Mathematik für Infotronik
Aufgabenblatt 4 (14.11.2010)

1. Untersuchen Sie, ob folgende Funktionen injektiv, surjektiv, bijektiv sind.
   (Achtung: die angegebenen Definitions- und Zielmengen D bzw. B sind nicht immer die größtmöglichen!)
   a) $f(x) = x^2$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}_{\leq 0}$ und $\mathbb{B} = \mathbb{R}$
   b) $f(x) = |x| + 1$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{B} = \mathbb{R}_{\geq 0}$
   c) $f(x) = 1 - x$ mit $\mathbb{D} = [-2;2]$ und $\mathbb{B} = [-1,3]$
   d) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{B} = \mathbb{R}_{\geq 0}$
   e) $f(x) = \sqrt{x+1}$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $\mathbb{B} = \mathbb{R}$
   f) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ mit $\mathbb{D} = \mathbb{R}$ und $\mathbb{B} = \mathbb{R}$

2. Bestimmen sie für die untenstehenden reellen Funktionen den größtmöglichen Definitionsbereich und geben Sie den Wertebereich an:
   a) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}}$
   b) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$
   c) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
   d) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$
   e) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$

3. Berechnen Sie für ein Rechteck mit dem Flächeninhalt 12 die Länge der Diagonalen d abhängig von der Seitenlänge a. Schreiben Sie die entstehende Funktion d(a) in der vollständigen Form auf und bestimmen Sie die größtmöglich Definitions- und Wertemenge.

4. Ein kugelförmiger Luftballon mit dem Radius r besitzt das Volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi * r^3$.
   Um den Radius des Ballons um 1 zu erhöhen, benötigt man ein zusätzliches Volumen Z(r). Bestimmen Sie abhängig von r die analytische Form dieser Funktion Z(r) und bestimmen Sie den die größtmögliche Definitions- und die Wertemenge.

5. Berechnen Sie den natürlichen Logarithmus der komplexen Zahlen:
   a) $z = -8 + 6j$
   b) $z = -5$
   Bestimmen Sie jeweils den Hauptwert und die Nebenwerte des Logarithmus.

Viel Erfolg bei der Lösung der Aufgaben!

Lösungen:

1a) injektiv, nicht surjektiv, also nicht bijektiv

1b) weder injektiv noch surjektiv, also nicht bijektiv

1c) sowohl injektiv also auch surjektiv, also auch bijektiv

1d) weder injektiv noch surjektiv, also nicht bijektiv

1e) injektiv, nicht surjektiv, also nicht bijekitv

1f) injektiv, nicht surjektiv, also nicht bijektiv

2a) $\mathbb{D} = [-2;\infty)\backslash\{2\}$; $\mathbb{W} = [0;\infty)\backslash\{2\}$

2b) $\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$; $\mathbb{W} = \mathbb{R}\backslash(-1;0)$

2c) $\mathbb{D} = R$; $\mathbb{W} = [-0{,}5;0{,}5]$

2d) $\mathbb{D} = R_{<0}$: $\mathbb{W} = \mathbb{R}_{>0}$

2e) $\mathbb{D} = R_{\geq 0}\backslash\{1\}$; $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

3) $d(a)=\sqrt{a^2+\frac{144}{a^2}}$; $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R}_{\geq 0}$; $\mathbb{W}_{max} = [4{,}8989;\infty)$

4) $Z(r) = \frac{4}{3}\pi(3r^2+3r+1)$; $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R}_{\geq 0}$; $\mathbb{W}_{max} = [\frac{4}{3} * \pi;\infty)$

5a) $\ln z = 2{,}3 + j\cdot(2{,}5 + k\cdot 2\pi)$

$\mathrm{Ln}\, z = 2{,}3 + 2{,}5\, j$

5b) $\ln z = 1{,}609 + j\cdot(\pi + k\cdot 2\pi)$

$\mathrm{Ln}\, z = 1{,}609 + j\cdot 2\pi$