HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences



Mathematik 1 Infotronik (8)

Gerald Kupris

08.11.2012

Besuch der Messe „electronica 2012"

Weltleitmesse für Komponenten, Systeme und Anwendungen der Elektronik

Die Deggendorfer Firma **congatec** lädt am 16.11. zum Besuch der electronica ein!
ca. 7:30 Abfahrt des Buses Richtung München
ca. 10:00 Ankunft Neue Messe München
ca. 16:00 Abfahrt vom Messegelände in München

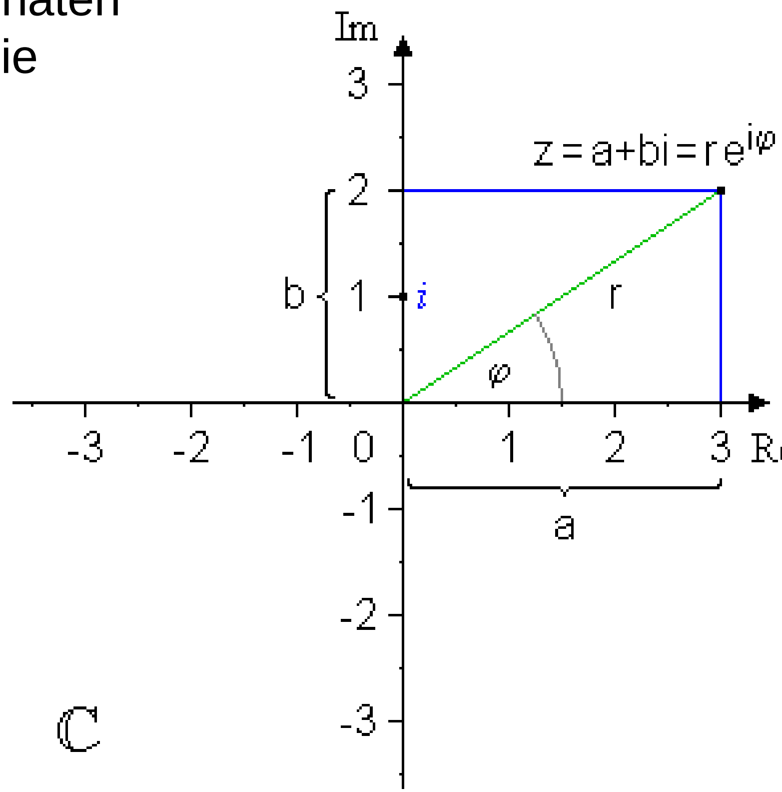
Natürlich freut sich **congatec** über einen Besuch am Stand Halle A6/306.
Die Liste zur Registrierung liegt im Sekretariat bei Frau Steininger aus.
Tickets unter: **http://my-congatec.de/**

Vorlesungsinhalte Komplexe Zahlen

Einführung in komplexe Zahlen
Anatomie der komplexen Zahlen
Darstellung komplexer Zahlen
Die Gaußsche Zahlenebene
Addition und Subtraktion komplexer Zahlen
Multiplikation und Division komplexer Zahlen
Konjugiert komplexe Zahlen
Betrag komplexer Zahlen
Darstellung komplexer Zahlen in Polarform
Rechenregeln
Rechnen mit komplexen Zahlen in Polarform
Anwendungen komplexer Zahlen

Darstellung komplexer Zahlen in Polarform

Verwendet man anstelle der kartesischen Koordinaten a und b die Polarkoordinaten r und φ , so kann die komplexe Zahl in **Polarform** dargestellt werden.



Algebraische Form einer komplexen Zahl :

$$z = a + b \cdot i$$

Trigonometrische Form einer komplexen Zahl:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Exponentialform (Eulersche Form):

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

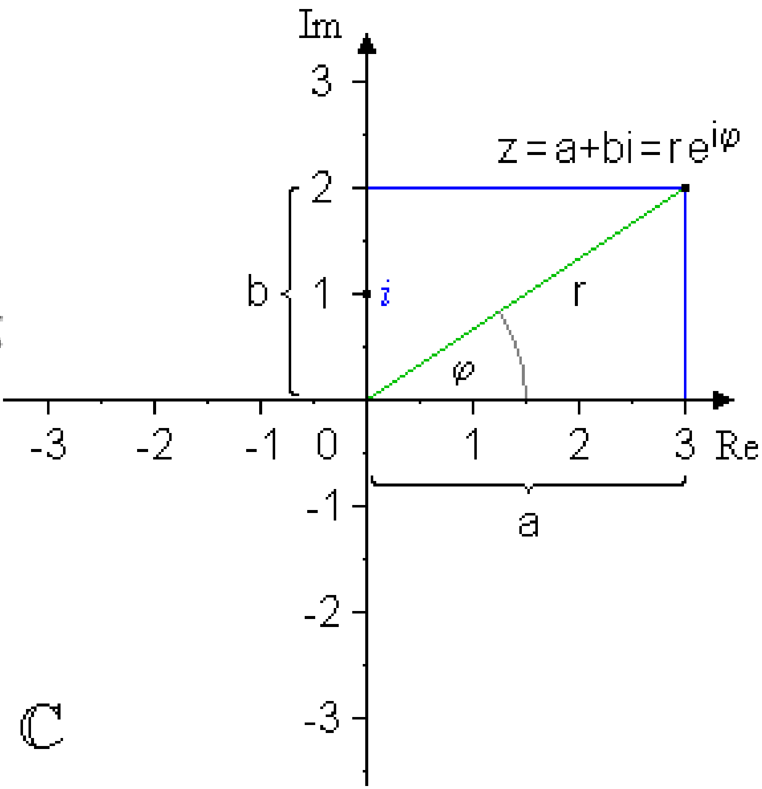
φ meist in rad
(360° = 2π)

Umwandlung von algebraischer Form in Polarform

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{für } a > 0, b \, \text{beliebig} \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } a = 0, b < 0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } a = 0, b = 0 \end{cases}$$



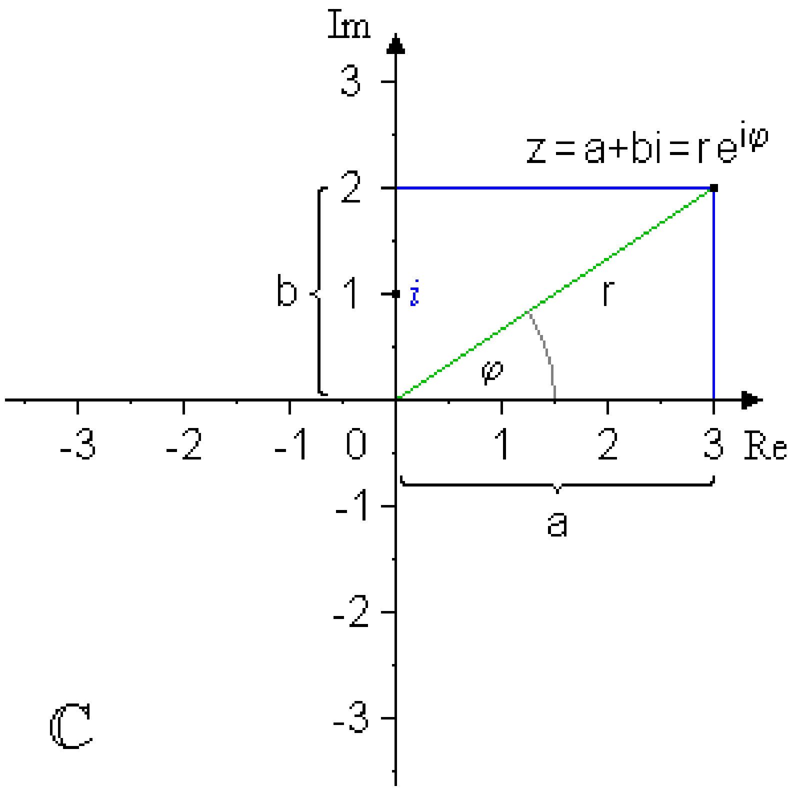
für: $-\pi < \varphi \leq \pi$

Umwandlung von Polarform in algebraische Form

$$z = a + b\,\mathrm{i}$$

$$a = \mathrm{Re}(z) = r \cdot \cos\varphi$$

$$b = \mathrm{Im}(z) = r \cdot \sin\varphi$$



Darstellung einer komplexen Zahl in Polarform

Die Darstellung einer komplexen Zahl über den **Betrag *r*** und die **Phase *φ*** wird als **Polarform** bezeichnet.

$$z = \overbrace{r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)}^{\text{Trigonometrische Form}} = \overbrace{r \cdot e^{j\varphi}}^{\text{Exponentialform (Eulersche Form)}} = r \cdot e^{j(\varphi + k2\pi)}$$

Betrag

Eulersche Zahl

Argument
(Phase)

Die Grundlage für die Darstellung in Exponentialform ist die Eulersche Formel:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi$$

Multiplikation und Division in der Polarform

Bei der Multiplikation in der Polarform werden die Beträge multipliziert und die Phasen addiert. Bei der Division wird der Betrag des Dividenden durch den Betrag des Divisors geteilt und die Phase des Divisors von der Phase des Dividenden subtrahiert:

Trigonometrische Form:

$$r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi) \;\cdot\; s\cdot(\cos\psi + \mathrm{i}\cdot\sin\psi) = r\cdot s\cdot[\cos(\varphi+\psi) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi+\psi)]$$

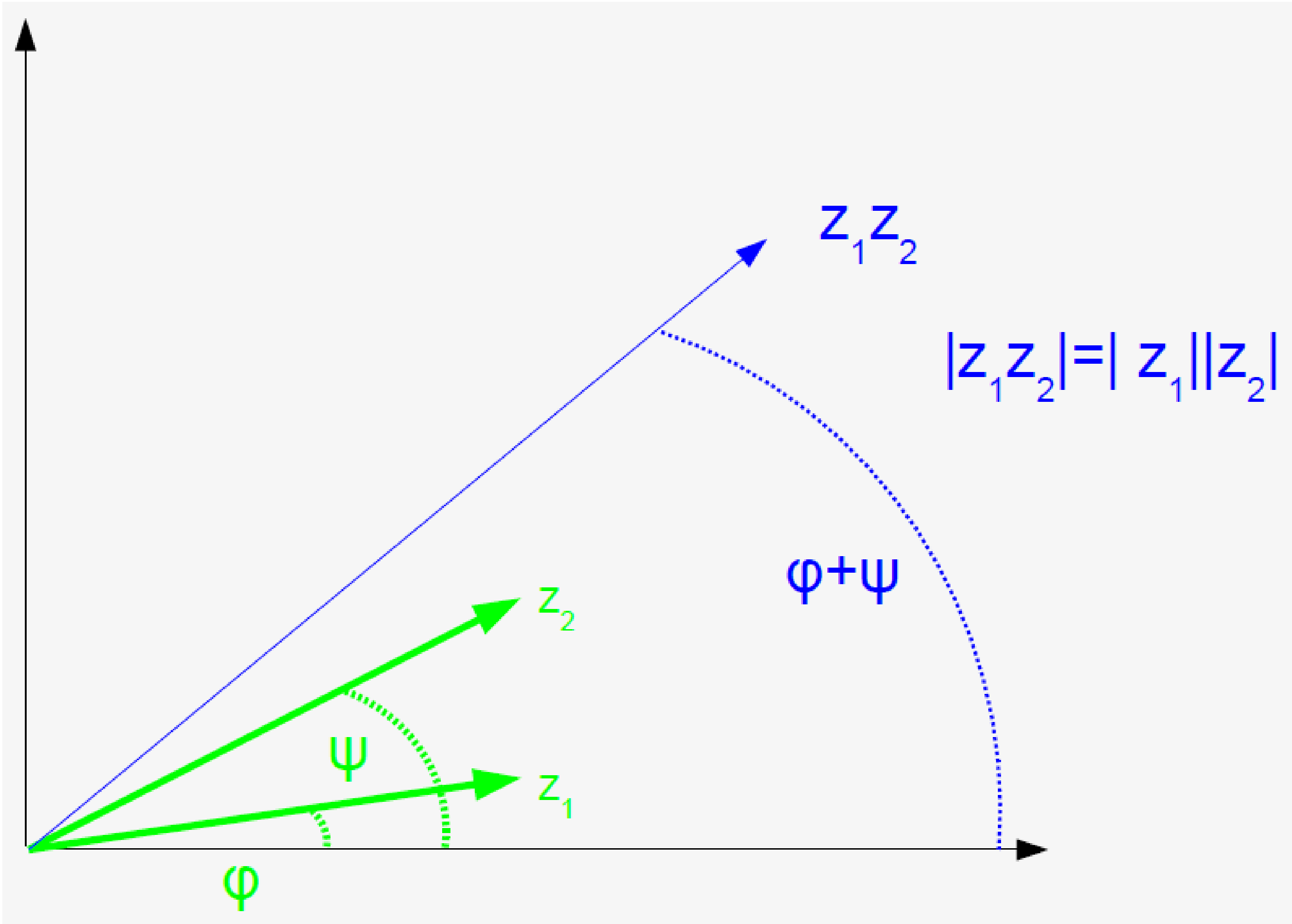
$$\frac{r\cdot(\cos\varphi + \mathrm{i}\cdot\sin\varphi)}{s\cdot(\cos\psi + \mathrm{i}\cdot\sin\psi)} = \frac{r}{s}\cdot[\cos(\varphi-\psi) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi-\psi)]$$

Exponentialform:

$$\left(r\cdot e^{\mathrm{i}\varphi}\right)\cdot\left(s\cdot e^{\mathrm{i}\psi}\right) = (r\cdot s)\cdot e^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}$$

$$\frac{\left(r\cdot e^{\mathrm{i}\varphi}\right)}{\left(s\cdot e^{\mathrm{i}\psi}\right)} = \frac{r}{s}\cdot e^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}$$

Grafische Darstellung der Multiplikation in Polarform



Einfache Rechenregeln

Man rechnet mit komplexen Zahlen am besten einfach so, als ob ***i*** eine ganz normale Variable wäre, man muss nur beim Multiplizieren daran denken, dass gilt: ***i² = -1***.

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$$

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen werden **in der algebraischen Form** komponentenweise durchgeführt.

Die Multiplikation komplexer Zahlen kann je nach Vorgabe vorteilhaft in algebraischer Form oder in Polarform durchgeführt werden.

Bei der Division komplexer Zahlen werden in Exponentialform ihre Beträge dividiert und ihre Argumente (Winkel) subtrahiert, oder in algebraischer Form mit dem konjugierten multipliziert und durch dessen Betragsquadrat dividiert.

Potenzen

Natürliche Exponenten für die algebraische Form ***z* = *a* + *b*i**

$$z^n = \sum_{k=0,k \text{ gerade}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k}{2}} a^{n-k} b^k + \mathrm{i} \sum_{k \text{ ungerade}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} a^{n-k} b^k.$$

Die *n*-te Potenz berechnet sich in der polaren Form:

$$z^n = r^n \cdot e^{\mathrm{i}n\varphi} = r^n \cdot (\cos n\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin n\varphi)$$

Beliebige komplexe Exponenten:

$$z^\omega := \exp(\omega \cdot \ln z),$$

Radizieren (Wurzelziehen)

Üblicherweise wird die exponentielle (Eulersche) Darstellungsform der komplexen Zahl verwendet.

Bei der Berechnung der *n*-ten Wurzel der komplexen Zahl $z = re^{i\varphi}$ dient die Formel:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathrm{i}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}},$$

wobei *k* die Werte 0, 1, …. n-1 durchläuft. **Eine Zahl hat also *n* komplexe *n*-te Wurzeln.**

Vorgehensweise beim Ziehen der n-ten Wurzel

1. Umwandlung der komplexen Zahl in die Exponentialform.

2. Berechnung des Betrages der Wurzel r_w

$$r_W = \sqrt[n]{r}$$

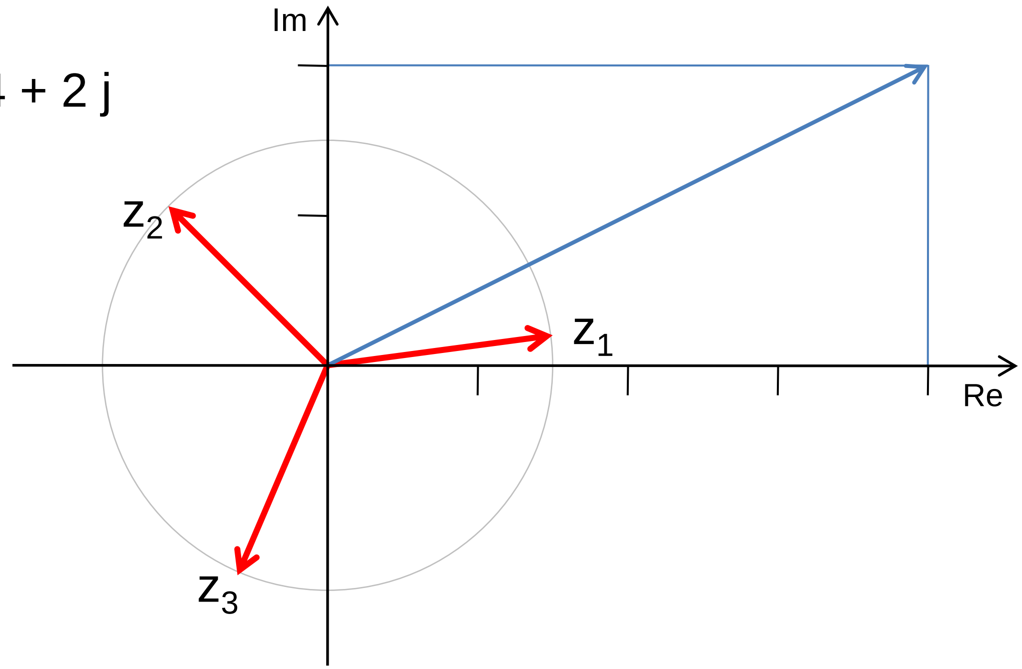
3. Berechnung der Argumente φ_W Es muss n Stück davon geben, für k = 0 bis (n-1).

$$\varphi_W = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

4. ggf. Rückumwandlung der n gefundenen Ergebnisse in die algebraische Form.

Beispiele von Wurzeln komplexer Zahlen

$z^3 = 4 + 2\,j$



Durchrechnen von zwei Beispielen:

$z^6 = 1$

$z^4 = 3 + 2\,j$

Pragmatische Rechenregeln

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen werden in der **algebraischen** Form komponentenweise durchgeführt.

Die **Multiplikation** komplexer Zahlen kann je nach Vorgabe vorteilhaft in **algebraischer** Form oder in **Exponentialform** (Multiplikation der Beträge und Addition der Argumente (Winkel)) durchgeführt werden.

Bei der **Division** komplexer Zahlen werden in **Exponentialform** ihre Beträge dividiert und ihre Argumente (Winkel) subtrahiert, oder in **algebraischer** Form mit dem konjugierten multipliziert und durch dessen Betragsquadrat dividiert.

Beim **Potenzieren** einer komplexen Zahl mit einem reellen Exponenten wird ihr Betrag potenziert und ihr Argument (Winkel) mit dem Exponenten multipliziert.

Beim **Radizieren** (Wurzelziehen) einer komplexen Zahl mit einem reellen Exponenten wird ihr Betrag radiziert und ihr Argument (Winkel) durch den Exponenten dividiert. Hierdurch entsteht die erste Lösung. Bei einer n-ten Wurzel entstehen n Lösungen, die im Winkel von $2\pi / n$ um den Ursprung der gaußschen Ebene verteilt sind.

Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl

Im Bereich der reellen Zahlen wir der natürliche Logarithmus einer (positiven) Zahl ***a*** als diejenige Zahl ***x*** erklärt, mit der die Basiszahl e potenziert werden muss, um die Zahl ***a*** zu erhalten: $a=e^x$ $x=\ln a$ $(a>0)$

Wir übertragen diesen Begriff nun sinngemäß auf die komplexen Zahlen.
Jede von Null verschiedene komplexe Zahl ***z*** ist darstellbar als:

$$z = r \cdot e^{j(\varphi + k2\pi)}$$

Unter ihrem natürlichen Logarithmus verstehen wir:

$$\ln z = \ln\left[r \cdot e^{j(\varphi + k2\pi)}\right] = \ln r + \ln e^{j(\varphi + k2\pi)}$$

$$\ln z = \ln r + j(\varphi + k \cdot 2\pi) \cdot \ln e = \ln r + j(\varphi + k \cdot 2\pi)$$

Das ist eine Menge von **unendlich vielen** komplexen Zahlen für $k \in Z$

Hauptwert und Nebenwerte des Logarithmus

Für $\boldsymbol{k}=0$ erhält man den so genannten **Hauptwert** des Logarithmus:

$$\mathrm{Ln}\,\boldsymbol{z} = \ln \boldsymbol{r} + \mathrm{j}\,\boldsymbol{\varphi}$$

Die übrigen Werte heißen **Nebenwerte** und ergeben sich aus dem Hauptwert durch Addition ganzzahliger Vielfacher von 2πj.

$$\ln \boldsymbol{z} = \mathrm{Ln}\,\boldsymbol{z} + \boldsymbol{k}\cdot 2\pi\mathrm{j} \quad (k \in Z)$$

Anmerkungen zum Logarithmus:
ln ***z*** ist für jede komplexe Zahl $\boldsymbol{z} \neq 0$ definiert, also beispielsweise auch für negative reelle Zahlen.
Die verschiedenen Werte von ln ***z*** stimmen im Realteil (= ln r) überein und unterscheiden sich im Imaginärteil um ganzzahlige Vielfache von 2 *π.*
Komplexe Zahlen müssen vor dem Logarithmieren zunächst in die Exponentialform gebracht werden.

Anwendung komplexer Zahlen: Algebraische Gleichungen

Die Algebraische Abgeschlossenheit der komplexen Zahlen bedeutet, dass jede algebraische Gleichung vom Grad größer Null über den komplexen Zahlen eine Lösung besitzt, was für reelle Zahlen nicht gilt.

Beispiel:
Aufgabe, zwei Zahlen zu finden, deren Produkt 40 und deren Summe 10 ist.

$x(10 - x) = 40$ oder $x^2 - 10x + 40 = 0$

$p = -10$
$q = 40$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{(\frac{-10}{2})^2 - 40}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Auch:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$$

Anwendung von komplexen Zahlen: Trigonometrie

Es gibt einen Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion, der über die komplexen Zahlen hergestellt werden kann.

Eulersche Formel: $$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi$$

Der Sinus und der Kosinus lassen sich für jede reelle Zahl φ mithilfe von e-Funktionen mit imaginären Exponenten darstellen:

- $$\cos\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi}}{2}$$
- $$\sin\varphi = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,\varphi}}{2\,\mathrm{i}}$$

Aufgaben

1. Geben Sie folgende komplexen Zahlen in Polarform an:
   a) $3 + 4j$
   b) $-8 - 6j$
   c) $(3 + 4j) \cdot (-4 + 2j)$

2. Geben Sie folgende komplexe Zahlen in kartesischer Form an:
   a) $2 \cdot \cos(\pi/3) + 2j \cdot \sin(\pi/3)$
   b) $\dfrac{4 \cdot \overline{(3 - j)}}{(1 + j) \cdot (-1 + j)}$

3. Geben Sie für $z_1 = -\sqrt{3} - j$ und $z_2 = 2 \cdot e^{j \cdot 5\pi/6}$ folgende Ausdrücke in kartesischer Form an:
   a) $z_1 + z_2$
   b) z_1 / z_2
   c) $(z_1 / z_2)^{15}$

Aufgaben

4. Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in kartesischer Form an:

a) $$z = \frac{5 \cdot (1+2j)^5 \cdot (4-3j)^2}{(3+4j)^3 \cdot (2-j)^4}$$

b) $$z = (2-4j)^2 + \frac{|1-\sqrt{3} \cdot j|}{j}$$

c) $$z = \frac{(3+j) \cdot (\cos(120°) - j \cdot \sin(120°))}{(1-j)^2 \cdot (\overline{2j})} + \frac{2 \cdot (\cos(90°) + j \sin(90°))}{e^{-j \cdot 180°}}$$

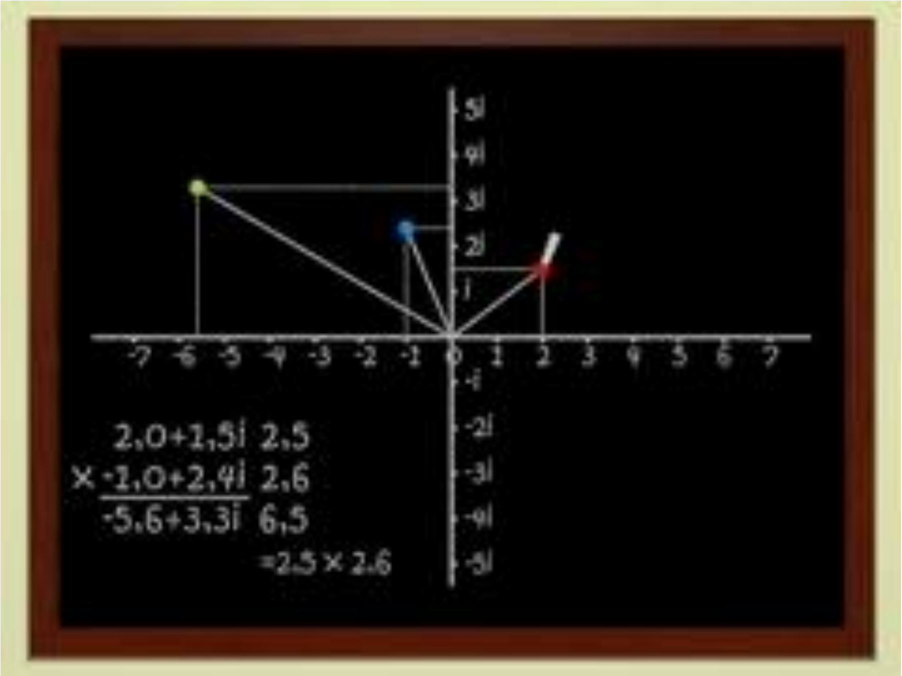
5. Beweisen Sie die von Leibnitz entdeckte Beziehung:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$$

Film

Dimensions by Jos Leys - Étienne Ghys - Aurélien Alvarez

Kapitel 5



Transformation

In der Mathematik versteht man allgemein unter einer Transformation eine struktur-verträgliche Abbildung zwischen zwei gleich strukturierten Mengen oder spezieller auch eine Selbstabbildung auf einer Menge.

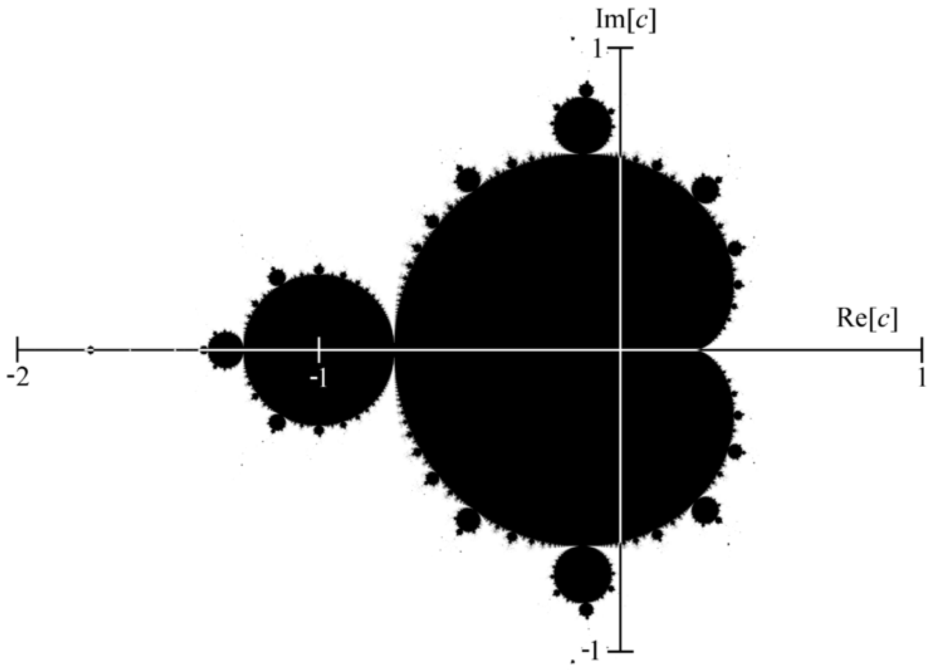
Die lineare Abbildung (auch linearer Operator) ist ein Begriff aus dem mathematischen Teilgebiet der linearen Algebra. Man bezeichnet damit eine Funktion zwischen zwei Vektorräumen, bei der es unerheblich ist, ob man zwei Vektoren zuerst addiert und dann deren Summe mittels der Funktion abbildet oder zuerst die Vektoren abbildet und dann die Summe der Bilder bildet. Gleiches gilt für die Multiplikation mit einem Skalar (z. B. einer reellen Zahl).

Die Mandelbrot-Menge

Die Mandelbrot-Menge (benannt nach dem französischen Mathematiker Benoît Mandelbrot) ist die Menge aller komplexen Zahlen c, für welche die rekursiv definierte Folge komplexer Zahlen mit dem Bildungsgesetz

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

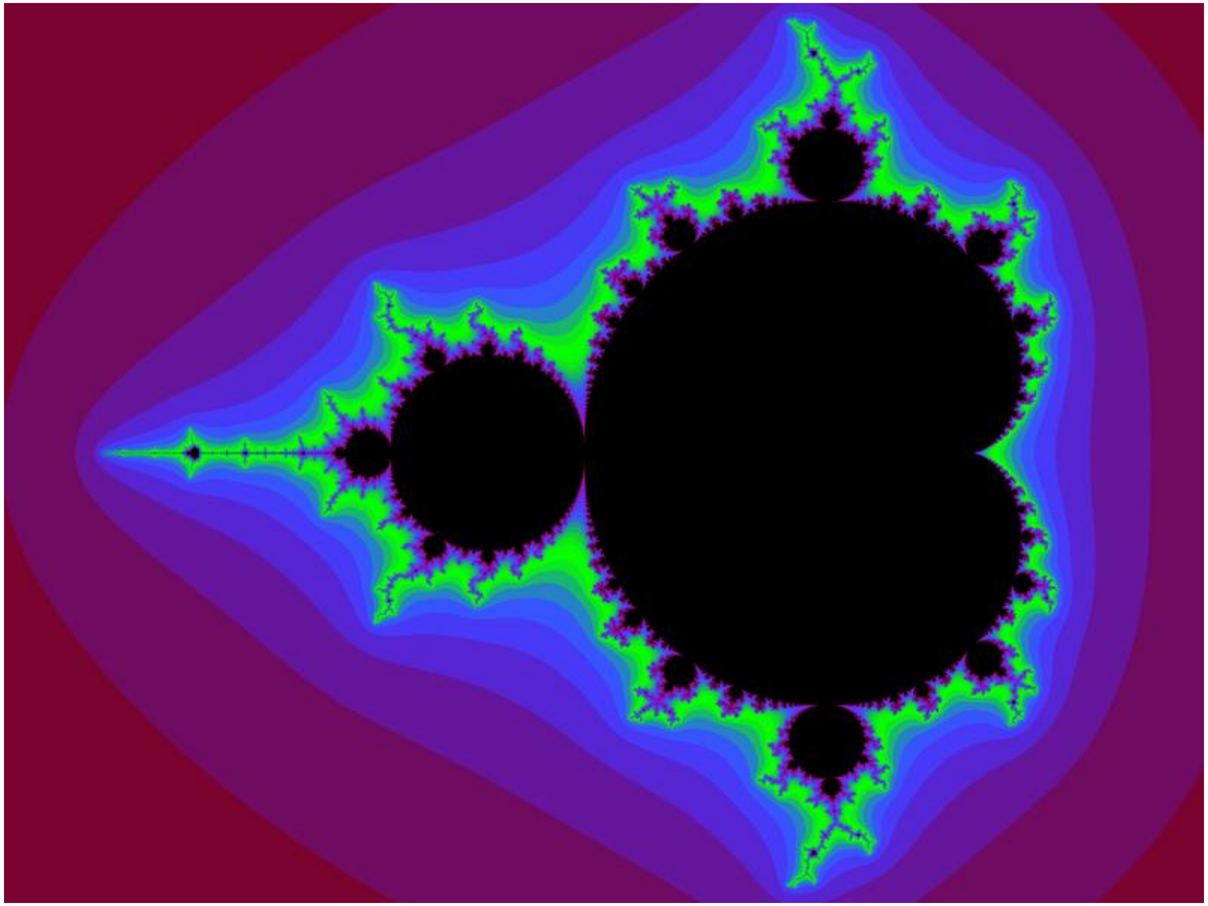
und dem Anfangsglied $z_0 = 0$ beschränkt bleibt, das heißt, der Betrag der Folgenglieder wächst nicht über alle Grenzen.



Die grafische Darstellung dieser Menge erfolgt in der komplexen Ebene. Die Punkte der Menge werden dabei in der Regel schwarz dargestellt und der Rest farbig, wobei die Farbe eines Punktes den Grad der Divergenz der zugehörigen Folge widerspiegelt .

Darstellung der Mandelbrot-Menge

Die grafische Darstellung der Mandelbrot-Menge und ihrer Strukturen im Randbereich ist nur mittels Computer möglich.



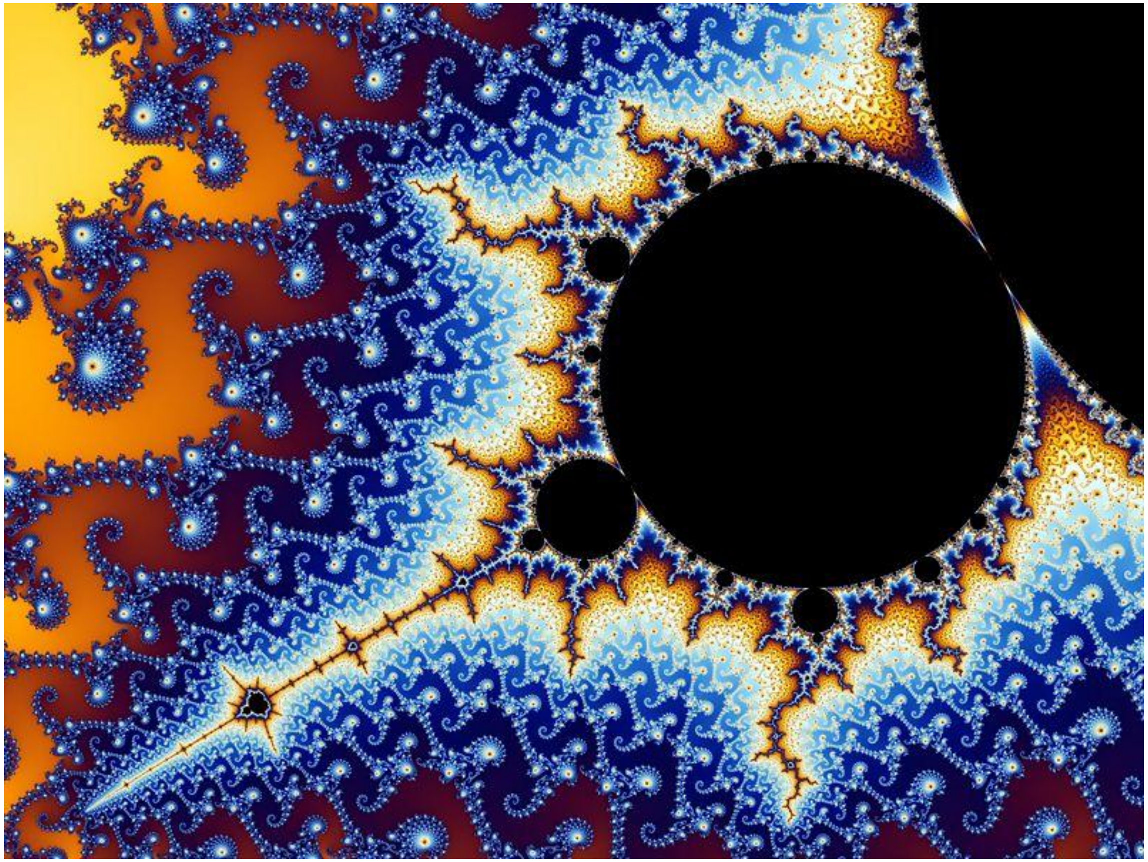
Dabei entspricht jedem Bildpunkt ein Wert c der komplexen Ebene. Der Computer ermittelt für jeden Bildpunkt, ob die zugehörige Folge divergiert oder nicht.

Sobald der Betrag $|z_n|$ eines Folgengliedes den Wert R=2 überschreitet, divergiert die Folge.

Darstellung der Mandelbrot-Menge

Grafisch besonders reizvoll ist die Darstellung des Randes der Mandelbrot-Menge mit seinem Formenreichtum. Je stärker die gewählte Vergrößerung ist, umso komplexere Strukturen lassen sich dort finden.

Mit entsprechenden Computer-programmen lässt sich dieser Rand wie mit einem Mikroskop mit beliebiger Vergrößerung darstellen. Die beiden einzigen künstlerischen Freiheiten, die dabei bestehen, sind die Wahl des Bildausschnittes sowie die Zuordnung von Farben zum Divergenzgrad.



Film

Dimensions by Jos Leys - Étienne Ghys - Aurélien Alvarez

Kapitel 6

Aufgaben

1. Geben Sie folgende Potenzen in kartesischer Form an:

   a) $z = (3 - j \cdot \sqrt{3})^4$

   b) $z = (3 \cdot e^{j\pi})^5$

   c) $z = \left(\dfrac{3 - j}{2 + j} \right)^3$

   d) $z = \left(2 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) + j \cdot 2 \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) \right)^{10}$

2. Bestimmen Sie sämtliche Lösungen folgender Aufgaben:
   a) $z^3 = j$ b) $z^2 = 1 + 2j$ c) $z^5 = 3 - 4j$

Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München 2010

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf