Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (34)

Gerald Kupris

13.01.2011

Restliche Stunden Mathematik 1. Semester

10.01.2011 (Mo)	09:45 Uhr:	Auswertung Fragebogen, Exponentialfunktion, e-funktion
12.01.2011 (Mi)	09:45 Uhr:	Logarithmusfunktion, Logarithmusregeln
12.01.2011 (Mi)	11:45 Uhr:	Ableitung und Integration von e-Funktion und Logarithmus
13.01.2011 (Do)	09:45 Uhr:	Wiederholung Integration, Integration durch Substitution
17.01.2011 (Mo)	09:45 Uhr:	Partielle Integration, Partialbruchzerlegung
19.01.2011 (Mi)	08:00 Uhr:	Rechenbeispiele, Flächenberechnung, Schwerpunkt
19.01.2011 (Mi)	09:45 Uhr:	Anwendung der Integration, numerische Methoden
20.01.2011 (Do)	09:45 Uhr:	allgemeine Wiederholung, Prüfungsvorbereitung
08.02.2011 (Di)	11:00 Uhr:	Prüfung

Wiederholung: Stammfunktionen der wichtigsten Funktionen

Funktion	Stammfunktion	Funktion	Stammfunktion
$\int e^x \, dx$	$= e^x + C$	$\int \sin x \, dx$	$= -\cos x + C$
$\int x^a \, dx$	$= \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C, a \neq -1$	$\int \cos x \, dx$	$= \sin x + C$
$\int \frac{1}{x} \, dx$	$= \ln\lvert x\rvert + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx$	$= \arctan x + C$

$\int e^x \, dx = e^x + C$	$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

Innere Ableitung

Beim Ableiten verketteter Funktionen ist eine innere Ableitung zu berücksichtigen. Entsprechend vorsichtig müssen wir deshalb bei der Integration verketteter Funktionen vorgehen.

Beim Ableiten einer verketteten Funktion $f \circ u$ wird die Ableitung der äußeren Funktion f mit der Ableitung der inneren Funktion u multipliziert:

$$(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Integration durch Substitution

Wenn man die Funktion unter dem Integral als ein Produkt aus einer verketteten Funktion $f \circ u$ und der inneren Ableitung u' darstellt, dann kann man alternativ auch einfach über die Funktion u integrieren:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)\,\mathrm{d}\,x = \int f(u)\,\mathrm{d}\,u.$$

Substitutionsregel

Eine Stammfunktion kann man durch eine geeignete Substitutionsfunktion u mit folgenden Schritten bestimmen:

(1) Berechne das Verhältnis der Differenziale $\frac{\mathrm{d}\,u}{\mathrm{d}\,x} = u'(x)$.

(2) Ersetze im Integral Ausdrücke mit x durch Ausdrücke mit u und ersetze $\mathrm{d}\,x = \frac{\mathrm{d}\,u}{u'(x)}$ so, dass im neuen Integral nur noch u und $\mathrm{d}\,u$ vorkommen.

(3) Führe, falls möglich, die Integration mit der Variablen u durch.

(4) Durch Rücksubstitution erhält man Stammfunktionen, die wieder von x abhängen.

Lineare Substitution

Bei Integralen der Form $\int f(a\,x+b)\,\mathrm{d}\,x$ erhält man durch die lineare Substitution

$$u(x) = a\,x + b, \quad \mathrm{d}\,x = \frac{\mathrm{d}\,u}{a}$$

das neue Integral $\frac{1}{a}\int f(u)\,\mathrm{d}\,u$. Dabei sind $a \neq 0$ und b beliebige Konstanten.

Die lineare Substitution ist lediglich eine Transformationsregel. Sie ist nur dann zielführend, wenn man nach der Substitution für das neue Integral eine Stammfunktion angeben kann.

Beispiel

Substitution bei Produkt aus Funktion und Ableitung

Stammfunktionen, bei denen unter dem Integral das Produkt aus einer Funktion f und ihrer Ableitung f' steht, kann man durch Substitution berechnen:

$$u(x) = f(x), \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{f'(x)},$$

$$\int f(x) f'(x)\,\mathrm{d}x = \int u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}f(x)^2 + C.$$

Beispiel

Substitution bei Quotient aus Ableitung und Funktion

Stammfunktionen, bei denen unter dem Integral der Quotient aus einer Ableitung f' und ihrer Funktion f steht, kann man durch Substitution berechnen:

$$u(x) = f(x), \quad \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{f'(x)},$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Beispiel

Substitution der Grenzen

Bei bestimmten Integralen ist es oft einfacher, anstatt der Rücksubstitution eine Substitution der Integrationsgrenzen durchzuführen:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,\mathrm{d}\,x = \int_{u=u(a)}^{u=u(b)} g(u)\,\mathrm{d}\,u.$$

Beispiel

Produktregel der Ableitung

Beim Ableiten eines Produktes zweier Funktionen f und g summiert man das Produkt aus der Ableitung der ersten Funktion f' und der zweiten Funktion g und das Produkt aus der ersten Funktion f und der Ableitung der zweiten Funktion g':

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) \; + \; f(x) \cdot g'(x).$$

Daraus kann man eine Regel zur partiellen Integration einwickeln.

Partielle Integration

Wenn man die Funktion im Integral als ein Produkt einer Funktion f und der Ableitung g' einer Funktion g in der Form

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

darstellt, dann kann man die Funktion teilweise integrieren:

$$\int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Partielle Integration

Partielle Integration ist sinnvoll, falls

- man eine Stammfunktion g zu g' angeben kann und
- das neue Integral

$$\int f'(x) \cdot g(x)\,\mathrm{d}x$$

die Berechnung des ursprünglichen Integrals vereinfacht.

Beispiele

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org