Grundlagen der Informatik

Prädikatenlogik

Prof. Dr. Peter Jüttner

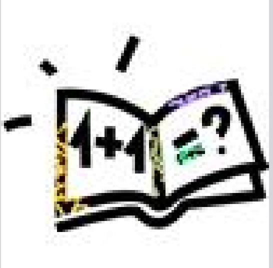
Prädikatenlogik

Erweiterung der Aussagenlogik

Formalisierung wissenschaftlicher Argumentation und Beweisführung

„Alle Menschen leben auf der Erde“

„Es gibt einen Mensch, der auf der Erde lebt“



Prädikatenlogik

Definition:

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge (Gegenstandsbereich, Individuenbereich). Dann heißt eine Abbildung

$$\mathcal{M}^n \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$$

ein ***n-stelliges Prädikat über der Menge*** $\mathcal{M}$

Bemerkung: für die Wahrheitswerte {wahr, falsch} wird auch {true, false} oder {T, F} verwendet.

Prädikatenlogik

Beispiele:

Sie $\mathcal{M}$ = N (Menge der natürlichen Zahlen), dann ist

- gerade (n) n ein 1-stelliges Prädikat, wobei gilt gerade(2) = T
- kleiner(n,m) ein 2-stelliges Prädikat, wobei gilt kleiner (10,5) = F (kleiner wird meist als n<m dargestellt)
- ist_eine_Folge_von_5_aufeinanderfolgenden_Zahlen(n,m,o,p,q) ein 5-stelliges Prädikat, mit

  ist_eine_Folge_von_5_aufeinanderfolgenden_Zahlen(3,4,5,6,7) = T

Prädikatenlogik

Beispiele:

Sie $\mathcal{M}$ = Menge aller Menschen (lebende und bereits gestorbene) dann ist

- gestorben (n) n ein 1-stelliges Prädikat, wobei z.B. gilt

  gestorben(Albert Einstein) = T

- Vater(n,m) ein 2-stelliges Prädikat, wobei z.B. gilt

  Vater(Johann Sebastian Bach, Friedemann Bach) = T

Prädikatenlogik

Definition:

Sei $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$ Mengen (Gegenstandsbereiche, Individuenbereiche). Dann heißt eine Abbildung

$$\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 \times \ldots \times \mathcal{M}_n \rightarrow \{\text{wahr, falsch}\}$$

ein ***n-stelliges Prädikat über den Mengen*** $\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n$

Anmerkung:

Ein 0-stelliges Prädikat ist eine Aussage

Prädikatenlogik

Beispiele:

Sie $\mathcal{M}_1$ die Menge aller Menschen und $\mathcal{M}_2$, die Menge der Planteten in unserem Sonnensystem, dann ist die Aussage

lebt_auf_Planet(m,p) ein 2-stelliges Prädikat, das für alle Menschen und den Planet Erde wahr ist, für alle anderen Planeten falsch

Prädikatenlogik

Verknüpfung von Prädikaten mit (den schon bekannten) logischen Operatoren $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$

Seien $P_1(x_1, \ldots, x_n)$ und $P_2(y_1, \ldots, y_m)$ n- bzw. m-stellige Prädikate. Dann erhält man

- das n+m-stellige Prädikat $(P_1 \Rightarrow P_2)(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ durch „Implizieren " der Prädikate P_1 und P_2 i.e. $P_1(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow P_2 (y_1, \ldots, y_m)$

- das n+m-stellige Prädikat $(P_1 \Leftrightarrow P_2)(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ durch „Äquivalenzen" der Prädikate P_1 und P_2 i.e. $P_1(x_1, \ldots, x_n) \Leftrightarrow P_2 (y_1, \ldots, y_m)$

Prädikatenlogik

Verknüpfung von Prädikaten mit (den schon bekannten) logischen Operatoren $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \neg$

Seien $P_1(x_1, \ldots, x_n)$ und $P_2(y_1, \ldots, y_m)$ n- bzw. m-stellige Prädikate. Dann erhält man

- das n-stellige Prädikat $(\neg P_1)(x_1, \ldots, x_n)$ durch Negation des Prädikats P_1, i.e. $\neg(P_1 (x_1, \ldots, x_n))$

- das n+m-stellige Prädikat $(P_1 \wedge P_2)(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ durch „Verunden" der Prädikate P_1 und P_2 i.e. $P_1(x_1, \ldots, x_n) \wedge P_2 (y_1, \ldots, y_m)$
- das n+m-stellige Prädikat $(P_1 \vee P_2)(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ durch „Verodern" der Prädikate P_1 und P_2 i.e. $P_1(x_1, \ldots, x_n) \vee P_2 (y_1, \ldots, y_m)$

Prädikatenlogik

Anmerkung:

Durch Konstanthalten von Parametern oder durch mehrfaches Einsetzen eines Parameters kann die Stelligkeit eines Prädikats reduziert werden.

Beispiele:

$\mathcal{M}$ = N, teilt(n,m) ergibt gerade(m), falls n=2 konstant gesetzt wird

teilt(2,42) = T, gerade(42) = T

$\mathcal{M}$ = Menschen, Vater(m_1, m_2) $\wedge$ Mutter(m_3, m_4) ergibt Eltern(m_1, m_3, m_4), falls das Kind m_4 identisch m_2 gesetzt wird

Eltern(Johann Sebastian Bach, Maria Barbara Bach, Friedemann Bach) = T

Prädikatenlogik

Quantoren:

Neben $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\neg$ (Junktoren) werden zwei weitere Symbole (**Quantoren**) verwendet, um aus bekannten Prädikaten weitere Prädikate zu erzeugen:

Definition: Sei $P(x_1, \ldots, x_n)$ ein n-stelliges Prädikat. Sei x $\in$ eine der Parameter von P. Dann bezeichnet

$\forall x\, P(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ ein (n-1)-stellige Prädikat mit folgender Abbildung:

$$\forall x\, P(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = \begin{cases} T, \text{ falls } P(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = T \text{ für alle } x \in \mathcal{M} \\ F, \text{ falls es (mindestens) ein } x \in \mathcal{M} \text{ gibt mit} \\ P(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = F \end{cases}$$

Prädikatenlogik

Quantoren:

Der $\forall$-Quantor heißt ***Allquantor*** oder ***Generalisator***

Beispiele:

- $\mathcal{M}$=N (Menge der nat. Zahlen)
  $\forall$ x größer (x,m) ist ein einstelliges Prädikat mit Wert F für alle m
- $\mathcal{M}$=N (Menge der nat. Zahlen)
  $\forall$ x teilt (x,m) ist ein einstelliges Prädikat mit Wert F für alle m
- $\mathcal{M}$=N (Menge der nat. Zahlen)
  $\forall$ m teilt (x,m) ist ein einstelliges Prädikat mit Wert T genau für x=1
- $\forall$x $\forall$ y Q(x,y) ist eine Aussage!

Prädikatenlogik

Quantoren:

Definition: Sei $P(x_1, \ldots, x_n)$ ein n-stelliges Prädikat. Sei $x \in$ eine der Parameter von P. Dann bezeichnet

$\exists x\, P(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1})$ ein (n-1)-stellige Prädikat mit folgender Abbildung:

$$\exists x\, P(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = \begin{cases} T, \text{ falls } P(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = T \text{ für (mindestens) ein } x \in \mathcal{M} \\ F, \text{ falls es (mindestens) ein } x \in \mathcal{M} \text{ gibt mit } P(x, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) = F \end{cases}$$

Der $\exists$-Quantor heißt ***<u>Existenzquantor</u>*** oder ***<u>Partikularisator</u>***

Prädikatenlogik

Quantoren:

Beispiele:

- $\mathcal{M}$=N (Menge der nat. Zahlen)
  $\exists$ x größer (x,m) ist ein einstelliges Prädikat mit Wert T für alle m

- $\mathcal{M}$=N (Menge der nat. Zahlen)
  $\exists$ x kleiner (x,m) ist ein einstelliges Prädikat mit Wert T für alle m>1

Prädikatenlogik

Quantoren:

Definition: Variable, die an Quantoren gebunden sind, heißen ***gebundene Variable***, alle anderen heißen ***freie Variable***

Eine Variable darf in einer Verknüpfung von Prädikaten nicht gleichzeitig frei und gebunden sein.

Prädikatenlogik

Beispiel:

$\mathcal{M}$ Menge aller Menschen, es gelten folgende Axiome:

Vater(x,y) $\Leftrightarrow$ x ist Vater von y
Mutter(w,z) $\Leftrightarrow$ w ist Mutter von z

daraus können folgende Prädikate definiert werden:

- Elternteil(x,y) $\Leftrightarrow$ Vater(x,y) $\vee$ Mutter(x,y)
- Großvater(x,y) $\Leftrightarrow$ $\exists$z Elternteil(z,y) $\wedge$ Vater(x,z)
- Großmutter(x,y) $\Leftrightarrow$ $\exists$z Elternteil(z,y) $\wedge$ Mutter(x,z)
- Urgrossvater(x,y) $\Leftrightarrow$ $\exists$z Elternteil (z,y) $\wedge$ (Grossvater (x,z)

Prädikatenlogik

Beispiel:

weiteres Prädikat:

- Vollgeschwister(x,y) $\Leftrightarrow \exists v$ (Vater (v,x) $\wedge$ Vater(v,y)) $\wedge \exists m$ (Mutter (m,x) $\wedge$ Mutter(m,y)) $\wedge$ x $\neq$ y
- Bruder(x,y) $\Leftrightarrow$ Bruder(y,x)

Definition:

Eine Formel ohne konstante Prädikate, die für jede Wahl der variablen Prädikate und dann für jede mögliche Wahl der Individuenvariablen immer den Wert T ergibt, heißt ***Gesetz der Prädikatenlogik.***

Prädikatenlogik

Die folgenden prädikatenlogischen Formeln sind Gesetze der Prädikatenlogik:

- $\neg(\forall x P(x)) \Leftrightarrow \exists x(\neg P(x))$
- $\forall x (\neg P(x)) \Leftrightarrow \neg(\exists x(P(x))$
- $\forall x P(x) \Rightarrow P(y)$
- $P(y) \Rightarrow \exists x P(x)$
- $\forall x (\forall y P(x,y)) \Leftrightarrow \forall y (\forall x P(x,y))$
- $\exists x (\exists y P(x,y)) \Leftrightarrow \exists y (\exists x P(x,y))$
- $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x))$
- $\exists x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x))$

Prädikatenlogik

Die folgenden prädikatenlogischen Formeln sind ***keine*** Gesetze der Prädikatenlogik:

- $\forall x \, \exists y P(x,y) \Rightarrow \exists x \forall y P(x,y)$

Prädikatenlogik

Anwendung der Prädikatenlogik in der Informatik:

- formale Beschreibungen von Spezifikationen.

Beispiel:

Sei $\mathcal{M}_1$ die Menge aller druckbaren Zeichen und $\mathcal{M}_2$ die Menge aller Texte über $\mathcal{M}_1$, dann kann das Maximum der Vorkommen eines Buchstabens in einem Text vollgendermaßen formuliert werden:

max(b,t) := $\forall$b‘$\in$t vorkommen(b‘,t) $\leq$ vorkommen(b,t)

wobei vorkommen(b,t) die Anzahl angibt, wie oft ein Buchstabe b in einem Text t vorkommt

Prädikatenlogik

Anwendung der Prädikatenlogik in der Informatik:

- formale Beschreibungen von Spezifikationen und Beweisen.

Beispiel:

Sei $\mathcal{M}_1$ die Menger der natürlichen Zahlen:

$f(n,m) := \text{teilt}(n,m) \wedge \forall x(\text{teilt}(x,m) \Rightarrow (x \leq n))$

Zum Schluss dieses Abschnitts …

Noch Fragen ??