



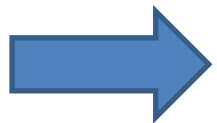
Grundlagen der ET (13)

Gerald Kupris

16.01.2013

GET Themenbereiche 2013

09.01.2013: Maschenstromanalyse und Knotenpotentialanalyse



16.01.2013: Vergleich der Verfahren - welches Verfahren wann?
Evaluation

23.01.2013: Wiederholung und Prüfungsvorbereitung

06.02.2013: 08:30 Uhr (Mittwoch) Prüfung GET 1

3. Semester: Vertiefte ET

Weitere Analyse nach der Vereinfachung

Nach der Vereinfachung der Schaltung kann die weitere Analyse mittels verschiedener Hilfsmittel erfolgen:

- Knoten- und Maschenanalyse mit dem Verfahren des vollständigen Baumes
- Überlagerungsverfahren
- Einsatz von Ersatz-Quellen
- Maschenstromanalyse
- Knotenpotentialanalyse

Allgemeine Knoten- und Maschenanalyse

1. Anwenden der Regeln der Netzwerkumformung, insbesondere Zusammenfassung von Schaltungsteilen, deren elektrische Größen nicht gesucht sind.
2. Es sind Zählpfeile für alle beteiligten Ströme und Spannungen festzulegen.
3. Aufstellen von **$k-1$** voneinander unabhängigen Knotengleichungen. Ströme mit zu dem Knoten weisenden Zählpfeil sind positiv zu werten.
4. Zeichnen des Graphen des Netzwerkes und Auswahl eines vollständigen Baumes.
5. Aufstellen von **$m = z - k + 1$** voneinander unabhängigen Maschengleichungen. Der Umlaufsinn ist für jede Masche beliebig wählbar.
6. Lösung des linearen Gleichungssystems für die **z** unbekannten Zweigströme.
7. Gegebenenfalls Rückgängigmachen der durchgeführten Netzwerkumformungen.

Vereinfachung durch das Maschenstromverfahren

Das Maschenstromverfahren ist ein vereinfachtes Analyseverfahren für lineare Netzwerke. Das bei diesem Verfahren zu lösende Gleichungssystem ist kleiner als bei der Knoten- und Maschenanalyse.

Prinzipielle Vorgehensweise:

- Festlegung der m unabhängigen Maschen des zu berechnenden Netzwerkes.
- Für jede unabhängige Masche wird ein beliebig orientierter Maschenstrom (Ringstrom) eingeführt. Jeder Zweig wird von mindestens einem Ringstrom durchflossen.
- Aufstellung der m unabhängigen Maschengleichungen, wobei die Spannungen über den passiven Elementen durch die Maschenströme ausgedrückt werden. Der Umlauf erfolgt in Richtung des Maschenstromes.
- Lösen des Gleichungssystems
- Berechnung der Zweigströme aus den Maschenströmen. Ist nur ein bestimmter Zweigstrom gesucht, ist es zweckmäßig, die Maschen so zu wählen, daß durch den jeweiligen Zweig nur ein Maschenstrom fließt.

Warum ist das Maschenstromverfahren einfacher?

Das Maschenstromverfahren benutzt nur Maschengleichungen und ermöglicht es, auf die **k-1** Knotengleichungen zu verzichten. Das führt zu einem reduzierten Gleichungssystem.

Die Maschen werden mit Hilfe des vollständigen Baumes ausgewählt. Die in den Verbindungszweigen fließenden Ströme werden als Maschenströme oder Kreisströme aufgefasst, die alle Elemente der jeweiligen Masche durchfließen.

Die tatsächlichen Ströme in den Zweigen ergeben sich durch die Überlagerung der Maschenströme. Diese Überlagerung stellt letztendlich die Erfüllung der Knotengleichungen derjenigen Knoten dar, die den Anfang bzw. das Ende eines Zweiges des Vollständigen Baumes bilden. Damit werden nicht nur die Maschengleichungen, sondern auch die Knotengleichungen erfüllt.

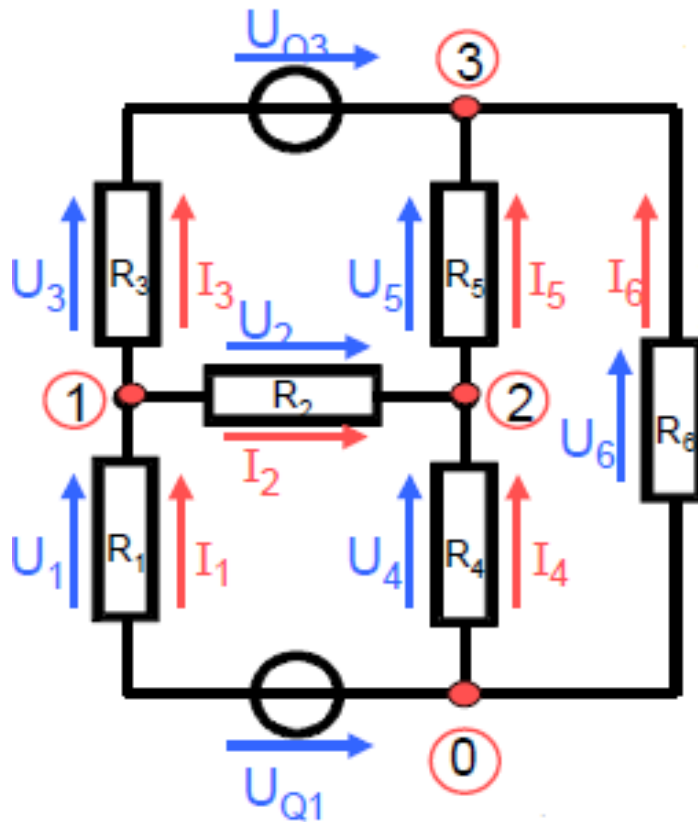
Das Gleichungssystem kann somit auch mit **m = z-k+1** Gleichungen das Netzwerk vollständig analysieren, ebenso wie das Gleichungssystem z-ter Ordnung nach der Knoten- und Maschenanalyse.

Lösungsalgorithmus für die Maschenstromanalyse

1. Alle Stromquellen wenn möglich in äquivalente Spannungsquellen umwandeln.
2. Jeder Masche wird ein unabhängiger Maschenstrom zugeordnet. Die Richtung des Maschenstromes ist beliebig wählbar, die angenommene Zählrichtung gilt als positiv. Die Maschenwahl ist zweckmäßig so zu treffen, dass durch den besonders interessierenden Zweig nur ein Maschenstrom fließt.
3. Aufstellung der Beziehungen zwischen den Maschen- und Zweigströmen.
4. Aufstellung der Maschengleichungen.
5. Verknüpfung der Zweigspannungen und der Maschenströme.
6. Lösung des Gleichungssystems für die Maschenströme.
7. Berechnung der Zweigströme aus den Maschenströmen nach Punkt 3.
Berechnung der Zweigspannungen nach Punkt 5.

Maschenstromanalyse Schritt für Schritt

Gesucht sind die Spannungen U_1 bis U_6 und die Ströme I_1 bis I_6 .



Schritt 1.1: Stromquellen durch Spannungsquellen ersetzen.

Achtung: Richtung umgekehrt!

Schritt 1.2: Knoten nummerieren

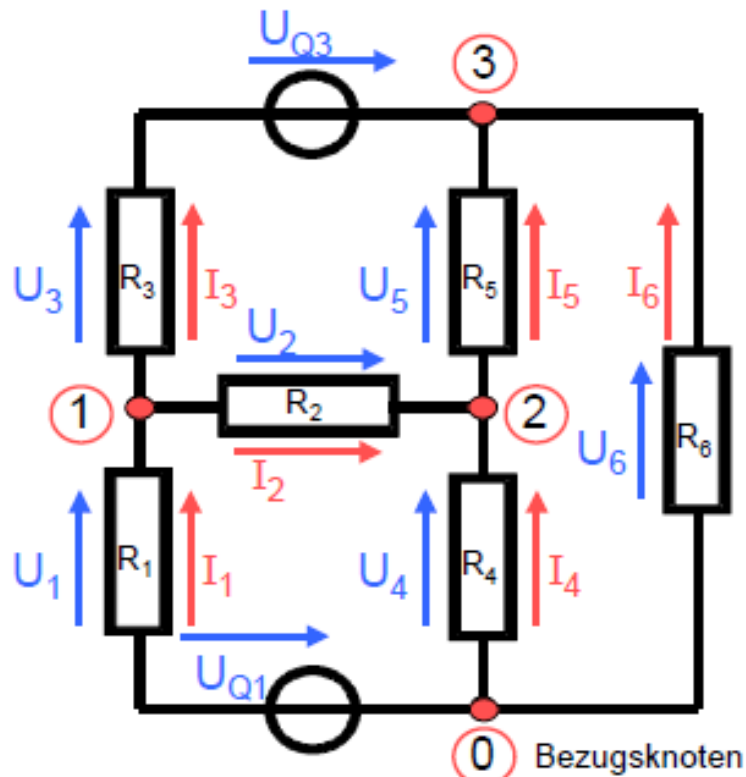
Schritt 1.3: Zweige nummerieren
Zweigspannungen und
Zweigströme eintragen

Unter Anwendung der Kirchhoffschen Gesetze sind **$k-1$** Knotengleichungen und **m** Maschengleichungen aufzustellen:

$$k = 4 \quad z = 6$$

$$m = z - k + 1 = 3$$

Spannungen werden Ströme



Schritt 1.4:

Verknüpfung der
Zweigspannungen und
Zweigströme über das
Ohmsche Gesetz:

$$U_{z1} = I_1 R_1 - U_{Q1}$$

$$U_{z3} = I_3 R_3 + U_{Q3}$$

$$U_1 = I_1 R_1$$

$$U_2 = I_2 R_2$$

$$U_3 = I_3 R_3$$

$$U_4 = I_4 R_4$$

$$U_5 = I_5 R_5$$

$$U_6 = I_6 R_6$$

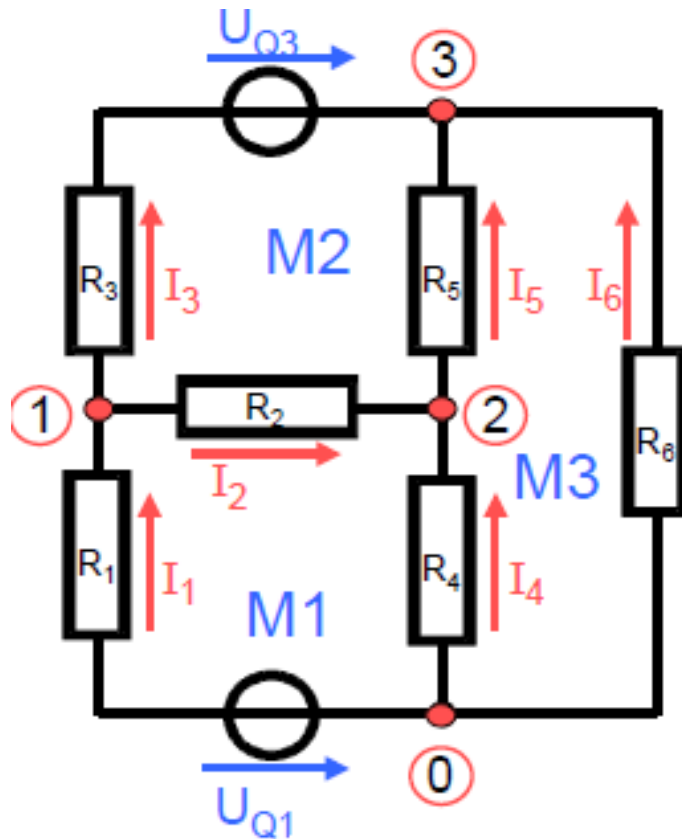
Wahl der Maschen

Für die richtige Wahl der Maschen muss im Allgemeinen die Topologie des Netzwerkes analysiert werden.

Hier ein Rezept für die Wahl der Maschen:

1. Wähle die erste Masche beliebig.
2. Beginne jedes Mal an einem bereits verwendeten Knoten die nächste Masche.
3. Führe jede neue Masche über mindestens einen noch nicht benutzten Zweig.
4. Stößt man auf einen schon benutzten Knoten, schließe die Masche über die schon benutzten Zweige ohne Überkreuzung.
5. Baue neue Maschen an, bis jeder Zweig mindestens einmal durchlaufen ist. Prüfe die Zahl der Maschen: $m = z - k + 1$. (m : Maschen, k : Knoten, z : Zweige)

Unabhängige Ströme



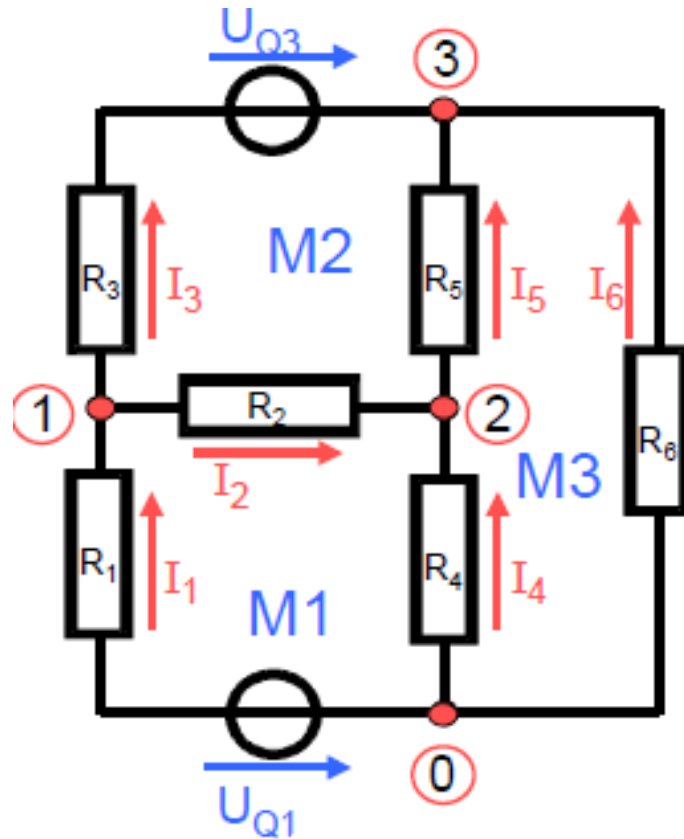
Betrachtung des Knotens 1:

$$\Sigma I = 0 = I_1 - I_2 - I_3$$

Sind z.B. I_1 und I_3 bekannt (durch Messung), dann ist I_2 durch die Knotengleichung eindeutig bestimmt.

Man kann I_1 und I_3 als unabhängig und I_2 als von I_1 und I_3 abhängig bezeichnen. Es erscheint daher sinnvoll, I_2 in den Gleichungen nicht mehr mitzuführen, sondern von vornherein durch I_1 und I_3 darzustellen.

Maschenströme



Betrachtung des Knotens 0:

$$\Sigma I = 0 = -I_1 - I_4 - I_6$$

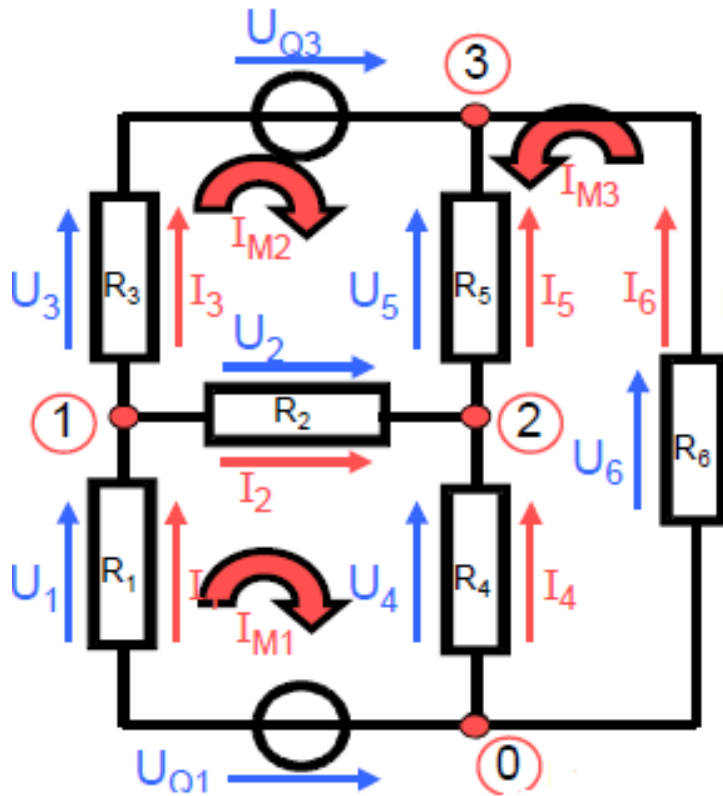
Wird neben I_1 und I_3 auch I_6 als weiterer unabhängiger Strom gewählt, dann ist I_4 eindeutig bestimmt.

Die als unabhängig bezeichneten Ströme I_1 , I_3 und I_6 fließen in den geschlossenen Stromschleifen der Maschen.

Strom über Knoten

| | | | | | |
|-------|---|---|---|---|----------|
| I_1 | 0 | 1 | 2 | 0 | I_{M1} |
| I_3 | 1 | 3 | 2 | 1 | I_{M2} |
| I_6 | 0 | 3 | 2 | 0 | I_{M3} |

Maschenumlaufsinn



Schritt 2:

Einführung von
Maschenströmen

Schritt 3:

Zusammenhang zwischen
den Zweigströmen und den
Maschenströmen:

$$I_1 = I_{M1}$$

$$I_2 = I_{M1} - I_{M2}$$

$$I_3 = I_{M2}$$

$$I_4 = -I_{M1} - I_{M3}$$

$$I_5 = -I_{M2} - I_{M3}$$

$$I_6 = I_{M3}$$

Maschengleichungen

Schritt 4: Aufstellung der Maschengleichungen:

| | Zweigspannungen | | | | | | Quellen |
|-----------|-----------------|--------|--------|--------|--------|--------|-------------|
| | U_1 | U_2 | U_3 | U_4 | U_5 | U_6 | U_Q |
| Masche 1: | $U_1 +$ | U_2 | | $-U_4$ | | | $= U_{Q1}$ |
| Masche 2: | | $-U_2$ | $+U_3$ | | $-U_5$ | | $= -U_{Q3}$ |
| Masche 3: | | | | $-U_4$ | $-U_5$ | $+U_6$ | $= 0$ |

Spannungen durch Maschenströme ausdrücken:

$$U_1 = I_1 R_1 = I_{M1} R_1$$

$$U_2 = I_2 R_2 = I_{M1} R_2 - I_{M2} R_2$$

$$U_4 = I_4 R_4 = -I_{M1} R_4 - I_{M3} R_4$$

Bestimmungsgleichungen

Schritt 5: Bestimmungsgleichungen für die Maschenströme:

| | Zweigspannungen | | | | | | Quellen |
|-----------|--|-------|-------|-------|-------|-------|---------|
| | U_1 | U_2 | U_3 | U_4 | U_5 | U_6 | U_Q |
| Masche 1: | $I_{M1}(R_1 + R_2 + R_4) - I_{M2}R_2 + I_{M3}R_4 = U_{Q1}$ | | | | | | |
| Masche 2: | $-I_{M1}R_2 + I_{M2}(R_2 + R_3 + R_5) + I_{M3}R_5 = -U_{Q3}$ | | | | | | |
| Masche 3: | $I_{M1}R_4 + I_{M2}R_5 + I_{M3}(R_4 + R_5 + R_6) = 0$ | | | | | | |

Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} (R_1 + R_2 + R_4) & -R_2 & +R_4 \\ -R_2 & +(R_2 + R_3 + R_5) & +R_5 \\ R_4 & +R_5 & +(R_4 + R_5 + R_6) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_{Q1} \\ -U_{Q3} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix
der Zweigwiderstände

Spaltenmatrix
der unbekannten
Maschenströme

Spaltenmatrix
der bekannten
Quellen

Regeln für die Aufstellung der Matrix beim Maschenstromverfahren

0. Die Matrix verwendet die Widerstände und nicht die Leitwerte.
1. Die Widerstandsmatrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen.
Alle Elemente der Hauptdiagonalen sind positiv.
2. Jede Zeile der Widerstandsmatrix beschreibt eine Masche und ihre Kopplung zu den anderen Maschen.
3. Jedes Hauptdiagonalelement wird aus der Summe der Widerstände in der Masche gebildet.
4. Die weiteren Elemente einer Zeile enthalten diejenigen Widerstände, über die die Maschen miteinander gekoppelt sind. Fließen die Maschenströme in gleicher Richtung durch den/die Kopplungswiderstände, dann ist das Vorzeichen des Matrixelementes positiv.
5. Die Quellenspannungen in der Spaltenmatrix der rechten Seite des Gleichungssystems sind mit einem negativen Vorzeichen einzusetzen, wenn der Zählpfeil der Spannungsquelle in Richtung des Maschenstromes zeigt.

Knotenpotentialanalyse

Die Knotenpotentialanalyse (KPA) ist ein wichtiges Netzwerkanalyseverfahren und findet insbesondere bei vielen Programmen zur Netzwerkberechnung Anwendung (z.B. PSPICE). Aber auch ohne Rechnerunterstützung ist sie ein wesentlich effizienteres Verfahren als die direkte Anwendung von Knoten- und Maschensatz.

Prinzipiell wird die gesamte Netzwerkberechnung dadurch gelöst, dass auf die Erstellung von Maschengleichungen verzichtet und **lediglich mit den modifizierten Knotenpunktgleichungen** gearbeitet wird.

Ergebnis bei der Knotenpotentialanalyse sind nicht die Ströme in den Netzwerkzweigen, sondern die **Spannungen der einzelnen Knotenpunkte** gegenüber einem Bezugsknoten, also die Potentiale der Knoten. Hierdurch wird die Anzahl der Unbekannten vermindert.

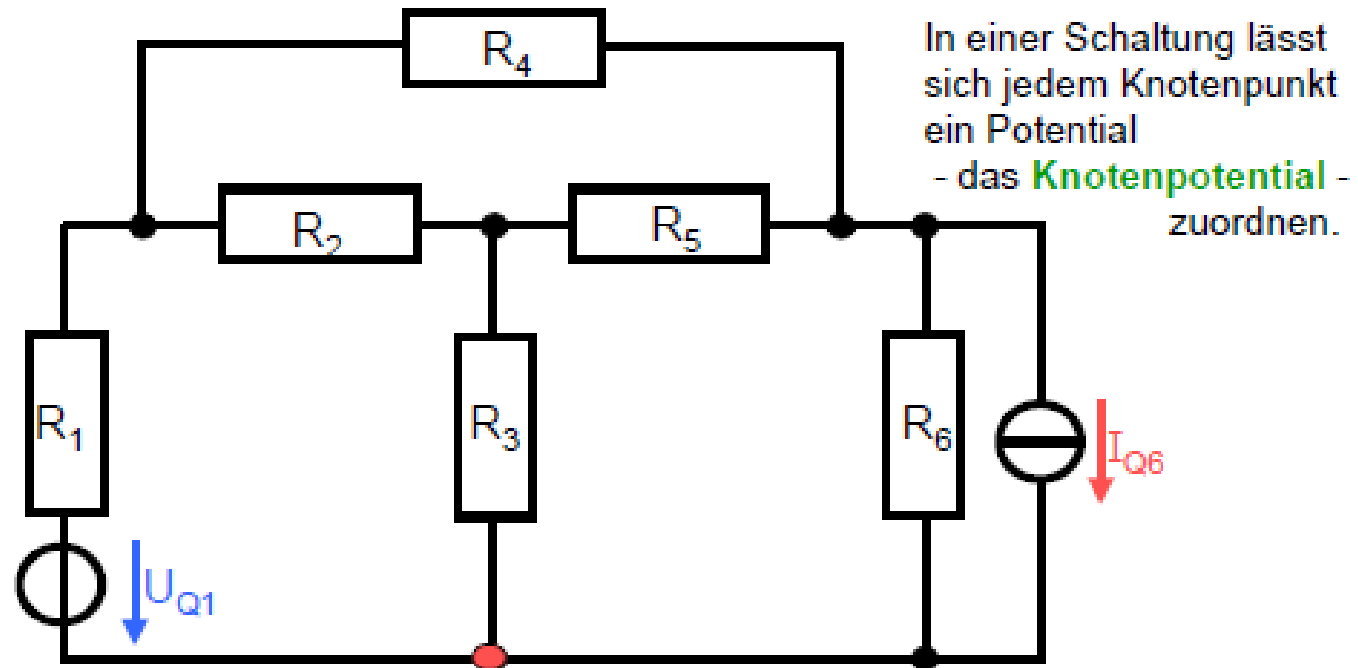
Der Vorteil des Knotenpotentialverfahrens liegt darin, dass an Stelle von **z** Gleichungen (für die Anzahl der Zweige) nur **$k-1$** Knotengleichungen aufgestellt und gelöst werden müssen. Dadurch wird der Rechenaufwand für die Lösung des linearen Gleichungssystems erheblich verringert.

Lösungsalgorithmus für das Knotenpotentialverfahren

1. Wählen eines Bezugsknotens, dem das Bezugspotential zugeordnet wird.
2. Umwandeln aller Spannungsquellen in äquivalente Stromquellen wenn möglich, (manchmal empfohlen: Umwandlung aller Widerstände **R** in Leitwerte **G**).
3. Festlegung der Knotenspannungen.
4. Zweigspannungen durch Knotenspannungen ausdrücken.
5. Zweigströme durch Knotenspannungen und Widerstände bzw. Leitwerte ausdrücken.
6. Aufstellung der **k-1** Knotengleichungen und Lösung des Gleichungssystems für die Knotenspannungen.
7. Berechnung der Zweigspannungen nach Punkt 3. Berechnung der Zweigströme nach Punkt 4.

Knotenpotentialanalyse

Gesucht sind die Spannungen U_1 bis U_6 und die Ströme I_1 bis I_6 .

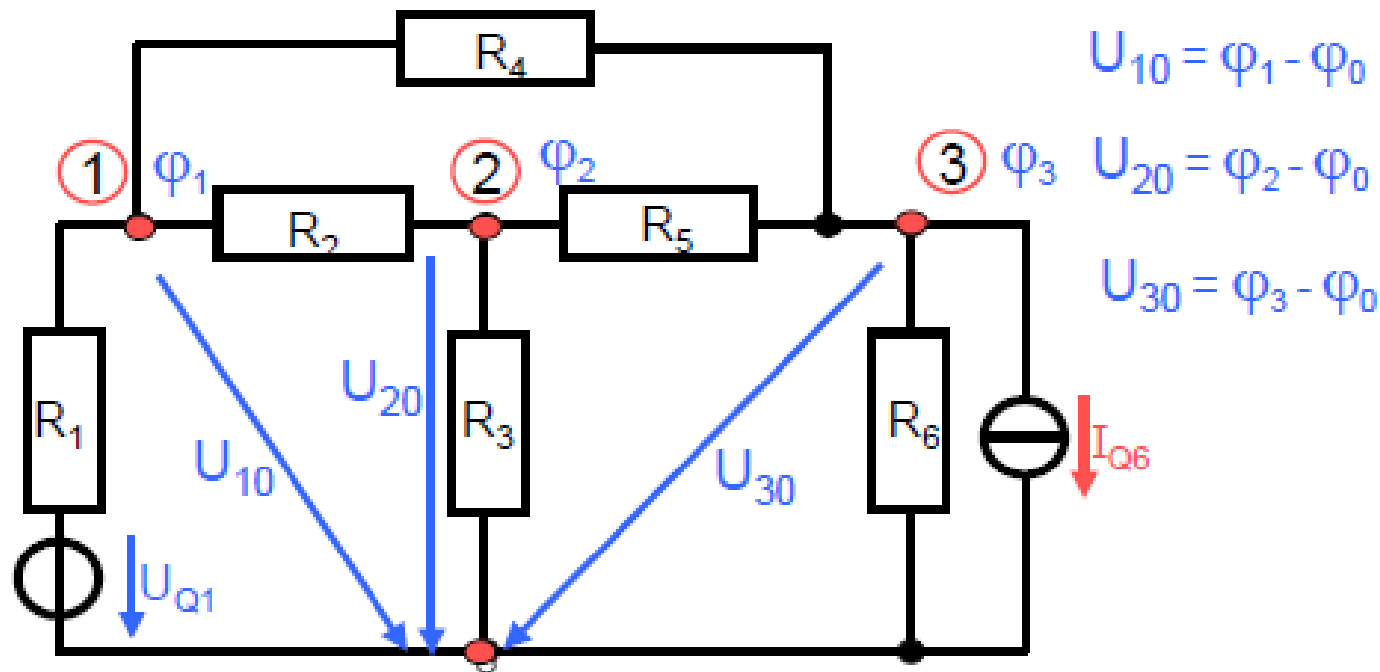


Bezugsknoten: Bezugspotential $\phi_0 = 0 \text{ V}$

Dafür wird ein Knoten als Bezugsknoten ausgewählt, dem ein willkürlich festgelegtes Bezugspotential zugeordnet wird. Meistens wird das Bezugspotential ϕ_0 zu $\phi_0 = 0 \text{ V}$ gewählt.

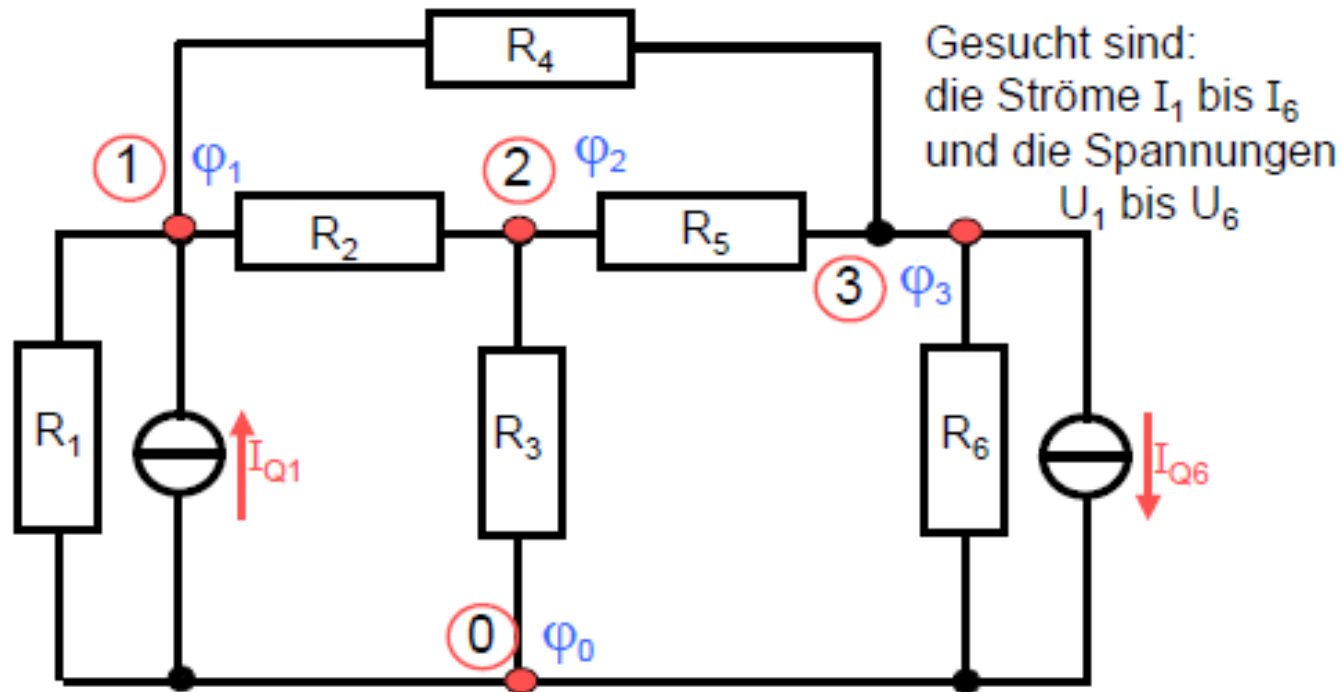
Schritt 1.1: Wahl des Bezugsknotens

Die Spannung zwischen einem beliebigen Knoten des Netzwerkes und dem Bezugsknoten ist die Differenz der Potentiale beider Knoten. Diese Potentialdifferenz wird als **Knotenspannung** bezeichnet.



Bezugsknoten: Bezugspotential $\varphi_0 = 0 \text{ V}$

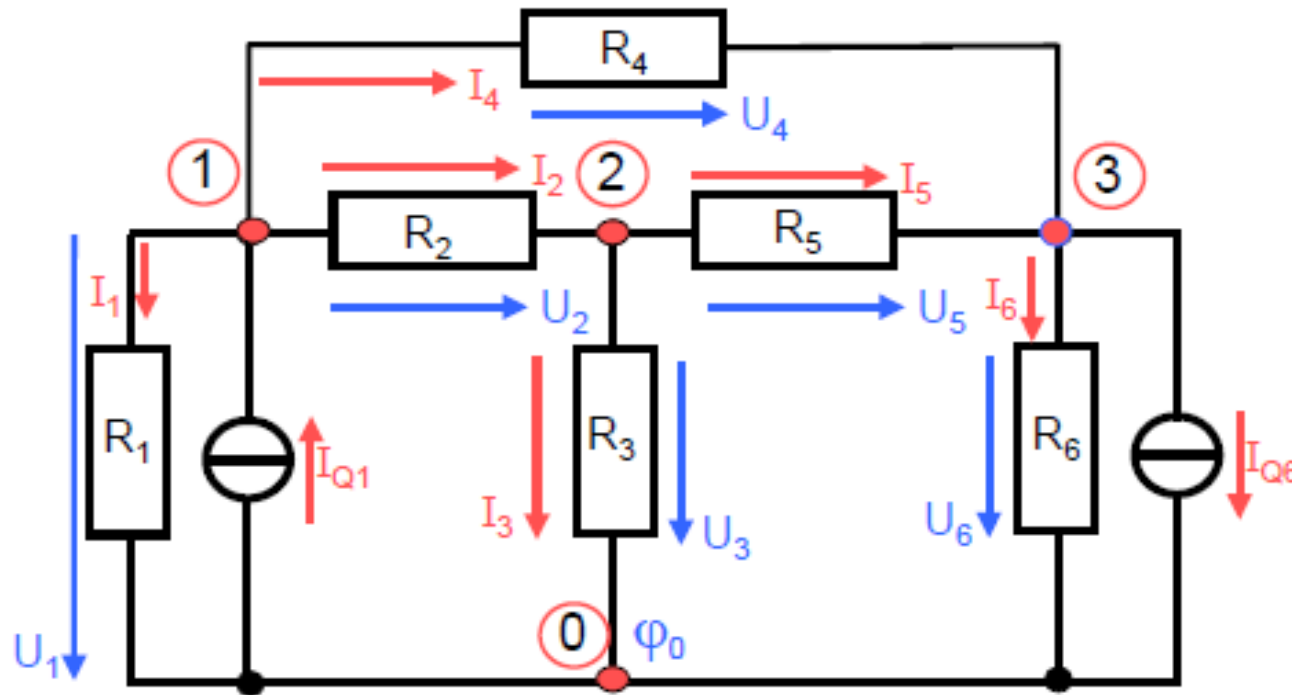
Vorgehensweise



Schritt 1.2: Nummerierung der Knoten von 0 bis $k-1$. Der Bezugsknoten, dem das Bezugspotential '0 Volt' zugeordnet wird, sollte die Knotennummer 0 erhalten.

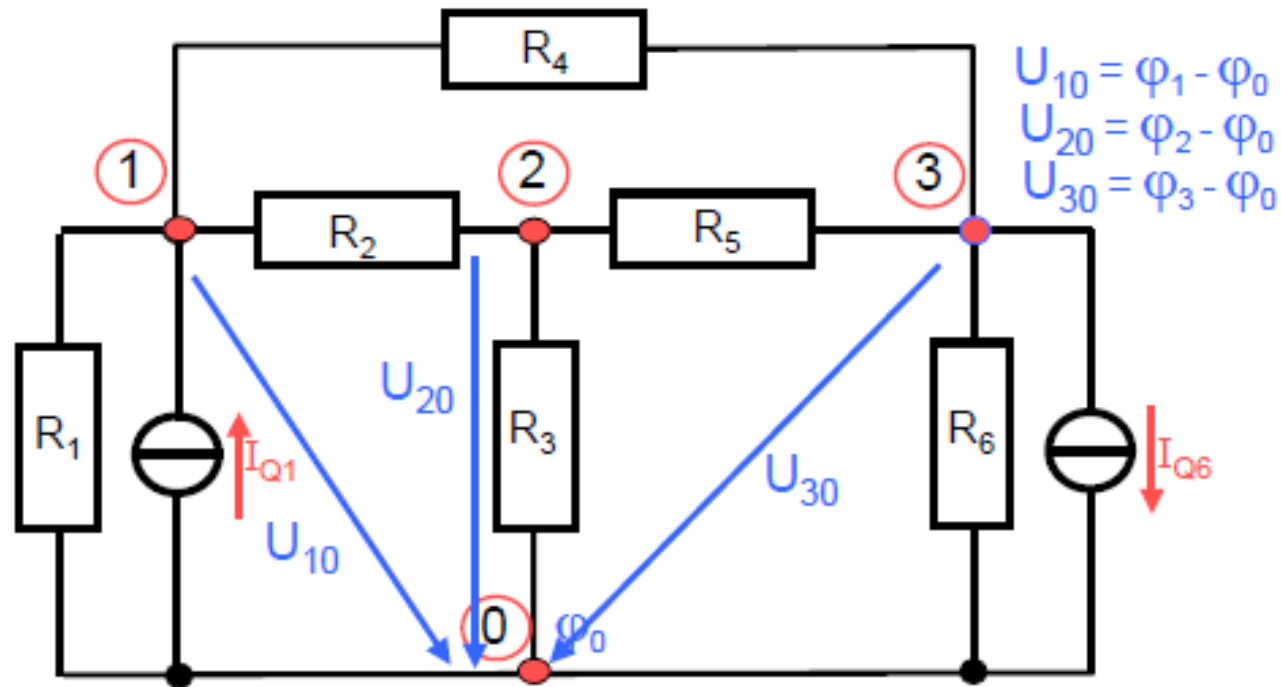
Schritt 2.1: Ersetzung aller Spannungsquellen durch äquivalente Stromquellen.
Achtung: Richtung kehrt sich um!

Nummerierung der Zweige



Schritt 2.2: Nummerierung der Zweige von 1 bis z. Für jede Zweigspannung und jeden Zweigstrom wird ein Bezugspfeil in die Schaltung eingetragen (Index = Zweignummer).

Knotenspannungen



Schritt 3: Eintragen der Knotenspannungen. Von jedem Knoten wird ein Spannungspfeil zum Bezugsknoten eingetragen. Die Knotenspannungen erhalten im Gegensatz zu den Zweigspannungen einen Doppelindex (1. Index = Ausgangsknoten, 2. Index = Bezugsknoten).

Ströme werden Spannungen

Schritt 4: Zweigspannungen durch Knotenspannungen ausdrücken.

$$\begin{array}{llll} U_1 = U_{10} & U_2 = U_{10} - U_{20} & U_3 = U_{20} & U_4 = U_{10} - U_{30} \\ U_5 = U_{20} - U_{30} & U_6 = U_{30} & & \end{array}$$

Schritt 5: Zweigströme werden durch Knotenspannungen und Widerstände bzw. Leitwerte ausgedrückt.

$$\begin{array}{ll} I_1 = U_1 / R_1 = G_1 U_1 = G_1 U_{10} \\ I_2 = U_2 / R_2 = G_2 U_2 = G_2 (U_{10} - U_{20}) \\ I_3 = U_3 / R_3 = G_3 U_3 = G_3 U_{20} \\ I_4 = U_4 / R_4 = G_4 U_4 = G_4 (U_{10} - U_{30}) \\ I_5 = U_5 / R_5 = G_5 U_5 = G_5 (U_{20} - U_{30}) \\ I_6 = U_6 / R_6 = G_6 U_6 = G_6 U_{30} \end{array}$$

Knotengleichungen

Schritt 6: Aufstellung der **k-1** Knotengleichungen. 4 Knoten: 3 Gleichungen

$$\begin{array}{lcl}
 \text{Knoten 1} & -I_1 - I_2 & -I_4 = -I_{Q1} \\
 \text{Knoten 2} & I_2 - I_3 & -I_5 = 0 \\
 \text{Knoten 3} & & I_4 + I_5 - I_6 = I_{Q6}
 \end{array}$$

In diesen Gleichungen werden die Ströme nun über das Ohmsche Gesetz durch die Produkte aus Leitwert und Spannung des jeweiligen Zweiges ersetzt und dann die Spannungen durch die Knotenspannungen ausgedrückt. Anschließend werden die Terme zur gleichen Knotenspannung zusammengefasst.

Wenn in dem Gleichungssystem Gleichungen mit -1 multipliziert werden, ändert sich das Vorzeichen der Determinante. Die 1. und 3. Zeile werden mit -1 multipliziert; die Determinante bleibt unverändert!

Matrixschreibweise

Schritt 7: Aufstellung und Lösung des linearen Gleichungssystems.

$$\begin{pmatrix} (G_1 + G_2 + G_4) & -G_2 & -G_4 \\ -G_2 & +(G_2 + G_3 + G_5) & -G_5 \\ -G_4 & -G_5 & +(G_4 + G_5 + G_6) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_{10} \\ U_{20} \\ U_{30} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{Q1} \\ 0 \\ -I_{Q6} \end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix der Zweigleitwerte Spaltenvektor der unbekannten Knotenspannungen

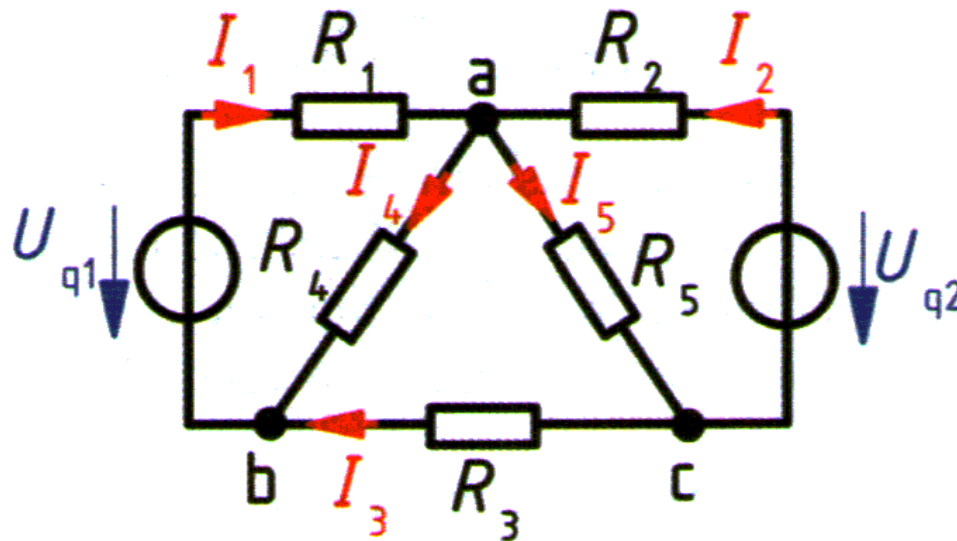
Spaltenvektor der bekannten Quellen

Aufstellung der Matrix beim Knotenpotentialverfahren

0. Es werden die Leitwerte anstelle der Widerstände verwendet.
1. Die Leitwertmatrix ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen.
Alle Elemente der Hauptdiagonalen sind positiv, alle anderen Elemente sind negativ.
2. Jede Zeile der Leitwertmatrix beschreibt die Schaltungsstruktur in der Umgebung eines Knotens.
3. Jedes Hauptdiagonalelement wird aus der Summe der Leitwerte gebildet, die mit einem Pol am zugehörigen Knoten liegen.
4. Die weiteren Elemente einer Zeile enthalten diejenigen Leitwerte, die vom betrachteten Knoten zum jeweiligen Nachbarknoten führen.
5. Die Summe der Elemente einer Zeile ist Null, wenn kein Zweig vom betrachteten Knoten zum Bezugsknoten führt. Besteht ein Zweig zum Bezugsknoten, so ist sein Leitwert gleich dieser Summe.
6. Die Elemente der Spaltenmatrix auf der rechten Seite des Gleichungssystems werden von den Quellenströmen gebildet. Fließt in den betrachteten Knoten ein Strom hinein, so wird er positiv gezählt. Ein aus dem Knoten herausfließender Strom erhält ein negatives Vorzeichen.

Maschenstrom- und Knotenpotentialverfahren

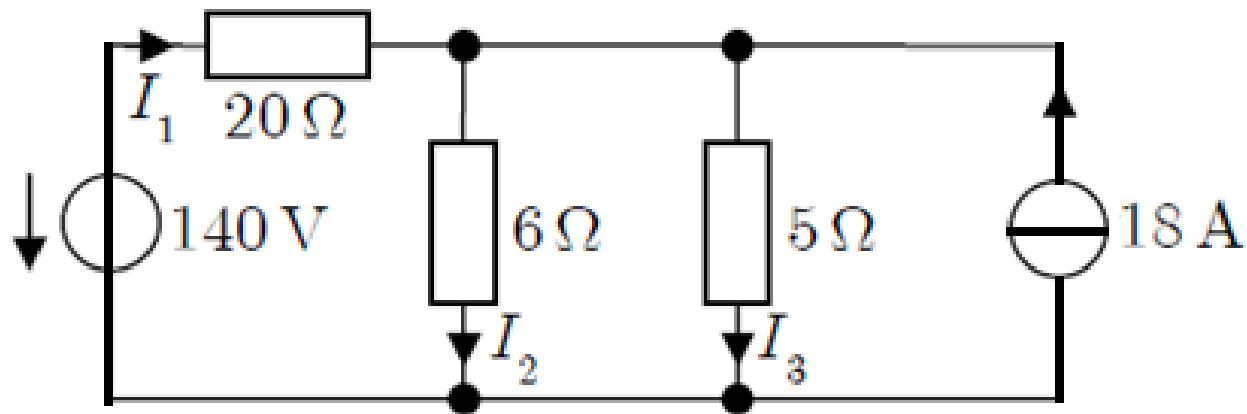
- Die Schaltung im Bild enthält die Widerstände $R_1 = 1 \, \Omega$, $R_2 = 2 \, \Omega$, $R_3 = 5 \, \Omega$, $R_4 = 25 \, \Omega$, $R_5 = 40 \, \Omega$ sowie die Quellenspannungen $U_{q1} = 16,2 \, \text{V}$ und $U_{q2} = 11,4 \, \text{V}$. Alle Zweigströme sollen mittels Maschenstromverfahren bestimmt werden.



- Analysieren Sie die gleiche Schaltung mit Hilfe des Knotenpotentialverfahrens.

Maschenstrom- und Knotenpotentialverfahren

Die Ströme I_1 , I_2 , und I_3 sind mit Hilfe des Maschenstromverfahrens und dann mit Hilfe des Knotenpotentialverfahrens zu berechnen.



Welches Analyseverfahren wäre sonst noch geeignet?

Vergleich der verschiedenen Analyseverfahren

Knoten- und Maschenanalyse:

allgemeines Verfahren mit vielen Gleichungen, die aber meist einfach aufgebaut sind.

Überlagerungsverfahren:

sehr empfehlenswert, wenn nur wenige Quellen im Netzwerk vorhanden sind.

Einsatz von Ersatz-Quellen:

wenn nur die Klemmengrößen eines passiven Zweipols von Interesse sind.

Maschenstromanalyse:

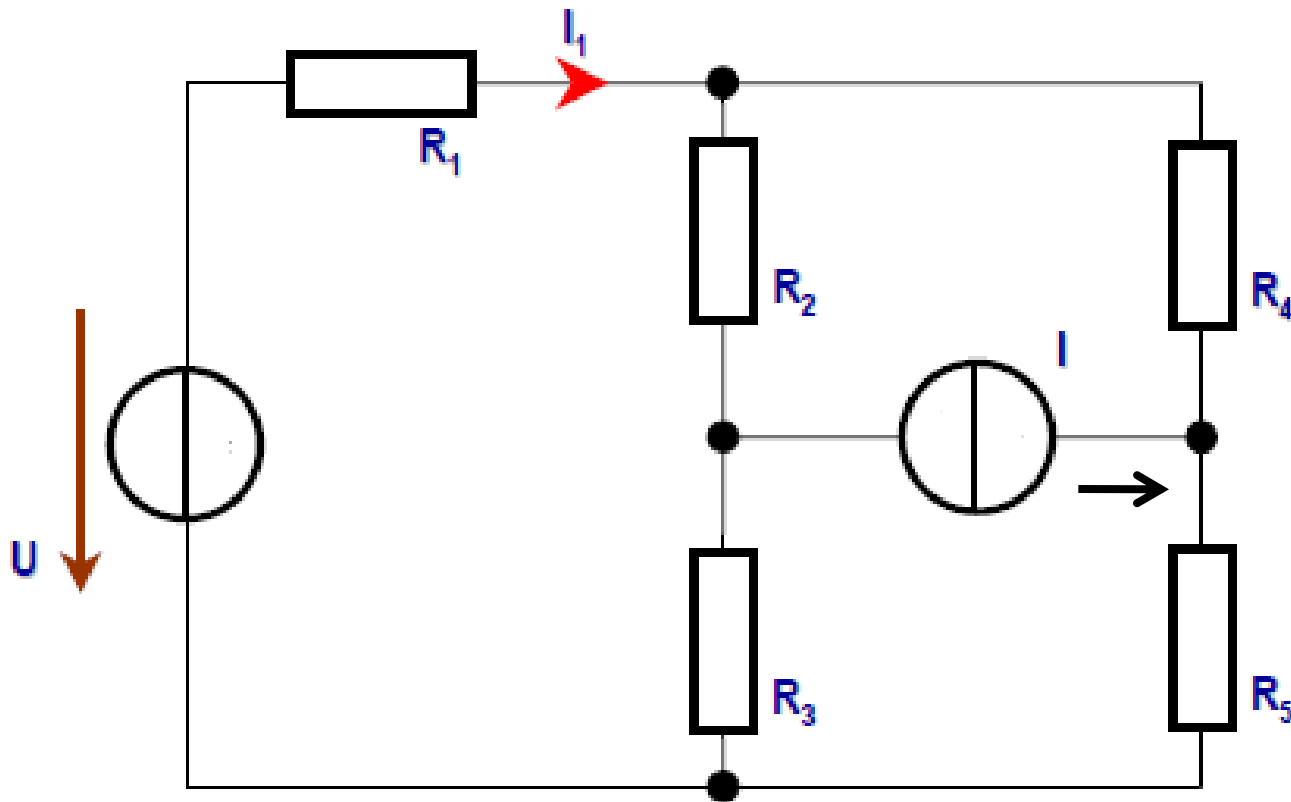
es sind nur so viele Gleichungen zu lösen, wie das Netzwerk Maschen hat; vorteilhaft bei Spannungsquellen. Einfache Aufstellung einer Matrix möglich. (Problem: falsche Maschenwahl kann zu falschen Lösungen führen).

Knotenpotentialanalyse:

es sind nur so viele Gleichungen zu lösen, wie das Netzwerk unabhängige Knoten hat ($k-1$); vorteilhaft bei vielen Stromquellen. Einfache Aufstellung einer Matrix möglich.

Maschenstrom- und Knotenpotentialverfahren

Bestimmen Sie den Strom I_1 mit Hilfe des Maschenstromverfahrens und mit Hilfe des Knotenpotenzialverfahrens.



$$U = 20V$$

$$I = 4A$$

$$R_1 = 25\Omega$$

$$R_2 = 50\Omega$$

$$R_3 = 75\Omega$$

$$R_4 = 100\Omega$$

$$R_5 = 125\Omega$$

Evaluation

B-AI-1 Grundlagen der Elektrotechnik WS 2012 2013 Kupris

Link: <http://inkidu.hs-weingarten.de/index.php/inquiry/19645>

Shortcut: EODLJn2rDDB5

Literatur

M. Filtz, TU Berlin: Vorlesung Grundlagen der Elektrotechnik, WS2006/07

Moeller: Grundlagen der Elektrotechnik, Vieweg + Teubner Verlag

Helmut Lindner: Elektro - Aufgaben Band 1: Gleichstrom, Hanser Fachbuchverlag

Paul A. Tipler, Gene Mosca: Physik für Wissenschaftler und Ingenieure, Spektrum Akademischer Verlag, August 2009



Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf