
Den Vektor $\boldsymbol{a}$ vom Punkt $P_1\,(x_1\,|\,y_1\,|\,z_1)$ zum Punkt $P_2\,(x_2\,|\,y_2\,|\,z_2)$ nennt man den **Verbindungsvektor**. Er hat die Koordinaten

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Ein **Ortsvektor** ist ein Verbindungsvektor vom Ursprung $O\,(0\,|\,0\,|\,0)$ zu einem Punkt.



Wiederholung: Koordinatendarstellung in 3D



$$\vec{a} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

$$\vec{b} = b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y + b_3\vec{e}_z$$

$$\mathbf{i} = e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Wiederholung: Betrag eines Vektors

in 2D:

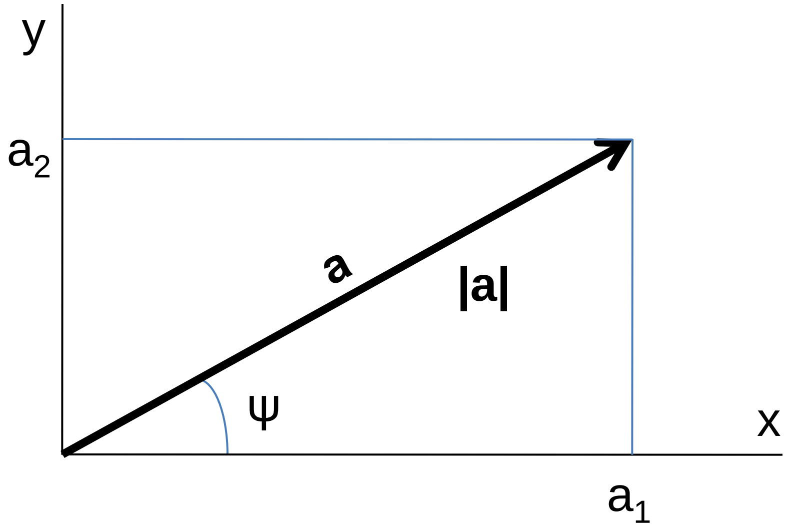
$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}.$$

in 3D:

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

Das kann geometrisch nachvollzogen werden!

Wiederholung: Koordinatendarstellung mit Winkelfunktionen



$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a| \cdot \cos\psi \\ |a| \cdot \sin\psi \end{pmatrix}$$

Das ist gültig im ersten Quadranten! Bei Berechnungen in den anderen Quadranten müssen die Formeln angepasst werden.

Diese Darstellung wird auch polare Darstellung genannt. Sie ist in einigen Fällen praktischer als die Darstellung mit kartesischen Koordinaten (z.B. bei der Kräfte-bilanz oder der Rechnung mit komplexen Zahlen). Der Vorteil ist, dass die Komponenten Betrag und Richtung getrennt betrachtet werden können.

Wiederholung: Umrechnung

aus Polarkoordinaten
in kartesische Koordinaten

$$x = r \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

aus kartesischen Koordinaten
in Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ +\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Wiederholung: Addition und Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z \qquad \vec{b} = b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y + b_3\vec{e}_z$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_x + (a_2 + b_2)\vec{e}_y + (a_3 + b_3)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{e}_x + (a_2 - b_2)\vec{e}_y + (a_3 - b_3)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Das kann geometrisch nachvollzogen werden!

Wiederholung: Skalare Multiplikation von Vektoren

Bei der skalaren Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl wird jede Komponente mit dieser Zahl multipliziert.

$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Um einen Vektor zu **normieren**, wird er mit dem Kehrwert seines Betrages skalar multipliziert. Somit ist der Betrag eines normierten Vektors immer gleich Eins.

Skalarprodukt von Vektoren

Das Skalarprodukt (auch **inneres Produkt** oder Punktprodukt) ist eine mathematische Verknüpfung. Das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnet sich nach der Formel:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|\,|\vec{y}|\,\cos\measuredangle(\vec{x},\vec{y}) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + \ldots + x_n\,y_n$$

Wie bei der normalen Multiplikation kann das Multiplikationszeichen auch weggelassen werden:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}\vec{y}$$

Es gibt eine einfache Methode das Skalarprodukt zu berechnen, und zwar durch komponentenweises Multiplizieren der Koordinaten der Vektoren und anschließendes Aufsummieren. Diese Berechnungsmethode für das Skalarprodukt wird oft verwendet, um **Winkel** zwischen zwei Vektoren und die **Länge** von Vektoren zu bestimmen.

Das Skalarprodukt darf nicht mit der skalaren Multiplikation verwechselt werden! Hierbei wird ein Vektor mit einem Skalar des Vektorraums multipliziert, meistens also einer reellen oder komplexen Zahl.

Skalarprodukt von Vektoren

Wenn gilt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und: $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

Dann: $\vec{x} \cdot \vec{y} := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$

Beispiel: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-7) + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 = 36$$

Eigenschaften des Skalarprodukts

Skalarprodukt und Winkel

Wenn man das Skalarprodukt und die Längen der beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ kennt, dann kann man daraus den Winkel zwischen den beiden Vektoren berechnen:

$$\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \arccos\left(\frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|}\right).$$

Vorzeichen des Skalarproduktes

Das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ ist genau dann negativ, wenn der Winkel zwischen den beiden Vektoren größer als $90°$ ist.

Bestimmung des Winkels zwischen zwei Vektoren

Die Berechnungsmethode für das Skalarprodukt wird oft verwendet, um **Winkel** zwischen zwei Vektoren und die **Länge** von Vektoren zu bestimmen.

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cos \theta$$

$$\theta = \arccos \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|}$$

Das Skalarprodukt ist symmetrisch, bei Vertauschung der Vektoren ändert sich das Vorzeichen nicht.

Eigenschaften des Skalarprodukts

Skalarprodukt null

Wenn das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ null ergibt, dann

- stehen die beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ senkrecht aufeinander oder
- einer der beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ oder $\boldsymbol{b}$ ist der Nullvektor.

Skalarprodukt und Länge

Zwischen dem Skalarprodukt $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$ und der Länge des Vektors $\boldsymbol{a}$ besteht die Beziehung

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}}.$$

Eigenschaften des Skalarprodukts

Für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ und Skalare λ gilt:

- $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$
- $(\lambda \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$
- $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$

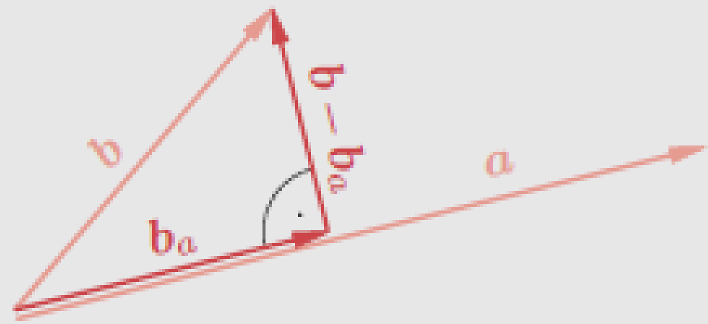
Ist einer der beiden Vektoren ein Einheitsvektor, so ergibt das Skalarprodukt die Länge der Projektion des anderen Vektors auf die vom Einheitsvektor definierte Gerade.

Senkrechte Projektion

Die senkrechte **Projektion** des Vektors $\boldsymbol{b}$ in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ ist definiert durch

$$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{a}} = |\boldsymbol{b}| \cos \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2} \boldsymbol{a}.$$

Diese Projektion ist ein Vektor in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ mit der Länge $|\boldsymbol{b}| \cos \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.



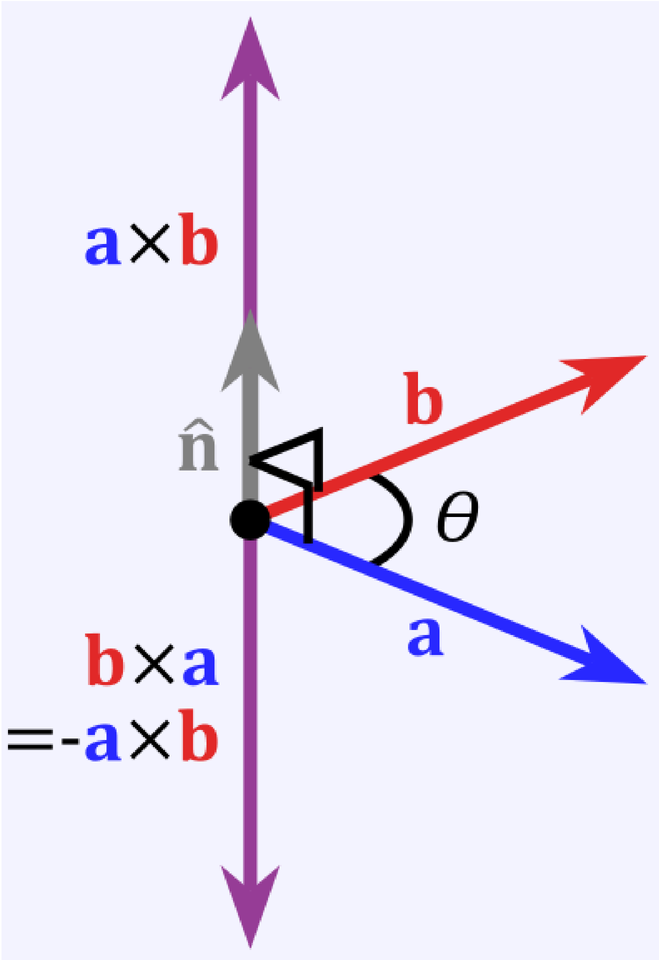
Ist einer der beiden Vektoren ein Einheitsvektor, so ergibt das Skalarprodukt die Länge der Projektion des anderen Vektors auf die vom Einheitsvektor definierte Gerade.

Vektorprodukt von Vektoren

Das **Vektorprodukt** (auch **Kreuzprodukt**, vektorielles Produkt oder **äußeres Produkt** genannt) zweier Vektoren **a** und **b** im dreidimensionalen reellen Vektorraum ist ein Vektor, der senkrecht auf der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht und mit ihnen ein Rechtssystem bildet. Die Länge dieses Vektors ist die **Flächengröße** des Parallelogramms mit den Seiten **a** und **b**.

Das Kreuzprodukt tritt in der Physik beispielsweise bei der Lorentzkraft oder dem Drehmoment auf.
Das Kreuzprodukt wird mit einem Kreuz als Multiplikationszeichen geschrieben.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(|\vec{a}|\ \left|\vec{b}\right|\ \sin\theta\right)\ \vec{n}\,.$$



Vektorprodukt von Vektoren

Rechenregel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 - 3 \cdot 8 \\ 3 \cdot (-7) - 1 \cdot 9 \\ 1 \cdot 8 - 2 \cdot (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -30 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Vorzeichen des Vektorprodukts

Die Richtung des resultierenden Vektors (das Vorzeichen des Vektorprodukts) wird mit der „Rechte Hand Regel“ bestimmt: dreht man mit den Fingern der rechten Hand auf dem kürzesten Weg von a nach b, dann zeigt der Daumen in Richtung des resultierenden Vektors.

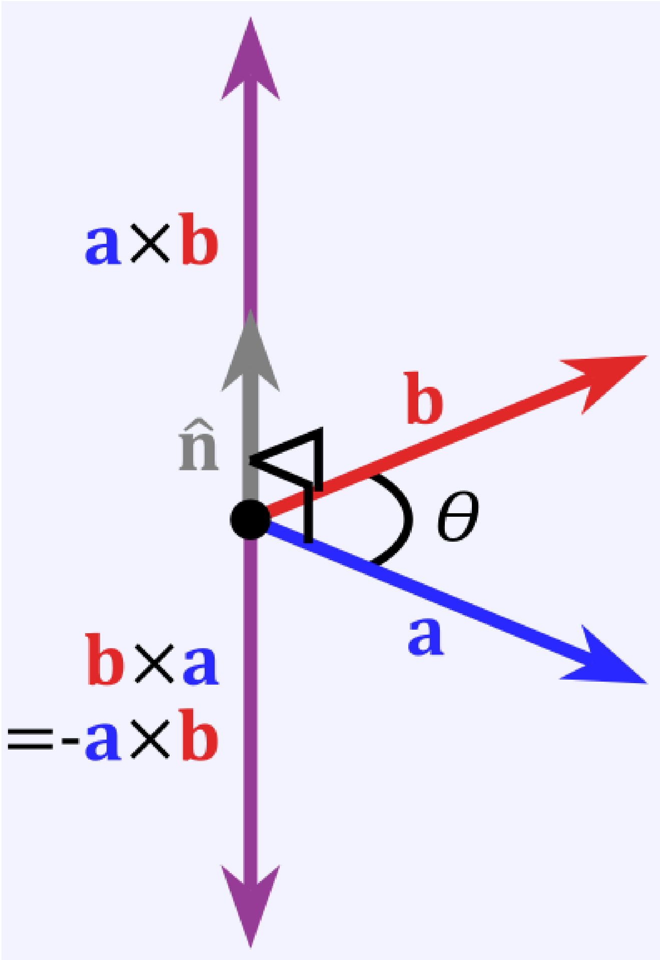
Das Vektorprodukt ist antikommutativ oder schiefsymmetrisch, bei Vertauschung der Vektoren ändert sich das Vorzeichen.

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$

$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b})$

$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$

$\boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{b}$



Flächengröße des aufgespannten Parallelogramms

Die **Flächengröße** des aufgespannten Parallelogramms mit den Seiten **a** und **b** entspricht dem Betrag des Vektorprodukts.

$$\mathbf{F} = |\, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \,|$$

$$\mathbf{F} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\theta$$

Parallele Vektoren:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$$

Kollineare (antiparallele) Vektoren:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = 0$$

Eigenschaften des Vektorprodukts

Vektorprodukt und Fläche

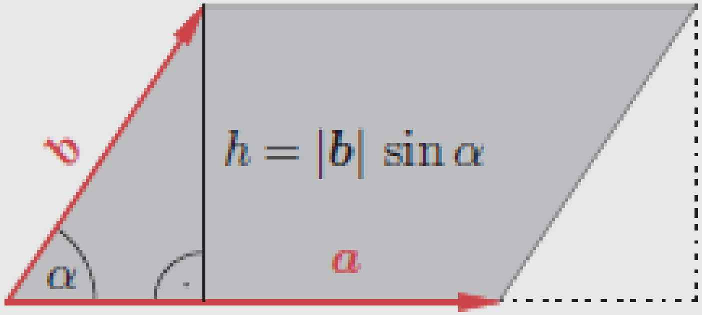
Das von den beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ aufgespannte

- Parallelogramm hat den Flächeninhalt

$$A_{\square} = |\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}),$$

- Dreieck hat den Flächeninhalt

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = \frac{1}{2}|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}).$$



Vektorprodukt ergibt Nullvektor

Wenn das Vektorprodukt der beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ den Nullvektor ergibt, dann

- sind die beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ parallel oder antiparallel oder
- einer der beiden Vektoren $\boldsymbol{a}$ oder $\boldsymbol{b}$ ist der Nullvektor.

Eigenschaften des Vektorprodukts

Für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ und Skalare λ gilt:

- $\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = -(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$
- $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c}$
- $(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b}) = \lambda (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$

Für beliebige Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ gilt

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\, \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\, \boldsymbol{c}.$$

Beweisführung

Aufgabenstellung:

Beweisen Sie anhand der Rechenregeln, dass der resultierende Vektor $\boldsymbol{c}$ einer Vektormultiplikation $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ senkrecht auf der Fläche steht, die von den beiden Ausgangsvektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gebildet wird.

Vorgehensweise:

Der Vektor $\boldsymbol{c}$ steht dann senkrecht auf der Fläche, die von den Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ gebildet wird, wenn er sowohl senkrecht zu $\boldsymbol{a}$ ist als auch senkrecht zu $\boldsymbol{b}$ ist.

Zwei Vektoren sind dann senkrecht zueinander, wenn deren Skalarprodukt gleich null ist.

Aufgaben

1. Beweisen Sie, dass die drei Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ und $\boldsymbol{e}_z$ jeweils senkrecht aufeinander stehen.

2. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

3. Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Eckpunkten (1; 2; -2), (2; 3; -1) und (4; 0; 1).

Spatprodukt von Vektoren

Das Spatprodukt ist das Skalarprodukt aus dem Kreuzprodukt zweier Vektoren und einem dritten Vektor. Es ergibt das **Volumen** des durch die drei Vektoren aufgespannten Spats (Parallelepipeds).

Es wird auch **gemischtes Produkt** genannt und ist identisch mit der aus diesen Vektoren gebildeten Determinanten, also:

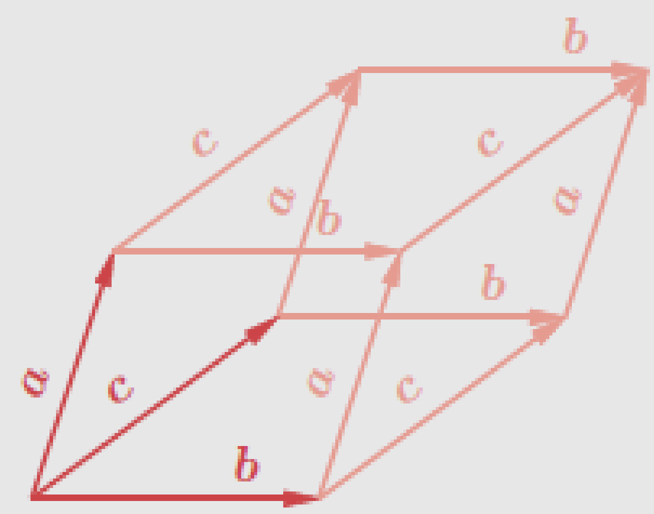
$$V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} = \det \left(\vec{a}\vec{b}\vec{c} \right).$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

In der Linearen Algebra ist die **Determinante** eine spezielle Funktion, die einer quadratischen Matrix oder einem linearen Endomorphismus eine Zahl zuordnet.

Spat oder Parallelepiped

Drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$, die nicht in einer Ebene liegen, spannen einen **Spat** oder ein **Parallelepiped** auf. Jeder Vektor definiert genau vier der insgesamt zwölf Kanten. Dadurch verlaufen jeweils vier Kanten parallel und sind gleich lang. Gegenüberliegende Seiten werden durch deckungsgleiche Parallelogramme begrenzt.



