Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (14)

Gerald Kupris

08.11.2010

Wiederholung: Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen werden in der algebraischen Form komponentenweise durchgeführt.

Die Multiplikation komplexer Zahlen kann je nach Vorgabe vorteilhaft in algebraischer Form oder in Exponentialform (Multiplikation der Beträge und Addition der Argumente (Winkel)) durchgeführt werden.

Bei der **Division** komplexer Zahlen werden in Exponentialform ihre Beträge dividiert und ihre Argumente (Winkel) subtrahiert, oder in algebraischer Form mit dem konjugierten multipliziert und durch dessen Betragsquadrat dividiert.

Beim **Potenzieren** einer komplexen Zahl mit einem reellen Exponenten wird ihr Betrag potenziert und ihr Argument (Winkel) mit dem Exponenten multipliziert.

Beim **Radizieren (Wurzelziehen)** einer komplexen Zahl mit einem reellen Exponenten wird ihr Betrag radiziert und ihr Argument (Winkel) durch den Exponenten dividiert. Hierdurch entsteht die erste Lösung. Bei einer n-ten Wurzel entstehen n Lösungen, die im Winkel von 2π / n um den Ursprung der gaußschen Ebene verteilt sind.

Addition und Multiplikation komplexer Zahlen

Für beliebige komplexe Zahlen a bewirkt

- die Addition eine **Translation** $f(z) = z + a$ und
- die Multiplikation eine **Drehstreckung** $f(z) = a\,z$, also eine **Rotation** um den Winkel $\varphi = \arg(a)$ und eine **Skalierung** um den Faktor $|a|$

in der Gaußschen Zahlenebene.

Bestimmung der Wurzeln einer komplexen Zahl

Die n-ten Wurzeln einer komplexen Zahl a lassen sich wie folgt ermitteln:

(1) Stelle die komplexe Zahl a in Exponentialform dar: $a = \varrho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha}$.

(2) Die erste Lösung z_0 hat den Abstand $\sqrt[n]{\varrho}$ vom Ursprung und den Winkel $\dfrac{\alpha}{n}$:

$$z_0 = \sqrt[n]{\varrho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha}{n}}.$$

(3) Die Lösungen liegen gleichmäßig verteilt auf dem Ursprungskreis mit Radius $\sqrt[n]{\varrho}$:

$$z_k = \sqrt[n]{\varrho}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\alpha+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl

Im Bereich der reellen Zahlen wir der natürliche Logarithmus einer (positiven) Zahl ***a*** als diejenige Zahl ***x*** erklärt, mit der die Basiszahl e potenziert werden muss, um die Zahl ***a*** zu erhalten: $a = e^x$ $x = \ln a$ $(a > 0)$

Wir übertragen diesen Begriff nun sinngemäß auf die komplexen Zahlen.
Jede von Null verschiedene komplexe Zahl ***z*** ist darstellbar als:

$$z = r \cdot e^{j(\varphi + k2\pi)} \qquad (k \in Z)$$

Unter ihrem natürlichen Logarithmus verstehen wir:

$$\ln z = \ln\left[r \cdot e^{j(\varphi + k2\pi)}\right] = \ln r + \ln e^{j(\varphi + k2\pi)}$$

$$\ln z = \ln r + j(\varphi + k \cdot 2\pi) \cdot \ln e = \ln r + j(\varphi + k \cdot 2\pi)$$

Das ist eine Menge von **unendlich vielen** komplexen Zahlen für $k \in Z$

Hauptwert und Nebenwerte des Logarithmus

Für $\boldsymbol{k} = 0$ erhält man den so genannten **Hauptwert** des Logarithmus:

$$\mathrm{Ln}\, \boldsymbol{z} = \ln \boldsymbol{r} + \mathrm{j}\, \boldsymbol{\varphi}$$

Die übrigen Werte heißen **Nebenwerte** und ergeben sich aus dem Hauptwert durch Addition ganzzahliger Vielfacher von 2πj.

$$\ln \boldsymbol{z} = \mathrm{Ln}\, \boldsymbol{z} + \boldsymbol{k} \cdot 2\pi \mathrm{j} \quad (k \in Z)$$

Anmerkungen zum Logarithmus:
ln $\boldsymbol{z}$ ist für jede komplexe Zahl $\boldsymbol{z} \neq 0$ definiert, also beispielsweise auch für negative reelle Zahlen.
Die verschiedenen Werte von ln $\boldsymbol{z}$ stimmen im Realteil (= ln r) überein und unterscheiden sich im Imaginärteil um ganzzahlige Vielfache von 2 *π.*
Komplexe Zahlen müssen vor dem Logarithmieren zunächst in die Exponentialform gebracht werden.

Anwendung komplexer Zahlen: Algebraische Gleichungen

Die Algebraische Abgeschlossenheit der komplexen Zahlen bedeutet, dass jede algebraische Gleichung vom Grad größer Null über den komplexen Zahlen eine Lösung besitzt, was für reelle Zahlen nicht gilt.

Beispiel:
Aufgabe, zwei Zahlen zu finden, deren Produkt 40 und deren Summe 10 ist.

$x(10 - x) = 40$ oder $x^2 - 10x + 40 = 0$

$p = -10$
$q = 40$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{(\frac{-10}{2})^2 - 40}$$

$$x = 5 \pm \sqrt{-15}$$

Auch: $$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$$

Anwendung von komplexen Zahlen: Trigonometrie

Es gibt einen Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und der Exponentialfunktion, der über die komplexen Zahlen hergestellt werden kann.

Eulersche Formel: $$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi$$

Der Sinus und der Kosinus lassen sich für jede reelle Zahl φ mithilfe von e-Funktionen mit imaginären Exponenten darstellen:

- $\cos\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}$
- $\sin\varphi = \dfrac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i}$

Anwendungen komplexer Zahlen: Harmonische Schwingung

Eine **harmonische Schwingung** ist als Projektion eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω umlaufenden Punktes auf die x-Achse Kosinusschwingung) bzw. auf die y-Achse (Sinusschwingung) darstellbar:

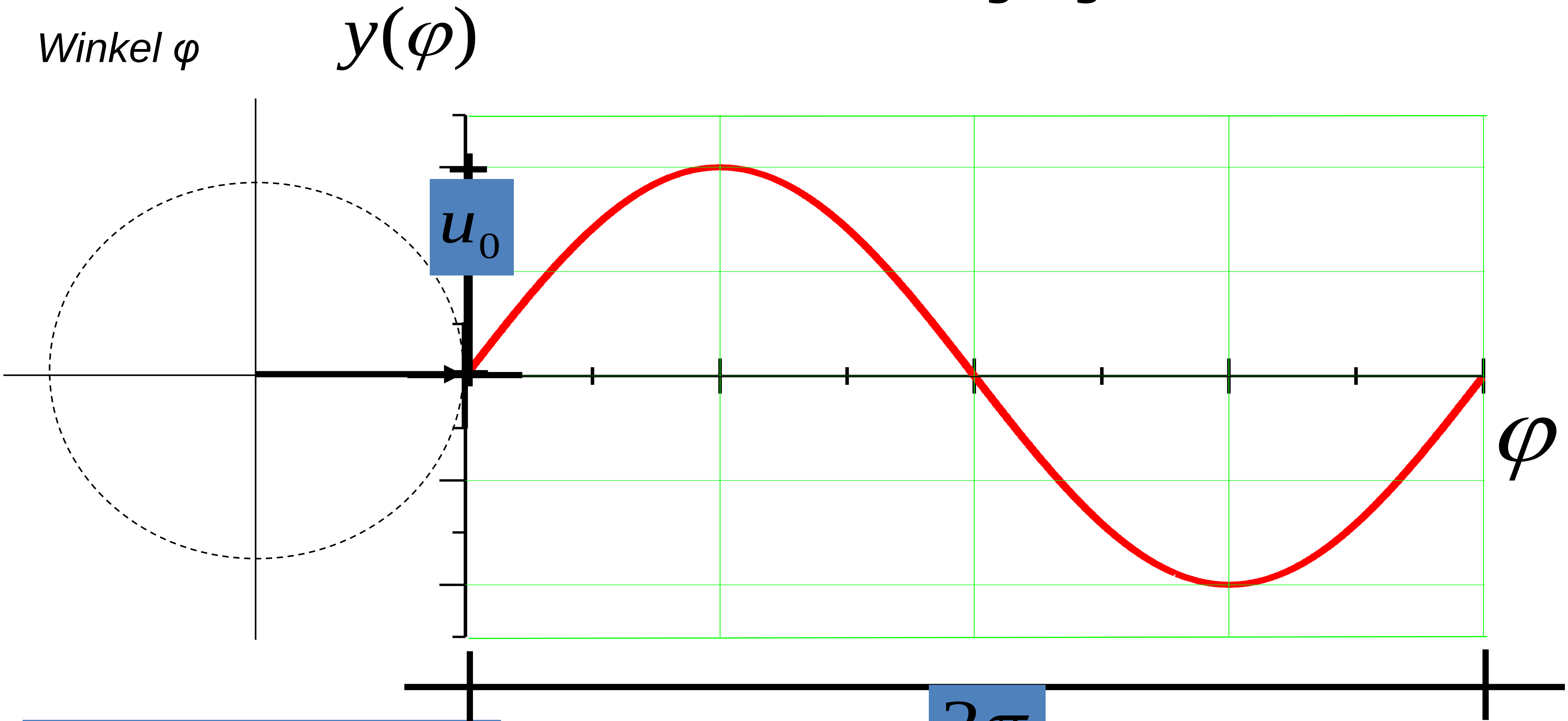
$$x = x(t) = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi) = X_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = y(t) = \hat{y}\sin(\omega t + \varphi) = Y_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$x(t)$	Momentanwert der Schwingung
$\hat{x}$	Scheitelwert oder Amplitude
t	Zeit [s]
$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi / T$	Kreisfrequenz [1/s]
f	Frequenz [Hz]
$T = 1/f$	Periodendauer [s]
φ	Nullphasenwinkel
X_{eff}	Effektivwert der Schwingung

Harmonische Schwingung

Winkel φ



$$y(\varphi) = u_0 \sin \varphi$$

Harmonische Schwingung

Jede harmonische Schwingung mit Kreisfrequenz ω lässt sich sowohl durch eine Amplitude $A > 0$ und einen Phasenwinkel φ mit dem Kosinus als Grundfunktion als auch durch Überlagerung phasenwinkelfreier Sinus- und Kosinusfunktionen darstellen:

$$A\cos(\omega\, t + \varphi) = C_1 \cos(\omega\, t) + C_2 \sin(\omega\, t).$$

Zur Umrechnung zwischen den beiden Darstellungen gelten die Formeln:

- $C_1 = \quad A\cos\varphi$
- $C_2 = -A\sin\varphi$
- $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$
- $\varphi = \arg(C_1 - \mathrm{i}\, C_2)$

Zeiger einer harmonischen Schwingung

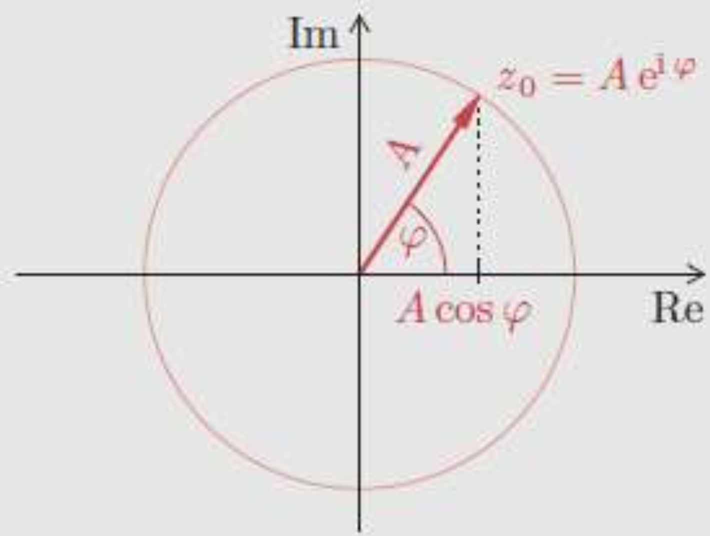
Einer harmonischen Schwingung kann man eine Schwingung im Komplexen zuordnen:

$$A \cos(\omega t + \varphi) \quad \longrightarrow \quad A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi)}$$

Bei dieser **Zeigerdarstellung** nennt man

$$z_0 = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

den **Zeiger** der harmonischen Schwingung.



Komplexe Schwingung

Eine **komplexe Schwingung** ergibt sich, wenn der komplexe Zeiger z in mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω im mathematisch positiven Sinn um den Nullpunkt **rotiert**.

$$\underline{z}(t) = |\underline{z}| \cdot (\cos[\omega t + \varphi] + j \cdot \sin[\omega t + \varphi])$$

$$\underline{z}(t) = \hat{z} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{z} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} = \underline{\hat{z}} \cdot e^{j\omega t}$$

$\underline{z}(t) = \underline{\hat{z}} \cdot e^{j\omega t}$	Momentanwert der komplexen Schwingung
$\hat{z}$	Reelle Amplitude, Betrag
$\underline{\hat{z}} = \hat{z} \cdot e^{j\varphi}$	Komplexe Amplitude
$Zeff = \underline{\hat{z}} / \sqrt{2}$	Komplexer Effektivwert

$$x(t) = Re\{\underline{z}(t)\}, \quad y(t) = Im\{\underline{z}(t)\}, \quad \underline{z}(t) = x(t) + jy(t)$$

Die komplexe Schwingung ist demnach die Addition der senkrecht aufeinander stehenden harmonischen Schwingungen in der komplexen Ebene.

Anwendungen komplexer Zahlen: Wechselstromrechnung

Die Bestimmung des Verhältnisses von Strom zu Spannung in einem elektrischen Stromkreis ist eine der Grundaufgaben der Elektrotechnik.

Wird eine zeitlich konstante Spannung U vorgegeben und der Strom I bestimmt, oder wird der Strom I vorgegeben und die Spannung U bestimmt, so bezeichnet man das Verhältnis **U:I** als den **Widerstand R** oder das Verhältnis **I:U** als den **Leitwert G**.

In der Wechselstromtechnik hat man es mit **zeitlich veränderlichen** Spannungen und Strömen zu tun, die in diesem Fall einem sinusförmigen Verlauf folgen. Um diese Veränderlichkeit gegenüber den zeitlich fixen Größen auszudrücken, werden Momentan-werte, die sich zeitlich ändern, mit **Kleinbuchstaben** bezeichnet, Spannungen als **kleines u** und Ströme als **kleines i**.

Als passive lineare Elemente des Wechselstromkreises treten ohmsche Widerstände, Induktivitäten oder Kapazitäten auf. Für diese Elemente gilt:

$$i = \frac{u}{R} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C}$$

Wechselstromrechnung

Sinusförmige Spannung oder sinusförmiger Strom:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$\hat{u}\ \hat{\imath}$	Maximalwert = Amplitude
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz
$\varphi_u \quad \varphi_i$	Nullphasenwinkel
$\varphi_u - \varphi_i$	Phasenverschiebungswinkel

DIN 1304-1 und DIN 5483-3

Für die imaginäre Einheit verwendet man in der Elektrotechnik gemäß DIN 1302 den Buchstaben j (mit $j^2 = -1$), um Verwechslungen mit dem Buchstaben i, der für den (zeitabhängigen) Strom verwendet wird, zu vermeiden.

Formelzeichen komplexer Größen werden gemäß DIN 1304-1 und DIN 5483-3 durch einen Unterstrich gekennzeichnet.

Ein **rotierender Zeiger** für eine Spannung stellt diese als komplexe Spannung dar:

$$\underline{u}(\omega t) = \hat{u} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_u) + \mathrm{j} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)) = \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u}\angle(\omega t + \varphi_u)$$

$$\underline{i}(\omega t) = \hat{\imath} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_i) + \mathrm{j} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)) = \hat{\imath} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)} = \hat{\imath}\angle(\omega t + \varphi_i)$$

Darstellung der reellen Spannung als komplexe Schwingung

Reelle Form: $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$

Komplexe Form: $\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_u) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_u))$

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = \underline{U} \cdot e^{j\omega t}$$

zeitunabhängige komplexe Amplitude

zeitabhängiger Faktor

$\hat{u}$	reelle Spannungsamplitude
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz
φ_u	Nullphasenwinkel der Spannung
$\underline{U} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}$	komplexe Spannungsamplitude

Darstellung des reellen Stroms als komplexe Schwingung

Reelle Form:

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Komplexe Form:

$$\underline{i}(t) = \hat{i} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_i) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_i))$$

$$\underline{i}(t) = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} = \underline{I} \cdot e^{j\omega t}$$

zeitunabhängige komplexe Amplitude

zeitabhängiger Faktor

$\hat{i}$	reelle Stromamplitude
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz
φ_i	Nullphasenwinkel des Stroms
$\underline{I} = \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}$	komplexe Stromamplitude

Umrechnung der komplexen Schwingung in die reelle Form

Komplexe Form: $\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_u) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_u))$

Reelle Form: $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$

$u(t) = \mathrm{Im}(\underline{u}(t))$

Komplexe Form: $\underline{i}(t) = \hat{i} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_i) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_i))$

Reelle Form: $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$

$i(t) = \mathrm{Im}(\underline{i}(t))$

Überlagerung (Superposition) gleichfrequenter Schwingungen

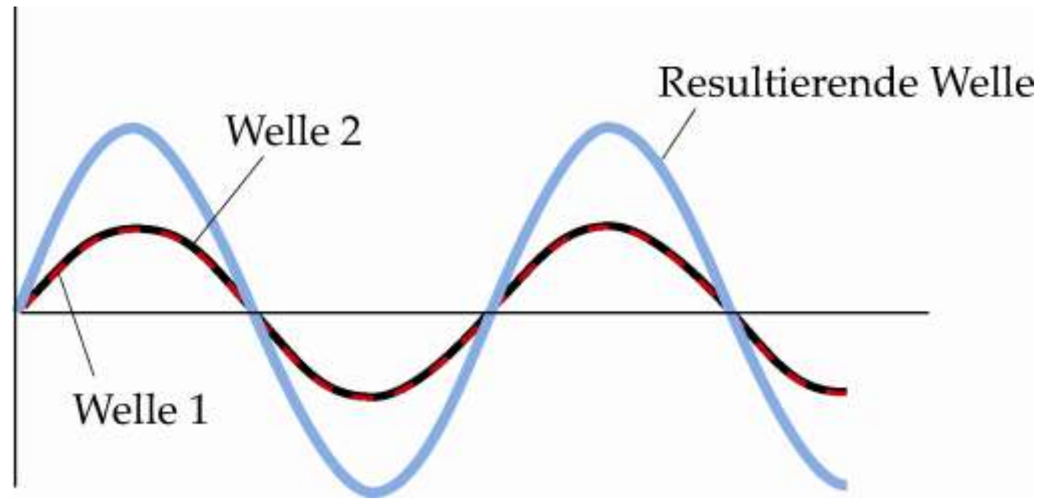
Nach dem Superpositionsprinzip der Physik überlagern sich zwei Schwingungen $y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$ und $y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$ ungestört und ergeben die resultierende

$$y_{res} = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) = A_{res} \cdot \sin(\omega t + \varphi_{res})$$

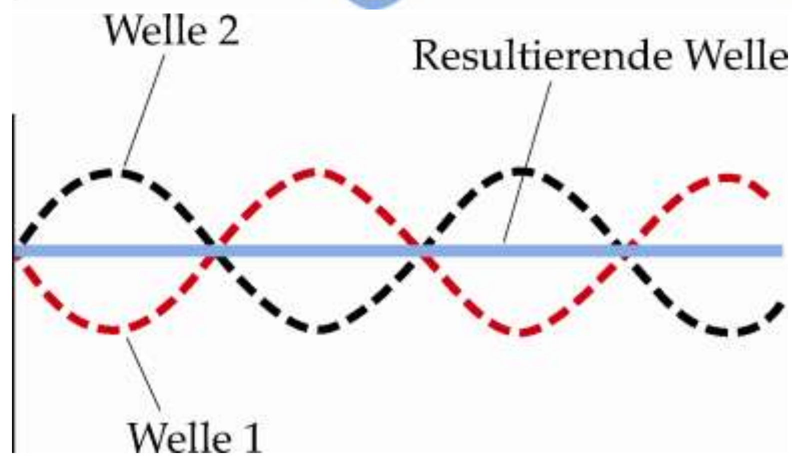
Die resultierenden Amplitude A_{res} und die resultierende Phase φ_{res} lassen sich schrittweise aus den Amplituden A_1 und A_2 sowie den Phasenwinkeln φ_1 und φ_2 der Einzelschwingungen berechnen.

Physik: Interferenz

Konstruktive Inteferenz:
Sind zwei harmonische Wellen gleicher Frequenz in Phase, dann addieren sie sich.



Destruktive Interferenz:
Haben zwei Wellen eine Phasendifferenz von π (180°), dann ergibt sich die Amplitude als Differenz der Einzelamplituden.



Überlagerung (Superposition) gleichfrequenter Schwingungen

Nach dem Superpositionsprinzip der Physik überlagern sich zwei Schwingungen $y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t+\varphi_1)$ und $y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t+\varphi_2)$ ungestört und ergeben die resultierende

$$y_{res} = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega t+\varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t+\varphi_2) = A_{res} \cdot \sin(\omega t+\varphi_{res})$$

Die resultierende Amplitude A_{res} und die resultierende Phase φ_{res} lassen sich schrittweise aus den Amplituden A_1 und A_2 sowie den Phasenwinkeln φ_1 und φ_2 der Einzelschwingungen berechnen.

1. Übergang von der reellen Form zur komplexen Form:

   Die Einzelschwingungen y_1 und y_2 werden durch komplexe Zeiger dargestellt.

   $$\underline{y}_1 = \underline{A}_1 \cdot e^{j\omega t} \quad \text{und} \quad \underline{y}_2 = \underline{A}_2 \cdot e^{j\omega t}$$

   $\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$ sind dabei die komplexen Schwingungsamplituden

   $$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\varphi 1} \quad \text{und} \quad \underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\,\varphi 2}$$

Überlagerung (Superposition) gleichfrequenter Schwingungen

2. Superposition in komplexer Form:

   Die komplexen Zeiger $\underline{y}_1$ und $\underline{y}_2$ werden zur Überlagerung gebracht und ergeben einen resultierenden komplexen Zeiger $\underline{y}$:

$$\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = \underline{A}_1 \cdot e^{j\omega t} + \underline{A}_2 \cdot e^{j\omega t} = (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \cdot e^{j\omega t} = \underline{A} \cdot e^{j\omega t}$$

   Die Addition der komplexen Amplituden erfolgt in kartesischer Form.

3. Rücktransformation aus der komplexen Form in die reelle Form:

   Die resultierende Schwingung $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ ist der Imaginärteil des resultierenden komplexen Zeigers $\underline{y}$:

$$y = \mathrm{Im}\,(\underline{y}) = \mathrm{Im}\,(\underline{A} \cdot e^{j\omega t}) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Beispielaufgaben

1. Gegeben sind jeweils zwei gleichfrequente Wechselspannungen u_1(t) und u_2(t). Bestimmen Sie die durch Superposition entstehende resultierende Wechselspannung mit Hilfe der komplexen Rechnung.

a) $u_1(t) = 120V \cdot \sin(\omega t + 2\pi/3)$, $u_2(t) = 130V \cdot \cos(\omega t - \pi/4)$

b)
$$u_1(t) = 100V \cdot \sin(\omega t)$$
$$u_2(t) = 150V \cdot \cos(\omega t - \frac{\pi}{4})$$

Ergebnis: $u(t) = 232\ V \cdot \sin(\omega t + 0{,}48)$

c)
$$u_1(t) = -50V \cdot \sin(\omega t)$$
$$u_2(t) = 200V \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{3})$$

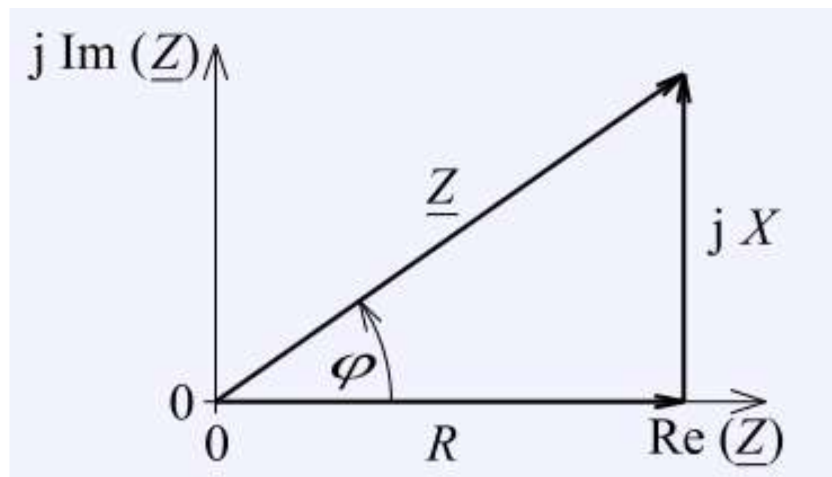
Ergebnis: $u(t) = 180\ V \cdot \sin(\omega t + 1{,}29)$

Ohmsches Gesetz im komplexen Bereich

Das Verhältnis der komplexen Spannung zur komplexen Stromstärke ist unter den genannten Voraussetzungen eine komplexe Konstante. Diese Aussage ist das ohmsche Gesetz für komplexe Größen. Die Konstante wird als komplexer Widerstand oder Impedanz ***Z*** bezeichnet. Auch diese wird in der komplexen Ebene als Zeiger dargestellt, der aber als zeitunabhängige Größe nicht rotiert.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)}}{\hat{\imath} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)}} = \frac{\hat{u}}{\hat{\imath}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$$



$\underline{Z}$ = Impedanz
R = Re($\underline{Z}$) ohmscher Widerstand
X = Im($\underline{Z}$) Blindwiderstand

Ohmscher Widerstand

$$\underline{Z}_R = R = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}}{\hat{\imath}}\angle 0 = \frac{\hat{u}}{\hat{\imath}}$$

Der komplexe Widerstand besteht hier nur aus einem positiven Ohmschen Widerstand.

Kondensator

Kondensator:

$$\frac{\underline{i}}{C} = \frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t} = \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)} \cdot \mathrm{j}\omega = \underline{u}\ \mathrm{j}\omega$$

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j} \cdot \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{Z}_C = \mathrm{j} \cdot X_C = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}}{\hat{\imath}}\angle(-90°)$$

Der komplexe Widerstand besteht hier nur aus einem negativen Blindwiderstand.

$$X_C = -\frac{1}{\omega \cdot C} = -\frac{1}{2\pi f \cdot C}$$

1 Farad:

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{1\,\mathrm{As}}{1\,\mathrm{V}} = 1\,\mathrm{F}$$

Spule

Spule:

$$\frac{\underline{u}}{L} = \frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} = \hat{\imath} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)} \cdot \mathrm{j}\omega = \underline{i}\,\mathrm{j}\omega$$

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \mathrm{j} \cdot \omega L = \omega L \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{Z}_L = \mathrm{j} \cdot X_L = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}}{\hat{\imath}} \angle(90^\circ)$$

Der komplexe Widerstand besteht hier nur aus einem positiven Blindwiderstand.

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi f \cdot L$$

1 Henry: 1 H = 1 Vs / 1A

Zusammenschaltung mehrerer komplexer Widerstände

Sind alle Bauelemente in Reihe geschaltet, so ist es zweckmäßig, den Strom vorzugeben. Man kann so für jedes Element, durch das derselbe Strom fließt, die angelegte Spannung bestimmen und dann alle Spannungen durch Addition der Zeiger zusammenfassen.

Gleichwertig kann man erst alle Widerstände komplex addieren und dann mit dem Strom multiplizieren.

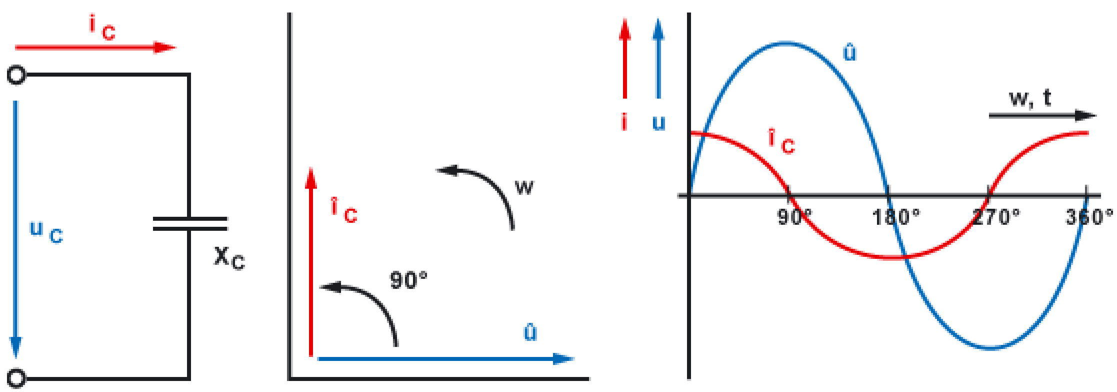
Sind jedoch alle Bauelemente parallel geschaltet, so wird man eine Spannung vorgeben. Man kann den Strom durch jedes Element getrennt berechnen und dann alle komplexen Ströme durch Aneinandersetzung der Zeiger addieren.

Gleichwertig kann man erst alle komplexen Leitwerte addieren und dann mit der Spannung multiplizieren.

Ist die Schaltung eine Mischform, so ist man gezwungen, sie elementar zu zerlegen und jede Teilschaltung getrennt zu berechnen, bevor man sie wieder zusammensetzt.

Phasenverschiebung

φ_u, φ_i	Nullphasenwinkel von ***u(t)***, ***i(t)***
$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$	Phasenverschiebungswinkel zwischen ***u(t)*** und ***i(t)***
$0° < \varphi < 180°$	Spannung eilt Strom um $\boldsymbol{\varphi}$ voraus
$-180° < \varphi < 0°$	Strom eilt Spannung um | $\boldsymbol{\varphi}$ | voraus



Beispielaufgabe

2. An einem Wechselstromnetz (U = 220 V, f = 50 Hz) liegen in Reihenschaltung der Ohmsche Widerstand R = 100 Ω, die Kapazität C = 20 µF und die Induktivität L = 0,1 H.

   Zu berechnen sind:

   a) Der Scheinwiderstand Z und der Effektivwert I des Wechselstroms,

   b) die Phasenverschiebung φ zwischen Spannung und Strom,

   c) die Effektivwerte der Spannungsabfälle an den Einzelwiderständen.

Elektrische Leistungsberechnung

Elektrische Leistung ist das Produkt aus Spannung U und Strom I an einem Zweipol.

P = U · I

Strom und Spannung sind im allgemeinen zeitabhängig:

P(t) = u(t) · i(t)

P(t) - Momentanwert der elektrischen Leistung

P(t) > 0 : Energiefluß zum Verbraucher
P(t) < 0 : Energierückfluß zum Generator

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Leistung

Der zeitunabhängige Zeiger wird in DIN 5483-3 und DIN 40110-1 als komplexe Leistung oder komplexe Scheinleistung bezeichnet.

$$\underline{S} = \underline{U}\ \underline{I}^{\star} = S\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)} = P + \mathrm{j}Q$$

Darin sind die in der Wechselstromtechnik üblichen drei Kenngrößen zur Leistung enthalten:

die Scheinleistung S (in VA):

$$S = |\underline{S}| = U\ I$$

die Wirkleistung P (in W), die als arithmetischer Mittelwert über p definiert wird:

$$P = \mathrm{Re}\ \underline{S} = U\ I\ \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

die ebenfalls frei von Schwingungsanteilen (Augenblickswerten) definierte Blindleistung (Verschiebungsleistung) Q (in var):

$$Q = \mathrm{Im}\ \underline{S} = U\ I\ \sin(\varphi_u - \varphi_i)$$

Beispielaufgabe

3. An einem Wechselstromnetz (U = 220 V, f = 50 Hz) liegen in Reihenschaltung der Ohmsche Widerstand R = 100 Ω, die Kapazität C = 20 µF und die Induktivität L = 0,1 H.

   Berechnen Sie die Scheinleistung, die Wirkleistung und die Blindleistung, die an dieser Reihenschaltung umgesetzt werden.

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

http://de.wikipedia.org

http://www.komplexe-zahlen.de

http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_2/basics/b2_1_5.html

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/imaginaer1.htm