Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (36)

Gerald Kupris

19.01.2011

Restliche Stunden Mathematik 1. Semester

10.01.2011 (Mo)	09:45 Uhr:	Auswertung Fragebogen, Exponentialfunktion, e-funktion
12.01.2011 (Mi)	09:45 Uhr:	Logarithmusfunktion, Logarithmusregeln
12.01.2011 (Mi)	11:45 Uhr:	Ableitung und Integration von e-Funktion und Logarithmus
13.01.2011 (Do)	09:45 Uhr:	Wiederholung Integration, Integration durch Substitution
17.01.2011 (Mo)	09:45 Uhr:	Partielle Integration, Partialbruchzerlegung
19.01.2011 (Mi)	08:00 Uhr:	Rechenbeispiele, Flächenberechnung, Schwerpunkt
19.01.2011 (Mi)	09:45 Uhr:	Anwendung der Integration, numerische Methoden
20.01.2011 (Do)	09:45 Uhr:	allgemeine Wiederholung, Prüfungsvorbereitung
24.01.2011 (Mo)	09:45 Uhr:	Rechnen der Probeklausur
08.02.2011 (Di)	11:00 Uhr:	Prüfung

Vorgehensweise bei Integration durch Partialbruchzerlegung

Eine unecht gebrochenrationale Funktion wird in eine ganzrationale und eine echt gebrochenrationale Funktion zerlegt.

Die echt gebrochenrationale Funktion wird in eine endliche Summe aus Partial-brüchen zerlegt.

Die Summe aus Partialbrüchen kann gliedweise integriert werden.

Partialbrüche für Linearfaktoren

Jeder Nennernullstelle x_0 einer echt gebrochenrationalen Funktion ordnet man einen Partialbruch zu. Die Form des Partialbruches hängt dabei wie folgt von der Vielfachheit der Nullstelle x_0 ab:

$$\begin{array}{lcl}
\text{einfache Nullstelle} & \Longrightarrow & \dfrac{A_1}{x-x_0} \\[2ex]
\text{zweifache Nullstelle} & \Longrightarrow & \dfrac{A_1}{x-x_0} + \dfrac{A_2}{(x-x_0)^2} \\
\vdots & & \\
p\text{-fache Nullstelle} & \Longrightarrow & \dfrac{A_1}{x-x_0} + \dfrac{A_2}{(x-x_0)^2} + \ldots + \dfrac{A_p}{(x-x_0)^p}
\end{array}$$

Die Konstanten A_1, A_2, …, A_p bestimmt man durch Koeffizientenvergleich.

Stammfunktionen bei der Partialbruchzerlegung

Partialbrüche mit einfachen oder mehrfachen reellen Nennernullstellen x_0 lassen sich mit Stammfunktionen folgender Form integrieren:

- $\displaystyle\int \frac{1}{x - x_0}\,\mathrm{d}\,x = \ln|x - x_0| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x - x_0)^n}\,\mathrm{d}\,x = \frac{-1}{(n-1)(x - x_0)^{n-1}} + C, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$

Partialbrüche, bei denen sich der Nenner nicht vollständig in Linearfaktoren zerlegen lässt und somit quadratische Faktoren enthält, führt man auf folgende Integrale zurück:

- $\displaystyle\int \frac{2\,x + b}{x^2 + b\,x + c}\,\mathrm{d}\,x = \ln|x^2 + b\,x + c| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{a^2 + x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

Flächenberechnung

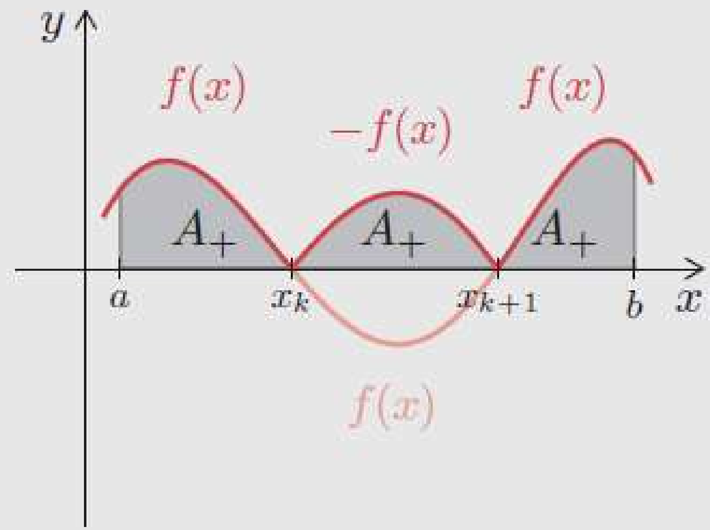
Die Fläche A, die das Schaubild einer nicht negativen Funktion f für x-Werte zwischen a und b mit der x-Achse einschließt, entspricht genau dem bestimmten Integral der Funktion f zwischen a und b:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Flächenberechnung bei negativen Funktionswerten

Bei der Berechnung des Flächeninhaltes, den das Schaubild einer Funktion f mit der x-Achse bildet, benötigt man alle Nullstellen x_0, x_1, ... der Funktion im Intervall $[a, b]$. Auf Teilintervallen $[x_k, x_{k+1}]$, in denen die Funktion negative Werte annimmt, integriert man über die negative Funktion

$$A_+ = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (-f(x))\,\mathrm{d}x.$$



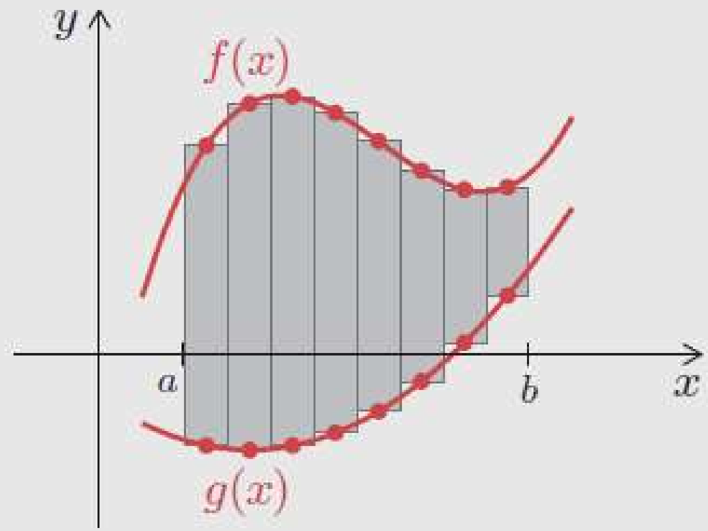
Beispiel

Fläche zwischen zwei Funktionen

Den Flächeninhalt A der Fläche, die durch das Schaubild der beiden Funktionen f und g für x-Werte zwischen a und b begrenzt wird, kann man durch

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

berechnen. Dabei darf die Funktion f für alle x-Werte zwischen a und b nicht unterhalb der Funktion g verlaufen.



Beispiele

Statische Momente

Das Flächenstück, das durch das Schaubild einer nicht negativen, stetigen Funktion f für x-Werte zwischen a und b und der x-Achse begrenzt wird, besitzt das

- **statische Moment** bezüglich der x-Achse $M_x = \frac{1}{2} \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,$
- **statische Moment** bezüglich der y-Achse $M_y = \int_a^b x\,f(x)\,\mathrm{d}x.$

Beispiel

Schwerpunkt einer ebenen Fläche

Die Koordinaten des Schwerpunkts $S(x_S \,|\, y_S)$, des Flächenstücks, das durch das Schaubild einer nicht negativen, stetigen Funktion f für x-Werte zwischen a und b und der x-Achse begrenzt wird, kann man durch

$$x_S = \frac{M_y}{A} = \frac{1}{A} \int_a^b x\, f(x)\,\mathrm{d}\,x, \qquad y_S = \frac{M_x}{A} = \frac{1}{2\,A} \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$$

berechnen. Dabei sind M_x und M_y die statischen Momente bezüglich der x-Achse bzw. y-Achse und A der Flächeninhalt des Flächenstücks.

Beispiel

Schwerpunkt

Das Flächenstück, das durch das Schaubild einer nicht negativen, stetigen Funktion f für x-Werte zwischen a und b und der x-Achse begrenzt wird, besitzt den Flächeninhalt A und den Schwerpunkt mit den Koordinaten $S(x_S \,|\, y_S)$.

- Für das Volumen V_x, das durch Rotation des Flächenstücks um die x-Achse entsteht, gilt $V_x = 2\pi\, y_S\, A$.
- Für das Volumen V_y, das durch Rotation des Flächenstücks um die y-Achse entsteht, gilt $V_y = 2\pi\, x_S\, A$.

Beispiel

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org