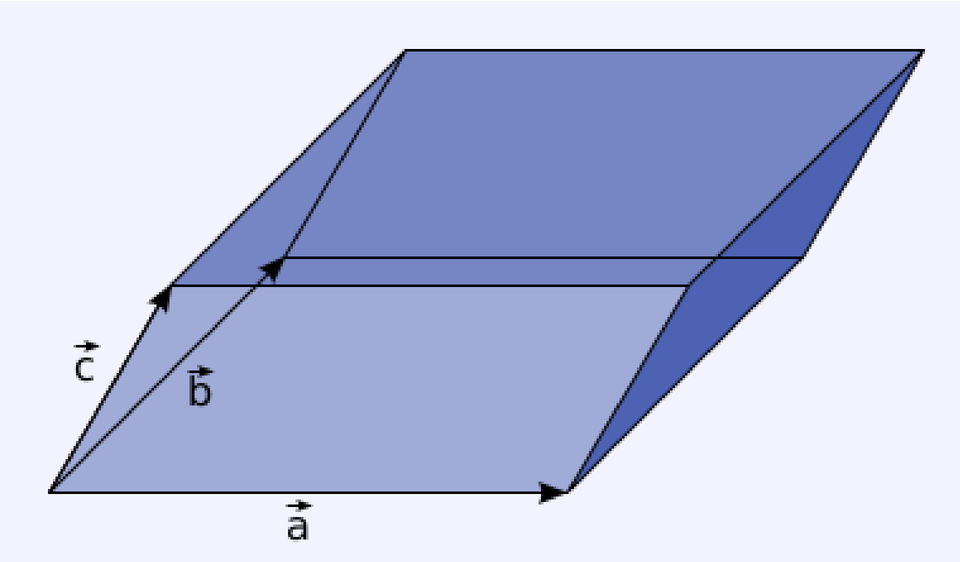
Das Spatprodukt $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$ von drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ ist definiert durch

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) .$$

Bezeichnung Spatprodukt

Die Bezeichnung Spatprodukt geht zurück auf die Bezeichnung "Spat" für ein Parallelflach (= Parallelepiped = Parallelotop). In der Geologie deutet die Nachsilbe **-spat** auf eine gute Spaltbarkeit des betreffenden Minerals hin. Beispiele: Feldspat, Kalkspat. Diese Spate weisen klare Bruchlinien auf. Insbesondere die Kristalle des Kalkspates (Calcit) ähneln dem geometrischen Ideal eines Parallelflachs sehr stark. Über die Volumenberechnung eines solchen Parallelflachs bzw. Spates ergibt sich damit die Bezeichnung Spatprodukt.

Spatprodukt



$$V = A_g \cdot h$$

$$A_g = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$

$$h = |\vec{c}| \cos\alpha = \hat{e}_{(\vec{a}\times\vec{b})} \cdot \vec{c}$$

$$V = A_g \cdot h = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \left(\hat{e}_{(\vec{a}\times\vec{b})} \cdot \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Für das Spatprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ gilt:

$$[\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{c}] = a_1(b_2\, c_3 - b_3\, c_2) + a_2(b_3\, c_1 - b_1\, c_3) + a_3(b_1\, c_2 - b_2\, c_1).$$

Aufgaben

Gegeben seien die drei Vektoren $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie:

a) $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (3\,\mathbf{c})$

b) $(2\,\mathbf{a}) \times (-\,\mathbf{b} + 5\,\mathbf{c})$

c) Spatprodukt $[\,\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c}\,]$

Vorzeichen des Spatprodukts

Das Vorzeichen des Spatproduktes der drei Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ gibt Auskunft darüber, ob die Vektoren ein Rechtssystem oder ein Linkssystem bilden:

- $[\,\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c}\,] > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ bilden ein Rechtssystem
- $[\,\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c}\,] = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ liegen in einer Ebene
- $[\,\boldsymbol{a},\,\boldsymbol{b},\,\boldsymbol{c}\,] < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ bilden ein Linkssystem

Skalarprodukt: bei Vertauschung der Vektoren ändert sich das Vorzeichen nicht.
Das Skalarprodukt ist symmetrisch.

Vektorprodukt: bei Vertauschung der Vektoren ändert sich das Vorzeichen.
Das Vektorprodukt ist antikommutativ oder schiefsymmetrisch.

Daraus folgt: $[\,\boldsymbol{a}\;\boldsymbol{b}\;\boldsymbol{c}\,] = -\,[\,\boldsymbol{a}\;\boldsymbol{c}\;\boldsymbol{b}\,]$

Zusammenfassung Vektorprodukte

Name	**Operanden**	**Ergebnis**
skalare Multiplikation	Vektor x Skalar	Vektor
Skalarprodukt	Vektor x Vektor	Skalar
Vektorprodukt	Vektor x Vektor	Vektor
Spatprodukt	Vektor x Vektor x Vektor	Skalar

Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München 2010

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf