# Mathematik für Infotronik (32)

Gerald Kupris

12.01.2011

# Restliche Stunden Mathematik 1. Semester

10.01.2011 (Mo) 09:45 Uhr: Auswertung Fragebogen, Exponentialfunktion, e-funktion

12.01.2011 (Mi) 09:45 Uhr: Logarithmusfunktion, Logarithmusregeln

12.01.2011 (Mi) 11:45 Uhr: Ableitung und Integration von e-Funktion und Logarithmus

13.01.2011 (Do) 09:45 Uhr: Wiederholung Integration, Integration durch Substitution

17.01.2011 (Mo) 09:45 Uhr: Partielle Integration, Partialbruchzerlegung

19.01.2011 (Mi) 08:00 Uhr: Rechenbeispiele, Flächenberechnung, Schwerpunkt

19.01.2011 (Mi) 09:45 Uhr: Anwendung der Integration, numerische Methoden

20.01.2011 (Do) 09:45 Uhr: allgemeine Wiederholung, Prüfungsvorbereitung

08.02.2011 (Di) 11:00 Uhr: Prüfung

# Wiederholung: Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen spielen in den Anwendungen der Technik eine bedeutende Rolle. Sie werden z.B. benötigt bei der Beschreibung von Abkling-, Sättigungs-, und Wachstumsprozessen sowie bei gedämpften Schwingungen und in der Statistik.

Lässt man für den Exponenten in einer Potenz $a^n$ mit positiver Basis $a \neq 1$ beliebige reelle Werte zu, so gelangt man zu den Exponentialfunktionen.

Eine Funktion $f$, die sich in der Form

$$f(x) = a^x, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

darstellen lässt, bezeichnet man als **Exponentialfunktion** mit Basis $a$.

a - Basis
x - Exponent

# Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen werden als Logarithmusfunktion bezeichnet. In ähnlicher Weise wie Wachstumsprozesse durch Exponentialfunktionen beschrieben werden, lassen sich unsere Sinneswahrnehmungen durch Logarithmusfunktionen beschreiben. Viele subjektive Sinneswahrnehmungen verlaufen nicht proportional zu den physikalischen Größen, sondern entsprechend einer Logarithmusfunktion.

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis $a$ bezeichnet man als **Logarithmusfunktion** zur Basis $a$:

$$f(x) = a^x \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \log_a x.$$

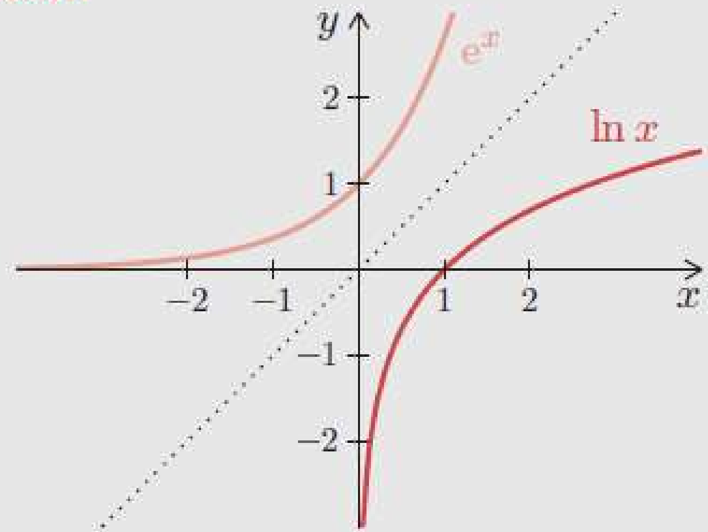
Die Logarithmusfunktion zur Basis e bezeichnet man als **natürliche Logarithmusfunktion**:

$$f(x) = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \ln x.$$

# Natürliche Logarithmusfunktion

## Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion

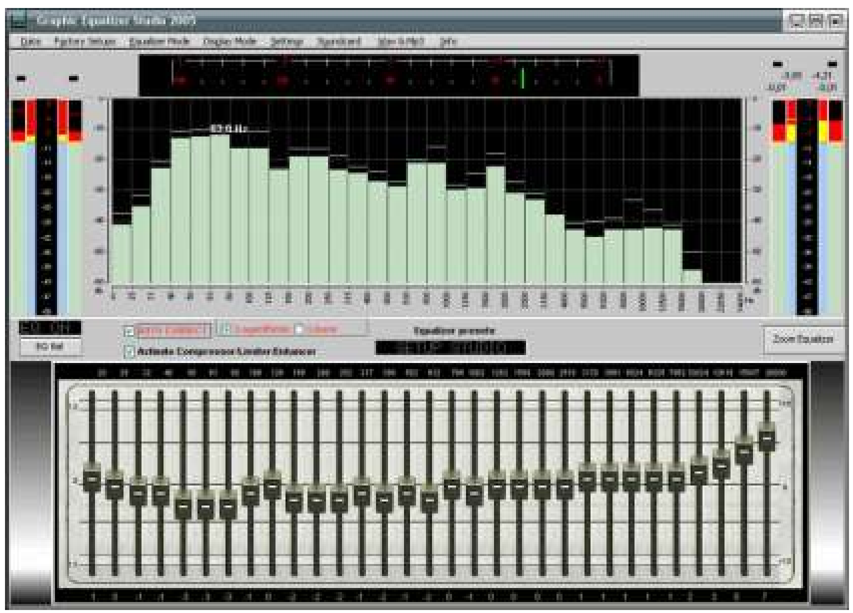
- Definitionsbereich: $D = (0, \infty)$
- Wertebereich: $W = \mathbb{R}$
- Monotonie: streng monoton wachsend
- Asymptoten: $y$-Achse für $x \to 0$
- Nullstelle: $x = 1$

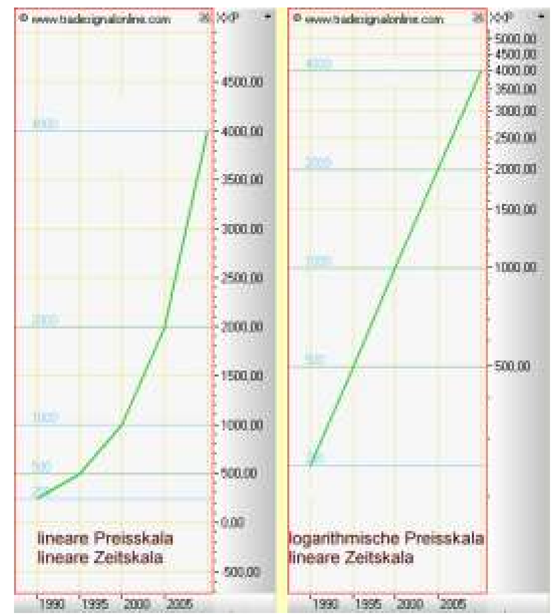



y = f(x) = ln (x)

# Logarithmische Skala

Die logarithmische Darstellung basiert auf einer Skale, die nicht den Wert einer physikalischen Größe verwendet, sondern den Logarithmus ihres Zahlenwerts. Bei der logarithmischen Darstellung werden in einem Diagramm die Werte einer oder mehrerer Achsen logarithmiert aufgetragen. Eine solche Darstellung ist vor allem dann hilfreich, wenn der Wertebereich der dargestellten Daten viele Größenordnungen umfasst. Durch die logarithmische Darstellung wird daraus ein besser überschaubarer Bereich.





# Rechenregeln für Logarithmusfunktionen

## Rechenregeln für Logarithmusfunktionen

Logarithmen von Produkten kann man in Summen einzelner Logarithmen zerlegen:

- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$

Logarithmen von Quotienten kann man in Differenzen einzelner Logarithmen zerlegen:

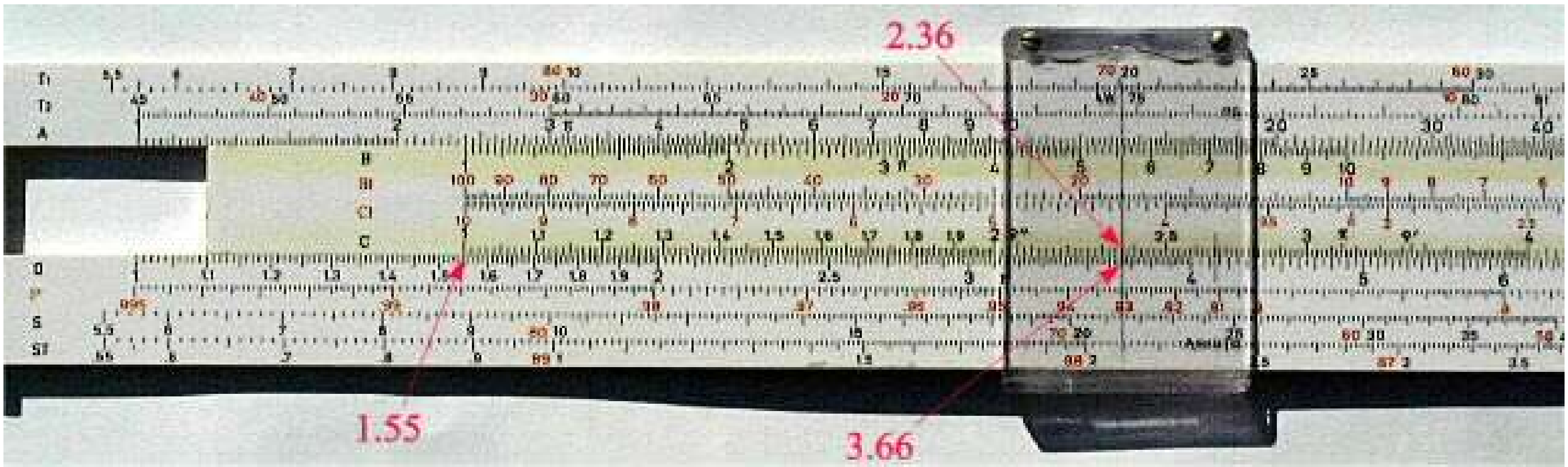
- $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln x_1 - \ln x_2$

Logarithmen von Potenzen kann man in Produkte mit der Hochzahl zerlegen:

- $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a x$
- $\ln(x^b) = b \cdot \ln x$

Beispiele

# Rechenschieber




1.55 × 2.36 = 3.66
15.5 × 23.6 = 366
1.55 × 236 = 366
155 × 236 = 36600

# Basis der Exponential- und Logarithmusfunktion

**Zusammenhang von $a^x$ und $\mathrm{e}^x$**

Eine Exponentialfunktion mit Basis $a$ lässt sich als e-Funktion darstellen:

$$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}.$$

**Zusammenhang von $\log_a x$ und $\ln x$**

Eine Logarithmusfunktion zur Basis $a$ lässt sich als ln-Funktion darstellen:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Beispiele

# Areasinus Hyperbolicus und Areakosinus Hyperbolicus

Der Sinus Hyperbolicus ist auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion nennt man **Areasinus Hyperbolicus**:

$$f(x) = \sinh x \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \operatorname{arsinh} x.$$

Der Kosinus Hyperbolicus ist auf dem Intervall $[0, \infty)$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion nennt man **Areakosinus Hyperbolicus**:

$$f(x) = \cosh x \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \operatorname{arcosh} x.$$

# Areatangens Hyperbolicus und Areakotangens Hyperbolicus

Der Tangens Hyperbolicus ist auf ganz $\mathbb{R}$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion nennt man **Areatangens Hyperbolicus**:

$$f(x) = \tanh x \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \operatorname{artanh} x.$$

Der Kotangens Hyperbolicus ist auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ umkehrbar. Die Umkehrfunktion nennt man **Areakotangens Hyperbolicus**:

$$f(x) = \coth x \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \operatorname{arcoth} x.$$

# Dezibel (dB)

Das Bel (B) ist eine nach Alexander Graham Bell benannte Hilfsmaßeinheit zur Kennzeichnung von Pegeln und Maßen. Diese logarithmischen Größen finden ihre Anwendung unter anderem in der Akustik und allgemein in der Technik. In der Praxis ist die Verwendung des zehnten Teils eines Bels (Dezibel, Einheitenzeichen dB) üblich.

Das Bel dient zur Kennzeichnung des dekadischen Logarithmus des Verhältnisses zweier gleichartiger Leistungs- bzw. Energiegrößen $P_1$ und $P_2$:

$$L = \lg \frac{P_2}{P_1}\ \mathrm{B} = 10 \lg \frac{P_2}{P_1}\,\mathrm{dB}$$

Soll von Feldgrößen ausgehend ein Pegel oder Maß berechnet werden, geschieht dies über das Verhältnis der Quadrate dieser Größen und es gilt:

$$L = 10 \lg \frac{P_2}{P_1}\,\mathrm{dB} = 10 \lg \frac{\tilde{x}_2^2}{\tilde{x}_1^2}\,\mathrm{dB} = 20 \lg \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_1}\,\mathrm{dB}$$

# Verwendung des dB mit anderen Maßeinheiten

So wie jede andere Maßeinheit kann das Bel bzw. Dezibel zusammen mit anderen Maßeinheiten verwendet werden, wenn damit eine Größe beschrieben wird, bei der ein Pegel oder Maß durch Multiplikation oder Division mit einer anderen Größe verknüpft wird.
Beispiele dafür sind das Dämpfungsmaß einer Leitung in Dezibel pro Meter (dB/m) oder der bezogene Schallleistungspegel einer ausgedehnten Schallquelle in Dezibel pro Quadratmeter (dB/m²).

Weiterhin sind Anhängsel gebräuchlich, um das Verhältnis zu einer Bezugsgröße auszudrücken:

| | |
|---|---|
| **dBu** | Spannungspegel mit der Bezugsgröße 0,7746 V |
| **dBV** | Spannungspegel mit der Bezugsgröße 1 V |
| **dBA** | A-bewerteter Schalldruckpegel |
| **dBm** | Leistungspegel mit der Bezugsgröße 1 mW |
| **dBW** | Leistungspegel mit der Bezugsgröße 1 W |

# Warum rechnet man in dB?

Die Zahlen, mit denen der Ingenieur täglich zu tun hat, sind oft riesig gross oder winzig klein. Meist kommt es dabei auch nur auf das Verhältnis zweier Grössen an. Eine Mobilfunkbasisstation sendet beispielsweise, Antennengewinn eingerechnet, mit ca. 80 W in Richtung Handy. Am Mobilfunkgerät kommen davon nur 0,000 000 002 W an, das sind 0,000 000 002 5 % der Sendeleistung.

Immer wenn grosse Zahlenbereiche zu überdecken sind, rechnet man vorteilhaft mit dem Logarithmus der Zahlen. So sendet die erwähnte Basisstation beispielsweise mit +49 dBm, das Handy empfängt -57 dBm, der Pegelunterschied beträgt +49 dBm - (-57 dBm) = 106 dB.

Die in dB ausgedrückten Zahlen sind, wie man sieht, wesentlich handlicher. Ausser-dem sind Addition und Subtraktion der dB-Werte leichter im Kopf zu rechnen als die entsprechende Multiplikation oder gar die Division zweier linearer Werte. Das ist das Hauptargument für das Rechnen in dB.

# Beispiele zu dB

$P_1$ sei 200 W und $P_2$ sei 100 mW. Wie groß ist das Verhältnis a in dB?

$$a = 10 \cdot \log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right) \mathrm{dB} = 10 \cdot \log_{10}(2000)\,\mathrm{dB} = 33{,}01\,\mathrm{dB}$$

Heute rechnet man nahezu ausschließlich mit dem Logarithmus zur Basis 10.
Dieser Logarithmus wird mit dem Zeichen **lg** abgekürzt. In alten Lehrbüchern findet man manchmal Angaben in Neper, das ist der Logarithmus zur Basis e.

Das Zurückrechnen auf lineare Werte geht natürlich auch. Man muss zunächst den dB Wert auf Bel umrechnen. Das geschieht, indem man den Wert durch 10 teilt. Anschliessend potenziert man die Zahl 10 mit dem neuen Wert.

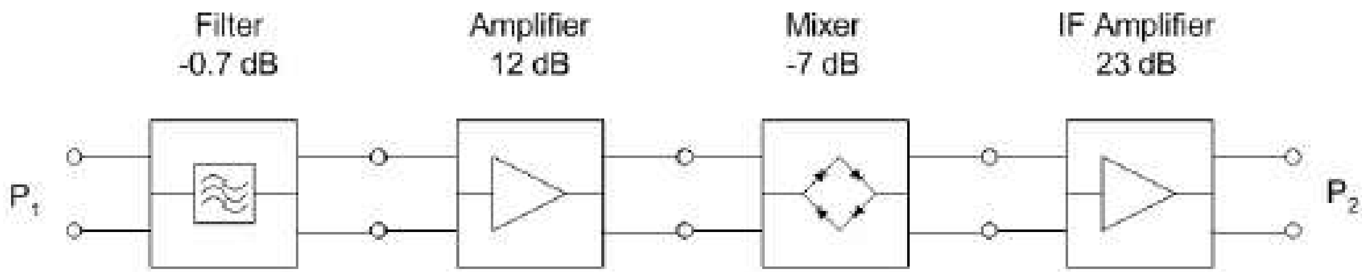
Beispiel: a = 23 dB, wie groß ist $P_1/P_2$?

*Wir rechnen zuerst 23/10=2,3, dann ergibt sich:*

$$\frac{P_1}{P_2} = 10^{2,3} = 199{,}5$$

# Rechnen mit dB

Bei der Reihenschaltung (Kaskadierung) von Vierpolen lässt sich die Gesamtverstärkung (bzw. Gesamtdämpfung) leicht durch Addition der dB Werte berechnen.




Die Gesamtverstärkung errechnet sich wie folgt:

$$a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

Beispiel: die Abbildung zeigt die Eingangsstufen eines Empfängers. Die Gesamtverstärkung a ergibt sich zu:

$$a = -0{,}7\text{ dB} + 12\text{ dB} - 7\text{ dB} + 23\text{ dB} = 27{,}3\text{ dB}.$$

# Aufgabe

1. Ein Körper besitzt zur Zeit t = 0 die Temperatur $T_0$ = 30°C und wird dann durch einen Luftstrom der konstanten Temperatur $T_L$ = 20°C gekühlt, wobei gilt:

$$T(t) = (T_0 - T_L)\cdot e^{-kt} + T_L$$

(T(t): Temperatur zum Zeitpunkt t, k > 0: Konstante)

a) Nach 5 Minuten beträgt die Körpertemperatur 28°C. Bestimmen Sie aus diesem Messwert die Konstante k.

b) Welche Temperatur besitzt der Körper nach 60 Minuten?

c) Wann ist der Abkühlungsprozess beendet, welche Temperatur $T_E$ besitzt der Körper dann? Skizzieren Sie den Temperaturverlauf.

# Aufgabe

2. Beim Fallschirmspringen gilt unter der Annahme, dass der Luftwiderstand R der Fall-geschwindigkeit v proportional ist ($R = c \cdot v$), das folgende Geschwindigkeits-Gesetz:

$$v(t) = \frac{m \cdot g}{c}\left(1 - e^{-c/m\,t}\right) \qquad t \geq 0$$

(m: Masse des Fallschirmspringers incl. Fallschirm, g: Erdbeschleunigung, $c > 0$: Reibungsfaktor, abhängig von den äußeren Umweltbedingungen).

a) Welche Endgeschwindigkeit $v_E$ erreicht der Fallschirmspringer?

b) Skizzieren Sie das Geschwindigkeits-Zeit-Gesetz.

c) Nach welcher Zeit $t_h$ wird die halbe Endgeschwindigkeit erreicht?

# Aufgaben

3. Die Gaußsche Glockenkurve hat die Formel:

$$y = a \cdot e^{-b(x-c)^2} \qquad -\infty < x < \infty$$

Bestimmen Sie die Kurvenparameter a,b > 0 und c so, dass das Maximum an der Stelle x = 10 angenommen wird und die Punkte A = (5; 8) und B = (12; 10) auf der Kurve liegen. Skizzieren Sie den Kurvenverlauf.

4. Zwischen dem Luftdruck p und der Höhe h (gemessen gegen Meeresniveau) gilt unter Annahme konstanter Lufttemperatur der folgende Zusammenhang:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-h/a} \qquad h \geq 0 \text{ (in m)}$$

($p_0$ = 1,013 bar: Luftdruck an der Erdoberfläche;  a = 7991 m)
a) Geben Sie die Höhe als Funktion des Luftdruckes an und skizzieren Sie den Verl.
b) In welcher Höhe hat sich der Luftdruck halbiert?
c) Wie groß ist der Luftdruck in 10 km Höhe?

# Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin  2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org

http://www.matheplanet.com