HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Mathematik 1 Infotronik (19)

Gerald Kupris

09.01.2013

Weiterer Plan für dieses Semester

16. (13.12.2012): Lineare Abbildung, 2D Abbildungen, 2D Grafik

17. (19.12.2012): Projektion, Verschiebung, homogene Koordinaten

18. (20.12.2012): Drehung um einen beliebigen Punkt, Scherung

Feiertage

19. (09.01.2013): Definition von Eigenvektoren und Eigenwerten

20. (10.01.2013): Berechnung von Eigenvektoren und Eigenwerten

21. (16.01.2013): Eigenschaften von Eigenvektoren und Eigenwerten

22. (17.01.2013): Anwendung von Eigenvektoren und Eigenwerten

23. (23.01.2013): Anwendung von Eigenvektoren und Eigenwerten

24. (24.01.2013): Wiederholung, Prüfungsvorbereitung

Eigenvektor und Eigenwert

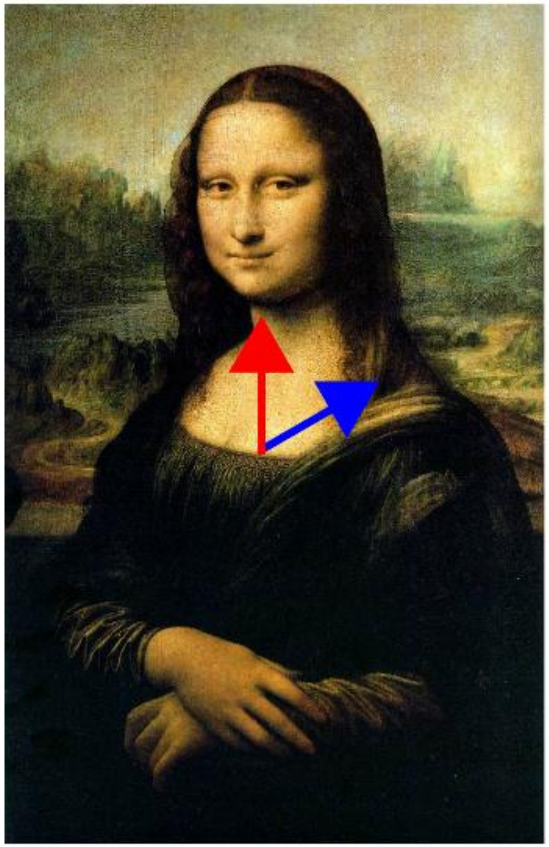
Ein **Eigenvektor** einer Abbildung ist in der linearen Algebra ein vom Nullvektor verschiedener Vektor, dessen **Richtung** durch die Abbildung nicht verändert wird.

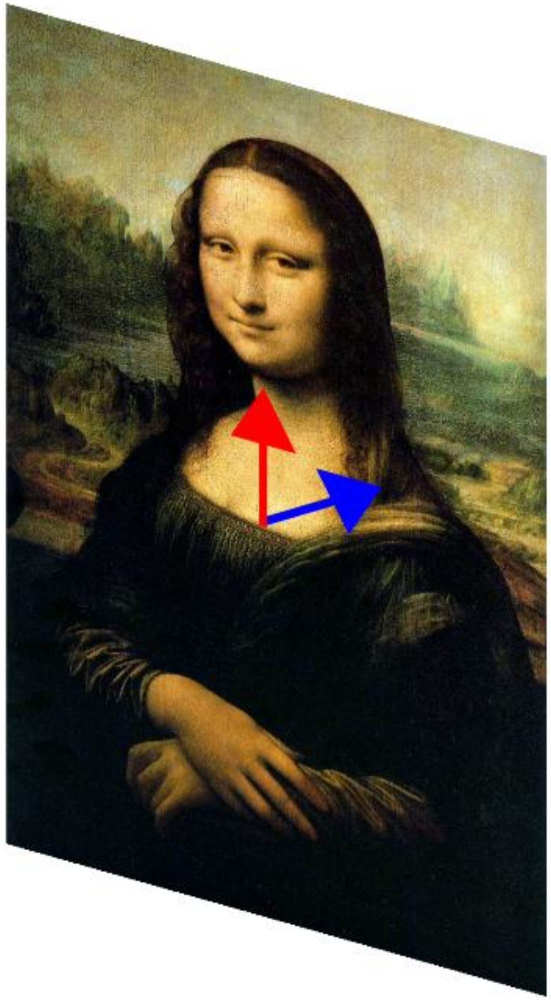
Ein Eigenvektor wird also nur gestreckt, und man bezeichnet den Streckungs-faktor als **Eigenwert** der Abbildung.

Eigenwerte charakterisieren wesentliche Eigenschaften linearer Abbildungen, etwa ob ein entsprechendes lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist oder nicht.

In vielen Anwendungen beschreiben Eigenwerte auch physikalische Eigenschaf-ten eines mathematischen Modells.

Eigenvektor und Eigenwert





In dieser Scherung der Mona Lisa wurde das Bild so verformt, dass der rote Pfeil (Vektor) entlang der vertikalen Achse seine Richtung nicht geändert hat, während der blaue Pfeil dies tut.

Der rote Vektor ist ein **Eigenvektor** der Scherabbildung, während der blaue Vektor dies aufgrund seiner Richtungsänderung nicht ist. Da der rote Vektor weder gestaucht noch gestreckt wird, ist dessen zugehöriger **Eigenwert** 1.

Definitionen Eigenvektor und Eigenwert (1)

Ist *V* ein Vektorraum über einem Körper *K* und $f: V \to V$ eine lineare Abbildung von *V* in sich selbst (Endomorphismus), so bezeichnet man als **Eigenvektor** einen Vektor $v \neq 0$, der durch *f* auf ein Vielfaches $\lambda \in K$ von sich selbst abgebildet wird: $f(v) = \lambda v$

Den Faktor λ nennt man dann den zugehörigen **Eigenwert**.

Anders formuliert: Hat für ein $\lambda \in K$ die Gleichung $f(v) = \lambda v$ eine Lösung $v \neq 0$ (der Nullvektor ist natürlich immer eine Lösung), so heißt λ **Eigenwert** von *f*. Jede Lösung $v \neq 0$ heißt **Eigenvektor** von *f* zum **Eigenwert** λ.

Definitionen Eigenvektor und Eigenwert (2)

Ist der Vektorraum endlichdimensional, so kann jeder Endomorphismus f durch eine quadratische Matrix A beschrieben werden. Die obige Gleichung lässt sich dann als Matrizengleichung schreiben:

$$A \cdot x = \lambda x$$

wobei *x* hier einen Spaltenvektor bezeichnet. Man nennt eine Lösung $x \neq 0$ und λ in diesem Fall **Eigenvektor** bzw. **Eigenwert** der Matrix *A*.

Diese Gleichung kann man auch in der Form $A \cdot x = \lambda E \cdot x$ schreiben, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet, und äquivalent umformen zu

$$(A - \lambda E) \cdot x = 0$$

bzw.

$$(\lambda E - A) \cdot x = 0$$

Beispiel

Matrix A: $$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

Vektor v: $$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot v$$

Eigenwert: $$\lambda = 3$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Man nennt den Vektor $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ einen **Eigenvektor** zum **Eigenwert** λ der quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$, falls gilt:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}.$$

Die Multiplikation der Matrix $\boldsymbol{A}$ mit einem Eigenvektor $\boldsymbol{v}$ ergibt einen Vektor mit Richtung $\boldsymbol{v}$. Die Veränderung der Länge wird durch den Eigenwert λ beschrieben.

Eigenvektoren und Eigenwerte von bekannten Matrizen

Spiegelung:	Eigenvektoren senkrecht zur Spiegelachse, $\lambda=-1$
Streckung:	Eigenvektoren parallel zur Streckachse, $\lambda=a$
Skalierung:	alle Vektoren sind Eigenvektoren, $\lambda=a$
Rotation:	keine Eigenvektoren (außer $\varphi=0°$, $\varphi=k\cdot\pi$), $\lambda=1$, $\lambda=-1$
Projektion:	Eigenvektoren parallel zur Projektionsgerade, $\lambda=1$
Verschiebung:	Eigenvektoren parallel zur Verschiebungsrichtung
Permutation:	Eigenvektoren senkrecht zur 45° Geraden, $\lambda=-1$
Scherung:	Eigenvektoren längs der Scherachse, $\lambda=1$

Bestimmung der Eigenwerte

Determinante einer Matrix: ist eine Zahl, die einer quadratischen Matrix zugeordnet ist.

Rang einer Matrix: Der Rang ist ein Begriff aus der linearen Algebra. Man ordnet ihn einer Matrix oder einer linearen Abbildung zu.

Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, formt man diese mittels des gaussschen Eliminationsverfahrens in eine äquivalente Matrix in Stufenform um. Die Anzahl der Zeilenvektoren, die ungleich 0 sind, entspricht dann dem Rang der Matrix.

Ist der Rang einer quadratischen Matrix gleich ihrer Zeilen- und Spaltenzahl, hat sie vollen Rang und wird reguläre Matrix genannt. Diese Eigenschaft lässt sich anhand ihrer Determinante feststellen. Eine Matrix hat genau dann vollen Rang, wenn ihre Determinante von null verschieden ist bzw. null keiner ihrer Eigenwerte ist.

Spur einer Matrix: In der linearen Algebra bezeichnet man als die Spur einer quadratischen Matrix A über einem Körper K die Summe der Diagonalelemente dieser Matrix.

Kern und Bild einer linearen Abbildung

Bei der linearen Abbildung $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$ bezeichnet

- der **Kern** der Matrix $\boldsymbol{A}$ bzw. der linearen Abbildung die Menge aller Vektoren $\boldsymbol{x}$, die auf den Nullvektor abgebildet werden,
- das **Bild** der Matrix $\boldsymbol{A}$ bzw. der linearen Abbildung die Menge aller Vektoren $\boldsymbol{y}$, die durch Abbildung aller Vektoren $\boldsymbol{x}$ entstehen.

Für jede (m, n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ ergibt die Summe der Dimension des Kerns von $\boldsymbol{A}$ und der Dimension des Bildes von $\boldsymbol{A}$ gerade n. Besitzt also der Kern von $\boldsymbol{A}$ maximal k linear unabhängige Vektoren, so hat das Bild von $\boldsymbol{A}$ maximal $n - k$ linear unabhängige Vektoren.

Rang einer linearen Abbildung

Die maximale Anzahl r linear unabhängiger Vektoren y_1, y_2, ..., y_r im Bild der linearen Abbildung $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}$ bezeichnet man als **Rang** der Matrix $\boldsymbol{A}$ bzw. der linearen Abbildung.

Das lineare Gleichungssystem in Matrixform

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ist genau dann lösbar, wenn der Vektor $\boldsymbol{b}$ im Bild der Matrix $\boldsymbol{A}$ enthalten ist.

Beispiel: Rang einer Matrix (1)

Rang einer Matrix: Der Rang ist ein Begriff aus der linearen Algebra. Man ordnet ihn einer Matrix oder einer linearen Abbildung zu.

Um den Rang einer Matrix zu bestimmen, formt man diese mittels des gaußschen Eliminationsverfahrens in eine äquivalente Matrix in Stufenform um. **Die Anzahl der Zeilenvektoren, die ungleich 0 sind, entspricht dann dem Rang der Matrix.**

Ist der Rang einer quadratischen Matrix gleich ihrer Zeilen- und Spaltenzahl, hat sie vollen Rang und wird reguläre Matrix genannt. Diese Eigenschaft lässt sich anhand ihrer Determinante feststellen. Eine Matrix hat genau dann vollen Rang, wenn ihre Determinante von null verschieden ist bzw. null keiner ihrer Eigenwerte ist.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 10 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(A) = 3$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(B) = 2$$

Beispiel: Rang einer Matrix (2)

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Umformung in eine äquivalente Matrix in Stufenform

Ausgangsmatrix,
jetzt 3. Zeile + 1. Zeile

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

jetzt 2. Zeile - 0.5 der 1. Zeile

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Der Rang der Matrix ist 3.

Berechnung der Eigenwerte

Die Gleichung

$$(A - \lambda E) \cdot x = 0$$

die Eigenwerte definiert, stellt ein homogenes lineares Gleichungssystem dar.

Da $x \neq 0$ vorausgesetzt wird, ist dieses genau dann lösbar wenn gilt:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Expandiert man die Determinante auf der linken Seite, so erhält man ein Polynom n-ten Grades in λ. Dieses wird charakteristisches Polynom genannt, und dessen Nullstellen sind die Eigenwerte, also die Lösungen der Gleichung

$$\alpha_n \cdot \lambda^n + \alpha_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_0 = 0$$

Eigenwerte und Eigenvektoren

Die Eigenwerte λ einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ bestimmt man mithilfe einer Determinante aus der sogenannten **charakteristischen Gleichung**

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\, \boldsymbol{E}| = 0.$$

Bei einer (n, n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ muss man dabei die Nullstellen des **charakteristischen Polynoms** $|\boldsymbol{A} - \lambda\, \boldsymbol{E}|$ vom Grad n in der Unbekannten λ ermitteln. Eine (n, n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ hat höchstens n verschiedene Eigenwerte.

Beispiel: Berechnung der Eigenwerte

Gegeben sei die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Subtraktion der mit λ multiplizierten Einheitsmatrix von A:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Ausrechnen der Determinante dieser Matrix (mit Hilfe der Regel von Sarrus):

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= (0-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda)+4+2-(2\lambda+2+\lambda+12-4\lambda) \\ &= -\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda-8 \\ &= -(\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda+2) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte entsprechen den Nullstellen des Polynoms, d. h. die rechte Seite der obigen Gleichung gleich Null setzen und man erhält: $\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = -2$.

Berechnung der Eigenvektoren

Für einen Eigenwert λ lassen sich die Eigenvektoren aus der Gleichung

$$(A - \lambda E) \cdot x = 0$$

bestimmen.

Die Eigenvektoren spannen einen Raum auf, dessen Dimension als geometrische Vielfachheit des Eigenwertes bezeichnet wird. Für einen Eigenwert λ der geometrischen Vielfachheit μ lassen sich also linear unabhängige Eigenvektoren

$$x_1, \dots, x_\mu$$

finden, so dass die Menge aller Eigenvektoren zu λ gleich der Menge der Linearkombinationen von $x_1, \dots, x_\mu$ ist.

$x_1, \dots, x_\mu$ heißt dann Basis aus Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenvektoren $\boldsymbol{v}$ zum Eigenwert λ einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ ergeben sich aus der Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

Eigenvektoren sind nicht eindeutig bestimmt. Die Länge eines Eigenvektors kann man beliebig festlegen.

Beispiel: Berechnung der Eigenvektoren (1)

Gegeben ist wie im vorigen Beispiel die quadratische Matrix *A*:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = -2$ wurden schon berechnet. Zunächst werden hier die Eigenvektoren (und der durch die Eigenvektoren aufgespannte Eigenraum) zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$ berechnet.

$$A - 2 \cdot E = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Berechnung der Eigenvektoren (2)

Man muss also das folgende lineare Gleichungssystem lösen:

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bringt man die Matrix auf obere Dreiecksform erhält man:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung (und damit die gesuchten Eigenvektoren) ist der Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^\top$ und alle seine Vielfachen (nicht jedoch das Nullfache des Vektors, da Nullvektoren niemals Eigenvektoren sind).

Beispiel: Berechnung der Eigenvektoren (3)

Für den Eigenwert $\lambda_2 = -2$ geht man genauso vor:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

wieder bringt man die Matrix auf Dreiecksform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hier ist die Lösung der Vektor $\begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}^\top$ wieder mit allen seinen Vielfachen.

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren

Zur Bestimmung der Eigenwerte λ und der Eigenvektoren $\boldsymbol{v}$ einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ kann man folgendermaßen vorgehen:

(1) Bestimme alle Eigenwerte λ aus der charakteristischen Gleichung

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\, \boldsymbol{E}| = 0.$$

(2) Bestimme zu jedem Eigenwert λ einen Eigenvektor $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ aus der Gleichung

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\, \boldsymbol{E})\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}.$$

Zusammenfassung: Bestimmung der Eigenwerte

Es sei $A \in K^{n \times n}$. Aus der Bedingung $A\,v = \lambda v$ folgt $(A - \lambda I)v = 0$.

Der Nullvektor ist in der Eigenvektordefinition ausgeschlossen, da $A0 = 0$ stets gilt. Wir suchen also nichttriviale Lösungen von

$$(A - \lambda I)v = 0\ .$$

Dies ist ein homogenes lineares Gleichungssystem, es besitzt also nichttriviale Lösungen genau dann, wenn $\operatorname{rang}(A - \lambda I) < n$ ist, also genau dann, wenn

$$\det(A - \lambda I) = 0\ .$$

Dies ist ein Polynom n-ten Grades in λ (das **charakteristische Polynom** von A). Seine Nullstellen sind die gesuchten Eigenwerte.

Anleitung zur Bestimmung von Eigenvektor und Eigenwert

„Schritt-für-Schritt“:

1. Die Eigenwerte werden über die charakteristische Gleichung bestimmt (Nullstellen des charakteristischen Polynoms).

2. Die gefundenen Eigenwerte werden in die Gleichung $(A - \lambda E) \cdot x = 0$ eingesetzt.

3. Das Gleichungssystem wird gelöst, dadurch wird ein Eigenvektor (von vielen möglichen) zu dem jeweiligen Eigenwert gefunden.

4. Probe: der gefundene Vektor wird mit der Matrix multipliziert, um zu überprüfen, ob es sich tatsächlich um einen Eigenvektor handelt.

Beispiel 1

Für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 6 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} \\ \lambda_1 &= 4\,, \qquad \lambda_2 = -1\,. \end{aligned}$$

Beispiel 2

Für $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)^2 - 4 \cdot (-4) = \lambda^2 - 6\lambda + 25\,. \end{aligned}$$

Da die Diskriminante $\frac{(-6)^2}{4} - 25 < 0$ ist, hat diese quadratische Gleichung für λ keine reellen Lösungen. Es gibt also keine Eigenwerte.

Das ist plausibel: A ist gleich dem Fünffachen einer Rotationsmatrix (zum Winkel $\alpha = -\arcsin\frac{4}{5} \approx 0{,}927 \mathrel{\widehat{=}} 53{,}1°$). Da alle Vektoren gedreht werden, gibt es keine Eigenvektoren, daher auch keine Eigenwerte.

Beispiel 3

Gegeben sei die quadratische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Subtraktion der mit λ multiplizierten Einheitsmatrix von A:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 2 & -1 \\ 2 & -1-\lambda & 1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$

Ausrechnen der Determinante dieser Matrix (mit Hilfe der Regel von Sarrus):

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (0-\lambda)(-1-\lambda)(3-\lambda) + 4 + 2 - (2\lambda + 2 + \lambda + 12 - 4\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 \\ &= -(\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

Die Eigenwerte entsprechen den Nullstellen des Polynoms, d. h. die rechte Seite der obigen Gleichung gleich Null setzen und man erhält: $\lambda_{1,2} = 2,\ \lambda_3 = -2$.

Quellen

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org

HOCHSCHULE DEGGENDORF

University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf