Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (9)

Gerald Kupris

25.10.2010

Tutorium Mathematik

	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
1	Digitaltechnik 1 Bö E 101		GET gem. mit MK-1 Ku C 106	Physik Ku A 111	
2	Mathematik 1 Ku E 204	Einführung in die Programmierung Jr ITC-Computerraum	Mathematik 1 Ku E 102	GET gem. mit MK-1 Fr C 106	
3	Physik Ku E 204	Einführung in die Programmierung Jr ITC-Computerraum		Mathematik 1 Ku E 102	
4		Grundlagen der Informatik Jr ITC-Computerraum	Grundlagen der Betriebswirtschaft Schm E 102	**14:00 Uhr**	
5		Grundlagen der Informatik Jr ITC-Computerraum			

28.10.: einmalig Raum D119
danach: immer Raum E104

Wiederholung: Skalarprodukt von Vektoren

Das Skalarprodukt (auch **inneres Produkt** oder Punktprodukt) ist eine mathematische Verknüpfung. Das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnet sich nach der Formel:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}|\,|\vec{y}|\,\cos\measuredangle(\vec{x},\vec{y}) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + \ldots + x_n\,y_n$$

Wie bei der normalen Multiplikation kann das Multiplikationszeichen auch weggelassen werden:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}\vec{y}$$

Es gibt eine einfache Methode das Skalarprodukt zu berechnen, und zwar durch komponentenweises Multiplizieren der Koordinaten der Vektoren und anschließendes Aufsummieren.

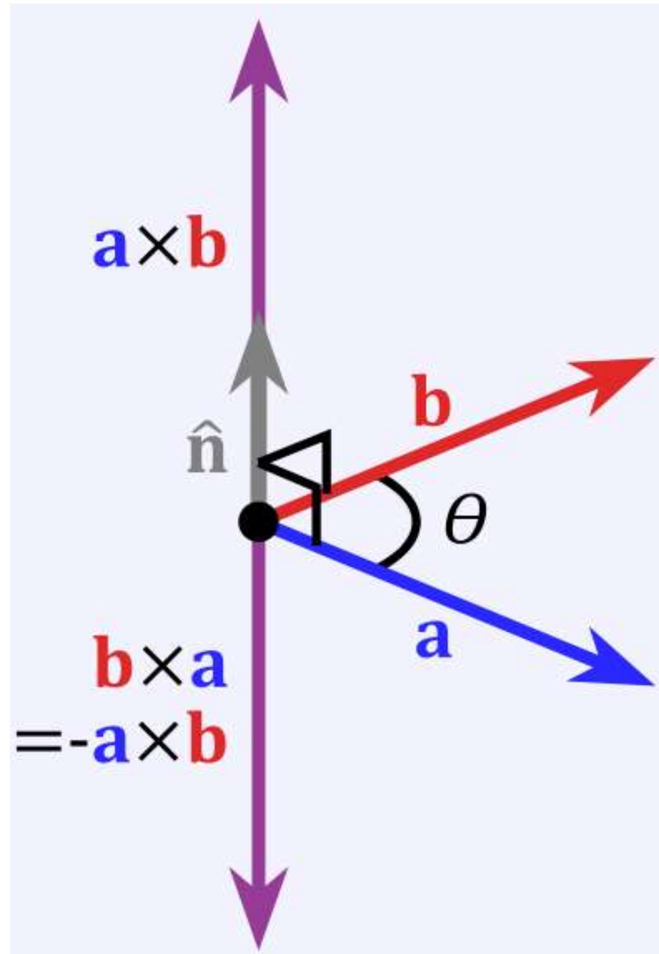
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Wiederholung: Vektorprodukt von Vektoren

Das **Vektorprodukt** (auch **Kreuzprodukt**, vektorielles Produkt oder **äußeres Produkt** genannt) zweier Vektoren **a** und **b** im dreidimensionalen reellen Vektorraum ist ein Vektor, der senkrecht auf der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht und mit ihnen ein Rechtssystem bildet. Die Länge dieses Vektors ist die **Flächengröße** des Parallelogramms mit den Seiten **a** und **b**.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(|\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin\theta \right) \vec{n} \,.$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} .$$



Wiederholung: Spatprodukt von Vektoren

Das Spatprodukt ist das Skalarprodukt aus dem Kreuzprodukt zweier Vektoren und einem dritten Vektor. Es ergibt das **Volumen** des durch die drei Vektoren aufgespannten Spats (Parallelepipeds).

Es wird auch **gemischtes Produkt** genannt und ist identisch mit der aus diesen Vektoren gebildeten Determinanten, also:

$$V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \det \begin{pmatrix} \vec{a} \\ \vec{b} \\ \vec{c} \end{pmatrix} = \det \left(\vec{a}\vec{b}\vec{c} \right).$$

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) = \left[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right] = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle$$

Für das Spatprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ und $\boldsymbol{c}$ gilt:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1).$$

Wiederholung: Produkte von Vektoren

Name	Operanden	Ergebnis
skalare Multiplikation	Vektor · Skalar	Vektor
Skalarprodukt	Vektor · Vektor	Skalar
Vektorprodukt	Vektor x Vektor	Vektor
Spatprodukt	Vektor · Vektor x Vektor	Skalar

Vorlesungsinhalte Vektorrechnung

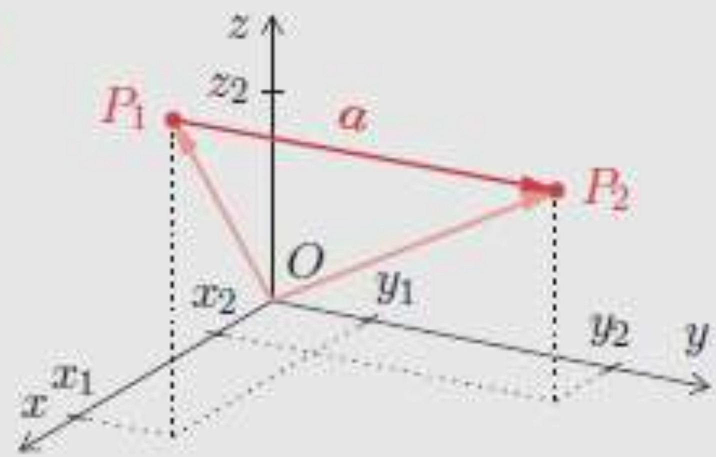
1. Definition von Vektoren
2. Einfache Rechenregeln
3. Koordinatendarstellung von Vektoren
4. Beträge von Vektoren
5. Rechenregeln in der Koordinatendarstellung
6. Koordinatendarstellung mit Winkelfunktionen
7. Skalarprodukt
8. Vektorprodukt
9. Spatprodukt
10. Rechnen mit Vektoren

Punkte

Den Vektor $\boldsymbol{a}$ vom Punkt $P_1\,(x_1\,|\,y_1\,|\,z_1)$ zum Punkt $P_2\,(x_2\,|\,y_2\,|\,z_2)$ nennt man den **Verbindungsvektor**. Er hat die Koordinaten

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Ein **Ortsvektor** ist ein Verbindungsvektor vom Ursprung $O\,(0\,|\,0\,|\,0)$ zu einem Punkt.



Abstand zwischen zwei Punkten:
Berechne den Verbindungsvektor zwischen diesen Punkten und nimm den Betrag davon.

Mitte zwischen zwei Punkten:
Berechne den Verbindungsvektor zwischen den Punkten, teile ihn durch zwei und addiere ihn zum ersten Punkt. Ähnliches gilt für beliebige Verhältnisse.

Aufgabe

Die Strecke zwischen dem Punkt P (5; 8; 1) und dem Punkt Q (-4; 2; -2) soll durch

den Punkt M im Verhältnis 1 zu 2 geteilt werden.

Welche Koordinaten hat der Punkt M?

Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Die Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, ..., $\boldsymbol{a}_n$ nennt man linear unabhängig, falls die Gleichung

$$\lambda_1 \boldsymbol{a}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \lambda_n \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{0}$$

nur die triviale Lösung $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, ..., $\lambda_n = 0$ besitzt. Andernfalls heißen die Vektoren linear abhängig.

Zwei Vektoren $\boldsymbol{a}_1$ und $\boldsymbol{a}_2$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie parallel sind.

Drei Vektoren $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ und $\boldsymbol{a}_3$ sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Spatprodukt der drei Vektoren null ist:

$$[\,\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3\,] = 0.$$

Parallele und senkrechte Vektoren

Sind zwei Vektoren parallel, so gilt: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|$
$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

Berechnung der Länge eines Vektors: $|\boldsymbol{a}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}$

Stehen zwei Vektoren aufeinander senkrecht (orthogonal), so gilt: $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$

Damit lässt sich auf einfache Weise überprüfen, ob zwei Vektoren zueinander parallel oder orthogonal sind.

Ist einer der beiden Vektoren ein Einheitsvektor, so ergibt das Skalarprodukt die Länge der Projektion des anderen Vektors auf die vom Einheitsvektor definierte Gerade.

Komplanare Vektoren

Aufgabenstellung:

Die Vektoren ***a*** ,***b*** und ***c*** werden als komplanar bezeichnet, wenn sie auf einer Ebene liegen. Wie kann man feststellen, ob diese drei Vektoren auf der selben Ebene liegen?

Vorgehensweise:

Wenn die drei Vektoren ***a*** ,***b*** und ***c*** auf einer Ebene liegen, dann ist das Spat-Produkt dieser drei Vektoren gleich null (das Volumen des aufgespannten Parallelepipeds ist gleich null).

$$[a, b, c] = 0$$

Aufgabe (Prüfungsaufgabe vom vorigen Jahr)

Stellen Sie fest, ob die drei Punkte P_1, P_2 und P_3 auf einer Geraden liegen:

a) $P_1 = (5; 16; 8)$, $P_2 = (1; 6; 6)$, $P_3 = (-1; 1; 5)$

b) $P_1 = (2; 12; 3)$, $P_2 = (3; 4; 2)$, $P_3 = (-1; 0; 2)$

Hinweis: Die Punkte P_1, P_2 und P_3 liegen genau dann in einer Geraden, wenn die beiden Vektoren $\overline{P_1P_2}$ und $\overline{P_1P_3}$ parallel oder antiparallel (kollinear) sind.

Lösung:

a) Wir bestimmen die Vektoren:

$P_1 = (5; 16; 8)$, $P_2 = (1; 6; 6)$, $P_3 = (-1; 1; 5)$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1-5 \\ 6-16 \\ 6-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -1-5 \\ 1-16 \\ 5-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ -3 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix};$$

Dann wird das Vektorprodukt berechnet:

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30-30 \\ 12-12 \\ 60-60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Das Vektorprodukt ist Null, die beiden Vektoren sind parallel, die Punkte liegen auf einer Geraden.

b) Das Vektorprodukt ist nicht Null, die beiden Vektoren sind nicht parallel, die Punkte liegen nicht auf einer Geraden.

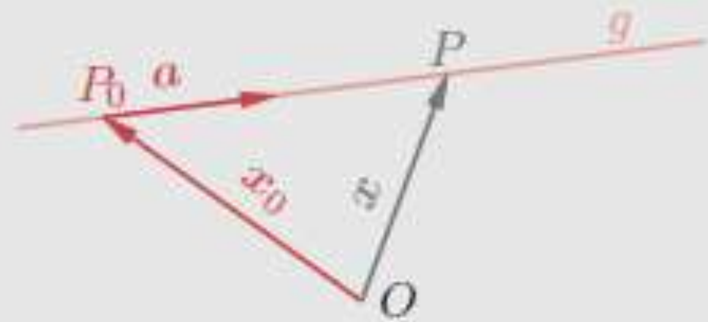
$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix}; \ \overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Darstellung einer Geraden

Punktrichtungsform:

Eine Gerade g kann durch einen Richtungsvektor $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ und durch einen Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}_0$ festgelegt werden:

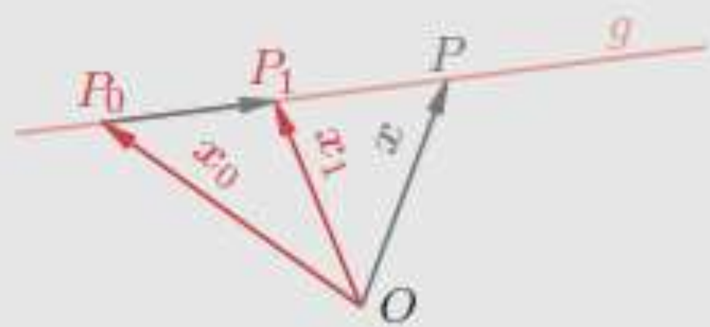
$$g: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\, \boldsymbol{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



Zweipunktform:

Eine Gerade g kann durch zwei verschiedene Punkte P_0 und P_1 mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{x}_0$ und $\boldsymbol{x}_1$ festgelegt werden:

$$g: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\,(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0)\,, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



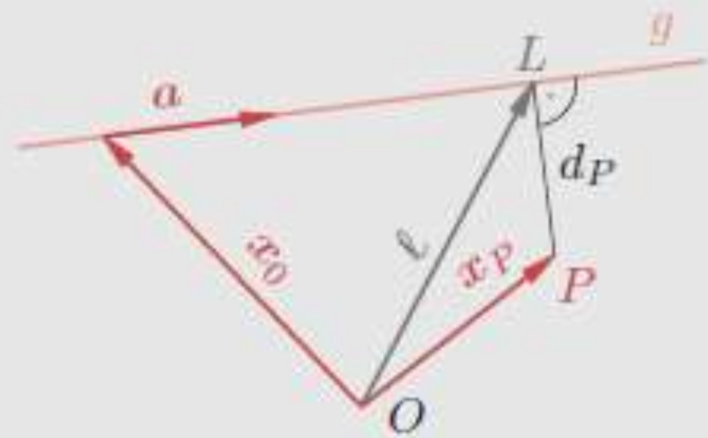
Abstand eines Punktes zu einer Geraden

Der Abstand des Punktes P mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}_P$ zur Geraden g

$$g: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{a}$$

ist die Entfernung zwischen dem Punkt P und seinem Lotfußpunkt:

$$d_P = \left| \boldsymbol{x}_P - \left(\boldsymbol{x}_0 + \frac{(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} \boldsymbol{a} \right) \right| .$$



Aufgabe: Abstand eines Punktes zu einer Geraden

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P (3; 2; 1) zu der Geraden, die mit folgender

Parametergleichung beschrieben wird:

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zwei Geraden

Zwei Geraden im Raum können:

- identisch sein
- parallel sein
- sich schneiden
- aneinander vorbei gehen (windschief sein)

Schnitt zweier Geraden

Die Schnittpunkte zweier Geraden g_1 und g_2 in Parameterdarstellung bestimmt man aus dem linearen Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{ll} g_1: & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \lambda_1\, \boldsymbol{a}_1 \\ g_2: & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + \lambda_2\, \boldsymbol{a}_2 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad g_1 \cap g_2: \quad \boldsymbol{x}_1 + \lambda_1\, \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{x}_2 + \lambda_2\, \boldsymbol{a}_2$$

mit den beiden Unbekannten λ und μ. Falls das Gleichungssystem

- genau eine Lösung hat, dann besitzen die beiden Geraden einen Schnittpunkt,
- unendlich viele Lösungen hat, dann sind die beiden Geraden identisch,
- keine Lösung hat, dann sind die Geraden parallel oder windschief.

Aufgabe: Schnittpunkt zweier Geraden

Berechnen Sie, ob sich die beiden Geraden g_1 und g_2 schneiden, die von den folgenden Parametergleichungen beschrieben werden:

$$g_1 : x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : x = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schnittwinkel

Den Winkel zwischen den beiden Geraden g_1 und g_2 in der Darstellung

$$g_1: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \lambda_1 \boldsymbol{a}_1, \qquad g_2: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\cos \angle(g_1, g_2) = \frac{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2|}.$$

Aufgabe: Schnittwinkel zweier Geraden

Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Geraden g_1 und g_2, die von den folgenden Parametergleichungen beschrieben werden:

$$g_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : x = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

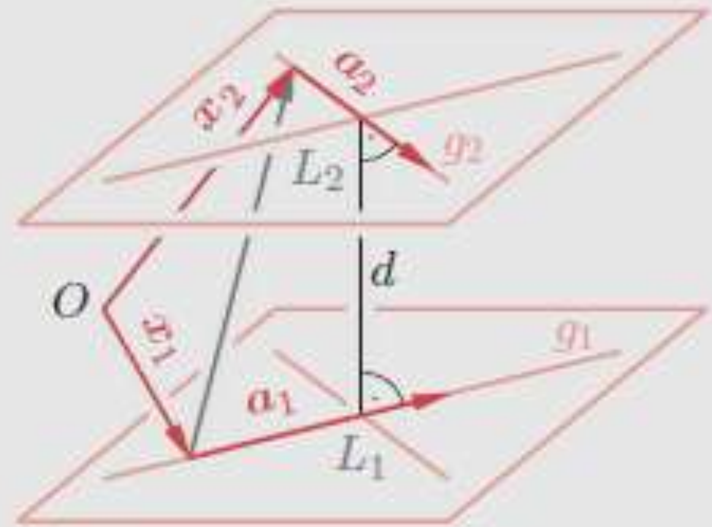
Windschiefe Geraden

Den Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$g_1: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \lambda_1 \boldsymbol{a}_1$$
$$g_2: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2$$

kann man durch folgende Formel berechnen:

$$d = \frac{|(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)|}{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}.$$



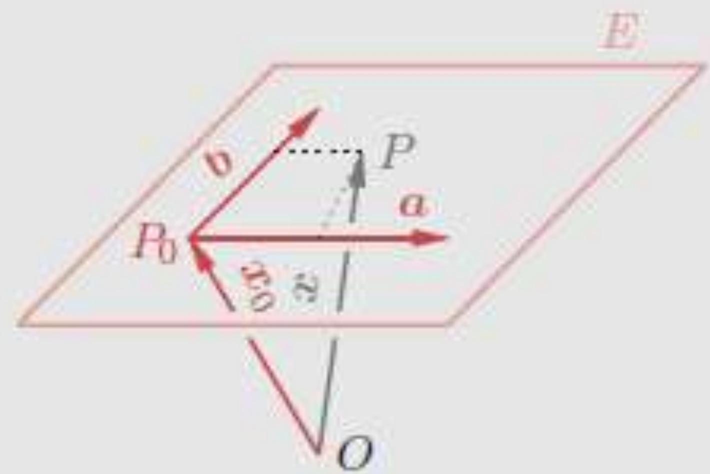
Darstellung einer Ebene

Punktrichtungsform:

Eine Ebene E kann durch zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ und durch einen Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}_0$ festgelegt werden:

$$E: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\,\boldsymbol{a} + \mu\,\boldsymbol{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter λ und μ sind unabhängig voneinander.



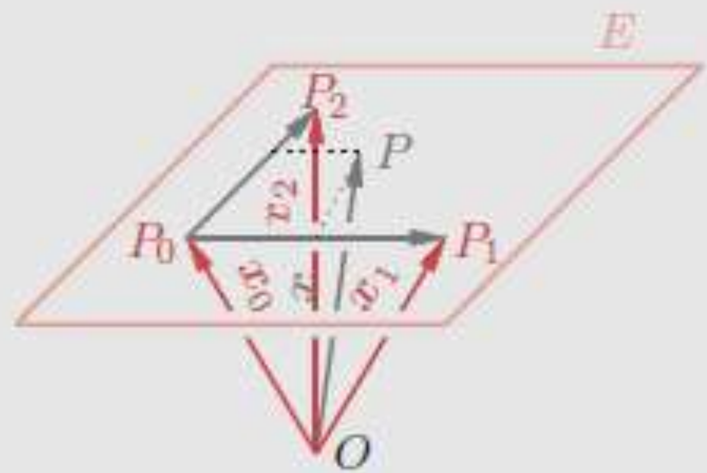
Darstellung einer Ebene

Dreipunkteform:

Eine Ebene E kann durch drei Punkte P_0, P_1 und P_2, die nicht alle auf einer Geraden liegen, mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ festgelegt werden:

$$E:\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\,(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) + \mu\,(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0)\,,\qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

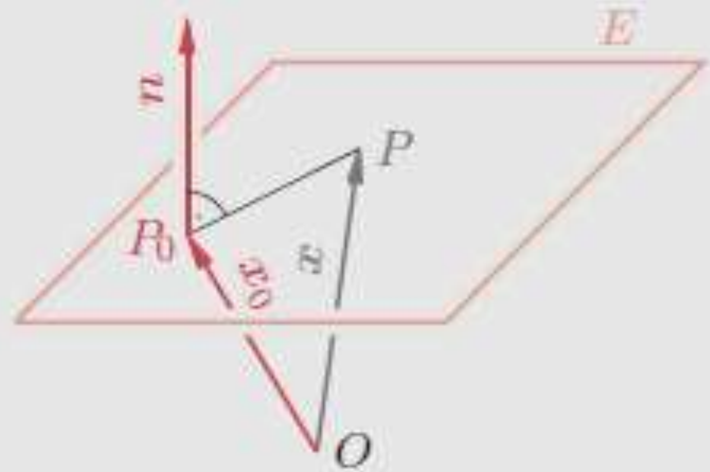
Die Parameter λ und μ sind unabhängig voneinander.



Parameterfreie Darstellung einer Ebene

Eine Ebene E durch den Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}_0$ und dem Normalenvektor $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$ kann man in Form einer Gleichung darstellen:

$$E: \quad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$



Ein Punkt P mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}$ liegt genau dann in der Ebene, wenn die Gleichung erfüllt ist.

Bei der parameterfreien Darstellung einer Ebene

$$E: \quad n_x x + n_y y + n_z z = d$$

sind die Faktoren n_x, n_y und n_z die Koordinaten des Normalenvektors $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$. Falls der Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ ein Einheitsvektor ist, bezeichnet man die Darstellung als Hessesche Normalenform.

Darstellung einer Ebene mit und ohne Parameter

Die Umrechnung zwischen einer Parameterdarstellung und einer parameterfreien Darstellung einer Ebene

$$E: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\,\boldsymbol{a} + \mu\,\boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \quad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

erfolgt mittels der Beziehung $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

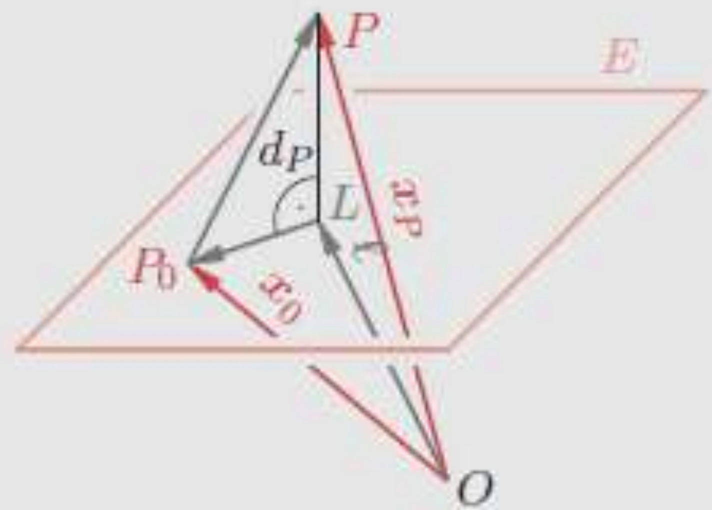
Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Mit der Hesseschen Normalenform einer Ebene

$$E: \quad n_x x + n_y y + n_z z + d = 0, \quad \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1$$

berechnet man den Abstand eines Punktes P mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}_P$ zur Ebene E durch Einsetzen von P in die Ebenengleichung:

$$d_P = \left| n_x x_P + n_y y_P + n_z z_P + d \right|.$$



Aufgabe: Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Berechnen Sie den Abstand des Punktes P (1; -2; 4) zur Ebene E mit der Gleichung:

$$E: -2x + 2y - z + 4 = 0$$

Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene

Die Schnittpunkte einer Geraden g mit einer Ebene E bestimmt man, indem man

- eine Parameterdarstellung der Geraden g und eine Parameterdarstellung der Ebene E gleichsetzt oder
- eine Parameterdarstellung der Geraden g in eine parameterfreie Gleichung der Ebene E einsetzt.

Aufgabe: Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Gerade g und der Ebene E:

$$g: x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: -5x + 2y + 4z - 6 = 0$$

Schnitt zweier Ebenen

Die Schnittpunkte zweier Ebenen E_1 und E_2 bestimmt man, indem man

- die Parameterdarstellungen der beiden Ebenen gleichsetzt oder
- das Gleichungssystem aus den beiden Ebenengleichungen löst oder
- eine Parameterdarstellung einer Ebene in eine parameterfreie Gleichung der anderen Ebene einsetzt.

Winkel zwischen Gerade und Ebene

Den Winkel zwischen der Geraden g und der Ebene E in der Darstellung

$$g: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{a}, \qquad E: \quad n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\sin \angle (g, E) = \frac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{n}|}.$$

Winkel zwischen zwei Ebenen

Den Winkel zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2 in der Darstellung

$$E_1: \quad n_{1x}x + n_{1y}y + n_{1z}z + d_1 = 0, \qquad E_2: \quad n_{2x}x + n_{2y}y + n_{2z}z + d_2 = 0$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\cos \angle(E_1, E_2) = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}.$$

Aufgabe: Winkel zwischen zwei Ebenen

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2.

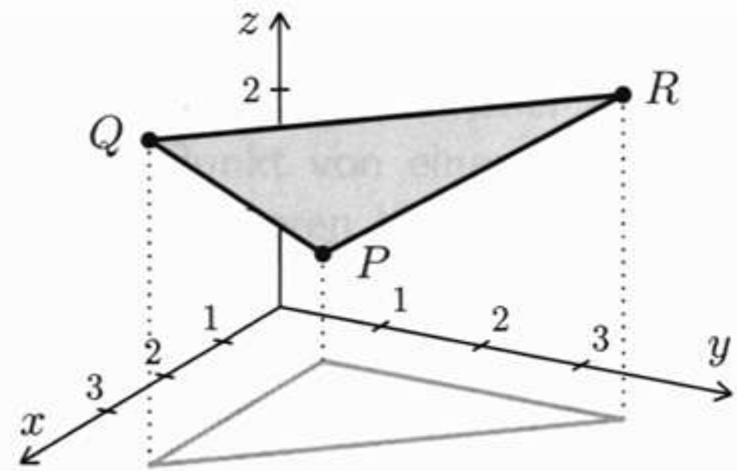
$$E_1 : x - 2y + 4z + 2 = 0$$

$$E_2 : 2x - 3y + z - 5 = 0$$

Flächeninhalt eines Dreiecks

Die drei Punkte $P(1|1|1)$, $Q(4|1|3)$ und $R(1|4|3)$ bilden ein Dreieck. Zur Berechnung des Flächeninhalts verwenden wir den Verbindungsvektor $\boldsymbol{a}$ von P nach Q, den Verbindungsvektor $\boldsymbol{b}$ von P nach R und bestimmen den Vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$



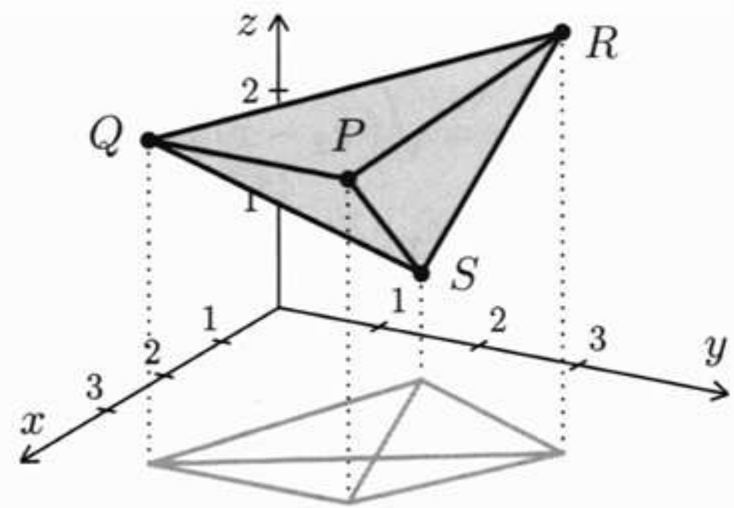
Den Flächeninhalt des Dreiecks A erhalten wir aus dem Betrag des Vektors $\boldsymbol{c}$:

$$A = \frac{1}{2}|\boldsymbol{c}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 9^2} = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Volumen eines Tetraeders

Die vier Punkte $P(4|3|3)$, $Q(4|1|3)$, $R(2|4|4)$ und $S(1|2|1)$ bilden ein Tetraeder. Zur Berechnung des Volumens verwenden wir den Verbindungsvektor $\boldsymbol{a}$ von P nach Q, den Verbindungsvektor $\boldsymbol{b}$ von P nach R und den Verbindungsvektor $\boldsymbol{c}$ von P nach S:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



Das Volumen des Tetraeders erhalten wir dann aus dem Spatprodukt dieser Vektoren:

$$V = \frac{1}{6}\left|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\right| = \frac{1}{6}\,|-14| = \frac{7}{3}.$$

Literatur

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,
Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium,
Hanser Verlag, München 2010