HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences



# Mathematik 1 Infotronik (18)

**Gerald Kupris**

**20.12.2012**

# Weiterer Plan für dieses Semester

16. (13.12.2012): Lineare Abbildung, 2D Abbildungen, 2D Grafik

17. (19.12.2012): Projektion, Verschiebung, homogene Koordinaten

18. (20.12.2012): Drehung um einen beliebigen Punkt, Scherung

**Feiertage**

19. (09.01.2013): Definition von Eigenvektoren und Eigenwerten

20. (10.01.2013): Berechnung von Eigenvektoren und Eigenwerten

21. (16.01.2013): Eigenschaften von Eigenvektoren und Eigenwerten

22. (17.01.2013): Anwendung von Eigenvektoren und Eigenwerten

23. (23.01.2013): 3D Grafik

24. (24.01.2013): Wiederholung, Prüfungsvorbereitung

# Wiederholung: Parallelverschiebung

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + a_x \\ y_1 + a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + a_x \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot y_1 + a_y \end{pmatrix}$$

zwei Zeilen reichen nicht zur Darstellung in Vektor- bzw. Matrix-Schreibweise.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + a_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot y_1 + a_y \cdot 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

künstliche Erweiterung der Vektoren um eine Zeile, es gibt aber nach wie von nur die beiden Komponenten $x_1$ und $y_1$.

# Homogene Koordinaten in 2D

Rotation, Skalierung und Scherung eines zweidimensionalen Objektes lassen sich je durch eine 2 x 2 Matrix beschreiben, eine Translation des Objektes dagegen durch einen 2 x 1 Vektor. Hinderlich ist dabei, dass die drei erstgenannten Operationen eine Matrizen-multiplikation erfordern, die **Translation** hingegen eine **Vektoraddition**.
Um eine Translation ebenfalls als Matrixoperation berechnen zu können, wird der Raum um eine weitere Dimension erweitert. Eine **Translation** im dreidimensionalen Raum lässt sich nun durch eine **Matrizenmultiplikation mit einer 3 x 3 Matrix** beschreiben.
Die Transformation von kartesischen Koordinaten zu homogenen Koordinaten erfolgt durch:

$$(x, y)^T \rightarrow (x, y, 1)^T$$

Die Abbildung eines Punktes $\boldsymbol{P}_{x,y,z}$ von einem Koordinatensystem in ein anderes geschieht durch die Multiplikation mit der homogenen Matrix :

$$(x', y', w')^T = \underline{M} \cdot (x, y, w)^T$$

Aufgrund der Assoziativität von Matrizenmultiplikationen können mehrere aufeinander-folgende Multiplikationen zu einer einzigen Gesamtmatrix zusammengefasst werden.

# Warum homogene Koordinaten?

Eine Abbildung ***f*** heißt linear, falls gelten:

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \mid \vec{x}, \vec{y} \in \Re^n$$

$$f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \Re^n, \lambda \in \Re$$

2D-Verschiebung in kartesischen Koordinaten (2x2)

**ist keine lineare Abbildung!**

2D-Verschiebung in homogenen Koordinaten (3x3)

**ist eine lineare Abbildung!**

Jede Matrix stellt eine lineare Abbildung dar; jede lineare Abbildung ist durch eine Matrix repräsentierbar. Damit kann jede lineare Abbildung in allgemeinen Vektorräumen durch die Matrixalgebra beschrieben werden.

# Parallelverschiebung: Reverse Verschiebung

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -a_x \\ 0 & 1 & -a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

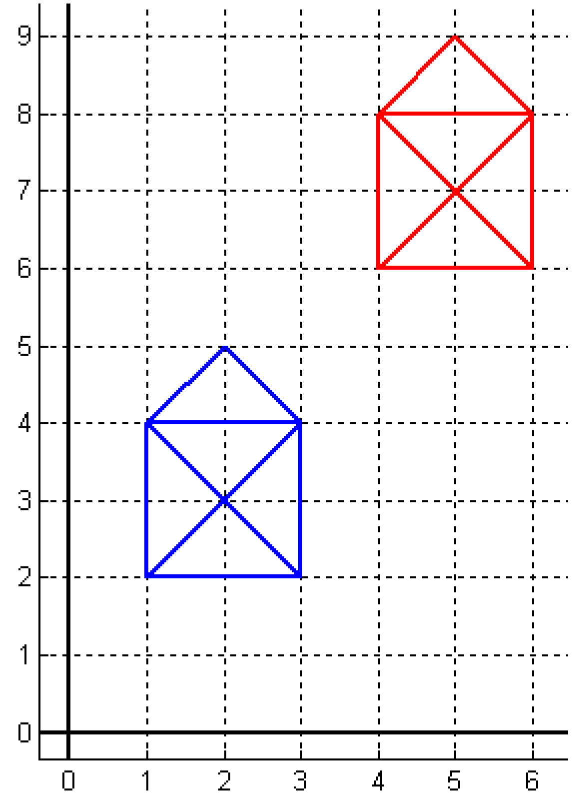
$$T \cdot T^{-1} = E$$

# Verschiebung um $a_x$ und $a_y$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



# Andere 2D-Abbildungen in homogenen Koordinaten

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Skalierung in x- und y-Richtung
$\lambda > 1$: Streckung
$\lambda < 1$: Stauchung

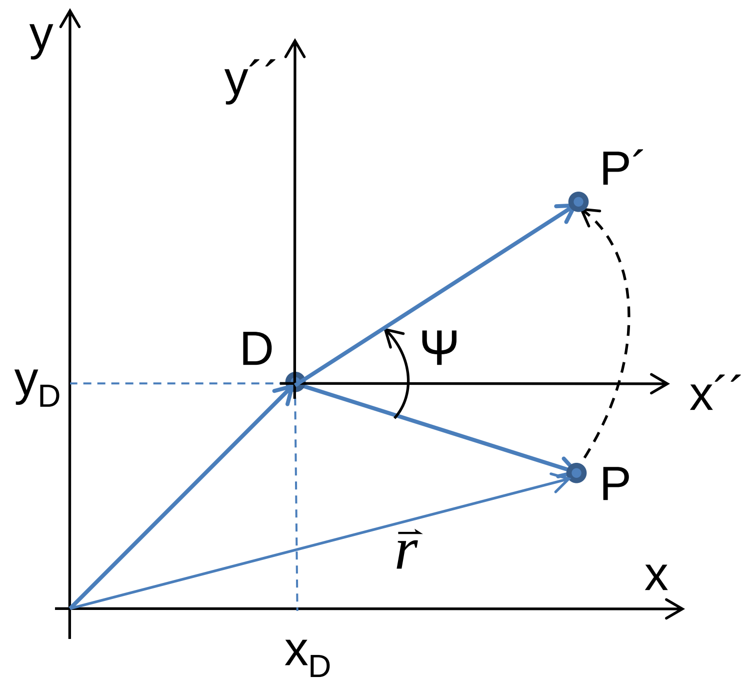
$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der x-Achse

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Drehung um den Winkel $\varphi$
$\varphi > 0$: Drehung nach links
$\varphi < 0$: Drehung nach rechts

# Drehung um einen beliebigen Punkt D




Zerlegung der Operation in drei Schritte:

1. Verschiebung des Koordinatenursprungs in den Punkt D
2. Drehung um den Punkt D
3. Rückverschiebung in den Koordinatenursprung

# Drehung um einen beliebigen Punkt D

1. Verschiebung des Koordinatenursprungs in den Punkt D

$$x_1'' = x_1 - x_D$$
$$y_1'' = y_1 - y_D$$

$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ y_1'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_D \\ 0 & 1 & -y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_D \\ 0 & 1 & -y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'' = T \cdot \vec{r}$$

# Drehung um einen beliebigen Punkt D

2. Drehung um den Punkt D

$$\begin{pmatrix} x_1''' \\ y_1''' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1'' \\ y_1'' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}''' = R \cdot \vec{r}''$$

# Drehung um einen beliebigen Punkt D

3. Rückverschiebung in den Koordinatenursprung

$$x_1' = x_1''' + x_D$$
$$y_1' = y_1''' + y_D$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & +x_D \\ 0 & 1 & +y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1''' \\ y_1''' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & +x_D \\ 0 & 1 & +y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}' = T^{-1} \cdot \vec{r}'''$$

# Zusammenfassung: Drehung um einen beliebigen Punkt D

$$\vec{r}\,' = T^{-1} \cdot \vec{r}\,''' = T^{-1} \cdot R \cdot \vec{r}\,'' = T^{-1} \cdot R \cdot T \cdot \vec{r}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & +x_D \\ 0 & 1 & +y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_D \\ 0 & 1 & -y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & x_D(1-\cos\varphi) + y_D \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & x_D(-\sin\varphi) + y_D(1-\cos\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}\,' = T^{-1} \cdot R \cdot T \cdot \vec{r} = T^{-1} \cdot (R \cdot T) \cdot \vec{r} = \left(T^{-1} \cdot R\right) \cdot T \cdot \vec{r}$$

# Transformation eines komplexen Bildes

Statt Berechnung für jeden einzelnen Punkt erfolgt die Berechnung für eine Matrix, die die Koordinaten aller Punkte enthält, die durch Geraden verbunden sind.

„Das ist das Haus vom Nikolaus.“

Drehung um den Punkt D $x_D$=2, $y_D$=5 um 120°.

$$\begin{pmatrix} x_1' & x_2' & x_3' & x_4' & x_5' \\ y_1' & y_2' & y_3' & y_4' & y_5' \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

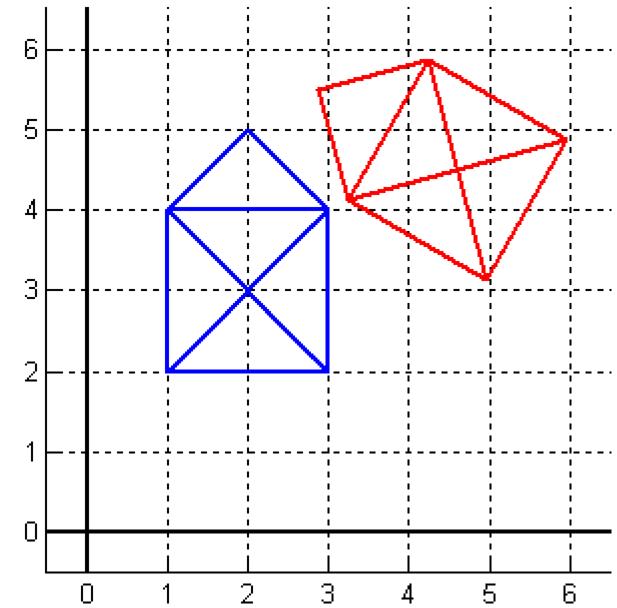
# Rotation um φ um den Punkt $x_D$ und $y_D$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & x_D(1-\cos\varphi) + y_D \sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & x_D(-\sin\varphi) + y_D(1-\cos\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -0{,}866 & 6{,}196 \\ 0{,}866 & 0{,}5 & -0{,}196 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



# Beweis, dass es sich um eine lineare Abbildung handelt

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & x_D(1-\cos\varphi)+y_D\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi & x_D(-\sin\varphi)+y_D(1-\cos\varphi) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine Abbildung ***f*** heißt dann linear, falls gelten:

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}) \mid \vec{x},\vec{y} \in \Re^n$$

$$f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \Re^n, \lambda \in \Re$$

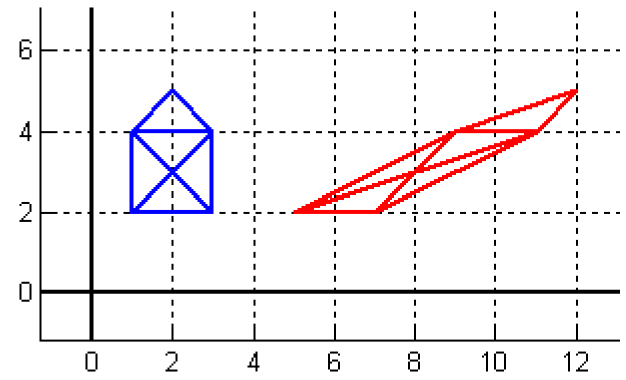
Rechnen Sie nach, ob diese Abbildung eine lineare Abbildung ist.

# Scherung

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



# Scherung

Unter einer Scherung oder auch Transvektion versteht man in der Geometrie der Ebene Abbildungen der Ebene auf sich selbst, bei denen der Flächeninhalt erhalten bleibt.

Bei einer Scherung bleibt eine Gerade der Ebene (die Fixpunktgerade oder Achse der Scherung) fix, das heißt, jeder Punkt dieser Geraden wird auf sich abgebildet. Alle anderen Punkte der Ebene werden parallel zur Achse verschoben, dabei ist die Länge des Verschiebungsvektors eines Punktes proportional zum Abstand dieses Punktes von der Achse. Alle Geraden, die parallel zur Achse sind, werden auf sich abgebildet, sind also Fixgeraden. Strecken auf diesen Geraden werden längentreu abgebildet.

Bei einer Scherung bleibt also der Abstand jedes Punktes zur Achse unverändert. Damit werden Rechtecke und Dreiecke, bei denen eine Seite parallel zur Achse ist, auf Parallelogramme bzw. Dreiecke abgebildet, die (auf diese Seite) eine gleich lange Höhe haben

# Matrixdarstellung der Scherung

Wählt man in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem, bei dem die x-Achse mit der Achse der Scherung zusammenfällt, dann wird diese Scherung durch die lineare Abbildung dargestellt.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + my \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Für algebraische Untersuchungen ist es bequem, die betrachteten affinen Abbildungen als 3x3-Matrizen (erweiterte Abbildungsmatrizen) bezüglich einer festen Basis darzustellen. Das entspricht einer Darstellung der affinen Abbildung in homogenen Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & v_1 \\ m_{21} & m_{22} & v_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Scherung in der Mechanik

In der Mechanik, speziell der Kontinuumsmechanik bezeichnet man als Scherung bestimmte Verformungen eines dreidimensionalen Körpers. Dabei werden Massenelemente des Körpers in eine gemeinsame Richtung parallel zu einer festen Ebene im Körper verschoben und die Länge des Verschiebungsvektors ist proportional zum Abstand des Massenelementes von der festen (Fixpunkt-)Ebene.

Der Begriff deckt sich also (als Abbildung) mit der spezielleren Verallgemeinerung auf drei Dimensionen aus dem vorigen Abschnitt. Wählt man das Koordinaten-system so, dass die unverschobene Ebene die xy-Ebene des kartesischen Koordinatensystems bildet und alle Verschiebungen parallel zur x-Achse erfolgen, dann lässt sich die dreidimensionale Scherung durch die lineare Abbildung beschreiben:

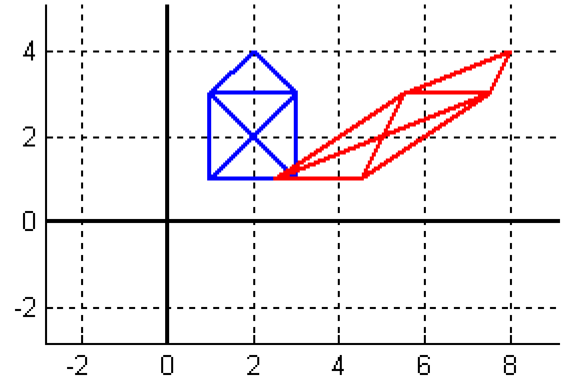
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + \Delta x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

# Scherung

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1{,}5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$

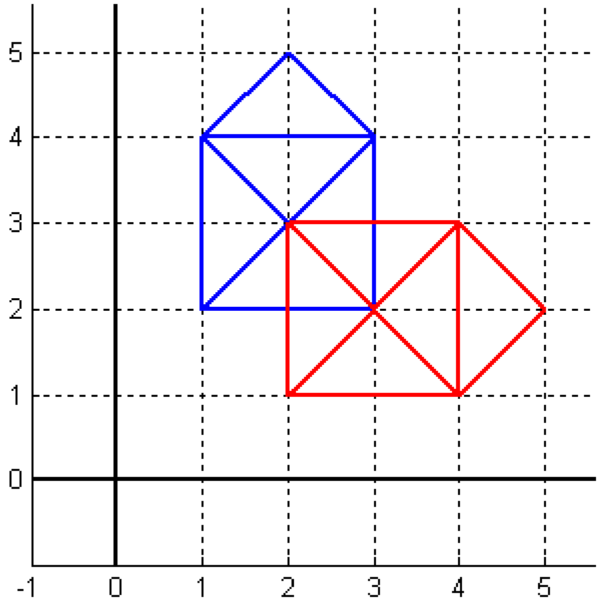


# Permutation

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$

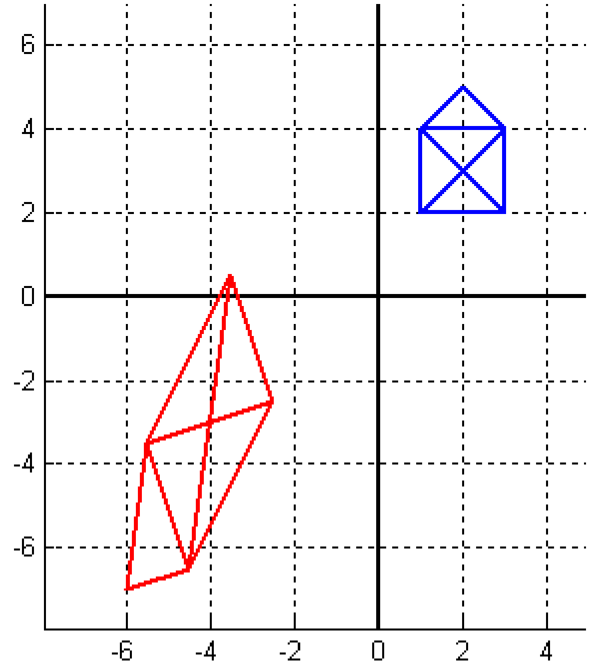


# Willkürliche Kombinantion

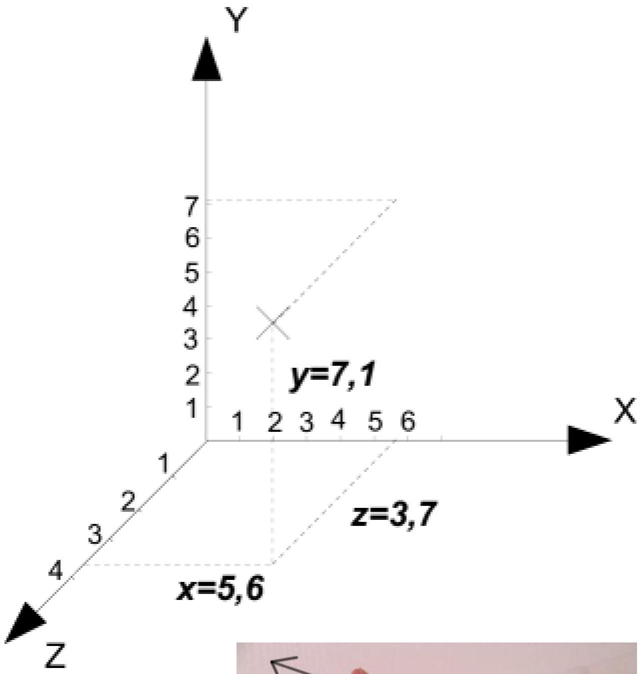
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

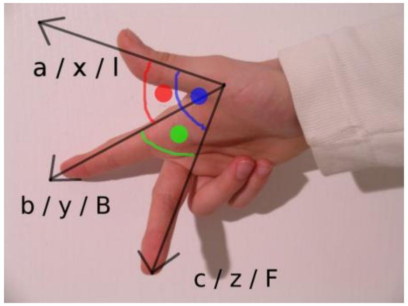
$$A = \begin{pmatrix} -0,5 & 1 \\ -1,5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



# 3D-Koordinaten




Weit verbreitet ist das kartesische Koordinaten-System, z.B. in der rechtshändigen Form.

Bei gespreizten Fingern der rechten Hand zeigt der Zeigefinger in *x*-Richtung, der Mittelfinger in *y*-Richtung, der Daumen in *z*-Richtung.

oder:

**x**, **y** und **z** bilden ein **Rechtssystem**, wenn man die rechte Hand so halten kann, dass Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger in die Richtung von **x**, **y** bzw. **z** zeigen.

# Homogene Koordinaten

In der Geometrie spielen homogene Koordinaten eine fundamentale Rolle in der Projektiven Geometrie. Punkte im n-dimensionalen projektiven Raum lassen sich durch Identifizierung der Punkte auf Geraden durch den Ursprung im (n+1)-dimensionalen Raum konstruieren.

Homogene Koordinaten erlauben die Darstellung von affinen Transformationen durch eine Multiplikation der Koordinaten mit Matrizen in einfacher Weise. Zum Beispiel lässt sich eine Skalierung und anschließende Verschiebung aller Punkte x einer 2D-Ebene:

$$x_{\mathbf{transformed}} = \underline{M}_{2\times 2} \cdot x + b$$

in homogenen Koordinaten

$$x'_{\mathbf{transformed}} = \underline{M'}_{3\times 3} \cdot x'$$

linear ausdrücken (M' enthält hier b), indem das Problem in einen um eine Dimension höheren Raum transformiert wird (wie etwa auch bei der projektiven Geometrie). Inhomogene Gleichungssysteme werden so homogen und können mit anderen Methoden oder effizienteren Algorithmen gelöst werden.

# Beispiel: Parallelverschiebung in 2D

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + a_x \\ y_1 + a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + a_x \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot y_1 + a_y \end{pmatrix}$$

zwei Zeilen reichen nicht zur Darstellung in Vektor- bzw. Matrix-Schreibweise.

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + a_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot y_1 + a_y \cdot 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

künstliche Erweiterung der Vektoren um eine Zeile, es gibt aber nach wie von nur die beiden Komponenten $x_1$ und $y_1$.

# Homogene Koordinaten in 3D

Rotation, Skalierung und Scherung eines dreidimensionalen, räumlichen Objektes lassen sich je durch eine 3 x 3 Matrix beschreiben, eine Translation des Objektes dagegen durch einen 3 x 1 Vektor. Hinderlich ist dabei, dass die drei erstgenannten Operationen eine Matrizenmultiplikation erfordern, die **Translation** hingegen eine **Vektoraddition**.
Um eine Translation ebenfalls als Matrixoperation berechnen zu können, wird der Raum um eine weitere Dimension erweitert. Eine **Translation** im dreidimensionalen Raum lässt sich nun durch eine **Matrizenmultiplikation mit einer 4 x 4 Matrix** beschreiben.
Die Transformation von kartesischen Koordinaten zu homogenen Koordinaten erfolgt durch:

$$(x, y, z)^T \to (x, y, z, 1)^T$$

Die Abbildung eines Punktes $\boldsymbol{P_{x,y,z}}$ von einem Koordinatensystem in ein anderes geschieht durch die Multiplikation mit der homogenen Matrix :

$$(x', y', z', w')^T = \underline{M}_{4\times 4} \cdot (x, y, z, w)^T$$

Aufgrund der Assoziativität von Matrizenmultiplikationen können mehrere aufeinander-folgende Multiplikationen zu einer einzigen Gesamtmatrix zusammengefasst werden.

# Warum homogene Koordinaten?

Eine Abbildung ***f*** heißt linear, falls gelten:

$$f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x})+f(\vec{y}) \mid \vec{x},\vec{y} \in \Re^n$$

$$f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \Re^n, \lambda \in \Re$$

3D-Verschiebung in kartesischen Koordinaten (3x3)

**Ist keine lineare Abbildung!**

3D-Verschiebung in homogenen Koordinaten (4x4)

**Ist eine lineare Abbildung!**

Jede Matrix stellt eine lineare Abbildung dar; jede lineare Abbildung ist durch eine Matrix repräsentierbar. Damit kann jede lineare Abbildung in allgemeinen Vektor-räumen durch die Matrixalgebra beschrieben werden.

# 3D-Translation

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & 0 & t_y \\ 0 & 0 & 1 & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \underline{T} \cdot (x, y, z, 1)^T = (x + t_x, y + t_y, z + t_z, 1)^T$$

Verschiebung um die Koordinaten $t_x$, $t_y$ und $t_z$.

# Vergleich: 2D-Translation

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + a_x \cdot 1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot y_1 + a_y \cdot 1 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot y_1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_x \\ 0 & 1 & a_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

# 3D-Rotation um die x-Achse:

$$\underline{R_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um den Koordinatenursprung!

# Vergleich: 2D-Drehung um den Koordinatenursprung

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Drehung um den Winkel φ
φ > 0: Drehung nach links
φ < 0: Drehung nach rechts

$$\begin{pmatrix} x_1{}' \\ y_1{}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}\,' = R \cdot \vec{r}$$

# 3D-Rotation um die y-Achse

$$\underline{R_y} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um den Koordinatenursprung!

# 3D-Rotation um die z-Achse

$$\underline{R_z} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rotation um den Koordinatenursprung!

Man kann die Matrizen die Vektoren um die x-, y- und z-Achse drehen miteinander geschickt kombinieren um die gewünschte Enddrehung zu erhalten.

# Beliebige Drehung

Es gibt auch die Möglichkeit eine Drehung um eine beliebige Achse direkt als Matrix anzugeben.

Die Matrix, die Quaternionen verwendet um eine Drehung darzustellen sieht wie folgt aus:

Ist ***a*** die Drehachse und ***α*** der Drehwinkel und gilt **|*a*|=*1*** dann erhält man mit:

$$x = a_x \sin\frac{\alpha}{2} \qquad y = a_y \sin\frac{\alpha}{2} \qquad z = a_z \sin\frac{\alpha}{2} \qquad w = \cos\frac{\alpha}{2}$$

die Drehmatrix um die Achse ***a*** und den Winkel ***α*** mit:

$$\begin{pmatrix} 1-2(y^2+z^2) & 2(xy-zw) & 2(xz+yw) & 0 \\ 2(xy+zw) & 1-2(x^2+z^2) & 2(yz-xw) & 0 \\ 2(xz-yw) & 2(yz+xw) & 1-2(x^2+y^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# 3D-Skalierung

$$\underline{S} = \begin{pmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{S} \cdot (x, y, z, 1)^T = (s_x \cdot x, s_y \cdot y, s_z \cdot z, 1)^T$$

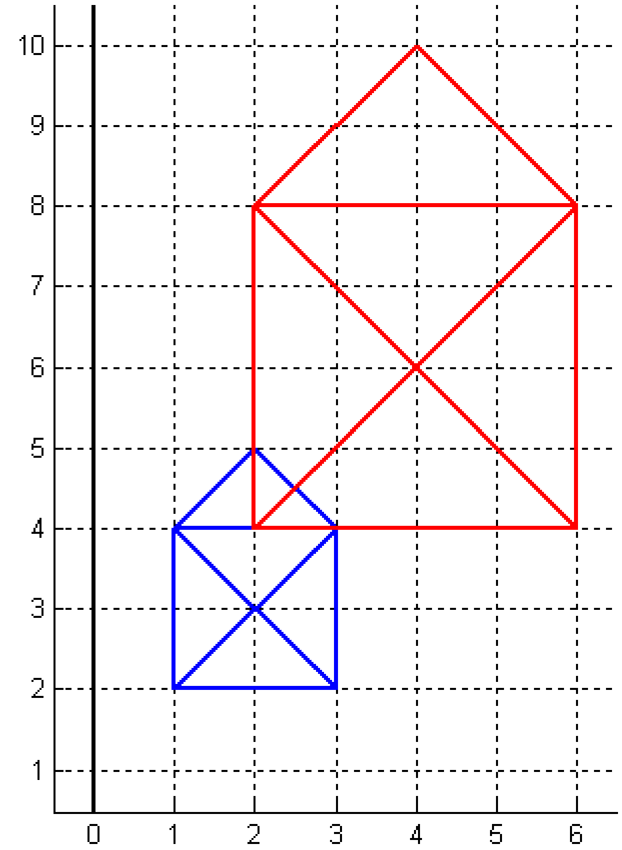
Ähnlich wie Skalierung in 2D.

# Vergleich: 2D-Skalierung

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



# Spiegelung eines 3D-Punktes an einer Ebene

Spiegelung an der xy-Ebene:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Spiegelung an der xz-Ebene oder yz-Ebene funktioniert ähnlich.

Spiegelungen an einer beliebigen Ebene können durch Translationen und Drehungen in die obige Form überführt werden.
:

# Weitere Spiegelungen

Spiegelung am Nullpunkt:

$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto P' = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \\ 1 \end{pmatrix}$$

Spiegelung an der x-Achse:

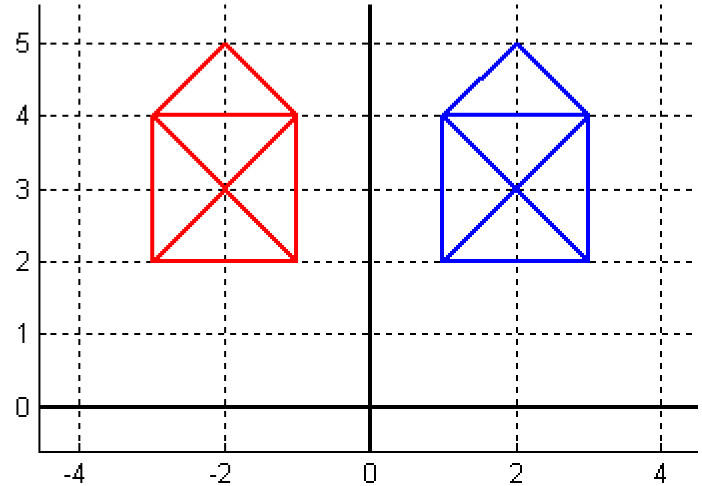
$$P = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto P' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ -z \\ 1 \end{pmatrix}$$

# Vergleich: 2D-Spiegelung an der y-Achse

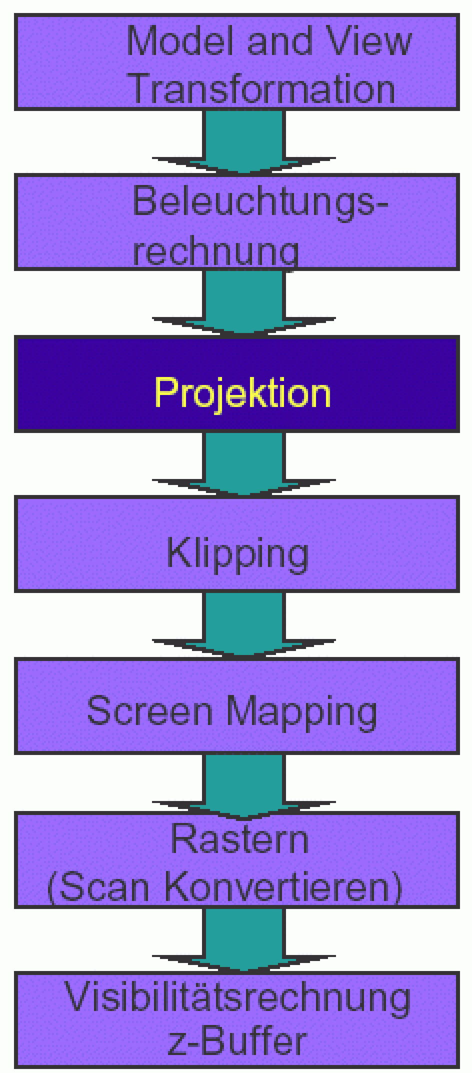
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H1 = A \cdot H$$



# Projektive Abbildungen



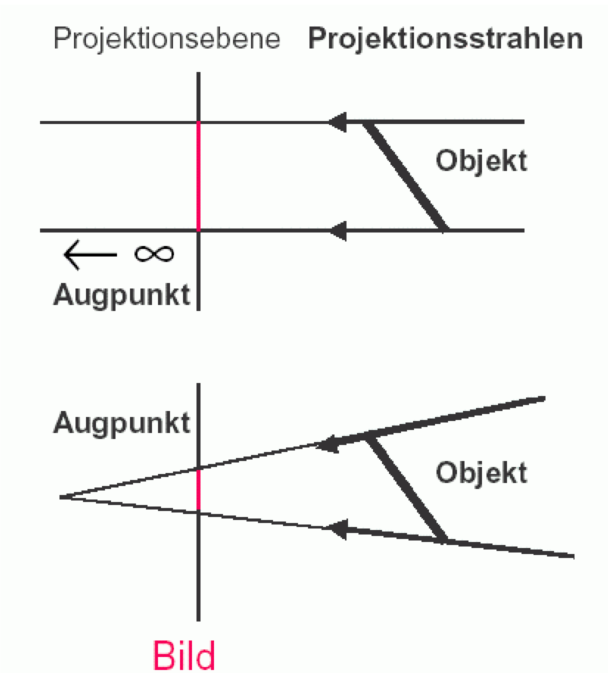

Die Projektion ist Grundaufgabe in der Grafik.

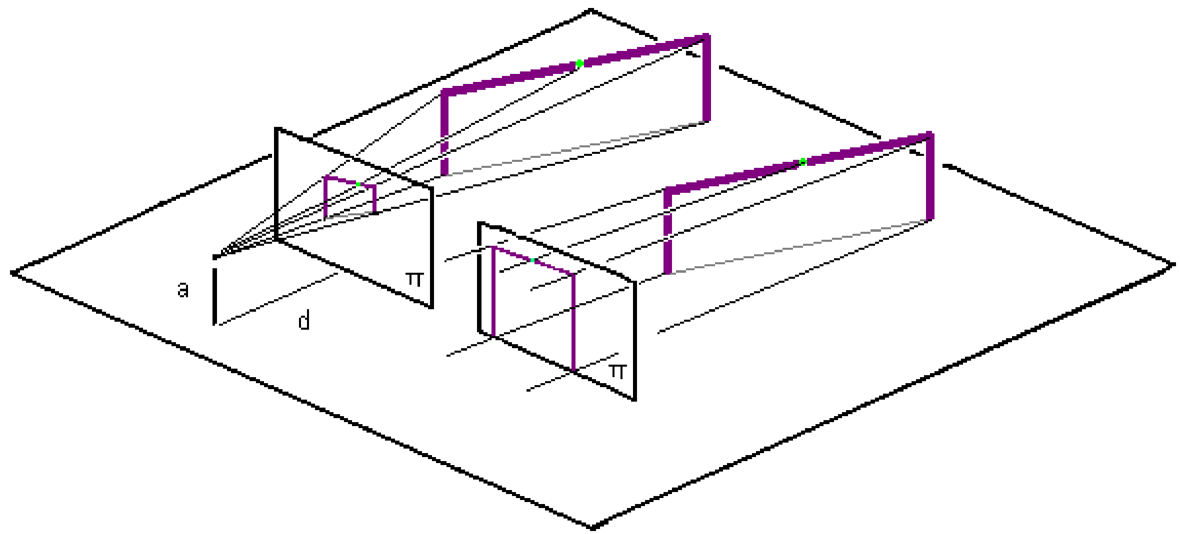
Alle geometrischen 3D-Objekte der Szene müssen auf eine 2D-Fläche abgebildet werden.

# Projektion

Bei einer geometrischen Projektion werden die Punkte des dreidimensionalen Raumes auf Punkte einer Ebene abgebildet. Die Abbildung auf die Bildebene kann durch Zeichnen nach den Regeln der darstellenden Geometrie erzeugt werden.

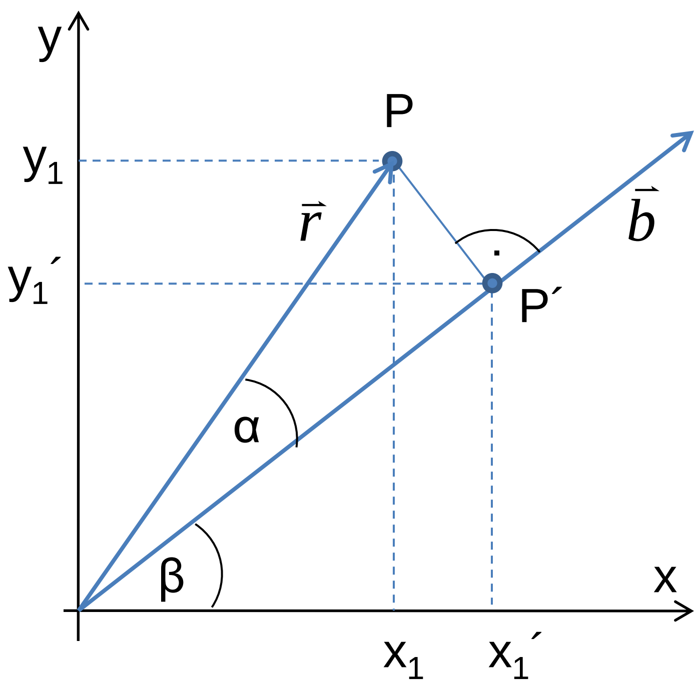
Optionen: Zentralprojektion und Parallelprojektion



# 2D-Projektion

Projektion = Lot eines Punktes auf einer Geraden.




$$\vec{b} = b \cdot \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} = \vec{e}_b$$ Einheitsvektor in Richtung der Geraden

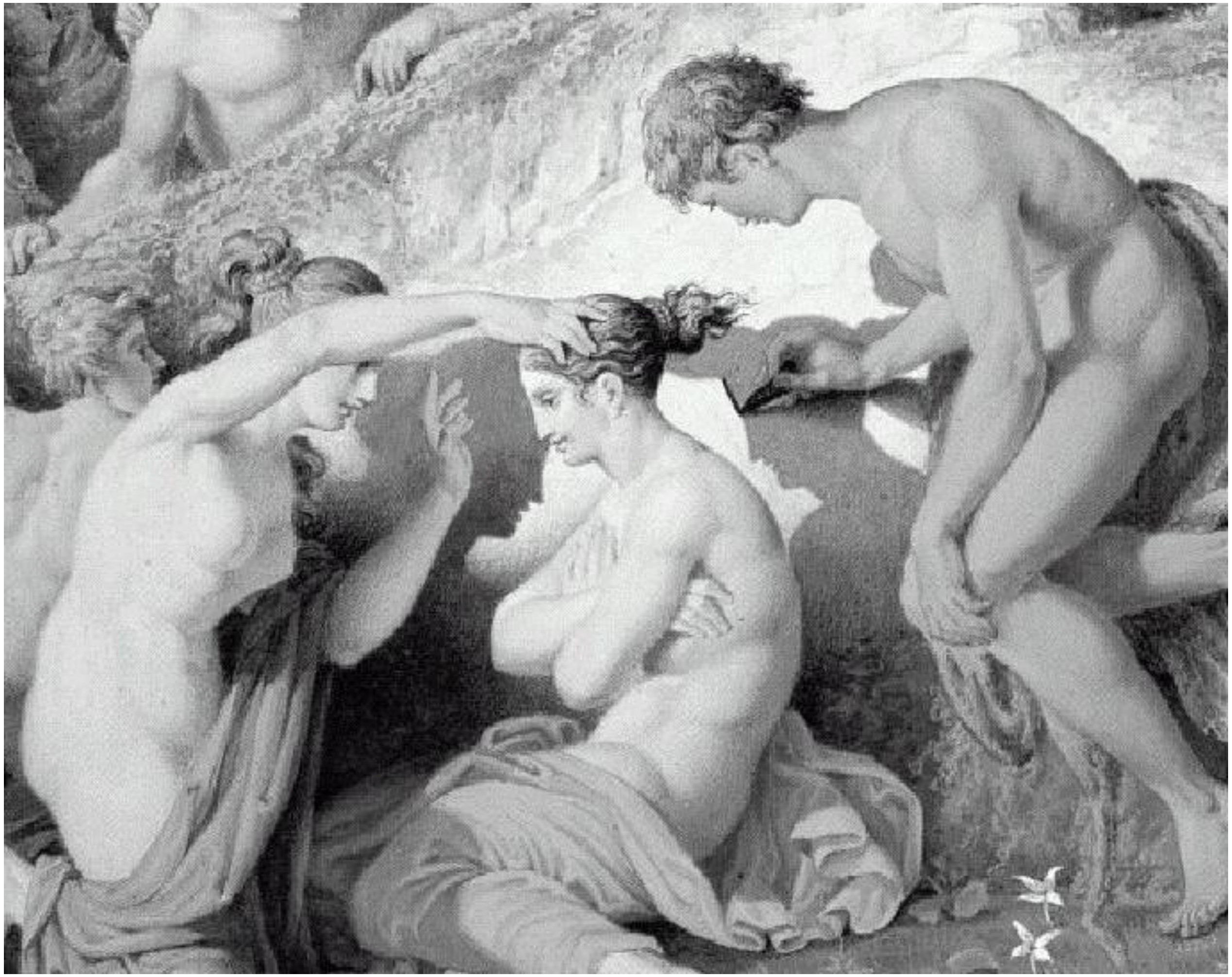
Wiederholung / Erinnerung:

Skalarprodukt = Projektion von $\vec{r}$ auf $\vec{e}_b$

Skalarprodukt $= r \cdot e_b \cdot \cos\alpha$

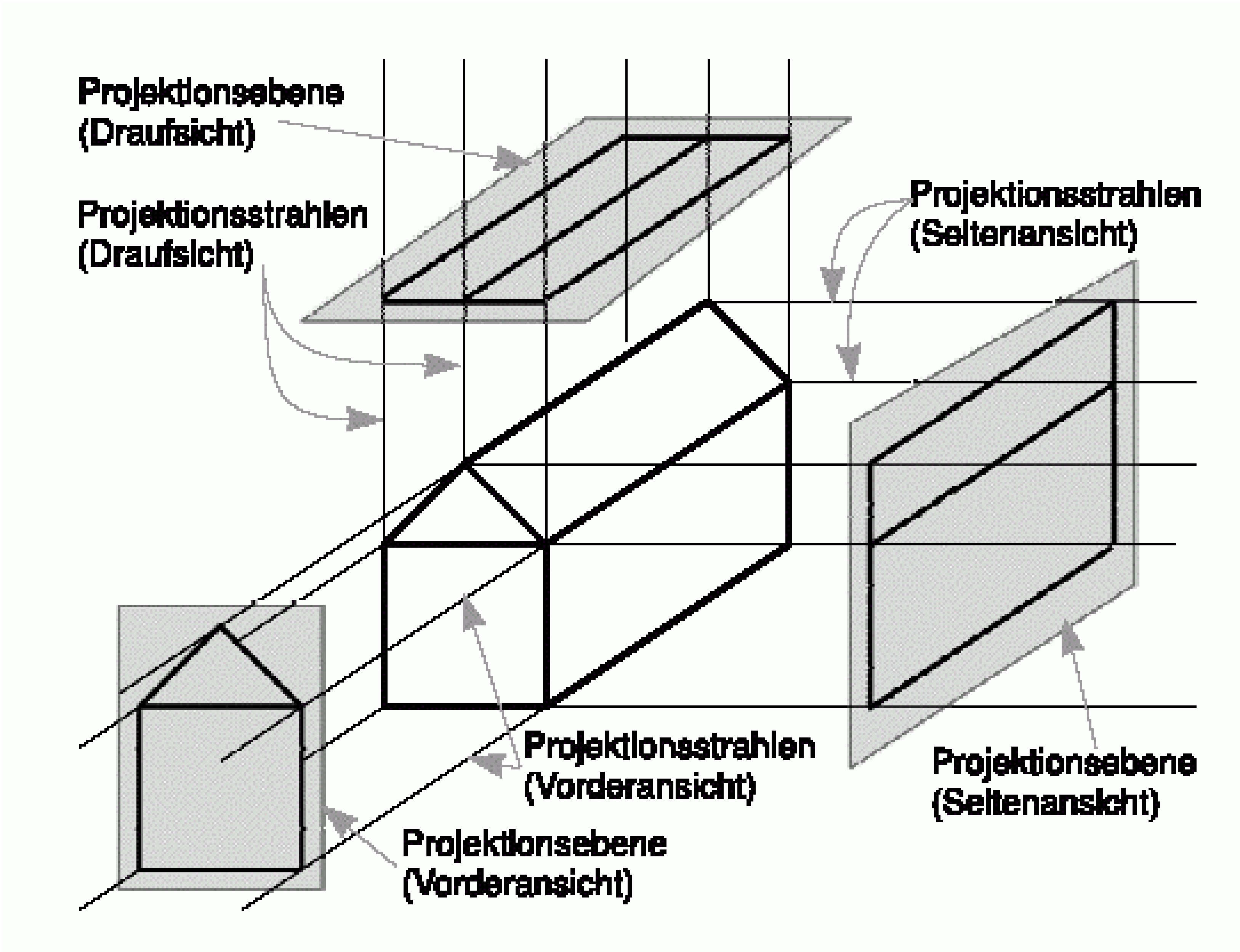
$= r \cdot 1 \cdot \cos\alpha$

# Parallelprojektion

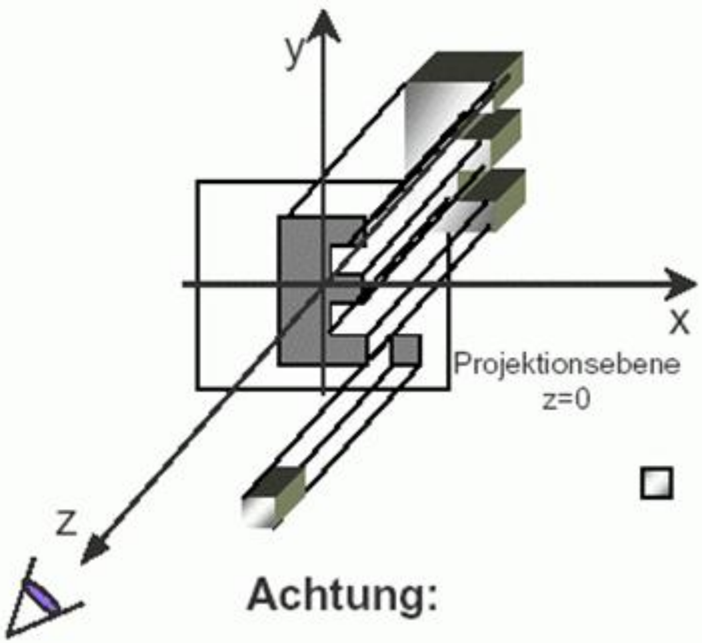


Projektion eines 3D Körpers auf 2D:

Ausschnitt aus Karl Friedrich Schinkel, Die Erfindung des Zeichnens, 1830


Projektionsebene
(Draufsicht)
Projektionsstrahlen
(Draufsicht)
Projektionsstrahlen
(Seitenansicht)
Projektionsstrahlen
(Vorderansicht)
Projektionsebene
(Seitenansicht)
Projektionsebene
(Vorderansicht)

# Projektion auf die x-y-Ebene




$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Die z-Komponente wird zu Null gesetzt
- Unterdrückt die Z-Komponente
- Achtung: positive und negative z-Werte werden aud die xy-Ebene abgebildet

**Achtung:**

Auch Objekte hinter dem Beobachter werden auf die Bildebene projiziert.

# 3D-Orthogonale Projektion

Parallelprojektion auf die x-y-Ebene:

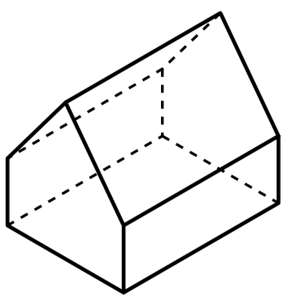
$$\underline{P_{orth,z=0}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

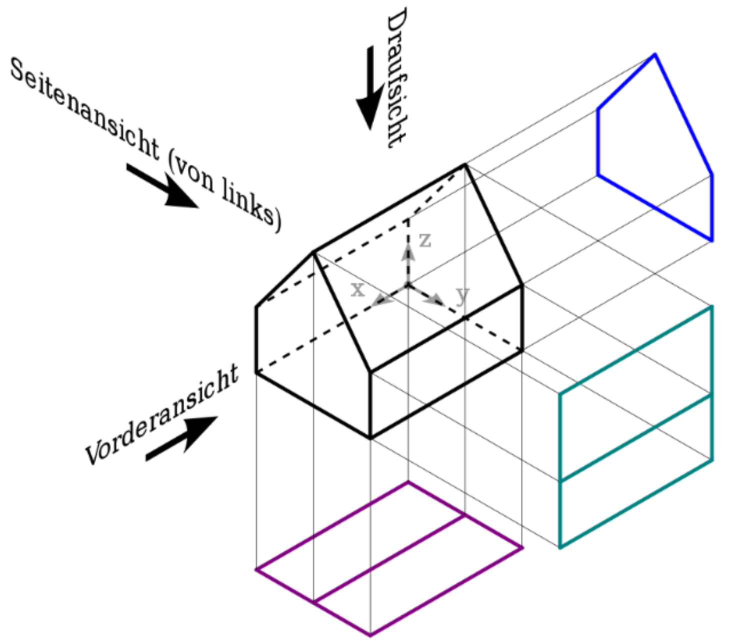
$$\underline{P_{orth,z=0}} \cdot (x, y, z, 1)^T = (x, y, 0, 1)^T$$

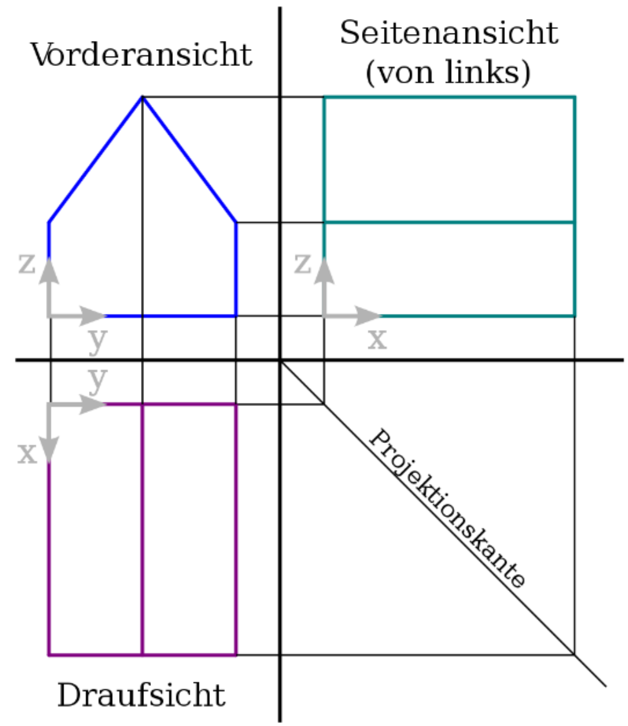
Die Projektion auf andere Ebenen funktioniert ähnlich.

# Normalprojektion

Die Normalprojektion, auch Dreitafelprojektion genannt, ist ein Verfahren der darstellenden Geometrie, um ein räumliches Objekt zeichnerisch in verschiedenen ebenen Ansichten darzustellen.






3D-Zeichnung

Projektion der Ansichten in der 3D-Zeichnung

# Aufgaben

Gegeben sei ein Körper mit den Eckpunkten:
$P_1=(100)^T$ $P_2=(110)^T$ $P_3=(101)^T$ $P_4=(111)^T$ $P_5=(000)^T$ $P_6=(010)^T$ $P_7=(001)^T$ $P_8=(011)^T$

1. Zeichnen Sie den Körper in 3D-Koordinaten. Um welchen Körper handelt es sich?

2. Bestimmen Sie die Matrix der Eckpunkte des Körpers in kartesischen und in homogenen Koordinaten.

3. Der Körper soll um 20° entlang der y-Achse und 30° entlang der x-Achse gedreht werden. Wie lautet die kombinierte Rotationsmatrix?

4. Wie lauten die Koordinaten der Eckpunkte des Körpers nach der Drehung?

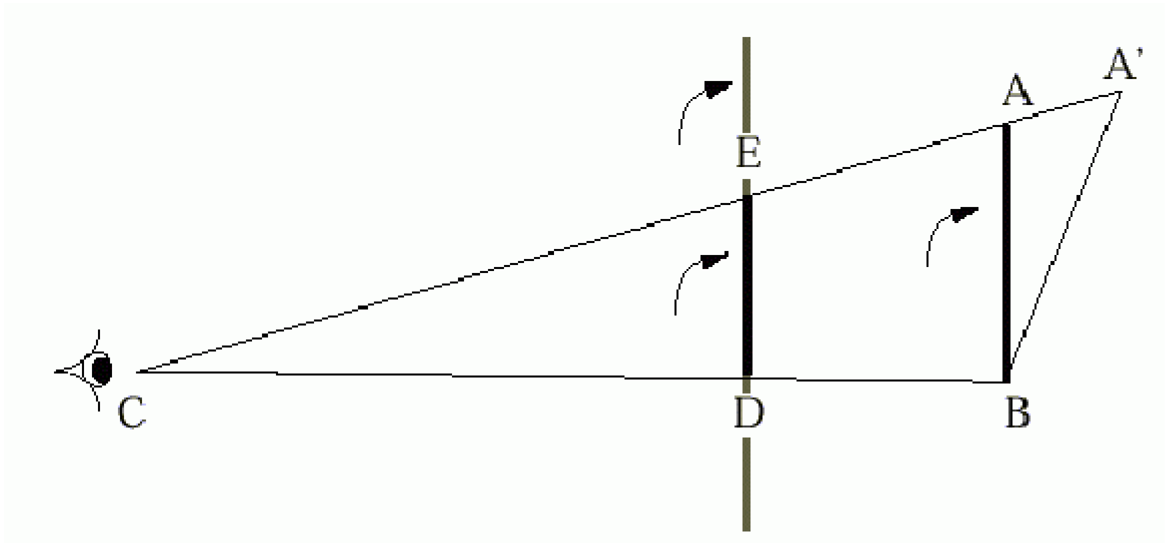
5. Die Eckpunkte des gedrehten Körpers sollen parallel auf die x-y-Ebene projiziert werden. Wie lauten die Koordinaten der Eckpunkte der Projektion?

# Perspektivische Projektion

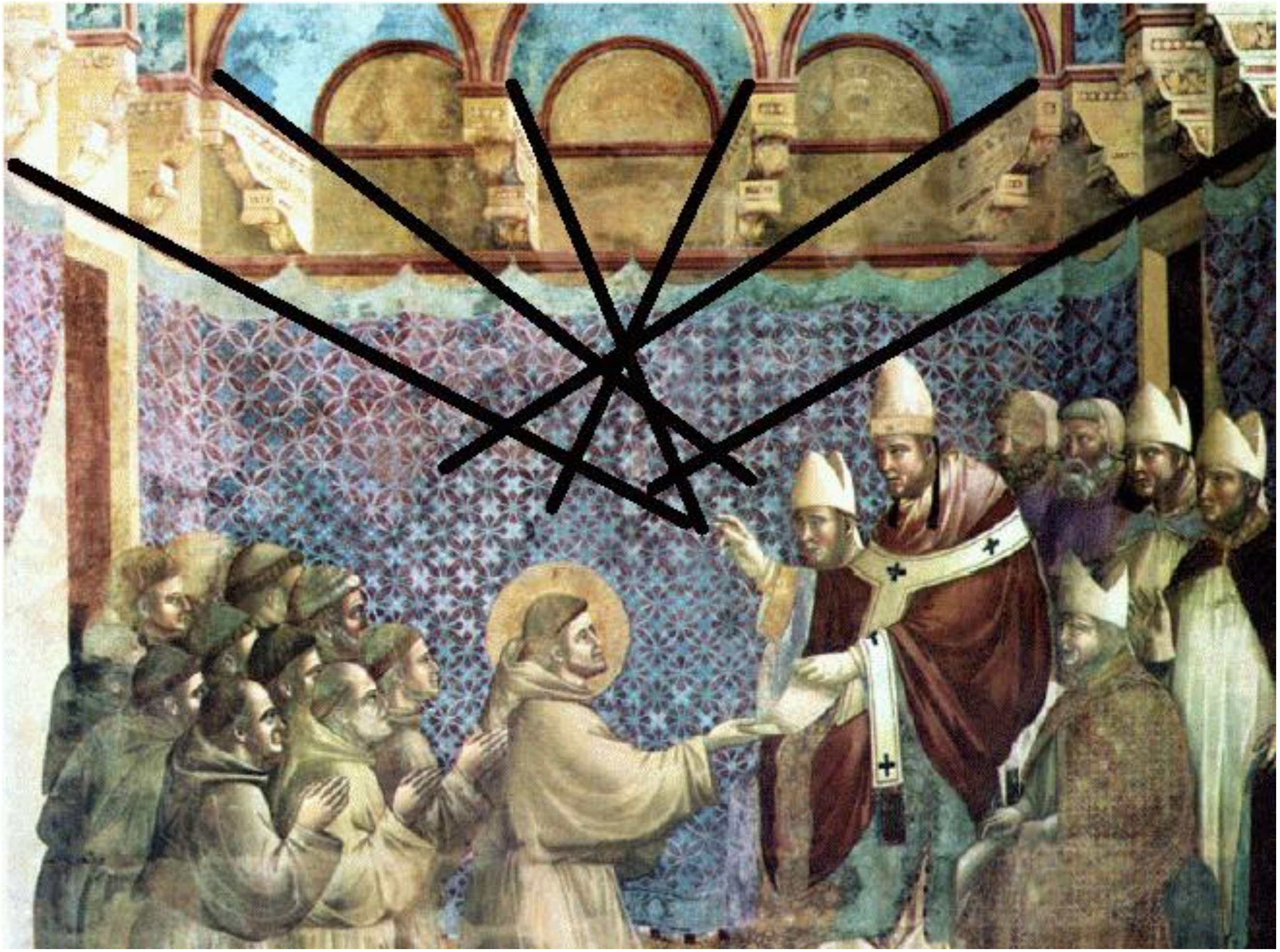
Hauptcharakteristiken der Perspektive:

• parallele Linien konvergieren im Bild in einem Fluchtpunkt (vanishing point)
• entfernte Objekte erscheinen kleiner als nahe (perspektivische Verkürzung)

Berechnung des projizierten Bildes mittels ähnlicher Dreiecke (Strahlensätze)



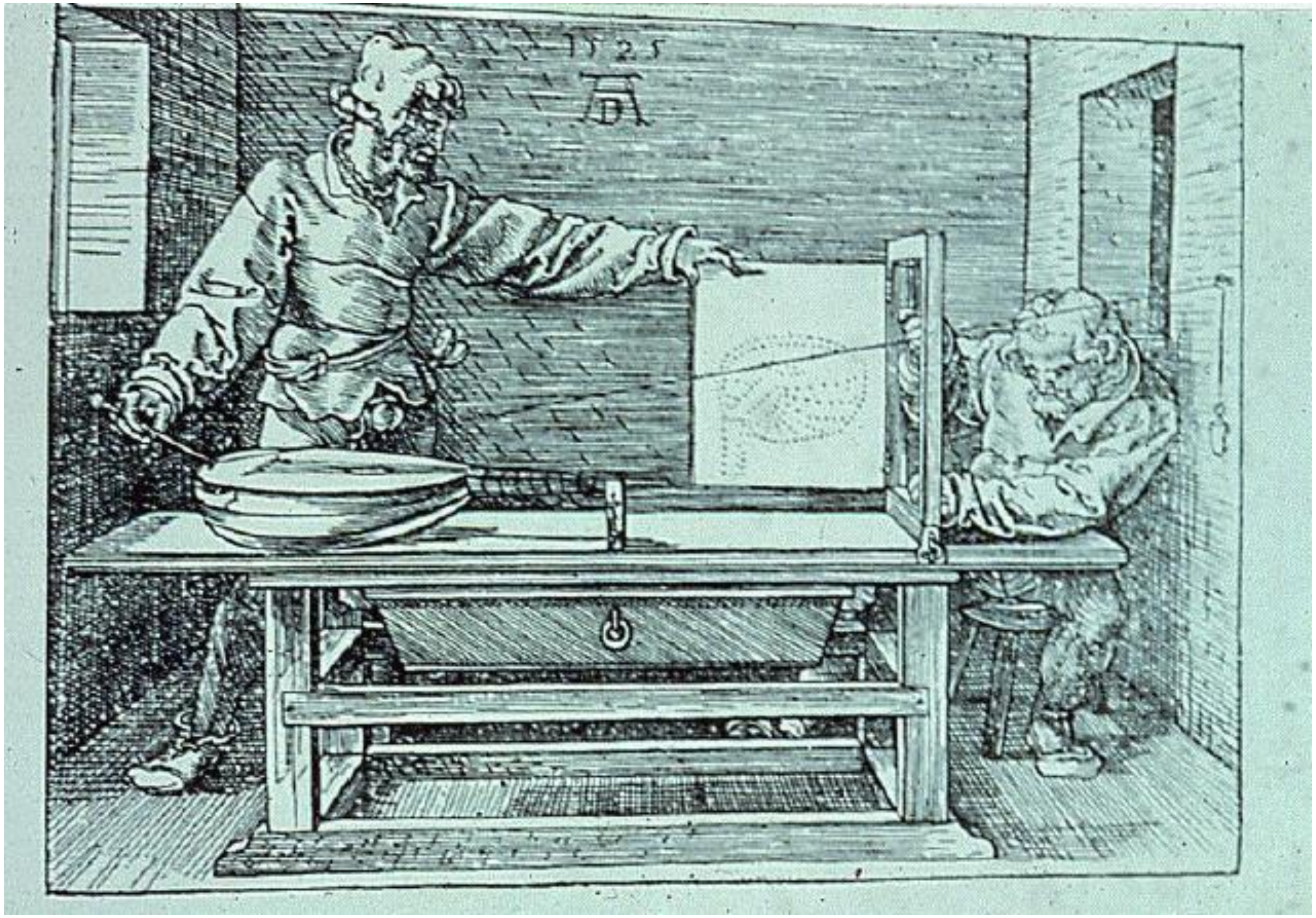
# Frühe Ansätze zur Perspektive



Perspektive anfangs nicht systematisch – Linien konvergieren nicht in einzelnem Fluchtpunkt

Gemälde von Giotto von ca. 1295-1300
(Assisi, obere Basilika)

# Perspektivische Projektion



Albrecht Dürer:
Der Zeichner der
Laute (1525)

# 3D-Perspektive

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{d} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{P} \cdot (x, y, z, 1)^T = (x, y, z, \frac{z}{d})^T$$

Eine Rücktransformation von homogenen Koordinaten in kartesische Koordinaten erlaubt es, auch die perspektivische Abbildung durch eine Matrix zu beschreiben:

$$(x', y', z', w')^T \rightarrow \left(\frac{x'}{w'}, \frac{y'}{w'}, \frac{z'}{w'}\right)^T = (x'', y'', z'')^T$$

# Projektionsmatrix

Nimmt eine Kamera ein Objekt auf, so bildet sich das Objekt auf dem Kamerabild ab. Diese Abbildung (auch Projektion genannt) wird mathematisch durch die so genannte Projektionsmatrix ***P*** beschrieben.

Die Projektionsmatrix beschreibt die perspektivische Abbildung eines dreidimensionalen Objektpunktes ***X*** an die Bildposition ***x*** durch eine Kamera. Dabei gilt folgender Zusammenhang zwischen Objekt- und Bildpunkt:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} \quad \cong \quad \mathbf{x} = \mathbf{PX}$$

Die Elemente der Projektionsmatrix hängen dabei von den Orientierungsparametern der Kamera ab. Diese sind im Einzelnen der inneren Aufbau der Kamera ("innere Orientierung") und die Lage der Kamera im Raum sowie die Blickrichtung der Kamera ("äußere Orientierung").

# Kombination

Die Rotation um einen Punkt $Q(t_x,t_y,t_z)$ und eine perspektivische Abbildung mit dem Abstand d zwischen Betrachterauge und Projektionsebene kann durch eine einzige Matrix ***M*** beschrieben werden.

Zuerst wird der Ursprung des lokalen Koordinatensystems in den Punkt Q mittels $\boldsymbol{T^{-1}}$ verschoben. Danach erfolgt die Rotation ***R***.

Anschließend wird das Koordinatensystem wieder in den anfänglichen Ursprung zurückverschoben mittels ***T***. Die perspektivische Abbildung erfolgt durch ***P***.

Zusammengefasst entsteht dabei die von rechts nach links zu lesende Matrix:

$$\boldsymbol{M = P \cdot T \cdot R \cdot T^{-1}}$$

# Quellen

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf