Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (25)

Gerald Kupris

08.12.2010

Zusammenfassung der Ableitungsregeln

Faktorregel	$(C \cdot f(x))'$	$=$	$C \cdot f'(x)$
Summenregel	$(f(x) \pm g(x))'$	$=$	$f'(x) \pm g'(x)$
Produktregel	$(f(x) \cdot g(x))'$	$=$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	$=$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	$(f(u(x)))'$	$=$	$f'(u(x)) \cdot u'(x)$
Umkehrfunktion	$\left(f^{-1}(y)\right)'$	$=$	$\frac{1}{f'(x)}$

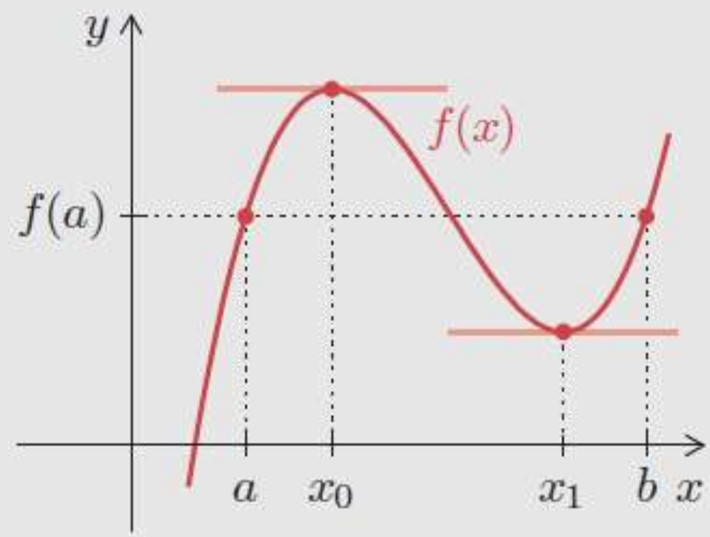
Satz von Rolle

Bei einer Funktion f, die auf dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar ist und bei der die beiden Funktionswerte an den Intervallgrenzen gleich sind,

$$f(a) = f(b),$$

gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \in (a, b)$, an der die Steigung null ist:

$$f'(x_0) = 0.$$



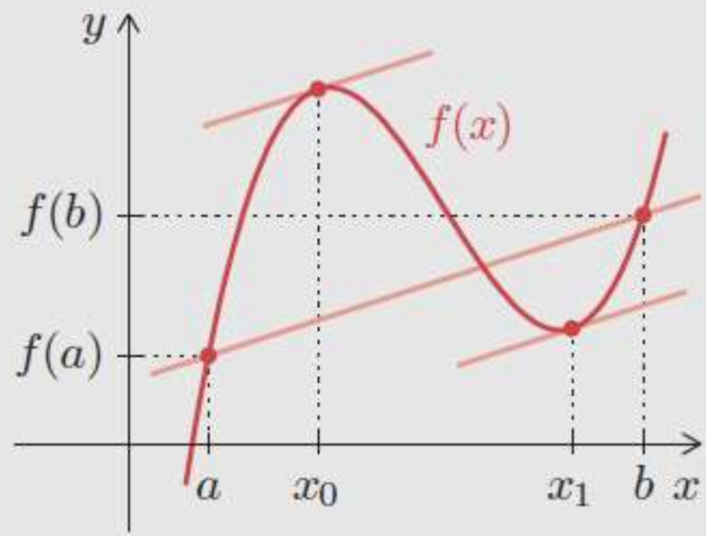
Beispiel: $f(x) = x / 2^{x-1}$

Verallgemeinerung

Bei einer Funktion f, die auf dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar ist, gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \in (a, b)$ mit

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

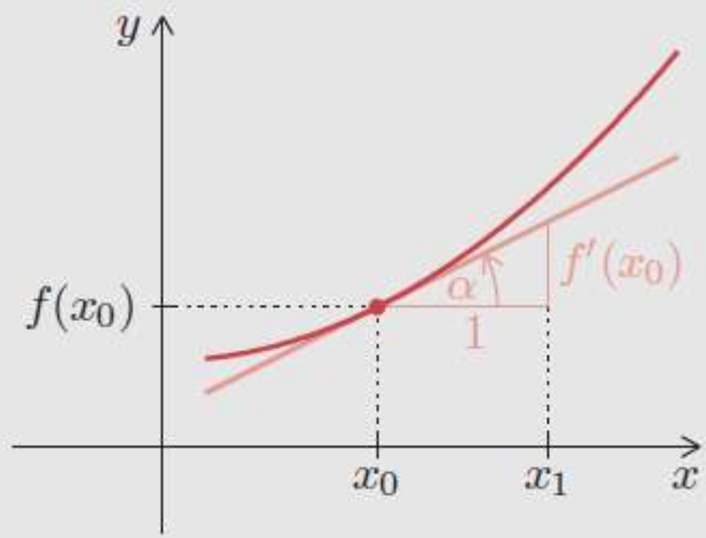
Die Steigung der Sekante durch die Punkte $(a|f(a))$ und $(b|f(b))$ stimmt mit der Steigung der Tangente an der Stelle x_0 überein.



Geometrische Bedeutung: Neigungswinkel

Der **Neigungswinkel** des Graphen einer Funktion f im Punkt $(x_0\,|\,f(x_0))$ ist der Winkel α, den die Tangente an der Stelle x_0 mit der x-Achse bildet. Zwischen dem Winkel α und der Ableitung der Funktion an der Stelle x_0 besteht der Zusammenhang

$$\tan\alpha = f'(x_0).$$



Schnittwinkel

Der **Schnittwinkel** α der Graphen von zwei Funktionen f und g, die sich an der Stelle x_0 in einem gemeinsamen Punkt schneiden, ist die Differenz der beiden Neigungswinkel α_f des Schaubildes der Funktion f an der Stelle x_0 und α_g des Schaubildes der Funktion g an der Stelle x_0:

$$\alpha = \alpha_f - \alpha_g.$$

Der Schnittwinkel lässt sich mit den Ableitungen berechnen:

$$\tan\alpha = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)\, g'(x_0)}.$$

Orthogonale und berührende Graphen

Die Graphen der Funktionen f und g, die für x_0 denselben Funktionswert haben,

- stehen genau dann senkrecht zueinander, wenn das Produkt der beiden Ableitungen an der Stelle x_0 den Wert -1 ergibt:

$$f(x_0) = g(x_0) \quad \text{und} \quad f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1.$$

- berühren sich genau dann, wenn die Ableitungen an der Stelle x_0 übereinstimmen:

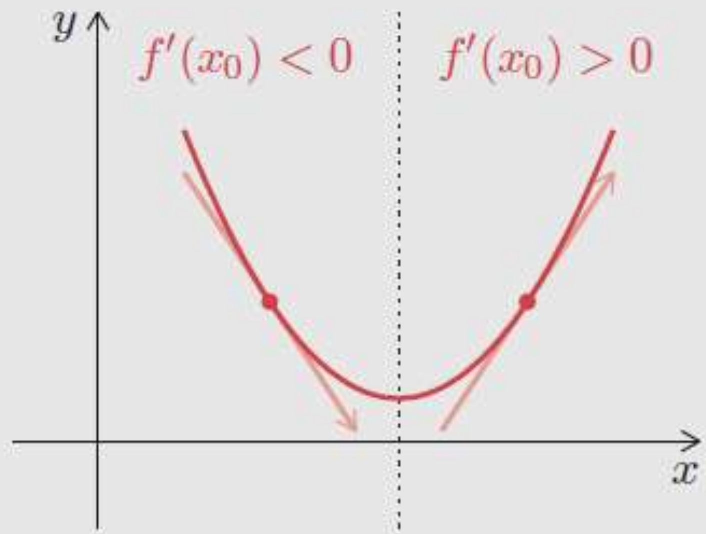
$$f(x_0) = g(x_0) \quad \text{und} \quad f'(x_0) = g'(x_0).$$

Geometrische Bedeutung der ersten Ableitung

Die erste Ableitung an der Stelle x_0 beschreibt das Steigungsverhalten einer Funktion f in der unmittelbaren Umgebung der Stelle x_0:

$$f'(x_0) \begin{cases} < \; 0 \implies \text{Funktion fällt} \\ > \; 0 \implies \text{Funktion wächst.} \end{cases}$$

Dabei betrachtet man die Funktion stets in Richtung zunehmender x-Werte.



Erste Ableitung und Monotonie

Falls die erste Ableitung einer Funktion f für alle x-Werte aus einem Intervall I

- positiv ist, dann ist die Funktion auf ganz I streng monoton wachsend:

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in I \quad \Longrightarrow \quad f(x) \text{ streng monoton wachsend.}$$

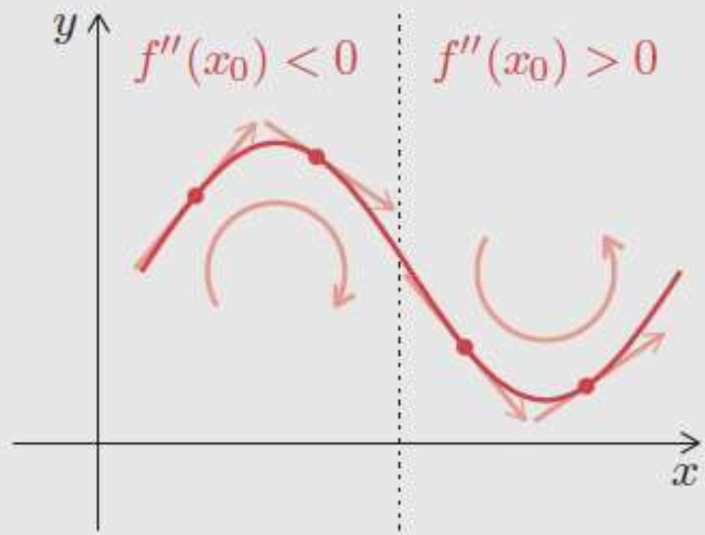
- negativ ist, dann ist die Funktion auf ganz I streng monoton fallend:

$$f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in I \quad \Longrightarrow \quad f(x) \text{ streng monoton fallend.}$$

Geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung

Die zweite Ableitung an der Stelle x_0 beschreibt das Krümmungsverhalten einer Funktion f in der unmittelbaren Umgebung der Stelle x_0:

$$f''(x_0) \begin{cases} < 0 \implies & \text{Rechtskrümmung, Steigung nimmt ab} \\ > 0 \implies & \text{Linkskrümmung, Steigung nimmt zu.} \end{cases}$$



Lokales Minimum und Maximum

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0

- ein **lokales Minimum**, wenn alle anderen Funktionswerte in der Umgebung von x_0 größer sind als der Funktionswert an der Stelle x_0:

  $$f(x_0) < f(x), \quad x \neq x_0.$$

  Einen entsprechenden Punkt im Schaubild bezeichnet man als **Tiefpunkt**.
- ein **lokales Maximum**, wenn alle anderen Funktionswerte in der Umgebung von x_0 kleiner sind als der Funktionswert an der Stelle x_0:

  $$f(x_0) > f(x), \quad x \neq x_0.$$

  Einen entsprechenden Punkt im Schaubild bezeichnet man als **Hochpunkt**.

Lokales Minimum

Wenn eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0

- ein lokales Minimum hat, dann besitzt sie dort eine waagrechte Tangente. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist somit notwendig.
- eine waagrechte Tangente hat und zusätzlich links gekrümmt ist, dann hat sie dort ein lokales Minimum. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist somit hinreichend.
- eine waagrechte Tangente hat und die Ableitung f' beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen von minus nach plus wechselt, so hat f genau dann an der Stelle x_0 ein lokales Minimum. Diese Bedingung ist somit notwendig und hinreichend.

Lokales Maximum

Wenn eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0

- ein lokales Maximum hat, dann besitzt sie dort eine waagrechte Tangente. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist somit notwendig.
- eine waagrechte Tangente hat und zusätzlich rechts gekrümmt ist, dann hat sie dort ein lokales Maximum. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist somit hinreichend.
- eine waagrechte Tangente hat und wenn die Ableitung f' beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen von plus nach minus wechselt, so hat f genau dann an der Stelle x_0 ein lokales Maximum. Diese Bedingung ist somit notwendig und hinreichend.

Wendepunkt

Ein **Wendepunkt** ist ein Kurvenpunkt, an dem das Schaubild einer Funktion von einer Linkskrümmung auf eine Rechtskrümmung wechselt oder umgekehrt.

Wenn eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0

- einen Wendepunkt hat, dann ist dort die zweite Ableitung null. Die Bedingung $f''(x_0) = 0$ ist somit notwendig.
- eine zweite Ableitung hat, die dort null ist, und die dritte Ableitung dort zusätzlich ungleich null ist, dann hat sie dort einen Wendepunkt. Die Bedingung $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ ist somit hinreichend.
- eine zweite Ableitung hat, die dort null ist, und die Ableitung f'' beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen wechselt, so hat f genau dann an der Stelle x_0 einen Wendepunkt. Diese Bedingung ist somit notwendig und hinreichend.

Sattelpunkt

Ein **Sattelpunkt** ist ein Wendepunkt, an dem das Schaubild der Funktion zusätzlich eine waagrechte Tangente besitzt.

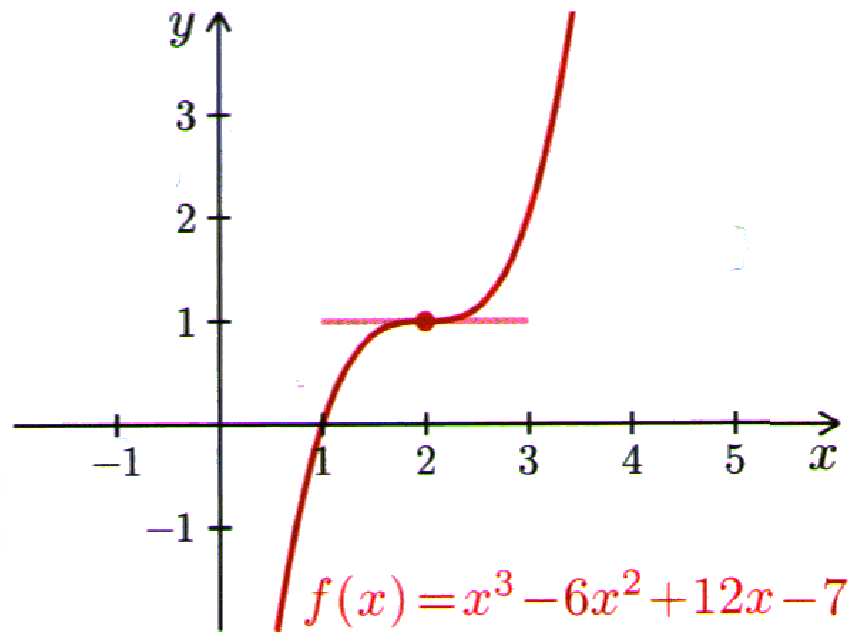
Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

bestimmen wir mithilfe der Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 12 \\ f''(x) &= 6x - 12 \end{aligned}$$

Nur die Stelle $x = 2$ kommt für einen Wendepunkt in Frage. Es ist $f'''(2) = 6$ und somit steht fest, dass an der Stelle $x = 2$ tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt.



Globales Minimum und Maximum

Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f besitzt an der Stelle x_0

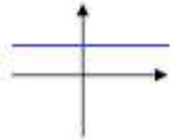
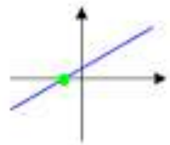
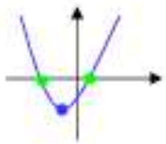
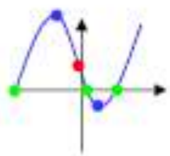
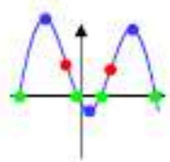
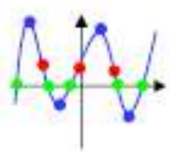
- ein **globales Minimum**, wenn alle anderen Funktionswerte im Intervall I nicht kleiner sind als der Funktionswert an der Stelle x_0:

$$f(x) \geq f(x_0), \quad x \in I.$$

- ein **globales Maximum**, wenn alle anderen Funktionswerte im Intervall I nicht größer sind als der Funktionswert an der Stelle x_0:

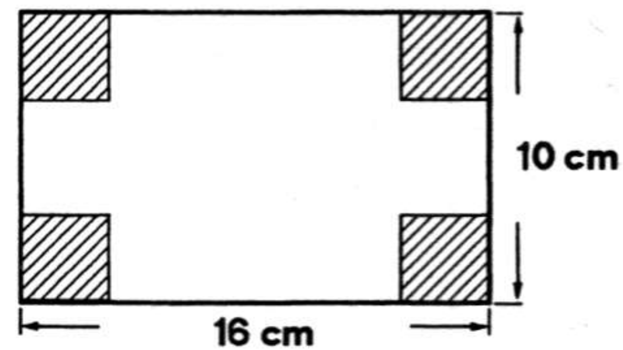
$$f(x) \leq f(x_0), \quad x \in I.$$

Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ definierte stetige Funktion besitzt dort ein globales Minimum und ein globales Maximum. Es kann jedoch mehrere Stellen geben, an denen die Funktion den minimalen und den maximalen Funktionswert annimmt.

Ganzrationale Funktionen	Grad (Ordnung)	Gleichung	Max. Anzahl Nullstellen	Max. Anzahl Extrema	Max. Anzahl Wendepkte
	0 Waagerechte Gerade	$f(x) = a$ Bsp.: $f(x) = 3$	0	0	0
	1 Gerade	$f(x)=ax+b$ (oft auch $f(x)=mx+b$ wobei m die Steigung ist und b der Y-Achsenabschnitt) Bsp.: $f(x) = 2x+3$	1	0	0
	2 Parabel	$f(x) = ax^2+bx+c$ Bsp.: $f(x)=2x^2-x+1$	2	1	0
	3	$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ Bsp.: $f(x) = 4x^3-2x^2+x+22$	3	2	1
	4	$f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$	4	3	2
	5	$f(x) = ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$	5	4	3
Bsp. für Polynom 6. Grades Allg.-form Polynom 6. Grades Allg.-form Polynom n. Grades		$f(x) = 3x^6+5x^5-2x^4-8x^3+11x^2-7x+8$ $f(x) = ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g$ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$	n	n-1	n-2

Aufgaben zur Ableitung

1. Aus einer rechtwinkligen Blechplatte der Seitenlängen 16 cm und 10 cm soll eine quaderförmige oben offene Wanne mit maximalem Volumen geformt werden.
   Wie sind die Abmaße der Wanne?



2. Die Funktion f(x) = $x^3 - x^2 - 2x$ schneidet die Funktion g(x) = x / 2.
   Bestimmen Sie die Anzahl der Schnittpunkte und Schnittwinkel der Graphen.

3. Gegeben sei die Funktion f(x) = $x^3 - 2x^2 - x + 2$.
   Bestimmen Sie: Nullpunkte, Minimum, Maximum, Wendepunkt, Monotonie.

Gebrochenrationale Funktionen

Eine Funktion f, die sich als Quotient zweier Polynome, also in der Form

$$f(x) = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_m x^m}, \quad a_n \neq 0, b_m \neq 0,$$

darstellen lässt, bezeichnet man als gebrochenrationale Funktion. Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ und $b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$ sind dabei beliebige Zahlen, wobei allerdings die höchsten Koeffizienten a_n und b_m nicht null sein dürfen.

Nullstellen und Definitionslücken

Bei einer gebrochenrationalen Funktion sind die Nullstellen des Nenners Definitionslücken der Funktion.

Beispiel

Die Nullstellen einer gebrochenrationalen Funktion sind die Nullstellen des Polynoms im Zähler, falls sie nicht gleichzeitig auch Nullstellen des Nenners sind.

Beispiel

Wenn bei einer gebrochenrationalen Funktion x_0 eine gemeinsame Nullstelle von Zähler und Nenner ist, dann lässt sich der Linearfaktor $(x - x_0)$ kürzen. Dabei kann eine Definitionslücke weggekürzt werden.

Beispiel

Echt und unecht gebrochenrationale Funktionen

Falls bei einer gebrochenrationalen Funktion der Grad des Zählerpolynoms größer oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms ist, nennt man die Funktion **unecht gebrochenrational** und sonst **echt gebrochenrational**.

Durch Polynomdivision kann man jede unecht gebrochenrationale Funktion zerlegen in eine Summe aus einem Polynom und einer echt gebrochenrationalen Funktion.

Beispiel

Partialbrüche für Linearfaktoren

Jeder Nennernullstelle x_0 einer echt gebrochenrationalen Funktion ordnet man einen Partialbruch zu. Die Form des Partialbruches hängt dabei wie folgt von der Vielfachheit der Nullstelle x_0 ab:

$$\begin{array}{lcl}
\text{einfache Nullstelle} & \Longrightarrow & \dfrac{A_1}{x-x_0} \\[2ex]
\text{zweifache Nullstelle} & \Longrightarrow & \dfrac{A_1}{x-x_0} + \dfrac{A_2}{(x-x_0)^2} \\
\vdots & & \\
p\text{-fache Nullstelle} & \Longrightarrow & \dfrac{A_1}{x-x_0} + \dfrac{A_2}{(x-x_0)^2} + \ldots + \dfrac{A_p}{(x-x_0)^p}
\end{array}$$

Die Konstanten $A_1, A_2, \ldots, A_p$ bestimmt man durch Koeffizientenvergleich.

Beispiel

Partialbruchzerlegung für Linearfaktoren

Eine echt gebrochenrationale Funktion, bei der sich der Nenner in Linearfaktoren zerlegen lässt, kann man auf folgende Weise in eine Summe von Partialbrüchen zerlegen:

(1) Bestimme alle Nullstellen des Nenners.

(2) Ordne jeder Nennernullstelle einen geeigneten Partialbruch zu.

(3) Bestimme die Konstanten in den Partialbrüchen so, dass die Summe der Partialbrüche mit der Funktion übereinstimmt.

Beispiel

Partialbrüche für quadratische Funktionen

Jedem quadratischen Faktor $x^2 + bx + c$ im Nenner einer echt gebrochenrationalen Funktion ordnet man einen Partialbruch zu. Die Form des Partialbruches hängt dabei wie folgt von der Vielfachheit des Faktors $x^2 + bx + c$ ab:

$$\begin{array}{lll}
\text{einfacher Faktor} & \Longrightarrow & \dfrac{B_1 x + C_1}{x^2 + bx + c} \\
\text{zweifacher Faktor} & \Longrightarrow & \dfrac{B_1 x + C_1}{x^2 + bx + c} + \dfrac{B_2 x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} \\
\quad\vdots & & \\
p\text{-facher Faktor} & \Longrightarrow & \dfrac{B_1 x + C_1}{x^2 + bx + c} + \dfrac{B_2 x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \ldots + \dfrac{B_p x + C_p}{(x^2 + bx + c)^p}
\end{array}$$

Die Konstanten B_1, B_2, …, B_p und C_1, C_2, …, C_p bestimmt man durch Koeffizientenvergleich.

Partialbruchzerlegung

Eine gebrochenrationale Funktion lässt sich auch dann in Partialbrüche zerlegen, wenn sich das Nennerpolynom nicht vollständig in Linearfaktoren zerlegen lässt:

(1) Bestimme alle linearen und quadratischen Faktoren des Nenners.

(2) Ordne jedem Faktor einen geeigneten Partialbruch zu.

(3) Bestimme die Konstanten in den Partialbrüchen so, dass die Summe der Partialbrüche mit der Funktion übereinstimmt.

Beispiel

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org