Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (8)

Gerald Kupris

20.10.2010

Vorlesungsinhalte Vektorrechnung

1. Definition von Vektoren
2. Einfache Rechenregeln
3. Koordinatendarstellung von Vektoren
4. Beträge von Vektoren
5. Rechenregeln in der Koordinatendarstellung
6. Koordinatendarstellung mit Winkelfunktionen
7. Skalarprodukt
8. Vektorprodukt
9. Spatprodukt
10. Rechnen mit Vektoren

Zwei Punkte

Abstand zwischen zwei Punkten:

Berechne den Verbindungsvektor zwischen diesen Punkten und nimm den Betrag davon.

Mitte zwischen zwei Punkten:

Berechne den Verbindungsvektor zwischen den Punkten, teile ihn durch zwei und addiere ihn zum ersten Punkt. Ähnliches gilt für beliebige Verhältnisse.

Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Die Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, …, $\boldsymbol{a}_n$ nennt man linear unabhängig, falls die Gleichung

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

nur die triviale Lösung $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, …, $\lambda_n = 0$ besitzt. Andernfalls heißen die Vektoren linear abhängig.

Zwei Vektoren $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie parallel sind.

Drei Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ und $\boldsymbol{a}_3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Spatprodukt der drei Vektoren null ist:

$$[\,\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\,] = 0.$$

Parallele und senkrechte Vektoren

Sind zwei Vektoren parallel, so gilt: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$

Berechnung der Länge eines Vektors: $|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$

Stehen zwei Vektoren aufeinander senkrecht (orthogonal), so gilt: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$

Damit lässt sich auf einfache Weise überprüfen, ob zwei Vektoren zueinander parallel oder orthogonal sind.

Ist einer der beiden Vektoren ein Einheitsvektor, so ergibt das Skalarprodukt die Länge der Projektion des anderen Vektors auf die vom Einheitsvektor definierte Gerade.

Komplanare Vektoren

Aufgabenstellung:

Die Vektoren ***a*** ,***b*** und ***c*** werden als komplanar bezeichnet, wenn sie auf einer Ebene liegen. Wie kann man feststellen, ob diese drei Vektoren auf der selben Ebene liegen?

Vorgehensweise:

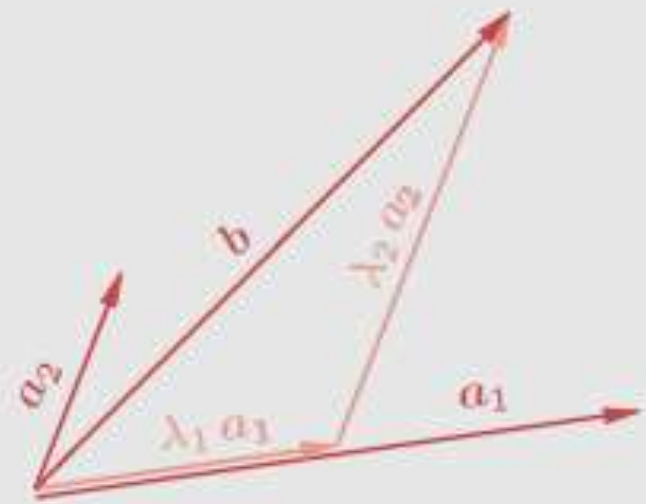
Wenn die drei Vektoren ***a*** ,***b*** und ***c*** auf einer Ebene liegen, dann ist das Spat-Produkt dieser drei Vektoren gleich null (das Volumen des aufgespannten Parallelepipeds ist gleich null).

Komponentenzerlegung in der Ebene

Falls die beiden Vektoren $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ linear unabhängig und die drei Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ und $\boldsymbol{b}$ linear abhängig sind, nennt man

$$\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2$$

die Komponentenzerlegung des Vektors $\boldsymbol{b}$ in Richtung der Vektoren $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$.



Komponentenzerlegung im Raum

Falls die drei Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ und $\boldsymbol{a}_3$ linear unabhängig sind, nennt man

$$\boldsymbol{b} = \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \lambda_3 \boldsymbol{a}_3$$

die Komponentenzerlegung des Vektors $\boldsymbol{b}$ in Richtung der Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ und $\boldsymbol{a}_3$.
Für die Koeffizienten λ_1, λ_2 und λ_3 gilt:

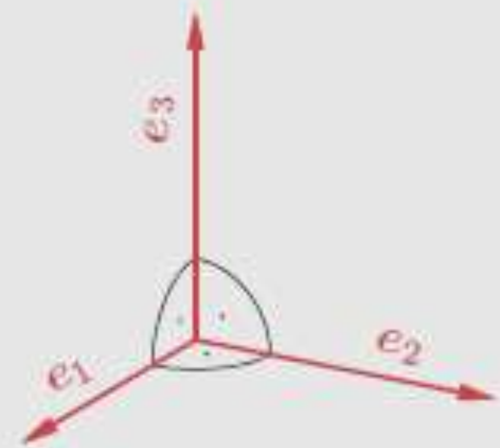
$$\lambda_1 = \frac{[\boldsymbol{b},\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3]}, \quad \lambda_2 = \frac{[\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{a}_3]}{[\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3]}, \quad \lambda_3 = \frac{[\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{b}]}{[\boldsymbol{a}_1,\, \boldsymbol{a}_2,\, \boldsymbol{a}_3]}.$$

Basisvektoren und Koordinaten

Drei Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{e}_3$, die paarweise senkrecht aufeinander stehen und in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, bezeichnet man als **Basisvektoren**. Jeder Vektor $\boldsymbol{a}$ lässt sich durch

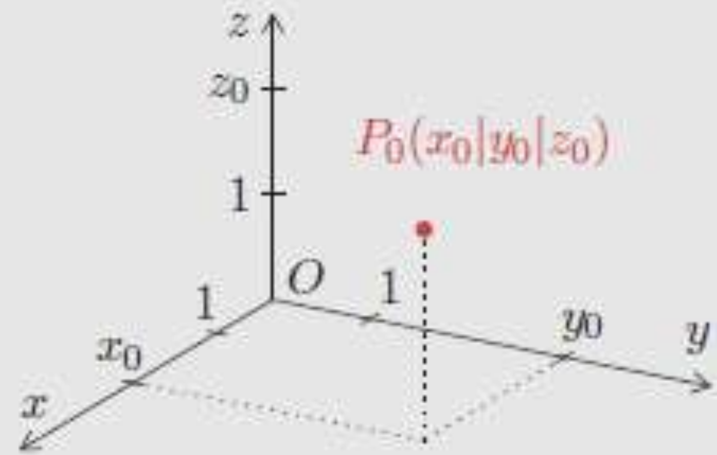
$$\boldsymbol{a} = a_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2\,\boldsymbol{e}_2 + a_3\,\boldsymbol{e}_3$$

darstellen. Dabei nennt man die Skalare a_1, a_2 und a_3 die **Koordinaten** und die Vektoren $a_1\,\boldsymbol{e}_1$, $a_2\,\boldsymbol{e}_2$ und $a_3\,\boldsymbol{e}_3$ die **Komponenten** des Vektors $\boldsymbol{a}$.



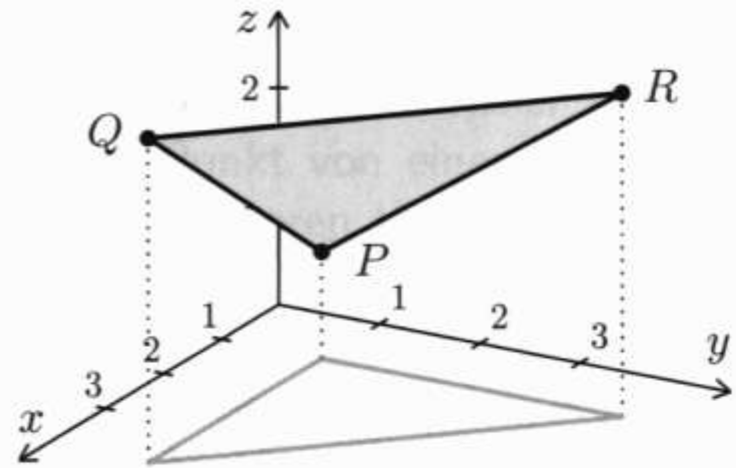
Kartesisches Koordinatensystem im Raum

Ein Achsenkreuz aus drei paarweise senkrechten Geraden, die sich im Ursprung O schneiden, nennt man ein kartesisches Koordinatensystem. Die Einheitslängen sind auf allen drei Achsen gleich und die Einheitsvektoren in Richtung der Geraden bilden ein Rechtssystem. Ein Punkt $P_0\,(x_0 \,|\, y_0 \,|\, z_0)$ wird durch seine Koordinaten beschrieben.



Flächeninhalt eines Dreiecks

Die drei Punkte $P(1|1|1)$, $Q(4|1|3)$ und $R(1|4|3)$ bilden ein Dreieck. Zur Berechnung des Flächeninhalts verwenden wir den Verbindungsvektor $\boldsymbol{a}$ von P nach Q, den Verbindungsvektor $\boldsymbol{b}$ von P nach R und bestimmen den Vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$:



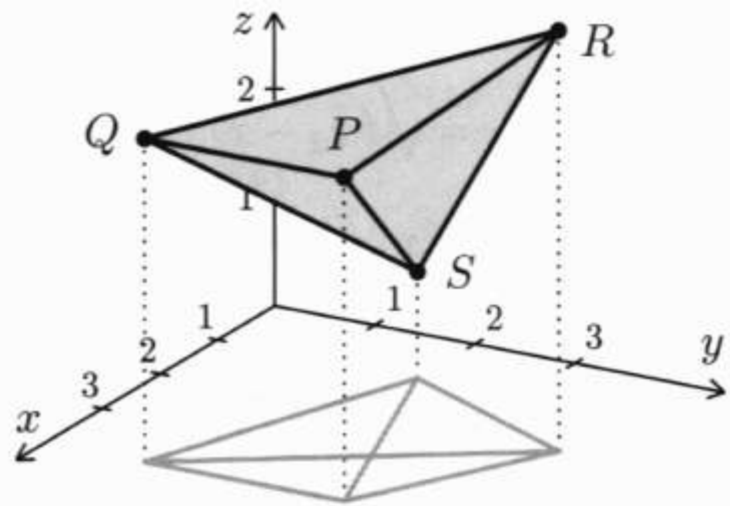
$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Den Flächeninhalt des Dreiecks A erhalten wir aus dem Betrag des Vektors $\boldsymbol{c}$:

$$A = \frac{1}{2}\,|\boldsymbol{c}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 9^2} = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Volumen eines Tetraeders

Die vier Punkte $P(4|3|3)$, $Q(4|1|3)$, $R(2|4|4)$ und $S(1|2|1)$ bilden ein Tetraeder. Zur Berechnung des Volumens verwenden wir den Verbindungsvektor $\boldsymbol{a}$ von P nach Q, den Verbindungsvektor $\boldsymbol{b}$ von P nach R und den Verbindungsvektor $\boldsymbol{c}$ von P nach S:



$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Das Volumen des Tetraeders erhalten wir dann aus dem Spatprodukt dieser Vektoren:

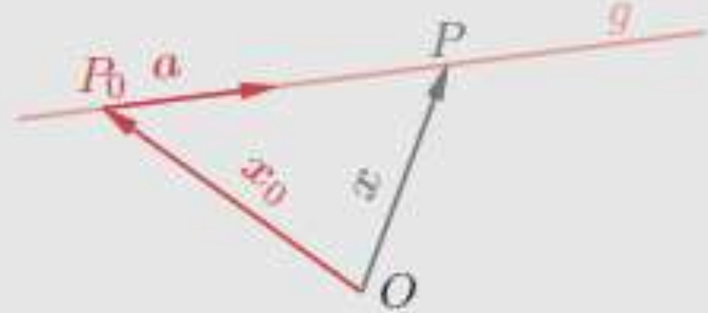
$$V = \frac{1}{6}\left|[\,\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\,]\right| = \frac{1}{6}\,|-14| = \frac{7}{3}.$$

Darstellung einer Geraden

Punktrichtungsform:

Eine Gerade g kann durch einen Richtungsvektor $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ und durch einen Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}_0$ festgelegt werden:

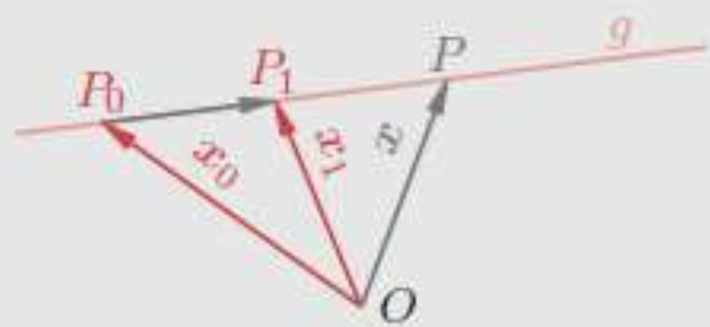
$$g: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\, \boldsymbol{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



Zweipunktform:

Eine Gerade g kann durch zwei verschiedene Punkte P_0 und P_1 mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{x}_0$ und $\boldsymbol{x}_1$ festgelegt werden:

$$g: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\,(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



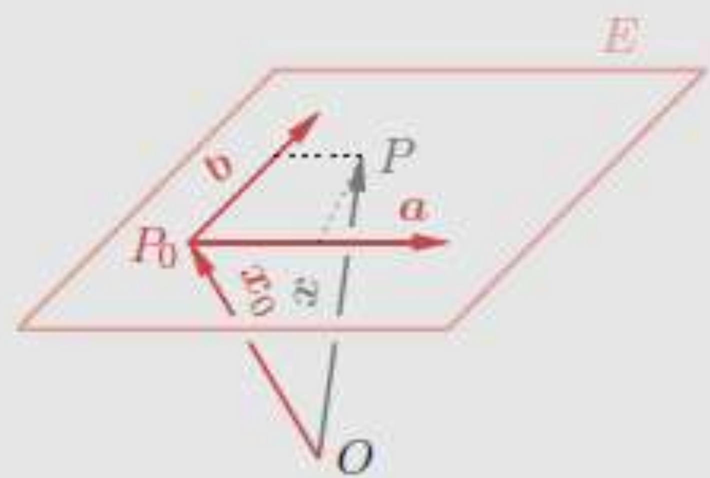
Darstellung einer Ebene

Punktrichtungsform:

Eine Ebene E kann durch zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ und durch einen Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}_0$ festgelegt werden:

$$E: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\,\boldsymbol{a} + \mu\,\boldsymbol{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter λ und μ sind unabhängig voneinander.

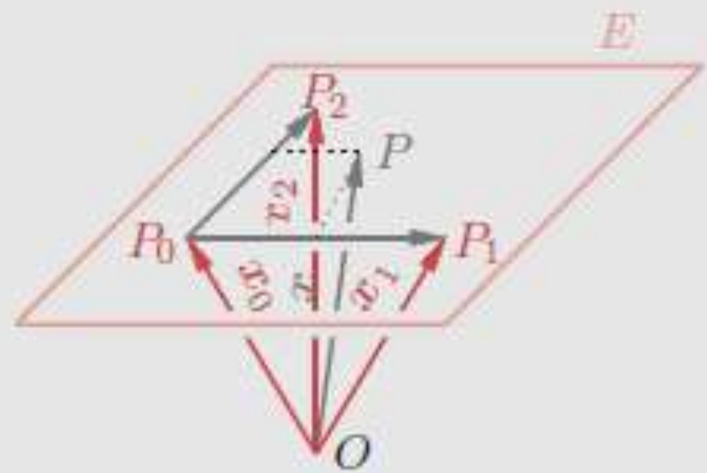


Darstellung einer Ebene

Dreipunkteform:

Eine Ebene E kann durch drei Punkte P_0, P_1 und P_2, die nicht alle auf einer Geraden liegen, mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ festgelegt werden:

$$E:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\,(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) + \mu\,(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0)\,, \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

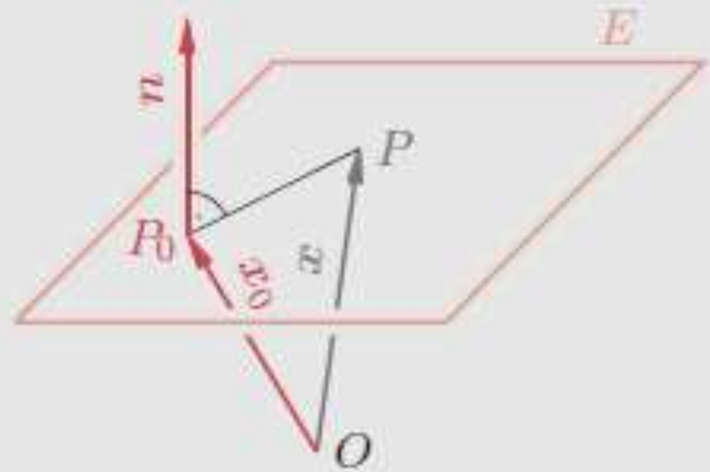


Die Parameter λ und μ sind unabhängig voneinander.

Parameterfreie Darstellung einer Ebene

Eine Ebene E durch den Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}_0$ und dem Normalenvektor $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$ kann man in Form einer Gleichung darstellen:

$$E: \quad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$



Ein Punkt P mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}$ liegt genau dann in der Ebene, wenn die Gleichung erfüllt ist.

Bei der parameterfreien Darstellung einer Ebene

$$E: \quad n_x x + n_y y + n_z z = d$$

sind die Faktoren n_x, n_y und n_z die Koordinaten des Normalenvektors $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$. Falls der Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ ein Einheitsvektor ist, bezeichnet man die Darstellung als **Hessesche Normalenform**.

Darstellung einer Ebene mit und ohne Parameter

Die Umrechnung zwischen einer Parameterdarstellung und einer parameterfreien Darstellung einer Ebene

$$E: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\, \boldsymbol{a} + \mu\, \boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \quad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

erfolgt mittels der Beziehung $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Schnitt zweier Geraden

Die Schnittpunkte zweier Geraden g_1 und g_2 in Parameterdarstellung bestimmt man aus dem linearen Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{ll} g_1: & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \lambda_1\, \boldsymbol{a}_1 \\ g_2: & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + \lambda_2\, \boldsymbol{a}_2 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad g_1 \cap g_2: \quad \boldsymbol{x}_1 + \lambda_1\, \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{x}_2 + \lambda_2\, \boldsymbol{a}_2$$

mit den beiden Unbekannten λ und μ. Falls das Gleichungssystem

- genau eine Lösung hat, dann besitzen die beiden Geraden einen Schnittpunkt,
- unendlich viele Lösungen hat, dann sind die beiden Geraden identisch,
- keine Lösung hat, dann sind die Geraden parallel oder windschief.

Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene

Die Schnittpunkte einer Geraden g mit einer Ebene E bestimmt man, indem man

- eine Parameterdarstellung der Geraden g und eine Parameterdarstellung der Ebene E gleichsetzt oder
- eine Parameterdarstellung der Geraden g in eine parameterfreie Gleichung der Ebene E einsetzt.

Schnitt zweier Ebenen

Die Schnittpunkte zweier Ebenen E_1 und E_2 bestimmt man, indem man

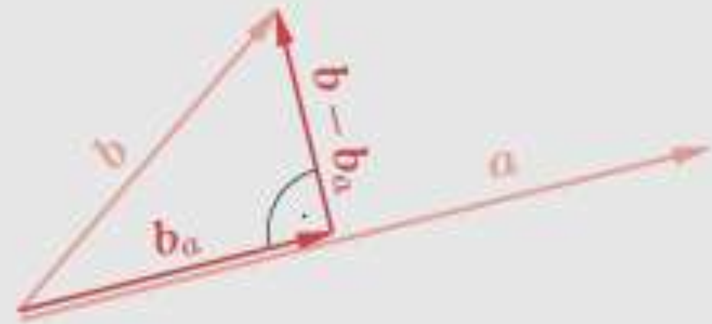
- die Parameterdarstellungen der beiden Ebenen gleichsetzt oder
- das Gleichungssystem aus den beiden Ebenengleichungen löst oder
- eine Parameterdarstellung einer Ebene in eine parameterfreie Gleichung der anderen Ebene einsetzt.

Senkrechte Projektion

Die senkrechte **Projektion** des Vektors $\boldsymbol{b}$ in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ ist definiert durch

$$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{a}} = |\boldsymbol{b}| \cos \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2} \boldsymbol{a}.$$

Diese Projektion ist ein Vektor in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ mit der Länge $|\boldsymbol{b}| \cos \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.



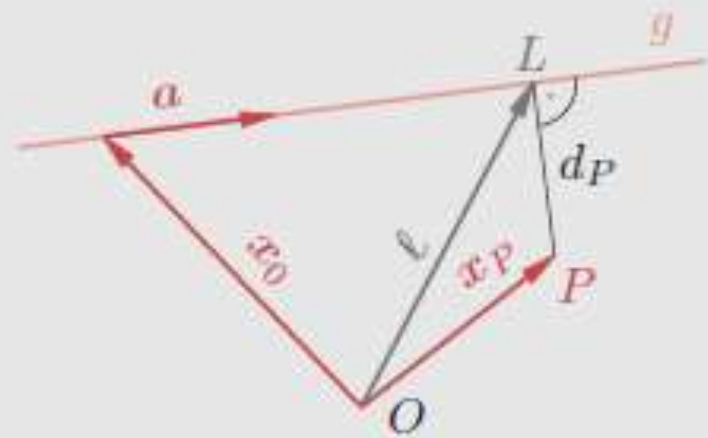
Abstand eines Punktes zu einer Geraden

Der Abstand des Punktes P mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}_P$ zur Geraden g

$$g: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{a}$$

ist die Entfernung zwischen dem Punkt P und seinem Lotfußpunkt:

$$d_P = \left| \boldsymbol{x}_P - \left(\boldsymbol{x}_0 + \frac{(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} \boldsymbol{a} \right) \right| .$$



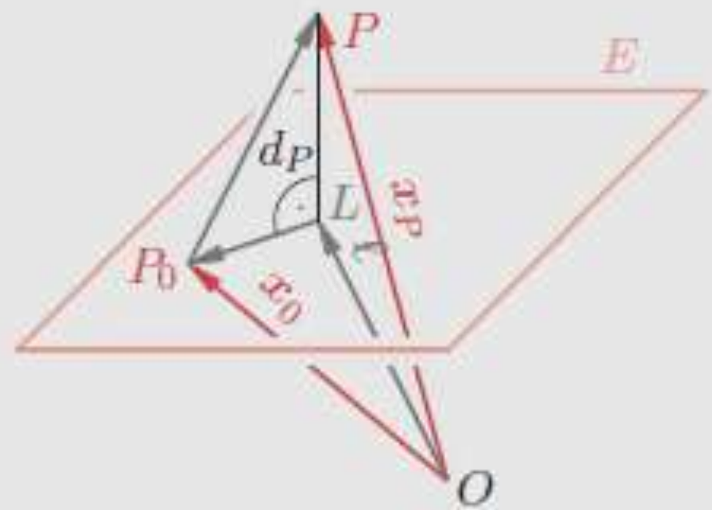
Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Mit der Hesseschen Normalenform einer Ebene

$$E: \quad n_x x + n_y y + n_z z + d = 0,$$
$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1$$

berechnet man den Abstand eines Punktes P mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}_P$ zur Ebene E durch Einsetzen von P in die Ebenengleichung:

$$d_P = \left| n_x x_P + n_y y_P + n_z z_P + d \right|.$$



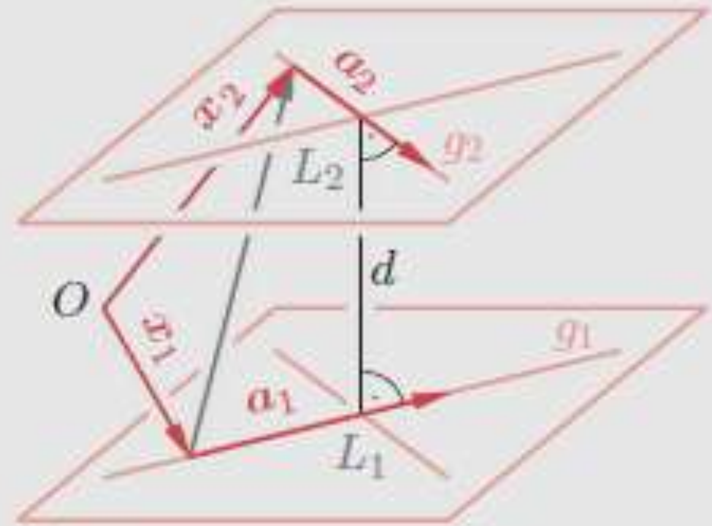
Windschiefe Geraden

Den Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$g_1: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \lambda_1 \boldsymbol{a}_1$$
$$g_2: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2$$

kann man durch folgende Formel berechnen:

$$d = \frac{|(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)|}{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}.$$



Den Winkel zwischen den beiden Geraden g_1 und g_2 in der Darstellung

$$g_1: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \lambda_1 \boldsymbol{a}_1, \qquad g_2: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\cos \angle(g_1, g_2) = \frac{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1||\boldsymbol{a}_2|}.$$

Winkel zwischen Gerade und Ebene

Den Winkel zwischen der Geraden g und der Ebene E in der Darstellung

$$g: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{a}, \qquad E: \quad n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\sin \angle (g, E) = \frac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{n}|}.$$

Bestimmung des Winkels eines Vektors zu einer Ebenen

Aufgabenstellung:

Die Vektoren ***a*** und ***b*** definieren eine Ebene. Der Vektor ***x*** schneidet diese Ebene. Berechnen Sie den Schnittwinkel α des Vektors ***x*** mit der Ebene.

Vorgehensweise:

Der resultierende Vektor einer Vektormultiplikation ***c*** = ***a*** × ***b*** steht immer senkrecht auf der Ebene, die von den Vektoren ***a*** und ***b*** gebildet wird. Einen Vektor, der senkrecht auf einer Ebene steht, nennt man auch Normalenvektor.

Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man den Winkel β des Vektors ***x*** zu der Normale der Ebene ***c*** berechnen. Der Schnittwinkel α ist dann (90° - β).

Winkel zwischen zwei Ebenen

Den Winkel zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2 in der Darstellung

$$E_1: \quad n_{1x}x + n_{1y}y + n_{1z}z + d_1 = 0, \qquad E_2: \quad n_{2x}x + n_{2y}y + n_{2z}z + d_2 = 0$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\cos \angle (E_1, E_2) = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}.$$

Aufgaben

Gegeben seien die drei Vektoren $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$

Sind die Vektoren ***a***, ***b*** und ***c*** komplanar?

Wie muss man den Parameter x wählen, damit die drei Vektoren

$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ in einer Ebene liegen?

Video

„Dimensions“
http://www.dimensions-math.org/

Kapitel 1: *Dimension „zwei“*

Kapitel 2: *Dimension „drei“*

Kapitel 3 und 4: *die vierte Dimension*

Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,
Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium,
Hanser Verlag, München 2010

http://www.dimensions-math.org/