Mathematik 1 Infotronik (14)

Gerald Kupris

06.12.2012

Lineare Algebra

Regel zur Berechnung einer zweireihigen Determinante

Der Wert einer 2-reihigen Determinante ist gleich dem Produkt der beiden Hauptdiagonal-elemente minus dem Produkt der beiden Nebendiagonalelemente.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Hauptdiagonale

Nebendiagonale

Ausblick: dreireihige Determinante

$$\qquad\qquad\qquad - \qquad\quad - \qquad\quad -$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\qquad\qquad\qquad + \qquad\quad + \qquad\quad +$$

Hauptdiagonale

Nebendiagonale

$$D = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Wiederholung: Matrizeninvertierung

Es sei $A \in \Re^{n \times n}$. A heißt invertierbar oder auch regulär, wenn es eine Matrix

$A^{-1} \in \Re^{n \times n}$ gibt mit der Eigenschaft $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$.

In diesem Fall heißt A^{-1} die inverse Matrix von A.

Aber Achtung: nicht jede Matrix lässt sich invertieren!

Folgerung: eine Matrix heißt invertierbar oder auch regulär, wenn ihre Determinante nicht gleich Null ist.

Reguläre Matrix

Eine Matrix heißt regulär, wenn ihre Determinante einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Andernfalls heißt diese Matrix singulär.

Die Begriffe „reguläre Matrix“ und „singuläre Matrix“ sind nur für quadratische Matrizen definiert.

Wenn eine Matrix ***A*** regulär ist, dann gilt:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Auf einen Beweis dieses Satzes verzichten wir vorerst.
Er hat jedoch enorme praktische Bedeutung (dazu später mehr).
Die Regel zur Berechnung der inversen Matrix folgen später!

Beispiele:

Die Matrix ***A*** ist regulär:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinante der inversen Matrix

Beweisen Sie den Satz: $$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Definition inverse Matrix: $$A \cdot A^{-1} = E$$

Multiplikationstheorem:
$$\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det A \cdot \det A^{-1}$$
$$\det E = 1 = \det A \cdot \det A^{-1}$$

Daraus folgt: $$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Daraus folgt: die Determinante der inversen Matrix ist immer ungleich Null.

Verwendung von Determinanten

Berechnung der invertierten Matrix:

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix

Falls die Determinante einer $(2,2)$-Matrix nicht null ist, kann man die inverse Matrix durch folgende Formel berechnen:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Beispiel

Mathematische Definition der Determinante

Die Determinante einer $n \times n$ -Matrix wird durch den folgenden Satz definiert.

Es gibt genau eine Abbildung

$$\det : \mathrm{M}_{n\times n}(K) \longrightarrow K, \quad A \longmapsto \det A$$

mit den Eigenschaften:

1. **det** ist linear in jeder Zeile
2. Ist **rang A < *n*** , so ist **det A = 0**
3. **det E_n = 1**

Wir nennen **det A** die Determinante von $A \in \mathrm{M}_{n\times n}(K)$
und **det** die Determinante.

Begriff der Determinante

Eine Determinante bezeichnet den bestimmenden (determinierenden) Faktor für einen Prozess, Vorgang oder eine Entwicklung in Natur und Gesellschaft.

Beispiele für die allgemeine Verwendung des Begriffes:

- "Geld als Determinante der Moderne" (G.Simmel)
- "Die Beschäftigungsschwelle als Determinante der Erwerbstätigkeit" (K. Girschik)
- "Der europäische Dialog - Determinante für Modernisierung und Wandel" (Mitteilung einer EU-Kommission)

In der Linearen Algebra ist die Determinante eine spezielle Funktion, die einer quadratischen Matrix oder einem linearen Endomorphismus einen Skalar zuordnet.

Eine Determinante ist eine Zahl, die einer quadratischen Matrix zugeordnet ist.

Regel zur Berechnung einer dreireihigen Determinante (Sarrussche Regel)

Regel von Sarrus

Die Determinante einer $(3,3)$-Matrix $\boldsymbol{A}$ kann man berechnen, indem man die Matrix um die ersten beiden Spalten erweitert und anschließend die Produkte der Elemente in den drei Nebendiagonalen von den Produkten der Elemente in den drei Hauptdiagonalen subtrahiert:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & - & - & - & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} & & \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} & & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} & & \\
 & & & + & + & + &
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| = \; & a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} \\
& - a_{13}\,a_{22}\,a_{31} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33}\,.
\end{aligned}
$$

Determinante einer (3,3)-Matrix

Die **Determinante** einer $(3,3)$-Matrix entsteht aus Determinanten von $(2,2)$-Matrizen:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} .$$

Determinante einer (n,n)-Matrix

Die **Determinante** einer (n,n)-Matrix ist rekursiv definiert:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{ohne 1. Spalte}} - a_{12} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{ohne 2. Spalte}} + \ldots + (-1)^{n+1} a_{1n} \underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2\,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-1} \end{vmatrix}}_{\text{ohne } n\text{-te Spalte}} .$$

Entwickeln nach der *i*-ten Zeile

Die Determinante einer (n, n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ lässt sich durch Entwickeln nach der i-ten Zeile berechnen:

$$|\boldsymbol{A}| = (-1)^{i+1} a_{i1} |\boldsymbol{A}_{i1}| + (-1)^{i+2} a_{i2} |\boldsymbol{A}_{i2}| + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} |\boldsymbol{A}_{in}| .$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{A}_{ij}$ diejenige Matrix der Dimension $(n-1, n-1)$, die durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte aus der Matrix $\boldsymbol{A}$ entsteht. Entsprechend kann man eine Determinante auch durch Entwickeln nach einer beliebigen Spalte berechnen.

Entwickeln einer Determinante

Entwickeln einer Determinante

Man darf eine Determinante nach jeder beliebigen Zeile oder Spalte entwickeln. Dabei ist es günstig, Zeilen oder Spalten mit vielen Nullen zu wählen.

Schachbrettmuster

Die Vorzeichen beim Entwicklungssatz ergeben sich aus einem Schachbrettmuster, das in der linken oberen Ecke mit + startet:

$$\begin{vmatrix} (-1)^2 & (-1)^3 & (-1)^4 & \cdots \\ (-1)^3 & (-1)^4 & (-1)^5 & \cdots \\ (-1)^4 & (-1)^5 & (-1)^6 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} \Longrightarrow \begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

Zum Vergleich: Spatprodukt von Vektoren

Das Spatprodukt ist das Skalarprodukt aus dem Kreuzprodukt zweier Vektoren und einem dritten Vektor. Es ergibt das **Volumen** des durch die drei Vektoren aufgespannten Spats (Parallelepipeds).

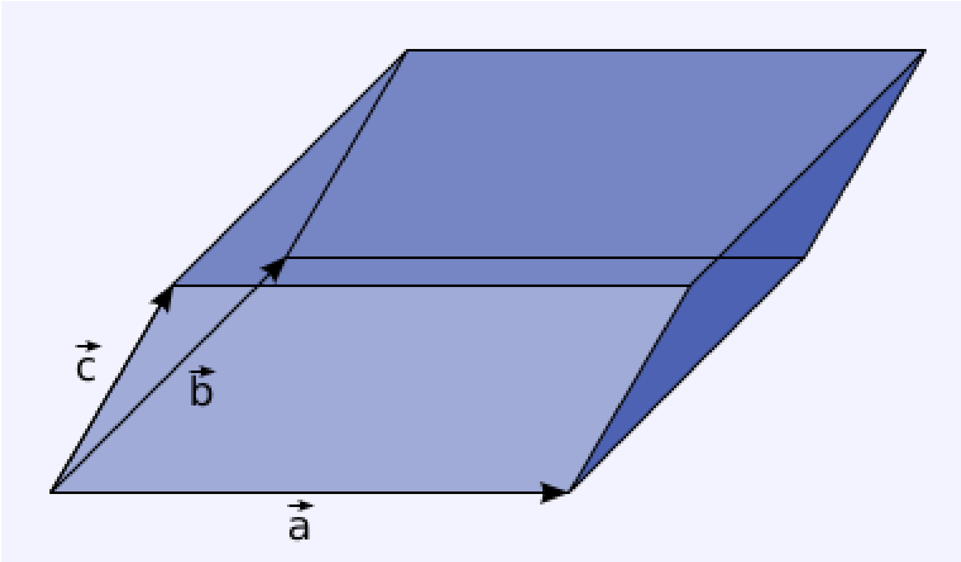
Es wird auch **gemischtes Produkt** genannt und ist identisch mit der aus diesen Vektoren gebildeten Determinanten, also:

$$V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} = \det \left(\vec{a}\vec{b}\vec{c} \right).$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right] = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

In der Linearen Algebra ist die **Determinante** eine spezielle Funktion, die einer quadratischen Matrix eine Zahl zuordnet.

Wiederholung: Spatprodukt



$$V = A_g \cdot h$$
$$A_g = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$$
$$h = |\vec{c}| \cos\alpha = \hat{e}_{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)} \cdot \vec{c}$$
$$V = A_g \cdot h = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right| \left(\hat{e}_{\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)} \cdot \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c}$$

Für das Spatprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ gilt:

$$[\boldsymbol{a},\, \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{c}] = a_1\left(b_2\, c_3 - b_3\, c_2\right) + a_2\left(b_3\, c_1 - b_1\, c_3\right) + a_3\left(b_1\, c_2 - b_2\, c_1\right).$$

Spatprodukt, Vektorprodukt

Das Spatprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ kann man als Determinante berechnen:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Das Vektorprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ kann man als symbolische Determinante berechnen:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Dabei sind $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{e}_3$ die Basisvektoren.

Aufgaben

1. Berechnen Sie die invertierten Matrizen und weisen Sie nach, dass gilt:

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$b) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Lineares Gleichungssystem

Ein System aus m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}$$

nennt man ein **lineares Gleichungssystem** (LGS). Die Zahlen a_{ij} sind die **Koeffizienten**, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ bezeichnet man als **Absolutglieder** oder rechte Seite.

Lösung eines linearen Gleichungssystems

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems besteht aus allen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, bei denen alle m Gleichungen erfüllt sind.

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Lösung eines linearen Gleichungssystems

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems besteht aus allen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, bei denen alle m Gleichungen erfüllt sind.

Bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems sind grundsätzlich nur drei verschiedene Fälle möglich. Das lineare Gleichungssystem hat entweder

- gar keine Lösung,
- eine eindeutige Lösung oder
- unendlich viele Lösungen.

Lösung eines linearen Gleichungssystems mit Determinanten

Das lineare Gleichungssystem in Matrixform $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante der quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ nicht null ist. Die Lösung kann man wie bei $(2,2)$-Matrizen und $(3,3)$-Matrizen mithilfe von Determinanten berechnen.

Beispiel

Cramersche Regel

Die cramersche Regel oder Determinantenmethode ist eine mathematische Formel für die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Ausgangspunkt für die cramersche Regel ist stets ein lineares Gleichungssystem mit genauso vielen Gleichungen wie Unbekannten. Dieses System muss zusätzlich eindeutig lösbar sein, was sich am einfachsten überprüfen lässt, indem man die Determinante der Koeffizientenmatrix berechnet. Ist diese von null verschieden, ist die Voraussetzung erfüllt, und die einzelnen Unbekannten berechnen sich nach der cramerschen Regel jeweils zu:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Die Matrix A_i entsteht aus der Koeffizientenmatrix, indem die *i*-te Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt wird.

Cramersche Regel für (2,2) Matrizen

Das lineare Gleichungssystem in Matrixform $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$ nicht null ist. Die Lösung kann man dann nach der Cramerschen Regel berechnen:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Cramersche Regel für (3,3) Matrizen

Das lineare Gleichungssystem in Matrixform $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$ nicht null ist. Die Lösung kann man dann nach der Cramerschen Regel berechnen:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

Beispiel für die Cramersche Regel (1)

Lineares Gleichungssystem (3 Gleichungen mit 3 Unbekannten):

$$\begin{aligned} 82\,x_1 + 45\,x_2 + 9\,x_3 &= 1 \\ 27\,x_1 + 16\,x_2 + 3\,x_3 &= 1 \\ 9\,x_1 + 5\,x_2 + 1\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$\begin{pmatrix} A & b \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 82 & 45 & 9 & 1 \\ 27 & 16 & 3 & 1 \\ 9 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Beispiel für die Cramersche Regel (2)

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 45 & 9 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 82 & 45 & 9 \\ 27 & 16 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 82 & 1 & 9 \\ 27 & 1 & 3 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 82 & 45 & 9 \\ 27 & 16 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 82 & 45 & 1 \\ 27 & 16 & 1 \\ 9 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 82 & 45 & 9 \\ 27 & 16 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-14}{1} = -14$$

Lösung eines linearen Gleichungssystems

Falls die Determinante einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ ungleich null ist, dann ist das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ eindeutig lösbar. Die Lösung $\boldsymbol{x}$ kann man durch Multiplikation der rechten Seite $\boldsymbol{b}$ mit der inversen Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ berechnen: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{b}$.

Zu jeder quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$, deren Determinante nicht null ist, gibt es eine eindeutig bestimmte **inverse Matrix** $\boldsymbol{A}^{-1}$ so, dass

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Eine Matrix $\boldsymbol{A}$, die eine inverse Matrix besitzt, nennt man **invertierbar** oder **regulär**. Eine nicht invertierbare Matrix heißt **singulär**.

Aufgaben

1. Auf einem Fest kauft Familie Maier 2 Portionen Pommes, 2 Würstchen und 4 Crepes. Sie bezahlen 14,60 €. Familie Schmidt kauft sich 2 Pommes, 4 Würstchen und 1 Crepes. Sie bezahlen 13,60 €, Für 13,50 € bekommt Familie Ludwig 1 Portion Pommes, 3 Würstchen und 3 Crepes. Wieviel kosten eine Portion Pommes, ein Würstchen und ein Crepes?

2. Vor einem Jahr war Karl dreimal so alt wie Lisa heute. Vor 2 Jahren war Petra doppelt so alt wie Lisa. Zusammen sind sie heute 23 Jahre alt. Wie alt sind Lisa, Petra und Karl heute?

3. Gesucht wird eine dreistellige Zahl. Die Quersumme der gesuchten Zahl ist 6. Vertauscht man die erste und die zweite Ziffer so ist die Zahl um 90 größer als die gesuchte Zahl. Vertauscht man die erste und die dritte Ziffer so ist die Zahl um 198 größer als die gesuchte Zahl. Welche Zahl ist gesucht?

Quellen

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf