Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (22)

Gerald Kupris

01.12.2010

Wiederholung: Kubische Funktion

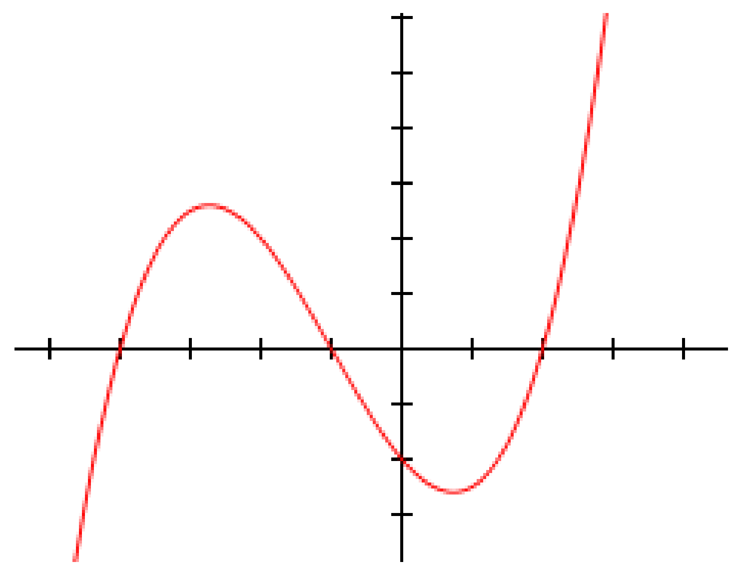
Unter einer kubischen Funktion auf den reellen Zahlen der Form:

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\qquad y = f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ $\qquad$ mit: $a \neq 0$.

Eine kubische Funktion hat in dem Bereich der reellen Zahlen mindestens eine Null-stelle und maximal drei Nullstellen.

Die Nullstellen (y=0) sind dort, wo der Graph die x-Achse schneidet.

Der Funktionsgraph einer jeden kubischen Funktion ist punktsymmetrisch zu seinem Wendepunkt.



Lösung der Kubischen Gleichung

Kubische Gleichungen sind algebraische Gleichungen dritten Grades, also Gleichungen der allgemeinen Form:

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$$

Die kubische Gleichung lässt sich mit Kenntnis aller drei Nullstellen x_1,x_2,x_3 auch so faktorisieren:

$$a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot (x - x_3) = 0$$

Ansätze zur Lösung der Kubischen Gleichung:
Sind alle Vorfaktoren ganzzahlig, dann kann man versuchen, durch Polynomdivision zu einer einfacheren quadratischen Gleichung zu kommen, die mit klassischen Verfahren lösbar sind. Dazu braucht man eine bekannte Nullstelle.
Ist der führende Koeffizient a vom Betrag gleich 1, so kann man die ganzzahligen Teiler des letzten Faktors d durchprobieren (auch negative Werte!). Ist a von eins verschieden, so müssen alle Brüche, deren Zähler ein Teiler von d und deren Nenner ein Teiler von a ist, durchprobiert werden.

Eigenschaften von Polynomen

Die Multiplikation eines Polynoms vom Grad n mit einem Polynom vom Grad m ergibt ein Polynom vom Grad $n+m$.

Bei der **Polynomdivision** teil man das Polynom f vom Grad n durch das Polynom g vom Grad m und erhält dann ein neues Polynom h vom Grad $n-m$ und eventuell noch ein Restpolynom r:

$$f(x) : g(x) = h(x) + r(x) : g(x).$$

Wenn die Polynomdivision $f(x) : g(x) = h(x)$ ohne Rest aufgeht, dann hat man das Polynom f in ein Produkt der beiden Polynome g und h zerlegt:

$$f(x) = g(x)\,h(x).$$

Regeln für die Polynomdivision

Falls beide Polynome durch eine gemeinsame Zahl geteilt werden können, dann sollte man das zuerst tun.

Wie bei der schriftlichen Division von Zahlen zieht man auch bei der Polynomdivision vom Dividenden nach und nach passende Vielfache des Divisors ab, bis am Ende möglichst kein Rest mehr bleibt. Dazu wird in jedem Schritt derjenige Summand des Restes eliminiert, bei dem x in der höchsten Potenz steht.

Die Summanden des Quotienten erhält man daher durch Division dieses Summanden der jeweiligen Reste durch den Summanden des Divisors mit der höchsten Potenz von x.

Beispiele

Linearfaktor

Falls x_0 eine Nullstelle des Polynoms f vom Grad n ist, geht die Polynomdivision

$$f(x) : (x - x_0) = h(x)$$

ohne Rest auf und man kann f in der Form $f(x) = h(x)\,(x - x_0)$ darstellen. Dabei ist h ein Polynom vom Grad $n - 1$. Man bezeichnet $(x - x_0)$ als Linearfaktor von f.

Ein Polynom vom Grad n lässt sich genau dann komplett in Linearfaktoren zerlegen, wenn es genau n Nullstellen hat. Dabei werden mehrfache Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt.

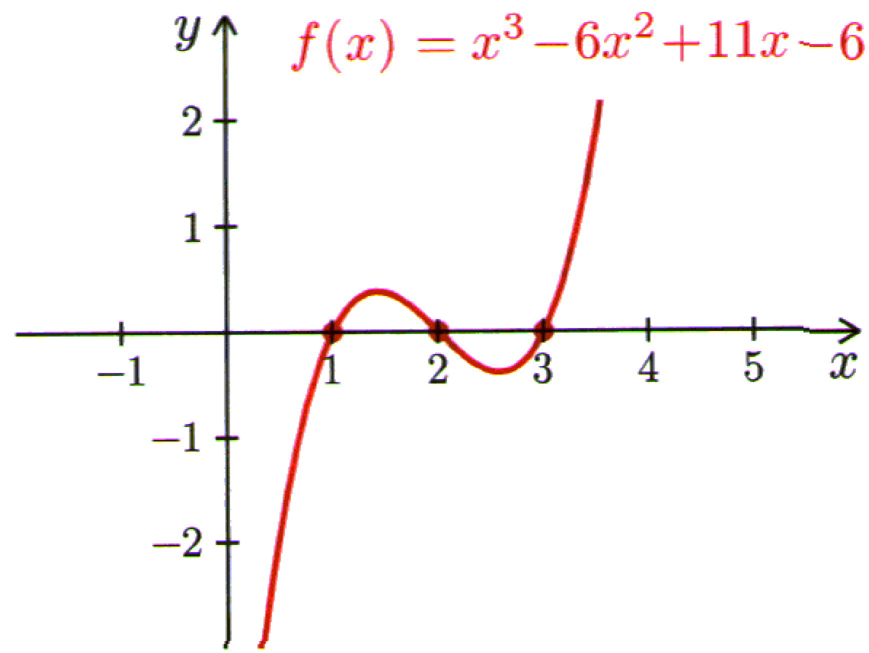
Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Beispiel: Einfache Linearfaktoren

$$y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$y = f(x) = (x-3)\cdot(x-2)\cdot(x-1)$$

$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-1) = x^2 - 5x + 6$$
$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-2) = x^2 - 4x + 3$$
$$(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) : (x-3) = x^2 - 3x + 2$$



Linearfaktor

Falls x_0 eine Nullstelle des Polynoms f vom Grad n ist, geht die Polynomdivision

$$f(x) : (x - x_0) = h(x)$$

ohne Rest auf und man kann f in der Form $f(x) = h(x)\,(x - x_0)$ darstellen. Dabei ist h ein Polynom vom Grad $n-1$. Man bezeichnet $(x - x_0)$ als **Linearfaktor** von f.

Ein Polynom vom Grad n lässt sich genau dann komplett in Linearfaktoren zerlegen, wenn es genau n Nullstellen hat. Dabei werden mehrfache Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt.

Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

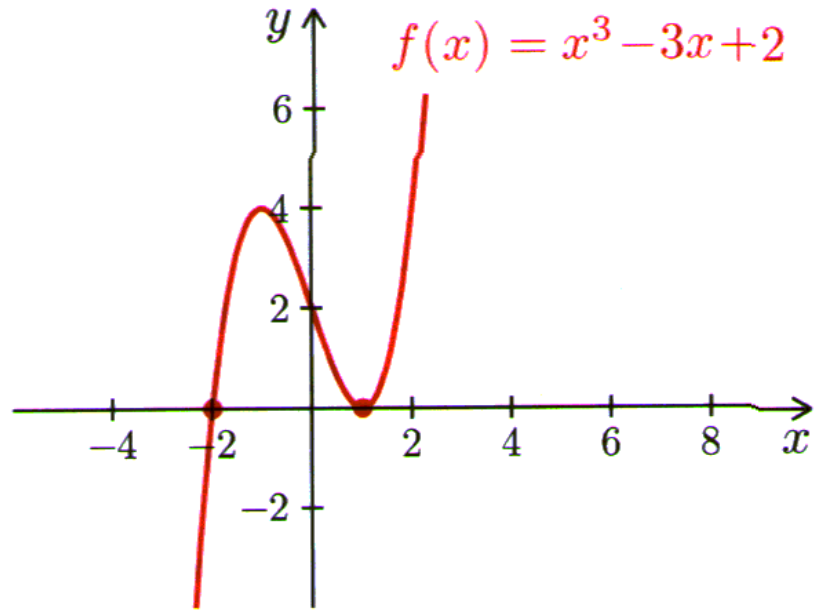
Mehrfacher Linearfaktor

$$y = f(x) = x^3 - 3x + 2$$

$$y = f(x) = (x-1)\cdot(x-1)\cdot(x+2)$$

$$(x^3 - 3x + 2):(x-1) = x^2 + x - 2$$

$$(x^2 + x - 2):(x-1) = x + 2$$



Mehrfacher Linearfaktor

Falls das Polynom f vom Grad n den Linearfaktor $(x - x_0)$ p-fach enthält, also

$$f(x) = h(x)(x - x_0)^p,$$

und das Polynom h vom Grad $n - p$ an der Stelle x_0 nicht null ist, dann bezeichnet man x_0 als **p-fache Nullstelle** oder als eine **Nullstelle mit Vielfachheit p** von f.

Quadratischer Faktor

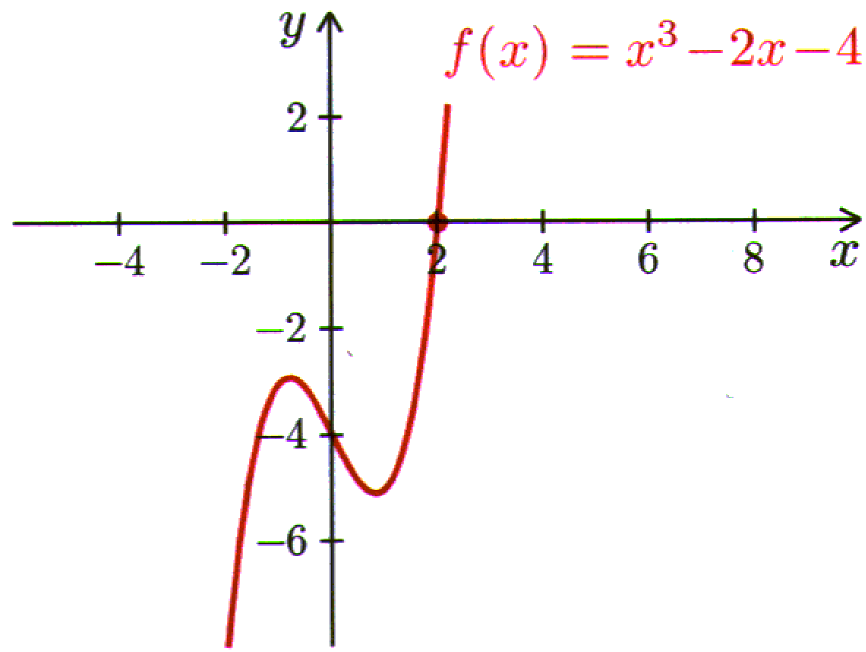
$$y = f(x) = x^3 - 2x - 4$$

$$(x^3 - 2x - 4) : (x - 2) = x^2 + 2x + 2$$

$$y = f(x) = (x^2 + 2x + 2) \cdot (x - 2)$$

$$x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$D < 0$$



Zerlegung in Linearfaktoren und quadratische Faktoren

Jedes Polynom lässt sich in ein Produkt aus Polynomen vom Grad 1 oder 2 zerlegen. Polynome vom Grad 2, die keine Nullstellen besitzen,

$$h(x) = x^2 + bx + c \quad \text{mit} \quad b^2 - 4c < 0,$$

verwendet man nur dann, wenn eine Zerlegung in Linearfaktoren nicht möglich ist.

Wiederholung: Lösung der Quadratischen Gleichung

allgemeine Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$$

„Mitternachtsformel“

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Normalform

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (p, q \in \mathbb{R})$$

$$p = \frac{b}{a} \qquad q = \frac{c}{a}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Diskriminante

Die Diskriminante ist ein Rechenausdruck, der Aussagen über Zahl und Art der Lösungen einer algebraischen Gleichung ermöglicht. Am bekanntesten ist die Diskriminante einer quadratischen Gleichung.

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$D := b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$$

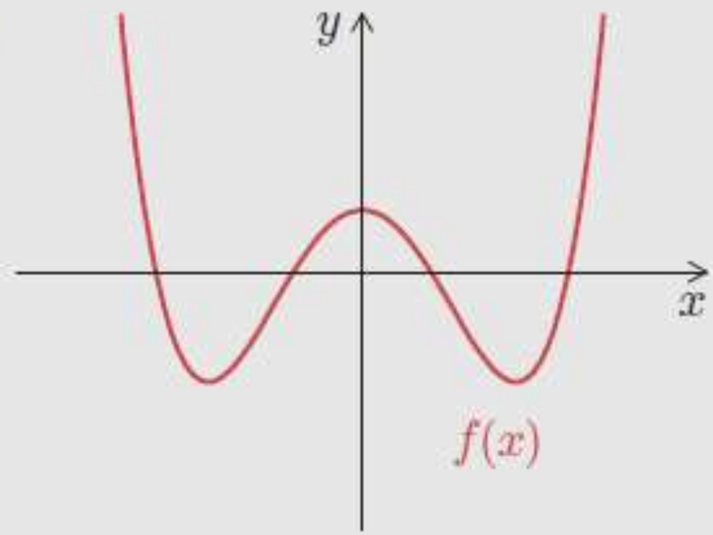
Beispiel: $x^2 + 2x + 2 = 0$

Wiederholung: Gerade Funktion

Man bezeichnet f als eine **gerade Funktion** auf dem Intervall I, falls für alle $x \in I$

$$f(-x) = f(x).$$

Das Schaubild einer geraden Funktion ist symmetrisch zur y-Achse.

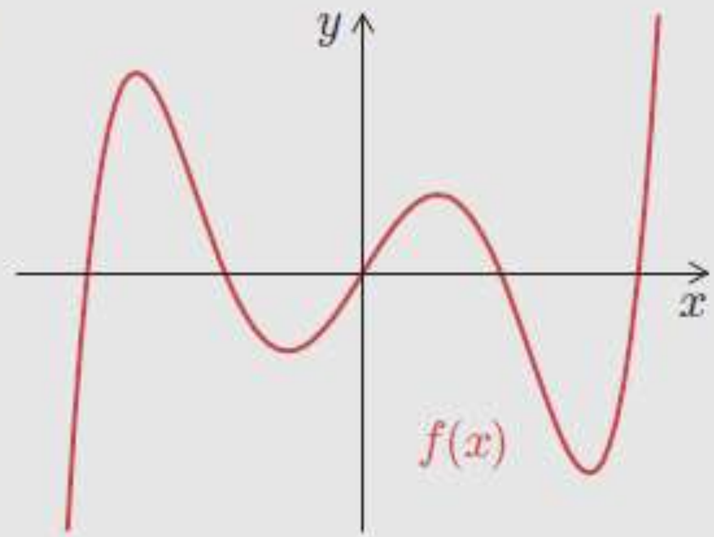


Wiederholung: Ungerade Funktion

Man bezeichnet f als eine **ungerade Funktion** auf dem Intervall I, falls für alle $x \in I$

$$f(-x) = -f(x).$$

Das Schaubild einer ungeraden Funktion ist symmetrisch zum Ursprung.



Wiederholung: Gerade und ungerade Funktionen

Gerade und ungerade Funktionen haben folgende Eigenschaften:

- Die Summe und die Differenz zweier gerader Funktionen ergeben eine gerade Funktion und die Summe und die Differenz zweier ungerader Funktionen ergeben eine ungerade Funktion.
- Das Produkt zweier gerader oder zweier ungerader Funktionen ergibt eine gerade Funktion und das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ergibt eine ungerade Funktion.
- Der Kehrwert einer geraden Funktion ist eine gerade Funktion und der Kehrwert einer ungeraden Funktion ist eine ungerade Funktion.

Zerlegung in gerade und ungerade Funktionen

Eine Funktion f lässt sich als Summe einer geraden Funktion f_g und einer ungeraden Funktion f_u darstellen

$$f(x) = f_g(x) + f_u(x).$$

Dabei sind die geraden und ungeraden Anteile definiert durch

$$f_g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ und } f_u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Beispiel: $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

http://de.wikipedia.org

http://www.komplexe-zahlen.de

http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_2/basics/b2_1_5.html

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/imaginaer1.htm