Mathematik für Infotronik (33)

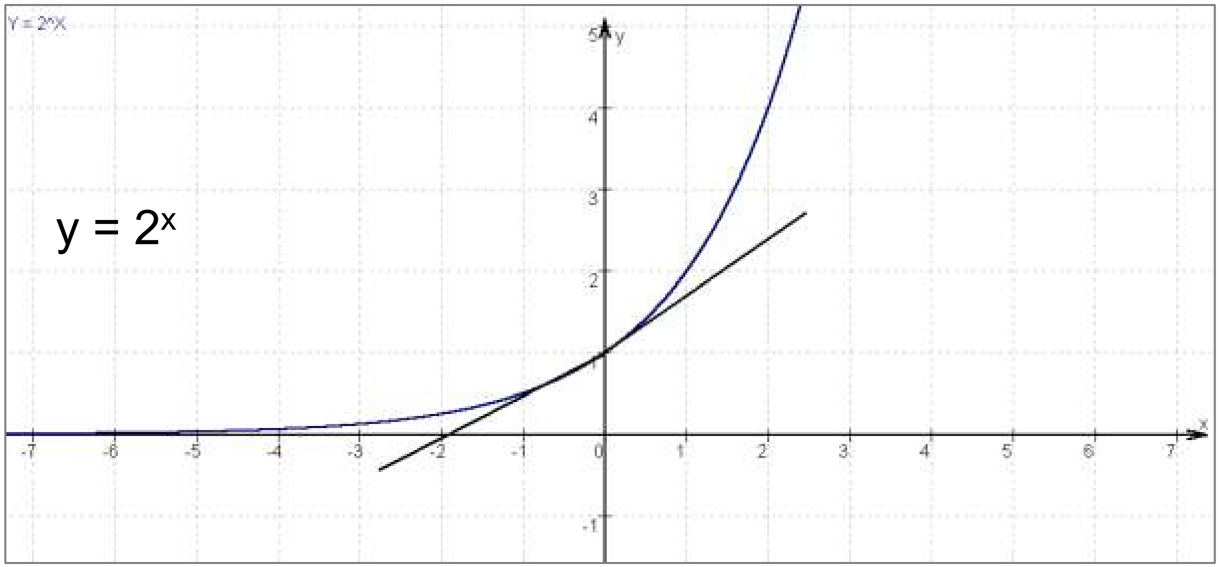
Gerald Kupris

12.01.2011

Restliche Stunden Mathematik 1. Semester

10.01.2011 (Mo)	09:45 Uhr:	Auswertung Fragebogen, Exponentialfunktion, e-funktion
12.01.2011 (Mi)	09:45 Uhr:	Logarithmusfunktion, Logarithmusregeln
12.01.2011 (Mi)	11:45 Uhr:	Ableitung und Integration von e-Funktion und Logarithmus
13.01.2011 (Do)	09:45 Uhr:	Wiederholung Integration, Integration durch Substitution
17.01.2011 (Mo)	09:45 Uhr:	Partielle Integration, Partialbruchzerlegung
19.01.2011 (Mi)	08:00 Uhr:	Rechenbeispiele, Flächenberechnung, Schwerpunkt
19.01.2011 (Mi)	09:45 Uhr:	Anwendung der Integration, numerische Methoden
20.01.2011 (Do)	09:45 Uhr:	allgemeine Wiederholung, Prüfungsvorbereitung
08.02.2011 (Di)	11:00 Uhr:	Prüfung

Ableitung der Exponentialfunktion



Die Ableitung an der Stelle x = 0 kann durch eine Tangente durch diesen Punkt bestimmt werden. Dies kann näherungsweise mit Hilfe eines Steigungsdreiecks abgelesen werden:

f’(0) = 0,7 und f’(1) = 1,4 .

Ableitung mittels Differenzialkoeffizienten

Mit dem Differenzenquotienten bestimmt man zunächst die Steigung der Sekante. Da wird durch den Grenzwert h aber gegen 0 streben lassen, wird die Sekantensteigung zur Tangentensteigung.

$$f'(a) = {}_{h\to} \quad \frac{f(\quad + \quad -}{h}$$

Für x = 0 gilt der Differenzenquotient : $f'(0) = {}_{h\to} \quad 2^h \quad \to \quad = {}_{\to}$

$$f'(0) = {}_{h\to} \quad 2^h \quad \approx$$

Für x = 1 gilt:

$$f'(1) = {}_{h\to} \quad 2^{1+} \quad = {}_{\to} \quad = {}_{\to} \quad \approx \bullet \quad \approx \bullet \quad \approx$$

f'(x) = 0 für f(x) = b

$$f'(x) = {}_{h\to} \quad b^{x+} \quad = {}_{\to} \quad = {}_{\to} \quad = \bullet \quad = \bullet \quad = \bullet$$

Ableitung einer Exponentialfunktion

$$f'(x) = {}_{h\to} \; b^{x+} \quad = {}_{\to} \quad = {}_{\to} \quad = \bullet \quad = \bullet \quad = \bullet$$

Hieraus erkennen wir, dass die Ableitung einer Exponentialfunktion wieder eine Exponentialfunktion sein muss.

Für welches b gilt f'(0) = 1 ? Dann muss gelten: $\lim\limits_{h\to} \frac{b^h -}{} =$

Die Ableitung an der Stelle x ist proportional zum Funktionswert an der Stelle x (s. o.).

Der Proportionalitätsfaktor ist die Zahl: $m_b = {}_{h\to} \; b^h \; -$

$$f'(x) = \bullet$$

Man muss also den Grenzwert von m_b für $h\to 0$ bestimmen.

Eulersche Zahl e

Diejenige Basis, für welche die zugehörige Exponentialfunktion an der Stelle 0 die Steigung 1 hat, heißt **Eulersche Zahl.** Sie wird mit **e** bezeichnet.

Damit gilt: $\lim\limits_{h\to} \frac{e^h -}{.!} =$

Die Exponentialfunktion $f(x) = e^x$ wird e-Funktion genannt.

Die e - Funktion ist mit ihrer Ableitung identisch,
das heißt für $f(x) = e^x$ gilt: $f'(x) = e^x$.

Daher ist die e - Funktion mit ihrer Stammfunktion identisch (bis auf C),
das heißt für $f(x) = e^x$ gilt: $F(x) = e^x + C$.

Witze zur e-Funktion

Treffen sich zwei Kurven im Unendlichen, sagt die eine:
"Hey, hau ab aus meinem Definitionsbereich, sonst differenzier' ich Dich!"

Antwortet die andere: "Mach doch! Ich bin die e-Funktion!"

Die Funktion x^2 gibt eine Party und alle sind da: cos(x), ln(x), ja sogar tanh(x) und alle haben mächtig Spass, nur die e-Funktion steht alleine in der Ecke.
Als x^2 das bemerkt, denkt er sich, das kann ich als guter Gastgeber so nicht auf mir sitzen lassen! Und er geht auf die e-Funktion zu und sagt: "Na, was is denn los, hast du keinen Spass? Na komm, integrier dich doch mal!"

Daraufhin die e-Funktion ganz traurig: "Hab ich doch schon!"

Wiederholung: Ableitungsregeln

Beim Ableiten eines Produktes zweier Funktionen f und g summiert man das Produkt aus der Ableitung der ersten Funktion f' und der zweiten Funktion g und das Produkt aus der ersten Funktion f und der Ableitung der zweiten Funktion g':

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) \; + \; f(x) \cdot g'(x).$$

Beim Ableiten eines Quotienten zweier Funktionen f und g benutzt man die Formel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}.$$

Beim Ableiten einer verketteten Funktion $f \circ u$ wird die Ableitung der äußeren Funktion f mit der Ableitung der inneren Funktion u multipliziert:

$$(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Ableitung und Stammfunktion einer allgemeinen e-Funktion

Allgemeiner gilt aufgrund der Faktorregel und der Kettenregel:

$$f(x) = a \cdot e^{kx}$$

$$f'(x) = k \cdot a \cdot e^{kx}$$

$$F(x) = \frac{a}{k} \cdot e^{kx} + C$$

Ableitung der Umkehrfunktion

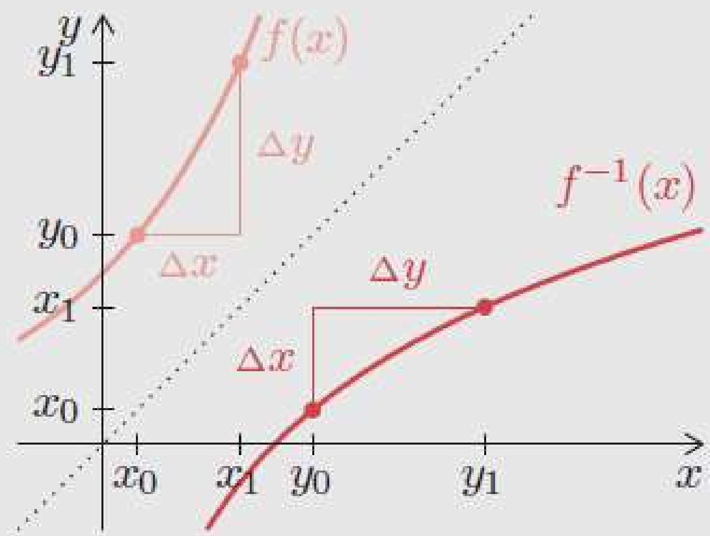
Die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle y ist der Kehrwert der Ableitung der Funktion f an der Stelle x:

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Dabei beschreibt

$$y = f(x), \quad x = f^{-1}(y)$$

den Zusammenhang zwischen x und y.



Daraus ergibt sich die Ableitung der Logarithmusfunktion

Ableitungen der wichtigsten Funktionen

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R})$	$a\,x^{a-1}$	$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Wiederholung: Basis der Exponential- und Logarithmusfunktion

Zusammenhang von a^x und e^x

Eine Exponentialfunktion mit Basis a lässt sich als e-Funktion darstellen:

$$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}.$$

Zusammenhang von $\log_a x$ und $\ln x$

Eine Logarithmusfunktion zur Basis a lässt sich als ln-Funktion darstellen:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Ableitung von Exponential- und Logarithmusfunktion

Exponentialfunktionen	e^x	e^x
	a^x	$(\ln a) \cdot a^x$
Logarithmusfunktionen	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
	$\log_a x$	$\frac{1}{(\ln a) \cdot x}$

Logarithmische Ableitung

Logarithmische Differentiation

In vielen Fällen, beispielsweise bei Funktionen vom Typ $f(x) = [u(x)]^{v(x)}$ mit $u(x) > 0$, gelingt die *Differentiation* einer Funktion nach dem folgenden Schema:

1. *Logarithmieren* der Funktionsgleichung.
2. *Differenzieren* der *logarithmierten* Gleichung unter Verwendung der Kettenregel.

Beispiele

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org

http://www.matheplanet.com