Technische Hochschule Deggendorf WS 2014/15
Prof. Dr. P. Ullrich

Übungen zur Vorlesung „Mathematik 1“

Angewandte Informatik/Infotronik

Blatt 2

Aufgabe 11.

Gegeben seien die Funktionen

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sin(x),\quad g:[-1,1]\to\mathbb{R},\ x\mapsto 1-x^2,\quad h:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R},\ x\mapsto\sqrt{x}.$$

Entscheiden Sie (mit Begründung!), ob folgende Kompositionen (Verknüpfungen) von Funktionen existieren und berechnen Sie ggf. die Funktionsterme.

a) $f\circ g$ b) $f\circ h$ c) $g\circ h$ d) $g\circ f$ e) $h\circ f$ f) $h\circ g$

g) $f\circ(g\circ h)$ h) $f\circ(h\circ g)$ i) $g\circ(h\circ f)$ k) $g\circ(f\circ h)$ l) $h\circ(f\circ g)$ m) $h\circ(g\circ f)$

Aufgabe 12.

Allgemein gilt: Sind $f : L \to M$ und $g : M \to N$ bijektive Abbildungen, so ist auch die Komposition $g\circ f : L\to N$ bijektiv und für die Umkehrabbildung gilt $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$.

Überprüfen Sie diese Behauptung für $f : \{x\geq 1\}\to\mathbb{R}_0^+$, $x\mapsto 2x-2$ und $g:\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$, $x\mapsto\sqrt{x}$.

Aufgabe 13.

Stellen Sie die komplexen Zahlen

a) $z_1 = -2+3i$, $z_2 = 6-4i$, $z_3 = -1-\frac{i}{2}$, $z_4 = -5i$ als Punkte

und

b) $z_5 = 3{,}5+5i$, $z_6 = 4i$, $z_7 = -\frac{9}{4}+\frac{7i}{4}$, $z_8 = 6$ als Vektoren

in der Gaußschen Zahlenebene dar.

Aufgabe 14. Berechnen Sie!

a) $3(-1+4i)-2(7-i)$ b) $(3+2i)(2-i)$ c) $(i-2)[2(1+i)-3(i-1)]$

d) $\frac{2-3i}{4-i}$ e) $(4+i)(3+2i)(1-i)$ f) $\frac{(2+i)(3-2i)(1+2i)}{(1-i)^2}$

g) $(2i-1)^2\left(\frac{4}{1-i}+\frac{2-i}{1+i}\right)$ h) $\frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}$ i) $3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2-2\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$

Aufgabe 15. Überprüfen Sie die Gültigkeit der Gleichung $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}$ anhand der komplexen Zahlen $z_1 = 2-3i$ und $z_2 = -4+i$

Aufgabe 16. Berechnen Sie für $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -2 + 4i$, $z_3 = \sqrt{3} - 2i$ die folgenden Ausdrücke.

a) $z_1^2 + 2z_1 - 3$ b) $|2z_2 - 3z_1|^2$ c) $|z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1|$

d) $\left|\frac{z_1+z_2+1}{z_1-z_2+i}\right|$ e) $\frac{1}{2}\left(\frac{z_3}{\bar{z}_3} + \frac{\bar{z}_3}{z_3}\right)$ f) $\overline{(z_2 + z_3)(z_1 - z_3)}$

g) $|z_1^2 + \bar{z}_2^2|^2 + |\bar{z}_3^2 - z_2^2|^2$ h) $\mathrm{Re}(2z_1^3 + 3z_2^2 - 5z_3^2)$ i) $\mathrm{Im}(z_1 z_2/z_3)$

Aufgabe 17. Schreiben Sie jede der folgenden komplexen Zahlen in trigonometrischer und in Exponentialform.

a) $2 - 2i$ b) $-1 + \sqrt{3}i$ c) $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ d) $-i$ e) -4 f) $-2\sqrt{3} - 2i$

g) $\sqrt{2}i$ h) $\sqrt{3}/2 - 3i/2$.

Aufgabe 18. Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in die Gaußsche Zahlenebene ein bestimmen Sie jeweils ihre kartesische Form.

a) $6(\cos 135° + i \sin 135°)$ b) $12(\cos 90° + i \sin 90°)$ c) $4(\cos 315° + i \sin 315°)$

d) $2e^{i5\pi/4}$ e) $5e^{i7\pi/6}$ e) $3e^{i2\pi/3}$

Aufgabe 19. Zeigen Sie!

a) $\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^3(\alpha)$,

b) $\cos(4\alpha) = 8\sin^4(\alpha) - 8\sin^2(\alpha) + 1$.

Aufgabe 20. Bestimmen Sie alle komplexen Wurzeln und zeichnen Sie diese in die Gaußsche Zahlenebene ein.

a) Quadratwurzeln von $2\sqrt{3} - 2i$,

b) 5-te Wurzeln von $-4 + 4i$,

c) 3-te Wurzeln von $2 + 2\sqrt{3}i$

d) 4-te Wurzeln von $-16i$,

e) 6-te Wurzeln von 64,

f) 3-te Wurzeln von -1.