Mathematik 1 Infotronik (9)

Gerald Kupris

21.11.2012

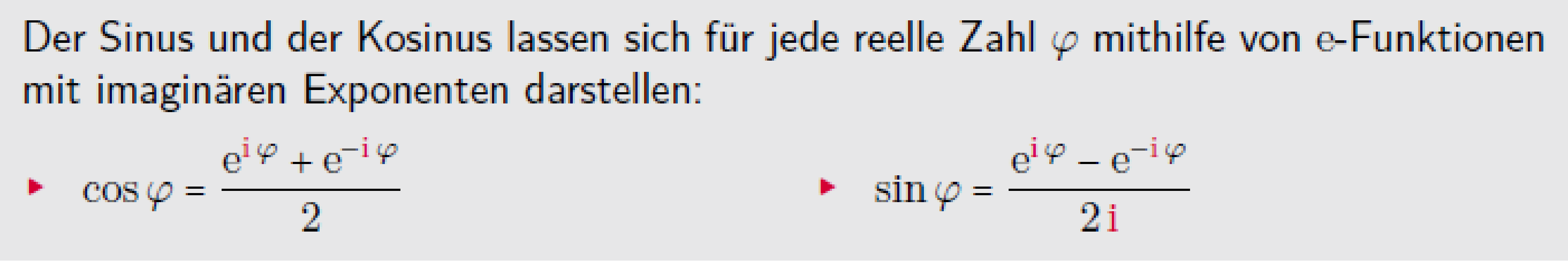
Vorlesungsinhalte Komplexe Zahlen

Einführung in komplexe Zahlen
Anatomie der komplexen Zahlen
Darstellung komplexer Zahlen
Die Gaußsche Zahlenebene
Addition und Subtraktion komplexer Zahlen
Multiplikation und Division komplexer Zahlen
Konjugiert komplexe Zahlen
Betrag komplexer Zahlen
Darstellung komplexer Zahlen in Polarform
Rechenregeln
Rechnen mit komplexen Zahlen in Polarform
Anwendungen komplexer Zahlen

Anwendung von komplexen Zahlen: Trigonometrie

Es gibt einen Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion, der über die komplexen Zahlen hergestellt werden kann.

Eulersche Formel: $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi$



Der Sinus und der Kosinus lassen sich für jede reelle Zahl φ mithilfe von e-Funktionen mit imaginären Exponenten darstellen:

- $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$
- $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

Anwendungen komplexer Zahlen: Harmonische Schwingung

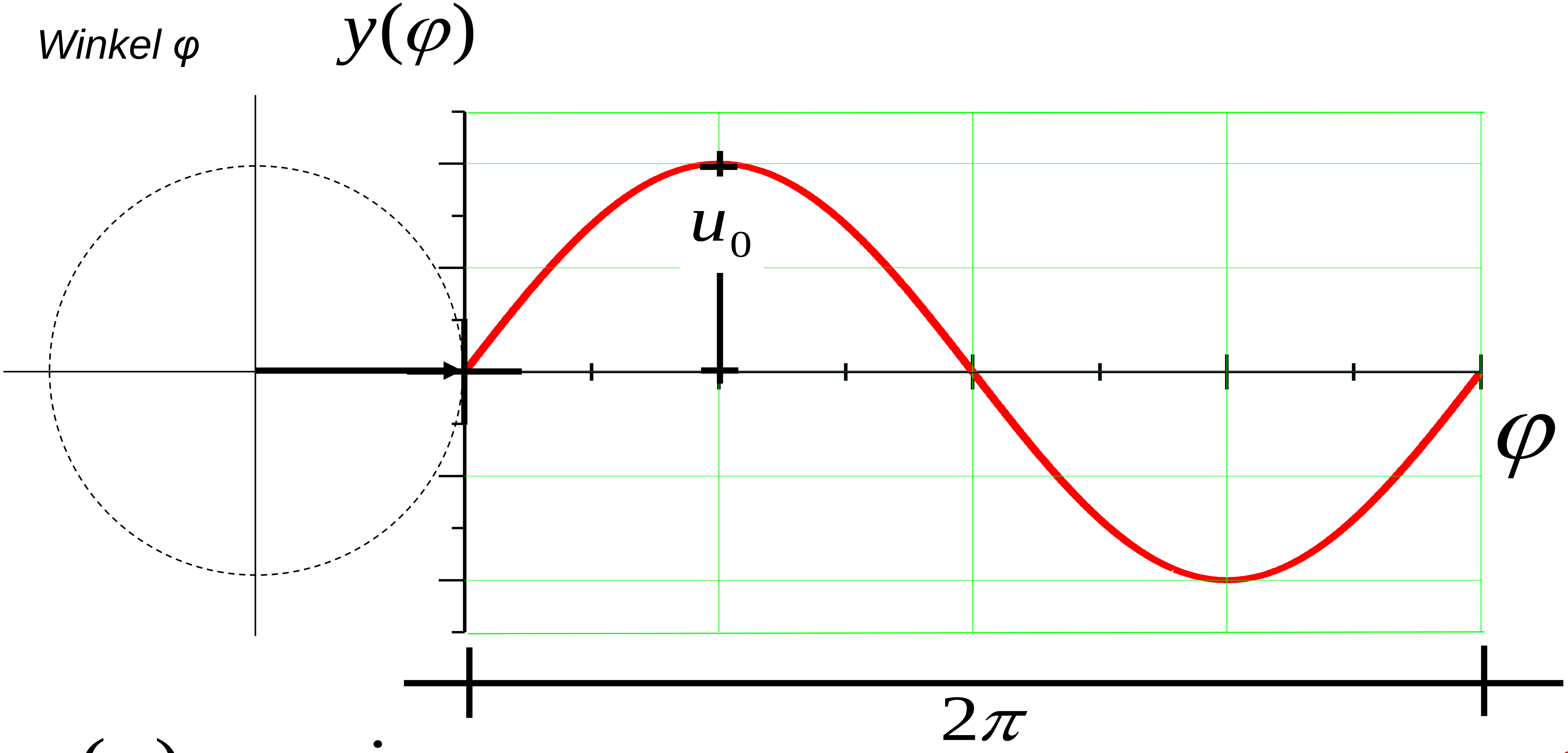
Eine **harmonische Schwingung** ist als Projektion eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω umlaufenden Punktes auf die x-Achse Kosinusschwingung) bzw. auf die y-Achse (Sinusschwingung) darstellbar:

$$x = x(t) = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi) = X_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = y(t) = \hat{y}\sin(\omega t + \varphi) = Y_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

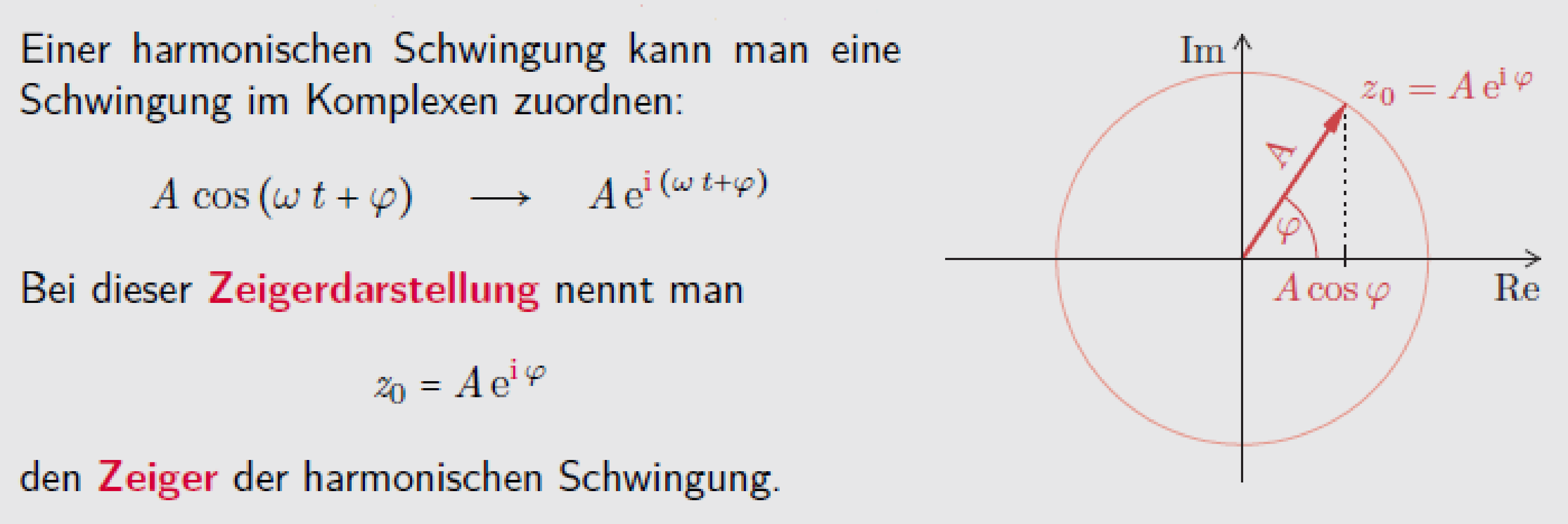
$x(t)$	Momentanwert der Schwingung
$\hat{x}$	Scheitelwert oder Amplitude
t	Zeit [s]
$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi / T$	Kreisfrequenz [1/s]
f	Frequenz [Hz]
$T = 1/f$	Periodendauer [s]
φ	Nullphasenwinkel
X_{eff}	Effektivwert der Schwingung

Harmonische Schwingung



$$y(\varphi) = u_0 \sin \varphi$$

Zeiger einer harmonischen Schwingung



Einer harmonischen Schwingung kann man eine Schwingung im Komplexen zuordnen:

$$A\cos(\omega\, t + \varphi) \quad \longrightarrow \quad A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(\omega\, t+\varphi)}$$

Bei dieser **Zeigerdarstellung** nennt man

$$z_0 = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\varphi}$$

den **Zeiger** der harmonischen Schwingung.

Komplexe Schwingung

Eine **komplexe Schwingung** ergibt sich, wenn der komplexe Zeiger z in mit konstanter Winkelgeschwindigkeit *ω* im mathematisch positiven Sinn um den Nullpunkt **rotiert**.

$$\underline{z}(t) = |\underline{z}| \cdot (\cos[\omega t + \varphi] + j \cdot \sin[\omega t + \varphi])$$

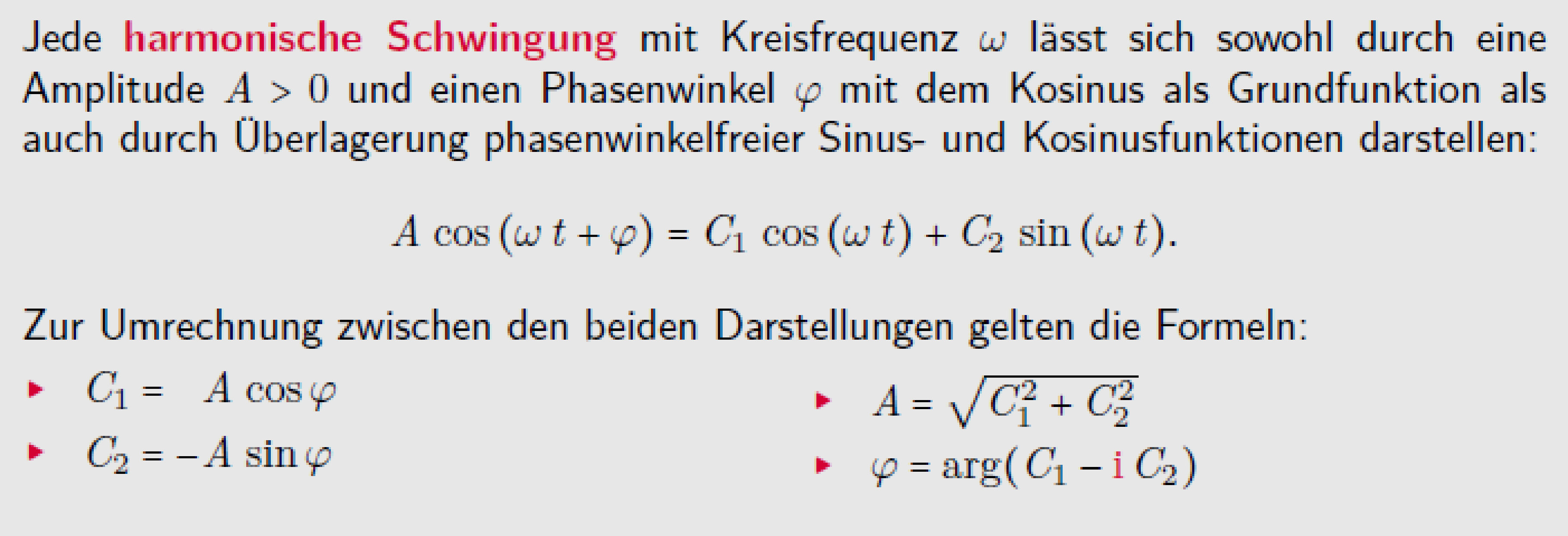
$$\underline{z}(t) = \hat{z} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{z} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} = \underline{\hat{z}} \cdot e^{j\omega t}$$

$\underline{z}(t) = \underline{\hat{z}} \cdot e^{j\omega t}$	Momentanwert der komplexen Schwingung
$\hat{z}$	Reelle Amplitude, Betrag
$\underline{\hat{z}} = \hat{z} \cdot e^{j\varphi}$	Komplexe Amplitude
$Zeff = \underline{\hat{z}} / \sqrt{2}$	Komplexer Effektivwert

$$x(t) = Re\{\underline{z}(t)\}, \quad y(t) = Im\{\underline{z}(t)\}, \quad \underline{z}(t) = x(t) + jy(t)$$

Die komplexe Schwingung ist demnach die Addition der senkrecht aufeinander stehenden harmonischen Schwingungen in der komplexen Ebene.

Harmonische Schwingung



Jede **harmonische Schwingung** mit Kreisfrequenz ω lässt sich sowohl durch eine Amplitude $A > 0$ und einen Phasenwinkel φ mit dem Kosinus als Grundfunktion als auch durch Überlagerung phasenwinkelfreier Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen:

$$A \cos(\omega\, t + \varphi) = C_1 \cos(\omega\, t) + C_2 \sin(\omega\, t).$$

Zur Umrechnung zwischen den beiden Darstellungen gelten die Formeln:

- $C_1 = \quad A \cos\varphi$
- $C_2 = -A \sin\varphi$
- $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$
- $\varphi = \arg(C_1 - \mathrm{i}\, C_2)$

Anwendungen komplexer Zahlen: Wechselstromrechnung

Die Bestimmung des Verhältnisses von Strom zu Spannung in einem elektrischen Stromkreis ist eine der Grundaufgaben der Elektrotechnik.

Wird eine zeitlich konstante Spannung U vorgegeben und der Strom I bestimmt, oder wird der Strom I vorgegeben und die Spannung U bestimmt, so bezeichnet man das Verhältnis **U:I** als den **Widerstand R** oder das Verhältnis **I:U** als den **Leitwert G**.

In der Wechselstromtechnik hat man es mit **zeitlich veränderlichen** Spannungen und Strömen zu tun, die in diesem Fall einem sinusförmigen Verlauf folgen. Um diese Veränderlichkeit gegenüber den zeitlich fixen Größen auszudrücken, werden Momentanwerte, die sich zeitlich ändern, mit **Kleinbuchstaben** bezeichnet, Spannungen als **kleines u** und Ströme als **kleines i**.

Als passive lineare Elemente des Wechselstromkreises treten ohmsche Widerstände, Induktivitäten oder Kapazitäten auf. Für diese Elemente gilt:

$$i = \frac{u}{R} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C}$$

Wechselstromrechnung

Sinusförmige Spannung oder sinusförmiger Strom:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$\hat{u}\ \hat{\imath}$	Maximalwert = Amplitude
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz
$\varphi_u \quad \varphi_i$	Nullphasenwinkel
$\varphi_u - \varphi_i$	Phasenverschiebungswinkel

DIN 1304-1 und DIN 5483-3

Für die imaginäre Einheit verwendet man in der Elektrotechnik gemäß DIN 1302 den Buchstaben j (mit $j^2 = -1$), um Verwechslungen mit dem Buchstaben i, der für den (zeitabhängigen) Strom verwendet wird, zu vermeiden.

Formelzeichen komplexer Größen werden gemäß DIN 1304-1 und DIN 5483-3 durch einen Unterstrich gekennzeichnet.

Ein **rotierender Zeiger** für eine Spannung stellt diese als komplexe Spannung dar:

$$\underline{u}(\omega t) = \hat{u} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_u) + \mathrm{j} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)) = \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u}\angle(\omega t + \varphi_u)$$

$$\underline{i}(\omega t) = \hat{\imath} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_i) + \mathrm{j} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)) = \hat{\imath} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)} = \hat{\imath}\angle(\omega t + \varphi_i)$$

Darstellung der reellen Spannung als komplexe Schwingung

Reelle Form: $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$

Komplexe Form: $\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_u) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_u))$

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = \underline{U} \cdot e^{j\omega t}$$

zeitunabhängige
komplexe Amplitude

zeitabhängiger
Faktor

$\hat{u}$	reelle Spannungsamplitude
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz
φ_u	Nullphasenwinkel der Spannung
$\underline{U} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}$	komplexe Spannungsamplitude

Darstellung des reellen Stroms als komplexe Schwingung

Reelle Form:

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Komplexe Form:

$$\underline{i}(t) = \hat{i} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_i) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_i))$$

$$\underline{i}(t) = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} = \underline{I} \cdot e^{j\omega t}$$

zeitunabhängige komplexe Amplitude

zeitabhängiger Faktor

$\hat{i}$	reelle Stromamplitude
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz
φ_i	Nullphasenwinkel des Stroms
$\underline{I} = \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}$	komplexe Stromamplitude

Umrechnung der komplexen Schwingung in die reelle Form

Komplexe Form: $\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_u) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_u))$

Reelle Form: $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$

$$u(t) = \mathrm{Im}(\underline{u}(t))$$

Komplexe Form: $\underline{i}(t) = \hat{i} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_i) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_i))$

Reelle Form: $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$

$$i(t) = \mathrm{Im}(\underline{i}(t))$$

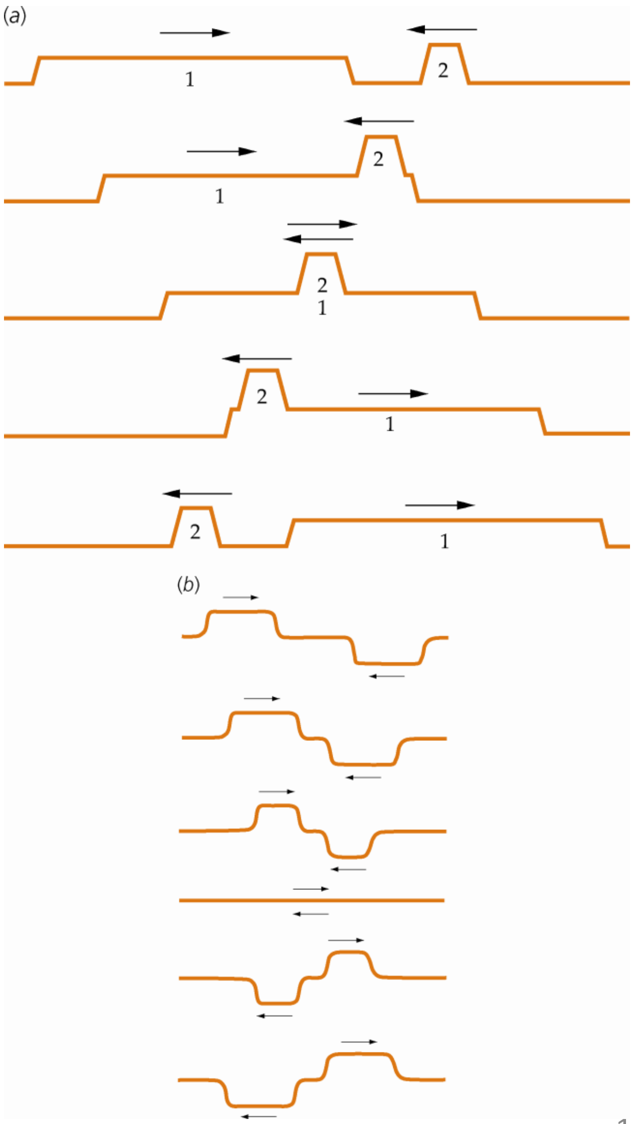
Überlagerung (Superposition) gleichfrequenter Schwingungen

Nach dem Superpositionsprinzip der Physik überlagern sich zwei Schwingungen $y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t+\varphi_1)$ und $y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t+\varphi_2)$ ungestört und ergeben die resultierende

$$y_{res} = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega t+\varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t+\varphi_2) = A_{res} \cdot \sin(\omega t+\varphi_{res})$$

Die resultierenden Amplitude A_{res} und die resultierende Phase φ_{res} lassen sich schrittweise aus den Amplituden A_1 und A_2 sowie den Phasenwinkeln φ_1 und φ_2 der Einzelschwingungen berechnen.

Physik: Zwei Wellen überlagern sich



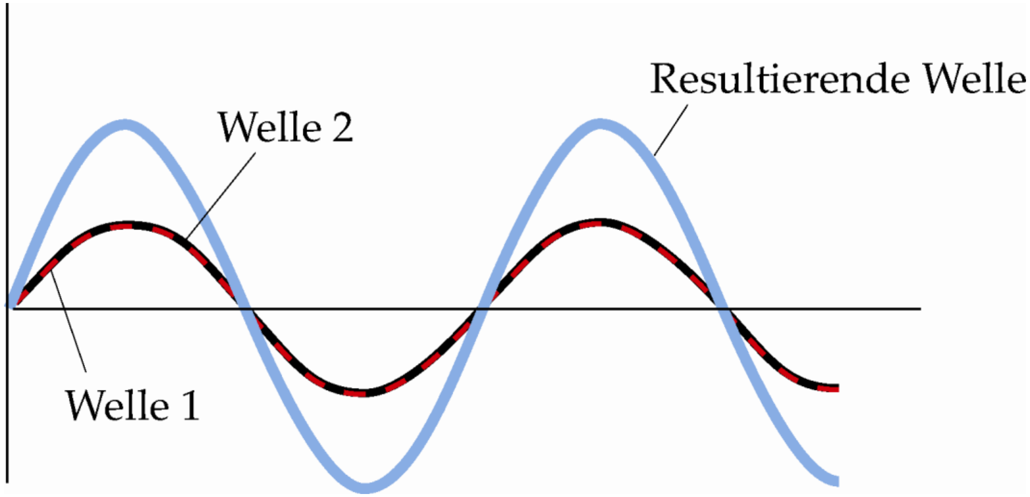
Überlagerung zweier Wellenberge mit gleich gerichteter Auslenkung

Überlagerung zweier Wellenberge mit entgegengesetzt gerichteter Auslenkung

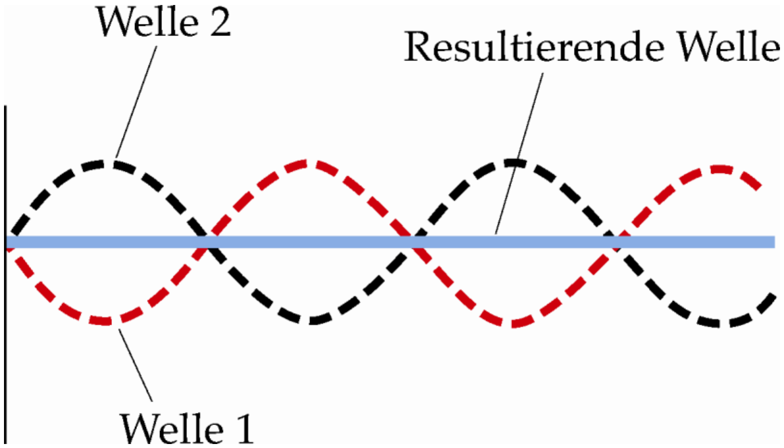
Wenn zwei oder mehr Wellen sich überlagern, ergibt sich die resultierende Welle als algebraische Summe der einzelnen Auslenkungen.

Physik: Interferenz

Konstruktive Inteferenz:
Sind zwei harmonische Wellen gleicher Frequenz in Phase, dann addieren sie sich.



Destruktive Interferenz:
Haben zwei Wellen eine Phasendifferenz von π (180°), dann ergibt sich die Amplitude als Differenz der Einzelamplituden.



Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen (1)

Nach dem Superpositionsprinzip der Physik überlagern sich zwei Schwingungen $y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t+\varphi_1)$ und $y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t+\varphi_2)$ ungestört und ergeben die resultierende

$$y_{res} = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega t+\varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t+\varphi_2) = A_{res} \cdot \sin(\omega t+\varphi_{res})$$

Die resultierende Amplitude A_{res} und die resultierende Phase φ_{res} lassen sich schrittweise aus den Amplituden A_1 und A_2 sowie den Phasenwinkeln φ_1 und φ_2 der Einzelschwingungen berechnen.

1. Übergang von der reellen Form zur komplexen Form:

   Die Schwingungen y_1 und y_2 werden durch komplexe Funktionen dargestellt.

   $$\underline{y}_1 = \underline{A}_1 \cdot e^{j\omega t} \quad \text{und} \quad \underline{y}_2 = \underline{A}_2 \cdot e^{j\omega t}$$

   $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$ sind dabei die komplexen Schwingungsamplituden (Zeiger)

   $$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\varphi 1} \quad \text{und} \quad \underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\,\varphi 2}$$

   Erforderlich sind dafür A_1 und φ_1 sowie A_2 und φ_2.

Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen (2)

2. Superposition in komplexer Form:

Die komplexen Zeiger $\underline{y}_1$ und $\underline{y}_2$ werden zur Überlagerung gebracht und ergeben einen resultierenden komplexen Zeiger $\underline{y}_{res}$:

$$\underline{y}_{res} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = \underline{A}_1 \cdot e^{j\omega t} + \underline{A}_2 \cdot e^{j\omega t} = (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \cdot e^{j\omega t} = \underline{A}_{res} \cdot e^{j\omega t}$$

Die Addition der komplexen Amplituden erfolgt in algebraischer Form.

2a) Umwandlung in die algebraische Form

$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\varphi 1} = A_1 \cdot \cos\varphi_1 + j \cdot A_1 \cdot \sin\varphi_1$

$\underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\varphi 2} = A_2 \cdot \cos\varphi_2 + j \cdot A_2 \cdot \sin\varphi_2$

2b) Addition in algebraischer Form

$\underline{A}_{res} = \underline{A}_1 + \underline{A}_2 = A_1 \cdot \cos\varphi_1 + j \cdot A_1 \cdot \sin\varphi_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_2 + j \cdot A_2 \cdot \sin\varphi_2$

2c) Rückwandlung des Ergebnisses in die trigonometrische Form

$\underline{A}_{res} = A_{res} \cdot e^{j\,\varphi res}$

Überlagerung gleichfrequenter Schwingungen (3)

3. Rücktransformation aus der komplexen Form in die reelle Form:

   Die resultierende Schwingung $y = A \cdot \sin(\omega t+\varphi)$ ist der Imaginärteil des resultierenden komplexen Zeigers $\underline{y}$:

$$y_{res} = \mathrm{Im}\,(\underline{y}) = \mathrm{Im}\,(\underline{A} \cdot e^{j\omega t}) = A_{res} \cdot \sin(\omega t+\varphi_{res})$$

Beispielaufgaben

1. Gegeben sind jeweils zwei gleichfrequente Wechselspannungen u_1(t) und u_2(t). Bestimmen Sie die durch Superposition entstehende resultierende Wechselspannung mit Hilfe der komplexen Rechnung.

a) $u_1(t) = 120V \cdot \sin(\omega t + 2\pi/3)$, $u_2(t) = 130V \cdot \cos(\omega t - \pi/4)$

b) $$u_1(t) = 100V \cdot \sin(\omega t)$$

Ergebnis: $u(t) = 232\ V \cdot \sin(\omega t + 0{,}48)$

$$u_2(t) = 150V \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

c) $$u_1(t) = -50V \cdot \sin(\omega t)$$

Ergebnis: $u(t) = 180\ V \cdot \sin(\omega t + 1{,}29)$

$$u_2(t) = 200V \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

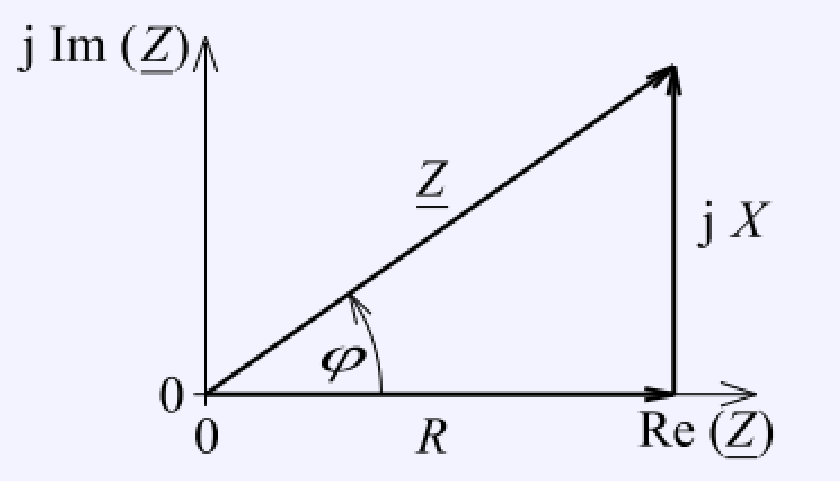
Ohmsches Gesetz im komplexen Bereich

Das Verhältnis der komplexen Spannung zur komplexen Stromstärke ist unter den genannten Voraussetzungen eine komplexe Konstante. Diese Aussage ist das ohmsche Gesetz für komplexe Größen. Die Konstante wird als komplexer Widerstand oder Impedanz ***Z*** bezeichnet. Auch diese wird in der komplexen Ebene als Zeiger dargestellt, der aber als zeitunabhängige Größe nicht rotiert.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_u)}}{\hat{\imath}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_i)}} = \frac{\hat{u}}{\hat{\imath}}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u-\varphi_i)}$$

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$$

$\underline{Z}$ = Impedanz
R = Re($\underline{Z}$) ohmscher Widerstand
X = Im($\underline{Z}$) Blindwiderstand



Ohmscher Widerstand

$$\underline{Z}_R = R = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}\angle 0 = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}$$

Der komplexe Widerstand besteht hier nur aus einem positiven Ohmschen Widerstand.

Kondensator

Kondensator:

$$\frac{\underline{i}}{C} = \frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t} = \hat{u}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi_u)}\cdot \mathrm{j}\omega = \underline{u}\,\mathrm{j}\omega$$

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j}\cdot\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{Z}_C = \mathrm{j}\cdot X_C = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}}{\hat{\imath}}\angle(-90^\circ)$$

Der komplexe Widerstand besteht hier nur aus einem negativen Blindwiderstand.

$$X_C = -\frac{1}{\omega\cdot C} = -\frac{1}{2\pi f\cdot C}$$

1 Farad:

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{1\,\mathrm{As}}{1\,\mathrm{V}} = 1\,\mathrm{F}$$

Spule

Spule:

$$\frac{\underline{u}}{L} = \frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} = \hat{\imath} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)} \cdot \mathrm{j}\omega = \underline{i}\,\mathrm{j}\omega$$

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \mathrm{j} \cdot \omega L = \omega L \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{Z}_L = \mathrm{j} \cdot X_L = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}}{\hat{\imath}}\angle(90^\circ)$$

Der komplexe Widerstand besteht hier nur aus einem positiven Blindwiderstand.

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi f \cdot L$$

1 Henry: 1 H = 1 Vs / 1A

Zusammenschaltung mehrerer komplexer Widerstände

Sind alle Bauelemente in Reihe geschaltet, so ist es zweckmäßig, den Strom vorzugeben. Man kann so für jedes Element, durch das derselbe Strom fließt, die angelegte Spannung bestimmen und dann alle Spannungen durch Addition der Zeiger zusammenfassen.

Gleichwertig kann man erst alle Widerstände komplex addieren und dann mit dem Strom multiplizieren.

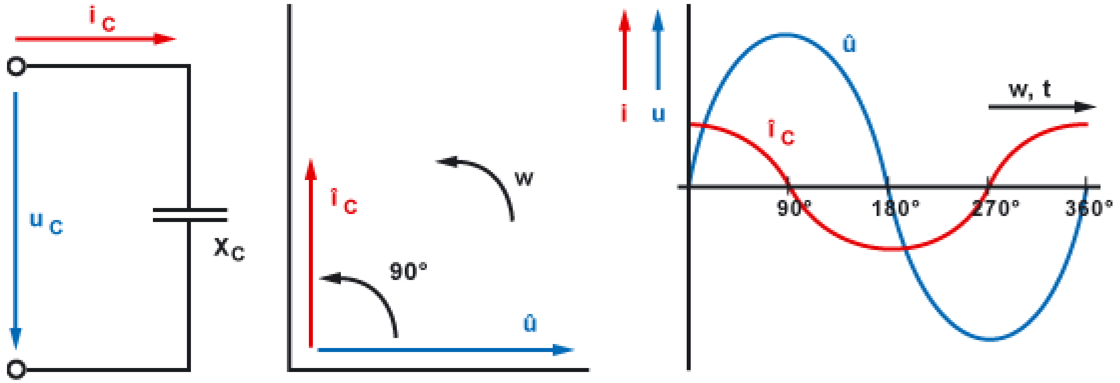
Sind jedoch alle Bauelemente parallel geschaltet, so wird man eine Spannung vorgeben. Man kann den Strom durch jedes Element getrennt berechnen und dann alle komplexen Ströme durch Aneinandersetzung der Zeiger addieren.

Gleichwertig kann man erst alle komplexen Leitwerte addieren und dann mit der Spannung multiplizieren.

Ist die Schaltung eine Mischform, so ist man gezwungen, sie elementar zu zerlegen und jede Teilschaltung getrennt zu berechnen, bevor man sie wieder zusammensetzt.

Phasenverschiebung

φ_u, φ_i	Nullphasenwinkel von ***u(t)***, ***i(t)***
$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$	Phasenverschiebungswinkel zwischen ***u(t)*** und ***i(t)***
$0° < \varphi < 180°$	Spannung eilt Strom um $\boldsymbol{\varphi}$ voraus
$-180° < \varphi < 0°$	Strom eilt Spannung um | $\boldsymbol{\varphi}$ | voraus



Beispielaufgabe

2. An einem Wechselstromnetz (U = 220 V, f = 50 Hz) liegen in Reihenschaltung der Ohmsche Widerstand R = 100 Ω, die Kapazität C = 20 µF und die Induktivität L = 0,1 H.

   Zu berechnen sind:

   a) Der Scheinwiderstand Z und der Effektivwert I des Wechselstroms,

   b) die Phasenverschiebung φ zwischen Spannung und Strom,

   c) die Effektivwerte der Spannungsabfälle an den Einzelwiderständen.

Elektrische Leistungsberechnung

Elektrische Leistung ist das Produkt aus Spannung U und Strom I an einem Zweipol.

$$P = U \cdot I$$

Strom und Spannung sind im allgemeinen zeitabhängig:

$$P(t) = u(t) \cdot i(t)$$

P(t) - Momentanwert der elektrischen Leistung

P(t) > 0 : Energiefluß zum Verbraucher
P(t) < 0 : Energierückfluß zum Generator

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Leistung

Der zeitunabhängige Zeiger wird in DIN 5483-3 und DIN 40110-1 als komplexe Leistung oder komplexe Scheinleistung bezeichnet.

$$\underline{S} = \underline{U}\ \underline{I}^{\star} = S\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)} = P + \mathrm{j}Q$$

Darin sind die in der Wechselstromtechnik üblichen drei Kenngrößen zur Leistung enthalten:

die Scheinleistung S (in VA):

$$S = |\underline{S}| = U\ I$$

die Wirkleistung P (in W), die als arithmetischer Mittelwert über p definiert wird:

$$P = \mathrm{Re}\ \underline{S} = U\ I\ \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

die ebenfalls frei von Schwingungsanteilen (Augenblickswerten) definierte Blindleistung (Verschiebungsleistung) Q (in var):

$$Q = \mathrm{Im}\ \underline{S} = U\ I\ \sin(\varphi_u - \varphi_i)$$

Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,
Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium,
Hanser Verlag, München 2010

HOCHSCHULE
DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf