HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences



Mathematik 1 Infotronik (2)

Gerald Kupris

11.10.2012

Achtung: keine Vorlesungen am Donnerstag, 18.10. !

VORLESUNGSPLAN ANGEWANDTE INFORMATIK / INFOTRONIK
Wintersemester 2012/13

Block 1: 08:00 - 09:30
Block 2: 09:45 - 11:15
Block 3: 12:00 - 13:30

1. Semester Bachelor AI (Stand: 18.09.2012)

Block 4: 14:00 - 15:30
Block 5: 15:45 - 17:15
Block 6: 17:30 - 19:00

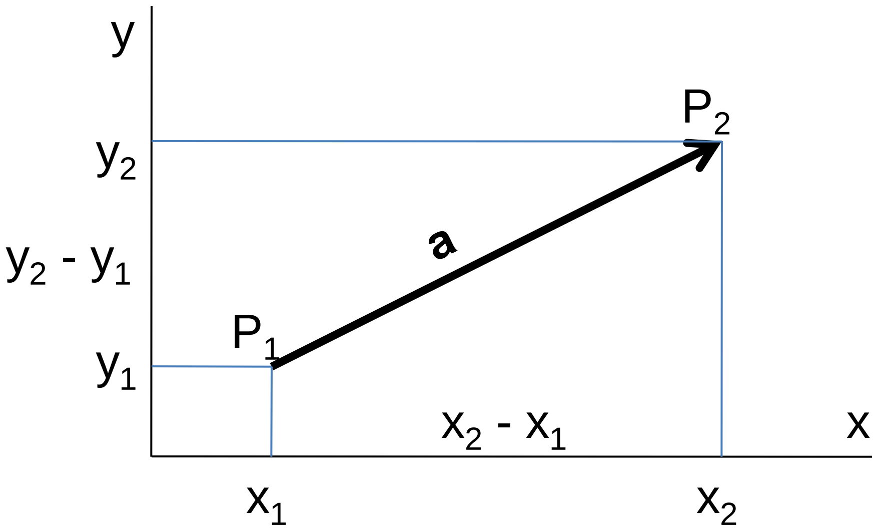
Donnerstag, 18. Oktober

	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
1	Digitaltechnik 1 Bö E 101	Grundlagen der Informatik Jr ITC 1 – E 104	GET Ku E 101	~~Mathematik 1~~ ~~Ku E 006~~	
2	Physik Ku E 001	Grundlagen der Informatik Jr ITC 1 – E 103	Mathematik 1 Ku E 101	~~Physik~~ ~~Ku E 006~~	
3	GET Bö E 001	Einführung in die Programmierung Jr ITC 1 – E 104			
4	Mathematik 1 LB Böhm E 001	Einführung in die Programmierung Jr ITC 1 – E 103			
5	Mathematik 1 LB Böhm E 001				

Vorlesungsinhalte Vektorrechnung

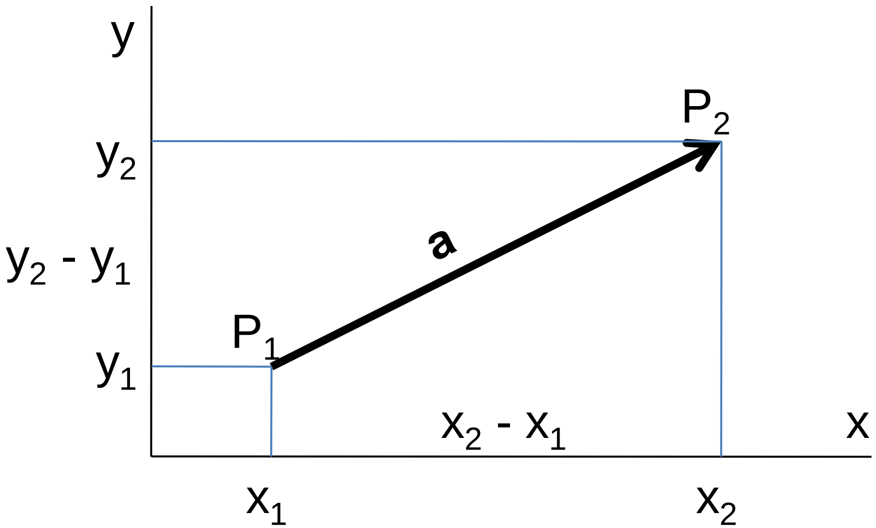
1. Definition von Vektoren
2. Einfache Rechenregeln
3. Koordinatendarstellung von Vektoren
4. Beträge von Vektoren
5. Rechenregeln in der Koordinatendarstellung
6. Koordinatendarstellung mit Winkelfunktionen
7. Skalarprodukt
8. Vektorprodukt
9. Spatprodukt
10. Rechnen mit Vektoren

Koordinatendarstellung von Vektoren: 2D



Vektor **a** verbindet die Punkte P_1 und P_2.

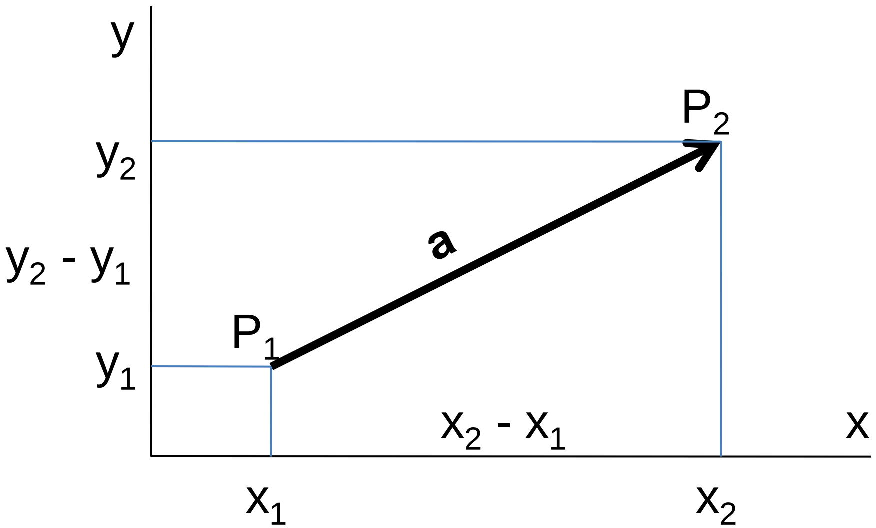
Koordinatendarstellung von Vektoren: 2D



Vektor **a** verbindet die Punkte P_1 und P_2.

Um von zu P_1 zu P_2 gelangen, muss man
$x_2 - x_1$ Einheiten nach rechts und
$y_2 - y_1$ Einheiten nach oben.

Koordinatendarstellung von Vektoren: 2D



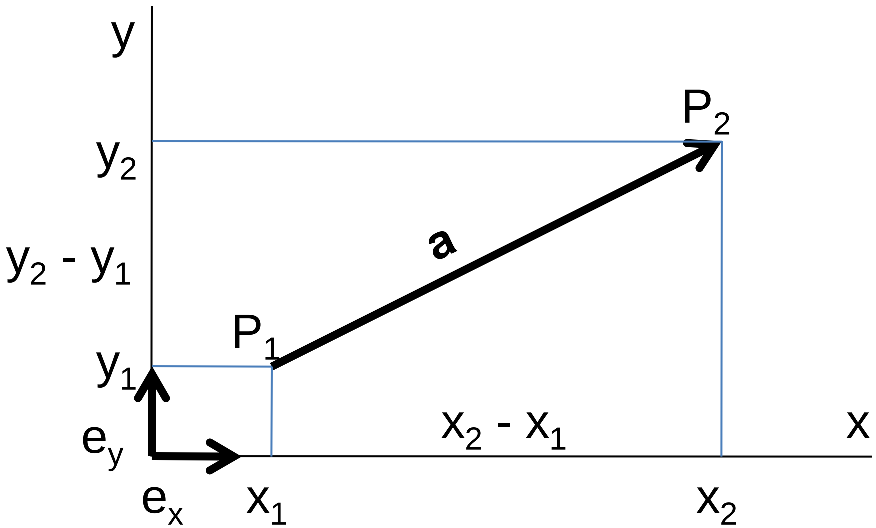
Vektor **a** verbindet die Punkte P_1 und P_2.

Um von zu P_1 zu P_2 gelangen, muss man
$x_2 - x_1$ Einheiten nach rechts und
$y_2 - y_1$ Einheiten nach oben.

Somit kann man die Koordinaten des Vektors a darstellen als:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektoren



$$\mathbf{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

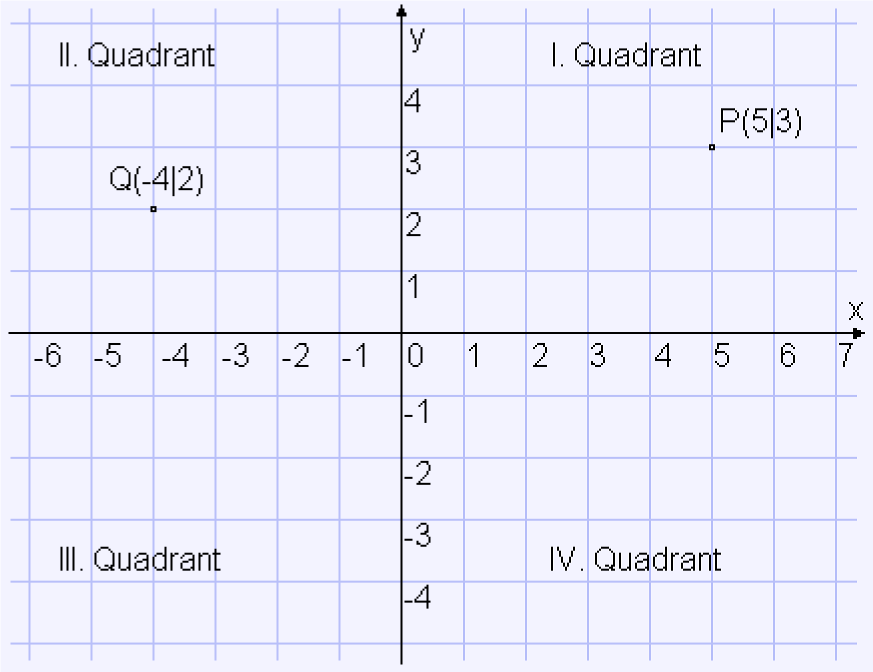
Um eine Normierung für die absolute Länge zu bekommen, werden so genannte **Einheitsvektoren** festgelegt.

Das sind Grundvektoren der **Länge 1**. Sie zeigen in die Richtung der jeweiligen Koordinatenachsen.

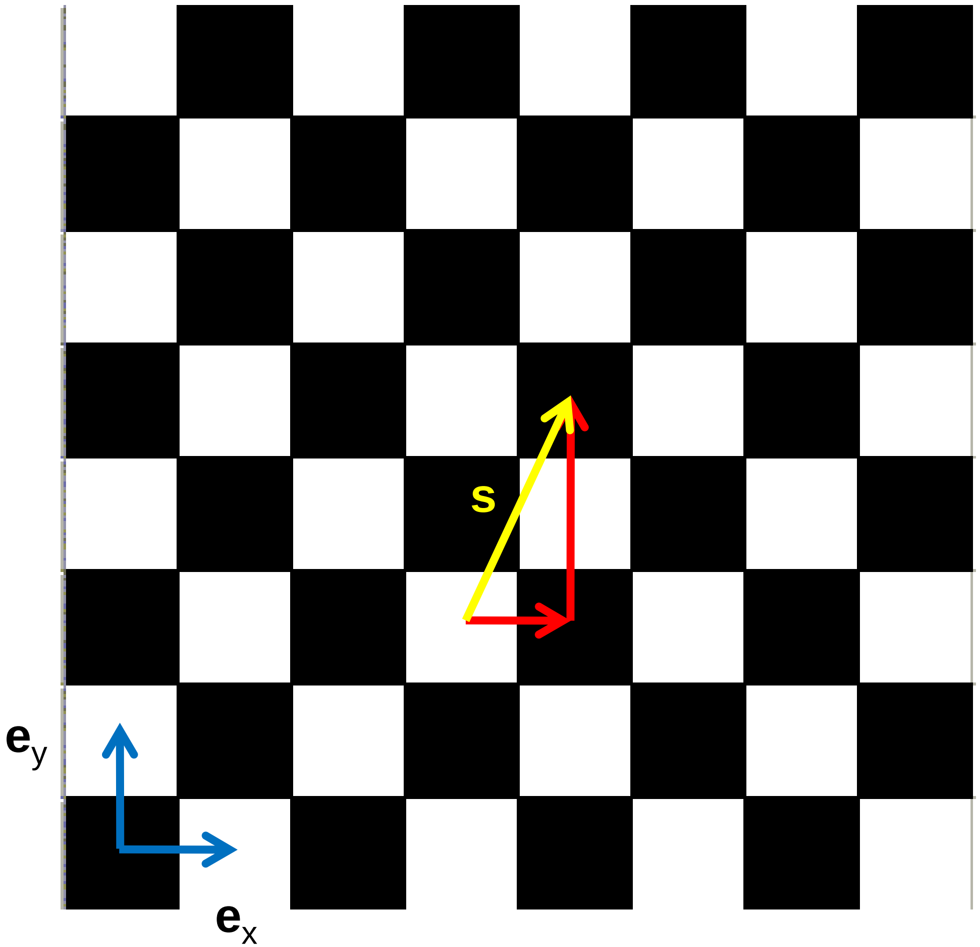
In der linearen Algebra ist ein Einheits-vektor oder normierter Vektor ein Vektor mit der Norm (anschaulich: der Länge) Eins. Einheitsvektoren gibt es also nur in einem normierten Vektorraum.

Kartesisches Koordinatensystem

Ein kartesisches Koordinatensystem ist ein orthogonales Koordinatensystem. Es ist nach dem latinisierten Namen Cartesius seines Erfinders René Descartes benannt. Im zwei- und dreidimensionalen Raum handelt es sich um das am häufigsten verwendete Koordinatensystem, da sich viele geometrische Sachverhalte in diesem am besten beschreiben lassen.



Beispiel für Koordinatendarstellung in 2D

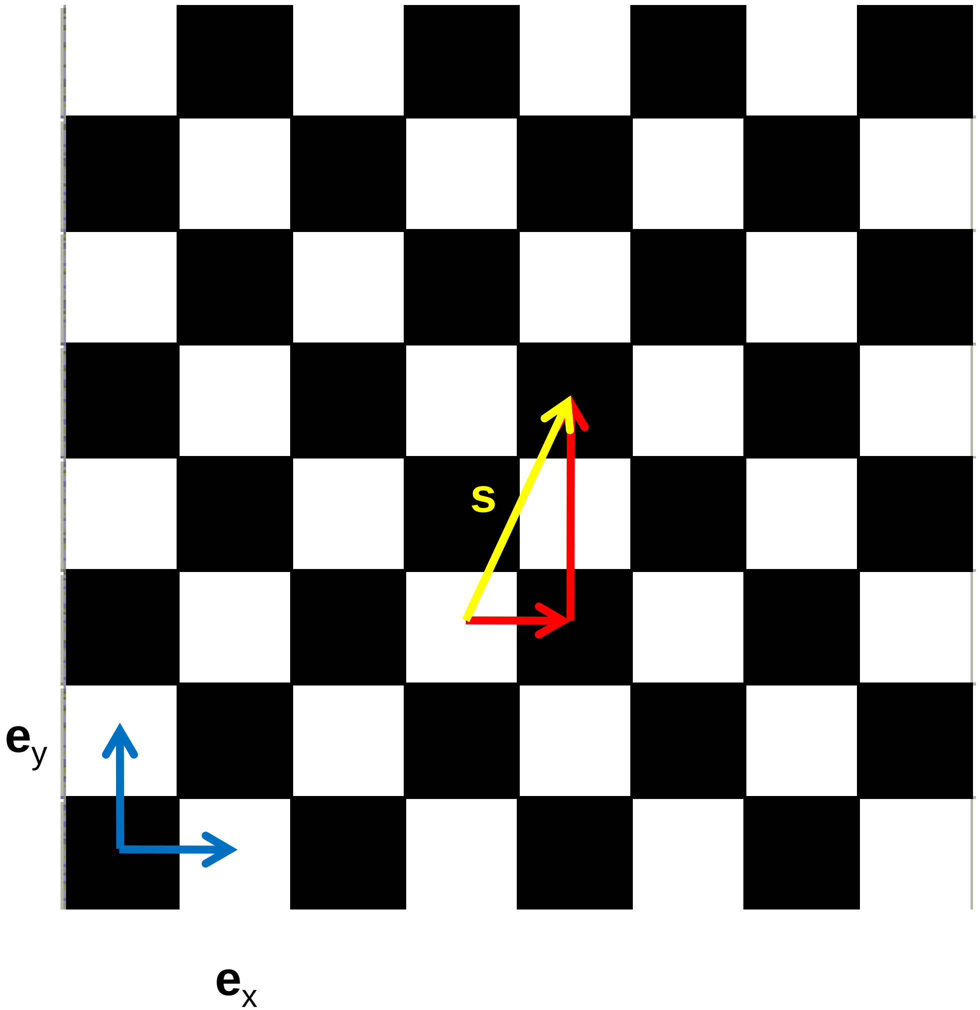


$\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_y$: Einheitsvektoren

s : Verschiebungsvektor

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \cdot e_x \\ 2 \cdot e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Beispiel für Koordinatendarstellung in 2D



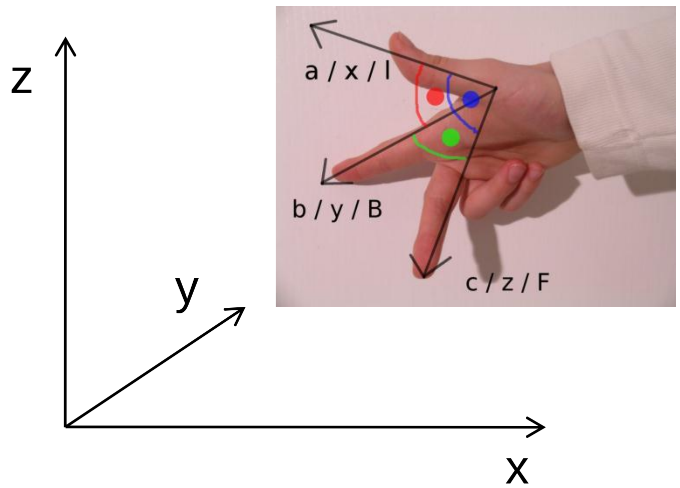
$\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_y$: Einheitsvektoren

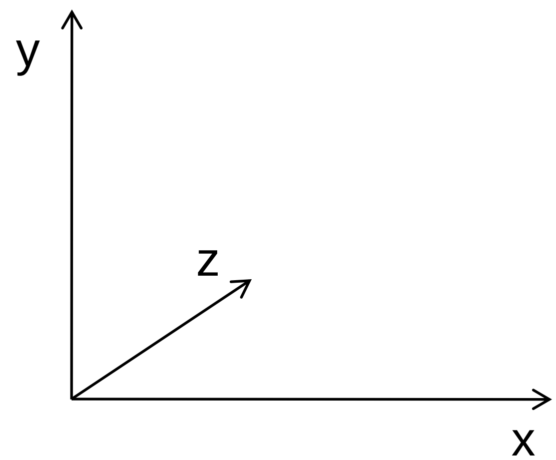
s : Verschiebungsvektor

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \cdot e_x \\ 2 \cdot e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Warum wurde der Vektor „**s**“ genannt (und nicht „**b**“ oder „**k**“)?

3 Dimensionen: Rechtssystem und Linkssystem





x, **y** und **z** bilden ein **Rechtssystem**, wenn man die rechte Hand so halten kann, dass Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger in die Richtung von **x**, **y** bzw. **z** zeigen.

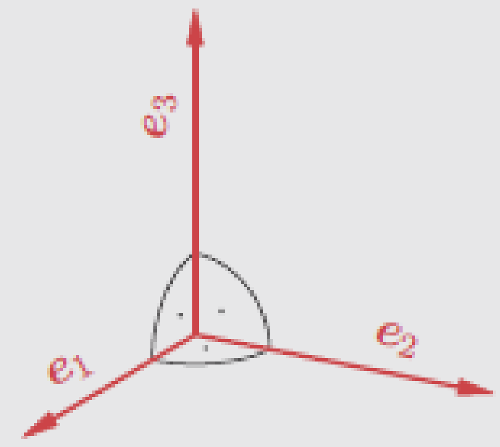
x, **y** und **z** bilden ein **Linkssystem**, wenn man die linke Hand so halten kann, dass Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger in die Richtung von **x**, **y** bzw. **z** zeigen.

Basisvektoren und Koordinaten

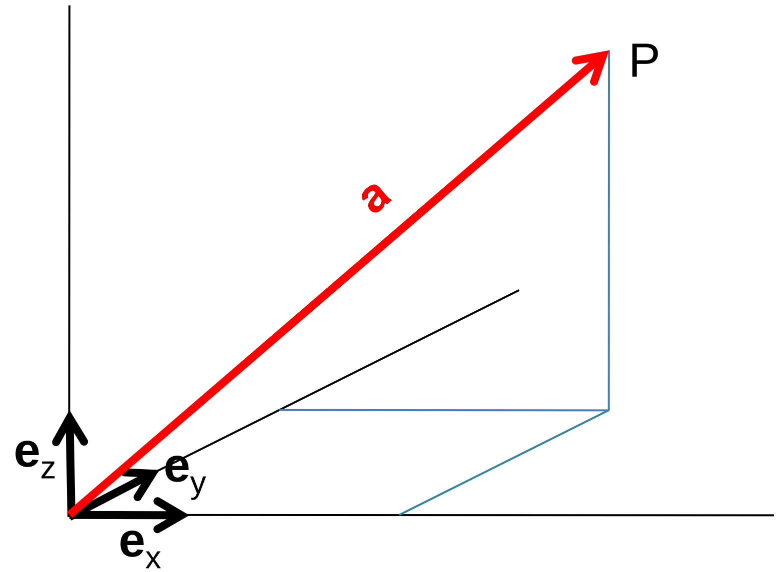
Drei Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{e}_3$, die paarweise senkrecht aufeinander stehen und in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, bezeichnet man als **Basisvektoren**. Jeder Vektor $\boldsymbol{a}$ lässt sich durch

$$\boldsymbol{a} = a_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2\,\boldsymbol{e}_2 + a_3\,\boldsymbol{e}_3$$

darstellen. Dabei nennt man die Skalare a_1, a_2 und a_3 die **Koordinaten** und die Vektoren $a_1\,\boldsymbol{e}_1$, $a_2\,\boldsymbol{e}_2$ und $a_3\,\boldsymbol{e}_3$ die **Komponenten** des Vektors $\boldsymbol{a}$.



Koordinatendarstellung in 3D



$$\vec{a} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

$$\vec{b} = b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y + b_3\vec{e}_z$$

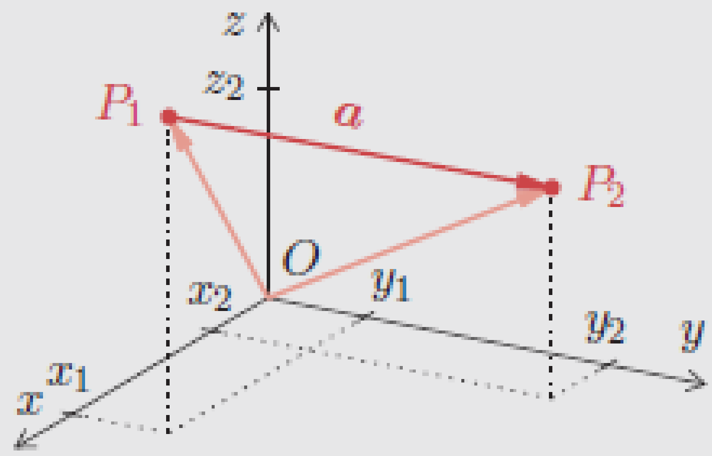
$$\mathbf{i} = e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = e_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Ortsvektor und Verbindungsvektor

Den Vektor $\boldsymbol{a}$ vom Punkt $P_1\,(x_1\,|\,y_1\,|\,z_1)$ zum Punkt $P_2\,(x_2\,|\,y_2\,|\,z_2)$ nennt man den **Verbindungsvektor**. Er hat die Koordinaten

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Ein **Ortsvektor** ist ein Verbindungsvektor vom Ursprung $O\,(0\,|\,0\,|\,0)$ zu einem Punkt.



Betrag eines Vektors

in 2D:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}.$$

in 3D:

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

Das kann geometrisch nachvollzogen werden!

Addition und Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z \qquad \vec{b} = b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y + b_3\vec{e}_z$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e}_x + (a_2 + b_2)\vec{e}_y + (a_3 + b_3)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{e}_x + (a_2 - b_2)\vec{e}_y + (a_3 - b_3)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Das kann geometrisch nachvollzogen werden!

Skalare Multiplikation von Vektoren

Bei der skalaren Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl wird jede Komponente mit dieser Zahl multipliziert.

$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Um einen Vektor zu **normieren**, wird er mit dem Kehrwert seines Betrages skalar multipliziert. Somit ist der Betrag eines normierten Vektors immer gleich Eins.

Aufgaben

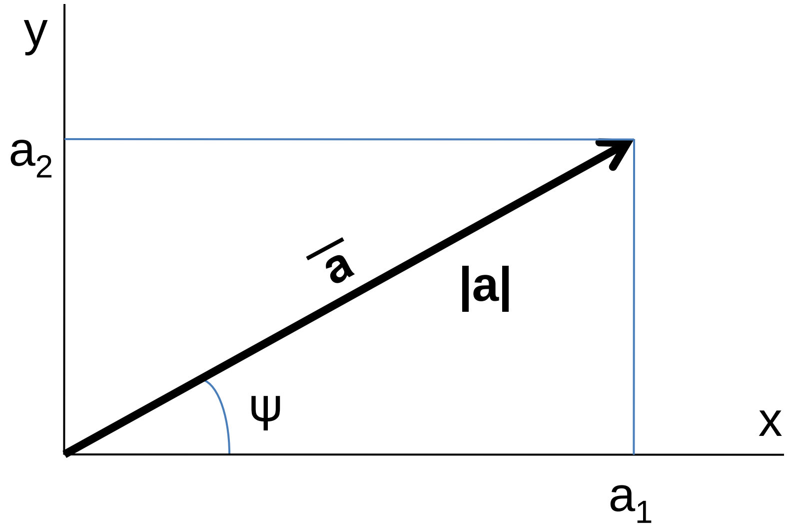
1. Wie lautet der Vektor **a**, der vom Punkt (3; -5; 7) zum Punkt (-2; 4; -1) weist und wie groß ist sein Betrag?

2. Der Vektor **a** = $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ habe den Anfangspunkt (1; 2; 3).
   Welche Koordinaten hat der Endpunkt dieses Vektors?

3. Welche Koordinaten besitzt ein Punkt Q, der die Strecke zwischen den Punkten (-4; 3; 2) und (1; 0; 4) halbiert?

4. Normieren Sie den Vektor **a** aus Aufgabe 1.
   Was erkennen Sie?

Koordinatendarstellung mit Winkelfunktionen

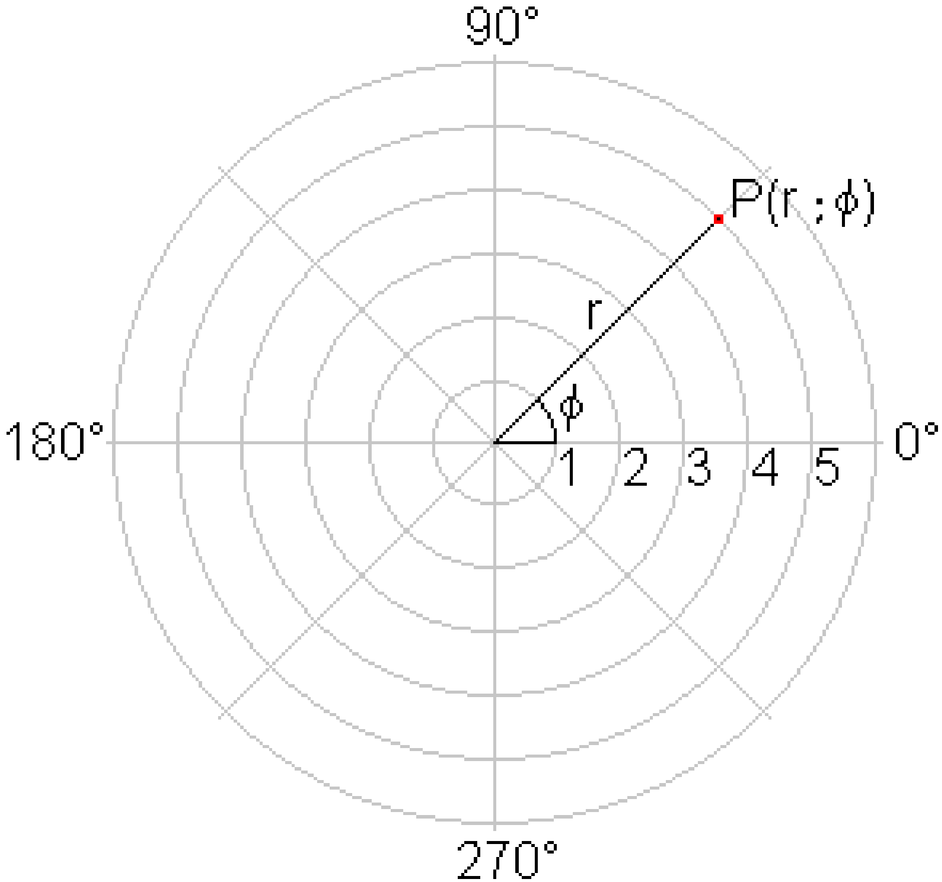


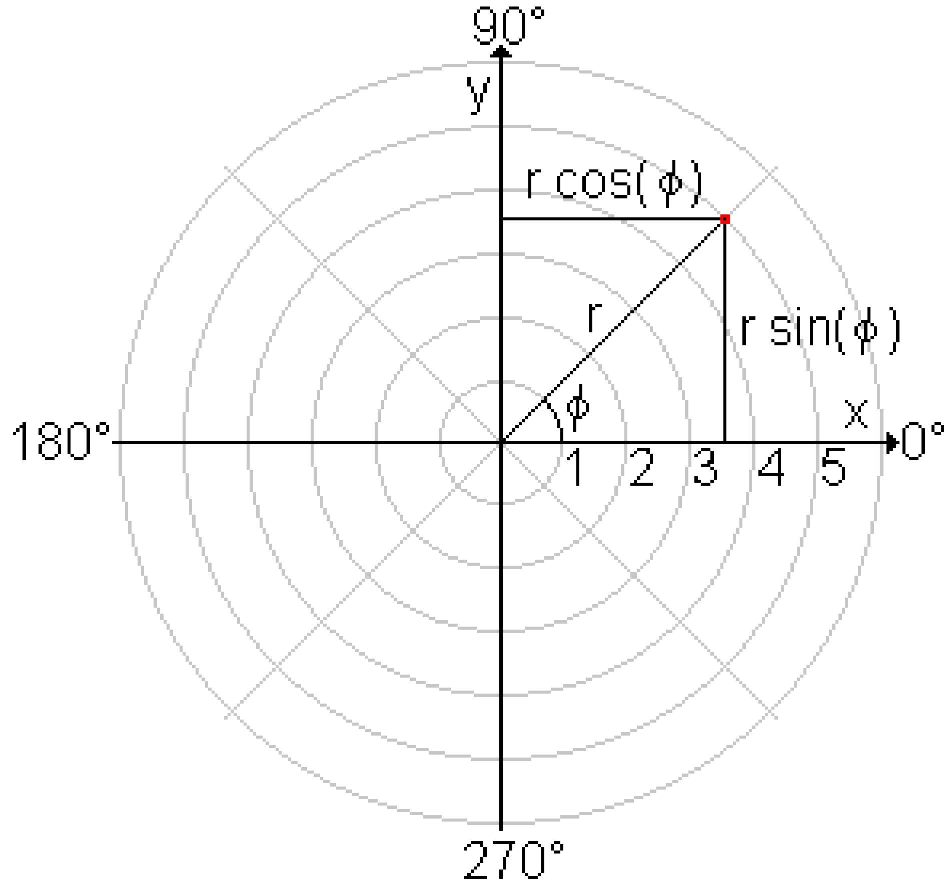
$$\overline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a| \cdot \cos \psi \\ |a| \cdot \sin \psi \end{pmatrix}$$

Das ist gültig im ersten Quadranten! Bei Berechnungen in den anderen Quadranten müssen die Formeln angepasst werden.

Diese Darstellung wird auch polare Darstellung genannt. Sie ist in einigen Fällen praktischer als die Darstellung mit kartesischen Koordinaten (z.B. bei der Kräfte-bilanz oder der Rechnung mit komplexen Zahlen). Der Vorteil ist, dass die Komponenten Betrag und Richtung getrennt betrachtet werden können.

Polarkoordinaten 2D





Umrechnung

aus Polarkoordinaten
in kartesische Koordinaten

$$x = r \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

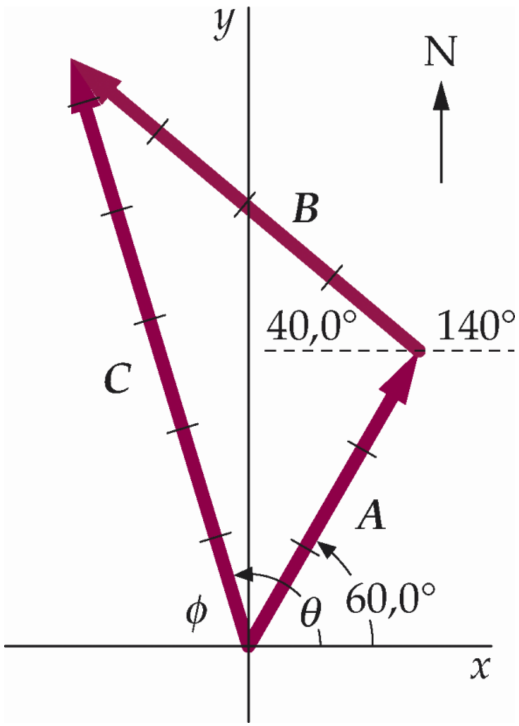
aus kartesischen Koordinaten
in Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ +\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Aufgabe

Der Verwalter einer Tropeninsel erhält eine Karte mit dem Auftrag, an einem bestimmten Ort einen Schatz zu vergraben, den die Besucher dann suchen sollen. Hierzu muss er bestimmte Anweisungen befolgen. Der Verwalter möchte die Aufgabe schnell hinter sich bringen, um baden zu gehen. Die Anweisungen besagen, dass er 3,0 km unter einem Winkel von 60,0° nördlich der Ostrichtung und anschließend 4,0 km unter einem Winkel von 40,0° nördlich der Westrichtung gehen soll. In welche Richtung und wie weit muss er laufen, um die Sache möglichst schnell zu erledigen?



Ermitteln Sie das Ergebnis:
a) grafisch oder
b) unter Verwendung von Vektorkomponenten.

Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München 2010

HOCHSCHULE DEGGENDORF

University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf