HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences



Grundlagen der ET (10)

Gerald Kupris

12.12.2012

DEGGENDORF UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Analyse linearer Gleichstromnetzwerke

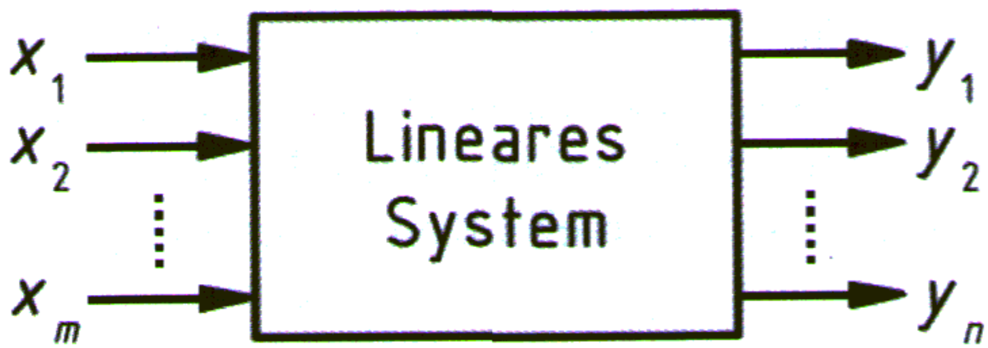
Lineare Gleichstromnetzwerke bestehen ausschließlich aus linearen Widerständen und linearen oder idealen Quellen. Da das Klemmenverhalten jeder linearen Quelle mittels eines linearen Widerstandes und einer idealen Quelle modelliert werden kann, ist jedes lineare Gleichstromnetzwerk unter ausschließlicher Verwendung dreier elementarer Zweipoltypen beschreibbar, nämlich:

- lineare Widerstände
- ideale Stromquellen
- ideale Spannungsquellen.

Werden beliebig viele lineare Zweipole in beliebiger Weise widerspruchsfrei zu einem Netzwerk verschaltet, so wird der Zusammenhang zwischen einem beliebigen Strom oder einer beliebigen Spannung und einem beliebigen anderen Strom und einer beliebigen anderen Spannung im Netzwerk stets durch eine **lineare Gleichung** beschrieben.

Der Zusammenhang zwischen allen Strömen und Spannungen in einem linearen Gleichstromnetzwerk wird durch ein System linearer algebraischer Gleichungen beschrieben.

Allgemeines lineares System mit Ein- und Ausgangsgrößen



Eine Abbildung ***f*** heißt dann linear, falls gelten:

$$y = f(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = f(\vec{x}_1) + f(\vec{x}_2) \mid \vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \Re^n$$

$$y = f(\lambda \cdot \vec{x}) = \lambda \cdot f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \Re^n, \lambda \in \Re$$

Aufgabe der Netzwerkanalyse

Jeder Zweig eines linearen Gleichstromnetzwerkes besteht aus einem von vier Typen von (Ersatz-) Zweipolen:

- linearer (Ersatz-) Widerstand
- lineare (Ersatz-) Spannungsquelle
- ideale (Ersatz-) Spannungsquelle
- ideale Stromquelle, ggf. in Reihe mit einem weiteren Zweipol.

Ein lineares Gleichstromnetzwerk , bei dem alle Widerstandswerte R_λ und alle Quell-größen $U_{q\mu}$ bzw. $I_{q\mu}$ bekannt sind, gilt als analysiert, wenn:

- die Ströme durch alle Widerstände
- die Ströme durch alle Spannungsquellen
- die Spannungen über allen Stromquellen

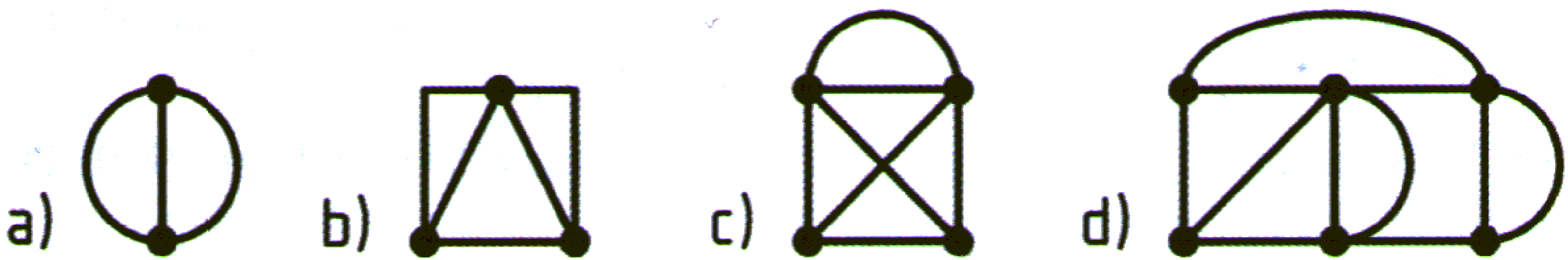
ermittelt worden sind. Die Spannungen über den Widerständen lassen sich bei Bedarf anschließend einfach mittels des Ohmschen Gesetzes einzeln berechnen.

Topologie und Graph eines Netzwerkes

Unter der Topologie eines Netzwerkes versteht man seine Struktur. Sie wird beschrieben durch die Anzahl **k** der Knoten, die Anzahl **z** der Zweige und der Anordnung der Zweige zwischen den Knoten, also auch der Anordnung der Maschen.

Die Topologie eines Netzwerkes wird in Form von Graphen dargestellt. Ein Graph besteht aus Kanten (den Zweigen des Netzwerkes) und Knoten (den Knoten des Netzwerkes).

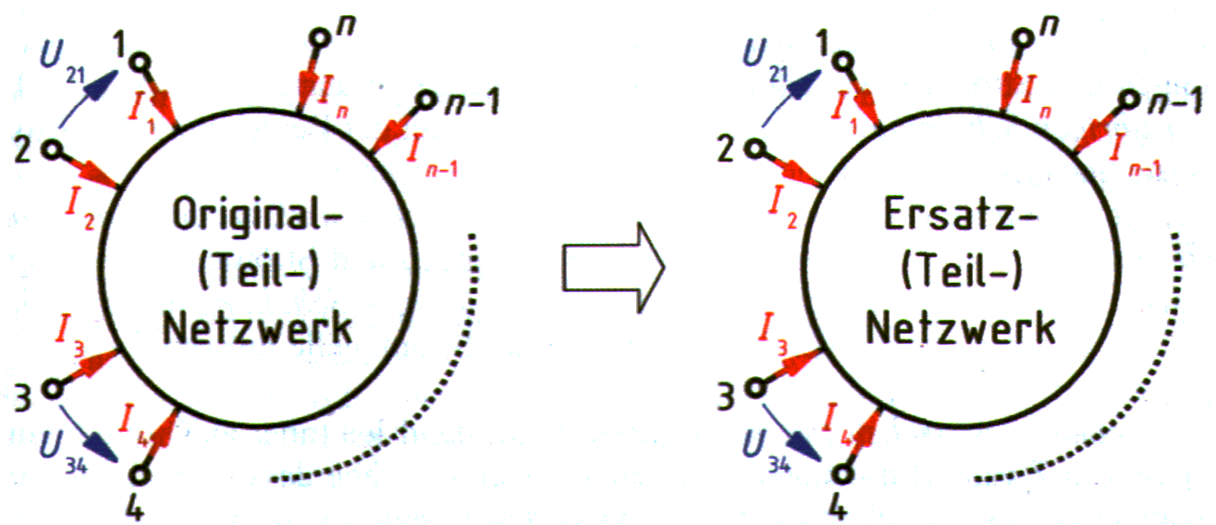
Beispiele für Graphen von Netzwerken:



Netzwerkumformung

Ziel einer Netzwerkumformung im Rahmen der Netzwerkanalyse ist es, ein lineares Teilnetzwerk in ein einfacheres, bezüglich seines Klemmenverhaltens aber identisches lineares Ersatznetzwerk umzuwandeln:

gleiche Spannungen, gleiche Ströme, gleiche Widerstände zwischen einander entsprechenden Klemmen.

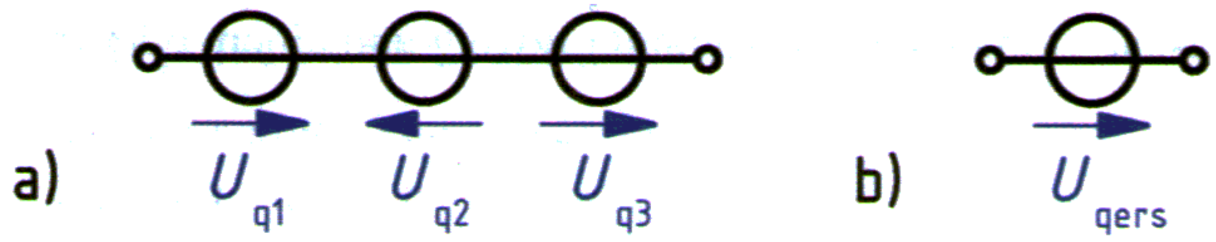


Regeln für die Netzwerkumformung (1)

1. In Reihe geschaltete Widerstände können zu einem Ersatzwiderstand zusammengefasst werden.

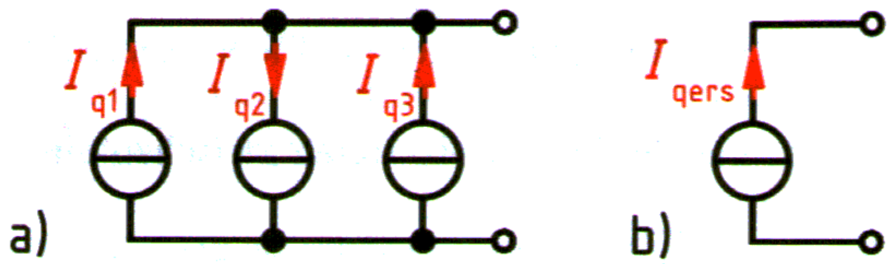
2. Parallel geschaltete Widerstände können zu einem Ersatzwiderstand zusammengefasst werden. Parallel geschaltete Leitwerte können zu einem Ersatzleitwert zusammengefasst werden.

3. In Reihe geschaltete ideale Spannungsquellen können durch eine ideale Ersatz-Spannungsquelle ersetzt werden. Beispiel: $\mathbf{U_{qers} = U_{q1} - U_{q2} + U_{q3}}$



Regeln für die Netzwerkumformung (2)

4. Parallel geschaltete ideale Stromquellen können durch eine ideale Ersatz-Stromquelle ersetzt werden. Beispíel: $\mathbf{I_{qers} = I_{q1} - I_{q2} + I_{q3}}$



5. Widerstände, die parallel zu einer idealen Spannungsquelle geschaltet sind, beeinflussen die Spannungen und Ströme in der übrigen Schaltung nicht und dürfen daher bei der Berechnung der übrigen Schaltung unberücksichtigt bleiben. Bei der Bereechnung des Stroms durch die Spannungsquelle müssen sie aber beruchsichtigt werden.

6. Widerstände, die in Reihe zu einer idealen Stromquelle geschaltet sind, haben keine strombegrenzende Wirkung und beeinflussen somit die Spannungen und Ströme in der übrigen Schaltung nicht. Sie dürfen daher bei der Berechnung der übrigen Schaltung unberücksichtigt bleiben. Bei der Berechnung der Spannung über der Stromquelle müssen sie aber berücksichtigt werden.

Regeln für die Netzwerkumformung (3)

7. Knoten mit gleichem elektrischen Potenzial dürfen widerstandslos (aber auch durch einen beliebigen passiven Zweipol) miteinander verbunden werden, ohne dass sich an den Strömen und Spannungen in der Schaltung etwas ändert. Durch eine solche Verbindung fließt kein Strom. Ein Kurzschluss zwischen zwei Knoten führt aber dazu, dass die zuvor unterschiedlichen zwei Knoten zu einem Superknoten zusammengefasst werden.

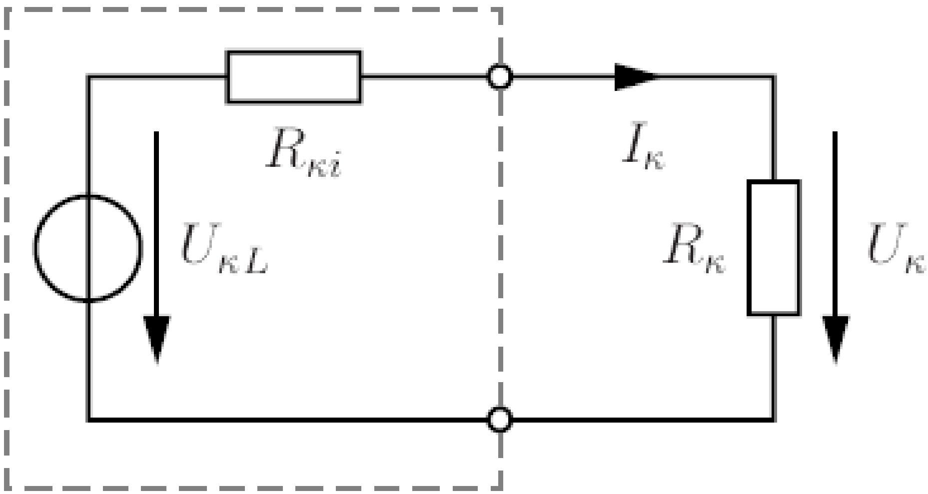
8. Zweige, durch die kein Strom fließt, dürfen aus der Schaltung entfernt werden, ohne dass sich an den Strömen und Spannungen in der Schaltung etwas ändert. Ein Zweig, durch den kein Strom fließt, trägt nicht dazu bei, die Knoten, die er verbindet, auf ein bestimmtes Potenzial zu bringen.

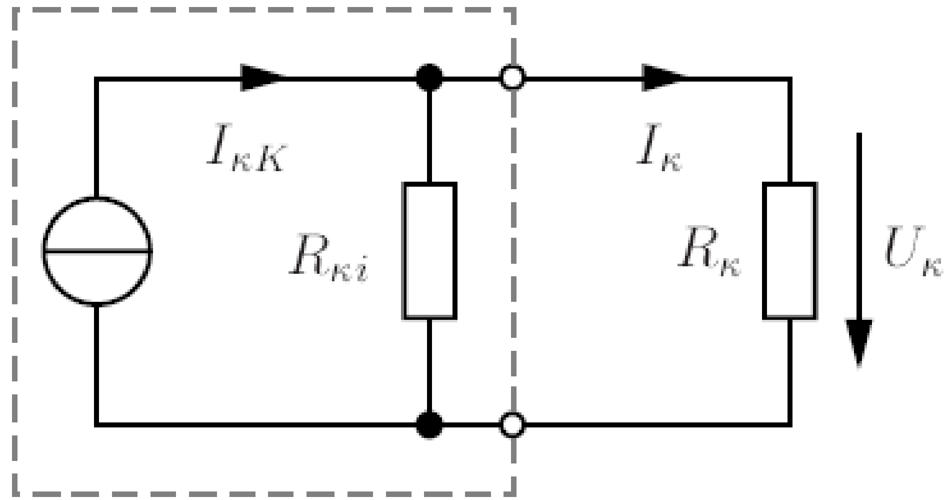
9. Lineare Spannungsquellen dürfen durch lineare Stromquellen ersetzt werden und umgekehrt, ohne dass sich an den Strömen und Spannungen in der übrigen Schaltung etwas ändert.

Lineare (technische) Quellen

Jeder linearen Spannungsquelle entspricht eine lineare Stromquelle und jeder linearen Stromquelle entspricht eine lineare Spannungsquelle.

Damit lässt sich jede lineare Spannungsquelle **(in einer Schaltung)** in eine lineare Stromquelle umwandeln und umgekehrt.





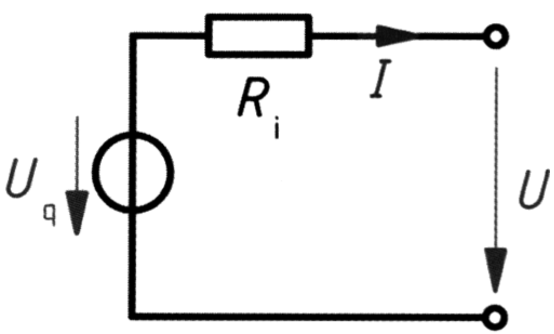
Wiederholung: Gleichwertigkeit linearer Quellen

$$U(I) = U_0 - R_i \cdot I$$

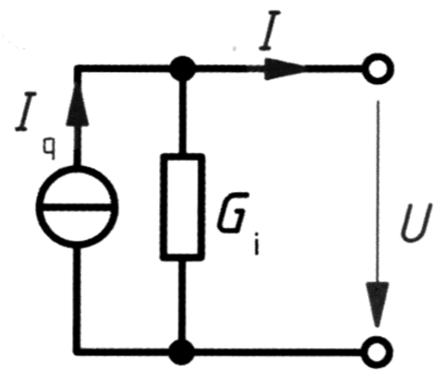
$$I(U) = I_k - G_i \cdot U$$

$$U = U_q - R_i I$$

$$I = I_q - G_i U$$



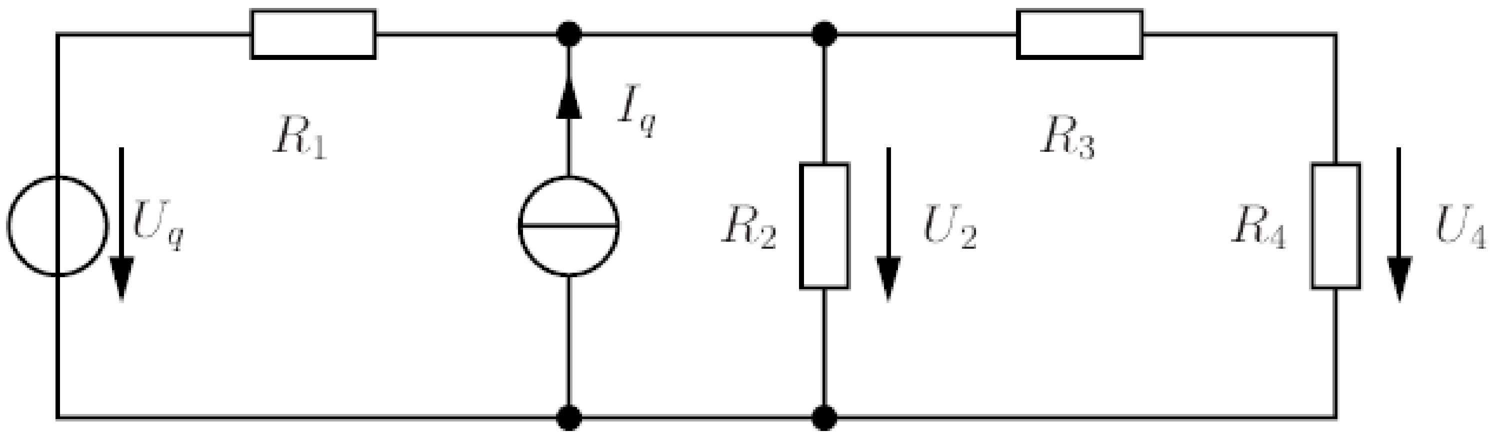
lineare Spannungsquelle

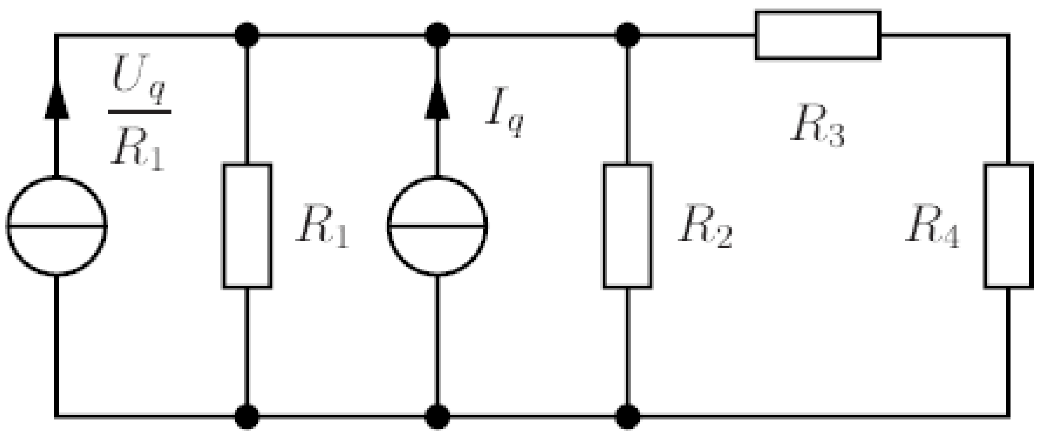


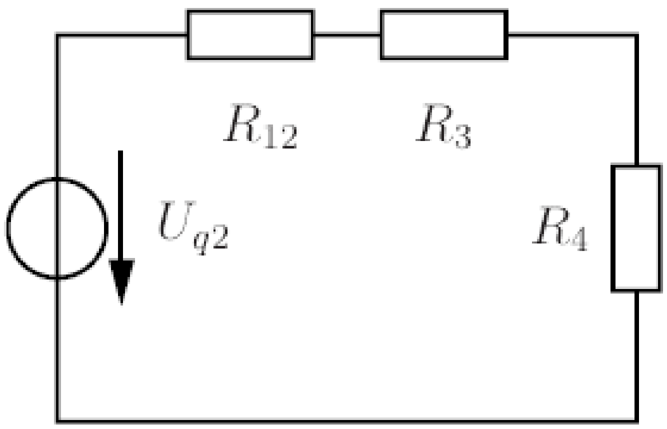
lineare Stromquelle

$$U_q = I_q R_i \qquad R_i = 1/G_i$$

Beispiel: gesucht ist die Spannung U_4







Problematisch: Unzulässige Schaltungen

Bestimmte Zusammenschaltungen idealer Quellen führen zu einem physikalischen Widerspruch und sind daher unzulässig. Der Versuch, ein solches Netzwerk zu berechnen, führt zu einem nicht lösbaren Gleichungssystem.

a) Parallelschaltung idealer Spannungsquellen mit unterschiedlichen Quellenspannungen: Dies würde zu einem Widerspruch führen, da in einem Gleichstromnetzwerk die Potenzialdifferenz einen eindeutigen Wert hat.

b) Reihenschaltung idealer Stromquellen mit unterschiedlichen Quellenströmen: Dies würde zu einem Widerspruch führen, da durch alle Zweipole eines Zweiges stets der gleiche Strom fließt.

In der Praxis gibt es keine idealen Quellen, deswegen stellen die genannten Fälle keine Probleme dar. Allerdings können die entstehenden hohen Ausgleichsströme eine thermische Zerstörung der Quelle bewirken.

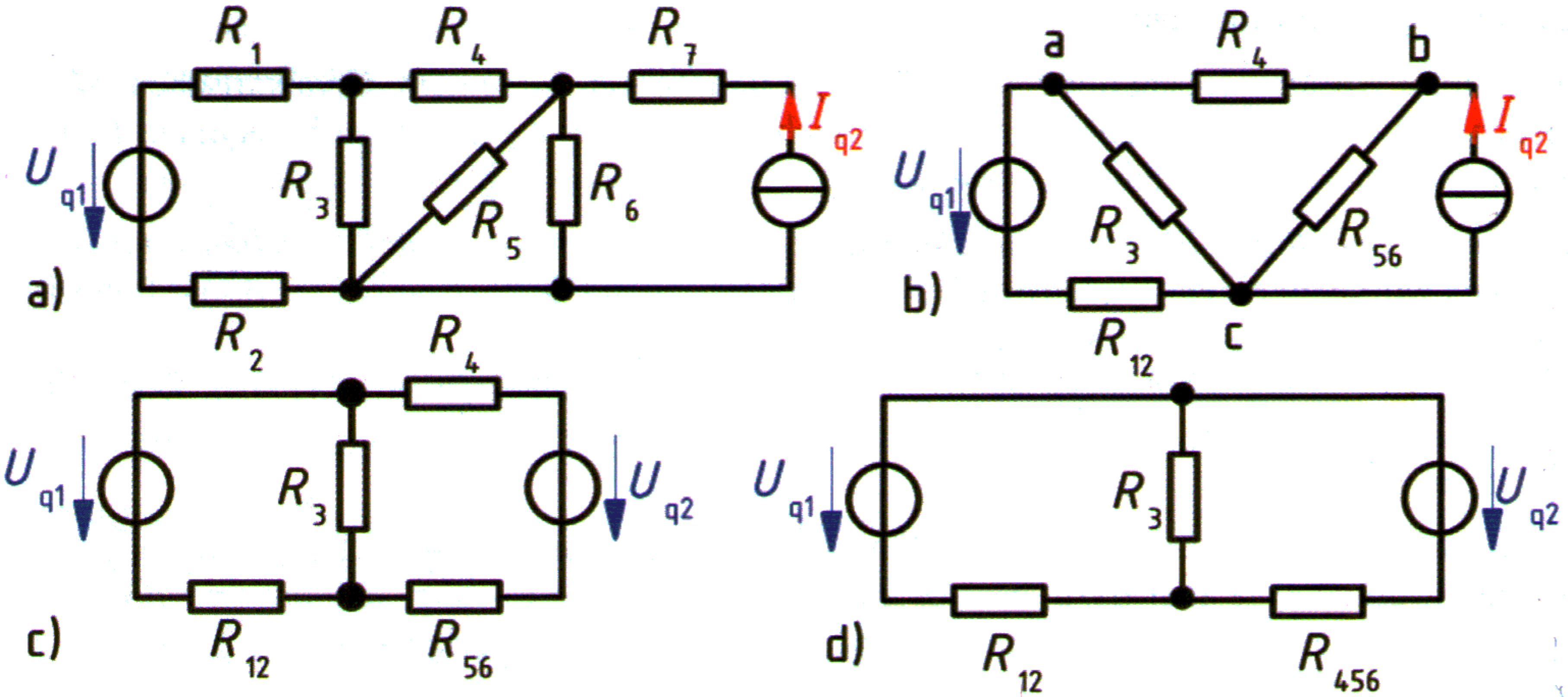
Problematisch: Uneindeutige Schaltungen

Bestimmte Verschaltungen idealer Quellen sind zwar physikalisch sinnvoll, führen bei der Netzwerkanalyse aber dazu, dass es nicht eine eindeutige Lösung, sondern unendlich viele verschiedene Lösungen gibt. Damit ist eine vollständige Netzwerkanalyse nicht möglich.

a) Parallelschaltung idealer Spannungsquellen mit identischen Quellenspannungen. Es gibt keine Möglichkeit, die Aufteilung des Gesamtstroms auf die einzelnen Quellen zu bestimmen.

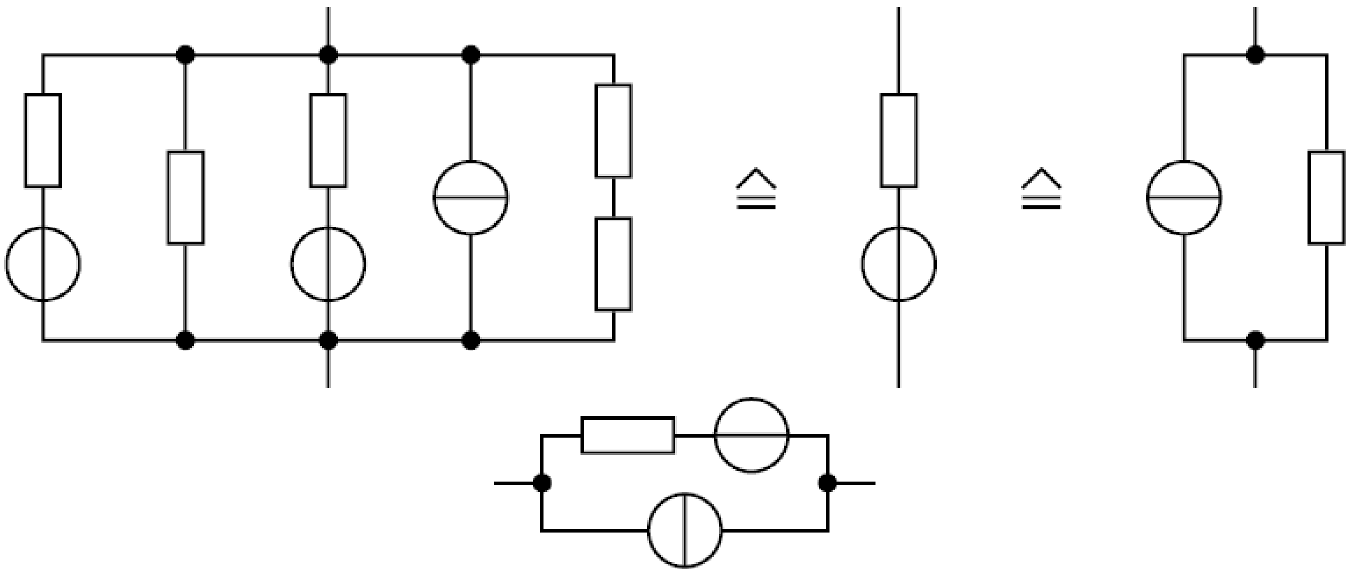
b) Reihenschaltung idealer Stromquellen mit identischen Quellenströmen. Es gibt keine Möglichkeit, die Aufteilung der Gesamtspannung auf die einzelnen Quellen zu bestimmen.

Beispiel: Schrittweise Vereinfachung einer Schaltung

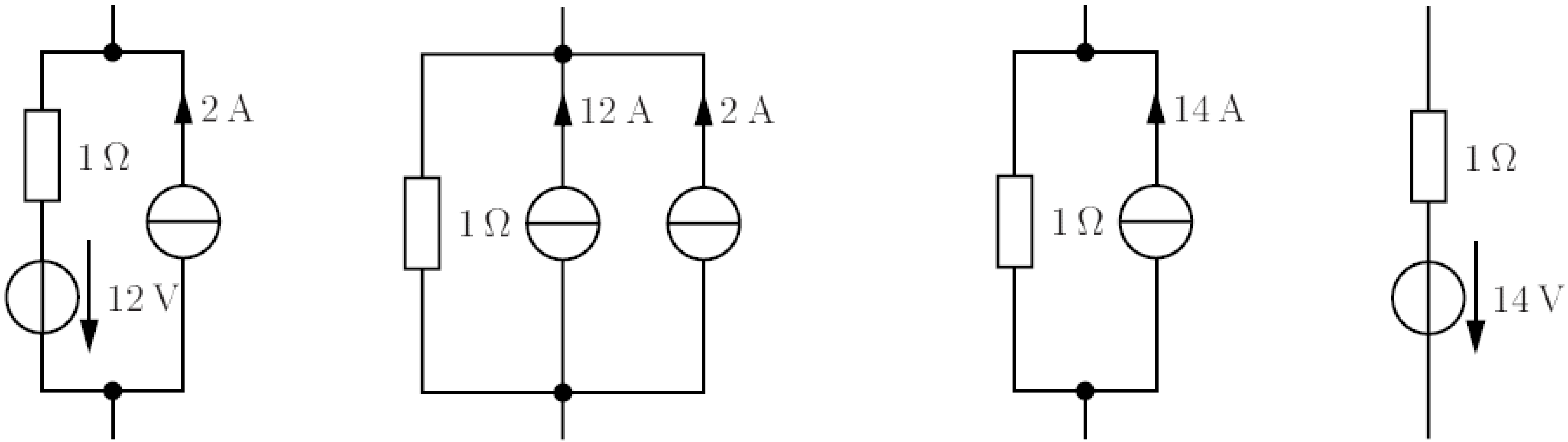


Zusammenfassung paralleler Zweige

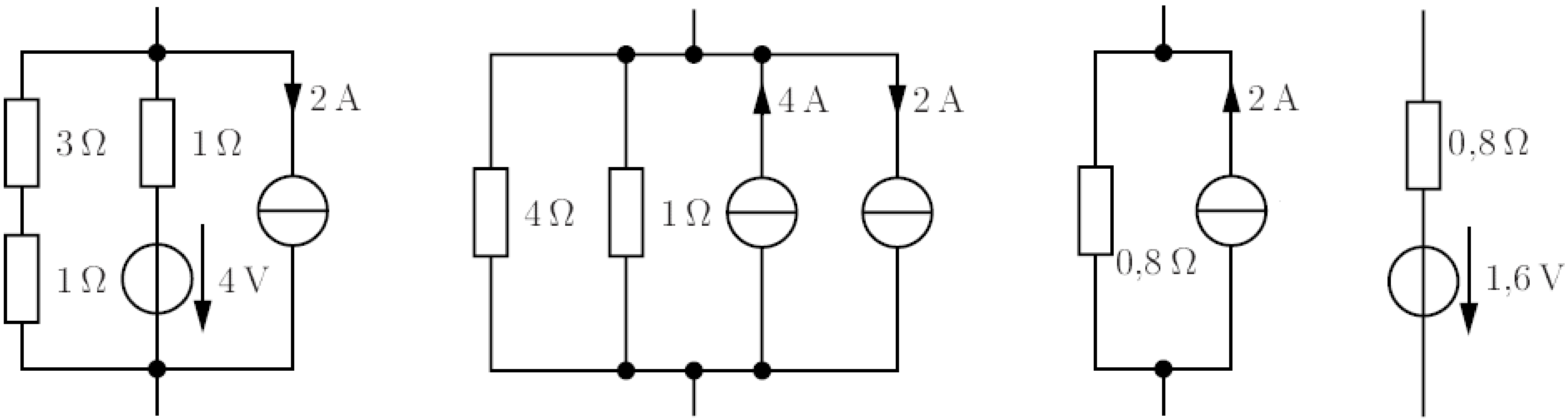
Zur Vereinfachung und Abkürzung der eigentlichen Rechnung sollten komplexe Netzwerke soweit vereinfacht werden, dass zwei Konten höchstens durch zwei Zweige verbunden sind. Liegen in einem linearen Netzwerk mehrere Zweige parallel, so können die Spannungs-quellen mit Innenwiderstand in Stromquellen umgewandelt und zusammengefasst werden. Die Widerstände können ebenfalls zusammengefasst werden. Die entstehende lineare Stromquelle kann kann schließlich noch in eine lineare Spannungsquelle umgewandelt werden.



Beispiel: Zusammenfassung paralleler Zweige

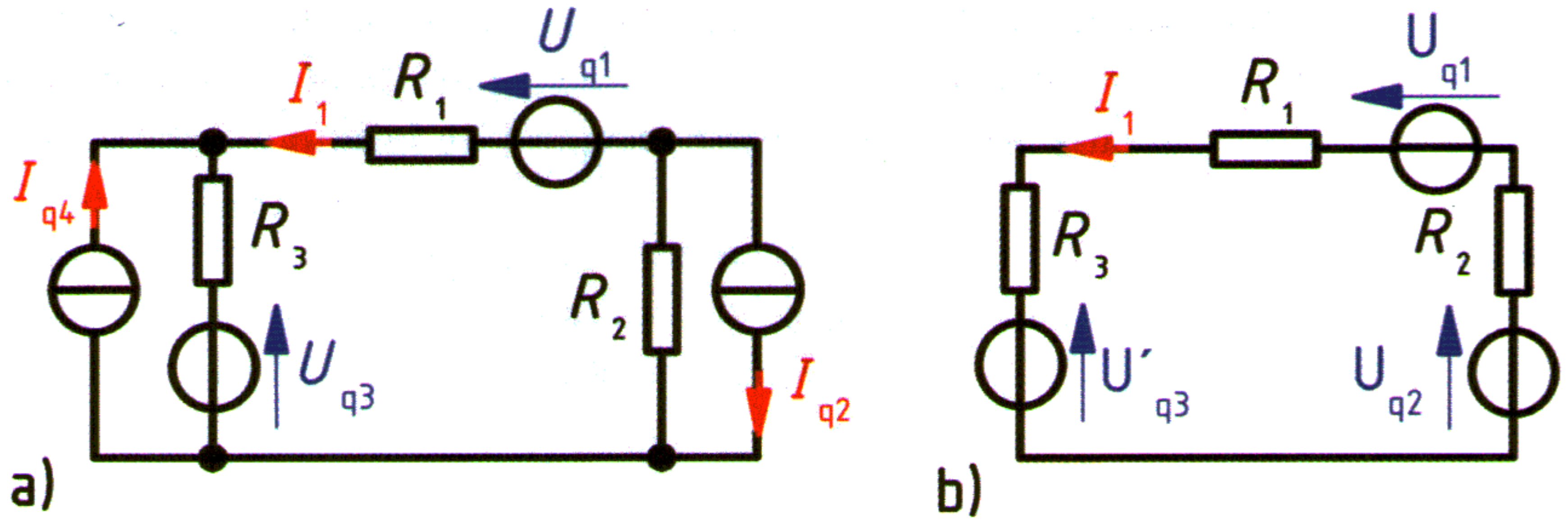


Beispiel: Zusammenfassung paralleler Zweige



Beispiel: Zusammenfassung von Quellen

Der Strom I_1 im Netzwerk soll berechnet werden. Bekannt sind U_{q1}=16V, I_{q2}=4,8A, U_{q3}=10V, I_{q4}=7,5A, R_1=2,1Ω, R_2=5Ω, R_3=0,4Ω.



Weitere Analyse nach der Vereinfachung

Nach der Vereinfachung der Schaltung kann die weitere Analyse mittels verschiedener Hilfsmittel erfolgen:

- Knoten- und Maschenanalyse mit dem Verfahren des vollständigen Baumes
- Überlagerungsverfahren
- Einsatz von Ersatz-Quellen
- Knotenspannungsanalyse
- Maschenstromanalyse

Vollständige Knoten- und Maschenanalyse

1. Anwenden der Regeln der Netzwerkumformung, insbesondere Zusammenfassung von Schaltungsteilen, deren elektrische Größen nicht gesucht sind.

2. Es sind Zählpfeile für alle beteiligten Ströme und Spannungen festzulegen.

3. Aufstellen von **k-1** voneinander unabhängigen Knotengleichungen. Ströme mit zu dem Knoten weisenden Zählpfeil sind positiv zu werten.

4. Zeichnen des Graphen des Netzwerkes und Auswahl eines **vollständigen Baumes**.

5. Aufstellen von **m = z - k + 1** voneinander unabhängigen Maschengleichungen. Der Umlaufsinn ist für jede Masche beliebig wählbar.

6. Lösung des linearen Gleichungssystems für die **z** unbekannten Zweigströme.

7. Gegebenenfalls Rückgängigmachen der durchgeführten Netzwerkumformungen.

Anzahl der Knoten- und Maschengleichungen

Bei **k** Knotenpunkten in einem Netzwerk lassen sich **k** Stromgleichungen aufstellen. Die k-te Gleichung ergibt sich aber stets auch, wenn die übrigen Stromgleichungen addiert oder subtrahiert werden. Sie ist daher nicht unabhängig und somit für die Lösung nicht brauchbar.

Allgemein liefern **k** Knotenpunkte nur **k-1** voneinander unabhängige Knotengleichungen für die **z** Zweigströme. Die übrigen **z - (k - 1) = z - k + 1** Gleichungen müssen in Form von Maschengleichungen aufgestellt werden.

Während es gleichgültig ist, welchen der **k** Knoten man bei der Aufstellung der Knotengleichungen auslässt, ist es ratsam bei der Auswahl der Maschen einer bestimmten Strategie zu folgen. Daraus ergibt sich folgender Zusammenhang:

z	Gesamtzahl der Zweige und damit Gesamtzahl der Gleichungen
k - 1	Anzahl der Knotengleichungen
z - k + 1	Anzahl der Maschengleichungen

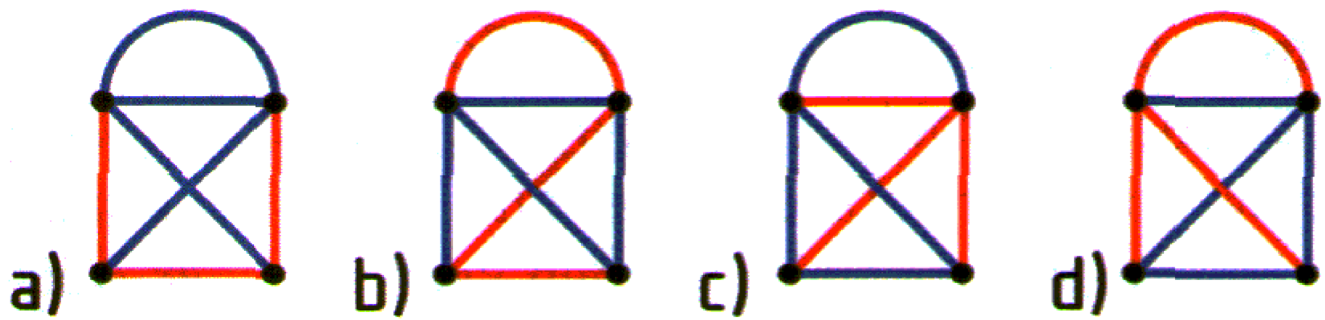
Verfahren des vollständigen Baumes

Um sicherzustellen, dass die ausgewählten Maschen Gleichungen liefern, die voneinander unabhängig sind, bedient man sich folgenden Verfahrens: man wählt aus den Zweigen des Netzwerkes einige aus, die gemeinsam die Verbindung zwischen allen Knoten des Netzwerkes herstellen, wobei darauf zu achten ist, dass die ausgewählten Zweige an keiner Stelle eine in sich geschlossene Schleife bilden, ansonsten ist die Auswahl der Zweige beliebig.

Ein solches Gebilde bezeichnet man als **vollständigen Baum**. Ein Linienkomplex, der keine Schleife bildet, nennt man einen Baum. Der Baum heißt vollständig, wenn er alle Knoten miteinander verbindet. Die Zweige des vollständigen Baumes nennt man auch Baumzweige.

Für ein umfangreiches Netzwerk gibt es sehr viele Möglichkeiten, einen vollständigen Baum auszuwählen. Bei einem vollständig besetzten Netzwerk (d. h. jeder Knoten ist mit jedem anderen Knoten mit genau einem Zweig verbunden) mit **k** Knoten gibt es genau $\mathbf{k^{k-2}}$ vollständige Bäume.

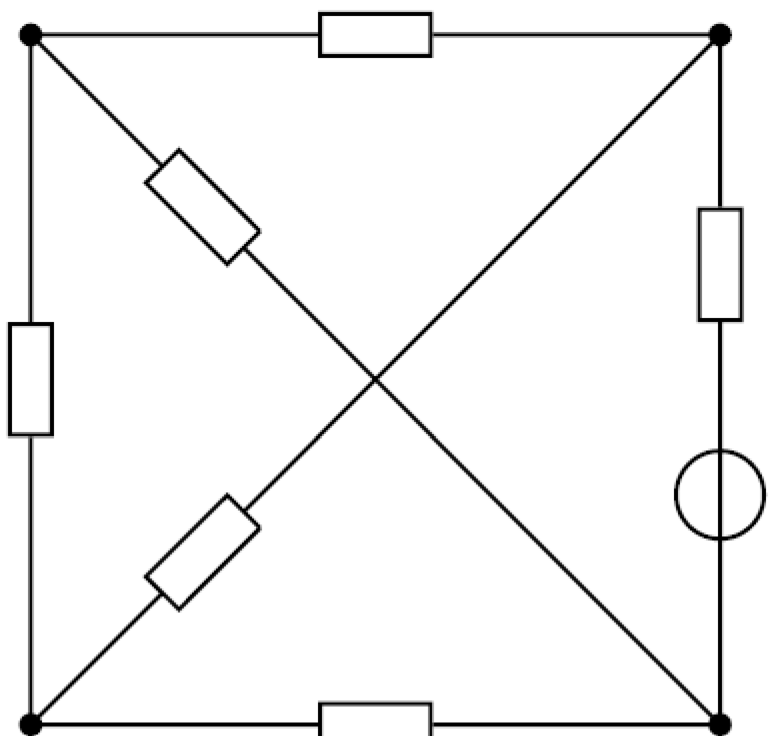
Baum eines Graphen



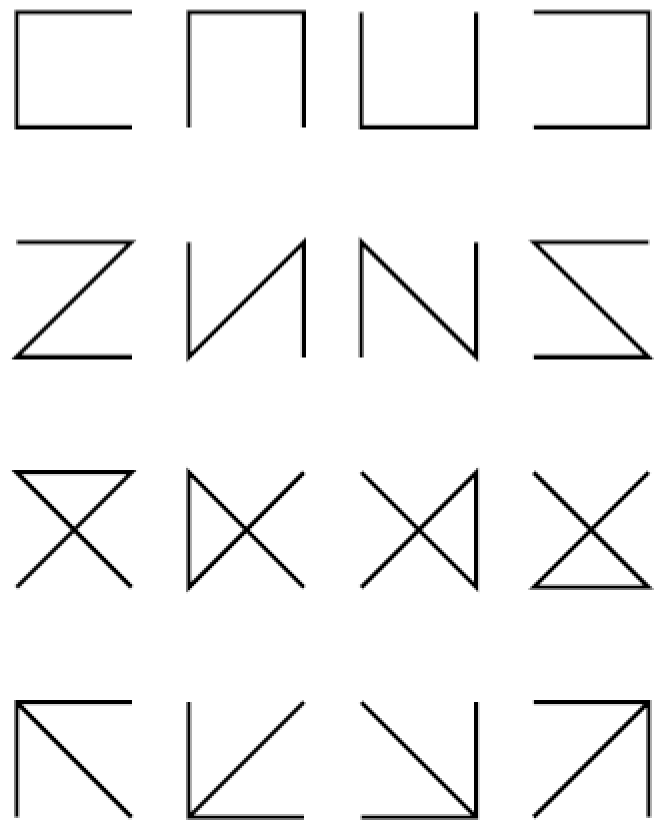
Ein vollständiger Baum eines Graphen ist eine zusammenhängende Verbindung aller Knoten des Graphen, die keine Masche enthält.In komplexen Graphen existieren meist mehrere verschiedene vollständige Bäume.

Um **k** Knoten maschenfrei miteinander zu verbinden, werden **k-1** Zweige benötigt. Daher enthält jeder vollständige Baum genau **k-1** Zweige. Die Zweige, die zu dem ausgewählten vollständigen Baum gehören, heißen Baumzweige (rot), die anderen Verbindungszweige (blau). Ein Graph mit **z** Zweigen und **k** Knoten enthält **z - (k-1) = z - k + 1** Verbindungszweige. Durch einen vollständigen Baum und einen Verbindungszweig wird genau eine Masche definiert. Daher enthält jeder Baum **z - k + 1** Maschen.

Beispiel eines Netzwerk mit allen vollständigen Bäumen



$k = 4 \ , \quad z = 6 \ , \quad k^{k-2} = 16$



Festlegung der Maschengleichungen

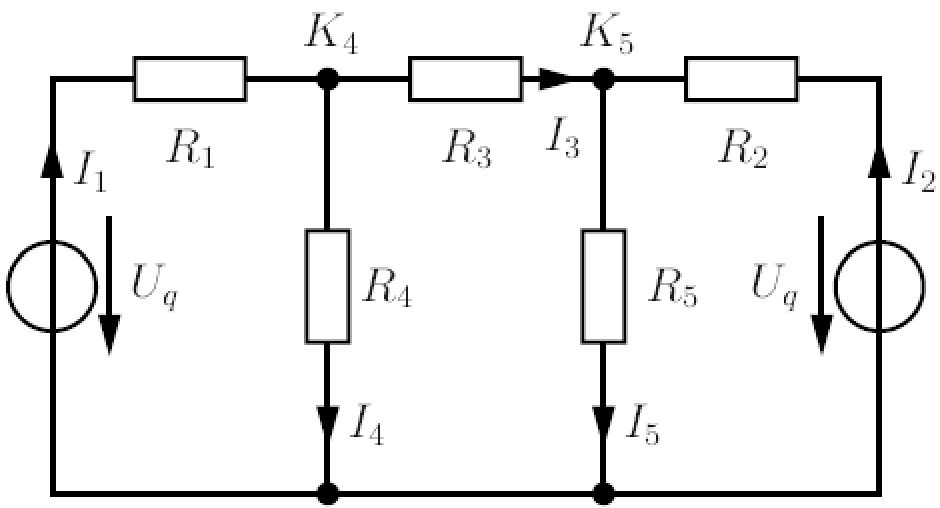
Allen vollständigen Bäumen ist gemeinsam, dass sie bei **k** miteinander zu verbindenden Knoten aus genau **k-1** Zweigen bestehen. Es bleiben daher stets **z - (k - 1) = z - k + 1** Zweige übrig, die nicht Bestandteil des vollständigen Baumes sind. Ihre Anzahl entspricht exakt der Anzahl der noch benötigten Maschengleichungen.

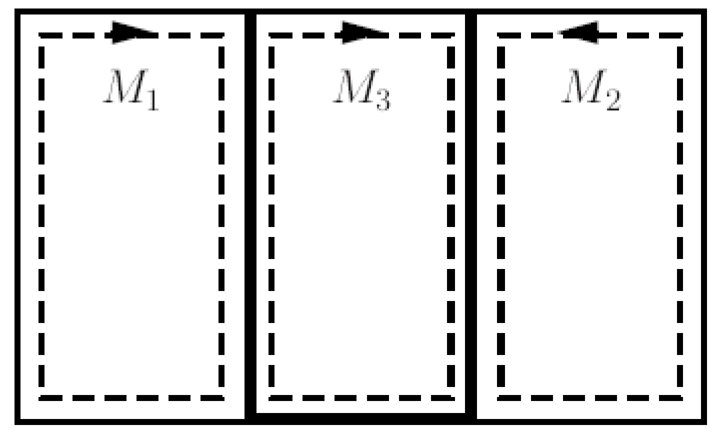
Die Festlegung der **z - k +1** Maschen muss so vorgenommen werden, dass jede Masche genau einen der **z - k +1** Verbindungszweige enthält. Sie muss also ansonsten über den vollständigen Baum geschlossen werden. Auf diese Weise entstehen **z - k + 1** unterschiedliche Maschen, in denen jeweils ein Zweig auftritt, der in den anderen Gleichungen nicht vorkommt.

Bei festgelegtem vollständigen Baum steht damit automatisch für jede Masche und damit für jeden Verbindungszweig der Weg über den vollständigen Baum fest.

Maschen, die mit Hilfe des Verfahrens des vollständigen Baumes festgelegt worden sind, liefern mit Sicherheit Maschengleichungen, die voneinander unabhängig sind. Bei kleineren Netzwerken kann man aber häufig auf dieses Verfahren verzichten.

Beispiel eines Netzwerkes (1)





Vollständiger Baum

Verbindungszweige

Maschen

$k = 3\,, \quad z = 5$

$k - 1 = 2\,, \quad z - k + 1 = 3$

$K_4 : I_1 = I_3 + I_4$

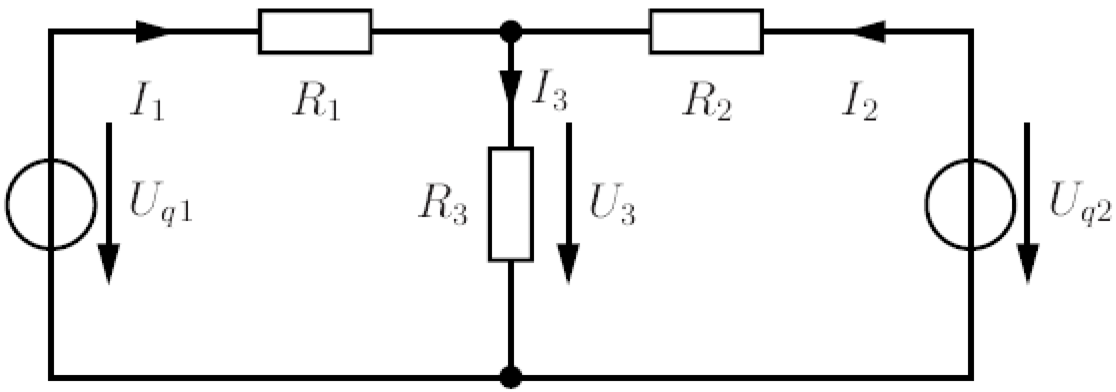
$K_5 : I_2 = I_5 - I_3$

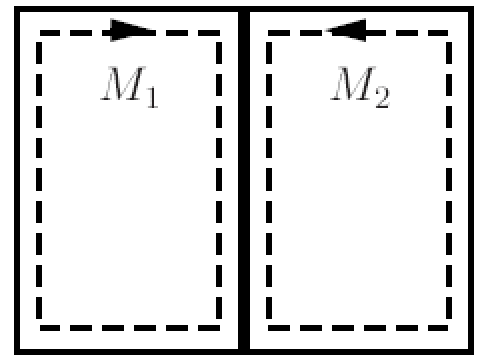
$M_1 : I_1 R_1 + I_4 R_4 - U_q = 0$

$M_2 : I_2 R_2 + I_5 R_5 - U_q = 0$

$M_3 : I_3 R_3 + I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0$

Beispiel eines Netzwerkes (2)





Vollständiger Baum

Verbindungszweige

Maschen

$$I_3 = I_1 + I_2$$

$$k = 2\,, \quad z = 3$$

$$k - 1 = 1$$

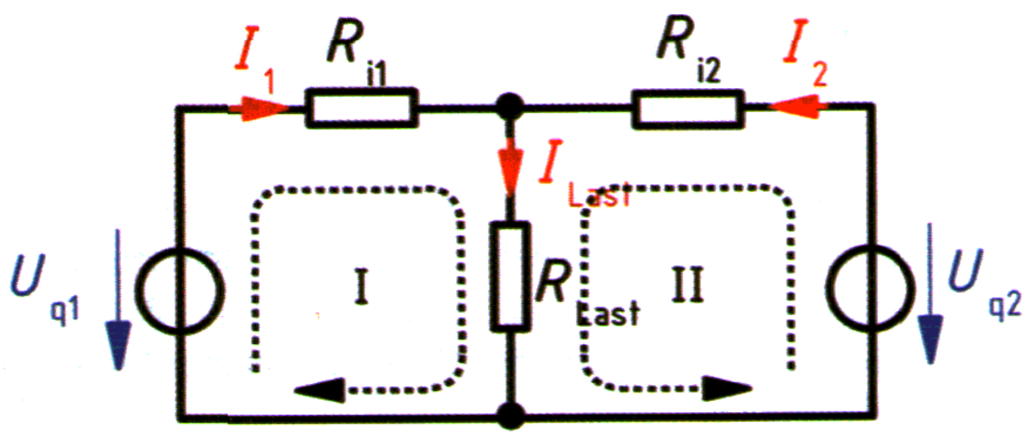
$$z - k + 1 = 2$$

$$M1 : R_1 I_1 + R_3 I_3 - U_{q1} = 0$$

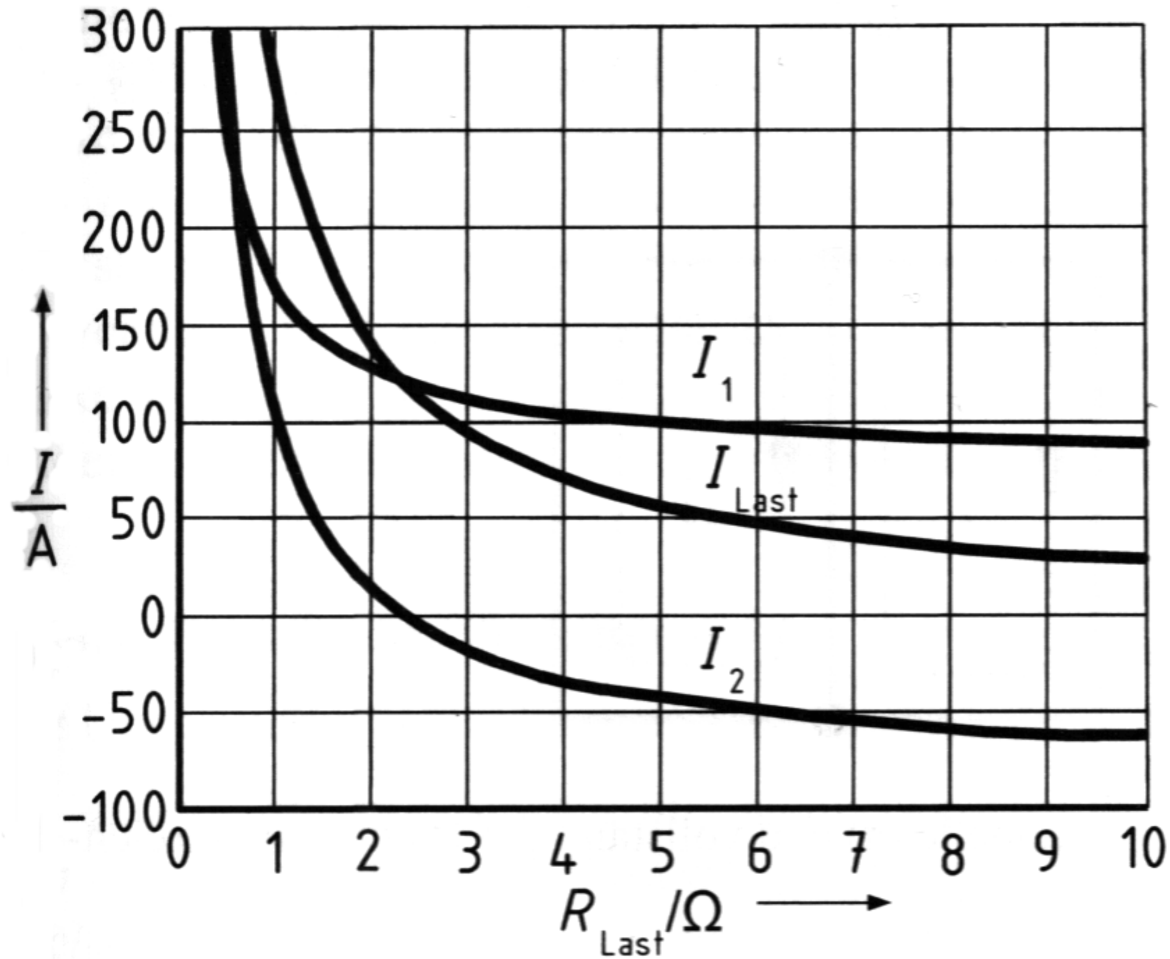
$$M2 : R_2 I_2 + R_3 I_3 - U_{q2} = 0$$

Beispiel: Berechnung des Laststroms

Ein Generator mit der Quellspannung $\mathbf{U_{q1} = 300\ V}$ und dem Innenwiderstand $\mathbf{R_{i1} = 0{,}25\ \Omega}$ sowie ein Akkumulator mit der Quellspannung $\mathbf{U_{q2} = 270\ V}$ und dem Innenwiderstand $\mathbf{R_{i2} = 0{,}12\ \Omega}$ sind parallel auf einen Verbraucher $\mathbf{R_{Last}}$ geschaltet.
Wie teilt sich der Laststrom $\mathbf{I_{Last}}$ auf die beiden Quellen auf, wenn der Verbraucher-widerstand im Bereich $\mathbf{0 < R_{Last} < 10\ \Omega}$ verändert wird?
Gesucht ist der Strom $\mathbf{I_2}$ durch den Akkumulator, wenn der Lastwiderstand den Wert $\mathbf{R_{Last} = 6\ \Omega}$ hat.



Teilströme I_1 und I_2 sowie Verbraucherstrom I_{Last}



Literatur

M. Filtz, TU Berlin: Vorlesung Grundlagen der Elektrotechnik, WS2006/07

Moeller: Grundlagen der Elektrotechnik, Vieweg + Teubner Verlag

Helmut Lindner: Elektro - Aufgaben Band 1: Gleichstrom, Hanser Fachbuchverlag

Paul A. Tipler, Gene Mosca: Physik für Wissenschaftler und Ingenieure, Spektrum Akademischer Verlag, August 2009

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

HDU

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf