Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (10)

Gerald Kupris

27.10.2010

Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene

Die Schnittpunkte einer Geraden g mit einer Ebene E bestimmt man, indem man

- eine Parameterdarstellung der Geraden g und eine Parameterdarstellung der Ebene E gleichsetzt oder
- eine Parameterdarstellung der Geraden g in eine parameterfreie Gleichung der Ebene E einsetzt.

Aufgabe: Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Gerade g und der Ebene E:

$$g: x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E: -5x + 2y + 4z - 6 = 0$$

Schnitt zweier Ebenen

Die Schnittpunkte zweier Ebenen E_1 und E_2 bestimmt man, indem man

- die Parameterdarstellungen der beiden Ebenen gleichsetzt oder
- das Gleichungssystem aus den beiden Ebenengleichungen löst oder
- eine Parameterdarstellung einer Ebene in eine parameterfreie Gleichung der anderen Ebene einsetzt.

Aufgabe: Schnitt zweier Ebenen

Bestimmen Sie die Gerade g, die den Schnitt der Ebenen E_1 und E_2 darstellt:

$$E_1 : x - 2y + 4z + 2 = 0$$

$$E_2 : 2x - 3y + z - 5 = 0$$

Winkel zwischen Gerade und Ebene

Den Winkel zwischen der Geraden g und der Ebene E in der Darstellung

$$g: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{a}, \qquad E: \quad n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\sin \angle(g, E) = \frac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{n}|}.$$

Winkel zwischen zwei Ebenen

Den Winkel zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2 in der Darstellung

$$E_1: \quad n_{1x}x + n_{1y}y + n_{1z}z + d_1 = 0, \qquad E_2: \quad n_{2x}x + n_{2y}y + n_{2z}z + d_2 = 0$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\cos\angle(E_1, E_2) = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}.$$

Aufgabe: Winkel zwischen zwei Ebenen

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2.

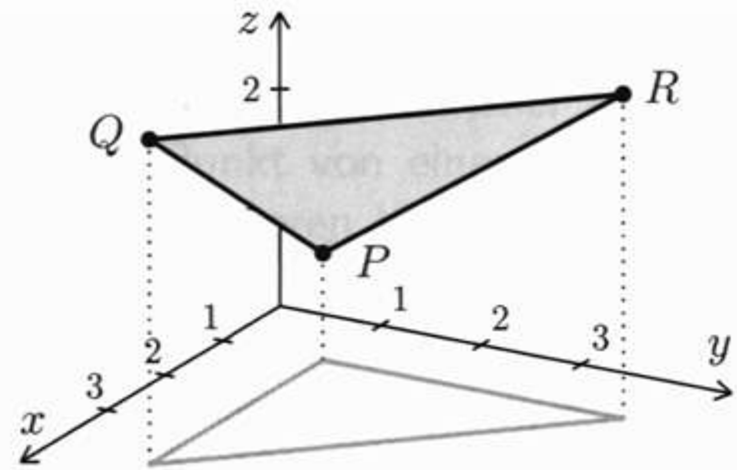
$$E_1: x - 2y + 4z + 2 = 0$$

$$E_2: 2x - 3y + z - 5 = 0$$

Flächeninhalt eines Dreiecks

Die drei Punkte $P(1|1|1)$, $Q(4|1|3)$ und $R(1|4|3)$ bilden ein Dreieck. Zur Berechnung des Flächeninhalts verwenden wir den Verbindungsvektor $\boldsymbol{a}$ von P nach Q, den Verbindungsvektor $\boldsymbol{b}$ von P nach R und bestimmen den Vektor $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$



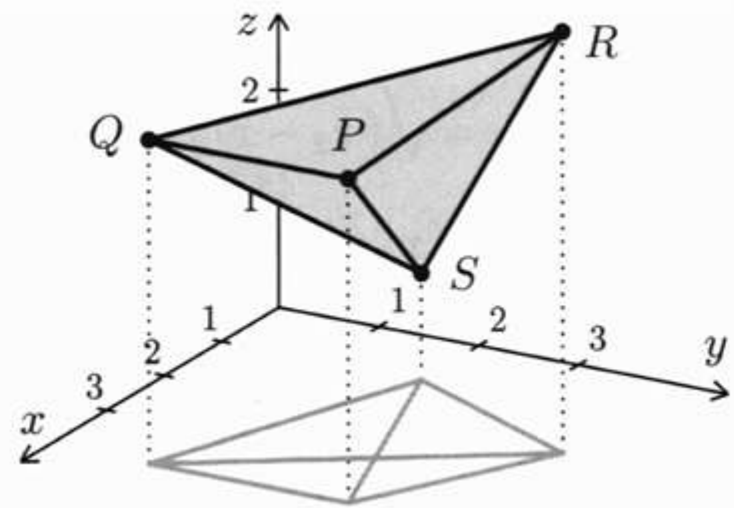
Den Flächeninhalt des Dreiecks A erhalten wir aus dem Betrag des Vektors $\boldsymbol{c}$:

$$A = \frac{1}{2}|\boldsymbol{c}| = \frac{1}{2}\sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 9^2} = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Volumen eines Tetraeders

Die vier Punkte $P(4|3|3)$, $Q(4|1|3)$, $R(2|4|4)$ und $S(1|2|1)$ bilden ein Tetraeder. Zur Berechnung des Volumens verwenden wir den Verbindungsvektor $\boldsymbol{a}$ von P nach Q, den Verbindungsvektor $\boldsymbol{b}$ von P nach R und den Verbindungsvektor $\boldsymbol{c}$ von P nach S:

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



Das Volumen des Tetraeders erhalten wir dann aus dem Spatprodukt dieser Vektoren:

$$V = \frac{1}{6}\left|[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]\right| = \frac{1}{6}\,|-14| = \frac{7}{3}.$$

Komplexe Zahlen

Was sind komplexe Zahlen?

Das Problem:
Im Bereich der reellen Zahlen ist die Wurzel aus einer negativen Zahl nicht definiert.

$$\sqrt{-1} = ?$$

Die Lösung:
Es wird eine neue Zahl ***i*** definiert, eine so genannte imaginäre Einheit, für die gilt:

$$i = \sqrt{-1}$$

Die Definition:
Als komplexe Zahlen bezeichnet man Zahlen, die in der folgenden Form dargestellt werden können:

$$a + b \cdot i$$

Anatomie der komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl ***z*** kann in der folgenden Form dargestellt werden:

$$z = a + b \cdot i$$

a und ***b*** sind **reelle** Zahlen. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit ***C*** bezeichnet und kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$C = \{a + b \cdot i \mid a, b \in R\} \qquad \mathbb{C}$$

a ist der **Realteil** der komplexen Zahl: $a = \mathrm{Re}(a + b\mathrm{i}) \quad a = \Re(a + b\mathrm{i})$

b ist der **Imaginärteil** der komplexen Zahl: $b = \mathrm{Im}(a + b\mathrm{i}) \quad b = \Im(a + b\mathrm{i}).$

Entdeckung der komplexen Zahlen

Die Mathematiker haben sich über einige Jahrhunderte mit den komplexen Zahlen schwergetan und ihnen manchmal auch das Existenzrecht abgesprochen.

Leibniz entdeckte die Beziehung

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$$

und war davon äußerst beeindruckt.

Leibnitz selbst nennt √-1 „ein Wunder der Analysis, ein Monstrum der idealen Welt, fast ein Amphibium zwischen Sein und Nichtsein“

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646-1716)

Entdeckung der komplexen Zahlen

Da das Rechnen mit diesen als „sinnlos“ angesehenen Zahlen zunächst als bloßes Spiel erschien, war man umso überraschter, dass dieses „Spiel“ sehr häufig wertvolle Ergebnisse lieferte oder schon bekannten Ergebnissen eine befriedigendere Form zu geben erlaubte.

So kam Leonhard Euler (1707-1783) zum Beispiel zu einigen bemerkenswerten Gleichungen, die nur reelle Zahlen enthielten und sich ausnahmslos als richtig erwiesen, die aber auf anderem Wege nicht so einfach gewonnen werden konnten.

Die Bezeichnung "i" für die imaginäre Einheit stammt übrigens von Euler. Er hat sie aber nicht konsequent benutzt. Allgemein verbreitet wurde sie erst durch Carl Friedrich Gauß.

Carl Friedrich Gauß
(1777-1855)

Anwendungen komplexer Zahlen

Komplexe Zahlen haben in der Physik und Technik eine wichtige Rolle als Rechenhilfe.

So lässt sich insbesondere die Behandlung von Differentialgleichungen zu Schwingungsvorgängen vereinfachen, da sich damit die komplizierten Beziehungen in Zusammenhang mit Produkten von Sinus- bzw. Kosinusfunktionen durch Produkte von Exponentialfunktionen ersetzen lassen, wobei lediglich die Exponenten addiert werden müssen.

In der Elektrotechnik besitzt die Darstellung elektrischer Größen mit Hilfe komplexer Zahlen weite Verbreitung. Sie wird bei der Berechnung von zeitlich sinusförmig veränderlichen Größen wie elektrischen und magnetischen Feldern verwendet.

So fügt man dazu beispielsweise in der komplexen Wechselstromrechnung willkürliche aber passende Imaginärteile in die reellen Ausgangsgleichungen ein, die man bei der Auswertung der Rechenergebnisse dann wieder ignoriert. Es handelt sich dabei lediglich um einen Rechentrick ohne philosophischen Hintergrund.

Darstellung komplexer Zahlen

Die Notation in der Form $z = a + b\,i$ wird auch als ***kartesische*** (nach René Descartes) oder ***algebraische Form*** bezeichnet.

Die Bezeichnung *kartesisch* erklärt sich aus der Darstellung in der komplexen bzw. gaußschen Zahlenebene.

In der Elektrotechnik wird das kleine ***i*** schon für zeitlich veränderliche Ströme verwendet und kann zu Verwechselungen mit der imaginären Einheit ***i*** führen. Daher wird in diesem Bereich gemäß DIN 1302 der Buchstabe ***j*** verwendet.

Komplexe Zahlen können gemäß DIN 1304-1 und DIN 5483-3 unterstrichen dargestellt werden, um sie von reellen Zahlen zu unterscheiden.

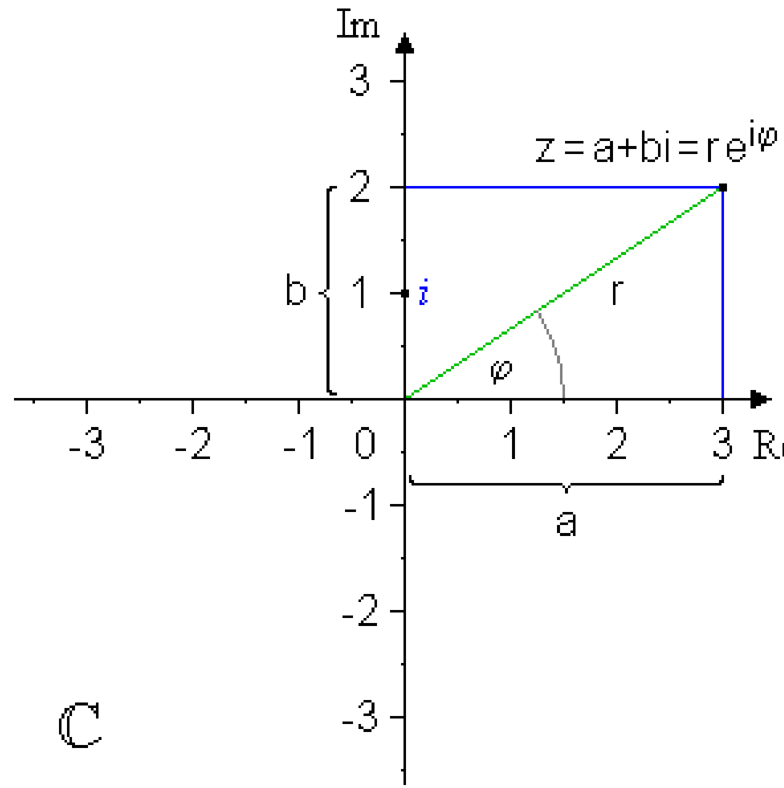
Weitere Darstellungsformen für komplexe Zahlen sind die ***Exponentialform*** und die ***trigonometrische Form***.

Die Gaußsche Zahlenebene

Während sich die Menge der reellen Zahlen durch Punkte auf einer Zahlengeraden veranschaulichen lässt, kann man die Menge der komplexen Zahlen als Punkte in einer **Ebene** (komplexe Ebene, Gaußsche Zahlenebene) darstellen.

Dies entspricht der „doppelten Natur" der Menge der komplexen Zahlen als zweidimensionalem reellem Vektorraum. Die Teilmenge der **reellen** Zahlen bildet darin die **waagerechte** Achse, die Teilmenge der rein **imaginären** Zahlen (d. h. mit Realteil 0) bildet die **senkrechte** Achse.

Eine komplexe Zahl besitzt dann die horizontale Koordinate a und die vertikale Koordinate b.



Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Gemäß Definition entspricht die Addition komplexer Zahlen der Vektoraddition.

Addition: $$(a + b\,\mathrm{i}) + (c + d\,\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i}$$

Beispiel: $$(3 + 2\mathrm{i}) + (5 + 5\mathrm{i}) = (3 + 5) + (2 + 5)\mathrm{i} = 8 + 7\mathrm{i}$$

Subtraktion: $$(a + b\,\mathrm{i}) - (c + d\,\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\,\mathrm{i}$$

Beispiel: $$(5 + 5\mathrm{i}) - (3 + 2\mathrm{i}) = (5 - 3) + (5 - 2)\mathrm{i} = 2 + 3\mathrm{i}$$

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Die Multiplikation komplexer Zahlen ergibt sich mit der Definition ***i² = − 1*** durch einfaches Ausmultiplizieren und Neugruppieren.

$$(a + b\,\mathrm{i}) \cdot (c + d\,\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot \mathrm{i}$$

Beispiel:

$$(2+5\mathrm{i}) \cdot (3+7\mathrm{i}) = (2 \cdot 3 + 2 \cdot 7\mathrm{i}) + (5\mathrm{i} \cdot 3 + 5\mathrm{i} \cdot 7\mathrm{i}) = 6 + 14\mathrm{i} + 15\mathrm{i} - 35 = -29 + 29\mathrm{i}$$

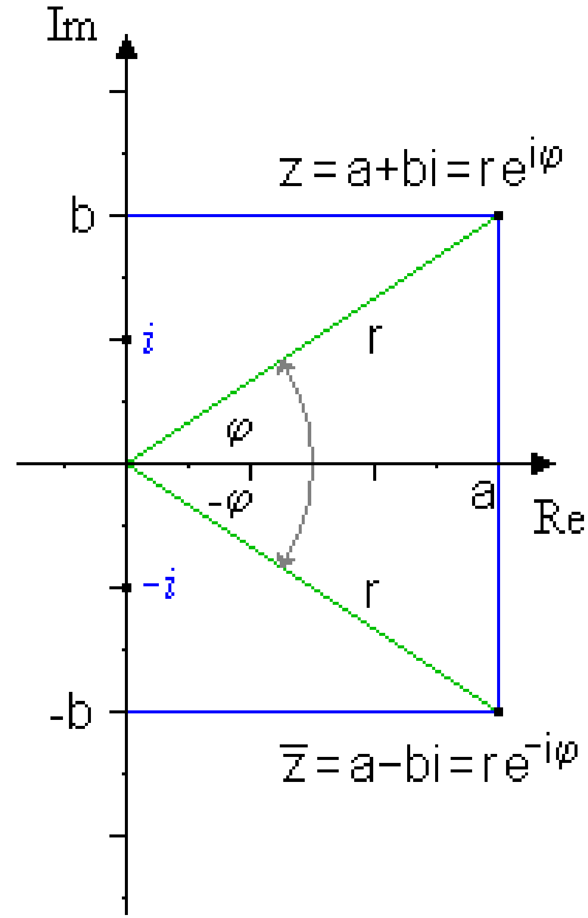
Die Division komplexer Zahlen lässt sich auf die Multiplikation zurückführen, allerdings möchte man vermeiden, dass ***i*** im Nenner steht. Daher muss der Bruch mit der zum Nenner **komplex konjugierten** Zahl erweitert werden.

Komplex konjugierte Zahlen

Dreht man das **Vorzeichen des Imaginärteils** b einer komplexen Zahl um, so erhält man die zu z komplex konjugierte (oder auch konjungiert komplexe) Zahl $\bar{z}$ (manchmal auch z* geschrieben).

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z = a + b \cdot \mathrm{i} \;\mapsto\; \bar{z} = a - b \cdot \mathrm{i}$$

Auffällig bei den zueinander komplex konjugierten Zahlen ist, dass sie in der Gaußschen Zahlenebene **symmetrisch zur reellen Achse** liegen, da sie sich nur durch das Vorzeichen im Imaginärteil unterscheiden.



Komplex konjugierte Zahlen

Das Produkt aus einer komplexen Zahl $z = a + bi$ und ihrer komplex konjugierten Zahl ergibt das Quadrat ihres Betrages:

$$z \cdot \bar{z} = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Die Summe aus einer komplexen Zahl $z = a + bi$ und ihrer komplex konjugierten Zahl ergibt das 2-fache ihres Realteils:

$$z + \bar{z} = (a + b\mathrm{i}) + (a - b\mathrm{i}) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

Die Differenz aus einer komplexen Zahl $z = a + bi$ und ihrer komplex konjugierten Zahl ergibt das 2i-fache ihres Imaginärteils:

$$z - \bar{z} = (a + b\mathrm{i}) - (a - b\mathrm{i}) = 2b\mathrm{i} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$$

Rechenregeln komplex konjugierter Zahlen

Für alle komplexen Zahlen $z_1, z_2, z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ gilt:

$$a = \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$

$$b = \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

Division komplexer Zahlen in algebraischer Form

Für $z \neq 0$ gilt:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen erhalten wir:

$$\frac{y}{z} = \frac{y}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{y\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}\,\mathrm{i}.$$

Der Betrag komplexer Zahlen

Der Betrag | *z* | einer komplexen Zahl ***z* = *a* + *b i*** ist folgendermaßen definiert:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Diese Definition des Betrags einer komplexen Zahl entspricht dem Abstand der Zahl (in der Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene) vom Ursprung des Koordinatensystems.

Der Betrag einer komplexen Zahl und der dazu konjugiert komplexen Zahl ist gleich, da bei der Definition einer konjugiert komplexen Zahl nur das Vorzeichen des b differiert und laut Definition des Betrages einer komplexen Zahl a und b quadriert werden, somit also der Unterschied des Vorzeichens ohne den Verlust einer weiteren Lösung wegfällt.

$$|z| = |\bar{z}|$$

Darstellung komplexer Zahlen in Polarform

Verwendet man anstelle der kartesischen Koordinaten a und b die Polarkoordinaten r und φ , so kann die komplexe Zahl in **Polarform** dargestellt werden.

Algebraische Form einer komplexen Zahl :

$$z = a + b \cdot i$$

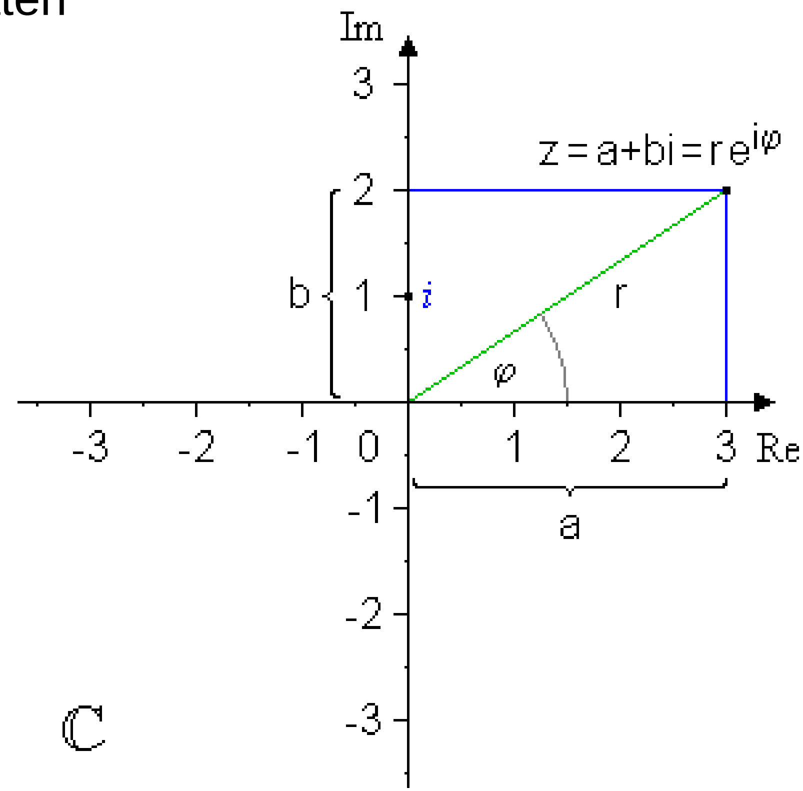
Trigonometrische Form einer komplexen Zahl:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Exponentialform (Eulersche Form):

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

φ meist in rad
(360° = 2π)



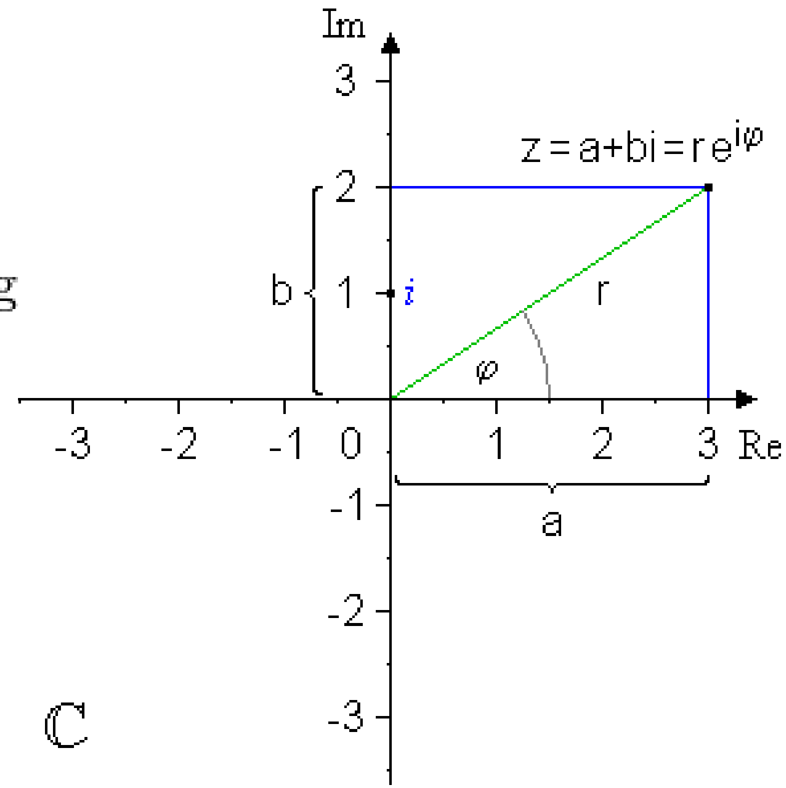
Umwandlung von algebraischer Form in Polarform

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{für } a > 0, b \text{ beliebig} \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } a = 0, b < 0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } a = 0, b = 0 \end{cases}$$

für: $-\pi < \varphi \leq \pi$

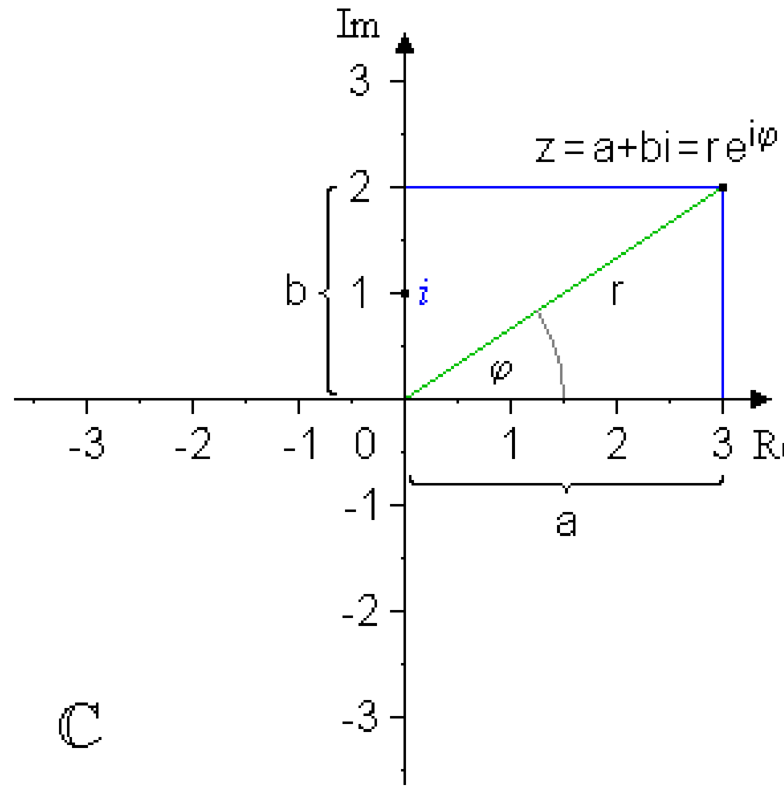


Umwandlung von Polarform in algebraische Form

$$z = a + b\,\mathrm{i}$$

$$a = \mathrm{Re}(z) = r \cdot \cos\varphi$$

$$b = \mathrm{Im}(z) = r \cdot \sin\varphi$$



Literatur

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,
Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium,
Hanser Verlag, München 2010

http://www.komplexe-zahlen.de

http://de.wikipedia.org