Hochschule Deggendorf WS 2014/15
Prof. Dr. P. Ullrich

Übungen zur Vorlesung „Mathematik 1“

Angewandte Informatik/Infotronik

Blatt 1

Aufgabe 1.

Welche der folgenden Ausdrücke stellen Mengen dar? Bestimmen Sie ggf. die zugehörigen Elemente.

a) $\{A, 1, \text{„Bit“}, 2^{-10}\text{s}\}$ b) $(1, 2, 3)$ c) $\{1, \{2\}, 3\}$ d) $\{(1, 2), 3\}$ e) $[\{\emptyset\}]$

f) $\{[a, b, c], \{[a], [b], [c]\}, a\}$ g) $\{\{0\}\}$ h) $\{\{a\}, \emptyset, a\}$ i) $\{a, \emptyset, a\}$ k) $\{\{\emptyset\}\}$

Aufgabe 2.

a) Geben Sie folgende Mengen in aufzählender Schreibweise an:
$A = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\, 2(x-4) = 8x - (x-1)\}$, $B = \{x \,|\, x \in \mathbb{N},\, x^2 + 1 = 5\}$
$C = \{x \,|\, x \in \mathbb{R},\, x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$, $D = \{x \,|\, x \in \mathbb{N}, \text{ x teilt } 450\}$

b) Beschreiben Sie folgende Mengen durch Angabe einer jeweiligen Eigenschaft:
$A = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$
$D = \{-8, 5\}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $F = \{1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, \ldots\}$

Aufgabe 3.

Sei $M := \{1, 2\}$, $N := \{2, 3, 4\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) $M \subset N$ b) $N \subseteq M$ c) $\{2, \{3, 4\}\} \subseteq N$ d) $M \neq N$ e) $\{2, 4\} \subset N$

f) $2 \in M$ g) $3 \subset N$ h) $M = N$

Aufgabe 4.

a) Bestimmen Sie die Potenzmengen von $A = \{0, 1, 2, 3\}$ und $M = \{0, 1\}^2$.

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 22 Studenten jeweils zwei Fußballteams zu bilden?

c) Von den 75 Mitgliedern eines Bootsklubs, dem nur Eigentümer von Segel- oder Motorbooten angehören, besitzen 48 (zumindest) ein Segelboot und 33 (zumindest) ein Motorboot. Wie viele Klubmitglieder besitzen ein Segel- und ein Motorboot?

d) Auf dem Campus der THD wurden 100 Studenten befragt und mussten dazu drei Fragen beantworten. Von den Befragten haben 35 (zumindest) die erste Frage, 25 (zumindest) die zweite und 60 (zumindest) die dritte Frage richtig beantwortet. 15 konnten (zumindest) die erste und zweite, 25 (zumindest) die erste und dritte und 18 (zumindest) die zweite und dritte Frage richtig beantworten. 10 Studenten gelang es, alle drei Fragen richtig zu beantworten. Wie viele der befragten Studenten konnten keine Frage richtig beantworten?

Aufgabe 5.

a) Vereinfachen Sie folgende Mengenterme soweit wie möglich:

$$A \cap \overline{A \cup B}, \quad (A \cup B) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}), \quad A \setminus (A \setminus B), \quad \overline{(\overline{A \cap B} \cup C) \cap \overline{B}}$$

b) Man vergleiche die folgenden Mengen miteinander:

i) $M_1 := (A \cup B) \cap (A \cup C \cup \overline{B}) \cap \overline{C}$,

ii) $M_2 := (A \cap B) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup \overline{C}$,

iii) $M_3 := (A \setminus B) \cap (B \cup C)$.

Aufgabe 6. Auf der Menge $M = \{x \,|\, x \in \mathbb{N}, x \text{ teilt } 63\}$ aller Teiler von 63 wird folgende Relation $R_{\preceq}$ definiert:

$$R_{\preceq} := \{(x, y) \,|\, x, y \in M,\ x \text{ teilt } y\}.$$

a) Zeigen Sie, dass $\preceq$ eine partielle Ordnung auf M ist,

b) Zeichnen Sie das zugehörige *Hasse-Diagramm*, d.h. jedes Element aus M wird durch einen Knoten $\bullet$ repräsentiert. Zwei Knoten verbindet man durch eine Kante, wenn $x \preceq y$ für die entsprechenden Elemente gilt und kein weiteres Element zwischen x und y liegt. Die bzgl. $\preceq$ größeren Elemente werden oberhalb der kleineren gezeichnet,

c) Ist $\preceq$ eine lineare Ordnung auf M? (Begründung!)

Aufgabe 7. Auf der Menge $\mathbb{N}$ wird folgende Relation definiert: Für $x, y \in \mathbb{N}$ sei

$$x \sim_7 y \quad :\Leftrightarrow x - y \text{ ist durch 7 teilbar.}$$

a) Zeigen Sie, dass $\sim_7$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{N}$ ist,

b) Bestimmen Sie ein vollständiges Repräsentantensystem $x_1, x_2, \ldots$ und beschreiben Sie die zugehörigen Äquivalenzklassen $[x_1], [x_2], \ldots$.

Aufgabe 8. Bestimmen Sie die Bildmengen folgender Funktionen.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -2x^2 - 4x - 6$ b) $g : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$

Aufgabe 9. Bestimmen Sie (mit Begründung), welche der folgenden Funktionen „injektiv", „surjektiv" bzw. „bijektiv" sind, und welche nicht.

a) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto$ Quersumme von x b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3 - x$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x - 1|$ d) $k : \{x \geq 1\} \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$

Aufgabe 10. Bestimmen Sie ggf. möglichst maximale Teilmengen, so dass die Einschränkungen der Funktionen bijektiv sind und berechnen Sie anschließend die zugehörigen Umkehrfunktionen.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto |2x + 4|$ b) $g : \mathbb{R} \to \{x \geq -1\},\ x \mapsto x^2 - 1$

c) $h : \{|x| \geq 1\} \to \mathbb{R}_0^+,\ x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ d) $k : \mathbb{R} \to \{x \leq -1\},\ x \mapsto -(x + 1)^2 - 1$