Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (31)

Gerald Kupris

10.01.2011

Alles Gute und viel Erfolg im Neuen Jahr 2011!

Restliche Stunden Mathematik 1. Semester

10.01.2011 (Mo)	09:45 Uhr:	Auswertung Fragebogen, Exponentialfunktion, e-Funktion
12.01.2011 (Mi)	09:45 Uhr:	Logarithmusfunktion, Logarithmusregeln
12.01.2011 (Mi)	11:45 Uhr:	Ableitung und Integration von e-Funktion und Logarithmus
13.01.2011 (Do)	09:45 Uhr:	Wiederholung Integration, Integration durch Substitution
17.01.2011 (Mo)	09:45 Uhr:	Partielle Integration, Partialbruchzerlegung
19.01.2011 (Mi)	08:00 Uhr:	Rechenbeispiele, Flächenberechnung, Schwerpunkt
19.01.2011 (Mi)	09:45 Uhr:	Anwendung der Integration, numerische Methoden
20.01.2011 (Do)	09:45 Uhr:	allgemeine Wiederholung, Prüfungsvorbereitung
08.02.2011 (Di)	11:00 Uhr:	Prüfung

Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen spielen in den Anwendungen der Technik eine bedeutende Rolle. Sie werden z.B. benötigt bei der Beschreibung von Abkling-, Sättigungs-, und Wachstumsprozessen sowie bei gedämpften Schwingungen und in der Statistik.

Lässt man für den Exponenten in einer Potenz a^n mit positiver Basis $a \neq 1$ beliebige reelle Werte zu, so gelangt man zu den Exponentialfunktionen.

Eine Funktion f, die sich in der Form

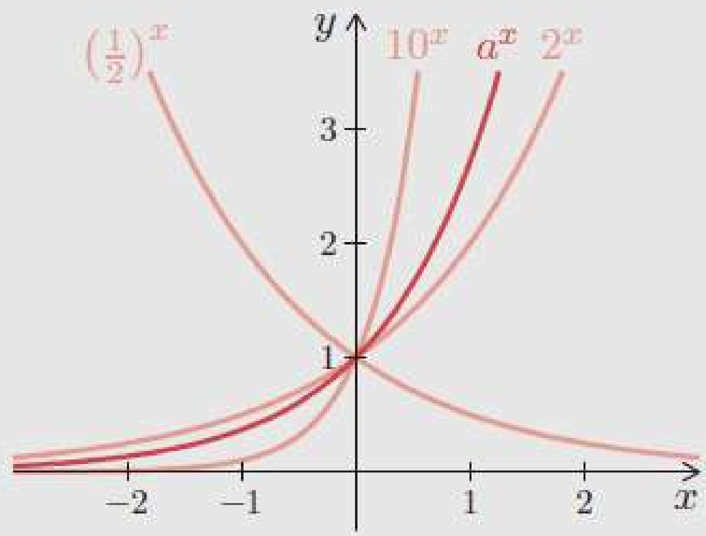
$$f(x) = a^x, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

darstellen lässt, bezeichnet man als **Exponentialfunktion** mit Basis a.

a - Basis
x - Exponent

Eigenschaften der Exponentialfunktionen

- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
- Wertebereich: $W = (0, \infty)$
- Monotonie:
  für $0 < a < 1$ streng monoton fallend auf $\mathbb{R}$,
  für $a > 1$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$
- Asymptoten:
  für $0 < a < 1$ x-Achse für $x \to \infty$,
  für $a > 1$ x-Achse für $x \to -\infty$
- Achsenabschnitt: $(0|1)$



Die Exponentialfunktion $y = a^x$ ist nicht mit der Potenzfunktion $y = x^n$ zu verwechseln.
Bei der Exponentialfunktion ist die Basis fest und der Exponent variabel.
Bei der Potenzfunktion ist der Exponent fest und die Basis variabel.

Rechenregeln für Potenzen und Exponentialfunktionen

Bei der Multiplikation oder Division von Exponentialfunktionen mit derselben Basis a kann man die Exponenten zusammenfassen:

- $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$
- $\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$

Bei Potenzen von Potenzen multiplizieren sich die Hochzahlen:

- $(a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 x_2}$

Diese Rechenregeln gelten für alle Zahlen x_1 und x_2 aus $\mathbb{R}$.

Beispiele

Spezielle Exponentialfunktionen

Von besonderer Bedeutung sind die Exponentialfunktionen:

$$y = e^x \qquad \text{und} \qquad y = \left(\frac{1}{e}\right)^x = e^{-x}$$

Den Grenzwert der Zahlenfolge

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k = \mathrm{e} \approx 2{,}718281828459045235\overline{36}$$

bezeichnet man als **Eulersche Zahl** e.

e-Funktion

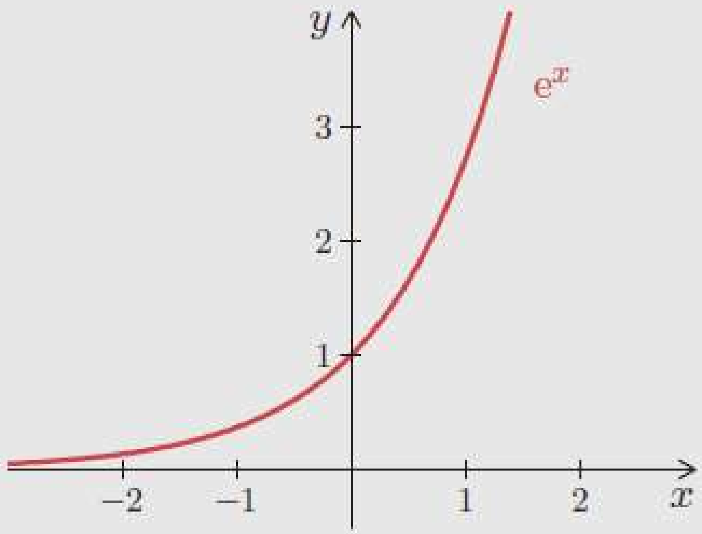
Die Exponentialfunktion zur Basis e

$$f(x) = e^x$$

bezeichnet man als **natürliche Exponentialfunktion** oder kurz als **e-Funktion**.

Eigenschaften der e-Funktion

- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
- Wertebereich: $W = (0, \infty)$
- Monotonie: streng monoton wachsend
- Asymptoten: x-Achse für $x \to -\infty$
- Achsenabschnitt: $(0 | 1)$



gebräuchliche Schreibweisen:
$y = f(x) = e^x$ $y = f(x) = \exp(x)$

Rechenregeln für die e-Funktion

Bei der Multiplikation oder Division von e-Funktionen kann man die Exponenten zusammenfassen:

- $e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$
- $\dfrac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2}$

Bei Potenzen von Potenzen multiplizieren sich die Hochzahlen:

- $(e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1\,x_2}$

Diese Rechenregeln gelten für alle Zahlen x_1 und x_2 aus $\mathbb{R}$.

Beispiele

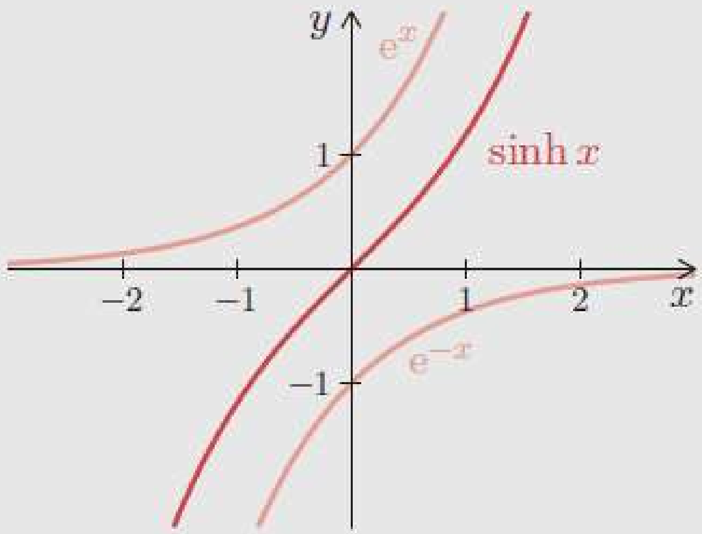
Sinus Hyperbolicus

Die Funktion **Sinus Hyperbolicus** ist definiert durch

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Eigenschaften des Sinus Hyperbolicus

- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
- Wertebereich: $W = \mathbb{R}$
- Symmetrie: ungerade
- Monotonie: streng monoton wachsend
- Nullstelle: $x = 0$



Kosinus Hyperbolicus

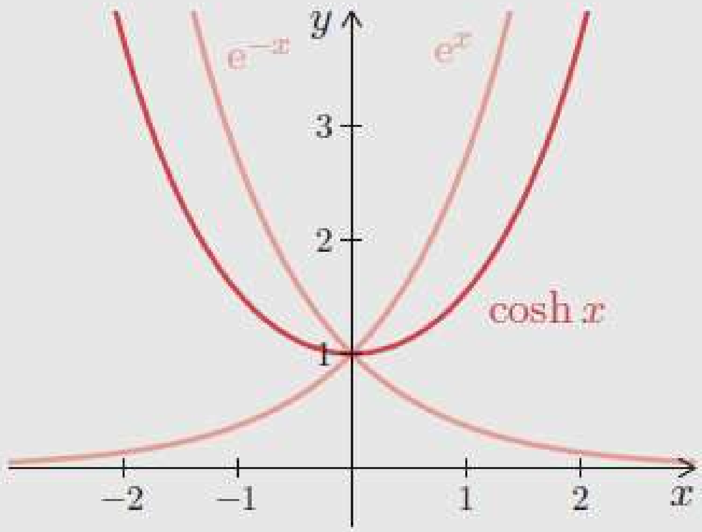
Die Funktion **Kosinus Hyperbolicus** ist definiert durch

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

In der Technik wird der Kosinus Hyperbolicus auch als **Kettenlinie** oder **Katenoide** bezeichnet.

Eigenschaften des Kosinus Hyperbolicus

- Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
- Wertebereich: $W = [1, \infty)$
- Symmetrie: gerade
- Monotonie:
  streng monoton fallend auf $(-\infty, 0]$,
  streng monoton wachsend auf $[0, \infty)$



Zusammenhang zwischen Sinus und Kosinus Hyperbolicus

Zwischen Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus besteht eine ähnliche Beziehung wie zwischen Sinus und Kosinus.

Es gilt folgende Gleichung:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

Beweis

Sinus Hyperbolicus und Kosinus Hyperbolicus haben noch weitere Eigenschaften, die eine gewisse Ähnlichkeit zu Sinus und Kosinus aufweisen. Dazu zählen Additionstheoreme für $\sinh(x \pm y)$ und $\cosh(x \pm y)$, sowie Formeln für das doppelte Argument $\sinh(2x)$ und $\cosh(2x)$.

Tangens Hyperbolicus und Kotangens Hyperbolicus

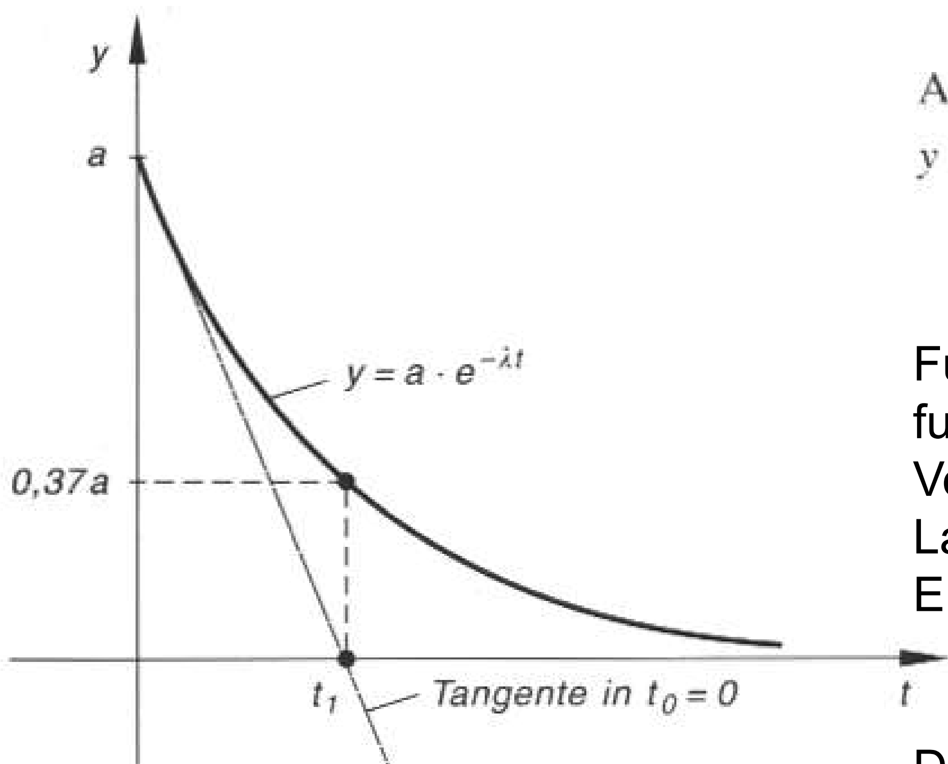
Die Funktion **Tangens Hyperbolicus** ist definiert durch

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

Die Funktion **Kotangens Hyperbolicus** ist definiert durch

$$\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Abklingfunktion



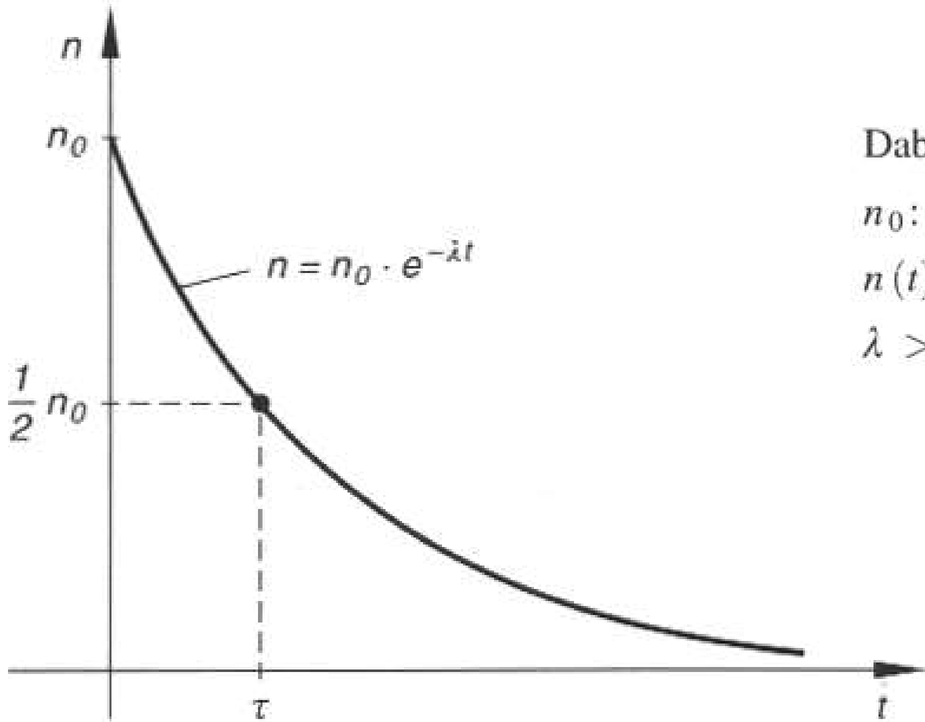
Abklingfunktion vom Typ

$y = a \cdot e^{-\lambda t}$ (für $t \geq 0$)

Funktionen dieser Art werden als Abklingfunktionen bezeichnet. Sie beschreiben Vorgänge, bei denen eine Größe y im Laufe der Zeit vom Anfangswert a auf den Endwert 0 (bei $t \to \infty$) abklingt.

Die Kurventangente in $t_0 = 0$ schneidet dabei die t-Achse an der Stelle $t_1 = 1/\lambda = \tau$. Der Funktionswert an dieser Stelle beträgt rund 37% des Anfangswertes.

Radioaktiver Zerfall



$$n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t} \qquad (t \geq 0)$$

Dabei bedeuten:

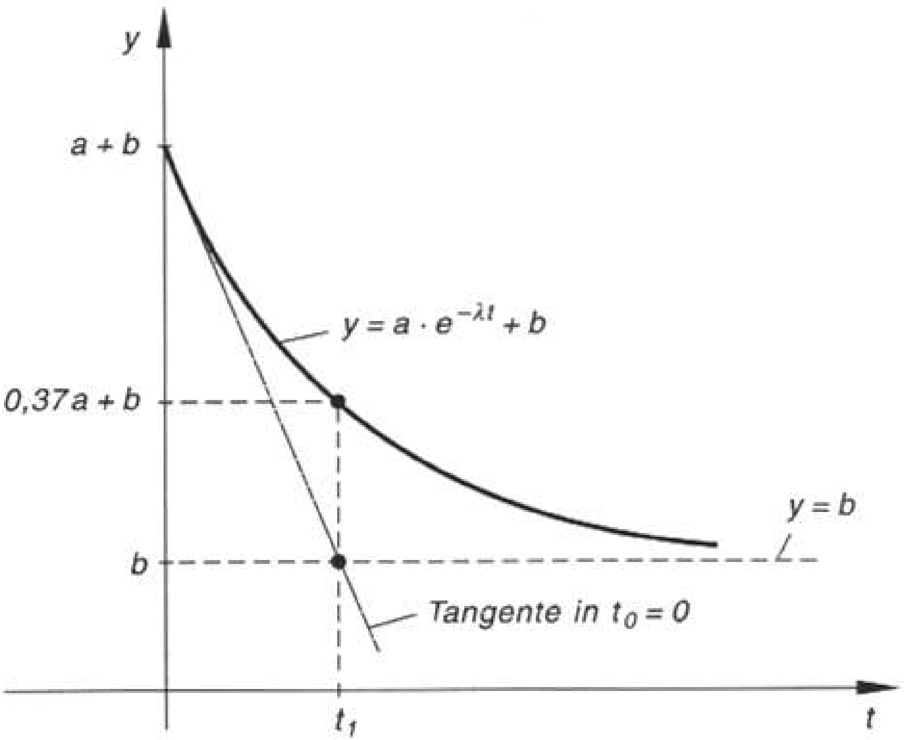
n_0: Anzahl der zu Beginn vorhandenen Atomkerne

$n(t)$: Anzahl der Atomkerne zur Zeit t

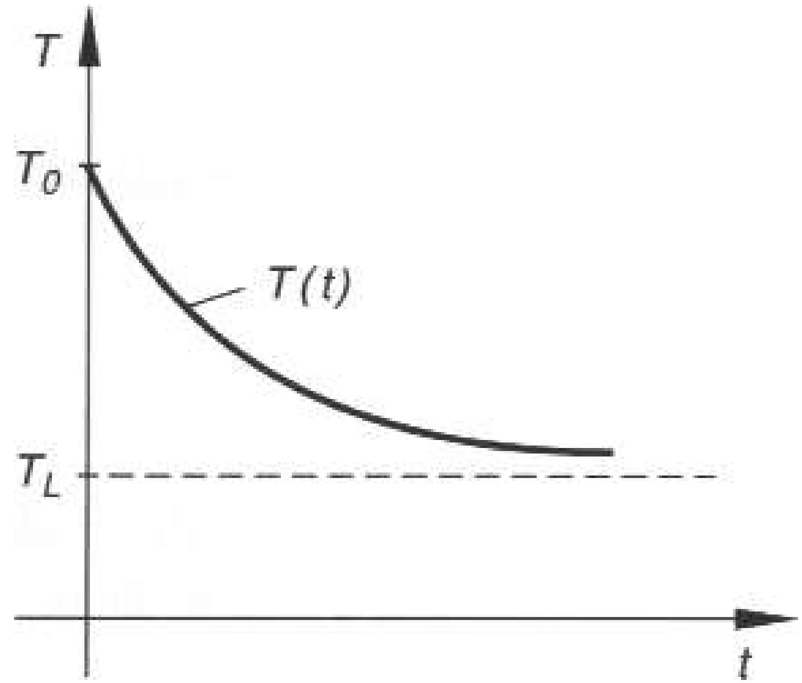
$\lambda > 0$: Zerfallskonstante

Auch: Entladung eines Kondensators
Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe

Abkühlungsgesetz

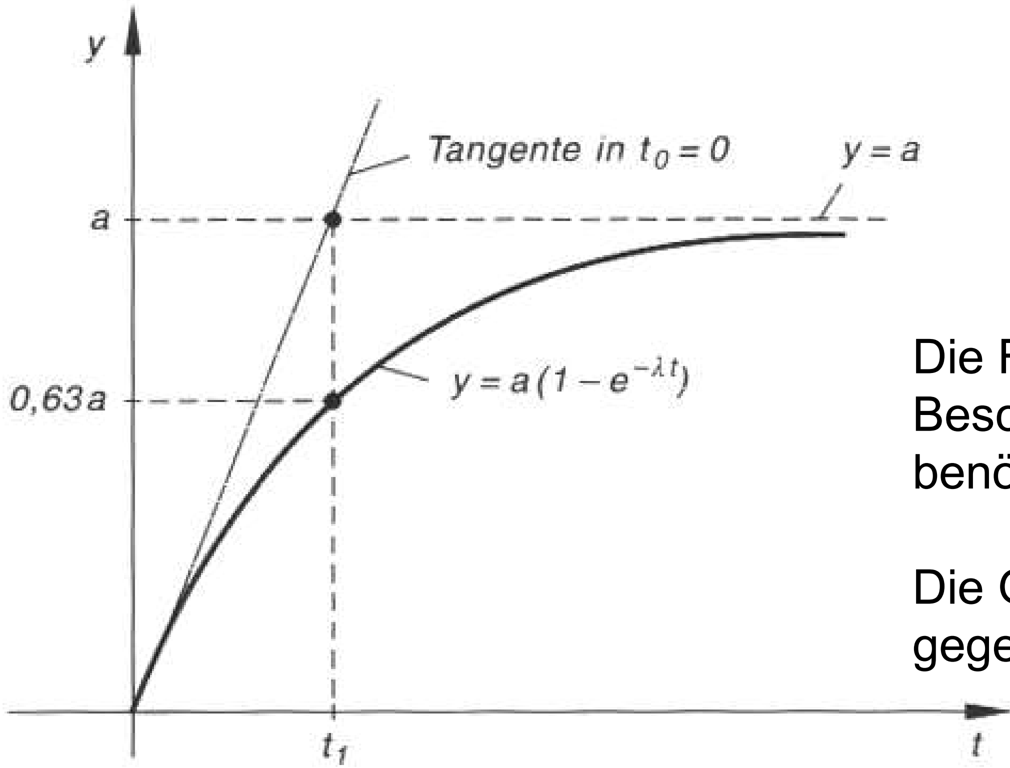


Abklingfunktion vom Typ
$y = a \cdot e^{-\lambda t} + b,\ t \geq 0$



$$T(t) = (T_0 - T_L) \cdot e^{-kt} + T_L \qquad (t \geq 0)$$

Sättigungsfunktion



Sättigungsfunktion vom Typ

$$y = a(1 - e^{-\lambda t}),\ t \geq 0$$

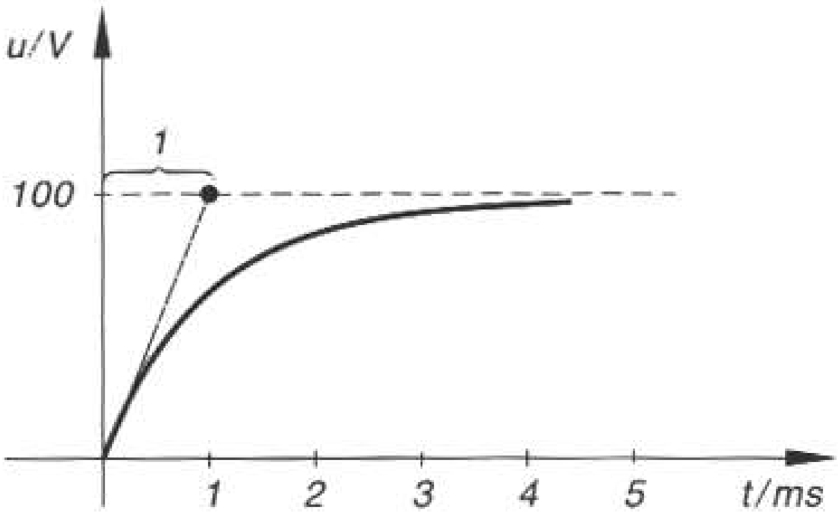
Die Funktion wird bei der mathematischen Beschreibung von Sättigungsprozessen benötigt und ist streng monoton wachsend.

Die Größe y strebt für $t \rightarrow \infty$ asymptotisch gegen den Grenzwert a.

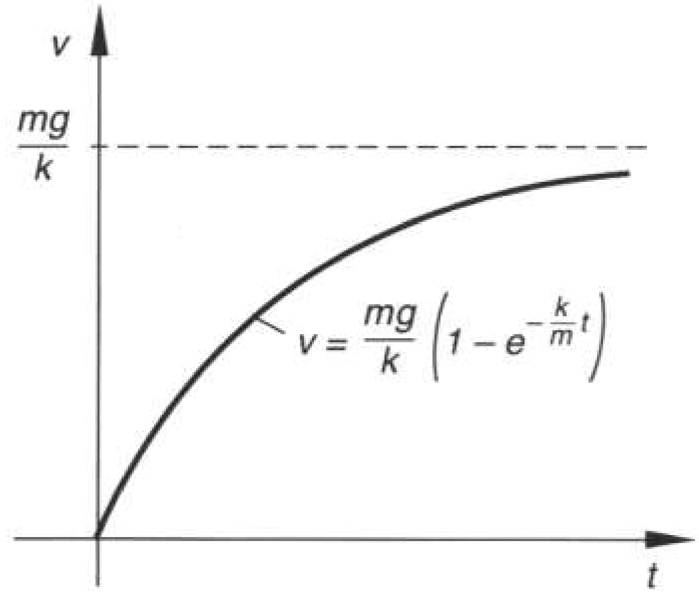
Die Kurventangente in $t_0 = 0$ schneidet dabei die Asymptote an der Stelle $t_1 = 1/\lambda = \tau$. Der Funktionswert an dieser Stelle beträgt rund 63% des Endwertes.

Beispiele für Sättigungsfunktionen

Aufladung eines Kondensators (gezeichnet für $u_0 = 100\,\mathrm{V}$ und $RC = 1\,\mathrm{ms}$)



Zeitlicher Verlauf der Fallgeschwindigkeit beim Fallschirmsprung



$$u(t) = u_0\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

$$v_E = \lim_{t \to \infty} v(t) = \lim \frac{mg}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\right) = \frac{mg}{k}$$

Wachstumsfunktionen

Zeitanhängige Wachstumsprozesse verlaufen meist exponentiell und lassen sich durch streng monoton wachsende Exponentialfunktionen beschreiben.

Beispielsweise genügt die Vermehrung von Bakterien dem Exponentialgesetz:

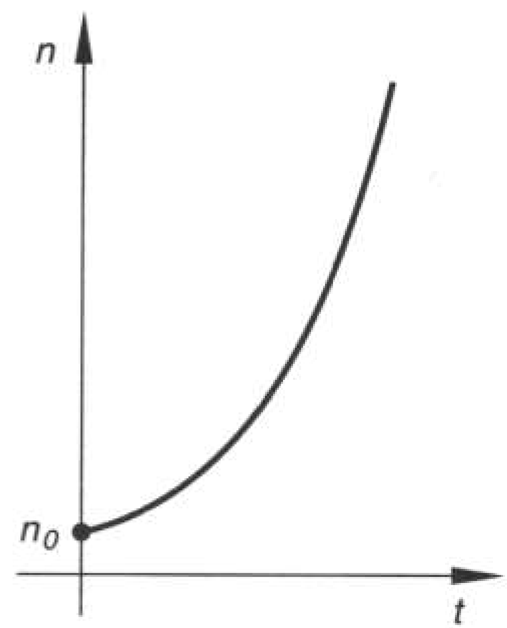
$$n(t) = n_0 \cdot e^{\alpha t} \qquad (t \geq 0)$$

Dabei bedeuten:

n_0: Anzahl der Bakterien zu Beginn $(t = 0)$

$n(t)$: Anzahl der Bakterien zur Zeit t

$\alpha > 0$: Wachstumsrate

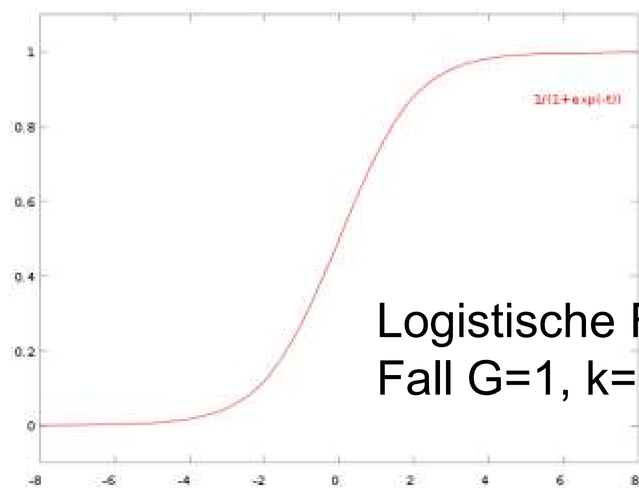


Logistische Funktion

Die logistische Verteilung charakterisiert eine stetige eindimensionale Verteilung und ist eine funktionelle Darstellung von Sättigungsprozessen mit unbegrenzter zeitlicher Ausdehnung.
Die logistische Funktion, wie sie sich aus der diskreten logistischen Gleichung ergibt, beschreibt den Zusammenhang zwischen der verstreichenden Zeit und einem Wachstum, beispielsweise einer idealen Bakterienpopulation. Hierzu wird das Modell des exponentiellen Wachstums modifiziert durch eine sich mit dem Wachstum verbrauchende Ressource – die Idee dahinter ist also z.B. ein Bakteriennährboden begrenzter Größe.

$$f(t) = G \cdot \frac{1}{1 + e^{-k \cdot G \cdot t}\left(\frac{G}{f(0)} - 1\right)}$$

G: obere Schranke
f(t): aktueller Bestand
k: Wachstumsrate

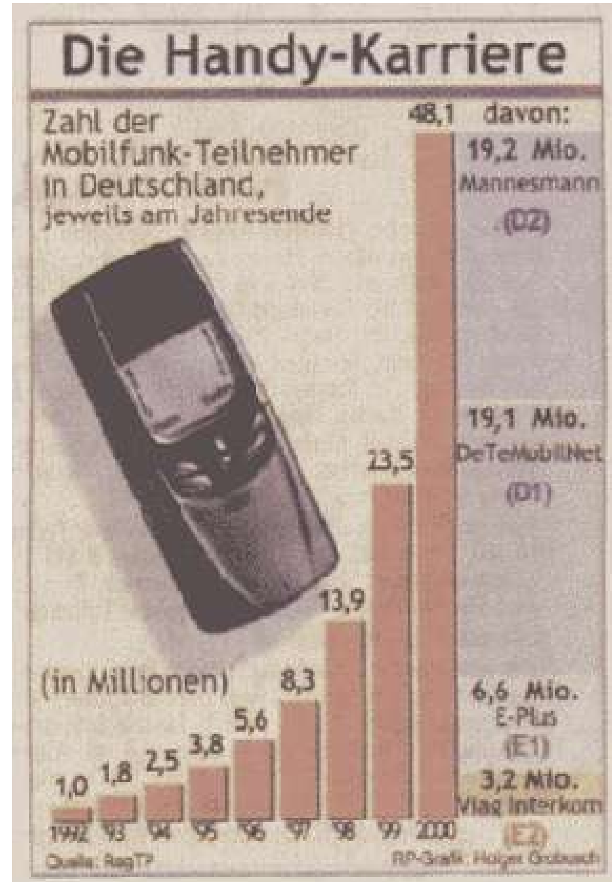


Logistische Funktion für den Fall G=1, k=1, f(0)=1/2

Beispiel: Anzahl der Mobilfunkteilnehmer in Deutschland

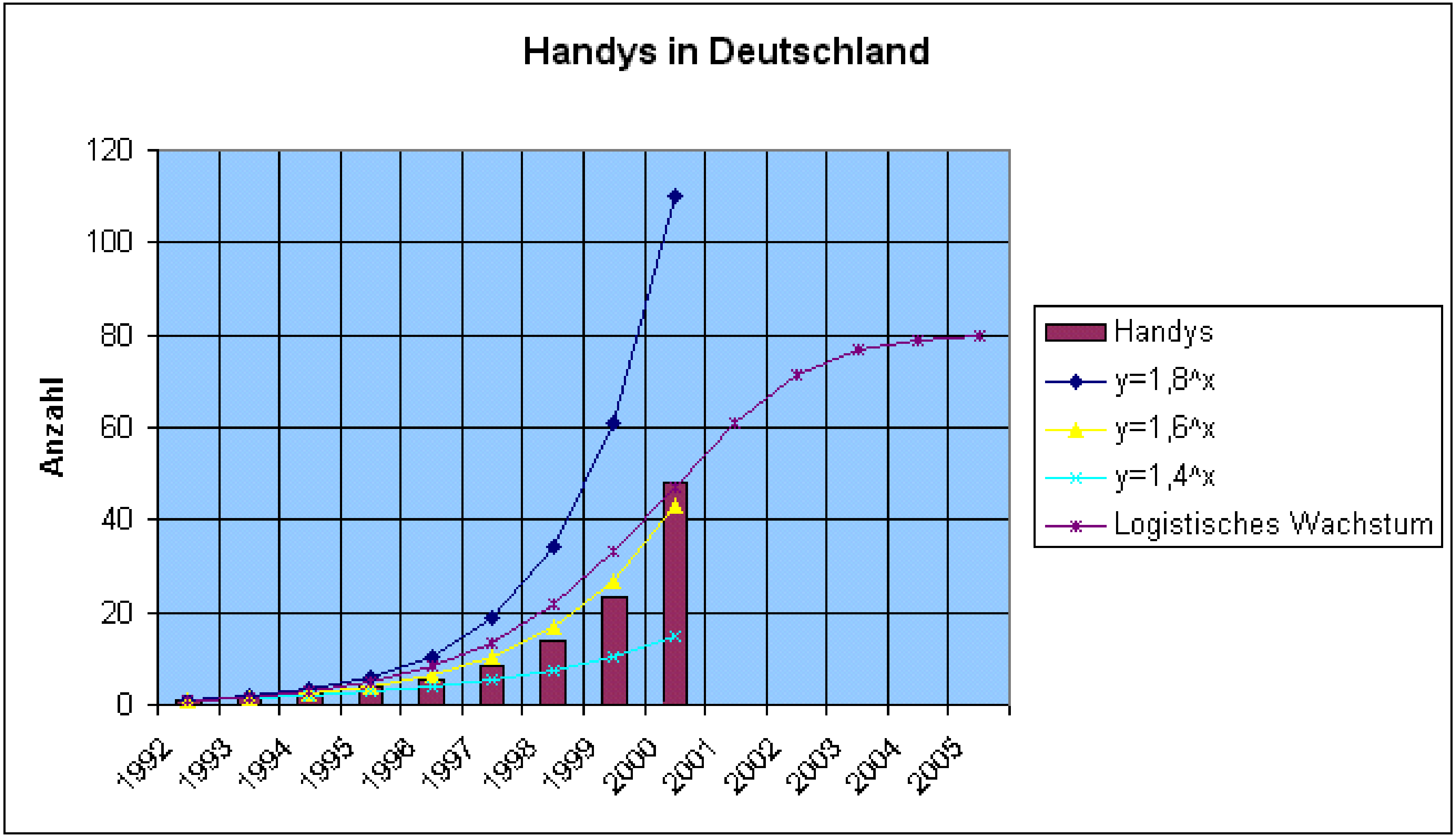
Die Zeitungsgrafik wirft unmittelbar die Frage auf:
wie wird sich die Zahl der Mobilfunkteilnehmer weiterentwickeln?
Die Zahlen weisen für die Jahre 1992 bis 2000 auf ein exponentielles Wachstum hin. Die Basis 1,6 nähert den Verlauf gut an.
Eine weitere exponentielle Entwicklung ist bei der Bevölkerungszahl von 80 Mio. aber unwahrscheinlich, auch wenn man ein "Zweithandy" annehmen würde. Dies erhöht lediglich den Sättigungswert. Wenn das

Wachstum von 1999 auf 2000 auch im Jahre 2001 gilt, dann würde der Bestand am Ende von 2001 schon weit über 80 Mio. liegen. Folglich steht dieses Beispiel modellhaft für das **logistische Wachstum**.



Titelseite Rheinische Post, Februar 2001

2001 prognostiziertes Wachstum



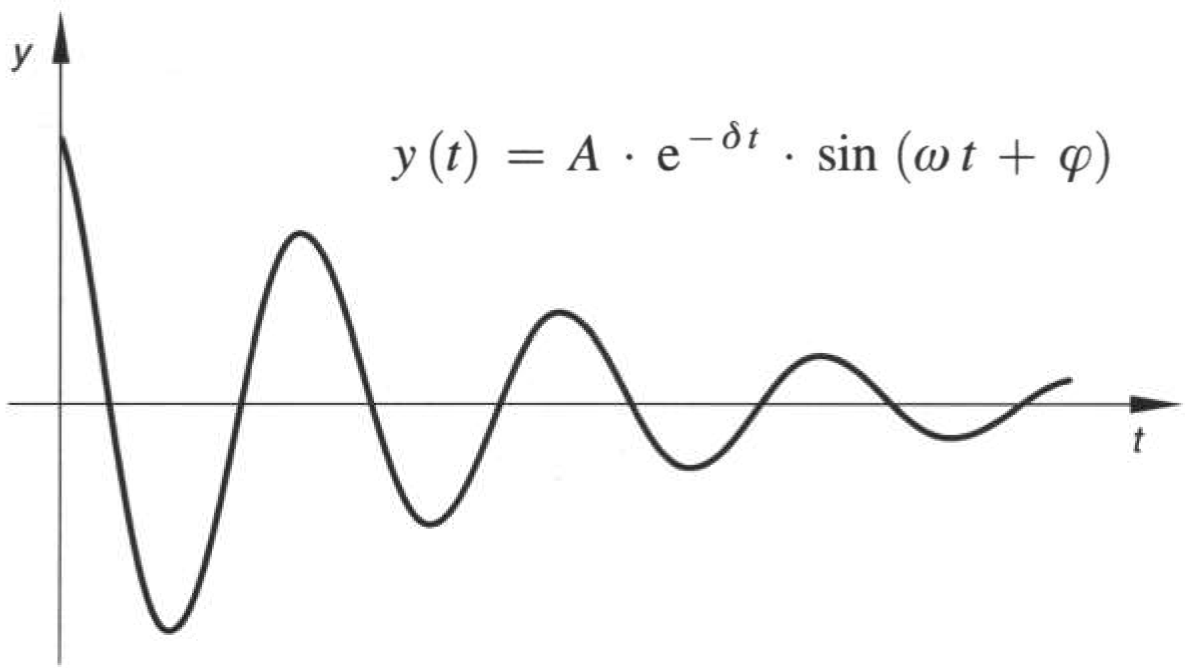
Meldung 08.04.2010

Anzahl der Mobilfunkteilnehmer in Deutschland wächst
Die Anzahl der Mobilfunkteilnehmer in Deutschland wächst: Gegen Ende des Jahres 2009 gab es 108,3 Millionen Mobilfunkteilnehmer - somit entfallen auf jeden einzelnen Bundesbürger im Schnitt 1,3 SIM-Karten.

Gedämpfte Schwingung

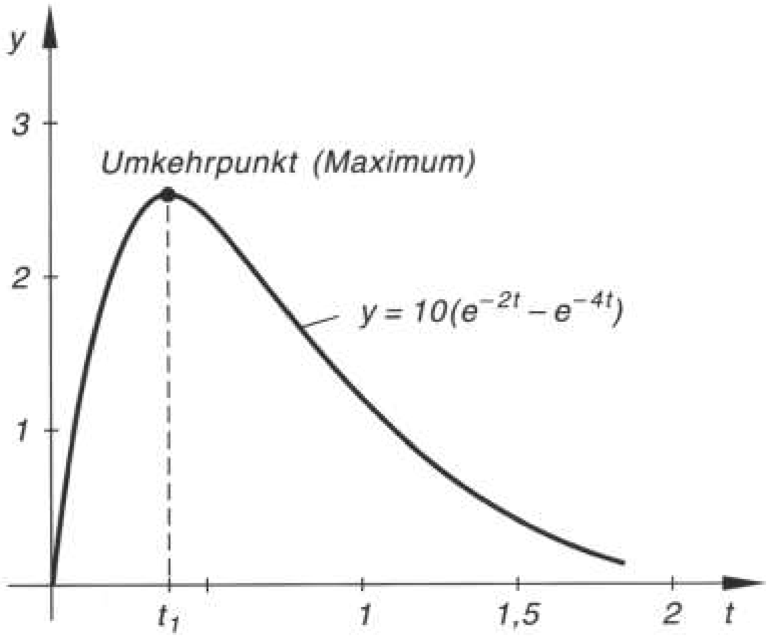
Ungedämpfte harmonische Schwingungen lassen sich bekanntlich durch zeitabhängige phasenverschobene Sinus- oder Kosinusfunktionen beschreiben.
Wird das schwingungsfähige (mechanische oder elektromagnetische) System jedoch gedämpft, so nimmt die Schwingungsamplitude im Laufe der Zeit ab und wir erhalten bei schwacher Dämpfung eine so genannte gedämpfte Schwingung.

$$y(t) = A \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \qquad (t \geq 0)$$

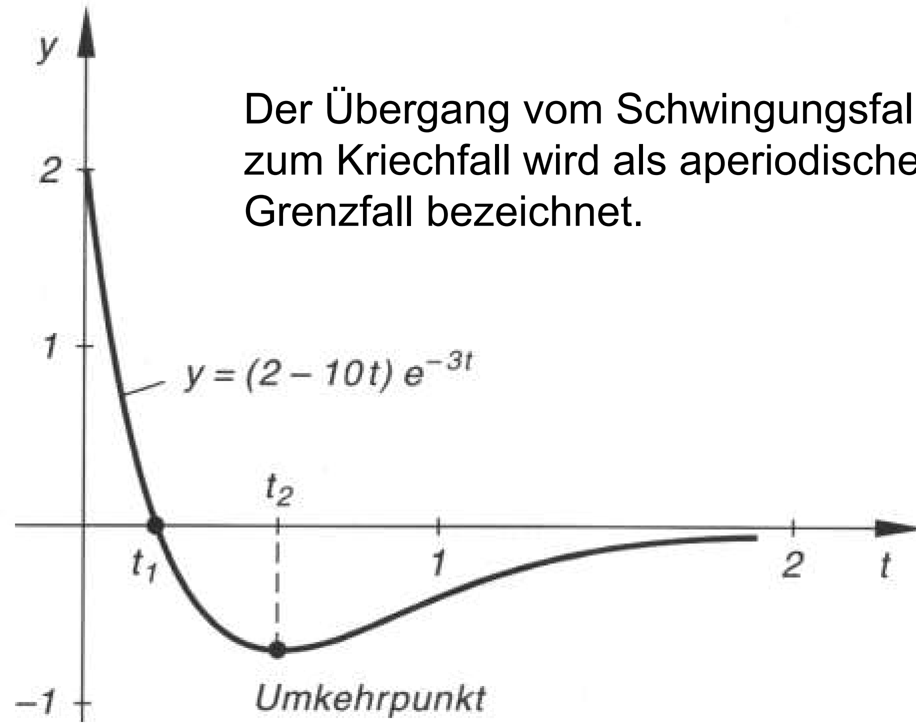


Kriechfall (aperiodisches Verhalten)

Der so genannte Kriechfall (aperiodisches Verhalten) tritt ein, wenn ein schwingungsfähiges System infolge zu großer Dämpfung (z.B. Reibung) zu keiner echten Schwinggung mehr fähig ist, sondern sich asymptotisch der Gleichgewichtslage nähert.



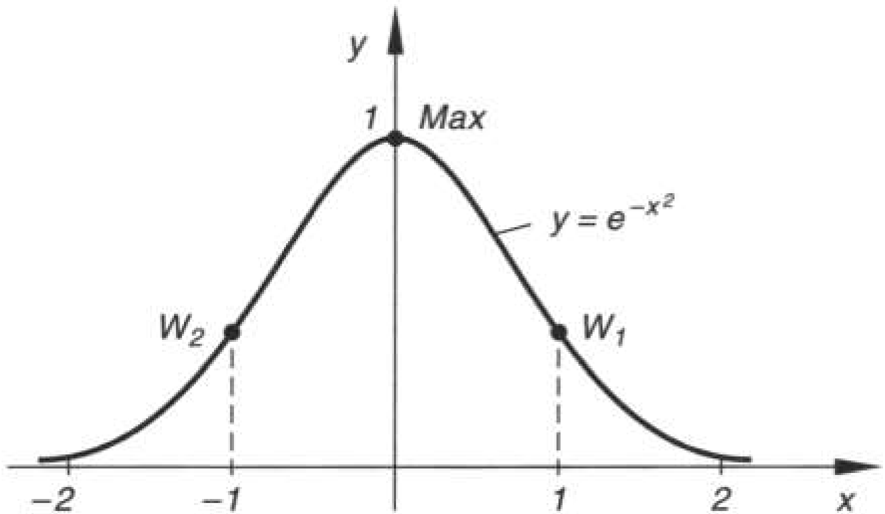
Kriechfall bei starker Dämpfung
(aperiodisches Verhalten)



Der Übergang vom Schwingungsfall zum Kriechfall wird als aperiodischer Grenzfall bezeichnet.

$$y(t) = (A + Bt) \cdot e^{-\lambda t} \qquad (\lambda > 0;\ t \geq 0)$$

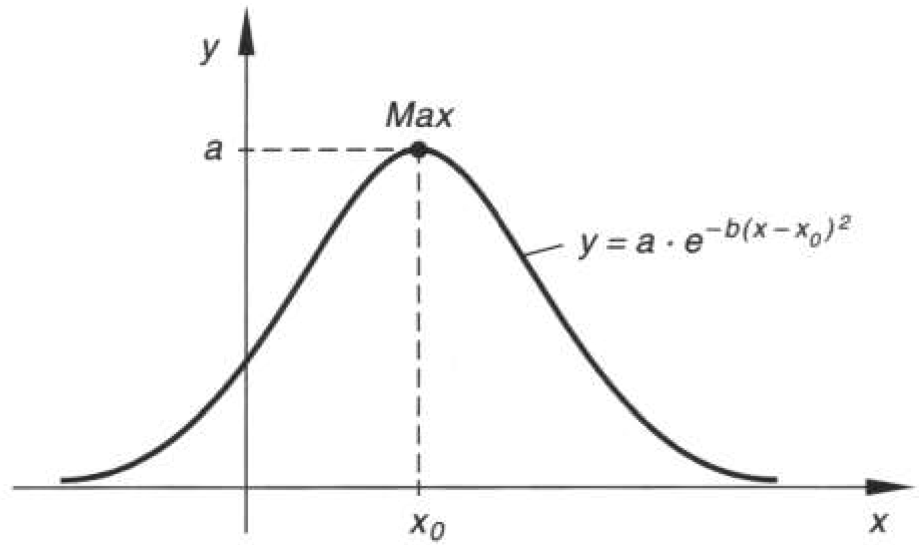
Gauß-Funktionen



Graph der Gauß-Funktion
$y = e^{-x^2}$

Maximum: (0; 1)

Wendepunkte: $x = \pm 1$



Graph der Gauß-Funktion
$y = a \cdot e^{-b(x-x_0)^2}$

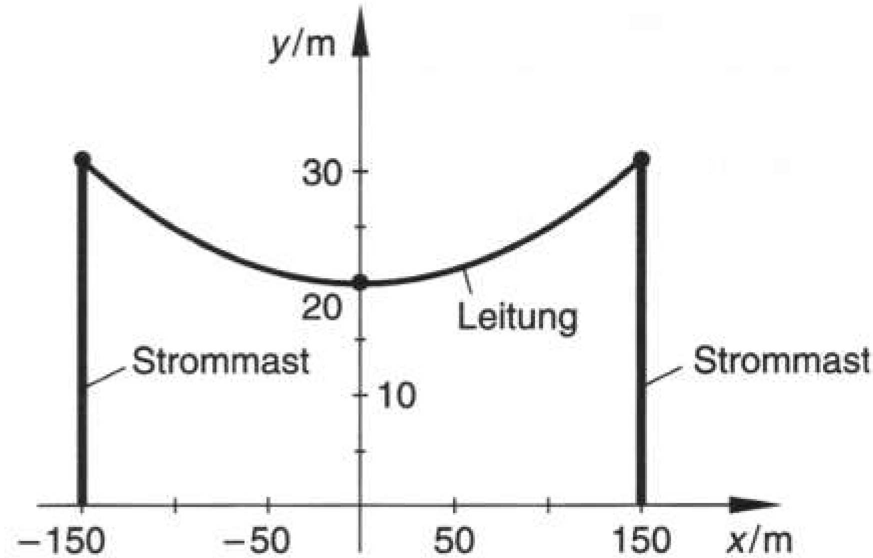
a - Höhe
b - Breite
x_0 - Verschiebung

Aufgaben

1. Beweisen Sie das so genannte Additionstheorem für den Sinus Hyperbolicus:
   sinh (x + y) = sinh x · consh y + cosh x · sinh y

2. Die abgebildete Überlandleitung wird zwischen zwei aufeinander folgenden Strommasten durch die Kettenlinie
   $y(x) = 1000m \cdot \cosh(0{,}001m^{-1} \cdot x) - 980m$
   mit $-150m \leq x \leq 150m$ beschrieben.

   Berechnen Sie die Höhe der Strommasten sowie den Durchhang H in der Mitte der Leitung.



Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org

http://www.matheplanet.com