HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences



Mathematik 1 Infotronik (15)

Gerald Kupris

12.12.2012

Lineare Algebra

Lineares Gleichungssystem

Ein System aus m Gleichungen mit n Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ in der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\ a_{21}\,x_1 & + & a_{22}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\,x_1 & + & a_{m2}\,x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}\,x_n & = & b_m \end{array}$$

nennt man ein **lineares Gleichungssystem** (LGS). Die Zahlen a_{ij} sind die **Koeffizienten**, $b_1, b_2, \ldots, b_m$ bezeichnet man als **Absolutglieder** oder rechte Seite.

Lösung eines linearen Gleichungssystems

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems besteht aus allen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, bei denen alle m Gleichungen erfüllt sind.

Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems

Lösung eines linearen Gleichungssystems

Die Lösung eines linearen Gleichungssystems besteht aus allen Zahlen x_1, x_2, ..., x_n, bei denen alle m Gleichungen erfüllt sind.

Bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems sind grundsätzlich nur drei verschiedene Fälle möglich. Das lineare Gleichungssystem hat entweder

- gar keine Lösung,
- eine eindeutige Lösung oder
- unendlich viele Lösungen.

Lösung eines linearen Gleichungssystems mit Determinanten

Das lineare Gleichungssystem in Matrixform $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante der quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ nicht null ist. Die Lösung kann man wie bei $(2,2)$-Matrizen und $(3,3)$-Matrizen mithilfe von Determinanten berechnen.

Beispiel

Cramersche Regel

Die cramersche Regel oder Determinantenmethode ist eine mathematische Formel für die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Ausgangspunkt für die cramersche Regel ist stets ein lineares Gleichungssystem mit genauso vielen Gleichungen wie Unbekannten. Dieses System muss zusätzlich eindeutig lösbar sein, was sich am einfachsten überprüfen lässt, indem man die Determinante der Koeffizientenmatrix berechnet. Ist diese von null verschieden, ist die Voraussetzung erfüllt, und die einzelnen Unbekannten berechnen sich nach der cramerschen Regel jeweils zu:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

Die Matrix A_i entsteht aus der Koeffizientenmatrix, indem die *i*-te Spalte durch die rechte Seite des Gleichungssystems ersetzt wird.

Cramersche Regel für (2,2) Matrizen

Das lineare Gleichungssystem in Matrixform $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$ nicht null ist. Die Lösung kann man dann nach der Cramerschen Regel berechnen:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Cramersche Regel für (3,3) Matrizen

Das lineare Gleichungssystem in Matrixform $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$ nicht null ist. Die Lösung kann man dann nach der Cramerschen Regel berechnen:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}.$$

Beispiel für die Cramersche Regel (1)

Lineares Gleichungssystem (3 Gleichungen mit 3 Unbekannten):

$$\begin{aligned} 82\,x_1 + 45\,x_2 + 9\,x_3 &= 1 \\ 27\,x_1 + 16\,x_2 + 3\,x_3 &= 1 \\ 9\,x_1 + 5\,x_2 + 1\,x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Erweiterte Koeffizientenmatrix:

$$(A \quad b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 82 & 45 & 9 & 1 \\ 27 & 16 & 3 & 1 \\ 9 & 5 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Beispiel für die Cramersche Regel (2)

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 45 & 9 \\ 1 & 16 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 82 & 45 & 9 \\ 27 & 16 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 82 & 1 & 9 \\ 27 & 1 & 3 \\ 9 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 82 & 45 & 9 \\ 27 & 16 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{\begin{vmatrix} 82 & 45 & 1 \\ 27 & 16 & 1 \\ 9 & 5 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 82 & 45 & 9 \\ 27 & 16 & 3 \\ 9 & 5 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-14}{1} = -14$$

Lösung eines linearen Gleichungssystems

Falls die Determinante einer quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$ ungleich null ist, dann ist das lineare Gleichungssystem $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ eindeutig lösbar. Die Lösung $\boldsymbol{x}$ kann man durch Multiplikation der rechten Seite $\boldsymbol{b}$ mit der inversen Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$ berechnen: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{b}$.

Zu jeder quadratischen Matrix $\boldsymbol{A}$, deren Determinante nicht null ist, gibt es eine eindeutig bestimmte **inverse Matrix** $\boldsymbol{A}^{-1}$ so, dass

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Eine Matrix $\boldsymbol{A}$, die eine inverse Matrix besitzt, nennt man **invertierbar** oder **regulär**. Eine nicht invertierbare Matrix heißt **singulär**.

Lösungsverfahren für Lineare Gleichungssysteme

Teilen Sie sich in Gruppen auf und erarbeiten Sie eine kurze Vorstellung der folgenden Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme:

Gleichsetzungsverfahren

Einsetzungsverfahren

Additionsverfahren

Gaußsches Eliminationsverfahren

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems kann man mit dem **Gaußschen Eliminationsverfahren** durch folgende Schritte berechnen:

(1) Mithilfe von Äquivalenzumformungen erzeugt man durch Vorwärtselimination eine Dreiecksform.

(2) Aus der Dreiecksform erhält man durch Rückwärtseinsetzen die Lösungsmenge.

Das Gaußsche Eliminationsverfahren funktioniert für beliebige lineare Gleichungssysteme.

Das Verfahren ist in der Lage zu erkennen, ob es keine Lösung gibt oder ob es unendlich viele Lösungen des Gleichungssystems gibt.

Umformungen von Gleichungssystemen

Äquivalenzumformungen für lineare Gleichungssysteme

Algebraische Umformungen, die die Lösungsmenge unverändert lassen, bezeichnet man als **Äquivalenzumformungen**. Bei linearen Gleichungssystemen sind folgende Operationen Äquivalenzumformungen:

- Zwei Gleichungen dürfen miteinander vertauscht werden.
- Jede Gleichung darf mit einem beliebigen Faktor ungleich null multipliziert werden.
- Zu jeder Gleichung darf eine beliebige andere Gleichung addiert werden.

Lineares Gleichungssystem in Dreiecksform

Die wesentliche Idee beim Gaußschen Eliminationsverfahren besteht darin, das lineare Gleichungssystem durch Äquivalenzumformungen in Dreiecksform zu bringen. In Dreiecksform enthält das Gleichungssystem unterhalb der Diagonalen keine Einträge.

Rückwärtseinsetzen

Rückwärtseinsetzen

Ein lineares Gleichungssystem in Dreiecksform, bei dem die Anzahl der Gleichungen gleich der Anzahl der Unbekannten ist,

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}\,x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + & \dots & + & a_{1n}\,x_n & = & b_1 \\
 & & a_{22}\,x_2 & + & \dots & + & a_{2n}\,x_n & = & b_2 \\
 & & & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
 & & & & & & a_{nn}\,x_n & = & b_n
\end{array}$$

kann man rückwärts lösen. Dabei bestimmt man zuerst x_n aus der letzten Gleichung, dann x_{n-1} aus der zweitletzten, usw. und zum Schluss x_1 aus der ersten Gleichung. Es gibt genau dann eine eindeutige Lösung, wenn alle Diagonalelemente a_{ii} ungleich null sind.

Gaußsches Eliminationsverfahren

Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems kann man mit dem **Gaußschen Eliminationsverfahren** durch folgende Schritte berechnen:

(1) Mithilfe von Äquivalenzumformungen erzeugt man durch Vorwärtselimination eine Dreiecksform.

(2) Aus der Dreiecksform erhält man durch Rückwärtseinsetzen die Lösungsmenge.

Beispiel:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= -10 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 5 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 &= -7 \\ 3x_2 + x_3 - 4x_4 &= 7 \end{aligned}$$

Besonderheiten beim Gaußschen Eliminationsverfahren (1)

Keine Lösung beim Gaußschen Eliminationsverfahren

Entsteht im Verlauf des Gaußschen Eliminationsverfahrens eine Gleichung der Form

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b, \quad b \neq 0,$$

wobei b eine beliebige Zahl ungleich null ist, dann besitzt das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Beispiel

Besonderheiten beim Gaußschen Eliminationsverfahren (2)

Unendlich viele Lösungen beim Gaußschen Eliminationsverfahren

Entstehen im Verlauf des Gaußschen Eliminationsverfahrens zwei aufeinander folgende Zeilen i und $i+1$ mit einer Zeilenstufe der Breite $p+1$ in der Form

$$\begin{array}{ccccccccccccc} a_{i,k}\,x_k & + & \dots & + & a_{i,k+p}\,x_{k+p} & + & a_{i,k+p+1}\,x_{k+p+1} & + & \dots & + & a_{i,n}\,x_n & = & b_i \\ & & & & & & a_{i+1,k+p+1}\,x_{k+p+1} & + & \dots & + & a_{i+1,n}\,x_n & = & b_{i+1} \end{array}$$

so kann man die p Unbekannten x_{k+1} bis x_{k+p} beliebig wählen.

Beispiel

Besonderheiten beim Gaußschen Eliminationsverfahren (3)

Redundante Gleichungen

Entsteht im Verlauf des Gaußschen Eliminationsverfahrens eine Gleichung der Form

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0,$$

dann kann man diese redundante Gleichung einfach weglassen.

Beispiel

Unterbestimmtes lineares Gleichungssystem

Ein lineares Gleichungssystem, bei dem die Anzahl der Gleichungen kleiner als die Anzahl der Unbekannten ist, nennt man **unterbestimmt**.

Unterbestimmtes lineares Gleichungssystem

In der Regel besitzt ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Die Lösungen erhält man durch Rückwärtseinsetzen, indem man für die unbestimmten Unbekannten geeignete Parameter einführt. In Ausnahmefällen kann ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem jedoch auch unlösbar sein. Ein unterbestimmtes lineares Gleichungssystem ist niemals eindeutig lösbar.

Überbestimmtes lineares Gleichungssystem

Ein lineares Gleichungssystem, bei dem die Anzahl der Gleichungen größer als die Anzahl der Unbekannten ist, nennt man **überbestimmt**.

Überbestimmtes lineares Gleichungssystem

In der Regel besitzt ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem keine Lösung. In Ausnahmefällen kann es jedoch eindeutig lösbar sein oder sogar unendlich viele Lösungen besitzen.

Homogenes lineares Gleichungssystem

Ein lineares Gleichungssystem, bei dem die rechte Seite nur aus Nullen besteht, nennt man **homogen**. Ansonsten nennt man es **inhomogen**.

Homogenes lineares Gleichungssystem

Ein homogenes lineares Gleichungssystem besitzt stets die sogenannte **triviale Lösung**

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad \dots, \quad x_n = 0.$$

Offen ist, ob es außer der trivialen Lösung noch weitere Lösungen gibt. Ein homogenes lineares Gleichungssystem hat entweder nur die triviale Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Lineares Gleichungssystem mit Parametern

Lineares Gleichungssystem mit Parametern

Ein lineares Gleichungssystem mit Parametern kann man mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren lösen. Multipliziert man eine Gleichung mit einem Faktor, der einen Parameter enthält, dann muss man die Fälle, in denen der Faktor null wird, gesondert betrachten. Es ist zu untersuchen, für welche Parameterwerte das Gleichungssystem lösbar ist und für welche Parameterwerte die Lösung eindeutig ist.

Beispiel

Aufgaben

1. Auf einem Fest kauft Familie Maier 2 Portionen Pommes, 2 Würstchen und 4 Crepes. Sie bezahlen 14,60 €. Familie Schmidt kauft sich 2 Pommes, 4 Würstchen und 1 Crepes. Sie bezahlen 13,60 €, Für 13,50 € bekommt Familie Ludwig 1 Portion Pommes, 3 Würstchen und 3 Crepes. Wieviel kosten eine Portion Pommes, ein Würstchen und ein Crepes?

2. Vor einem Jahr war Karl dreimal so alt wie Lisa heute. Vor 2 Jahren war Petra doppelt so alt wie Lisa. Zusammen sind sie heute 23 Jahre alt. Wie alt sind Lisa, Petra und Karl heute?

3. Gesucht wird eine dreistellige Zahl. Die Quersumme der gesuchten Zahl ist 6. Vertauscht man die erste und die zweite Ziffer so ist die Zahl um 90 größer als die gesuchte Zahl. Vertauscht man die erste und die dritte Ziffer so ist die Zahl um 198 größer als die gesuchte Zahl. Welche Zahl ist gesucht?

Quellen

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences
HDU

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf