Physik für Infotronik (11)

Gerald Kupris

19.11.2012

Der Impuls

Wiederholung: Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

Länge des Kreisbogens:

$$ds_i = r_i \, d\theta$$

Drehwinkel (Theta):

$$\Delta\theta = s_i / r_i$$

Ganze Umdrehung:

$$2\pi \text{rad} = 360° = 1\text{U}$$

Winkelgeschwindigkeit (Omega):

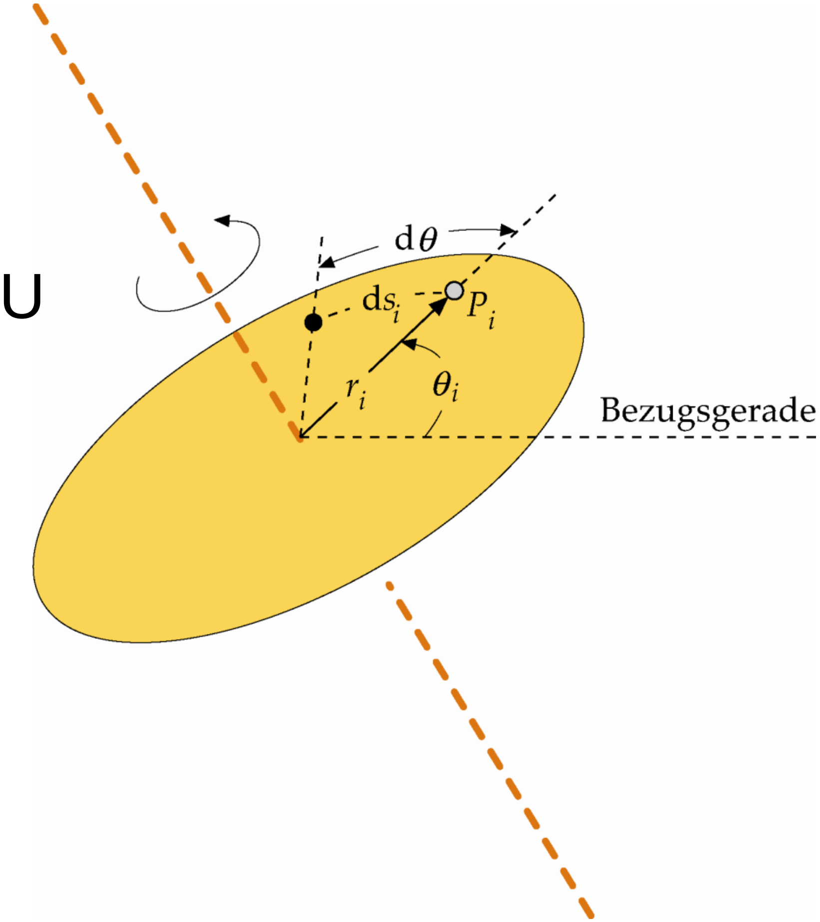
$$\omega = d\theta \,/\, dt$$

Mittlere Winkelbeschleunigung (Alpha):

$$\langle\alpha\rangle = \Delta\omega \,/\, \Delta t$$

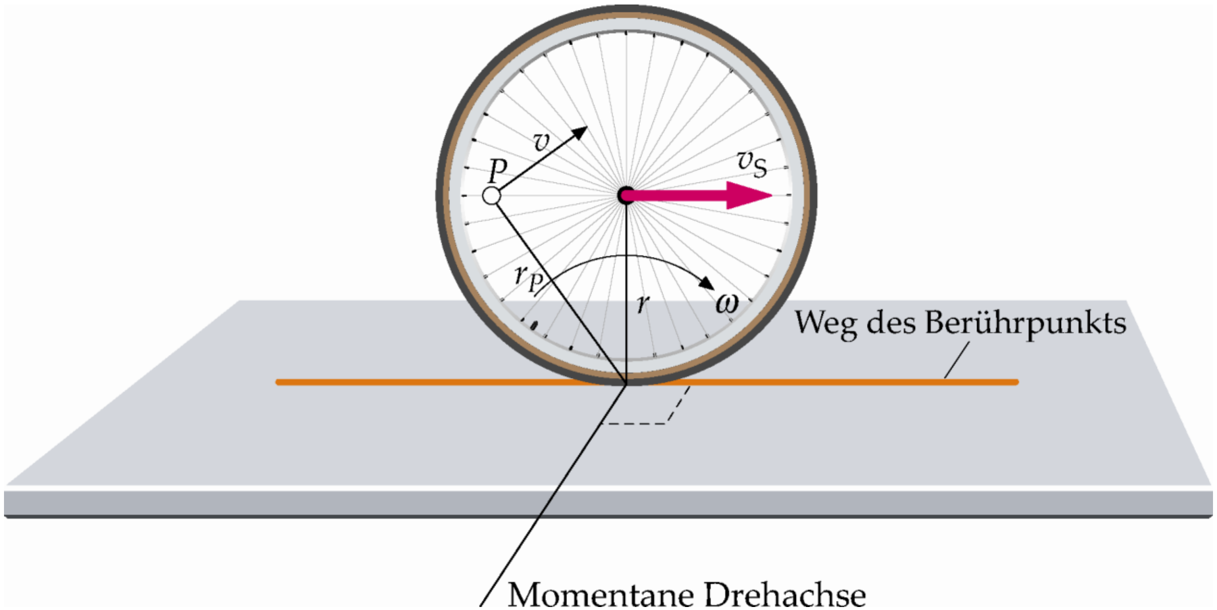
Momentane Winkelbeschleunigung:

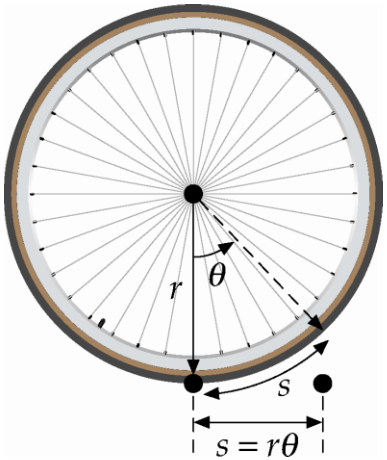
$$\alpha = d\omega \,/\, dt = d^2\theta \,/\, dt^2$$



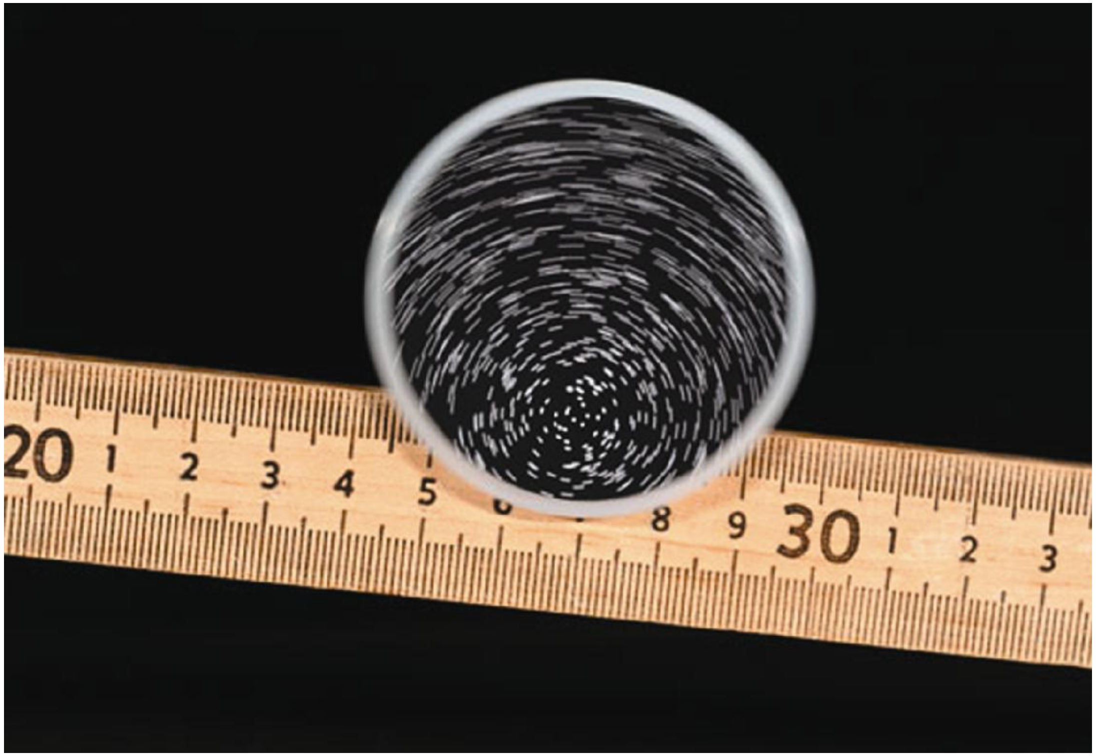
Rollende Körper

Der Punkt P bewegt sich mit der Geschwindigkeit: $v = r_P\, \omega$
Der Massemittelpunkt bewegt sich mit der Geschwindigkeit: $v_S = r\, \omega$
Rollbedingung für die Beschleunigung: $a_S = r\, \alpha$
Rollbedingung für die Entfernung: $s = r\, \theta$





Rollender Körper



Bei einem rollenden Körper ist der Berührpunkt des Körpers mit seiner Auflagefläche in Ruhe. Bei diesem Foto einer rollenden Garnspule sind alle bewegten Punkte unscharf abgebildet, nur der Berührpunkt ist scharf.

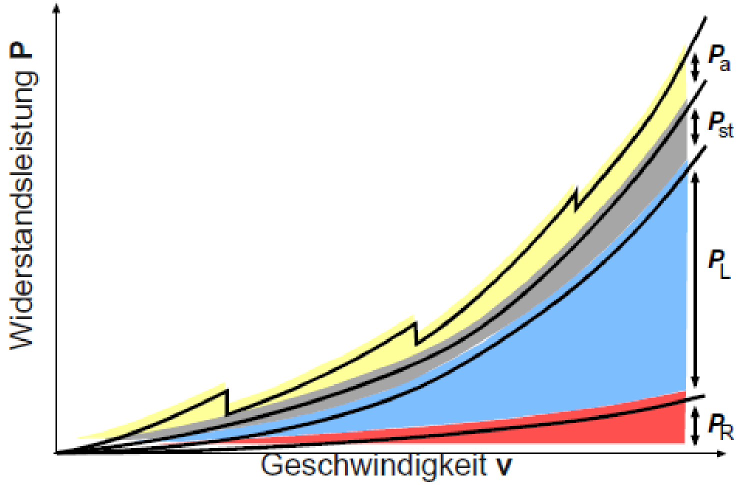
Kinetische Energie eines rollenden Körpers

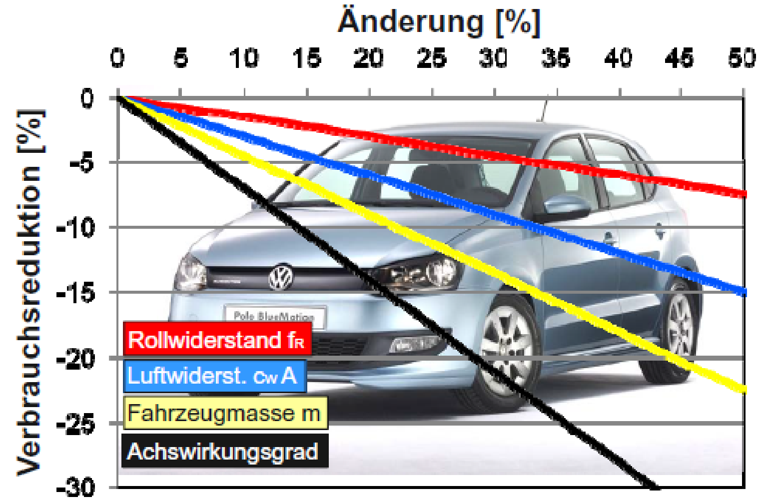
$$E_{\mathrm{kin}} = \tfrac{1}{2}\, m\, v_S^2 + \tfrac{1}{2}\, I_S\, \omega^2$$

Ein rollender Körper enthält sowohl kinetische Energie einer Translationsbewegung als auch kinetische Energie einer Drehbewegung!

Beispiel: Fahrleistungsbedarf (P=F·v)

$$P_{Bed} = \underbrace{f_R \cdot (m_{Fzg} + m_{Zul}) \cdot g \cdot v}_{\text{Rollwiderstand}} + \underbrace{0{,}5 \cdot c_W \cdot A \cdot \rho \cdot v^3}_{\text{Luftwiderstand}} + \underbrace{(m_{Fzg} + m_{Zul}) \cdot g \cdot \sin(\alpha) \cdot v}_{\text{Steigungswiderstand}} + \underbrace{(e_i \cdot m_{Fzg} + m_{Zul}) \cdot a \cdot v}_{\text{Beschleunigungsw.}}$$





Massenfaktor	e_i	Beschleunigung	a	Steigungswinkel	α	Luftdichte	ρ
Leergewicht	m_{Fzg}	Geschwindigkeit	v	Luftwiderstandsbeiwert	c_W	Rollwiderstandsbeiwert	f_R
Zuladung	m_{Zul}	Erdbeschleunigung	g	Stirnfläche	A		

In der Auslegung sind Masse, Aerodynamik und Rollwiderstand beeinflussbar

Beispiel: London Eye

Das zu den Milleniumsfeierlichkeiten in London errichtete „London Eye“ ist mit seinem Durchmesser von 135 m das größte Riesenrad Europas und kann bis zu 800 Passagiere befördern.
Die Bremsen sind stark genug, dass sich die Passagiergondeln beim Stoppen des Rads nicht mehr als 10 m weiterbewegen. Das Rad mit seiner Masse von 1600 Tonnen dreht sich im Normalbetrieb zweimal pro Stunde.

a) Berechnen Sie das benötigte Drehmoment, um das Rad zu stoppen, so dass der Umfang sich beim Bremsen nur noch um 10 m bewegt.

b) Nehmen Sie an, dass die Bremskraft am Umfang des Rades wirkt, wie groß muss diese Kraft dann sein?

Lösung Teil a)

Die verrichtete Arbeit ist gleich der Änderung der kinetischen Energie.

$$W = M \cdot \Delta\Theta = \Delta E_{kin} = E_{kinE} - E_{kinA}$$

$$E_{kin} = \frac{1}{2} I\omega^2$$

das Inertialmoment:

$$I = m \cdot r^2 = \left(1{,}6 \cdot 10^6 kg\right) \cdot (67{,}5m)^2 = 7{,}3 \cdot 10^9 kg \cdot m^2$$

die Winkelgeschwindigkeit:

$$\omega = 2\frac{U}{h} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \pi}{3600s} = 3{,}49 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}$$

die kinetische Energie:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot 7{,}3 \cdot 10^9 kg \cdot m^2 \left(3{,}49 \cdot 10^{-3} \frac{rad}{s}\right)^2 = 44{,}4kJ$$

die Winkeländerung:

$$\Delta\Theta = \frac{s}{r} = \frac{10m}{67{,}5m} = 0{,}148rad$$

das Drehmoment:

$$M = \frac{W}{\Delta\Theta} = \frac{-44{,}4kJ}{0{,}148rad} = -3 \cdot 10^5 N \cdot m$$

Lösung Teil b)

Die Wirkungslinie der Bremskraft liegt tangential zum Umfang des Rades, der Kraftarm ist also gleich dem Radius des Rades.

$$|M| = F \cdot r$$

$$F = \frac{|M|}{r} = \frac{3 \cdot 10^5\, N \cdot m}{67{,}5 m} = 4444 N$$

Die Bremskraft von 4444 N entspricht der Gewichtskraft von etwa vier VW Golf.




Wiederholung: Der Impuls

Die physikalische Größe Impuls *p* beschreibt die Bewegung der Masse, die ein Körper enthält. So wie die Geschwindigkeit dieser Bewegung ist der Impuls eine Vektorgröße, hat also neben einem Betrag auch eine Richtung (die der Bewegung selbst). Newton bezeichnete den Impuls auch als „Bewegungsgröße".

Jeder bewegliche Körper kann einen Impuls beispielsweise bei Stößen ganz oder teilweise auf andere Körper übertragen oder von anderen Körpern übernehmen.

Der Impuls ist eine additive Erhaltungsgröße. Wenn die (Vektor-) Summe der äußeren Kräfte verschwindet, bleibt der Gesamtimpuls erhalten.

In Newtons Mechanik ist der Impuls eines Teilchens das Produkt aus seiner Masse *m* und seiner Geschwindigkeit:

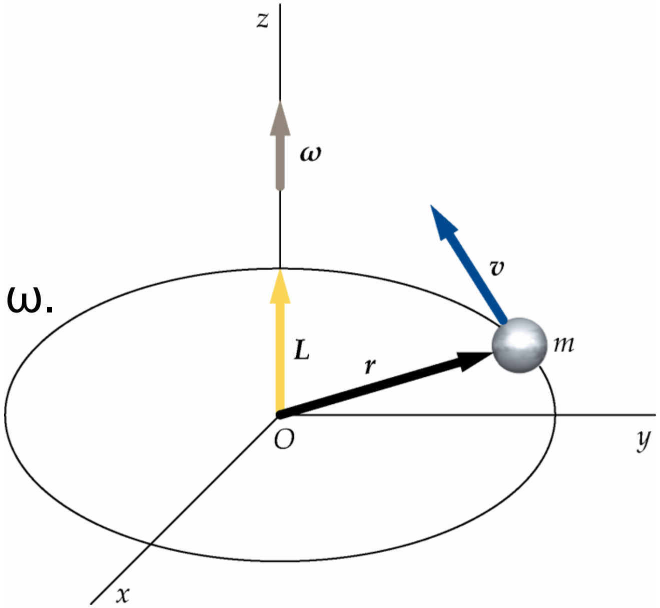
$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Impuls und Geschwindigkeit sind dabei Vektoren mit gleicher Richtung.

Der Drehimpuls

Der Impuls eines Teilchens ist $p = m\,v$
Der Drehimpuls ist das Vektorprodukt von r und p:

$$L = r \times p$$
$$L = m\,r^2\,\omega$$
$$L = I\,\omega$$



Der Drehimpuls ist parallel zur Winkelgeschwindigkeit ω.

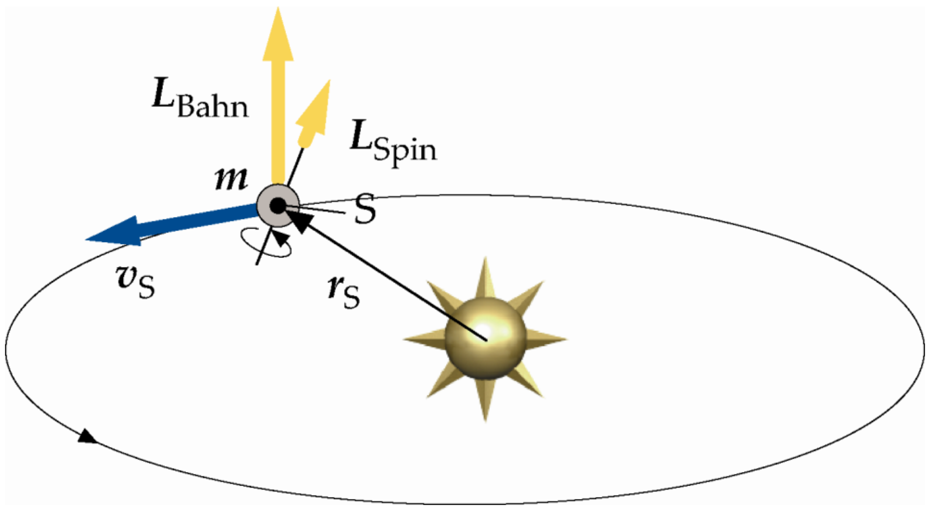
Das Drehmoment, das von außen auf ein System wirkt, ist gleich der zeitlichen Änderung des Drehimpulses (zweites Newtonsches Axiom):

$$M_{\mathrm{ext}} = \mathrm{d}L \,/\, \mathrm{d}t$$

Komponenten des Drehimpulses (1)

In vielen Fällen ist es sinnvoll, den Gesamtdrehimpuls eines Systems bezüglich eines beliebigen Punkts in zwei Summanden zu zerlegen, nämlich den Bahndrehimpuls $\boldsymbol{L}_{\mathrm{Bahn}}$ und den Eigendrehimpuls $\boldsymbol{L}_{\mathrm{Spin}}$.

Beispielsweise hat die Erde einen Eigendrehimpuls $\boldsymbol{L}_{\mathrm{Spin}}$ aufgrund ihrer Drehung um die eigene Achse und einen Bahndrehimpuls $\boldsymbol{L}_{\mathrm{Bahn}}$ bezüglich des Sonnenmittelpunkts aufgrund ihrer Bewegung um die Sonne.



Der Gesamtdrehimpuls ist die Vektorsumme des Bahn- und des Eigendrehimpulses.

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{Ges}} = \boldsymbol{L}_{\mathrm{Bahn}} + \boldsymbol{L}_{\mathrm{Spin}}$$

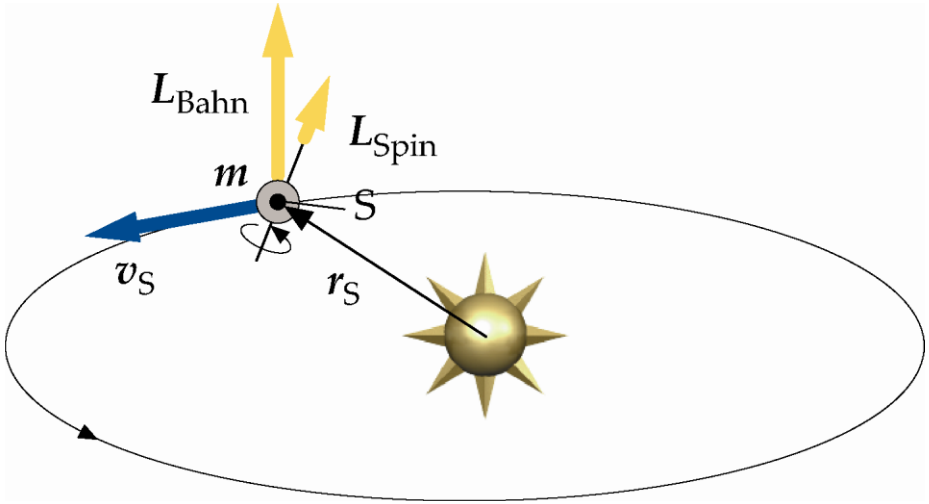
Komponenten des Drehimpulses (2)

Der Eigendrehimpuls $\boldsymbol{L}_{\mathrm{Spin}}$ ist der Drehimpuls der Erde bezüglich ihres Mittelpunktes.

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{Spin}} = \omega \cdot 2/5\, m_E\, r_E^2$$

Der Bahndrehimpuls $\boldsymbol{L}_{\mathrm{Bahn}}$ ist der Drehimpuls, den ein punktförmiges Teilchen der Masse $\boldsymbol{m}$ hätte, das sich im Massenmittelpunkt befindet und mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}_s$ des Massemittelpunkts bewegt.

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{Bahn}} = m\, r_S \times v_S$$



Satz der Erhaltung des Drehimpulses

Wenn das gesamte auf ein System wirkende äußere Drehmoment bezüglich eines Punktes Null ist, dann ist der Drehimpuls des Systems bezüglich dieses Punktes konstant.

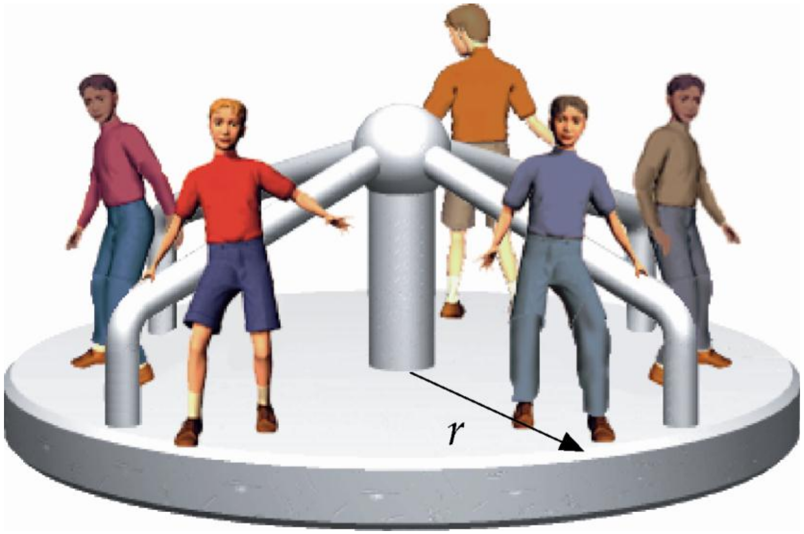
$$M = \mathrm{d}L \,/\, \mathrm{d}t = 0$$

$$L = \text{const.}$$

Beim Eiskunstlauf ist das Drehmoment, das vom Eis auf die Eisläuferin ausgeübt wird, nur gering - daher bleibt der Drehimpuls bei einer Pirouette nahezu konstant. Wenn die Eisläuferin ihr Trägheitsmoment verringert, indem sie die Arme an den Körper drückt, steigt ihre Drehgeschwindigkeit.

Beispiel: Karussell

Seit Jahren werden Sie und Ihre Freunde von Ihrem Mitschüler Kevin schikaniert, der sich von allen physikalischen Kursen fernhält. Sie und drei Ihrer Freunde mit einem Leistungskurs Physik beschließen, ihm mit physikalischen Mitteln eine Lektion zu erteilen. Dabei wollen Sie die Drehimpulserhaltung ausnützen.
Sie fassen folgenden Plan: auf dem Schulhof steht ein Karussell, bestehend aus einer Scheibe mit 3 m Durchmesser und einem Trägheitsmoment von 130 kg·m². Am Anfang wollen Sie zu fünft auf dem Karussell stehen, während es sich mit 20 Umdrehungen pro Minute dreht. Auf ein Signal hin werden Sie und Ihre Freunde sich schnell an die Achse des Karussells herandrücken, während der ahnungslose Kevin nahe am Rande bleibt. Darauf hin wird das Karussell schneller, Kevin wird heruntergeschleudert und landet im Dreck.
Kevin ist schnell und kräftig, daher rechnen Sie damit, dass der Betrag der Zentripetalbeschleunigung größer als 4 g sein muss, damit er sich nicht mehr halten kann. Nehmen Sie an, dass jede Person 60 kg wiegt. Kann dieser Plan funktionieren?



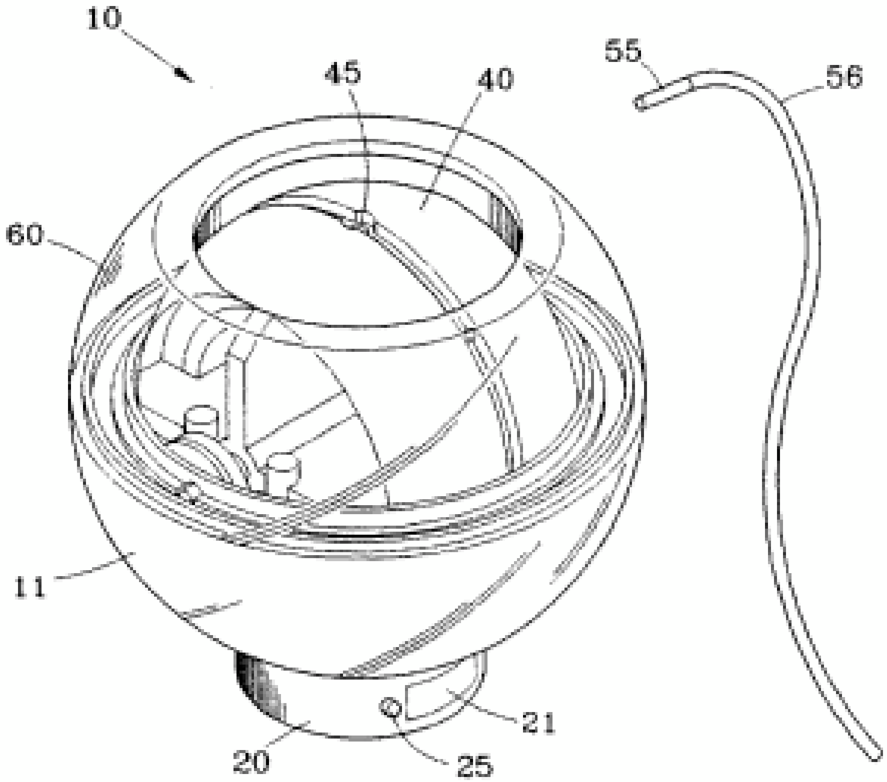
Der Kreisel

Die Bewegung des Kreisels entsteht durch die Drehimpulserhaltung. Der Drehimpuls ist ein Produkt aus Trägheitsmoment und Drehgeschwindigkeit des Kreisels.
Wie die Masse gibt das Trägheitsmoment an, wie "schwer" es ist, die Drehbewegung zu ändern.

$$\dot{\vec{L}} = \bar{I} \cdot \dot{\vec{\omega}} = \vec{M}$$

Die Änderung des Drehimpulses $\dot{\vec{L}}$ ist proportional zur Änderung der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\vec{\omega}}$ und gleich dem Drehmoment $\vec{M}$.
Das Verhalten des Kreisels beruht auf dem gyroskopischen Effekt. Nach einer längeren aufrecht drehenden Phase lässt der Drehimpuls und demnach der gyroskopische Effekt allmählich nach. In der Raumflugtechnik ist ein Trägheitsrad (Drallrad, Stabilisierungsschwungrad), manchmal auch Gyroskop, ein Kreisel, der die Ausrichtung eines Flugkörpers stabilisiert. Die frühen Satelliten erhielten eine Raumstabilisierung durch eine Eigendrehung. Im einfachen Fall übernimmt diese Aufgabe ein Trägheitsrad. Kleine Änderungen der Umdrehungsgeschwindigkeit drehen den Satelliten entlang der Rotationsachse. Ist der Laufkäfig des Trägheitsrads drehbar, lässt sich der Satellit beliebig ausrichten.

Gyrotwister als Kreisel



Gyrotwister

Der Gyrotwister ist ein tennisballgroßes Spielzeug oder Trainingsgerät. In diesem Ball befindet sich ein ca. 200 g schweres Schwungrad, dessen Achse in einer Nut um den „Äquator“ des Balls gelagert ist. Das Schwungrad lässt sich durch kreisende Bewegungen der Hand beschleunigen und erreicht dabei bis zu 16.000 U/min.
Die Kreiselachse ist durch diese Nut frei beweglich um eine Achse, die senkrecht zur Kreiselachse steht. Wenn der rotierende Kreisel durch die auf eine Auslenkung folgenden Kreiselkräfte zu präzedieren beginnt, dann wird die Kreiselachse an ihren beiden Enden so an die jeweilige Ober- bzw. Unterseite der Nut gedrückt, dass die Achsenden darin jeweils wie Räder abrollen. Durch das Abrollen kippt die Kreiselachse weiter, und die Präzession wird aufrechterhalten.
Die Präzession ist allgemein die Richtungsänderung der Achse eines rotierenden Körpers, wenn äußere Kräfte ein Drehmoment auf ihn ausüben.
Durch Handbewegungen, die dem Druck der präzedierenden Kreiselachse entgegenwirken bzw. nachgeben, lässt sich der Kreisel beschleunigen bzw. abbremsen. Trotz geringen Eigengewichts können bei 10.000 Umdrehungen pro Minute erhebliche Kräfte von mehr als 150 N auftreten (das entspricht etwa der Kraft, die man für das Heben von 15 kg benötigt).

Vergleich von Drehbewegung und linearer Bewegung

Drehbewegung		Lineare Bewegung	
Drehwinkel	$\Delta\theta$	Verschiebung	Δx
Winkelgeschwindigkeit	$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	Geschwindigkeit	$v = \frac{dx}{dt}$
Winkelbeschleunigung	$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	Beschleunigung	$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$
Gleichungen für den Fall konstanter Winkelbeschleunigung	$\omega = \omega_0 + \alpha\, t$ $\Delta\omega = \langle\omega\rangle\, \Delta t$ $\langle\omega\rangle = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$ $\theta = \theta_0 + \omega_0\, t + \frac{1}{2}\alpha\, t^2$ $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\,\alpha\,\Delta\theta$	Gleichungen für den Fall konstanter Beschleunigung	$v = v_0 + a\, t$ $\Delta x = \langle v\rangle \Delta t$ $\langle v\rangle = \frac{1}{2}(v_0 + v)$ $x = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2}a\, t^2$ $v^2 = v_0^2 + 2\,a\,\Delta x$
Drehmoment	M	Kraft	F
Trägheitsmoment	I	Masse	m
Arbeit	$dW = M\, d\theta$	Arbeit	$dW = F\, ds$
Kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} I\, \omega^2$	Kinetische Energie	$E_{kin} = \frac{1}{2} m\, v^2$
Leistung	$P = M\, \omega$	Leistung	$P = F\, v$
Drehimpuls	$L = I\, \omega$	Impuls	$p = m\, v$
Zweites Newton'sches Axiom	$M_{ext} = I\, \alpha = \frac{dL}{dt}$	Zweites Newton'sches Axiom	$F_{ext} = m\, a = \frac{dp}{dt}$

Aufgaben

1. Welche Rotationsenergie besitzt das scheibenförmige Messer eines Folienschneideautomaten mit der Masse m = 12 kg und einem Durchmesser von d = 60 cm bei einer Drehzahl von n = 78 min^{-1}?

2. Ein Gewichtsstück der Masse m_2 = 6 kg versetzt über eine Welle mit dem Durchmesser d_2 = 0,04 m eine Schwungscheibe der Masse m_1 = 12 kg mit einem Durchmesser d_1 = 0,6 m in Rotation. Welche Drehzahl (in Umdrehungen / min) erreicht die Schwungscheibe, wenn das Gewichtsstück um h = 2 m gesunken ist?

3. Durch Anlegen der seitlich gestreckten Arme an den Körper erhöht eine Eiskunstläuferin bei der Pirouette ihre Drehzahl. Die anfängliche Drehzahl betrage 0,5 s^{-1}.
   a) Wie groß ist die Drehzahl bei angezogenen Armen?
   b) Berechnen Sie die Rotationsenergie in beiden Phasen der Pirouette und erklären Sie die Differenz.
   Das geometrische Modell der Eiskunstläuferin: Kopf, Rumpf und Beine bilden einen Zylinder mit 15 cm Radius und 60 kg Masse. Die gestreckten Arme werden durch Massepunkte von jeweils 3 kg in 50 cm Abstand ersetzt. Im Verlauf der Pirouette werden diese Massepunkte bis auf 15 cm an die Rotationsachse herangeführt.

Aufgaben

4. Sie fahren ein neuartiges Hybridfahrzeug, das speziell für den Stop-and-Go Verkehr entwickelt wurde und das neben einem Elektromotor einen normalen Verbrennungsmotor und ein sehr schweres Schwungrad enthält. Der Bremsmechanismus wandelt die kinetische Energie der Linearbewegung in die Rotationsenergie des schweren Schwungrads um. Diese Rotationsenergie wird vom Schwungrad in den Antriebsstrang eingespeist, sodass sie beim Anfahren wieder zur Verfügung steht. Das Schwungrad hat eine Masse von 100 kg und besteht aus einem Hohlzylinder mit dem Innendurchmesser 25 cm und dem Außendurchmesser 40 cm. Die maximale Drehzahl ist 30000 min^{-1}. In einer trüben Nacht, noch 25 km von zu Hause entfernt, geht Ihnen der Sprit aus. Das Schwungrad dreht sich mit Maximaldrehzahl. Hat es genügend Energie gespeichert, um Sie nach Hause zu bringen? (Wenn Sie auf der Landstraße mit einer Geschwindigkeit von 70 km/h fahren, werden durch Luftwiderstand und Reibung 10 kW in Wärme umgewandelt.)

5. Eine Bowlingkugel hat den Radius 11 cm und die Masse 7,2 kg. Sie rollt, ohne zu gleiten mit 2.0 m/s in eine horizontale Richtung. Dann rollt sie, ohne zu gleiten auf einer Steigung bis zu der Höhe h hinauf, wo ihre Bewegung stoppt, bevor sie die Steigung wieder hinunterrollt. Berechnen Sie die Höhe h.

Lösungen der Aufgaben

1. 18,014 J

2. 198,9 min^{-1}

3. a) 1,34 s^{-1}
   b) vorher 10,73 J ; nachher 28,71 J
   Es wurde durch Anziehen der Arme Arbeit geleistet entgegen der Zentrifugalkraft.

4. Es sind 54,9 MJ gespeichert, 13 MJ werden verbraucht.
   Die Energie reicht für die Heimfahrt.

5. h = 29 cm

Literatur und Quellen

Paul A. Tipler, Gene Mosca: Physik für Wissenschaftler und Ingenieure, Spektrum Akademischer Verlag, August 2009

http://de.wikipedia.org/

HOCHSCHULE DEGGENDORF

University of Applied Sciences

HDU

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf