3, Majorantenkriterium

Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und $|b_k| \le a_k$ für alle $k \ge N$,

so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent.

Ebenso gilt: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent und gilt $b_k \ge a_k$ für alle $k \ge N$, so ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent.

4, Kriterium für alternierende Reihen (Leibniz)

Ist (a_n) eine monoton fallende Folge, d.h. $a_0 \ge a_1 \ge a_2 \ge \dots$

mit $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$

4, Kriterium für alternierende Reihen (Leibniz)

Ist (a_n) eine monoton fallende Folge, d.h. $a_0 \ge a_1 \ge a_2 \ge \dots$

mit $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k$

<u>Bem.</u>: (Notwendiges Kriterium für Konvergenz)
(Bedingung)

Ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist (a_k) eine

sog. <u>Nullfolge</u>, d.h. $\lim_{k \to \infty} a_k = 0$.

15.12.14

Implikation: $A \Rightarrow B$ „aus A folgt B", „A impliziert B"

Die Gültigkeit der Bed. A ist hinreichend für die Gültigkeit von B

d.h. A ist eine hinreichende Bed./Krit. für B.

Die Gültigkeit der Bed. B ist notwendig für die Gültigkeit von A

d.h. B ist eine notwendige Bed./Krit. für A.

„Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert" $\Rightarrow$ „(a_k) ist Nullfolge"

Rechenregeln für konvergente Reihen:

Es seien $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k = b$ konvergente Reihen,

$\alpha \in \mathbb{R}$.

Dann sind auch die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)$ und $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k$

konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k) = a \pm b$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha a_k = \alpha a$$

Sind insbes. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ absolut konvergent,

so ist auch das Cauchy-Produkt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}}_{c_k}$$

absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = a \cdot b$$

15.12.14

Stetigkeit v. Funtionen

Def.: (Grenzwerte bei Funktionen)

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion ($D \subseteq \mathbb{R}$) und $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$
Man schreibt

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$, ($c$ = Grenzwert von $f(x)$ für $x \to a$)

falls für jede Folge (x_n), $x_n \in D$, mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$
$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$ gilt.

b) $\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = c$ (c = rechts-/linksseitiger Grenzwert von $f(x)$ für $x \to a^\pm$)

falls für jede Folge (x_n), $x_n \in D$, $x_n \gtrless a$, mit
$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$ gilt.

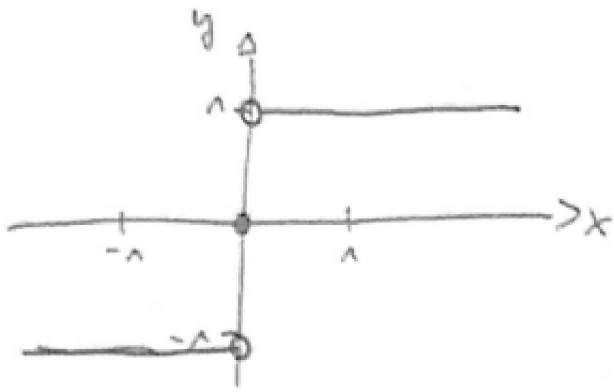
Bem.: Der Grenzwert $c = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert genau dann, wenn die einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x)$ existieren und übereinstimmen. In diesem Fall gilt

$$\lim_{x \to a^\pm} f(x) = \lim_{x \to a} f(x).$$

15.12.14

Bsp.: $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x = 0 \\ -1, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ Signum-Fkt.

(Signum $\hat{=}$ Vorzeichen



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \underbrace{\operatorname{sgn}(x)}_{-1,\ \text{da } x<0} = -1$$

$\neq$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\operatorname{sgn}(x)}_{1,\ \text{da } x>0} = 1$$

--> Lim sgn(x) existiert nicht, obwohl
die einseigen x--> ∞ Grenzwerte existieren

Sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in D$. Die Funktion f heißt <u>stetig in a</u>, falls

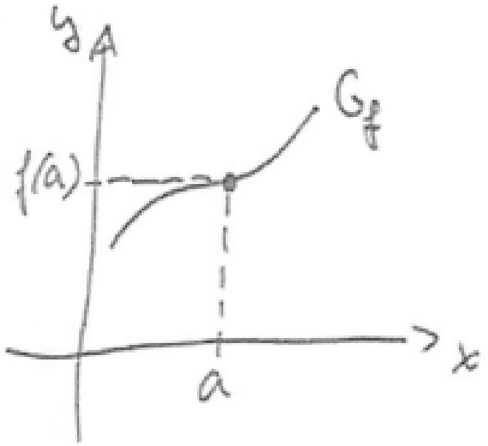
$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

gilt; ansonsten heißt f <u>unstetig in a</u>.

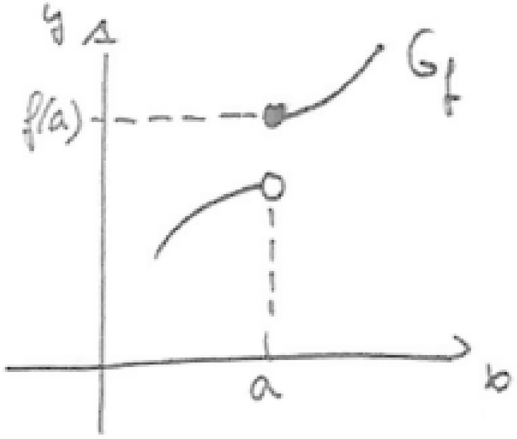
f heißt <u>stetig</u> (in D), falls f in <u>jedem</u> $a \in D$ stetig ist; ansonsten heißt f <u>unstetig</u>.

15.12.14

Bem.: 1) f ist stetig in a, wenn der Graph von f bei $x=a$ keinen „Sprung" macht.

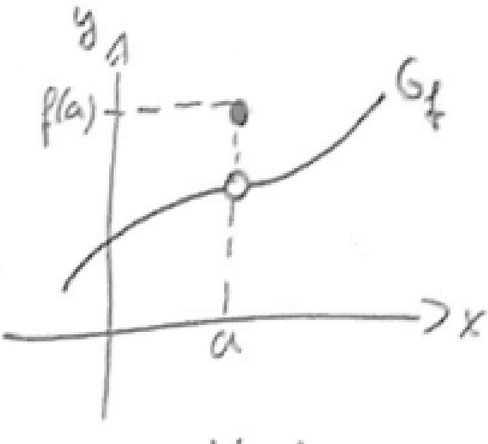


stetig in a



unstetig in a

$$\lim_{x\to a^-} f(x) < \lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$



unstetig in a

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) < f(a)$$

15.12.14

2, Alle ganzrat. und gebrochenrat. Fkt. sind stetig,

alle Potenzfkt. und Exponentialfkt. –"–

alle trigonometrischen Fkt. –"–

alle Logarithmusfkt. sind stetig.

3, ε-δ-Kriterium der Stetigkeit

f ist stetig in $a \in D$ ~~:(es~~ $\cancel{\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in D\ |x-a|<\delta}$ $\Rightarrow$

$\Leftrightarrow$ $\cancel{\Rightarrow |f(x)-f(a)|}<\varepsilon$

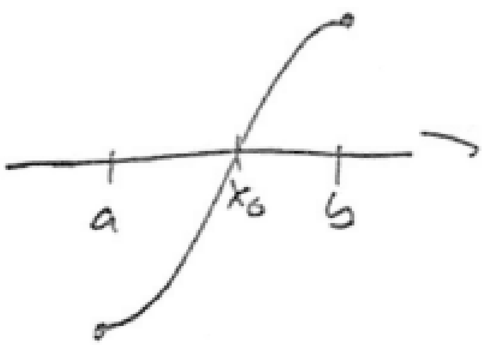
$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x\in D\ |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$

alle Logarithmusfkt. sind stetig.

Satz (Zwischenwertsatz)

Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und es gelte $f(a)\cdot f(b)<0$.

Dann ex. ein $x_0 \in\,]a,b[$ mit $f(x_0)=0$.

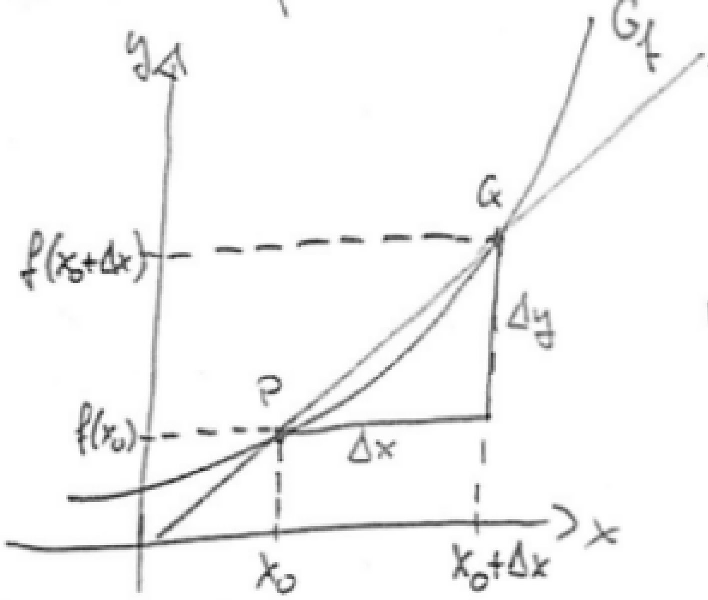


15.12.14

3. Differentiation

3.1 Differenzierbarkeit

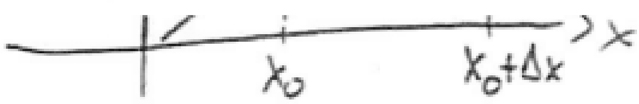
Problem: Bestimmung der Steigung der Tangente an den Graphen von f in Punkt $P(x_0; f(x_0))$



Sekantensteigung $m_{s,\Delta x}$

$$m_{s,\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Für $\Delta x \to 0$ geht die Sekante in die Tangente t über (im Grenzfall)



Für die Steigung m_t der Tangente t gilt dann

$$m_t = \lim_{\Delta x \to 0} m_{s,\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(falls der Grenzwert sprich die Tangente existiert)

Def.: a) $f: D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in D$, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert; $f'(x_0)$ heißt Differentialquotient in x_0 oder Ableitung von f in x_0; man schreibt auch

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) \quad \text{(Leibniz-Schreibweise)}$$

(df und dx heißen Differentiale)

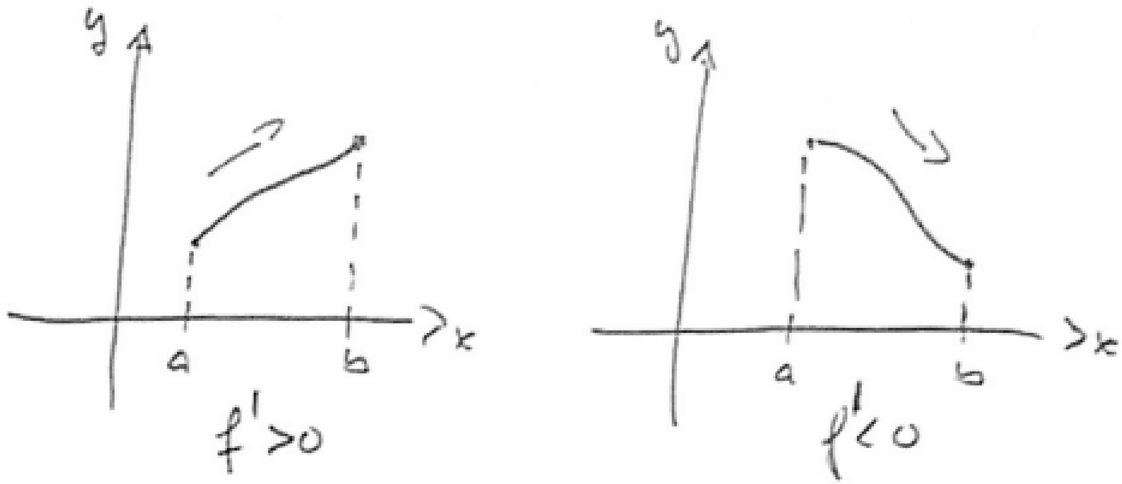
b) $f: D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar (in D), wenn f differenzierbar in jedem $x_0 \in D$ ist.

Bem.: $f: D \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in D$ differenzierbar, wenn die einseitigen Grenzwerte $\lim_{\Delta x \to 0^\pm} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ existieren und übereinstimmen.

Satz: Ist f: D-->IR xo € D differenzierbar, so ist f in xo stetig

„Differenzierbarkeit“ => „Stetigkeit“

<u>Satz</u>: Ist $f:]a;b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f'(x) \gtrless 0$ in $]a;b[$, so ist f streng monoton $\begin{Bmatrix} \text{steigend} \\ \text{fallend} \end{Bmatrix}$ auf $]a;b[$.

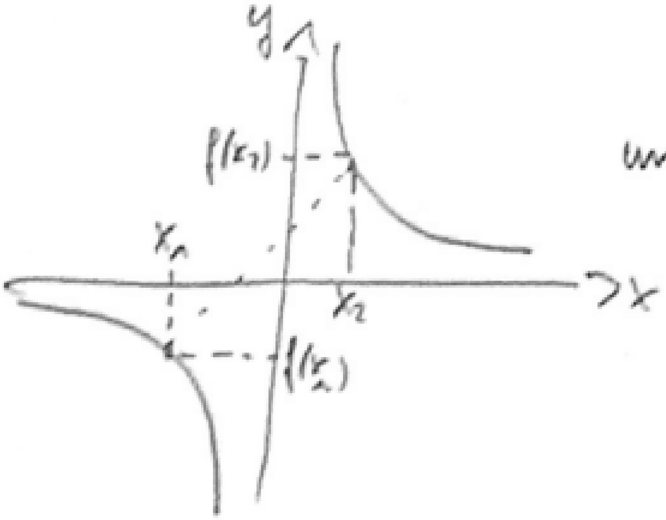


<u>Beachte</u>: Die Voraussetzung im obigen Satz, dass $D =]a;b[$ ein Intervall ist, ist wesentlich, denn z.B. gilt für $f: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ folgendes:

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, jedoch ist f <u>nicht</u> streng monoton fallend

15.12.14

Auf dem jeweiligen Intervall $]-\infty; 0[$ bzw. $]0; \infty[$ ist f streng monoton fallend, jedoch nicht auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.



$x_1 < x_2$

und $f(x_1) < f(x_2)$

streng monoton fallend auf $]-\infty; 0[$	streng monoton fallend auf $]0; \infty[$

Satz: (Regel von L'Hospital)

Führt die Betrachtung von $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ auf einen unbestimmten Ausdruck der Form „$\frac{0}{0}$" bzw. „$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$",

so gilt

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

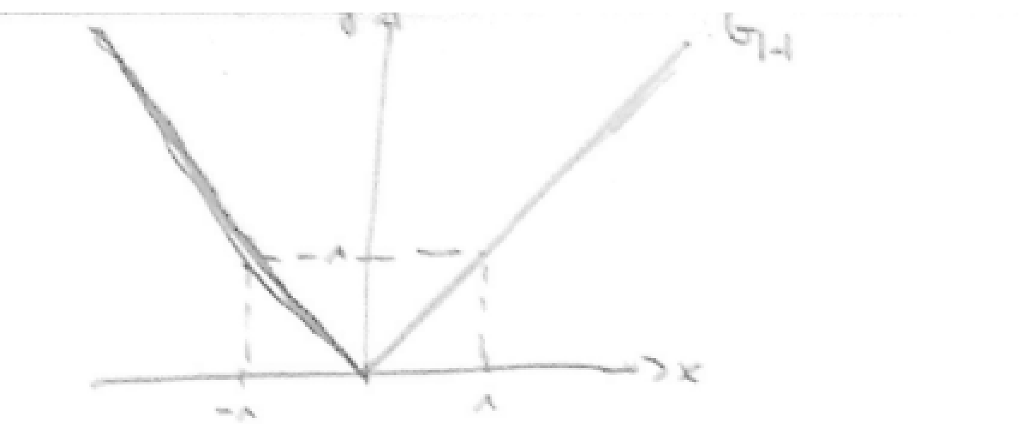
15.12.14

Die Regel ist wiederholt anwendbar.

Anwendung der L'Hospitalschen Regel auf weitere unbestimmte Ausdrücke durch vorherige Transformation

$\varphi(x)$	$\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)$ führt zu unbestimmten Ausdruck	Transformation
$f(x) \cdot g(x)$	„$0 \cdot \infty$", „$0 \cdot (-\infty)$"	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$f(x) - g(x)$	„$\infty - \infty$"	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x) \cdot g(x)}}$
$f(x)^{g(x)}$	„0^0", „∞^0", „$1^{\pm\infty}$"	$\lim\limits_{x \to x_0} e^{g(x) \ln(f(x))}$ $(f(x) > 0)$

15.12.14



$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \underset{x_0=0}{=} \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x|-|0|}{\Delta x} =$$

$$\underset{|\Delta x| = -\Delta x,\ \text{da}\ \Delta x < 0}{=} \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \underline{\underline{-1}};$$

$|\Delta x| = -\Delta x$, da $\Delta x < 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \underset{x_0=0}{=} \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x|-|0|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \underline{\underline{+1}};$$

$|\Delta x| = \Delta x$, da $\Delta x > 0$

$\Rightarrow$ einseitige Grenzwerte existieren, stimmen jedoch <u>nicht</u> überein.

2) $$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{für } x < 0 \\ (x+1)^2 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

<u>Beh.</u> f ist in $x=0$ <u>nicht</u> differenzierbar (HÜ)

15.12.14

3.2 Ableitungen erster und höherer Ordnung

<u>Def.:</u> a) Ist $f: D \to \mathbb{R}$ differenzierbar (in D), so heißt die Funktion $f': D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ die <u>Ableitung</u> von f.

b) Ist die Ableitung $f': D \to \mathbb{R}$ differenzierbar (in D), so heißt $f''(x) = (f'(x))'$ die <u>zweite Ableitung</u> von f;
analog definiert man die <u>k-te Ableitung</u> durch

$$f^{(k)}(x) = \left(f^{(k-1)}(x)\right)',$$

falls $f^{(k)}$ existiert.

<u>Bsp.:</u> 1) $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$

2) $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, $f''(x) = -\sin(x)$

3) $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$

4) $f(x) = \ln x$, $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

3.3 Ableitungsregeln

<u>Satz</u>: Es seien u, v differenzierbare Funktionen, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) (Summenregel)

$$\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$$

b) (Faktorregel)

$$\boxed{(\alpha u)' = \alpha \cdot u'}$$ (α = multiplikative Konstante)

$$\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$$

c) (Produktregel)

$$\boxed{(u \cdot v)' = u' v + u \cdot v'}$$

d) (Quotientenregel)

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u \cdot v'}{v^2}}$$

15.12.14

e) (Kettenregel)

$$\boxed{(u \circ v)' = (u' \circ v) \cdot \underbrace{v'}_{\substack{\text{Nachdifferenzieren} \\ = \text{Multiplikation mit } v'}}}$$

bzw. $u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

äußere Fkt innere Fkt.

bzw. $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$

11

Ableitungen elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	$n x^{n-1}$ $(n \in \mathbb{R})$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Bem.: Mehrfaches Nachdifferenzieren

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{äußere}\\ \text{Fkt.}}}{u}(\underbrace{v(w(x))}_{\substack{\uparrow\\ \text{innere}\\ \text{Fkt.}}})' = u'(v(w(x))) \cdot \underbrace{v(w(x))'}_{\substack{\text{nochmalige Anwendung}\\ \text{der Kettenregel beim}\\ \text{Nachdifferenzieren}}} =$$

$$= u'(v(w(x))) \cdot \underbrace{v'(w(x)) \cdot w'(x)}_{\text{2-maliges Nachdifferenzieren}}$$

z.B.

$$\left[\sin\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right) \cdot \sqrt{x^2+1}\,' = \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$$

$$\underset{\substack{\uparrow\ \ \uparrow\ \ \uparrow\\ \sin\ \ \sqrt{\ }\ \ x^2+1}}{u(v(w(x)))} \qquad u'(v(w(x))) \cdot v(w(x))' \qquad u'(v(w(x))) \cdot v'(w(x)) \cdot w'(x)$$

$$= \cos\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} = \cos\sqrt{x^2+1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}};$$

3.4 Ableitung der Umkehrfunktion

Satz: Es sei $f: D \to E$ eine differenzierbare, bijektive Funktion. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1}: E \to D$ differenzierbar und es gilt

$$\boxed{{f^{-1}}'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Herleitung von Tafel abfotografiert:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \Big| \ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = \frac{d}{dx} x$$

$$f(f^{-1}(x))' = x'$$

$$f'(f^{-1}(x)) \, f^{-1}(x)' = 1 \quad \Big| : f'(f^{-1}(x))$$

$$f^{-1}(x)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

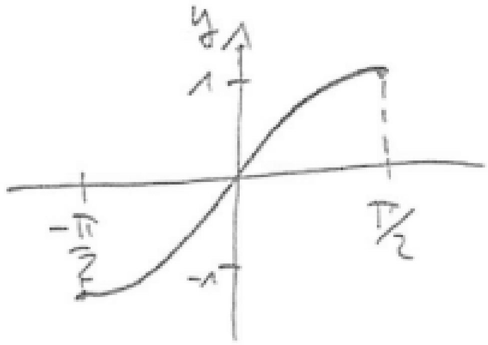
15.12.14

Bsp.: 1) $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist bijektiv.

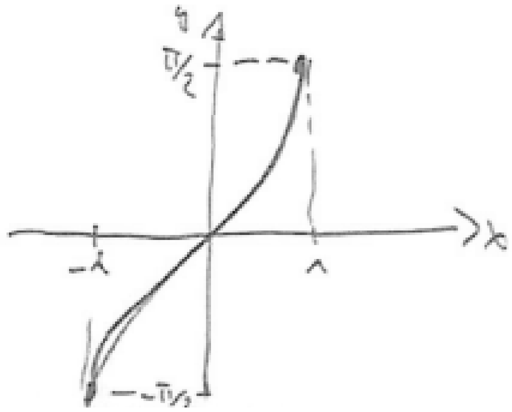
Umkehrfkt $\ln x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

$$(\ln x)' = \frac{1}{\underbrace{e^{\ln x}}_{=x}} = \frac{1}{x}$$

2) $\sin : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ bijektiv



Umkehrfunktion $\arcsin (= \sin^{-1}) : [-1; 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$



$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} \quad (>0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$\Rightarrow \cos(\arcsin x) \geq 0$

trig. Pythagoras: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$\cos x \geq 0$

$$\Rightarrow \arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1-\underbrace{\sin^2(\arcsin x)}_{x^2}}} =$$

$$= \frac{1}{}$$