




Mathematik für Infotronik (38)

Gerald Kupris

24.01.2011

Restliche Stunden Mathematik 1. Semester

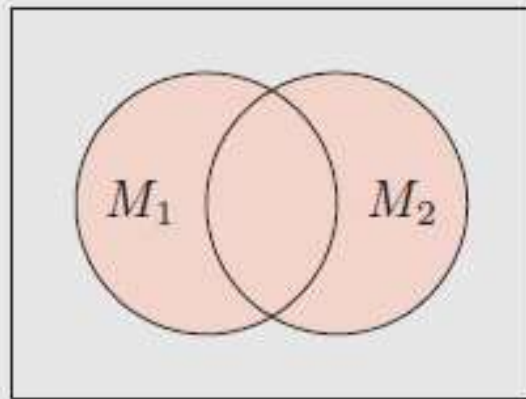
- 10.01.2011 (Mo) 09:45 Uhr: Auswertung Fragebogen, Exponentialfunktion, e-funktion
- 12.01.2011 (Mi) 09:45 Uhr: Logarithmusfunktion, Logarithmusregeln
- 12.01.2011 (Mi) 11:45 Uhr: Ableitung und Integration von e-Funktion und Logarithmus
- 13.01.2011 (Do) 09:45 Uhr: **Wiederholung Integration, Integration durch Substitution**
- 17.01.2011 (Mo) 09:45 Uhr: Partielle Integration, Partialbruchzerlegung
- 19.01.2011 (Mi) 08:00 Uhr: **Rechenbeispiele, Flächenberechnung, Schwerpunkt**
- 19.01.2011 (Mi) 09:45 Uhr: Anwendung der Integration, numerische Methoden
-  24.01.2011 (Mo) 08:00 Uhr: **allgemeine Wiederholung, Prüfungsvorbereitung**
- 24.01.2011 (Mo) 09:45 Uhr: Rechnen der Probeklausur
- 08.02.2011 (Di) 11:00 Uhr: Prüfung

Mengenoperationen

Für die Mengen M_1 und M_2 definiert man

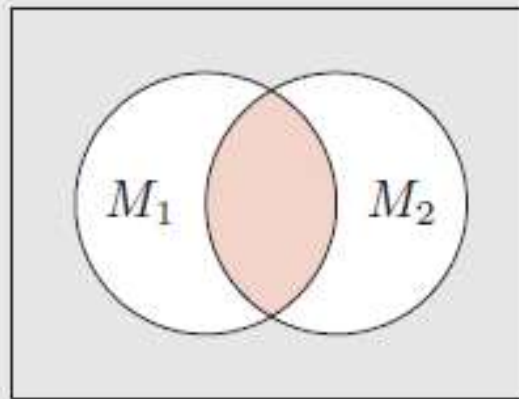
- ▶ die **Vereinigungsmenge** durch $M_1 \cup M_2 = \{x \mid x \in M_1 \vee x \in M_2\},$
- ▶ die **Schnittmenge** durch $M_1 \cap M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \in M_2\},$
- ▶ die **Differenzmenge** durch $M_1 \setminus M_2 = \{x \mid x \in M_1 \wedge x \notin M_2\}.$

Vereinigung



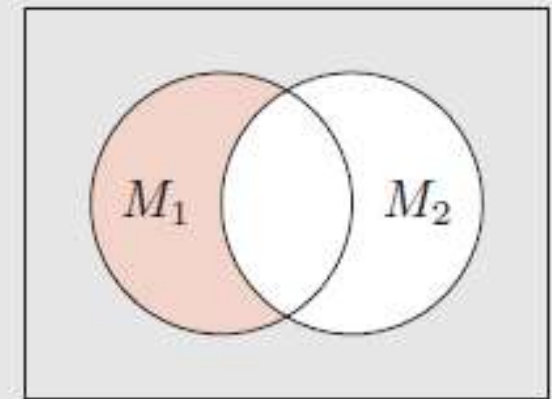
$$M_1 \cup M_2$$

Schnitt



$$M_1 \cap M_2$$

Differenz



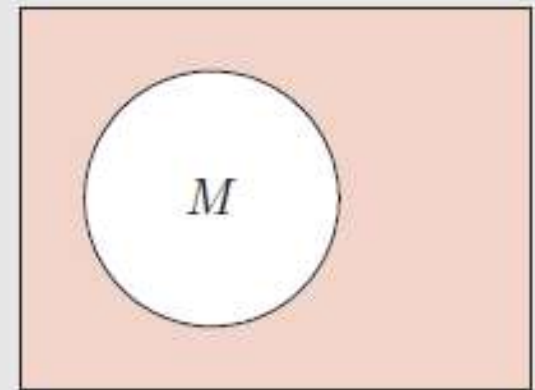
$$M_1 \setminus M_2$$

Mengenkomplement

Bezogen auf eine Grundmenge ist das **Komplement** einer Menge definiert durch

$$M^C = \{x \mid x \notin M\}.$$

Kein Element von M ist in der Menge M^C enthalten und umgekehrt.





Reelle Zahlen

Die **Menge der reellen Zahlen** \mathbb{R} besteht aus allen rationalen und irrationalen Zahlen.

Die **Menge der rationalen Zahlen** besteht aus allen Zahlen, die sich als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lassen:

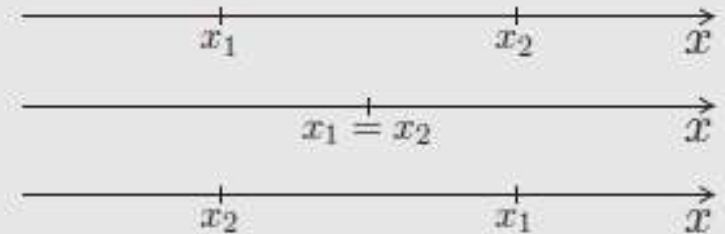
$$\mathbb{Q} = \left\{ q = \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\}.$$

Eine Zahl, die sich nicht als Bruch zweier ganzer Zahlen darstellen lässt, bezeichnet man als **irrationale Zahl**. Irrationale Zahlen besitzen eine Dezimaldarstellung mit unendlich vielen Nachkommastellen, die sich nicht periodisch wiederholen.

Ordnung der Reellen Zahlen

Für zwei reelle Zahlen x_1 und x_2 gilt immer genau eine der folgenden Beziehungen:

- ▶ x_1 **kleiner** x_2 , also $x_1 < x_2$
- ▶ x_1 **gleich** x_2 , also $x_1 = x_2$
- ▶ x_1 **größer** x_2 , also $x_1 > x_2$



Für zwei reelle Zahlen x_1 und x_2 verwendet man die Symbole \leq und \geq , falls gilt:

- ▶ x_1 **kleiner oder gleich** x_2 , also $x_1 \leq x_2$
- ▶ x_1 **größer oder gleich** x_2 , also $x_1 \geq x_2$



Intervalle

Intervalle sind Teilmengen der reellen Zahlen, die sich ohne Zwischenräume von einer Untergrenze a bis zu einer Obergrenze b erstrecken:

- ▶ **abgeschlossenes Intervall** $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- ▶ **offenes Intervall** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- ▶ **halboffenes Intervall** $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- ▶ **halboffenes Intervall** $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Bei einem Intervall darf man für die Obergrenze auch das Symbol ∞ und für die Untergrenze das Symbol $-\infty$ verwenden. Man spricht dann von einem **unendlichen Intervall**:

- ▶ **halboffenes Intervall** $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\}$
- ▶ **offenes Intervall** $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\}$
- ▶ **halboffenes Intervall** $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq b\}$
- ▶ **offenes Intervall** $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < b\}$



Gleichungen

Eine Gleichung ist eine vergleichende Aussage über zwei Terme, die besagt, dass beide Terme den selben Wert ergeben.

Beim Lösen einer Gleichung versucht man folgende Fragen zu beantworten:

- ▶ Besitzt die Gleichung überhaupt eine Lösung (**Existenz**)?
- ▶ Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung (**Eindeutigkeit**)?
- ▶ Welche Werte darf man für die Unbekannte einsetzen, damit die Gleichung erfüllt ist (**Lösungsmenge**)?

Mithilfe von Umformungen versucht man eine Gleichung so zu verändern, dass man die Lösungen schließlich bestimmen kann. Eine **Äquivalenzumformung** verändert die Lösungsmenge einer Gleichung nicht. Äquivalenzumformungen lassen sich problemlos wieder rückgängig machen.



Ungleichungen

Eine Ungleichung ist eine vergleichende Aussage über zwei Terme, die besagt, dass einer der Terme kleiner beziehungsweise kleiner-gleich ist als der andere.

Multiplikation bei Ungleichungen

Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert, so dreht sich das Relationszeichen um:

- ▶ Aus $<$ wird $>$ und umgekehrt.
- ▶ Aus \leq wird \geq und umgekehrt.

Multipliziert oder dividiert man eine Ungleichung mit einem Faktor, dessen Vorzeichen man nicht kennt, benötigt man eine Fallunterscheidung.



Lösung einer Ungleichung

Beim Lösen von Ungleichungen über den reellen Zahlen versucht man, eine unübersichtliche Ungleichung so weit zu vereinfachen, dass sich einfache Aussagen etwa der Form $x > 5$ bilden, die unmittelbar zu verstehen sind oder die sich an der Zahlengeraden veranschaulichen lassen.

Lösen einer Ungleichung

Zur Bestimmung der Lösung einer Ungleichung kann man folgendermaßen vorgehen:

- (1) Bestimme diejenigen Werte, für welche die Ungleichung nicht definiert ist.
- (2) Bestimme alle Lösungen der entsprechenden Gleichung.
- (3) Identifiziere durch Testen geeigneter Werte diejenigen Bereiche, die zur Lösungsmenge gehören.

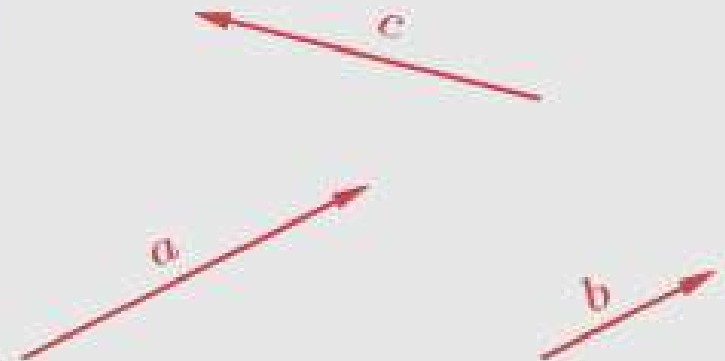
Beispiel

Definition Vektor

Vektoren a, b, c, \dots werden durch **Länge** und **Richtung** festgelegt. Die Länge eines Vektors bezeichnet man auch als **Betrag** des Vektors und verwendet die Schreibweise

$$|a|, |b|, |c|, \dots$$

Der Betrag eines Vektors ist niemals negativ.

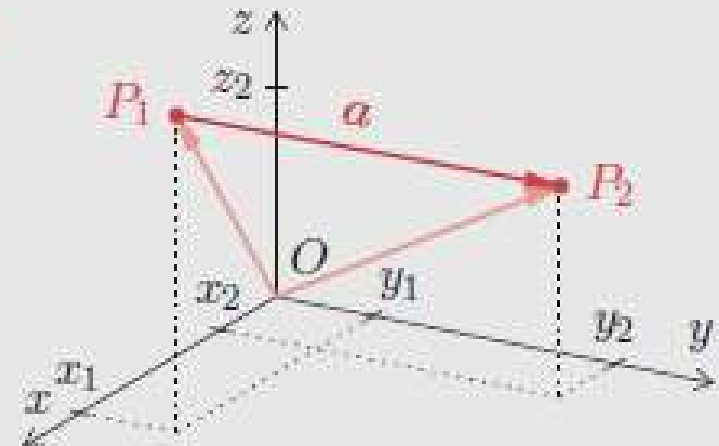


Ortsvektor und Verbindungsvektor

Den Vektor \mathbf{a} vom Punkt $P_1(x_1 | y_1 | z_1)$ zum Punkt $P_2(x_2 | y_2 | z_2)$ nennt man den **Verbindungsvektor**. Er hat die Koordinaten

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Ein **Ortsvektor** ist ein Verbindungsvektor vom Ursprung $O(0|0|0)$ zu einem Punkt.



Betrag eines Vektors

in 2D:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

in 3D:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

Das kann geometrisch nachvollzogen werden!



Addition und Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_x + a_2 \vec{e}_y + a_3 \vec{e}_z$$

$$\vec{b} = b_1 \vec{e}_x + b_2 \vec{e}_y + b_3 \vec{e}_z$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1) \vec{e}_x + (a_2 + b_2) \vec{e}_y + (a_3 + b_3) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1) \vec{e}_x + (a_2 - b_2) \vec{e}_y + (a_3 - b_3) \vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Das kann geometrisch nachvollzogen werden!



Skalare Multiplikation von Vektoren

Bei der skalaren Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl wird jede Komponente mit dieser Zahl multipliziert.

$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Um einen Vektor zu **normieren**, wird er mit dem Kehrwert seines Betrages skalar multipliziert. Somit ist der Betrag eines normierten Vektors immer gleich Eins.



Skalarprodukt von Vektoren

Das Skalarprodukt (auch **inneres Produkt** oder Punktprodukt) ist eine mathematische Verknüpfung. Das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnet sich nach der Formel:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\vec{x}| |\vec{y}| \cos \angle (\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Wie bei der normalen Multiplikation kann das Multiplikationszeichen auch weggelassen werden:

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{x}\vec{y}$$

Es gibt eine einfache Methode das Skalarprodukt zu berechnen, und zwar durch komponentenweises Multiplizieren der Koordinaten der Vektoren und anschließendes Aufsummieren. Diese Berechnungsmethode für das Skalarprodukt wird oft verwendet, um **Winkel** zwischen zwei Vektoren und die **Länge** von Vektoren zu bestimmen.

Das Skalarprodukt darf nicht mit der skalaren Multiplikation verwechselt werden!

Hierbei wird ein Vektor mit einem Skalar des Vektorraums multipliziert, meistens also einer reellen oder komplexen Zahl.



Eigenschaften des Skalarprodukts

Skalarprodukt und Winkel

Wenn man das Skalarprodukt und die Längen der beiden Vektoren a und b kennt, dann kann man daraus den Winkel zwischen den beiden Vektoren berechnen:

$$\angle(a, b) = \arccos\left(\frac{a \cdot b}{|a||b|}\right).$$

Vorzeichen des Skalarproduktes

Das Skalarprodukt der beiden Vektoren a und b ist genau dann negativ, wenn der Winkel zwischen den beiden Vektoren größer als 90° ist.



Eigenschaften des Skalarprodukts

Skalarprodukt null

Wenn das Skalarprodukt der beiden Vektoren a und b null ergibt, dann

- ▶ stehen die beiden Vektoren a und b senkrecht aufeinander oder
- ▶ einer der beiden Vektoren a oder b ist der Nullvektor.

Skalarprodukt und Länge

Zwischen dem Skalarprodukt $a \cdot a$ und der Länge des Vektors a besteht die Beziehung

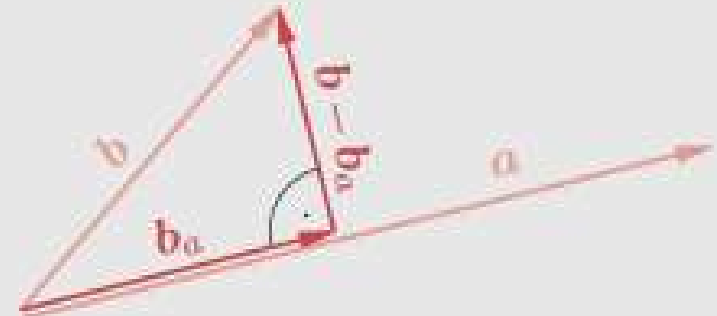
$$|a| = \sqrt{a \cdot a}.$$

Senkrechte Projektion

Die senkrechte **Projektion** des Vektors b in Richtung des Vektors a ist definiert durch

$$b_a = |b| \cos \angle(a, b) \frac{a}{|a|} = \frac{a \cdot b}{|a|^2} a.$$

Diese Projektion ist ein Vektor in Richtung des Vektors a mit der Länge $|b| \cos \angle(a, b)$.

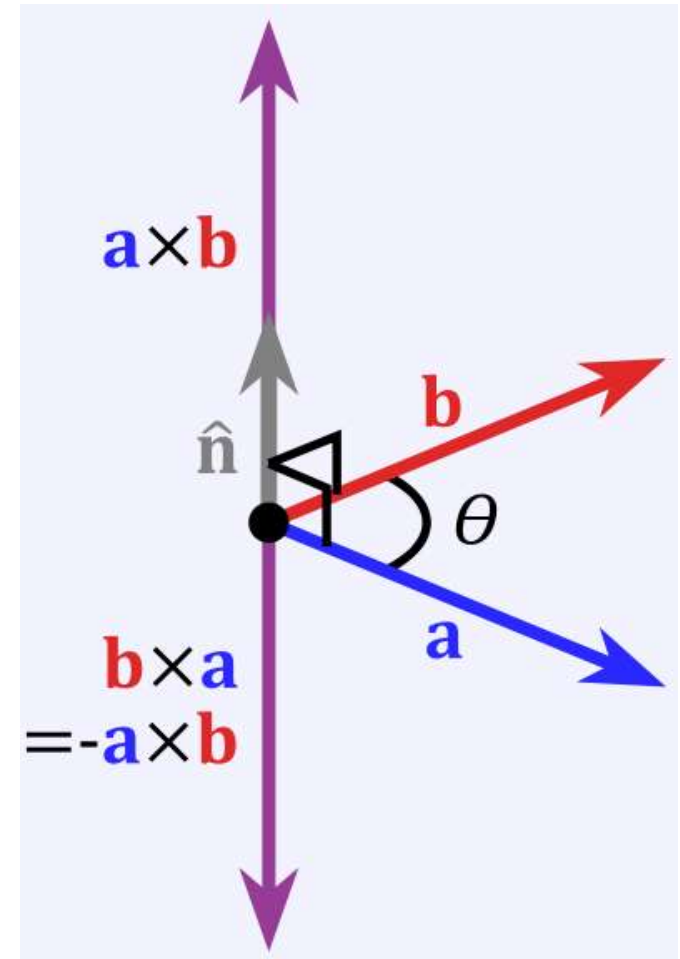


Vektorprodukt von Vektoren

Das **Vektorprodukt** (auch **Kreuzprodukt**, vektorielles Produkt oder **äußeres Produkt** genannt) zweier Vektoren **a** und **b** im dreidimensionalen reellen Vektorraum ist ein Vektor, der senkrecht auf der von den beiden Vektoren aufgespannten Ebene steht und mit ihnen ein Rechtssystem bildet. Die Länge dieses Vektors ist die **Flächengröße** des Parallelogramms mit den Seiten **a** und **b**.

Das Kreuzprodukt tritt in der Physik beispielsweise bei der Lorentzkraft oder dem Drehmoment auf. Das Kreuzprodukt wird mit einem Kreuz als Multiplikationszeichen geschrieben.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(|\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta \right) \vec{n}.$$



Vektorprodukt von Vektoren

Rechenregel:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 9 - 3 \cdot 8 \\ 3 \cdot (-7) - 1 \cdot 9 \\ 1 \cdot 8 - 2 \cdot (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -30 \\ 22 \end{pmatrix}.$$

Eigenschaften des Vektorprodukts

Vektorprodukt und Fläche

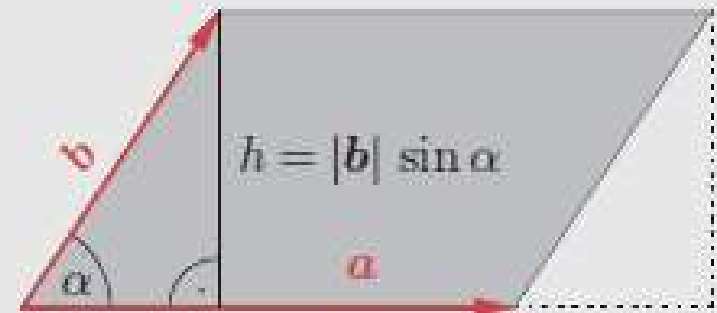
Das von den beiden Vektoren a und b aufgespannte

- ▶ Parallelogramm hat den Flächeninhalt

$$A_{\square} = |a \times b| = |a| |b| \sin \angle(a, b),$$

- ▶ Dreieck hat den Flächeninhalt

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} |a \times b| = \frac{1}{2} |a| |b| \sin \angle(a, b).$$



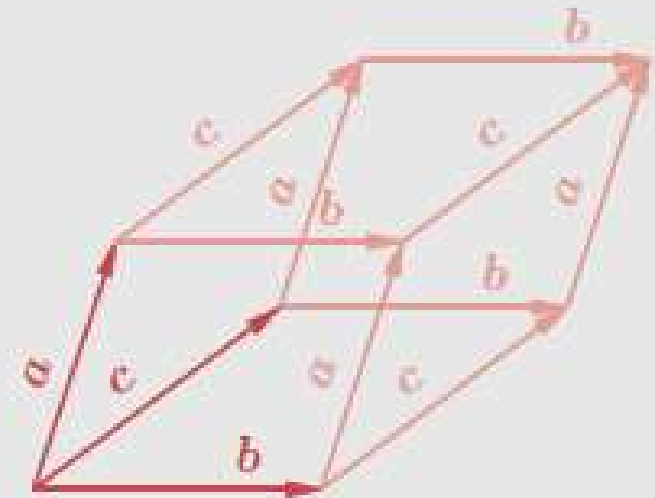
Vektorprodukt ergibt Nullvektor

Wenn das Vektorprodukt der beiden Vektoren a und b den Nullvektor ergibt, dann

- ▶ sind die beiden Vektoren a und b parallel oder antiparallel oder
- ▶ einer der beiden Vektoren a oder b ist der Nullvektor.

Spat oder Parallelepipiped

Drei Vektoren a , b und c , die nicht in einer Ebene liegen, spannen einen **Spat** oder ein **Parallelepipiped** auf. Jeder Vektor definiert genau vier der insgesamt zwölf Kanten. Dadurch verlaufen jeweils vier Kanten parallel und sind gleich lang. Gegenüberliegende Seiten werden durch deckungsgleiche Parallelogramme begrenzt.



Das Spatprodukt $[a, b, c]$ von drei Vektoren a , b und c ist definiert durch

$$[a, b, c] = a \cdot (b \times c).$$



Vorzeichen des Spatprodukts

Das Vorzeichen des Spatproduktes der drei Vektoren a , b und c gibt Auskunft darüber, ob die Vektoren ein Rechtssystem oder ein Linkssystem bilden:

- ▶ $[a, b, c] > 0 \iff a, b \text{ und } c \text{ bilden ein Rechtssystem}$
- ▶ $[a, b, c] = 0 \iff a, b \text{ und } c \text{ liegen in einer Ebene}$
- ▶ $[a, b, c] < 0 \iff a, b \text{ und } c \text{ bilden ein Linkssystem}$

Skalarprodukt: bei Vertauschung der Vektoren ändert sich das Vorzeichen nicht.
Das Skalarprodukt ist symmetrisch.

Vektorprodukt: bei Vertauschung der Vektoren ändert sich das Vorzeichen.
Das Vektorprodukt ist antikommutativ oder schiefsymmetrisch.

Daraus folgt: $[a \ b \ c] = - [a \ c \ b]$



Zusammenfassung Vektorprodukte

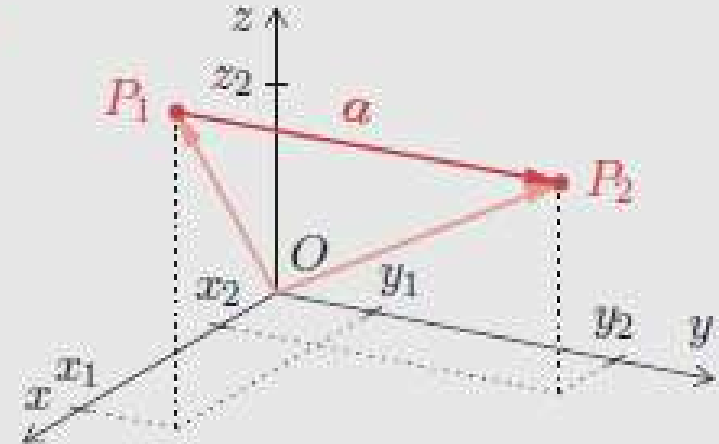
Name	Operanden	Ergebnis
skalare Multiplikation	Vektor x Skalar	Vektor
Skalarprodukt	Vektor x Vektor	Skalar
Vektorprodukt	Vektor x Vektor	Vektor
Spatprodukt	Vektor x Vektor x Vektor	Skalar

Punkte

Den Vektor \mathbf{a} vom Punkt $P_1(x_1|y_1|z_1)$ zum Punkt $P_2(x_2|y_2|z_2)$ nennt man den **Verbindungsvektor**. Er hat die Koordinaten

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Ein **Ortsvektor** ist ein Verbindungsvektor vom Ursprung $O(0|0|0)$ zu einem Punkt.



Abstand zwischen zwei Punkten:

Berechne den Verbindungsvektor zwischen diesen Punkten und nimm den Betrag davon.

Mitte zwischen zwei Punkten:

Berechne den Verbindungsvektor zwischen den Punkten, teile ihn durch zwei und addiere ihn zum ersten Punkt. Ähnliches gilt für beliebige Verhältnisse.



Lineare Abhängigkeit von Vektoren

Die Vektoren a_1, a_2, \dots, a_n nennt man **linear unabhängig**, falls die Gleichung

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$$

nur die triviale Lösung $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \dots, \lambda_n = 0$ besitzt. Andernfalls heißen die Vektoren **linear abhängig**.

Zwei Vektoren a_1 und a_2 sind genau dann linear abhängig, wenn sie parallel sind.

Drei Vektoren a_1, a_2 und a_3 sind genau dann linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen. Dies ist genau dann der Fall, wenn das Spatprodukt der drei Vektoren null ist:

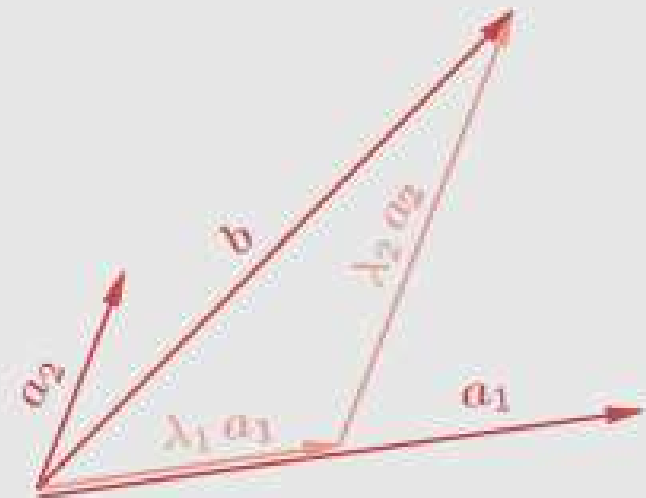
$$[a_1, a_2, a_3] = 0.$$

Komponentenzerlegung in der Ebene

Falls die beiden Vektoren a_1 und a_2 linear unabhängig und die drei Vektoren a_1 , a_2 und b linear abhängig sind, nennt man

$$b = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$$

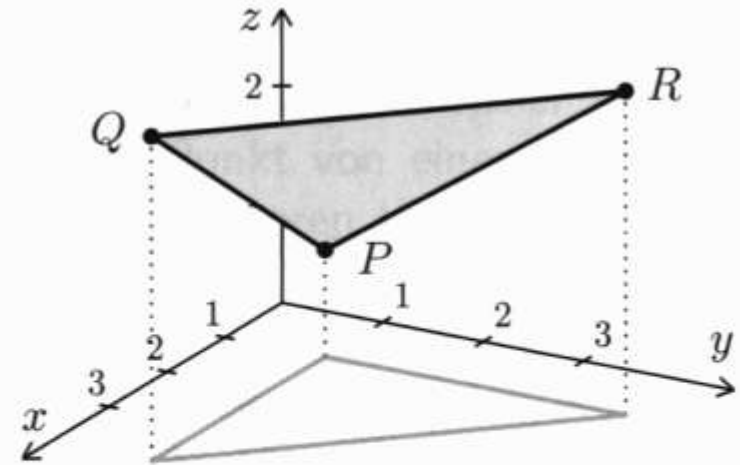
die **Komponentenzerlegung** des Vektors b in Richtung der Vektoren a_1 und a_2 .



Flächeninhalt eines Dreiecks

Die drei Punkte $P(1|1|1)$, $Q(4|1|3)$ und $R(1|4|3)$ bilden ein Dreieck. Zur Berechnung des Flächeninhalts verwenden wir den Verbindungsvektor \mathbf{a} von P nach Q , den Verbindungsvektor \mathbf{b} von P nach R und bestimmen den Vektor $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$



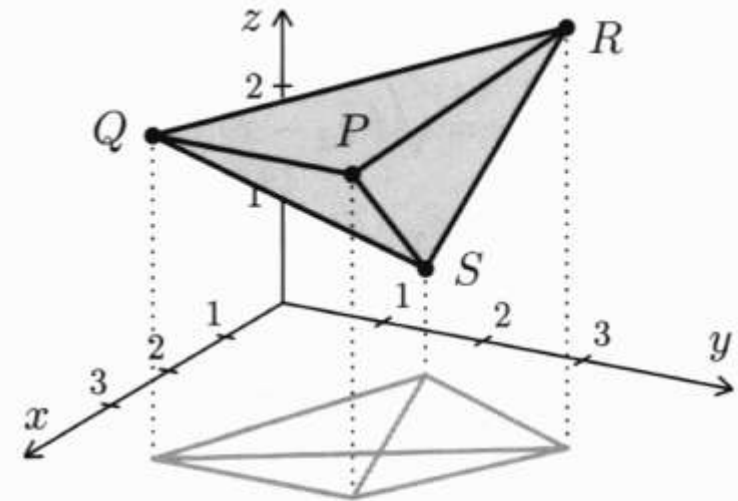
Den Flächeninhalt des Dreiecks A erhalten wir aus dem Betrag des Vektors \mathbf{c} :

$$A = \frac{1}{2} |\mathbf{c}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + 9^2} = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

Volumen eines Tetraeders

Die vier Punkte $P(4|3|3)$, $Q(4|1|3)$, $R(2|4|4)$ und $S(1|2|1)$ bilden ein Tetraeder. Zur Berechnung des Volumens verwenden wir den Verbindungsvektor \mathbf{a} von P nach Q , den Verbindungsvektor \mathbf{b} von P nach R und den Verbindungsvektor \mathbf{c} von P nach S :

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$



Das Volumen des Tetraeders erhalten wir dann aus dem Spatprodukt dieser Vektoren:

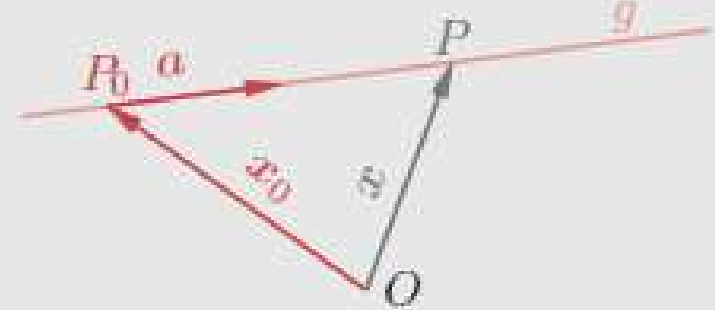
$$V = \frac{1}{6} |[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]| = \frac{1}{6} |-14| = \frac{7}{3}.$$

Darstellung einer Geraden

Punktrichtungsform:

Eine Gerade g kann durch einen Richtungsvektor $a \neq 0$ und durch einen Punkt P_0 mit dem Ortsvektor x_0 festgelegt werden:

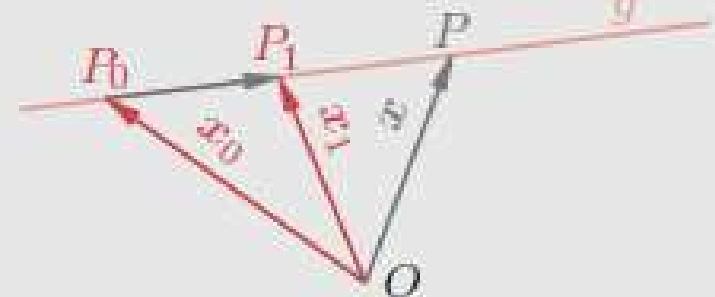
$$g: \quad x = x_0 + \lambda a, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



Zweipunktform:

Eine Gerade g kann durch zwei verschiedene Punkte P_0 und P_1 mit den Ortsvektoren x_0 und x_1 festgelegt werden:

$$g: \quad x = x_0 + \lambda (x_1 - x_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



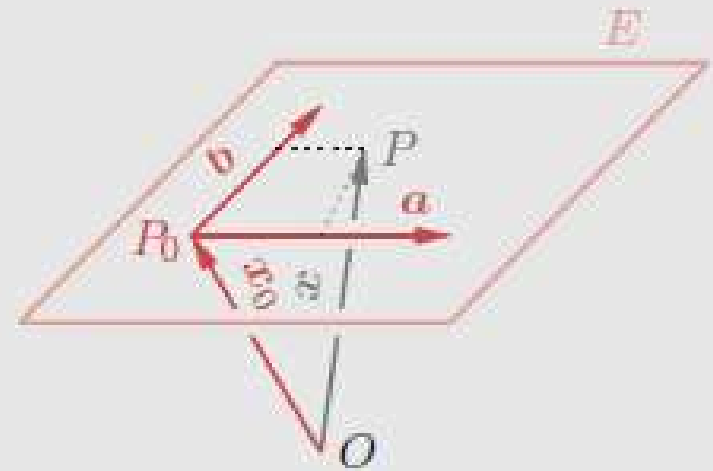
Darstellung einer Ebene

Punktrichtungsform:

Eine Ebene E kann durch zwei linear unabhängige Richtungsvektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} und durch einen Punkt P_0 mit dem Ortsvektor \mathbf{x}_0 festgelegt werden:

$$E: \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter λ und μ sind unabhängig voneinander.



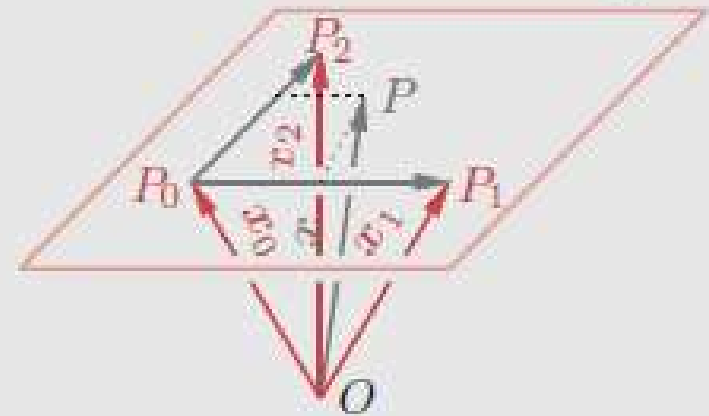
Darstellung einer Ebene

Dreipunkteform:

Eine Ebene E kann durch drei Punkte P_0 , P_1 und P_2 , die nicht alle auf einer Geraden liegen, mit den Ortsvektoren \mathbf{x}_0 , \mathbf{x}_1 und \mathbf{x}_2 festgelegt werden:

$$E: \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) + \mu (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_0), \\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter λ und μ sind unabhängig voneinander.

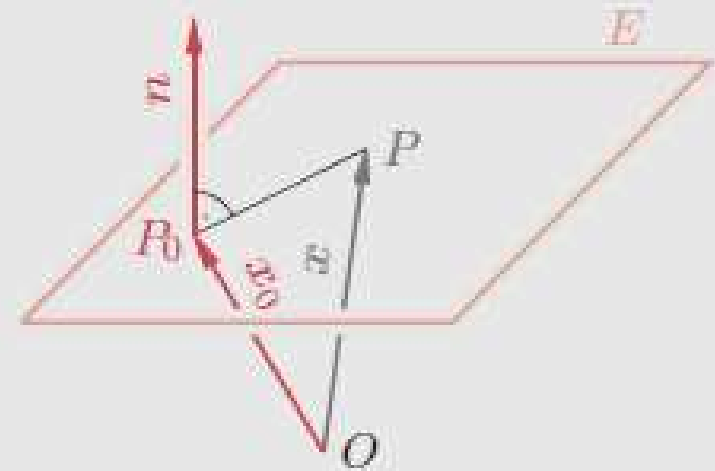


Parameterfreie Darstellung einer Ebene

Eine Ebene E durch den Punkt P_0 mit dem Ortsvektor x_0 und dem Normalenvektor $n \neq 0$ kann man in Form einer Gleichung darstellen:

$$E: (x - x_0) \cdot n = 0.$$

Ein Punkt P mit dem Ortsvektor x liegt genau dann in der Ebene, wenn die Gleichung erfüllt ist.



Bei der parameterfreien Darstellung einer Ebene

$$E: n_x x + n_y y + n_z z = d$$

sind die Faktoren n_x , n_y und n_z die Koordinaten des Normalenvektors $n \neq 0$. Falls der Normalenvektor n ein Einheitsvektor ist, bezeichnet man die Darstellung als **Hessesche Normalenform**.



Darstellung einer Ebene mit und ohne Parameter

Die Umrechnung zwischen einer Parameterdarstellung und einer parameterfreien Darstellung einer Ebene

$$E: \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{a} + \mu \mathbf{b} \quad \Longleftrightarrow \quad (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

erfolgt mittels der Beziehung $\mathbf{n} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$.



Schnitt zweier Geraden

Die Schnittpunkte zweier Geraden g_1 und g_2 in Parameterdarstellung bestimmt man aus dem linearen Gleichungssystem

$$\left. \begin{array}{l} g_1: \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \lambda_1 \mathbf{a}_1 \\ g_2: \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 \end{array} \right\} \implies g_1 \cap g_2: \quad \mathbf{x}_1 + \lambda_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{x}_2 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$$

mit den beiden Unbekannten λ und μ . Falls das Gleichungssystem

- ▶ genau eine Lösung hat, dann besitzen die beiden Geraden einen Schnittpunkt,
- ▶ unendlich viele Lösungen hat, dann sind die beiden Geraden identisch,
- ▶ keine Lösung hat, dann sind die Geraden parallel oder windschief.



Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene

Die Schnittpunkte einer Geraden g mit einer Ebene E bestimmt man, indem man

- ▶ eine Parameterdarstellung der Geraden g und eine Parameterdarstellung der Ebene E gleichsetzt oder
- ▶ eine Parameterdarstellung der Geraden g in eine parameterfreie Gleichung der Ebene E einsetzt.



Schnitt zweier Ebenen

Die Schnittpunkte zweier Ebenen E_1 und E_2 bestimmt man, indem man

- ▶ die Parameterdarstellungen der beiden Ebenen gleichsetzt oder
- ▶ das Gleichungssystem aus den beiden Ebenengleichungen löst oder
- ▶ eine Parameterdarstellung einer Ebene in eine parameterfreie Gleichung der anderen Ebene einsetzt.

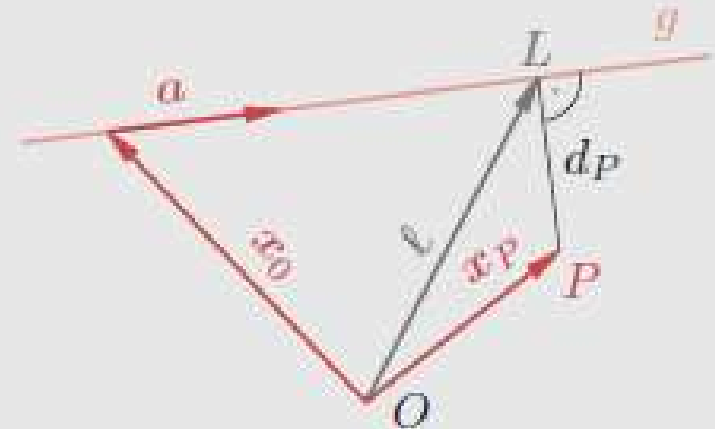
Abstand eines Punktes zu einer Geraden

Der Abstand des Punktes P mit dem Ortsvektor \mathbf{x}_P zur Geraden g

$$g: \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda \mathbf{a}$$

ist die Entfernung zwischen dem Punkt P und seinem Lotfußpunkt:

$$d_P = \left| \mathbf{x}_P - \left(\mathbf{x}_0 + \frac{(\mathbf{x}_P - \mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} \mathbf{a} \right) \right|.$$



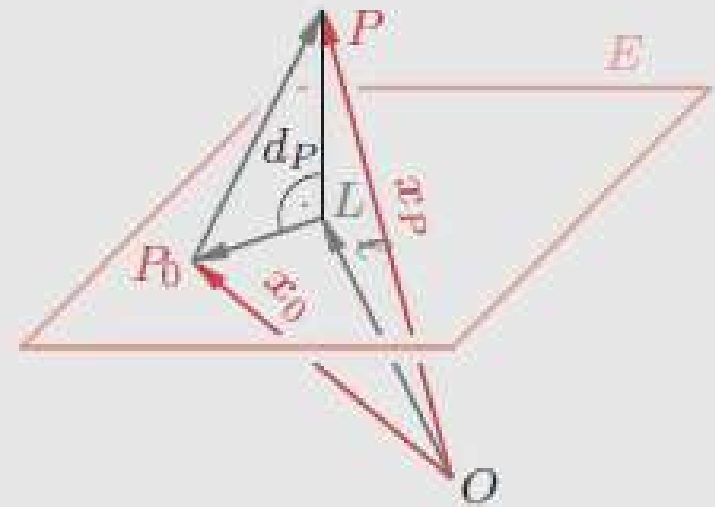
Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Mit der Hesseschen Normalenform einer Ebene

$$E: n_x x + n_y y + n_z z + d = 0,$$
$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1$$

berechnet man den Abstand eines Punktes P mit dem Ortsvektor x_P zur Ebene E durch Einsetzen von P in die Ebenengleichung:

$$d_P = |n_x x_P + n_y y_P + n_z z_P + d|.$$



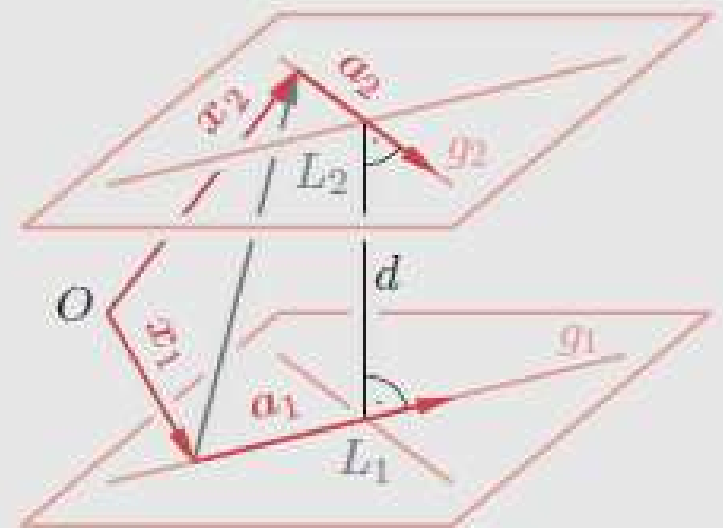
Windschiefe Geraden

Den Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$\begin{aligned} g_1: \quad \mathbf{x} &= \mathbf{x}_1 + \lambda_1 \mathbf{a}_1 \\ g_2: \quad \mathbf{x} &= \mathbf{x}_2 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 \end{aligned}$$

kann man durch folgende Formel berechnen:

$$d = \frac{|(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)|}{|\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2|}.$$



Den Winkel zwischen den beiden Geraden g_1 und g_2 in der Darstellung

$$g_1: \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \lambda_1 \mathbf{a}_1, \quad g_2: \quad \mathbf{x} = \mathbf{x}_2 + \lambda_2 \mathbf{a}_2$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\cos \angle(g_1, g_2) = \frac{|\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2|}{|\mathbf{a}_1| |\mathbf{a}_2|}.$$

Winkel zwischen Gerade und Ebene

Den Winkel zwischen der Geraden g und der Ebene E in der Darstellung

$$g: \quad x = x_0 + \lambda a, \quad E: \quad n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\sin \angle(g, E) = \frac{|a \cdot n|}{|a| |n|}.$$



Bestimmung des Winkels eines Vektors zu einer Ebenen

Aufgabenstellung:

Die Vektoren ***a*** und ***b*** definieren eine Ebene. Der Vektor ***x*** schneidet diese Ebene. Berechnen Sie den Schnittwinkel α des Vektors ***x*** mit der Ebene.

Vorgehensweise:

Der resultierende Vektor einer Vektormultiplikation $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ steht immer senkrecht auf der Ebene, die von den Vektoren ***a*** und ***b*** gebildet wird. Einen Vektor, der senkrecht auf einer Ebene steht, nennt man auch Normalenvektor.

Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man den Winkel β des Vektors ***x*** zu der Normale der Ebene ***c*** berechnen. Der Schnittwinkel α ist dann $(90^\circ - \beta)$.

Winkel zwischen zwei Ebenen

Den Winkel zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2 in der Darstellung

$$E_1: n_{1x}x + n_{1y}y + n_{1z}z + d_1 = 0, \quad E_2: n_{2x}x + n_{2y}y + n_{2z}z + d_2 = 0$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\cos \angle (E_1, E_2) = \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|}.$$



Anatomie der komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl z kann in der folgenden Form dargestellt werden:

$$z = a + b \cdot i$$

a und b sind **reelle** Zahlen. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit \mathbb{C} bezeichnet und kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$\mathbb{C} = \{a + b \cdot i \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

a ist der **Realteil** der komplexen Zahl: $a = \operatorname{Re}(a + bi)$ $a = \Re(a + bi)$

b ist der **Imaginärteil** der komplexen Zahl: $b = \operatorname{Im}(a + bi)$ $b = \Im(a + bi)$.



Darstellung komplexer Zahlen

Die Notation in der Form $z = a + b i$ wird auch als ***kartesische*** (nach René Descartes) oder ***algebraische Form*** bezeichnet.

Die Bezeichnung *kartesisch* erklärt sich aus der Darstellung in der komplexen bzw. gaußschen Zahlenebene.

In der Elektrotechnik wird das kleine *i* schon für zeitlich veränderliche Ströme verwendet und kann zu Verwechslungen mit der imaginären Einheit *i* führen. Daher wird in diesem Bereich gemäß DIN 1302 der Buchstabe *j* verwendet.

Komplexe Zahlen können gemäß DIN 1304-1 und DIN 5483-3 unterstrichen dargestellt werden, um sie von reellen Zahlen zu unterscheiden.

Weitere Darstellungsformen für komplexe Zahlen sind die ***Exponentialform*** und die ***trigonometrische Form***.



Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Gemäß Definition entspricht die Addition komplexer Zahlen der Vektoraddition.

Addition: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Beispiel: $(3 + 2i) + (5 + 5i) = (3 + 5) + (2 + 5)i = 8 + 7i$

Subtraktion: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

Beispiel: $(5 + 5i) - (3 + 2i) = (5 - 3) + (5 - 2)i = 2 + 3i$



Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Die Multiplikation komplexer Zahlen ergibt sich mit der Definition $i^2 = -1$ durch einfaches Ausmultiplizieren und Neugruppieren.

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot i$$

Beispiel:

$$(2 + 5i) \cdot (3 + 7i) = (2 \cdot 3 + 2 \cdot 7i) + (5i \cdot 3 + 5i \cdot 7i) = 6 + 14i + 15i - 35 = -29 + 29i$$

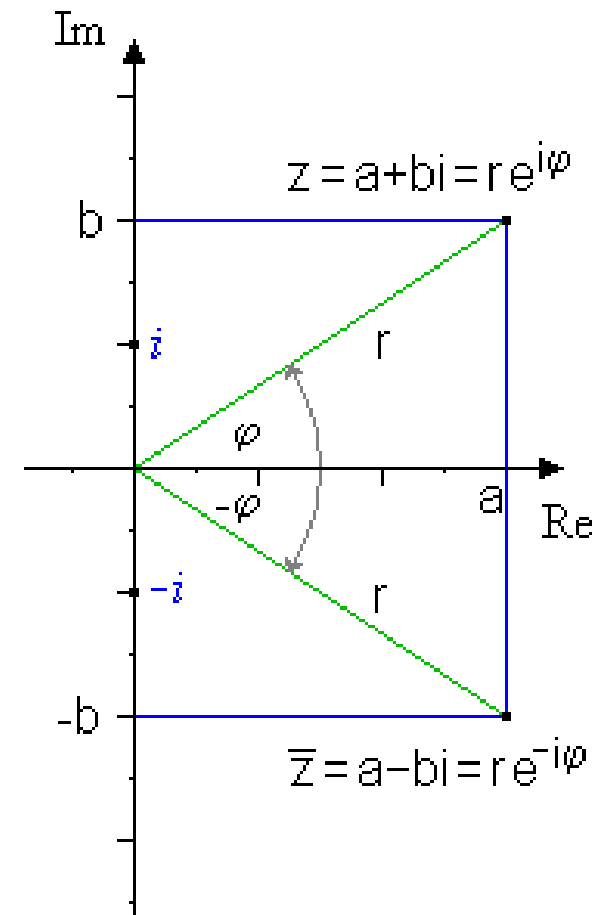
Die Division komplexer Zahlen lässt sich auf die Multiplikation zurückführen, allerdings möchte man vermeiden, dass i im Nenner steht. Daher muss der Bruch mit der zum Nenner **komplex konjugierten** Zahl erweitert werden.

Komplex konjugierte Zahlen

Dreht man das **Vorzeichen des Imaginärteils** b einer komplexen Zahl um, so erhält man die zu z komplex konjugierte (oder auch konjugiert komplexe) Zahl \bar{z} (manchmal auch z^* geschrieben).

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z = a + b \cdot i \mapsto \bar{z} = a - b \cdot i$$

Auffällig bei den zueinander komplex konjugierten Zahlen ist, dass sie in der Gaußschen Zahlenebene **symmetrisch zur reellen Achse** liegen, da sie sich nur durch das Vorzeichen im Imaginärteil unterscheiden.



Division komplexer Zahlen in algebraischer Form

Für $z \neq 0$ gilt:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1 \bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen erhalten wir:

$$\frac{y}{z} = \frac{y \bar{z}}{z \bar{z}} = \frac{y \bar{z}}{|z|^2}$$

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(ac + bd)}{c^2 + d^2} + \frac{(bc - ad)}{c^2 + d^2} i.$$



Der Betrag komplexer Zahlen

Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $z = a + b i$ ist folgendermaßen definiert:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Diese Definition des Betrags einer komplexen Zahl entspricht dem Abstand der Zahl (in der Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene) vom Ursprung des Koordinatensystems.

Der Betrag einer komplexen Zahl und der dazu konjugiert komplexen Zahl ist gleich, da bei der Definition einer konjugiert komplexen Zahl nur das Vorzeichen des b differiert und laut Definition des Betrages einer komplexen Zahl a und b quadriert werden, somit also der Unterschied des Vorzeichens ohne den Verlust einer weiteren Lösung wegfällt.

$$|z| = |\bar{z}|$$

Darstellung komplexer Zahlen in Polarform

Verwendet man anstelle der kartesischen Koordinaten a und b die Polarkoordinaten r und φ , so kann die komplexe Zahl in **Polarform** dargestellt werden.

Algebraische Form einer komplexen Zahl :

$$Z = a + b \cdot i$$

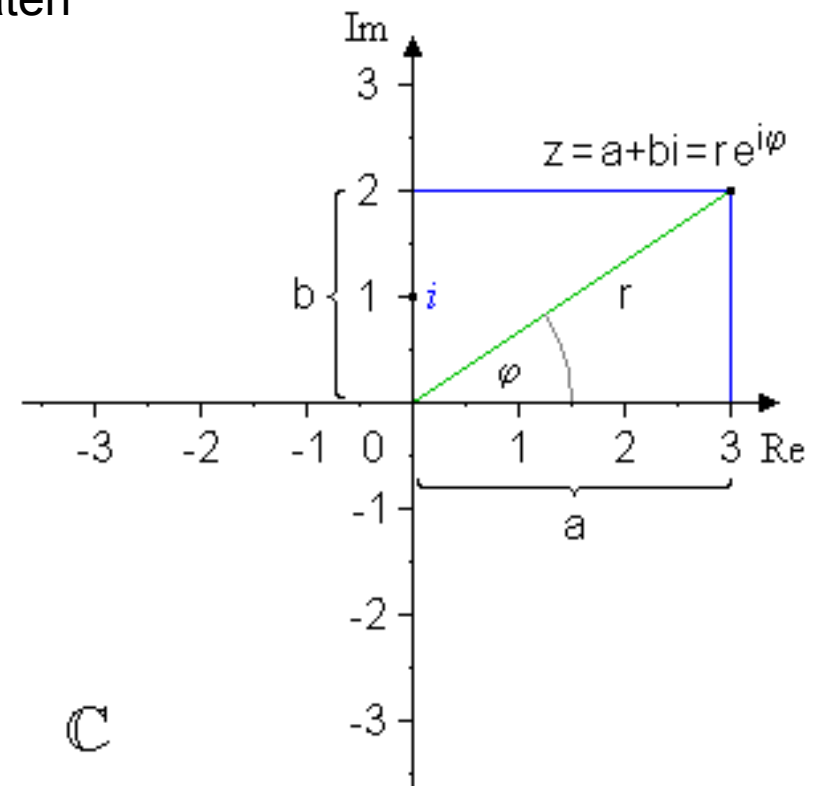
Trigonometrische Form einer komplexen Zahl:

$$Z = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

Exponentialform (Eulersche Form):

$$Z = r \cdot e^{i\varphi}$$

φ meist in rad
($360^\circ = 2\pi$)



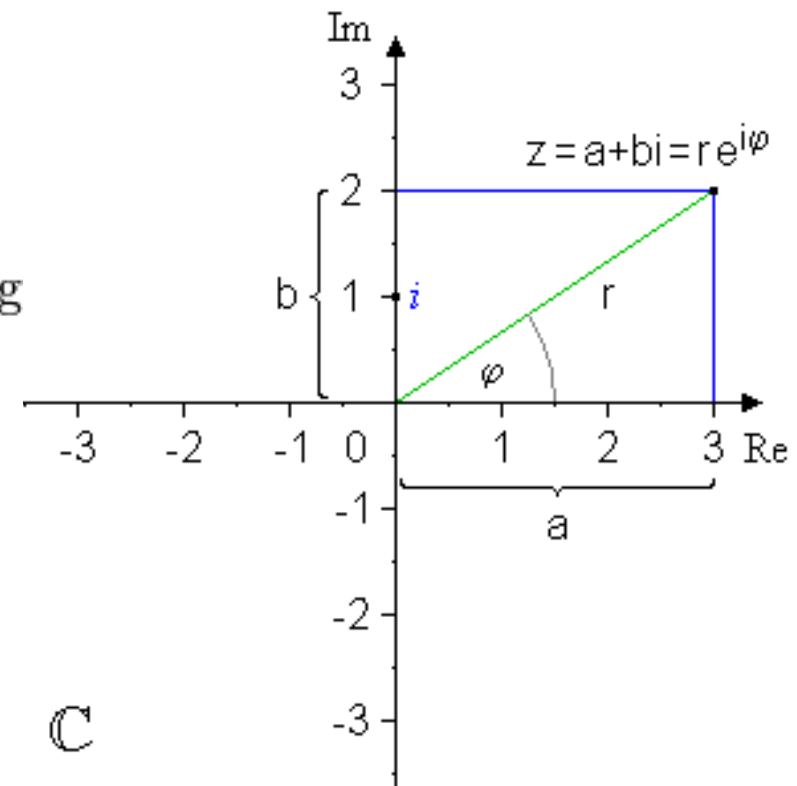
Umwandlung von algebraischer Form in Polarform

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan \frac{b}{a} & \text{für } a > 0, b \text{ beliebig} \\ \arctan \frac{b}{a} + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan \frac{b}{a} - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } a = 0, b < 0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } a = 0, b = 0 \end{cases}$$

für: $-\pi < \varphi \leq \pi$

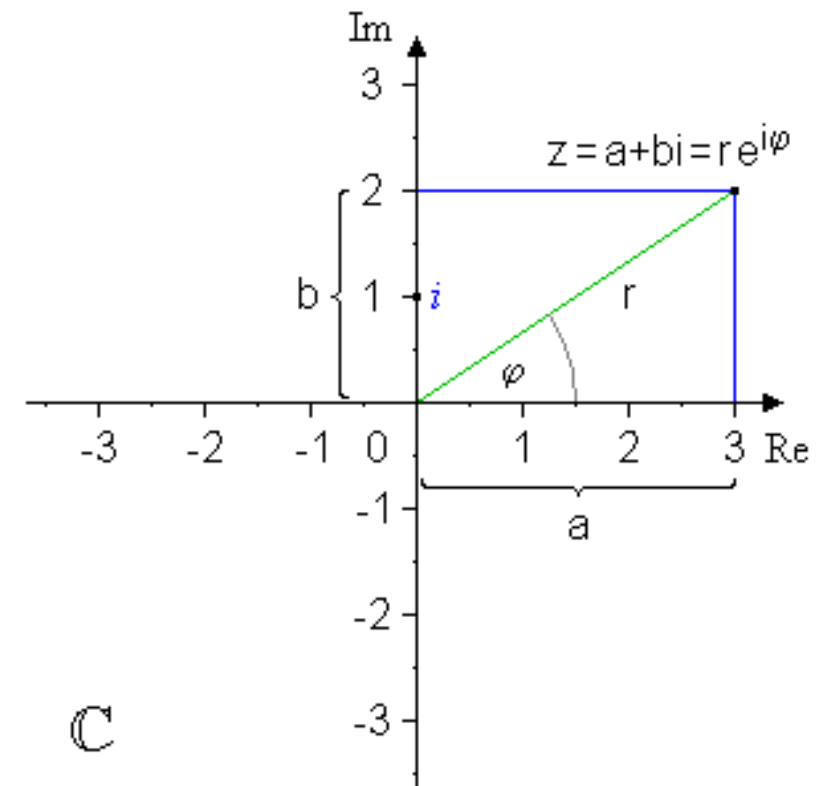


Umwandlung von Polarform in algebraische Form

$$z = a + bi$$

$$a = \operatorname{Re}(z) = r \cdot \cos \varphi$$

$$b = \operatorname{Im}(z) = r \cdot \sin \varphi$$



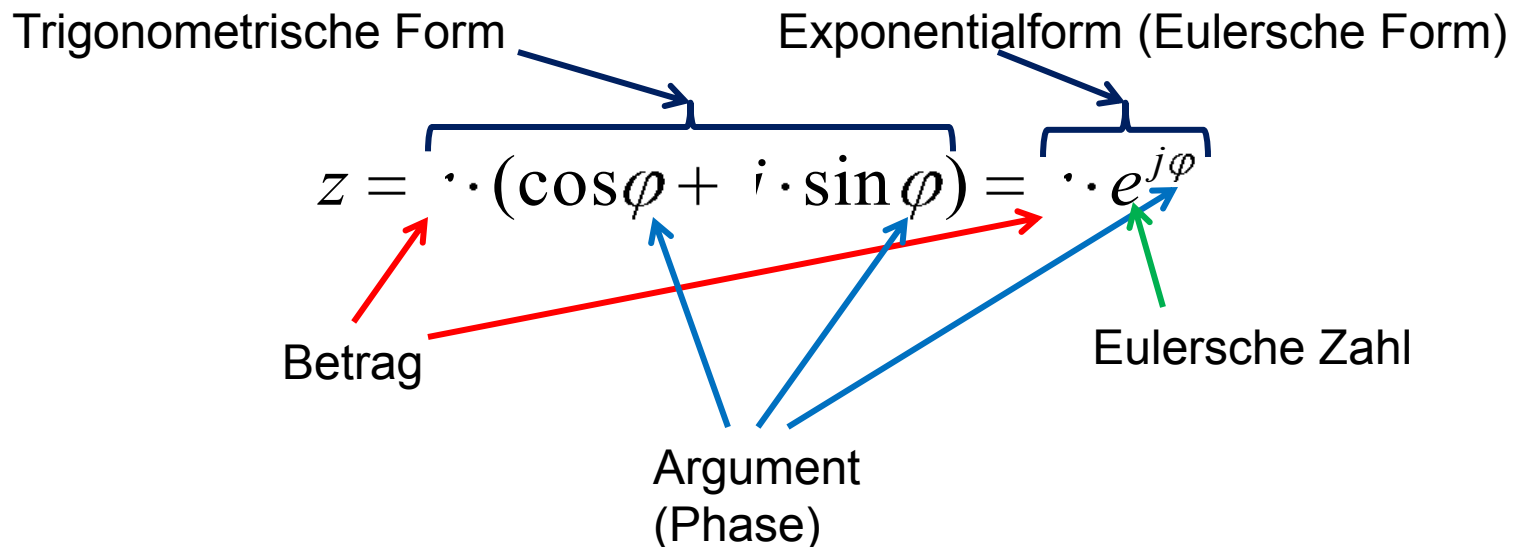
Darstellung einer komplexen Zahl in Polarform

Die Darstellung einer komplexen Zahl über den **Betrag** r und die **Phase** φ wird als **Polarform** bezeichnet.

Trigonometrische Form Exponentialform (Eulersche Form)

$$z = \underbrace{\quad \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \quad}_{\text{Trigonometrische Form}} = \underbrace{\quad \cdot e^{j\varphi} \quad}_{\text{Exponentialform (Eulersche Form)}}$$

Betrag Argument (Phase) Eulersche Zahl



Die Grundlage für die Darstellung in Exponentialform ist die Eulersche Formel:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \cdot \sin \varphi$$



Multiplikation und Division in der Polarform

Bei der Multiplikation in der Polarform werden die Beträge multipliziert und die Phasen addiert. Bei der Division wird der Betrag des Dividenden durch den Betrag des Divisors geteilt und die Phase des Divisors von der Phase des Dividenden subtrahiert:

Trigonometrische Form:

$$r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) \cdot s \cdot (\cos \psi + i \cdot \sin \psi) = r \cdot s \cdot [\cos(\varphi + \psi) + i \cdot \sin(\varphi + \psi)]$$

$$\frac{r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)}{s \cdot (\cos \psi + i \cdot \sin \psi)} = \frac{r}{s} \cdot [\cos(\varphi - \psi) + i \cdot \sin(\varphi - \psi)]$$

Exponentialform:

$$(r \cdot e^{i\varphi}) \cdot (s \cdot e^{i\psi}) = (r \cdot s) \cdot e^{i(\varphi+\psi)}$$

$$\frac{(r \cdot e^{i\varphi})}{(s \cdot e^{i\psi})} = \frac{r}{s} \cdot e^{i(\varphi-\psi)}$$

Potenzen

Natürliche Exponenten für die algebraische Form $z = a + bi$

$$z^n = \sum_{k=0, k \text{ gerade}}^n \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k}{2}} a^{n-k} b^k + i \sum_{k \text{ ungerade}}^n \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} a^{n-k} b^k.$$

Die n -te Potenz berechnet sich in der polaren Form:

$$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi} = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi)$$

Beliebige komplexe Exponenten:

$$z^\omega := \exp(\omega \cdot \ln z),$$



Radizieren (Wurzelziehen)

Üblicherweise wird die exponentielle (Eulersche) Darstellungsform der komplexen Zahl verwendet.

Bei der Berechnung der n -ten Wurzel der komplexen Zahl $z = re^{i\varphi}$ dient die Formel:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}},$$

wobei k die Werte $0, 1, \dots, n-1$ durchläuft. **Eine Zahl hat also n komplexe n -te Wurzeln.**



Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen werden in der algebraischen Form komponentenweise durchgeführt.

Die Multiplikation komplexer Zahlen kann je nach Vorgabe vorteilhaft in algebraischer Form oder in Exponentialform (Multiplikation der Beträge und Addition der Argumente (Winkel)) durchgeführt werden.

Bei der **Division** komplexer Zahlen werden in Exponentialform ihre Beträge dividiert und ihre Argumente (Winkel) subtrahiert, oder in algebraischer Form mit dem konjugierten multipliziert und durch dessen Betragsquadrat dividiert.

Beim **Potenzieren** einer komplexen Zahl mit einem reellen Exponenten wird ihr Betrag potenziert und ihr Argument (Winkel) mit dem Exponenten multipliziert.

Beim **Radizieren (Wurzelziehen)** einer komplexen Zahl mit einem reellen Exponenten wird ihr Betrag radiziert und ihr Argument (Winkel) durch den Exponenten dividiert. Hierdurch entsteht die erste Lösung. Bei einer n -ten Wurzel entstehen n Lösungen, die im Winkel von $2\pi / n$ um den Ursprung der gaußschen Ebene verteilt sind.

Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen (1)

Nach dem Superpositionsprinzip der Physik überlagern sich zwei Schwingungen $y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$ und $y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$ ungestört und ergeben die resultierende

$$y_{res} = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) = A_{res} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{res})$$

Die resultierende Amplitude A_{res} und die resultierende Phase φ_{res} lassen sich schrittweise aus den Amplituden A_1 und A_2 sowie den Phasenwinkeln φ_1 und φ_2 der Einzelschwingungen berechnen.

1. Übergang von der reellen Form zur komplexen Form:

Die Schwingungen y_1 und y_2 werden durch komplexe Funktionen dargestellt.

$$\underline{y}_1 = \underline{A}_1 \cdot e^{j\omega t} \quad \text{und} \quad \underline{y}_2 = \underline{A}_2 \cdot e^{j\omega t}$$

\underline{A}_1 und \underline{A}_2 sind dabei die komplexen Schwingungsamplituden (Zeiger)

$$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\varphi_1} \quad \text{und} \quad \underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\varphi_2}$$

Erforderlich sind dafür A_1 und φ_1 sowie A_2 und φ_2 .

Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen (2)

2. Superposition in komplexer Form:

Die komplexen Zeiger \underline{y}_1 und \underline{y}_2 werden zur Überlagerung gebracht und ergeben einen resultierenden komplexen Zeiger \underline{y}_{res} :

$$\underline{y}_{res} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = \underline{A}_1 \cdot e^{j\omega t} + \underline{A}_2 \cdot e^{j\omega t} = (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \cdot e^{j\omega t} = \underline{A}_{res} \cdot e^{j\omega t}$$

Die Addition der komplexen Amplituden erfolgt in algebraischer Form.

2a) Umwandlung in die algebraische Form

$$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\varphi_1} = A_1 \cdot \cos\varphi_1 + j \cdot A_1 \cdot \sin\varphi_1$$

$$\underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\varphi_2} = A_2 \cdot \cos\varphi_2 + j \cdot A_2 \cdot \sin\varphi_2$$

2b) Addition in algebraischer Form

$$\underline{A}_{res} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = A_1 \cdot \cos\varphi_1 + j \cdot A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2 + j \cdot A_2 \cdot \sin\varphi_2$$

2c) Rückwandlung des Ergebnisses in die trigonometrische Form

$$\underline{A}_{res} = A_{res} \cdot e^{j\varphi_{res}}$$



Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen (3)

3. Rücktransformation aus der komplexen Form in die reelle Form:

Die resultierende Schwingung $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ ist der Imaginärteil des resultierenden komplexen Zeigers \underline{y} :

$$y_{res} = \text{Im}(\underline{y}) = \text{Im}(\underline{A} \cdot e^{j\omega t}) = A_{res} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{res})$$

Zahlenfolge

Eine Folge ist eine Aufzählung von Objekten, mit der Besonderheit, dass es sich bei einer Folge immer um unendlich viele Objekte handelt. Mathematisch wird man der Unendlichkeit dadurch gerecht, dass man jeder natürlichen Zahl ein Folgenglied zuordnet.

Bei einer **Zahlenfolge** oder kurz **Folge** $(a_k) = a_1, a_2, a_3, \dots, a_k, \dots$ wird jeder natürlichen Zahl k ein **Folgenglied** a_k aus der Menge der reellen Zahlen zugeordnet:

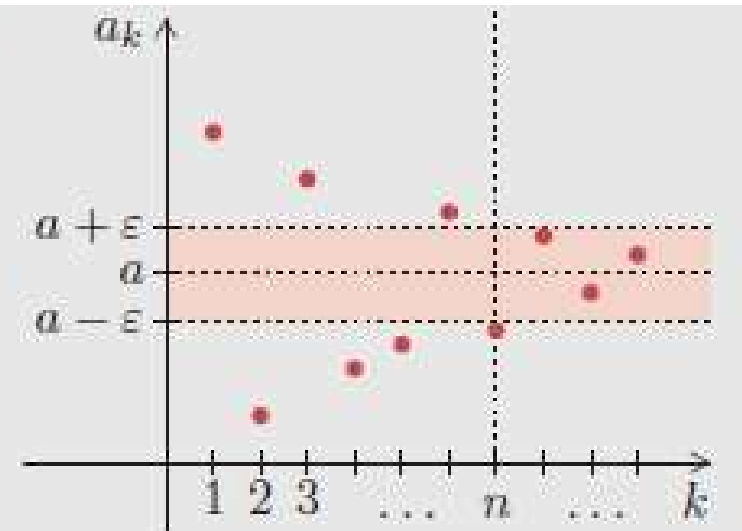
$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3, & \dots & k, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_1, & a_2, & a_3, & \dots & a_k, & \dots \end{array}$$

Grenzwert einer Zahlenfolge

Eine Zahlenfolge (a_k) besitzt den **Grenzwert** a , wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index n gibt, sodass $|a_k - a| < \varepsilon$ für alle natürlichen Zahlen $k > n$. Eine Zahlenfolge, die einen Grenzwert besitzt, nennt man **konvergent** und verwendet die Schreibweisen

$$(a_k) \rightarrow a \text{ für } k \rightarrow \infty \text{ oder } \lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a.$$

Eine Zahlenfolge, die keinen Grenzwert besitzt, nennt man **divergent**.





Reelle Funktion

Der Begriff der Funktion wird in der Mathematik sehr allgemein gefasst. Typischerweise definiert man eine Funktion als eine Abbildung von einer Menge in eine andere Menge. Wir wollen jedoch Abbildungen zwischen reellen Zahlen betrachten.

Unter einer **reellen Funktion** f versteht man eine Abbildung, die jeder reellen Zahl x aus einer **Definitionsmenge** $D \subset \mathbb{R}$ genau eine reelle Zahl y aus einer **Wertemenge** W zuordnet.

$$x \mapsto y = f(x), \quad x \in D.$$

Man bezeichnet x als **unabhängige Variable** und y als **abhängige Variable**.

Strenggenommen sollte man zwischen f und $f(x)$ unterscheiden. f ist der Name der Funktion und $f(x)$ ist der Wert, der x zugeordnet ist. Manchmal sagt man auch Definitionsbereich und Wertebereich anstelle von Definitionsmenge und Wertemenge.



Definitions- und Wertemenge

Maximaler Definitionsbereich, Definitionslücke

Oftmals wird der Definitionsbereich einer Funktion nicht explizit angegeben. In diesem Fall betrachtet man die Funktion auf dem maximal möglichen Definitionsbereich. Definitionslücken sind einzelne Stellen, die nicht im Definitionsbereich liegen.

Wertebereich

Zur Bestimmung des Wertebereichs einer Funktion benötigt man in der Regel einige Informationen über die Funktion, wie etwa die Extremwerte, die Monotonieeigenschaften und das asymptotische Verhalten.



Funktion als Abbildung einer Menge auf die andere

Eine Funktion f ordnet jedem Element x einer Definitionsmenge D genau ein Element y einer Zielmenge Z oder B zu:

$$f: D \rightarrow Z, x \mapsto y.$$

Die Umkehrung gilt nicht: Ein Element der Zielmenge muss (wenn überhaupt) nicht nur einem Element des Definitionsbereiches zugeordnet worden sein. Sind D und Z Teilmengen der reellen Zahlen, so nennt man f eine reelle Funktion.

Definitionsmenge: Die Definitionsmenge (oder Definitionsbereich) einer Funktion ist jene Teilmenge einer Grundmenge, für die im jeweiligen Zusammenhang eine wohldefinierte Aussage über die Funktion möglich ist. Die Definitionsmenge wird oft mit einem D abgekürzt, manchmal wird das D auch mit einem senkrechten Doppelstrich geschrieben.

Zielmenge: Die Zielmenge ist der Vorrat für mögliche Werte der Funktion f , es ist nicht zwingend erforderlich, dass diese auch tatsächlich alle durch die Funktion angenommen werden.

Bildmenge: Die Menge der Werte, die tatsächlich als Funktionswert der Funktion f erscheinen, ist die Bildmenge.



Umkehrfunktion

Das $^{-1}$ ist nicht mit einer negativen Potenz bezüglich der Multiplikation zu verwechseln; es handelt sich vielmehr um die Umkehrung bezüglich der Hintereinanderausführung (Verkettung) von Funktionen.

Die **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion** f^{-1} einer umkehrbaren Funktion f ist definiert durch

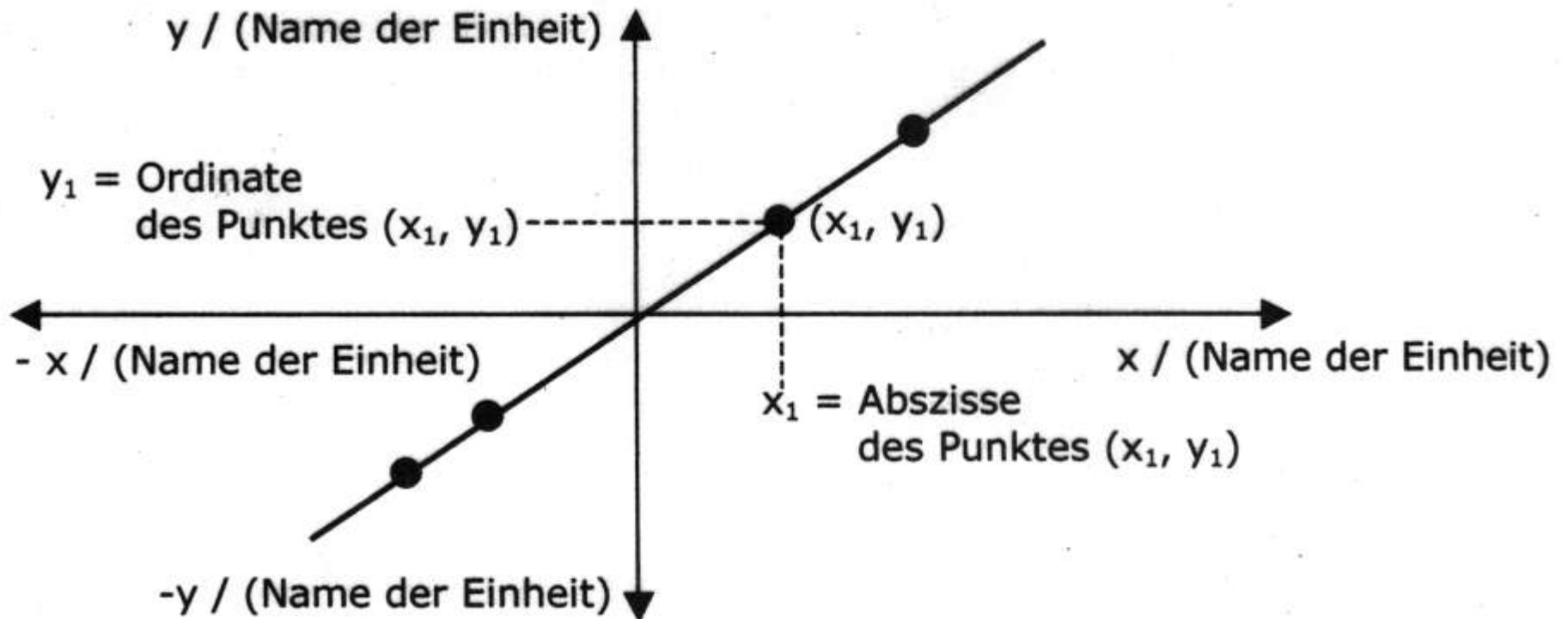
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f(f^{-1}(x)) = x.$$

Man bestimmt die Umkehrfunktion einer umkehrbaren Funktion f in zwei Schritten:

- (1) Durch Auflösen der Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x erhält man $x = f^{-1}(y)$.
- (2) Vertauschen von x und y ergibt eine neue Funktion $y = f^{-1}(x)$.

Durch das Vertauschen von x und y werden Definitionsbereich und Wertebereich vertauscht. Das Schaubild der Umkehrfunktion erhält man durch Spiegeln des Schaubildes der Funktion an der ersten Winkelhalbierenden.

Grafische Beschreibung einer Funktion

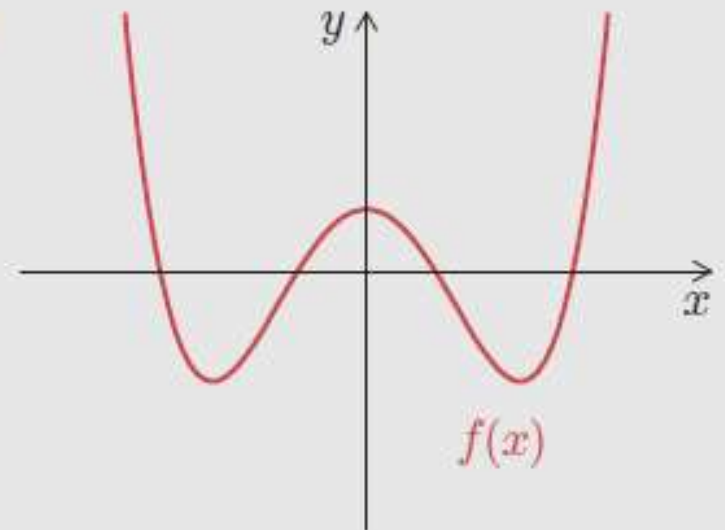


Gerade Funktion

Man bezeichnet f als eine **gerade Funktion** auf dem Intervall I , falls für alle $x \in I$

$$f(-x) = f(x).$$

Das Schaubild einer geraden Funktion ist symmetrisch zur y -Achse.

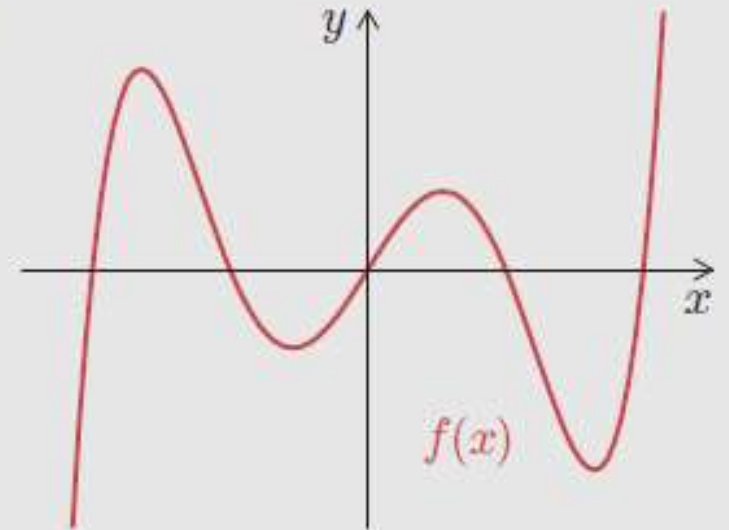


Ungerade Funktion

Man bezeichnet f als eine **ungerade Funktion** auf dem Intervall I , falls für alle $x \in I$

$$f(-x) = -f(x).$$

Das Schaubild einer ungeraden Funktion ist symmetrisch zum Ursprung.



Achsensymmetrische und punktsymmetrische Funktionen

Man bezeichnet f als eine **achsensymmetrische Funktion** zur Achse $x = x_0$ auf dem Intervall I , falls für alle $x \in I$

$$f(x_0 - x) = f(x_0 + x).$$

Das Schaubild ist symmetrisch zur Achse $x = x_0$.

Man bezeichnet f als eine **punktsymmetrische Funktion** zum Punkt $(x_0 | y_0)$ auf dem Intervall I , falls für alle $x \in I$

$$y_0 - f(x_0 - x) = f(x_0 + x) - y_0.$$

Das Schaubild ist symmetrisch zum Punkt $(x_0 | y_0)$.



Periodische Funktion

Eine Funktion f ist **periodisch** mit der **Periode** $p > 0$, wenn

$$f(x + p) = f(x)$$

für alle reellen Zahlen x .

Falls p eine Periode der Funktion f ist, dann ist auch $k p$ für alle ganzen Zahlen $k \in \mathbb{Z}$ eine Periode von f . Charakterisierend für periodische Funktionen ist die kleinste positive Periode. Bei periodischen Funktionen wiederholt sich eine Art Funktionsprototyp im Abstand der kleinsten positiven Periode.

Bei einer zeitabhängigen Funktion mit Periode p bezeichnet man die Periode auch als **Schwingungsdauer** T und nennt $f = \frac{1}{T}$ die **Frequenz**.



Monotonie von Funktionen

Eine Funktion f ist auf dem Intervall I

- ▶ **monoton fallend**, falls $f(x_1) \geq f(x_2)$,
- ▶ **streng monoton fallend**, falls $f(x_1) > f(x_2)$,
- ▶ **monoton wachsend**, falls $f(x_1) \leq f(x_2)$,
- ▶ **streng monoton wachsend**, falls $f(x_1) < f(x_2)$,

für alle Zahlen x_1 und x_2 aus dem Intervall I mit der Eigenschaft $x_1 < x_2$.

Eine Funktion, die auf dem gesamten Definitionsbereich D entweder streng monoton wachsend oder auf dem gesamten Definitionsbereich D streng monoton fallend ist, ist auf dem Definitionsbereich D umkehrbar.

Beschränktheit von Funktionen

Eine Funktion f ist auf dem Intervall I

- ▶ **nach unten beschränkt**, falls die Funktionswerte aller Zahlen x aus dem Intervall I oberhalb einer unteren Schranke liegen,
- ▶ **nach oben beschränkt**, falls die Funktionswerte aller Zahlen x aus dem Intervall I unterhalb einer oberen Schranke liegen.

Eine Funktion, die nach unten und nach oben beschränkt ist, heißt **beschränkt**.

Die kleinste obere Schranke heißt obere Grenze oder **Supremum** der Funktion.

Die größte untere Schranke heißt untere Grenze oder **Infinum** der Funktion.



Lokale Extremwerte einer Funktion

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0

- ▶ ein **lokales Minimum**, wenn alle anderen Funktionswerte in der Umgebung von x_0 größer sind als der Funktionswert an der Stelle x_0 :

$$f(x_0) < f(x), \quad x \neq x_0.$$

Einen entsprechenden Punkt im Schaubild bezeichnet man als **Tiefpunkt**.

- ▶ ein **lokales Maximum**, wenn alle anderen Funktionswerte in der Umgebung von x_0 kleiner sind als der Funktionswert an der Stelle x_0 :

$$f(x_0) > f(x), \quad x \neq x_0.$$

Einen entsprechenden Punkt im Schaubild bezeichnet man als **Hochpunkt**.

Grenzwert von Funktionen

Die Funktion f hat an der Stelle x_0 den **Grenzwert** G , wenn für jede gegen x_0 konvergente Zahlenfolge (x_n) die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))$ gegen G konvergiert. Man verwendet die Schreibweise $f(x) \rightarrow G$ für $x \rightarrow x_0$ oder $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = G$.

Wenn f und g Funktionen sind mit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = F$ und $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = G$, dann gilt:

- ▶ Es existiert auch der Funktionsgrenzwert von $f(x) \pm g(x)$ an der Stelle x_0 , nämlich $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm g(x)) = F \pm G$.
- ▶ Es existiert auch der Funktionsgrenzwert von $f(x) \cdot g(x)$ an der Stelle x_0 , nämlich $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$.
- ▶ Es existiert auch der Funktionsgrenzwert von $\frac{f(x)}{g(x)}$ an der Stelle x_0 , nämlich

$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{F}{G}$. Das gilt nur, wenn die Funktion $g(x)$ in einer Umgebung von x_0 und der Grenzwert G nicht null sind.



Stetigkeit

Eine Funktion f heißt **stetig** an der Stelle x_0 , wenn der Grenzwert der Funktion für x gegen x_0 existiert und gleich dem Funktionswert an der Stelle x_0 ist, falls also gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Man nennt eine Funktion stetig auf einem Intervall, wenn sie an allen Stellen des Intervalls stetig ist.

Eine Funktion ist genau dann stetig an der Stelle x_0 , wenn alle folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Die Funktion ist an der Stelle x_0 selbst und in einer Umgebung der Stelle x_0 definiert.
- (2) Der Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0 existiert. Insbesondere müssen der linksseitige Grenzwert G_L und der rechtsseitige Grenzwert G_R an der Stelle x_0 existieren und gleich sein.
- (3) Grenzwert und Funktionswert stimmen an der Stelle x_0 überein.

Hebbare Unstetigkeitsstelle

Unstetigkeitsstellen

Man unterscheidet folgende Arten von Unstetigkeitsstellen:

- ▶ Hebbare Unstetigkeitsstelle,
- ▶ Unstetigkeitsstelle 1. Art oder Sprungstelle,
- ▶ Unstetigkeitsstelle 2. Art, etwa eine Polstelle oder eine Oszillationsstelle.

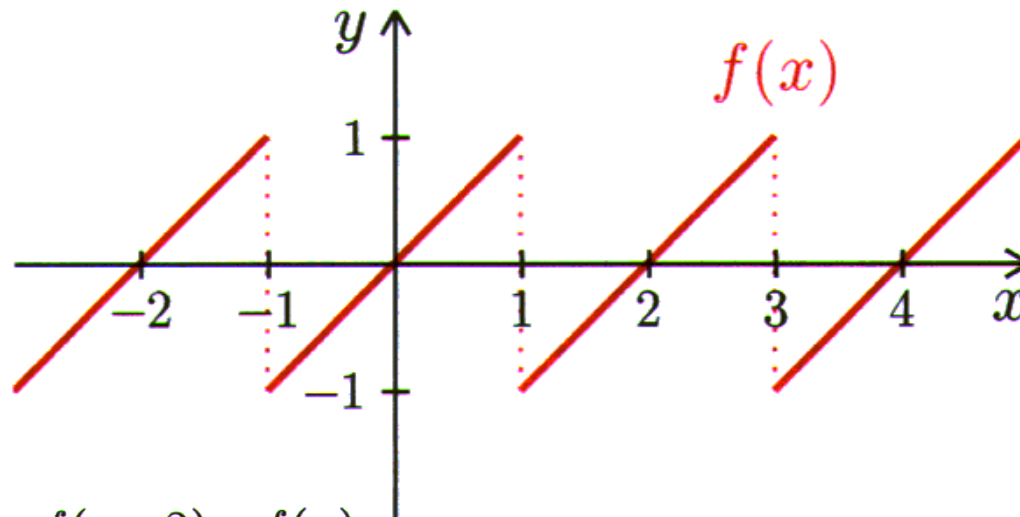
Wenn bei einer Funktion f der linksseitige Grenzwert $G_L = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $G_R = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ an der Stelle x_0 existieren und gleich sind, also $G_L = G = G_R$, aber nicht mit Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmen oder die Funktion f an der Stelle x_0 nicht definiert ist, dann kann man durch

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_0, \\ G & \text{für } x = x_0, \end{cases}$$

eine neue Funktion definieren, die an der Stelle x_0 stetig ist. Die Stelle x_0 heißt **hebbare Unstetigkeitsstelle**.

Unstetigkeitsstelle 1. Art

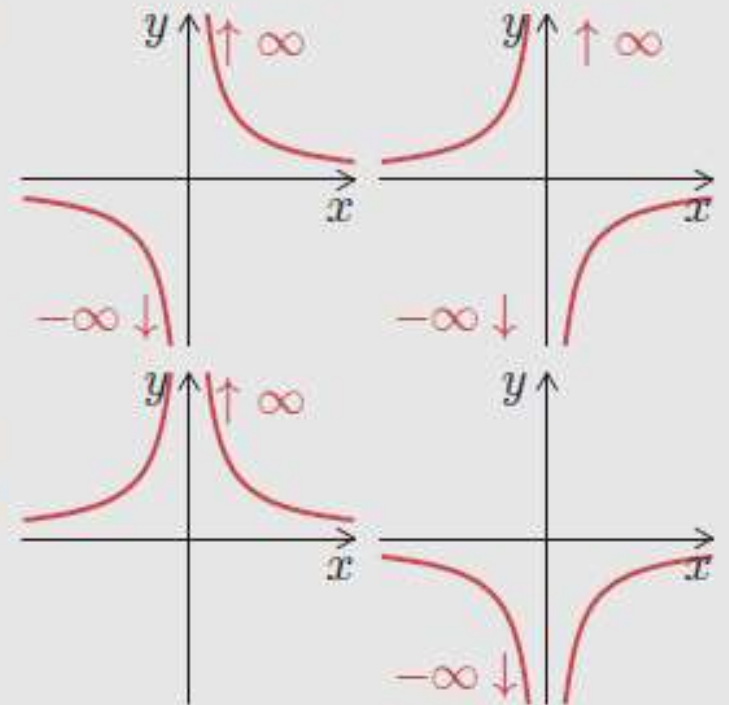
Wenn bei einer Funktion f der linksseitige Grenzwert $G_L = \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $G_R = \lim_{x \rightarrow x_0+} f(x)$ an der Stelle x_0 existieren, aber nicht gleich sind, also $G_L \neq G_R$, dann bezeichnet man diese Unstetigkeitsstelle als **Sprungstelle** oder **Unstetigkeitsstelle 1. Art**.



$$f(x) = x \text{ für } x \in [-1, 1], \quad f(x+2) = f(x)$$

Unstetigkeitsstelle 2. Art

Man nennt die Stelle x_0 eine **Polstelle** oder kurz **Pol** einer Funktion f , wenn der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle x_0 uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$ sind. Eine Polstelle ist eine **Unstetigkeitsstelle 2. Art**. Das Schaubild der Funktion besitzt an einer Polstelle eine **senkrechte Asymptote**. Bei Polstellen mit **Vorzeichenwechsel** findet ein Übergang der Funktionswerte von $-\infty$ nach ∞ oder von ∞ nach $-\infty$ statt. Bei Polstellen ohne Vorzeichenwechsel sind entweder beide uneigentliche Grenzwerte ∞ oder beide $-\infty$.



Grenzwerte für $x \rightarrow \infty$

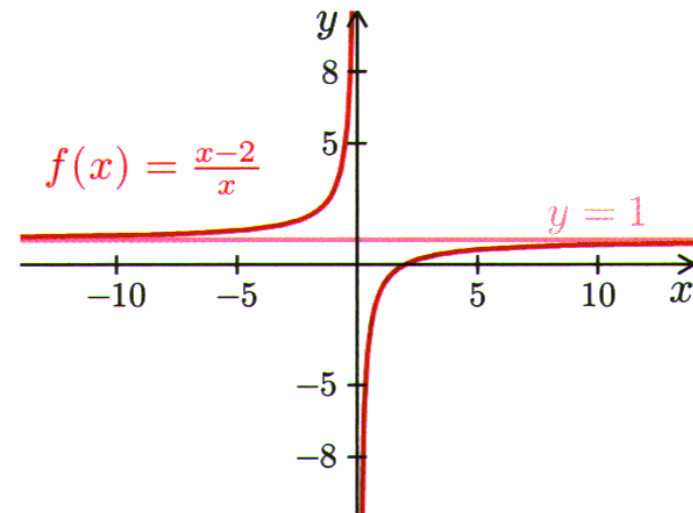
Besitzt eine Funktion für x gegen ∞ den Grenzwert g , also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = g,$$

dann ist die horizontale Gerade $y = g$ eine **waagrechte Asymptote** für $x \rightarrow \infty$. Entsprechendes gilt für $x \rightarrow -\infty$.

$$f(x) = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 1) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{2}{x} = 0.$$





Konvergenz / Divergenz

Der Limes oder Grenzwert einer Funktion an einer bestimmten Stelle ist derjenige Wert, dem sich die Funktion in der Umgebung der betrachteten Stelle annähert.

Ein solcher Grenzwert existiert jedoch nicht in allen Fällen. Existiert der Grenzwert, so **konvergiert** die Funktion, andernfalls **divergiert** sie.

Bestimmte Divergenz:

Bestimmte Divergenz gegen ∞ (bzw. $-\infty$) liegt vor, wenn eine Funktion jede reelle Zahl irgendwann überschreitet und dann darüber bleibt (bzw. jede reelle Zahl unterschreitet und dann darunter bleibt).

Die Funktion divergiert bestimmt gegen ∞ (bzw. $-\infty$).



Eigenschaften von Funktionen - „Steckbrief“

Abbildungsvorschrift

maximaler Definitionsbereich

Definitionslücken

Nullstellen

Polstellen

Beschränktheit

Supremum

Infimum

Maximum

Minimum

Wertebereich

Periodizität

Symmetrie

Monotonie

Umkehrfunktion

Stetigkeit

Konvergenz / Divergenz

Grenzwert für $x \rightarrow \infty$

Graph



Elementare Funktionen

Die elementaren Funktionen sind in der Mathematik immer wieder auftauchende, grundlegende Funktionen, aus denen sich viele andere Funktionen mittels der Grundrechenarten, Verkettung, Differentiation oder Integration bilden lassen. Dabei gibt es keine allgemeingültige Definition, wann eine Funktion elementar genannt wird und wann nicht.

Die elementaren Funktionen ergeben sich oftmals als Lösungen einer einfachen Differential- oder Funktionalgleichung, und sind deshalb auch für viele Naturwissenschaften wie Physik oder Chemie grundlegend, weil sie immer wieder in den unterschiedlichsten Zusammenhängen auftreten.

- die Potenzfunktionen
- die Radizierung bzw. das Wurzelziehen als Umkehrung der Potenzfunktionen
- die Exponentialfunktion
- der natürliche Logarithmus als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion
- die trigonometrischen Funktionen
- die Arkusfunktionen als Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen
- die hyperbolischen Funktionen
- weitere ...



Stetigkeit elementarer Funktionen

Stetigkeit elementarer Funktionen

Alle elementaren Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich überall stetig.

Wenn f und g stetige Funktionen an der Stelle x_0 sind, dann gilt:

- ▶ Die Funktion $f \pm g$ ist auch stetig in x_0 .
- ▶ Die Funktion $f \cdot g$ ist auch stetig in x_0 .
- ▶ Die Funktion $\frac{f}{g}$ ist auch stetig in x_0 , falls $g(x_0) \neq 0$.

Wenn g eine stetige Funktion an der Stelle x_0 ist und f eine stetige Funktionen an der Stelle $f(x_0)$ ist, dann gilt: Die Funktion $f \circ g$ ist auch stetig an der Stelle x_0 .



Potenzfunktionen

Eine Funktion f , die sich in der Form

$$f(x) = a x^n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{R}$$

darstellen lässt, bezeichnet man als **Potenzfunktion**.

Potenzfunktionen mit positiver Hochzahl sind für alle reellen Zahlen definiert, Potenzfunktionen mit negativer Hochzahl sind für alle reellen Zahlen mit Ausnahme der Null definiert. Das Schaubild einer Potenzfunktion mit gerader Hochzahl ist spiegelsymmetrisch zur y -Achse, das Schaubild einer Potenzfunktion mit ungerader Hochzahl ist spiegelsymmetrisch zum Ursprung.

Polynomfunktion

Eine Funktion f , die sich in der Form

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad a_n \neq 0,$$

darstellen lässt, bezeichnet man als **Polynom** oder **ganzrationale Funktion** vom Grad n . Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ sind dabei beliebige Zahlen, wobei allerdings der höchste Koeffizient a_n nicht null sein darf.

Die beiden Polynome

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \quad g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$$

sind genau dann identisch, wenn alle ihre entsprechenden Koeffizienten identisch sind:

$$a_0 = b_0, \quad a_1 = b_1, \quad a_2 = b_2, \quad \dots, \quad a_n = b_n.$$

Eigenschaften von Polynomen

Die Multiplikation eines Polynoms vom Grad n mit einem Polynom vom Grad m ergibt ein Polynom vom Grad $n + m$.

Bei der **Polynomdivision** teilt man das Polynom f vom Grad n durch das Polynom g vom Grad m und erhält dann ein neues Polynom h vom Grad $n - m$ und eventuell noch ein Restpolynom r :

$$f(x) : g(x) = h(x) + r(x) : g(x).$$

Wenn die Polynomdivision $f(x) : g(x) = h(x)$ ohne Rest aufgeht, dann hat man das Polynom f in ein Produkt der beiden Polynome g und h zerlegt:

$$f(x) = g(x) h(x).$$



Linearfaktor

Falls x_0 eine Nullstelle des Polynoms f vom Grad n ist, geht die Polynomdivision

$$f(x) : (x - x_0) = h(x)$$

ohne Rest auf und man kann f in der Form $f(x) = h(x)(x - x_0)$ darstellen. Dabei ist h ein Polynom vom Grad $n - 1$. Man bezeichnet $(x - x_0)$ als **Linearfaktor** von f .

Falls das Polynom f vom Grad n den Linearfaktor $(x - x_0)$ p -fach enthält, also

$$f(x) = h(x)(x - x_0)^p,$$

und das Polynom h vom Grad $n - p$ an der Stelle x_0 nicht null ist, dann bezeichnet man x_0 als **p -fache Nullstelle** oder als eine **Nullstelle mit Vielfachheit p** von f .

Linearfaktoren und Nullstellen

Ein Polynom vom Grad n lässt sich genau dann komplett in Linearfaktoren zerlegen, wenn es genau n Nullstellen hat. Dabei werden mehrfache Nullstellen entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt.

Ein Polynom vom Grad n hat höchstens n Nullstellen.

Jedes Polynom lässt sich in ein Produkt aus Polynomen vom Grad 1 oder 2 zerlegen. Polynome vom Grad 2, die keine Nullstellen besitzen,

$$h(x) = x^2 + bx + c \quad \text{mit} \quad b^2 - 4c < 0,$$

verwendet man nur dann, wenn eine Zerlegung in Linearfaktoren nicht möglich ist.

Lösung der Quadratischen Gleichung

allgemeine Form

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0)$$

„Mitternachtsformel“

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Normalform

$$x^2 + px + q = 0 \quad (p, q \in \mathbb{R})$$

$$p = \frac{b}{a} \quad q = \frac{c}{a}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Horner-Schema

Beim Horner-Schema verwendet man für Polynome eine Darstellung der Form

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = (\dots (a_n x + a_{n-1}) x + \dots) x + a_0.$$

Dadurch kann man Funktionswerte ohne die explizite Bestimmung der Potenzen x^2, x^3, \dots, x^n berechnen.

Horner-Schema: Vorgehensweise (1)

In die 1. Zeile schreibt man die Polynomkoeffizienten in der Reihenfolge fallender Potenzen.

Fehlen gewisse Potenzen (unvollständiges Polynom), so sind die entsprechenden Koeffizienten gleich Null und müssen im Horner-Schema berücksichtigt werden.

	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0		$a_3 x_0$	$(a_2 + a_3 x_0) x_0$	$(a_1 + a_2 x_0 + a_3 x_0^2) x_0$
	a_3	$a_2 + a_3 x_0$	$a_1 + a_2 x_0 + a_3 x_0^2$	$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3$
	\uparrow b_2	\uparrow b_1	\uparrow b_0	\uparrow $f(x_0)$

Horner-Schema: Vorgehensweise (2)

Die zweite Zeile bleibt zunächst frei.

Die dritte Zeile beginnt mit dem Koeffizienten a_3 , der aus der ersten Zeile übernommen wird.

Dieser wird mit dem x-Wert x_0 multipliziert und das Ergebnis $x_0 a_3$ in die zweite Zeile unter den Koeffizienten a_2 gesetzt und zu diesem addiert. Das Ergebnis dieser Addition wird unter dem Koeffizienten a_2 gespeichert.

Jetzt wird die in der dritten Zeile unterhalb von a_2 stehende Zahl $a_2 + a_3 x_0$ mit dem x-Wert x_0 multipliziert und das Ergebnis $(a_2 + a_3 x_0) x_0 = a_2 x_0 + a_3 x_0^2$ in die zweite Zeile unter den Koeffizienten a_1 gesetzt und zu diesem addiert. Sinngemäß geht es mit dem Koeffizienten a_0 weiter, bis das Horner-Schema vollständig ausgefüllt ist.

Die in der 3. Zeile stehenden Zahlenwerte sind der Reihe nach die Koeffizienten aus der Zerlegung und der Funktionswert $f(x_0)$. Wenn dieser Null ist, dann ist bei x_0 eine Nullstelle.

Das Horner-Schema ist sinngemäß auch auf Polynomfunktionen höheren Grades ($n > 3$) anwendbar.

Gebrochenrationale Funktionen

Eine Funktion f , die sich als Quotient zweier Polynome, also in der Form

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \dots + b_mx^m}, \quad a_n \neq 0, b_m \neq 0,$$

darstellen lässt, bezeichnet man als **gebrochenrationale Funktion**. Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ und $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_m$ sind dabei beliebige Zahlen, wobei allerdings die höchsten Koeffizienten a_n und b_m nicht null sein dürfen.

Nullstellen und Definitionslücken

Bei einer gebrochenrationalen Funktion sind die Nullstellen des Nenners Definitionslücken der Funktion.

Die Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion sind die Nullstellen des Polynoms im Zähler, falls sie nicht gleichzeitig auch Nullstellen des Nenners sind.

Wenn bei einer gebrochenrationalen Funktion x_0 eine gemeinsame Nullstelle von Zähler und Nenner ist, dann lässt sich der Linearfaktor $(x - x_0)$ kürzen. Dabei kann eine Definitionslücke weggekürzt werden.



Echt und unecht gebrochenrationale Funktionen

Falls bei einer gebrochenrationalen Funktion der Grad des Zählerpolynoms größer oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms ist, nennt man die Funktion **unecht gebrochenrational** und sonst **echt gebrochenrational**.

Durch Polynomdivision kann man jede unecht gebrochenrationale Funktion zerlegen in eine Summe aus einem Polynom und einer echt gebrochenrationalen Funktion.

Partialbrüche für Linearfaktoren

Jeder Nennernullstelle x_0 einer echt gebrochenrationalen Funktion ordnet man einen Partialbruch zu. Die Form des Partialbruches hängt dabei wie folgt von der Vielfachheit der Nullstelle x_0 ab:

$$\begin{array}{ll} \text{einfache Nullstelle} & \Rightarrow \frac{A_1}{x - x_0} \\ \text{zweifache Nullstelle} & \Rightarrow \frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} \\ \vdots & \\ \text{\textit{p}-fache Nullstelle} & \Rightarrow \frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \dots + \frac{A_p}{(x - x_0)^p} \end{array}$$

Die Konstanten A_1, A_2, \dots, A_p bestimmt man durch Koeffizientenvergleich.

Sekante und Differenzenquotient

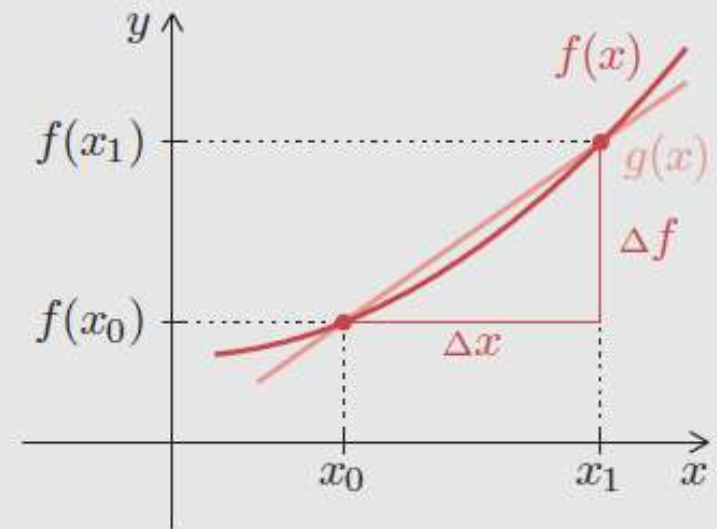
Eine **Sekante** einer Funktion f ist eine Gerade durch zwei Punkte des Schaubildes von f . Das Verhältnis der Differenzen der Funktionswerte und der x -Werte

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

beschreibt die Steigung der Sekante

$$g(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

und wird als **Differenzenquotient** bezeichnet.



Tangente und Differenzialquotient

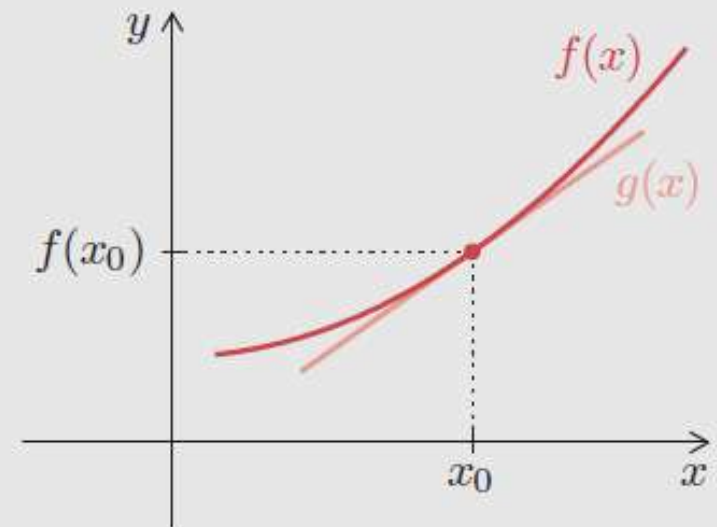
Eine **Tangente** einer Funktion f ist eine Gerade durch einen Punkt des Schaubildes von f . Die Tangente berührt das Schaubild von f . Der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0}$$

beschreibt die Steigung der Tangente

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

und wird als **Differenzialquotient** bezeichnet.

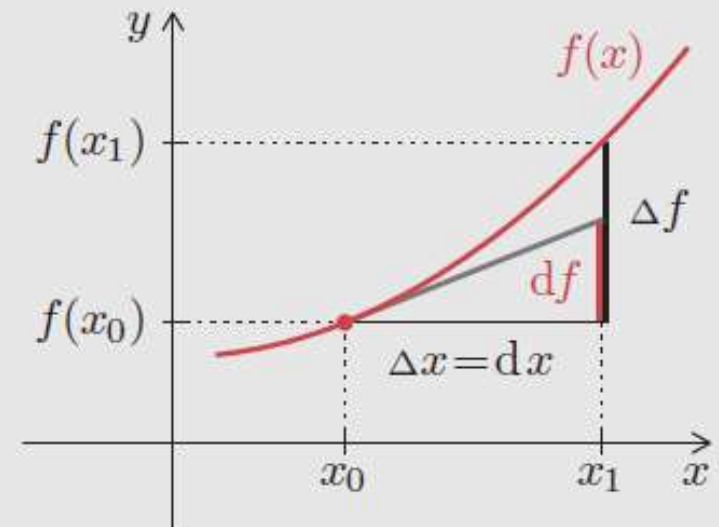


Differenzial

Das **Differenzial** einer Funktion f an der Stelle x_0 ist definiert durch

$$df|_{x_0} = f'(x_0) dx.$$

Es beschreibt die Veränderung des y -Wertes entlang der Tangente an der Stelle x_0 , wenn sich die Variable x um den Wert dx ändert.



Das Differenzial der Funktion f an der Stelle x_0 liefert für kleine Änderungen Δx eine gute Näherung für die tatsächliche Änderung des Funktionswerts:

$$df|_{x_0} = f'(x_0) \Delta x \approx \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$



Ableitungsfunktion

Ist eine Funktion f differenzierbar, so kann man eine neue Funktion f' dadurch definieren, dass man jedem Wert x die Steigung der Tangente an der Stelle x zuordnet:

$$x \mapsto f'(x).$$

Ableitungsfunktionen werden oft einfach auch als Ableitungen bezeichnet.

Ableitungsfunktionen werden mithilfe des Grenzwertes von Differenzenquotienten oder mithilfe von geeigneten Ableitungstechniken durchgeführt.

Beim Ableiten von Funktionen ändern sich die Symmetrieeigenschaften.



Ableitung der Potenzfunktion

Wir berechnen die Ableitungsfunktion der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ für natürliche Zahlen n mithilfe des Grenzwertes des Differenzenquotienten

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{n x^{n-1} \Delta x + \dots + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} n x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^{n-1} = n x^{n-1}$$

Die Ableitungsfunktion einer geraden Funktion ist eine ungerade Funktion und die Ableitungsfunktion einer ungeraden Funktion ist eine gerade Funktion.



Ableitungen der wichtigsten Funktionen

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R})$	$a x^{a-1}$	$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Ableitungsregeln

Faktorregel $(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x)$

Summenregel $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

Produktregel $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Quotientenregel $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$

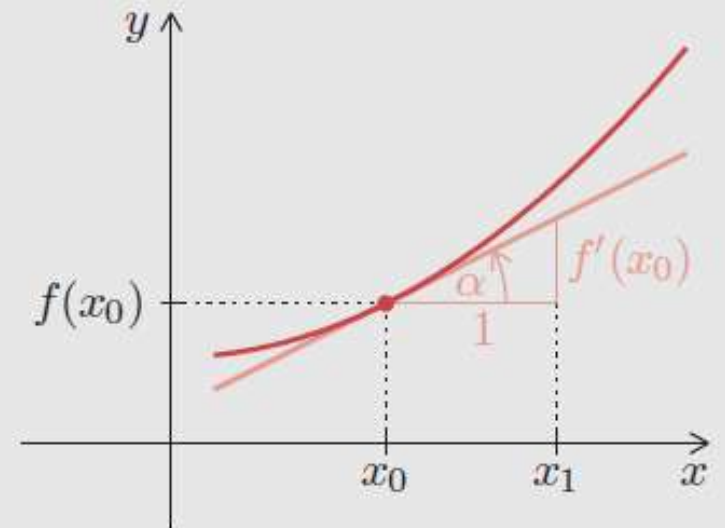
Kettenregel $(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x)$

Umkehrfunktion $(f^{-1}(y))' = \frac{1}{f'(x)}$

Geometrische Bedeutung: Neigungswinkel

Der **Neigungswinkel** des Graphen einer Funktion f im Punkt $(x_0 | f(x_0))$ ist der Winkel α , den die Tangente an der Stelle x_0 mit der x -Achse bildet. Zwischen dem Winkel α und der Ableitung der Funktion an der Stelle x_0 besteht der Zusammenhang

$$\tan \alpha = f'(x_0).$$





Schnittwinkel

Der **Schnittwinkel** α der Graphen von zwei Funktionen f und g , die sich an der Stelle x_0 in einem gemeinsamen Punkt schneiden, ist die Differenz der beiden Neigungswinkel α_f des Schaubildes der Funktion f an der Stelle x_0 und α_g des Schaubildes der Funktion g an der Stelle x_0 :

$$\alpha = \alpha_f - \alpha_g.$$

Der Schnittwinkel lässt sich mit den Ableitungen berechnen:

$$\tan \alpha = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) g'(x_0)}.$$



Lokales Minimum

Wenn eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0

- ▶ ein lokales Minimum hat, dann besitzt sie dort eine waagrechte Tangente. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist somit notwendig.
- ▶ eine waagrechte Tangente hat und zusätzlich links gekrümmt ist, dann hat sie dort ein lokales Minimum. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist somit hinreichend.
- ▶ eine waagrechte Tangente hat und die Ableitung f' beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen von minus nach plus wechselt, so hat f genau dann an der Stelle x_0 ein lokales Minimum. Diese Bedingung ist somit notwendig und hinreichend.



Lokales Maximum

Wenn eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0

- ▶ ein lokales Maximum hat, dann besitzt sie dort eine waagrechte Tangente. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist somit notwendig.
- ▶ eine waagrechte Tangente hat und zusätzlich rechts gekrümmt ist, dann hat sie dort ein lokales Maximum. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist somit hinreichend.
- ▶ eine waagrechte Tangente hat und wenn die Ableitung f' beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen von plus nach minus wechselt, so hat f genau dann an der Stelle x_0 ein lokales Maximum. Diese Bedingung ist somit notwendig und hinreichend.



Wendepunkt

Ein **Wendepunkt** ist ein Kurvenpunkt, an dem das Schaubild einer Funktion von einer Linkskrümmung auf eine Rechtskrümmung wechselt oder umgekehrt.

Wenn eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0

- ▶ einen Wendepunkt hat, dann ist dort die zweite Ableitung null. Die Bedingung $f''(x_0) = 0$ ist somit notwendig.
- ▶ eine zweite Ableitung hat, die dort null ist, und die dritte Ableitung dort zusätzlich ungleich null ist, dann hat sie dort einen Wendepunkt. Die Bedingung $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ ist somit hinreichend.
- ▶ eine zweite Ableitung hat, die dort null ist, und die Ableitung f'' beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen wechselt, so hat f genau dann an der Stelle x_0 einen Wendepunkt. Diese Bedingung ist somit notwendig und hinreichend.

Ableitung gebrochenrationaler Funktionen

Gebrochen rationale Funktionen leitet man nach folgenden Grundsätzen ab:
Zunächst gibt es die Quotientenregel. Sie gilt prinzipiell für alle gebrochen rationalen Funktionen.

Beim Ableiten eines Quotienten zweier Funktionen f und g benutzt man die Formel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}.$$

Es gibt jedoch zwei Fälle, in denen die Ableitung wesentlich einfacher berechnet werden kann:

- 1. Fall: Der Nenner enthält keine Summe**
- 2. Fall: Der Zähler enthält kein x**

Asymptotisches Verhalten von Polynomen

Ein Polynom f vom Grad n

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0$$

verhält sich asymptotisch gleich wie das Glied mit der höchsten Potenz. Wir verwenden die Schreibweise

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n \approx a_n x^n \quad \text{für } x \rightarrow \pm\infty.$$

Polynome haben das folgende asymptotische Verhalten: Ein Polynom mit

- ▶ geradem Grad ist entweder nach unten oder nach oben beschränkt,
- ▶ ungeradem Grad ist weder nach unten noch nach oben beschränkt und besitzt mindestens eine Nullstelle.



Asymptotisches Verhalten gebrochenrationaler Funktionen

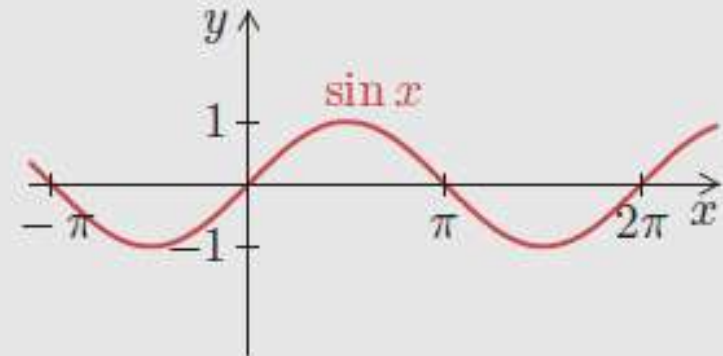
Gebrochenrationale Funktionen haben das folgende asymptotische Verhalten:

- ▶ Echt gebrochenrationale Funktionen haben für $x \rightarrow \pm\infty$ die x -Achse als waagrechte Asymptote.
- ▶ Bei unecht gebrochenrationalen Funktionen findet man waagrechte und schiefe Asymptoten durch Polynomdivision.

Sinus und Kosinus

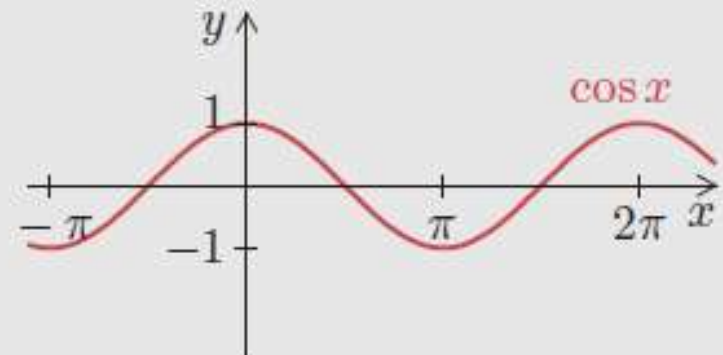
Eigenschaften des Sinus

- ▶ Bereiche: $D = \mathbb{R}$, $W = [-1, 1]$
- ▶ Periode: $p = 2\pi$, Symmetrie: ungerade
- ▶ Nullstellen: $x = k\pi$
- ▶ Extremstellen: $x_H = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $x_T = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$



Eigenschaften des Kosinus

- ▶ Bereiche: $D = \mathbb{R}$, $W = [-1, 1]$
- ▶ Periode: $p = 2\pi$, Symmetrie: gerade
- ▶ Nullstellen: $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$
- ▶ Extremstellen: $x_H = 2k\pi$, $x_T = \pi + 2k\pi$

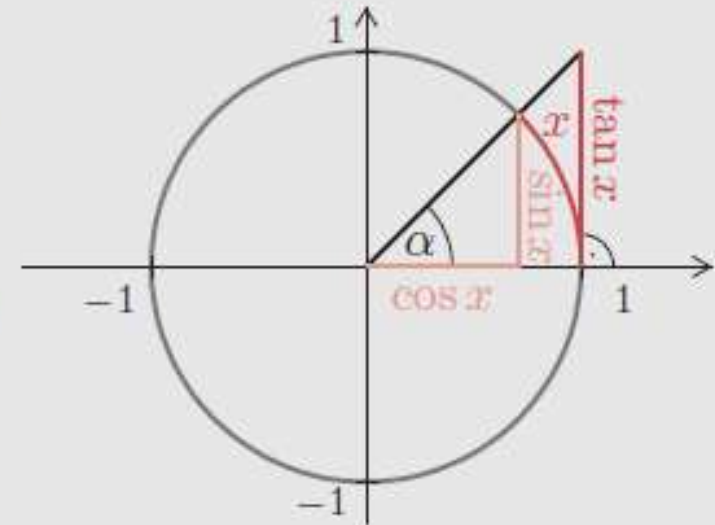


Tangens und Kotangens

Die Funktion **Tangens** ordnet einem Winkel x im Bogenmaß das Verhältnis aus Sinus und Kosinus zu:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Der Tangens ist für alle reellen Zahlen außer $\dots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$ definiert.



Die Funktion **Kotangens** ordnet einem Winkel x im Bogenmaß das Verhältnis aus Kosinus und Sinus zu:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Der Kotangens ist für alle reellen Zahlen außer $\dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$ definiert.



Exponentialfunktionen

Exponentialfunktionen spielen in den Anwendungen der Technik eine bedeutende Rolle. Sie werden z.B. benötigt bei der Beschreibung von Abkling-, Sättigungs-, und Wachstumsprozessen sowie bei gedämpften Schwingungen und in der Statistik.

Lässt man für den Exponenten in einer Potenz a^n mit positiver Basis $a \neq 1$ beliebige reelle Werte zu, so gelangt man zu den Exponentialfunktionen.

Eine Funktion f , die sich in der Form

$$f(x) = a^x, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0, \quad a \neq 1,$$

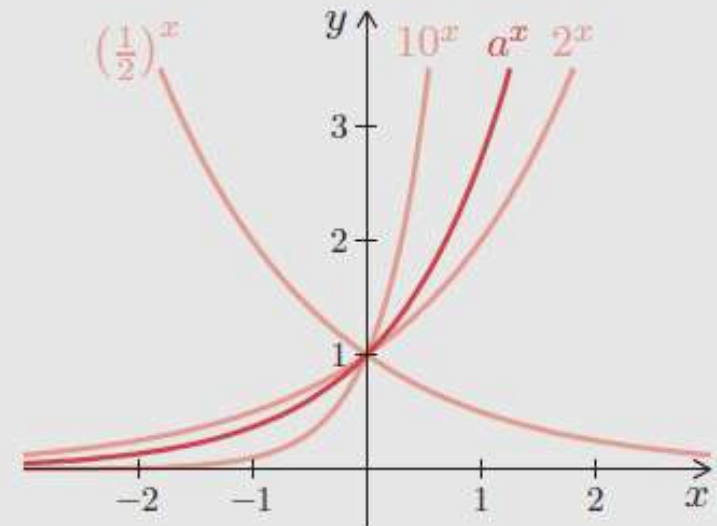
darstellen lässt, bezeichnet man als **Exponentialfunktion** mit Basis a .

a - Basis

x - Exponent

Eigenschaften der Exponentialfunktionen

- ▶ Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
- ▶ Wertebereich: $W = (0, \infty)$
- ▶ Monotonie:
für $0 < a < 1$ streng monoton fallend auf \mathbb{R} ,
für $a > 1$ streng monoton wachsend auf \mathbb{R}
- ▶ Asymptoten:
für $0 < a < 1$ x -Achse für $x \rightarrow \infty$,
für $a > 1$ x -Achse für $x \rightarrow -\infty$
- ▶ Achsenabschnitt: $(0|1)$



Die Exponentialfunktion $y = a^x$ ist nicht mit der Potenzfunktion $y = x^n$ zu verwechseln. Bei der Exponentialfunktion ist die Basis fest und der Exponent variabel. Bei der Potenzfunktion ist der Exponent fest und die Basis variabel.

Rechenregeln für Potenzen und Exponentialfunktionen

Bei der Multiplikation oder Division von Exponentialfunktionen mit derselben Basis a kann man die Exponenten zusammenfassen:

$$\blacktriangleright a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$$

$$\blacktriangleright \frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = a^{x_1-x_2}$$

Bei Potenzen von Potenzen multiplizieren sich die Hochzahlen:

$$\blacktriangleright (a^{x_1})^{x_2} = a^{x_1 \cdot x_2}$$

Diese Rechenregeln gelten für alle Zahlen x_1 und x_2 aus \mathbb{R} .

e-Funktion

Die Exponentialfunktion zur Basis e

$$f(x) = e^x$$

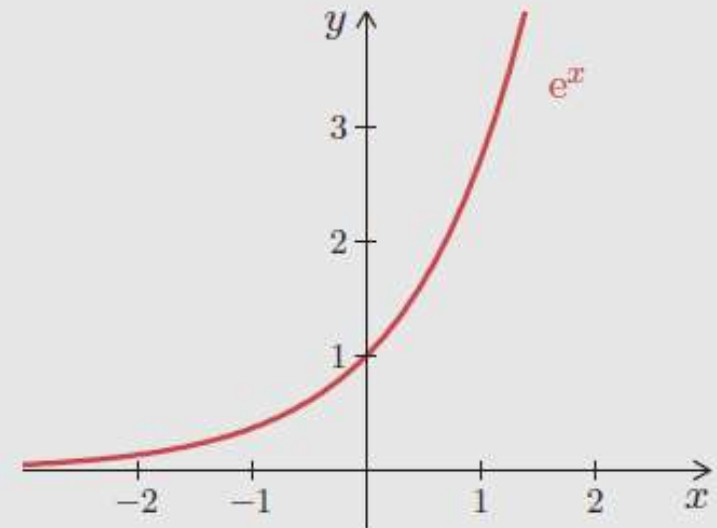
bezeichnet man als **natürliche Exponentialfunktion** oder kurz als **e-Funktion**.

Eigenschaften der e-Funktion

- ▶ Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$
- ▶ Wertebereich: $W = (0, \infty)$
- ▶ Monotonie: streng monoton wachsend
- ▶ Asymptoten: x -Achse für $x \rightarrow -\infty$
- ▶ Achsenabschnitt: $(0 | 1)$

gebräuchliche Schreibweisen:

$$y = f(x) = e^x \quad y = f(x) = \exp(x)$$





Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis a bezeichnet man als **Logarithmusfunktion** zur Basis a :

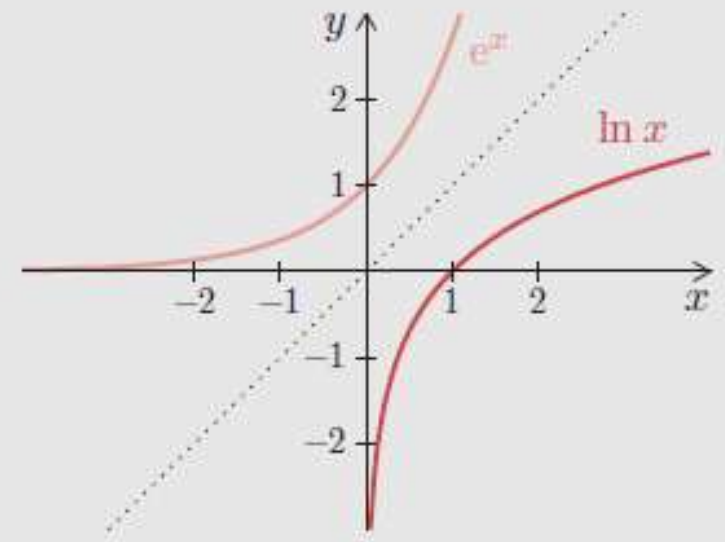
$$f(x) = a^x \iff f^{-1}(x) = \log_a x.$$

Die Logarithmusfunktion zur Basis e bezeichnet man als **natürliche Logarithmusfunktion**:

$$f(x) = e^x \iff f^{-1}(x) = \ln x.$$

Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion

- ▶ Definitionsbereich: $D = (0, \infty)$
- ▶ Wertebereich: $W = \mathbb{R}$
- ▶ Monotonie: streng monoton wachsend
- ▶ Asymptoten: y -Achse für $x \rightarrow 0$
- ▶ Nullstelle: $x = 1$



Rechenregeln für Logarithmusfunktionen

Logarithmen von Produkten kann man in Summen einzelner Logarithmen zerlegen:

$$\begin{array}{ll} \blacktriangleright \log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 & \blacktriangleright \ln (x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2 \end{array}$$

Logarithmen von Quotienten kann man in Differenzen einzelner Logarithmen zerlegen:

$$\begin{array}{ll} \blacktriangleright \log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2 & \blacktriangleright \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \ln x_1 - \ln x_2 \end{array}$$

Logarithmen von Potenzen kann man in Produkte mit der Hochzahl zerlegen:

$$\begin{array}{ll} \blacktriangleright \log_a (x^b) = b \cdot \log_a x & \blacktriangleright \ln (x^b) = b \cdot \ln x \end{array}$$

Basis der Exponential- und Logarithmusfunktion

Zusammenhang von a^x und e^x

Eine Exponentialfunktion mit Basis a lässt sich als e-Funktion darstellen:

$$a^x = e^{x \ln a}.$$

Zusammenhang von $\log_a x$ und $\ln x$

Eine Logarithmusfunktion zur Basis a lässt sich als ln-Funktion darstellen:

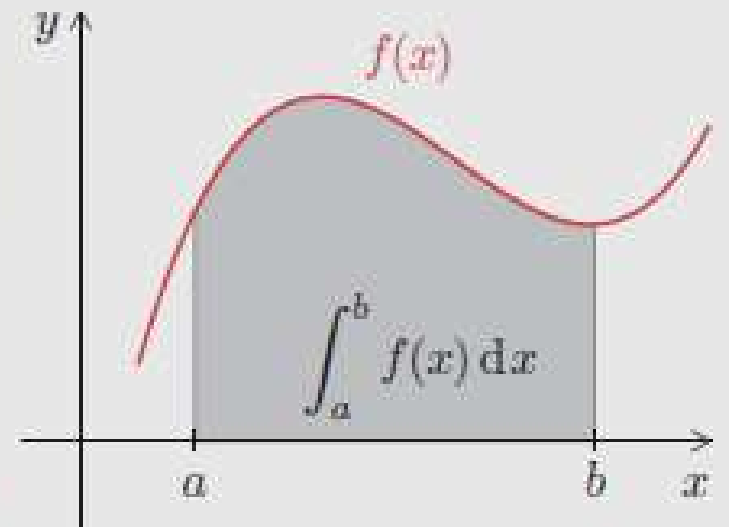
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Integration

Eine stetige und nicht negative Funktion f begrenzt für x -Werte zwischen a und b mit der x -Achse ein Flächenstück. Für den Inhalt A dieser Fläche verwendet man die Schreibweise mit dem **Integralsymbol**

$$A = \int_a^b f(x) \, dx.$$

Die Funktion f unter dem Integral bezeichnet man als **Integrand**.



Ableitung der Integralfunktion

Die Ableitung der Integralfunktion stellt die Verbindung zwischen Differenzial- und Integralrechnung her (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung).

Die Ableitung der Integralfunktion

$$A(t) = \int_a^t f(x) \, dx$$

ist die Ausgangsfunktion f . Es gilt also

$$A'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t f(x) \, dx = f(t).$$



Stammfunktion

Die Ableitung der Integralfunktion ist die Ausgangsfunktion. Wenn wir also umgekehrt zu einer gegebenen Funktion die Integralfunktion berechnen wollen, müssen wir die Ableitung umkehren. Die Umkehrung der Differenziation bezeichnet man als Integration.

Eine Funktion F , deren Ableitung die Funktion f ergibt, für die also $F' = f$ gilt, bezeichnet man als **unbestimmtes Integral** oder **Stammfunktion** von f . Die Bestimmung einer Stammfunktion bezeichnet man als **Integration**. Sie ist gewissermaßen die Umkehrung der Differenziation:

$$f(x) \xrightarrow{\text{Integration}} F(x), \quad F(x) \xrightarrow{\text{Differenziation}} f(x).$$

Für ein unbestimmtes Integral verwendet man die Notation $\int f(x) dx$.



Integrationstechnik

Die Bestimmung der Ableitung einer aus elementaren Funktionen zusammengesetzten Funktion ist mit Hilfe der entsprechenden Ableitungsregeln immer möglich.

Im Gegensatz dazu ist das Finden einer Stammfunktion eine Kunst, die nicht bei allen Funktionen gelingt.

Stammfunktionen elementarer Funktionen

Es gibt einfache Funktionen, die aus elementaren Funktionen zusammengesetzt sind, für die man aber keine Stammfunktion in Form elementarer Funktionen angeben kann.

Die Integration ist die Umkehrung der Differenziation. Dadurch lassen sich aus den Regeln der Differenzialrechnung die Integrationsregeln herleiten.

Stammfunktionen der wichtigsten Funktionen

Funktion	Stammfunktion	Funktion	Stammfunktion
$\int e^x dx$	$= e^x + C$	$\int \sin x dx$	$= -\cos x + C$
$\int x^a dx$	$= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1$	$\int \cos x dx$	$= \sin x + C$
$\int \frac{1}{x} dx$	$= \ln x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx$	$= \arctan x + C$

Integrationsregeln

Bei der Integration darf man einen konstanten Faktor aus dem Integral herausziehen:

$$\int C f(x) \, dx = C \int f(x) \, dx.$$

Bei der Integration einer Summe oder Differenz von Funktionen darf man jede Funktion einzeln integrieren:

$$\int f(x) \pm g(x) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx.$$

Integration durch Substitution

Wenn man die Funktion unter dem Integral als ein Produkt aus einer verketteten Funktion $f \circ u$ und der inneren Ableitung u' darstellt, dann kann man alternativ auch einfach über die Funktion u integrieren:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) \, dx = \int f(u) \, du.$$

$$\int f(u(x)) \, dx = \int \frac{f(u) \, du}{u'(x)}$$

Partielle Integration

Wenn man die Funktion im Integral als ein Produkt einer Funktion f und der Ableitung g' einer Funktion g in der Form

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

darstellt, dann kann man die Funktion teilweise integrieren:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx.$$

Stammfunktionen gebrochenrationaler Funktionen

Stammfunktionen einer gebrochenrationalen Funktion der Form

$$\int \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots + b_m x^m} dx$$

bestimmt man, indem man

- ▶ eine unecht gebrochenrationale Funktion durch Polynomdivision in ein Polynom und eine echt gebrochenrationale Funktion zerlegt und
- ▶ eine echt gebrochenrationale Funktion mithilfe einer Partialbruchzerlegung in Summen unterteilt.



Vorgehensweise bei Integration durch Partialbruchzerlegung

Eine unecht gebrochenrationale Funktion wird in eine ganzrationale und eine echt gebrochenrationale Funktion zerlegt.

Die echt gebrochenrationale Funktion wird in eine endliche Summe aus Partialbrüchen zerlegt.

Die Summe aus Partialbrüchen kann gliedweise integriert werden.

Stammfunktionen bei der Partialbruchzerlegung (Teil I)

Partialbrüche mit einfachen oder mehrfachen reellen Nennernullstellen x_0 lassen sich mit Stammfunktionen folgender Form integrieren:

- ▶ $\int \frac{1}{x - x_0} dx = \ln|x - x_0| + C$
- ▶ $\int \frac{1}{(x - x_0)^n} dx = \frac{-1}{(n-1)(x - x_0)^{n-1}} + C, \quad n = 2, 3, 4, \dots$

Bestimmtes Integral

Das bestimmte Integral einer Funktion f kann man mithilfe einer beliebigen Stammfunktion F von f bestimmen:

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Man setzt die Obergrenze b in die Stammfunktion F ein und zieht davon den Wert der Stammfunktion an der Untergrenze a ab.

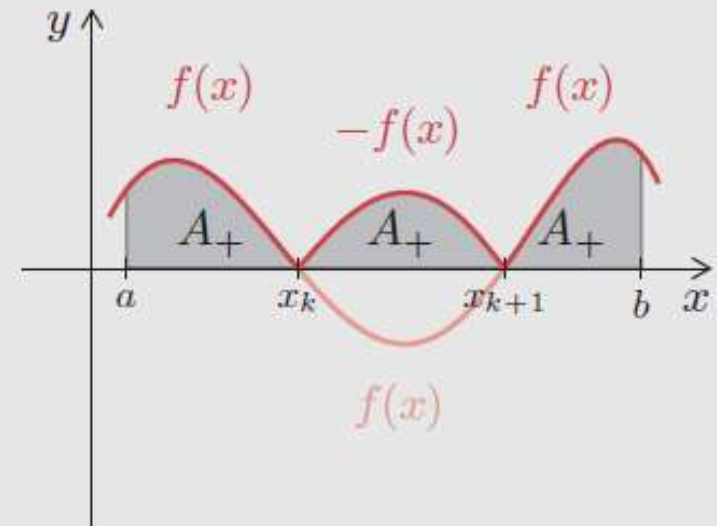
Die Fläche A , die das Schaubild einer nicht negativen Funktion f für x -Werte zwischen a und b mit der x -Achse einschließt, entspricht genau dem bestimmten Integral der Funktion f zwischen a und b :

$$A = \int_a^b f(x) \, dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Flächenberechnung bei negativen Funktionswerten

Bei der Berechnung des Flächeninhaltes, den das Schaubild einer Funktion f mit der x -Achse bildet, benötigt man alle Nullstellen x_0, x_1, \dots der Funktion im Intervall $[a, b]$. Auf Teilintervallen $[x_k, x_{k+1}]$, in denen die Funktion negative Werte annimmt, integriert man über die negative Funktion

$$A_+ = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (-f(x)) \, dx.$$

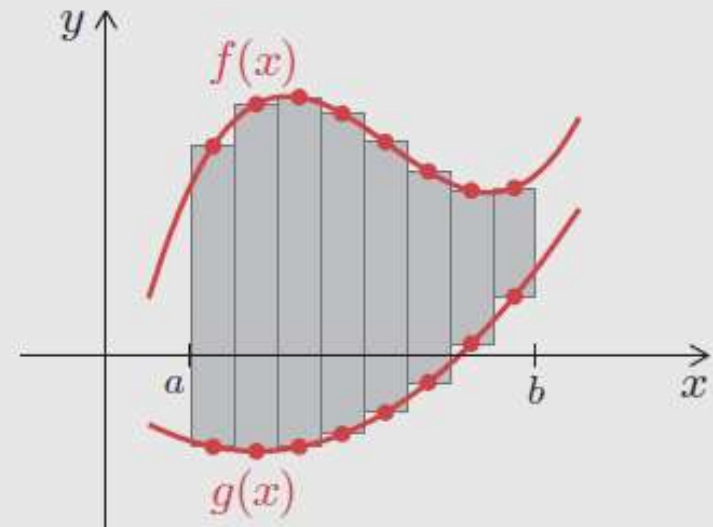


Fläche zwischen zwei Funktionen

Den Flächeninhalt A der Fläche, die durch das Schaubild der beiden Funktionen f und g für x -Werte zwischen a und b begrenzt wird, kann man durch

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$

berechnen. Dabei darf die Funktion f für alle x -Werte zwischen a und b nicht unterhalb der Funktion g verlaufen.



Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

<http://de.wikipedia.org>