Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (30)

Gerald Kupris

22.12.2010

Integrationsregeln unbestimmte Integrale

Bei der Integration darf man einen konstanten Faktor aus dem Integral herausziehen:

$$\int C\, f(x)\, \mathrm{d}x = C \int f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Beispiel

Bei der Integration einer Summe oder Differenz von Funktionen darf man jede Funktion einzeln integrieren:

$$\int f(x) \pm g(x)\, \mathrm{d}x = \int f(x)\, \mathrm{d}x \pm \int g(x)\, \mathrm{d}x.$$

Beispiel

Integrationsregeln bestimmte Integrale

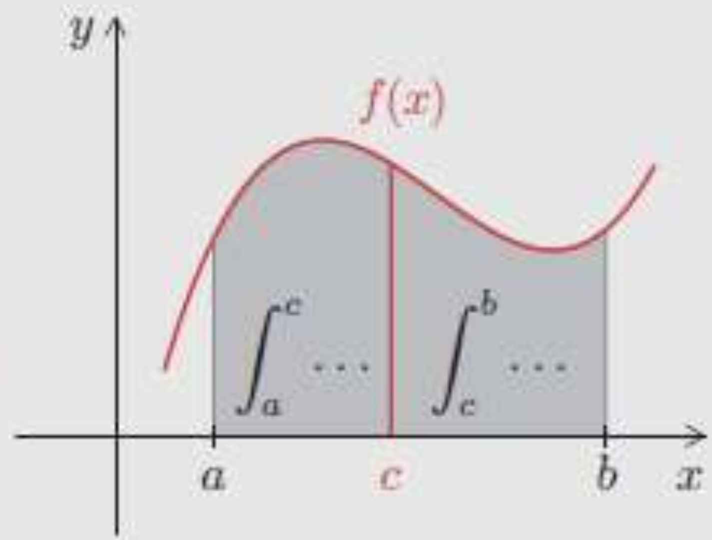
Vertauscht man bei einem bestimmten Integral Ober- und Untergrenze, so ändert sich das Vorzeichen:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ein bestimmtes Integral über dem Intervall $[a, b]$ lässt sich in Teilintegrale aufspalten:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das Aufspalten ist selbst dann noch möglich, wenn c nicht im Intervall $[a, b]$ liegt.



Integrationsregeln

Eine Funktion, die

- ungerade ist, besitzt gerade Stammfunktionen:

$$\int f_u(x)\,\mathrm{d}x = F_g(x) + C.$$

- gerade ist, besitzt, abgesehen von einer Konstanten, ungerade Stammfunktionen:

$$\int f_g(x)\,\mathrm{d}x = F_u(x) + C.$$

Beispiel

Symmetrisches Intervall

Das bestimmte Integral über ein zum Ursprung symmetrisches Intervall $[-a, a]$ einer

- ungeraden Funktion f_u ist immer null:

$$\int_{-a}^{a} f_u(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

- geraden Funktion f_g hat genau den doppelten Wert wie das Integral über dem halben Intervall $[0, a]$:

$$\int_{-a}^{a} f_g(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} f_g(x)\mathrm{d}x.$$

Beispiel

Stammfunktionen der wichtigsten Funktionen

Funktion	Stammfunktion	Funktion	Stammfunktion
$\int e^x \, dx$	$= e^x + C$	$\int \sin x \, dx$	$= -\cos x + C$
$\int x^a \, dx$	$= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1$	$\int \cos x \, dx$	$= \sin x + C$
$\int \frac{1}{x} \, dx$	$= \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx$	$= \arctan x + C$

Ableitungen der wichtigsten Funktionen

Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$	Funktion $f(x)$	Ableitung $f'(x)$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R})$	$a\,x^{a-1}$	$\sin x$	$\cos x$
e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Logarithmusfunktion

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis a bezeichnet man als **Logarithmusfunktion** zur Basis a:

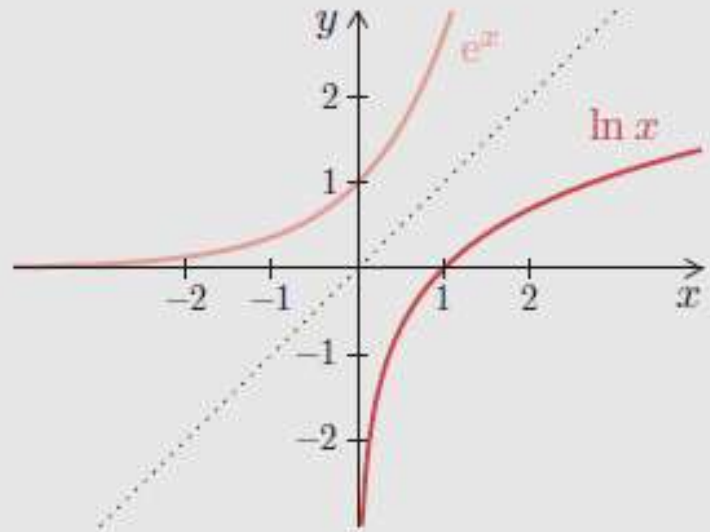
$$f(x) = a^x \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \log_a x.$$

Die Logarithmusfunktion zur Basis e bezeichnet man als **natürliche Logarithmusfunktion**:

$$f(x) = e^x \quad \Longleftrightarrow \quad f^{-1}(x) = \ln x.$$

Eigenschaften der natürlichen Logarithmusfunktion

- Definitionsbereich: $D = (0, \infty)$
- Wertebereich: $W = \mathbb{R}$
- Monotonie: streng monoton wachsend
- Asymptoten: y-Achse für $x \to 0$
- Nullstelle: $x = 1$



Rechenregeln für Logarithmusfunktionen

Logarithmen von Produkten kann man in Summen einzelner Logarithmen zerlegen:

- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $\ln(x_1 \cdot x_2) = \ln x_1 + \ln x_2$

Logarithmen von Quotienten kann man in Differenzen einzelner Logarithmen zerlegen:

- $\log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln x_1 - \ln x_2$

Logarithmen von Potenzen kann man in Produkte mit der Hochzahl zerlegen:

- $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a x$
- $\ln(x^b) = b \cdot \ln x$

Rechenregeln für Logarithmusfunktionen

Zusammenhang von a^x und e^x

Eine Exponentialfunktion mit Basis a lässt sich als e-Funktion darstellen:

$$a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}.$$

Zusammenhang von $\log_a x$ und $\ln x$

Eine Logarithmusfunktion zur Basis a lässt sich als $\ln$-Funktion darstellen:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Stammfunktionen gebrochenrationaler Funktionen

Stammfunktionen einer gebrochenrationalen Funktion der Form

$$\int \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_m x^m} \, \mathrm{d}x$$

bestimmt man, indem man

- eine unecht gebrochenrationale Funktion durch Polynomdivision in ein Polynom und eine echt gebrochenrationale Funktion zerlegt und
- eine echt gebrochenrationale Funktion mithilfe einer Partialbruchzerlegung in Summen unterteilt.

Beispiele

Stammfunktionen bei der Partialbruchzerlegung (Teil I)

Partialbrüche mit einfachen oder mehrfachen reellen Nennernullstellen x_0 lassen sich mit Stammfunktionen folgender Form integrieren:

- $\displaystyle\int \frac{1}{x-x_0}\,\mathrm{d}x = \ln|x-x_0| + C$
- $\displaystyle\int \frac{1}{(x-x_0)^n}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{(n-1)(x-x_0)^{n-1}} + C, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$

Beispiel

Stammfunktionen bei der Partialbruchzerlegung (Teil II)

Partialbrüche, bei denen sich der Nenner nicht vollständig in Linearfaktoren zerlegen lässt und somit quadratische Faktoren enthält, führt man auf folgende Integrale zurück:

- $\int \frac{2\,x+b}{x^2+b\,x+c}\,\mathrm{d}\,x = \ln|x^2+b\,x+c| + C$
- $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

Beispiel

Flächenberechnung

Die Fläche A, die das Schaubild einer nicht negativen Funktion f für x-Werte zwischen a und b mit der x-Achse einschließt, entspricht genau dem bestimmten Integral der Funktion f zwischen a und b:

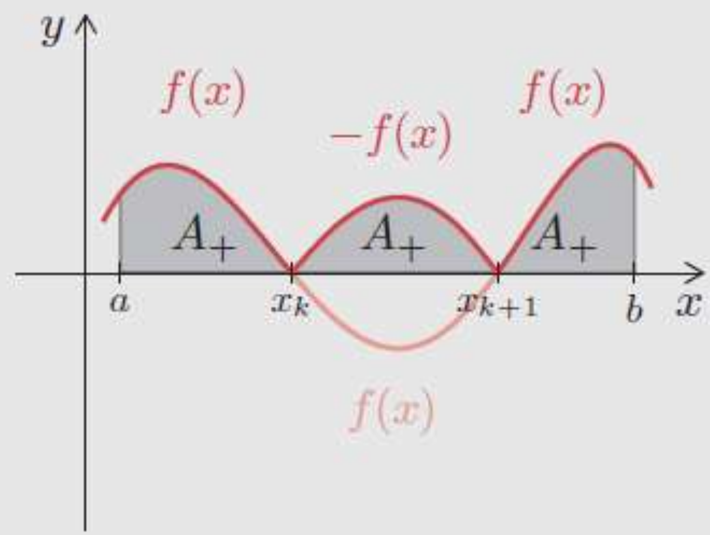
$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Beispiel

Flächenberechnung bei negativen Funktionswerten

Bei der Berechnung des Flächeninhaltes, den das Schaubild einer Funktion f mit der x-Achse bildet, benötigt man alle Nullstellen x_0, x_1, ... der Funktion im Intervall $[a, b]$. Auf Teilintervallen $[x_k, x_{k+1}]$, in denen die Funktion negative Werte annimmt, integriert man über die negative Funktion

$$A_+ = \int_{x_k}^{x_{k+1}} (-f(x))\,\mathrm{d}x.$$



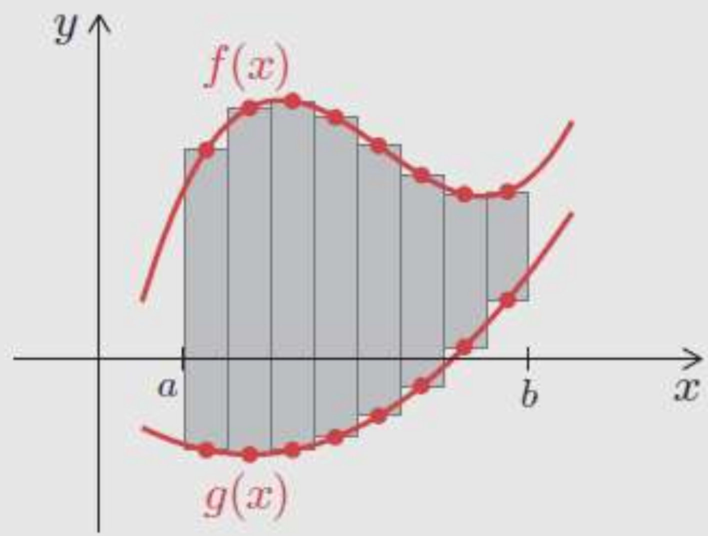
Beispiel

Fläche zwischen zwei Funktionen

Den Flächeninhalt A der Fläche, die durch das Schaubild der beiden Funktionen f und g für x-Werte zwischen a und b begrenzt wird, kann man durch

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

berechnen. Dabei darf die Funktion f für alle x-Werte zwischen a und b nicht unterhalb der Funktion g verlaufen.



Beispiele

Schwerpunkt

Die Koordinaten des Schwerpunkts $S(x_S \,|\, y_S)$, des Flächenstücks, das durch das Schaubild einer nicht negativen, stetigen Funktion f für x-Werte zwischen a und b und der x-Achse begrenzt wird, kann man durch

$$x_S = \frac{M_y}{A} = \frac{1}{A} \int_a^b x\,f(x)\,\mathrm{d}\,x, \qquad y_S = \frac{M_x}{A} = \frac{1}{2\,A} \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}\,x$$

berechnen. Dabei sind M_x und M_y die statischen Momente bezüglich der x-Achse bzw. y-Achse und A der Flächeninhalt des Flächenstücks.

Beispiel

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org