Mathematik 1 Infotronik (13)

Gerald Kupris

05.12.2012

Lineare Algebra

Wiederholung: Addition und Subtraktion von Matrizen

Addition und Subtraktion von Matrizen sind komponentenweise definiert:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Komponentenweises Addieren - Voraussetzung: die Strukturen (Anzahl der Zeilen und Anzahl der Spalten) müssen bei beiden Matrizen identisch sein.

Zwei Matrizen derselben Dimension werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die entsprechenden Elemente in jeder Zeile und jeder Spalte einzeln addiert bzw. subtrahiert.

Wiederholung: Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar ist komponentenweise definiert:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \cdots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \Re$$

Eine Matrix wird mit einem Skalar multipliziert, indem man jedes einzelne Element der Matrix mit dem Skalar multipliziert.

Wiederholung: Multiplikation von zwei Matrizen

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$A \in \Re^{m \times n}$ m Zeilen, n Spalten

$B \in \Re^{n \times k}$ n Zeilen, k Spalten

$C \in \Re^{m \times k}$ m Zeilen, k Spalten

Wiederholung: Multiplikation von zwei Matrizen

$$\underbrace{A}_{m \text{ Zeilen},\ n \text{ Spalten}} \cdot \underbrace{B}_{n \text{ Zeilen},\ k \text{ Spalten}} = \underbrace{C}_{m \text{ Zeilen},\ k \text{ Spalten}}$$

A muss also genau so viele Spalten haben, wie ***B*** Zeilen hat - sonst kann man die Multiplikation nicht durchführen. ***A*** wird auch als linker und ***B*** als rechter Faktor bezeichnet.

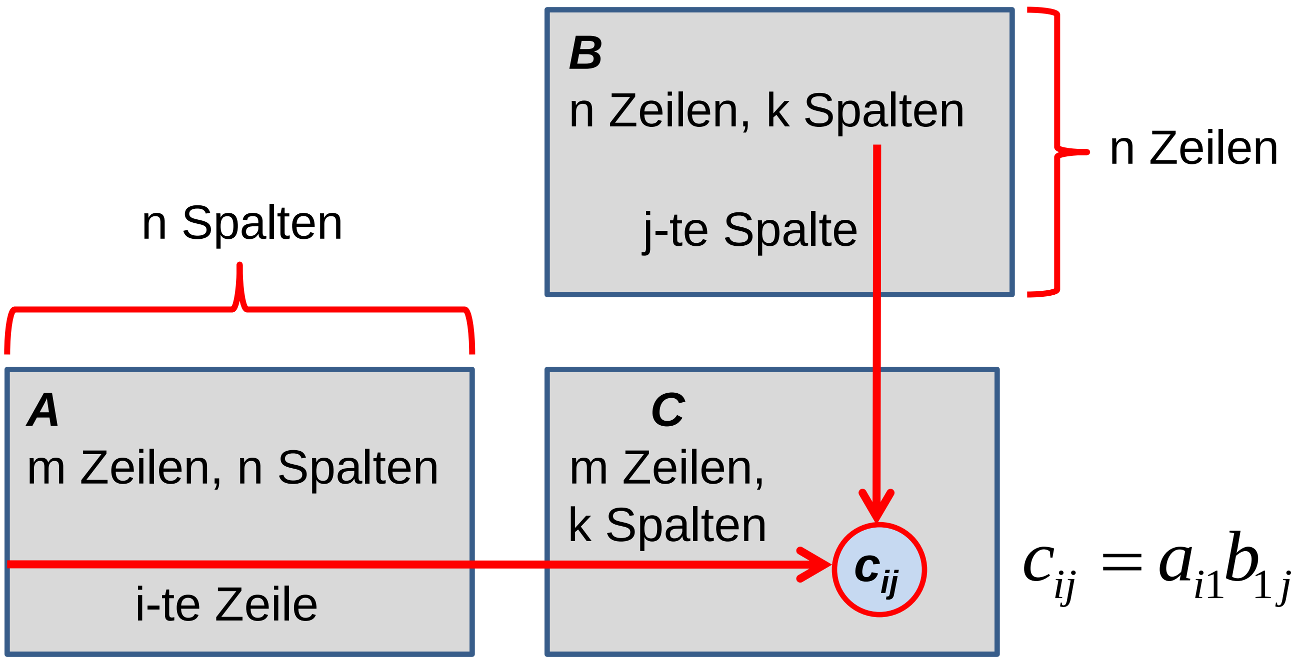
Im allgemeinen gilt auch:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Die Matrizenmultiplikation ist also eine nicht kommutative Rechenoperation.

Wiederholung: Falk-Schema

Für die praktische Berechnung eines Matrizenproduktes ***C* = *A* · *B*** ist das Schema nach Falk besonders geeignet. Dabei wird der linke Faktor ***A*** links unten und der rechte Faktor ***B*** rechts oben angeordnet. Das Matrixelement c_{ij} des Matrizenprodukts ***C* = *A* · *B*** befindet sich dann im Schnittpunkt der i-ten Zeile von ***A*** mit der j-ten Spalte von ***B***.



$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2i} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Wiederholung: Rechenregeln für die Multiplikation von zwei Matrizen

Für die Multiplikation von zwei Matrizen gelten die bekannten Gesetze:
Assoziativgesetz (Verknüpfungsgesetz),
Distributivgesetz (Verteilungsgesetz).

Es gilt nicht das Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz).

Es seihen $A, B, C \in \Re^{m \times n}$, dann gilt
(vorausgesetzt, die Multiplikation ist durchführbar):

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Wiederholung: Einheitsmatrix

Eine Einheitsmatrix ist ein Sonderfall einer Diagonalmatrix. Eine n-reihige Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $i_{ii} = 1$ (i = 1, 2 …n) heißt n-reihige Einheitsmatrix.

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix $\boldsymbol{E_n}$ ist das neutrale Element der Multiplikation. Für jedes $A \in \Re^{n \times n}$ ist:

$$E_n \cdot A = A \cdot E_n = A$$

Matrizeninvertierung

Es sei $A \in \Re^{n \times n}$. A heißt invertierbar oder auch regulär, wenn es eine Matrix $A^{-1} \in \Re^{n \times n}$ gibt mit der Eigenschaft $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$.

In diesem Fall heißt A^{-1} die inverse Matrix von A.

Aber Achtung: nicht jede Matrix lässt sich invertieren!

Beispiele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ **NICHT INVERTIERBAR!**

Einführung des Begriffs „Determinante“ (1)

Wie bereites erwähnt, kann eine Matrix als die Anordnung der Koeffizienten eines linearen Gleichungssystems interpretiert werden (dazu später mehr ausführlicher):

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{y} = f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ y_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Wann lässt sich dieses lineare Gleichungssystem lösen und wann nicht?
Dazu kann man dieses einfache Gleichungssystem „von Hand“ berechnen.

Einführung des Begriffs „Determinante" (2)

Das lineare Gleichungssystem lässt sich durch Umformen und Einsetzen „von Hand" lösen:

$$y_1 = a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2$$

$$y_2 = a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2$$

$$x_1 = \frac{y_1 \cdot a_{22} - y_2 \cdot a_{12}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

$$x_2 = \frac{y_2 \cdot a_{11} - y_1 \cdot a_{21}}{a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}}$$

In beiden Nennern taucht der gleiche Ausdruck auf:

$$a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Das Gleichungssystem lässt sich nur dann lösen, wenn dieser Ausdruck nicht gleich Null ist.

Dieser Ausdruck wird auch als Koeffizientendeterminante oder als Determinante bezeichnet.

Definition einer zweireihigen Determinante

Aus didaktischen Gründen beschäftigen wir uns zunächst mit zweireihigen Determinanten.

Wir ordnen einer 2-reihigen, quadratischen Matrix einen Zahlenwert (Determinante) zu.

Unter der Determinante einer 2-reihigen, quadratischen Matrix versteht man die Zahl:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Weitere symbolische Schreibweisen sind: $D, \quad \det A, \quad |A|, \quad |a_{ik}|$

D heißt auch 2-reihige Determinante oder Determinante 2. Ordnung.

Die Zahlen $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ heißen Elemente der Determinante.

Regel zur Berechnung einer zweireihigen Determinante

Der Wert einer 2-reihigen Determinante ist gleich dem Produkt der beiden Hauptdiagonal-elemente minus dem Produkt der beiden Nebendiagonalelemente.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Hauptdiagonale

Nebendiagonale

Beispiele zweireihiger Determinanten

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot 4-5\cdot(-2)=12+10=22$$

$$B=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{pmatrix} \qquad \det B=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -10 & -6 \end{vmatrix}=5\cdot(-6)-3\cdot(-10)=-30+30=0$$

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det C=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1-0\cdot 0=1$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten (1)

Der Wert einer 2-reihigen Determinante ändert sich nicht, wenn Zeilen und Spalten miteinander vertauscht werden. Man bezeichnet diesen Vorgang auch als „Stürzen der Determinante“.

Die Vertauschung von Zeilen und Spalten kann durch eine Spiegelung der Elemente an der Hauptdiagonalen erreicht werden. Dabei geht die Matrix ***A*** in ihre Transponierte ***A*** ^{T} über. Es gilt somit für jede 2-reihige Matrix ***A***: **det *A*** ^{T} **= det *A*.**

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det A^{T} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = \det A$$

Beispiel

$$\det A = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) = 16 + 15 = 31$$

$$\det A^T = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - (-3) \cdot 5 = 16 + 15 = 31$$

$$\det A^T = \det A = 31$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten (2)

Beim Vertauschen der beiden Zeilen (oder Spalten) ändert eine 2-reihige Determinante ihr Vorzeichen.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det A' = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{12} - a_{22} \cdot a_{11} = -\det A$$

Die beiden Zeilen wurden miteinander vertauscht. Es tritt ein Vorzeichenwechsel auf.

Beispiel

Die beiden Spalten werden miteinander vertauscht. Es tritt ein Vorzeichenwechsel auf.

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 7 \cdot (-1) - 3 \cdot 4 = -7 - 12 = -19$$

$$\det A' = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 7 \cdot (-1) = 12 + 7 = 19 = -\det A$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten (3)

Werden die Elemente einer beliebigen Zeile (oder Spalte) einer 2-reihigen Determinante mit einem reellen Skalar ***λ*** multipliziert, so multipliziert sich die Determinante mit ***λ***.

Wir multiplizieren die Elemente der 1. Zeile einer 2-reihigen Determinante mit dem Skalar:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det A' = \begin{vmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \cdot a_{11} \cdot a_{22} - \lambda \cdot a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det A' = \lambda \cdot \left(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}\right) = \lambda \cdot \det A$$

Folgerungen und Beispiel

Folgerung 1: eine 2-reihige Determinante wird mit einem reellen Skalar ***λ*** multipliziert, indem man die Elemente einer beliebigen Zeile (oder Spalte) mit ***λ*** multipliziert.

Folgerung 2: besitzen die Elemente einer Zeile (oder Spalte) einer 2-reihigen Determinante einen gemeinsamen Faktor ***λ***, so darf dieser vor die Determinante gezogen werden.

Beispiel: die Elemente der 1. Spalte besitzen den gemeinsamen Faktor **-8**:

$$\det A = \begin{vmatrix} -24 & 7 \\ -32 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (-8\cdot 3) & 7 \\ (-8\cdot 4) & 1 \end{vmatrix} = (-8)\cdot \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\det A = (-8)\cdot(3\cdot 1 - 7\cdot 4) = (-8)\cdot(3-28) = (-8)\cdot(-25) = 200$$

Beachten Sie den Unterschied!

Die Multiplikation einer Matrix ***A*** mit einem Skalar ***λ*** erfolgt, indem man jedes Matrix-element mit dem Skalar ***λ*** multipliziert.

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation einer Determinante einer Matrix ***A*** mit einem Skalar ***λ*** erfolgt, indem man alle Elemente einer beliebigen Zeile (oder Spalte) mit dem Skalar ***λ*** multipliziert.

$$\lambda \cdot \det A = \begin{vmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Determinante des Produktes einer Matrix mit einem Skalar

Bei der Berechnung der Determinante des Produkts einer Matrix mit einem Skalar ***λ*** ist zu beachten, dass jedes Element der Matrix mit dem Skalar ***λ*** multipliziert wurde. Dementsprechend taucht der Faktor ***λ*** mehrmals vor der Determinante auf.

$$\det(\lambda \cdot A) = \begin{vmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \lambda \cdot \det A = \lambda^2 \cdot \det A$$

Allgemein gilt für eine Matrix ***n***-ter Ordnung:

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten (4)

Eine zweireihige Determinante besitzt den Wert ***NULL***, wenn sie mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

1. Alle Elemente einer Zeile oder Spalte sind Null.
2. Beide Zeilen oder Spalten stimmen überein.
3. Die Zeilen oder Spalten sind zueinander proportional.

Beweis zu 1. **Alle Elemente einer Zeile oder Spalte sind Null.**
Wir nehmen an, dass sämtliche Elemente der ersten Zeile Null sind:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = 0$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten (4)

Beweis zu 2. **Beide Zeilen oder Spalten stimmen überein.**
Die Determinante besitzt zwei gleiche Zeilen. Dann gilt:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{12} - a_{12} \cdot a_{11} = 0$$

Beweis zu 3. **Die Zeilen oder Spalten sind zueinander proportional.**
Wir nehmen an, dass die zweite Zeile das λ-fache der 1. Zeile ist.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = \lambda \cdot 0 = 0$$

Beispiele von Matrizen, deren Determinanten Null sind

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Begründungen:

det *A* = 0: Die Elemente der 2. Zeile sind Null.
det *B* = 0: Die beiden Zeilen (bzw. Spalten) sind zueinander proportional.
det *C* = 0: Die beiden Zeilenvektoren stimmen überein.
det *D* = 0: Die Elemente der 2. Zeile (bzw. 2. Spalte) sind Null.

Wiederholung: Matrizeninvertierung

Es sei $A \in \Re^{n \times n}$. A heißt invertierbar oder auch regulär, wenn es eine Matrix $A^{-1} \in \Re^{n \times n}$ gibt mit der Eigenschaft $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$.

In diesem Fall heißt A^{-1} die inverse Matrix von A.

Aber Achtung: nicht jede Matrix lässt sich invertieren!

Folgerung: eine Matrix heißt invertierbar oder auch regulär, wenn ihre Determinante nicht gleich Null ist.

Reguläre Matrix

Eine Matrix heißt regulär, wenn ihre Determinante einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Andernfalls heißt diese Matrix singulär.

Die Begriffe „reguläre Matrix“ und „singuläre Matrix“ sind nur für quadratische Matrizen definiert.

Wenn eine Matrix ***A*** regulär ist, dann gilt:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Auf einen Beweis dieses Satzes verzichten wir vorerst.
Er hat jedoch enorme praktische Bedeutung (dazu später mehr).
Die Regel zur Berechnung der inversen Matrix folgen im 2. später!

Beispiele:

Die Matrix ***A*** ist regulär:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten (5)

Der Wert einer zweireihigen Determinante ändert sich nicht, wenn man zu einer Zeile (oder Spalte) der Matrix ein beliebiges Vielfaches der anderen Zeile (bzw. anderen Spalte) elementeweise addiert.

Beispiel: wir addieren zur 1. Zeile der Determinante A das λ-fache der 2. Zeile

$$\begin{vmatrix} (a_{11}+\lambda\cdot a_{21}) & (a_{12}+\lambda\cdot a_{22}) \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = (a_{11}+\lambda\cdot a_{21})\cdot a_{22} - a_{21}\cdot(a_{12}+\lambda\cdot a_{22})$$

$$= a_{11}\cdot a_{22}+\lambda\cdot a_{21}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12} - \lambda\cdot a_{21}\cdot a_{22}$$

$$= a_{11}\cdot a_{22} - a_{21}\cdot a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det A = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$$

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det B = 4 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 16 - 18 = -2$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det C = 7 \cdot 4 - 3 \cdot 10 = 28 - 30 = -2$$

$$D = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \det D = 10 \cdot 4 - 3 \cdot 14 = 40 - 42 = -2$$

Eigenschaften zweireihiger Determinanten (6)

Die Determinante eines Matrizenproduktes $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ ist gleich dem Produkt der Determinanten der beiden Faktoren $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$.

det ($\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$) = det $\boldsymbol{A}$ · det $\boldsymbol{B}$ daraus folgt: det ($\boldsymbol{A}^k$) = (det $\boldsymbol{A}$)^k

Mit der Hilfe des Multiplikationstheorems lässt sich die Determinante eines Matrizenproduktes $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ direkt aus den Determinanten der beiden Faktoren berechnen. Die oft mühsame Ausrechnung des Matrizenproduktes entfällt somit.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) - 5 \cdot 4 = -2 - 20 = -22$$

$$\det B = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 1 - 4 \cdot (-3) = -2 + 12 = 10$$

$$\det A \cdot \det B = (-22) \cdot 10 = -220$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -18 & -17 \end{pmatrix}$$

$$\det(A \cdot B) = \begin{vmatrix} 14 & 1 \\ -18 & -17 \end{vmatrix} = 14 \cdot (-17) - (-18) \cdot 1 = -238 + 18 = -220$$

Determinante der inversen Matrix

Beweisen Sie den Satz: $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Definition inverse Matrix: $A \cdot A^{-1} = E$

Multiplikationstheorem: $\det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det A \cdot \det A^{-1}$

$$\det E = 1 = \det A \cdot \det A^{-1}$$

Daraus folgt: $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Daraus folgt: die Determinante der inversen Matrix ist immer ungleich Null.

Die Determinante einer Dreiecksmatrix

Die Determinante einer zweireihigen Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Elemente auf der Hauptdiagonalen.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = a_{11} \cdot a_{22}$$

Die Diagonalmatrix ist ein Sonderfall der Dreiecksmatrix.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - 0 \cdot 0 = a_{11} \cdot a_{22}$$

Die Determinante von Einheitsmatrix und Nullmatrix

Einheitsmatrix und Nullmatrix sind Sonderfälle der Diagonalmatrix.

$$\det E = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

$$\det 0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$$

Orthogonale Matrix

Eine Matrix $\boldsymbol{A}$ heißt orthogonal, wenn das Matrizenprodukt aus $\boldsymbol{A}$ und ihrer Transponierten $\boldsymbol{A^T}$ die Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$ ergibt.

$$\boldsymbol{A \cdot A^T = E}$$

Eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{A}$ ist stets regulär und besitzt eine inverse Matrix $\boldsymbol{A^{-1}}$.

$$\det(A \cdot A^T) = (\det A) \cdot (\det A^T) = (\det A)^2 \cdot (\det A) = (\det A)^2 = \det E = 1$$

$$\boldsymbol{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E}$$

$$\boldsymbol{A^T = A^{-1}}$$

Beispiele: $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ $\quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Matrizen und ihre Determinanten

Matrix allgemein	kann eine Determinante haben oder auch nicht
quadratische Matrix	hat immer eine Determinante
reguläre Matrix	Determinante ist ungleich Null
singuläre Matrix	Determinante ist gleich Null
inverse Matrix	Determinante ist ungleich Null
Dreiecksmatrix	Determinante ist Produkt der Diagonalelemente
Diagonalmatrix	Determinante ist Produkt der Diagonalelemente
Einheitsmatrix	Determinante ist gleich Eins
Nullmatrix	Determinante ist gleich Null

Aufgaben

1. Gegeben seien die Matrizen ***A*** und ***B***. Berechnen Sie ***det (A·B)*** und vergleichen Sie das Ergebnis mit ***det A · det B***.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

2. Überprüfen Sie die Invertierbarkeit der folgenden Matrizen und berechnen Sie die Determinanten der jeweiligen inversen Matrizen (falls sich die Matrizen invertieren lassen).

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Sind die folgenden Matrizen orthogonal oder nicht?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Quellen

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org

HOCHSCHULE DEGGENDORF

University of Applied Sciences

HDU

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf