Mathematik I

1. Semester

Dozent

Prof. Dr. rer. nat. Peter Ullrich
peter.ullrich@th-deg.de

Mitschrift

Christoph Stephan
chm.stephan@outlook.com

Inhaltsverzeichnis

I. Grundlagen **1**

1. Elementare Mengenlehre **2**

1.1. Mengen 2

1.1.1. Beschreibung von Mengen 3

1.2. Operationen auf Mengen 14

1.2.1. Vereinigungsmenge 14

1.2.2. Schnittmenge 15

1.2.3. Differenzmenge - Komplementärmenge 17

1.2.4. Symmetrische Differenzmenge 19
1.2.5. Kartesische Produktmenge 20
1.3. Rechenregeln - Mengenalgebra 34
1.4. Relationen und Abbildungen/Funktionen 39
1.4.1. Relationen 39
1.4.2. Abbildungen/Funktionen 49

2. Die komplexen Zahlen **76**
2.1. Definition und Rechenregeln 76
2.1.1. Konstruktion der komplexen Zahlen 77
2.1.2. Gesetze eines (Zahl-)Körpers (Körperaxiome) 78
2.2. Operationen auf komplexen Zahlen 85
2.2.1. Komplex-Konjugation 85
2.2.2. Betrag 91
2.2.3. Multiplikativ Inverses 94
2.2.4. Inverses und Komplex-Konjugiertes 97
2.3. Darstellungen komplexer Zahlen 98
2.3.1. Algebraische (kartesische) Form 98

2.3.2. Trigonometrische Form 100
2.3.3. Eulersche Form 104
2.3.4. Exponentialform 104
2.4. Komplexe Wurzeln 112
2.5. Komplexe Exponential- und Logarithmusfunktion 123
2.5.1. Komplexe Exponentialfunktion 123
2.5.2. Komplexe Logarithmusfunktion 125
2.6. Anwendung auf Schwingungen 130
2.6.1. Überlagerung (=Superposition) der beiden Schwingungen 132
2.6.2. A als Zeiger 134
2.6.3. B als Zeiger 135
2.6.4. Überlagerung (Superposition) 136
2.6.5. Zusammenfassung 138

3. Logik **140**
3.1. Aussagen 140
3.2. Verknüpfung von Aussagen, Aussagenlogik 142
3.2.1. Schaltalgebra 152

3.2.2. Boolesche Funkion/Schaltfunktion 161
3.3. Formeln über R bzw. C, Quantoren 165
3.4. Vollständige Induktion 178
3.4.1. Vollständige Induktion 179

4. Intervalle **186**
4.1. Uneigentliche Intervalle 187

II. Algebra und Arithmetik **189**

1. Zahlen **190**
1.1. Ganze Zahlen und Teilbarkeit 190
1.2. Euklidischer Algorithmus 199
1.3. Modulare Arithmetik, endliche Körper 205
1.4. Stellenwertsysteme 217
1.4.1. Umrechnen Dezimaldarstellung in b-adische Darstellung 222

2. Gleichungen und Ungleichungen **228**

2.1. Definitionen 228

2.2. Lineare Gleichungen und Ungleichungen 256

2.3. Algebraische Gleichungen und Ungleichungen 275

2.3.1. Eine Unbestimmte x 275

2.3.2. Zwei Unbestimmte x_1, x_2 (x, y) 309

2.4. Bruchgleichungen und Bruchungleichungen 318

2.5. Wurzelgleichungen 327

2.6. Exponential- und Logarithmusgleichungen 332

2.7. Goniometrische Gleichungen 343

2.8. Das Newton-Raphson-Verfahren 352

III. Analysis einer Veränderlichen **355**

1. Folgen und Reihen **356**

1.1. Grundbegriffe 356

1.2. Grenzwerte und Konvergenzkriterien 361
1.2.1. Rechenregeln für Grenzwerte 365
1.2.2. Konvergenzkriterien für Reihen 369

2. Stetigkeit von Funktionen **373**

3. Differentiation **378**
3.1. Differenzierbarkeit 378
3.2. Ableitung erster und höherer Ordnung 385
3.3. Ableitungsregeln 387
3.3.1. Ableitung elementarer Funktionen 388
3.4. Ableitung der Umkehrfunktion 389
3.5. Extremwerte und Krümmung 393

4. Elementare Funktionen und Kurven **406**
4.1. Potenzfunktionen 406
4.2. Ganzrationale Funktionen 412
4.3. gebrochen rationale Funktionen 420

4.4. Exponential- und Logarithmusfunktionen 435
4.5. Trigonometrischen Funktionen 441
4.6. Hyperbelfunktionen 453

5. Integration **462**
5.1. Bestimmtes Integral 462
5.2. Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (HDI) 471
5.3. Stammfunktionen 475
5.4. Berechnen von bestimmten Integralen 478
5.5. Integrationsmethoden 482
5.5.1. Elementare Integrationsregeln 482
5.5.2. Integration durch Substitution: 484
5.5.3. Integration durch Partialbruchzerlegung (PBZ) 487
5.5.4. Partielle Integration (Produktintegration) 497
5.6. Uneigentliche Integrale 498
5.7. Anwendungen 500

Teil I.

Grundlagen

1. Elementare Mengenlehre

1.1. Mengen

Definition: (Naive) Unter einer Menge verstehen wir jede Zusammenfassung von bestimmten wohl unterschiedenen Objekten x unserer Anschauung ohne unseres Denkens zu einem Ganzen. *(Cantor, 1845-1918)*

Die Objekte der Menge heißen Elemente.

Die Menge ohne Elemente heißt leere Menge, i.Z. $\emptyset$ bzw. $\{\}$

Beachte: Uneingeschränkter Gebrauch obiger Definition führt zu Widersprüchen.
$\Rightarrow$ Zermelo-Fraenkelsche Mengenlehre

Definition: Gehört ein Objekt x zu einer Menge M, so schreiben wir $\boxed{x \in M}$, andernfalls schreiben wir $\boxed{x \notin M}$.

Bemerkung: In einer Menge kann ein Element höchstens einmal enthalten sein.
$\Rightarrow$ keine Mehrfachnennungen

1.1.1. Beschreibung von Mengen

Beschreibung von Mengen durch

1. Aufzählung

$$M = \{x_1; x_2; \ldots\} = \{x_1, x_2, \ldots\}$$

(Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle)

2. Angabe einer Eigenschaft A

   $M = \{x \mid x \text{ hat Eigenschaft } A\} = \{x : x \text{ hat Eigenschaft } A\}$

Beispiele:

1. $M = \{1, \nabla, A, \{\alpha, \beta\}\}$ $1 \in M, \nabla \in M, A \in M, \{\alpha, \beta\} \in M, \alpha \notin M, \beta \notin M$
   Auch Mengen können Elemente in Mengen sein.

2. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ Menge der Natürlichen Zahlen

   $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$

   $\mathbb{N}_{\text{gerade}} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\} = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 2 \text{ teilt } n\}$

   $\mathbb{N}_{\text{ungerade}} = \{1, 3, 5, 7, \ldots\} = \{n \mid n \in \mathbb{N}, 2 \text{ teilt } n+1\} = \{\ldots \ \frac{n+1}{2} \in \mathbb{N}\}$

3. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen

4. $\mathbb{Q} = \{x \mid x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$

   Beachte: $\frac{-p}{q} = \frac{p}{-q} = -\frac{p}{q}$

5. $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

   $d \stackrel{?}{=} \frac{p}{q}$

   Es existiert ein mathematischer Beweis für: $d \notin \mathbb{Q}$

   $d = \sqrt{2} \in \mathbb{R}, \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

   $\mathbb{R} = \{x \mid x \text{ ist reelle Zahl}\}$ Menge der reellen Zahlen

   $\mathbb{R}^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > 0\}$ positive reelle Zahlen

   $\mathbb{R}_0^+ = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$ nicht negative reelle Zahlen

   $\mathbb{R}^- = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 0\}$ negative reelle Zahlen

$\mathbb{R}_0^- = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$ nicht positive reelle Zahlen

6. $\mathbb{C} = \{x \mid x$ ist komplexe Zahl$\}$ Menge der komplexen Zahlen

   $\imath = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}, \imath \in \mathbb{C}$

   $\imath^2 = -1 \qquad \imath =$ imaginäre Zahl/Einheit

   $5\imath + 3\imath = 8\imath, \qquad \frac{1}{\imath} = -\imath$

Definition:

1. Zwei Mengen M und N heißen gleich, wenn sie dieselben Elemente besitzen, i.Z. $M = N$

2. Ist jedes Element einer Menge M auch Element einer Menge N, so heißt M Teilmenge von N; i.Z. $M \subseteq N$; (N heißt dann Obermenge von M). Gilt zudem $M \neq N$, so heißt M echte Teilmenge von N; i.Z. $M \subset N$; (N heißt dann echte Obermenge von M).

Eigenschaften der Teilmengenrelation

i) $M \subseteq N$ Reflexivität

ii) $M \subseteq N$ und $N \subseteq M$ dann $M = N$ Antisymmetrie

iii) $L \subseteq M$ und $M \subseteq N$ dann $L \subseteq N$ Transitivität

Beispiele:

1. $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3, 4\}$
   es gilt sogar $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$

2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

3. $\emptyset \subset \{a, b\}$
   $\emptyset$ ist Teilmenge jeder Menge M
   $\emptyset \subseteq M$ auch $\emptyset \subseteq \emptyset$

4. $\{1,2\} \subseteq \{1,2\}$
   aber $\{1,2\} \not\subset \{1,2\}$

5. Bestimmen Sie alle Teilmengen von $\{1,2,3\}$

   $\{\}$ (0-elementige Teilmengen)

   $\{1\}$
   $\{2\}$ (1-elementige Teilmengen)
   $\{3\}$

   $\{1,2\}$
   $\{1,3\}$ (2-elementige Teilmengen)
   $\{2,3\}$

   $\{1,2,3\}$ (3-elementige Teilmengen)

   $\Rightarrow$ es gibt genau 8 Teilmengen von $\{1,2,3\}$

Mengen können auch Mengen als Elemente besitzen.

Definition: Für eine Menge M heißt

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(M) &= \{A \mid A \text{ ist Teilmenge von } M\} \\ &= \{A \mid A \subseteq M\} \end{aligned}$$

die Potenzmenge von M.

Bemerkung: $A \subseteq M \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(M)$

Beispiel: $M = \{1, 2, 3\}$

$\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Definition: Die Anzahl der Elemente einer Menge M heißt Mächtigkeit (oder Kardinalität) von M, i.Z. $|M|$

Besitzt M unendlich viele Elemente, so schreibt man $|M| = \infty$

Beispiele:

1. $|\{1, \nabla, A, \{\alpha, \beta\}\}| = 4$
2. $|\mathbb{N}| = \infty$
3. für $M = \{1, 2, 3\}$ gilt $|\mathcal{P}(M)| = 8$

Satz: Ist M eine endliche Menge, $n = |M|$, so gilt

$\boxed{|\mathcal{P}(M)| = 2^n}$

Beweis: $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$

$A \subseteq M$

A	0	1	$\ldots$		$\ldots$	1
M	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n

$\Rightarrow$ 1:1-Korrespondenz

Teilmengen von $M \overset{1:1}{\Longleftrightarrow}$ (0|1)-Folgen der Länge n

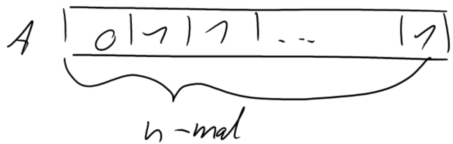


Abbildung 1.1. – Veranschaulichung von A

Es gilt genau $\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\text{-mal}} = 2^n$

(0|1)-Folgen der Länge n

Frage: Gibt es eine Formel, mit der man die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge bestimmen kann?

Definition: Für $n \in \mathbb{N}$ und $0 \leq k \leq n \quad (k \in \mathbb{Z})$ heißt

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}}$$ spricht «n über k» oder «k aus n»

Binominialkoeffizient. $\boxed{\text{nCr}}$ TR $\widehat{=}\binom{n}{r}$

Das heißt $\boxed{n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n}$ die Fakultät von n, sprich «n Fakultät».

$(0! = 1)$

Satz: Eine endliche Menge M, $n = |M|$, besitzt genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen.

Beispiele:

1. $M = \{1, 2, 3\}; n = |M| = 3$
   #2-elementige Teilmengen von $M = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = 3$

2. $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}; n = |M| = 5$
   #3-elementige Teilmengen von $M = \binom{5}{3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10$

Bemerkung: Aus beiden Sätzen folgt: $\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n}$

1.2. Operationen auf Mengen

M, N sind Mengen

1.2.1. Vereinigungsmenge

$$\begin{aligned} M \cup N &= \{x \mid x \in M \text{ oder } x \in N\} && \text{«inklusives oder»} \\ &= \{x \mid x \in M \vee x \in N\} \end{aligned}$$

$$M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \ldots \cup M_r = \bigcup_{i=1}^{r} M_i$$

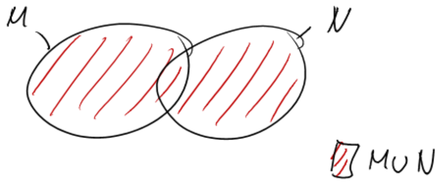


Abbildung 1.2. – Venn-Diagramm zu einer Vereinigungsmenge

1.2.2. Schnittmenge

$$
\begin{aligned}
M \cap N &= \{x \mid x \in M \text{ und } x \in N\} \\
&= \{x \mid x \in M \land x \in N\}
\end{aligned}
$$

$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap \ldots \cap M_r = \bigcap_{i=1}^{r} M_i$$

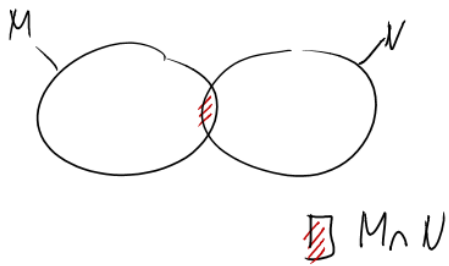


Abbildung 1.3. – Venn-Diagramm zu einer Schnittmenge

1.2.3. Differenzmenge - Komplementärmenge

$$M \setminus N = \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}$$

Beachte: $M \setminus N = M \setminus (M \cap N)$

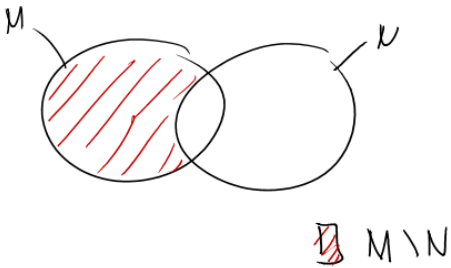


Abbildung 1.4. – Venn-Diagramm zu einer Differenzmenge

Beachte: gilt $N \subseteq M$, so schreibt man statt $M \setminus N$ einfach $\overline{N}^M$ oder einfach $\overline{N}$, falls M bekannt ist.

$\overline{N}$ heißt das Komplement (oder die Komplementärmenge) von N (in M).

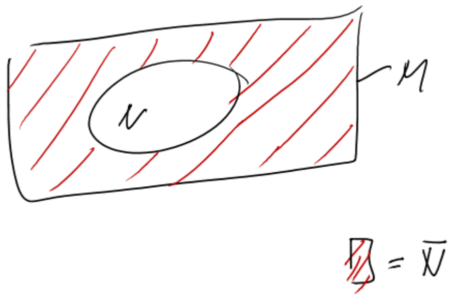


Abbildung 1.5. – Venn-Diagramm zu einer Komplementärmenge

1.2.4. Symmetrische Differenzmenge

$$M \Delta N = \{x \mid x \in M \oplus x \in N\}$$

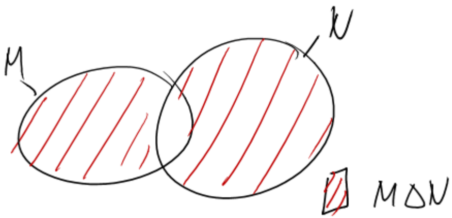


Abbildung 1.6. – Venn-Diagramm zu einer symmetrischen Differenzmenge

1.2.5. Kartesische Produktmenge

$$M \times N = \{\underbrace{(x,y)}_{\substack{\text{geordnetes Paar} \\ = \text{2-Tupel}}} \mid x \in M, y \in N\}$$

$[(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow x = a \wedge y = b]$

$$M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_r = \{\underbrace{(x_1, x_2, \ldots, x_r)}_{\text{r-Tupel}} \mid x_1 \in M_1, \ldots, x_r \in M_r\}$$

$$M^r = \underbrace{M \times M \times \ldots \times M}_{\text{r-mal}}$$

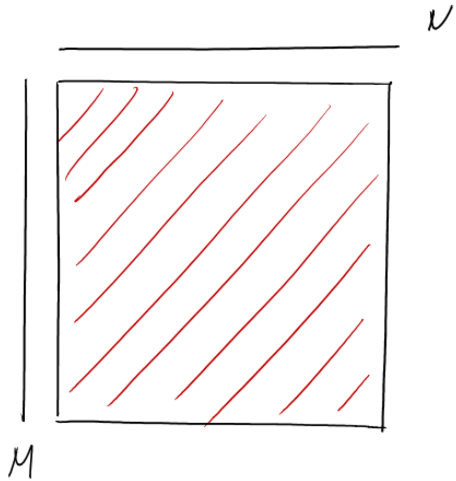


Abbildung 1.7. – Venn-Diagramm zu einer kartesischen Produktmenge

Beispiel: $M = \{1, 3, 5\}, N = \{2, 3, 5\}, \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

1. $M \cup N = \{1, 2, 3, 5\}$

2. $M \cap N = \{3, 5\}$

3. $M \setminus N = \{1\}$
   $N \setminus M = \{2\}$
   $\Omega \setminus M = \overline{M} = \{2, 4\}$
   $\Omega \setminus N = \overline{N} = \{1, 4\}$

4. $M \Delta N = \{1, 2\}$

5. $M \times N = \{(1,2), (1,3), (1,5), (3,2), (3,3), (3,5), (5,2), (5,3), (5,5)\}$
   $M^2 = M \times M = \{(1,1), (1,3), (1,5), (3,1), (3,3), (3,5), (5,1), (5,3), (5,5)\}$
   $M^3 = M \times M \times M = \{(1,1,1), \ldots, (5,5,5)\}$

Beispiele: $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R} \overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ Zahlengerade (Korrespondenz)

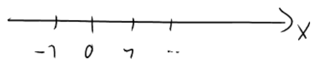


Abbildung 1.8.

reelle Zahl $\overset{\wedge}{=}$ Punkt auf der Zahlengeraden

$\mathbb{R}$ heißt deshalb auch das Kontinuum

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ Ebene

$(x, y) \overset{\wedge}{=}$ Punkt in der Ebene

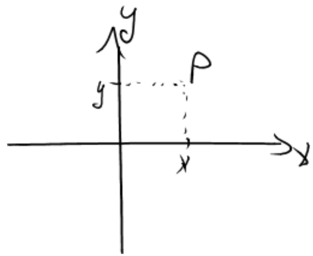


Abbildung 1.9.

$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ Raum

$(x, y, z) \overset{\wedge}{=}$ Punkt im Raum

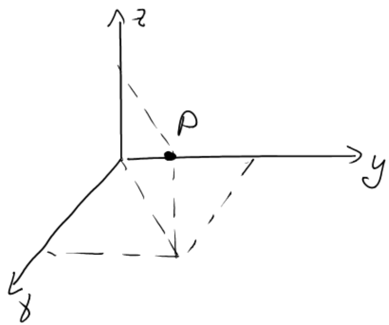


Abbildung 1.10.

Definition:

1. Zwei Mengen M und N heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$ gilt.

2. Eine Folge $M_1, \dots, M_r$ heißt paarweise disjunkt, wenn $M_i \cap M_j = \emptyset$ für alle $i \neq j \quad (1 \leq$

$i, j \leq r$) gilt.

$$\dot{\bigcup_{i=1}^{r}} M_i = M_1 \,\dot\cup\, \ldots \,\dot\cup\, M_r \qquad \text{disjunkte Vereinigung}$$

Zudem heißt $M_1, \ldots, M_r$ eine Zerlegung von $M = \dot{\bigcup}_{i=1}^{r} M_i$

Beispiel:

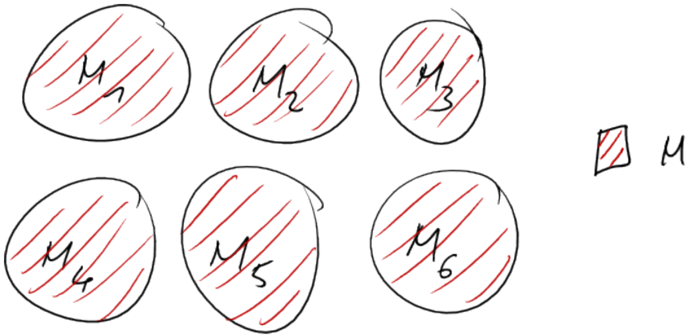
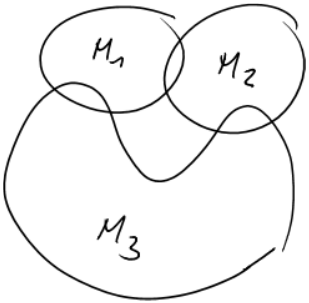


Abbildung 1.11.

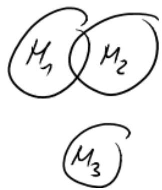
Bemerkung: Für zwei Mengen M_1, M_2 ist «paarweise disjunkt» dasselbe wie «disjunkt».

Beachte: Es gibt Mengen M_1, M_2, M_3 für die $M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$ gilt, die aber nicht paarweise disjunkt sind.



$$M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$$
$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$$

Abbildung 1.12.



$$M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$$
$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$$

Abbildung 1.13.

$$M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$$
$$M_1 \cap M_2 \cap M_3 = \emptyset$$

Abbildung 1.14.

Satz:

Für endliche Mengen M, N gilt:

1. $\boxed{|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|}$
   sind M und N disjunkt, so gilt $|M \cup N| = |M| + |N|$ (Umkehrung gilt ebenso; als Beweis für disjunkt)

   Subaditivität:
   $\left|\bigcup_{i=1}^{r} M_i\right| \leq \sum_{i=1}^{r} |M_i|$
   $|M_1 \cup \ldots \cup M_r| \leq |M_1| + \ldots + |M_r|$
   Gleichheit gilt genau dann, wenn $M_1, \ldots, M_r$ paarweise disjunkt sind.

2. Für $M \subseteq N$ gilt: $\boxed{|N \setminus M| = |N| - |M|}$

3. $\boxed{|M \times N| = |M| \cdot |N|}$

Beispiel: zu 1.

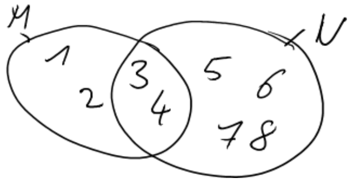


Abbildung 1.15.

$$
\begin{aligned}
M &= \{1,2,3,4\} & |M| &= 4 \\
N &= \{3,4,5,6,7,8\} & |N| &= 6 \\
M \cup N &= \{1,2,3,4,5,6,7,8\} & |M \cup N| &= 8 \\
M \cap N &= \{3,4\} & |M \cap N| &= 2 \\
|M \cup N| &= |M| + |N| - |M \cap N| \\
8 &= 4 + 6 - 2
\end{aligned}
$$

Beispiel: zu 2.

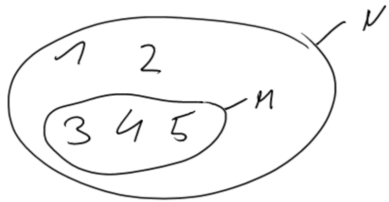


Abbildung 1.16.

$$
\begin{aligned}
N &= \{1,2,3,4,5\} \\
M &= \{3,4,5\} \\
N \setminus M &= \{1,2\}
\end{aligned}
$$

sind M, N beliebig, so gilt: $\boxed{|N \setminus M| = |N| - |M \cap N|}$,
da $N \setminus M = N \setminus (M \cap N)$ und $M \cap N \subseteq N$.

Beispiel: zu 3.

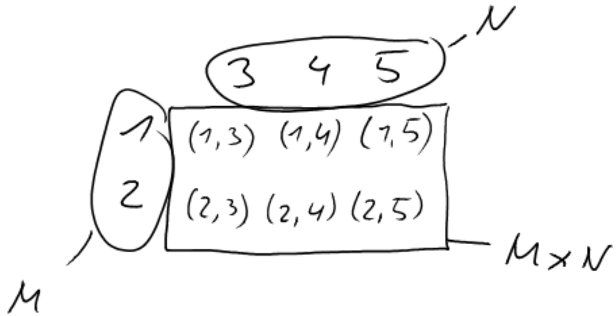


Abbildung 1.17.

$$
\begin{aligned}
|M| &= 2 \\
|N| &= 3 \\
|M \times N| &= 6 = 2 \cdot 3 = |M| \cdot |N|
\end{aligned}
$$

$$\left| \bigtimes_{i=1}^{r} M_i \right| = \prod_{i=1}^{r} |M_i|$$

$$|M_1 \times \ldots \times M_r| = |M_1| \cdot \ldots \cdot |M_r|$$

Prinzip der Inklusion und Exklusion, Siebformel

Theorem:

$$\begin{aligned} |M_1 \cup \ldots \cup M_r| &= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le r} \left| \bigcap_{\nu=1}^{k} M_{i_\nu} \right| \\ &= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le r} |M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_k}| \end{aligned}$$

Beispiele:

1. $r = 3$

$$\begin{aligned} |M_1 \cup M_2 \cup M_3| = &\underbrace{|M_1| + |M_2| + |M_3|}_{k=1} \\ &\underbrace{-|M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_2 \cap M_3|}_{k=2} \\ &\underbrace{+|M_1 \cap M_2 \cap M_3|}_{k=3} \end{aligned}$$

2. $r = 4$

$$|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4| = \underbrace{|M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4|}_{k=1}$$
$$\underbrace{-|M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_1 \cap M_4| - |M_2 \cap M_3| - |M_2 \cap M_4| - |M_3 \cap M_4|}_{k=2}$$
$$\underbrace{+|M_1 \cap M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_4| + |M_1 \cap M_3 \cap M_4| + |M_2 \cap M_3 \cap M_4|}_{k=3}$$
$$\underbrace{-|M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4|}_{k=4}$$

Anzahl $= \binom{r}{k}$

$k = 1 : \binom{4}{1} = 4 \qquad k = 2 : \binom{4}{2} = 6$

$k = 3 : \binom{4}{3} = 4 \qquad k = 4 : \binom{4}{4} = 1$

1.3. Rechenregeln - Mengenalgebra

Die Mengenoperatoren:

- Vereinigung $\cup$
- Schnitt $\cap$
- Differenz $\setminus$
- Komplement $^{-}$
- Produkt $\times$

genügen gewissen Rechenregeln.

Die Operatoren bilden zusammen mit den Mengen die sogenannte Mengenalgebra.

Rechenregeln: $A, B \subseteq \Omega$

1. $A \cap B = B \cap A$
   $A \cup B = B \cup A$ Kommutativität

2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ Assoziativität

3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Distributivität

4. $A \cap (A \cup B) = A$
   $A \cup (A \cap B) = A$ Absorption

5. $A \cap A = A$
   $A \cup A = A$ Idempotenz

6. $\overline{\overline{A}} = A \qquad (\overline{A} = \Omega \setminus A)$

7. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ Gesetze von de Morgan

8. $A \cup \emptyset = A, \qquad A \cap \Omega = A$
   $A \cap \emptyset = \emptyset, \qquad A \cup \Omega = \Omega$ Neutralität

9. $A \cap \overline{A} = \emptyset, \qquad A \cup \overline{A} = \Omega$

   Beachte: $(A, B \subseteq \Omega, \overline{B} = \Omega \setminus B)$

   $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

Beispiele:

1. Zeigen Sie $M \Delta N = (M \cup N) \setminus (M \cap N)$

   $M \Delta N = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$

$$
\begin{aligned}
(M \cup N) \setminus (M \cap N) &= (M \cup N) \cap \overline{(M \cap N)} \\
&= (M \cup N) \cap (\overline{M} \cup \overline{N}) \\
&= [(M \cup N) \cap \overline{M}] \cup [(M \cup N) \cap \overline{N}] \\
&= [\underbrace{(M \cap \overline{M})}_{\emptyset} \cup (N \cap \overline{M})] \cup [(M \cap \overline{N}) \cup \underbrace{(N \cap \overline{N})}_{\emptyset}] \\
&= [N \cap \overline{M}] \cup [M \cap \overline{N}] \\
&= (N \setminus M) \cup (M \setminus N) \\
&= (M \setminus N) \cup (N \setminus M) \\
&= M \Delta N
\end{aligned}
$$

2. Vereinfachen Sie $\overline{A \cap \overline{B}} \cup (B \cap C)$

$$\begin{aligned}
\overline{A \cap \overline{B}} \cup (B \cap C) &= (\overline{A} \cup B) \cup (B \cap C) \\
&= \overline{A} \cup [\underbrace{B \cup (B \cap C)}_{B}] \\
&= \overline{A} \cup B
\end{aligned}$$

1.4. Relationen und Abbildungen/Funktionen

1.4.1. Relationen

Definition: M, N Mengen

Eine (binäre) Relation auf $M \times N$ ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times N$; ist $M = N$, so heißt R Relation auf M.

Statt $(x; y) \in R$ schreibt man auch xRy

R ist eine Menge von Paaren $(x; y); x \in M, y \in N$; ist $(x; y) \in R$, so stehen x und y in Relation (bezüglich R) zueinander.

Beispiele:

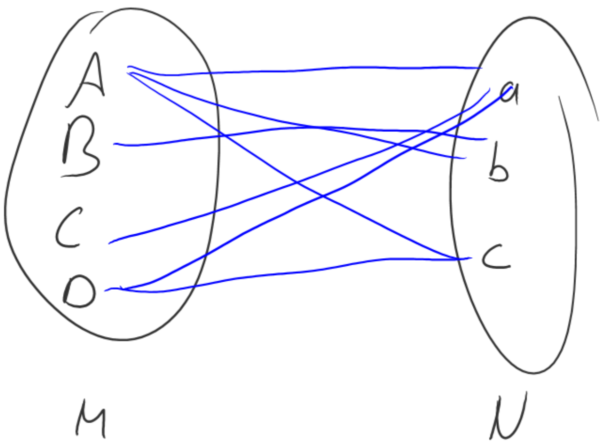


Abbildung 1.18. – Beispiel-Relation

1. In Abbildung 1.18 ist folgende Relation gezeigt:

   $$R = \{(A; a), (A; b), (A; c), (B; b), (C; a), (D; a), (D; c)\}$$

2. Ordnungsrelation $R_{\leq}$ auf $\mathbb{R}$

   $$R_{\leq} = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R} \text{ und } x \leq y\}$$

statt $xR_{\leq}y$ schreibt man $x \leq y$

3. Teilmengenrelation $R_{\subseteq}$ auf $\mathcal{P}(M)$ (M Menge)

   $R_{\subseteq} = \{(A; B) \mid A, B \subseteq M, A \subseteq B\}$

   statt $AR_{\subseteq}B$ schreibt man $A \subseteq B$

4. Teilbarkeitsrelation $R_{|}$ auf $\mathbb{N}$

   $R_{|} = \{(u; m) \mid n, m \in \mathbb{N}\ n \mid m\}$
   «n teilt m» bzw. «m ist durch n teilbar»

5. Elementrelation $R_{\in}$ auf $M \times \mathcal{P}(M)$

   $R_{\in} = \{(x, A) \mid x \in M, A \in \mathcal{P}(M) \text{ und } x \in A\}$

   statt $xR_{\in}M$ schreibt man $x \in M$.

Bemerkung: Zu einer Relation definiert man i.d.R. ein Relationszeichen $\Box$ und schreit $x \Box y$ statt xRy

Definition: R sei eine Relation auf einer Menge M. Dann heißt R

- reflexiv, wenn xRx
- symmetrisch, wenn $xRy \Rightarrow yRx$
- antisymmetrisch, wenn xRy und $yRx \Rightarrow x = y$
- transitiv, wenn xRy und $yRz \Rightarrow xRz$

für alle $x, y, z \in M$ gilt.

Satz: Die Ordnungsrelation $R_{\leq}$ auf $\mathbb{R}$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

Definition: Eine Relation $\preceq$ auf einer Menge M, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, heißt partielle Ordnung auf M; die Menge M heißt dann partiell geordnet.

Sind je zwei Elemente $x, y \in M$ bezüglich $\preceq$ vergleichbar, so heißt $\preceq$ totale (lineare, vollständige) Ordnung auf M und M heißt total geordnet.

Beispiele:

1. $\leq$ auf $\mathbb{R}$ ist eine totale Ordnung

2. $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(M)$ ist eine partielle Ordnung, die i.a. nicht total ist.

   $M = \{1, 2\}$

   $\mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \underbrace{\{1\}}_{A}, \underbrace{\{2\}}_{B}, \{1, 2\}\}$

   $A \not\subseteq B$ und $B \not\subseteq A \Longrightarrow$ keine totale Ordnung (nur partiell)

Hasse-Diagramm

Abbildung 1.19. – Hasse-Diagramm

Definition: Eine Relation R auf einer Menge M heißt Äquivalenzrelation, wenn R

- reflexiv

- symmetrisch

- transitiv

ist. Statt xRy schreibt man auch $x \sim_R y$ oder einfach $x \sim y$, falls R «klar ist».

Für $x \in M$ heißt $[x] = \{y \mid y \in M \text{ und } y \sim x\}$

Äquivalenzklasse von x, und x heißt Vertreter oder Repräsentant der Äquivalenzklasse $[x]$.

Beispiele:

1. Auto1 $\sim$ Auto2 $\Longleftrightarrow$ Auto1 hat dieselbe Farbe wie Auto2

2. Geraden g, h: $g \sim h \Longleftrightarrow g \| h$

3. Definiere Relation $\sim_n$ $(n \in \mathbb{N})$ auf $\mathbb{N}$

   $x \sim_n y :\Longleftrightarrow n \mid (x - y)$, d.h. $x - y$ ist durch n teilbar («n teilt $x - y$»)

$\sim_n$ ist eine Äquivalenzrelation

Satz: Sei M eine Menge und $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M.

i) Für $x, y \in M$ gilt: $[x] \cap [y] \neq \emptyset \Longleftarrow [x] = [y]$

(d.h. für beliebige $x, y \in M$ sind die zugehörigen Äquivalenzklassen $[x], [y]$ entweder disjunkt oder gleich)

ii) Für jedes $y \in [x]$ gilt $[x] = [y]$, d.h. jedes Element aus $[x]$ ist ein Repräsentant der Äquivalenzklasse $[x]$.

iii) Sind $[x_1], [x_2], \ldots$ alle Äquivalenzklassen der Äquivalenzrelation $\sim$, so gilt

$$M = \dot{\bigcup_i} [x_i] = [x_1] \,\dot\cup\, [x_2] \,\dot\cup\, \ldots$$

Äquivalenzklassen von $\sim$;

man nennt dann $x_1, x_2, \ldots$ ein vollständiges Repräsentantensystem.

Beispiel: Äquivalenrelation $x \sim_3 y$ auf $\mathbb{N}$

$x \sim_3 y \Longleftrightarrow 3 \mid (x - y)$

Äquivalenzklassen $[0], [1], [2]$

Daher ist $0, 1, 2$ ein vollständiges Repräsentantensystem von $\sim_3$

Statt $x \sim_3 y$ schreibt man auch $x \equiv y \mod 3$

«x ist kongruent zu y modulo 3»

$x \sim_3 y \Longleftrightarrow x$ und y haben bei Division durch 3 den selben Rest.

$$x = 3a + r \qquad 0 \leq r \leq 2$$
$$y = 3b + s \qquad 0 \leq s \leq 2$$

$$x - y = 3a + r - 3b - s$$
$$x - y = 3(a - b) + (r - s)$$

$$\underbrace{\underbrace{x-y}_{\text{durch drei teilbar}} \quad -3(a-b)}_{\text{durch drei teilbar}} = \underbrace{r-s}_{-2\leq r-s\leq 2}$$

$r - s = 0$, d.h. $r = s$

$\Leftarrow$ ok

$$\begin{array}{lll} [0], & [1], & [2] \\ [3], & [4], & [5] \\ [6], & [7], & [8] \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

1.4.2. Abbildungen/Funktionen

Definition: M, N Mengen

1. Eine Abbildung/Funktion f von M nach N ist eine Relation $R_f \subseteq M \times N$, so dass gilt:
   zu jedem $x \in M$ gibt es genau ein $y \in N$
   mit $(x, y) \in R_f$

   i.Z. $f : M \to N, x \mapsto f(x)$ (bzw. $M \xrightarrow{f} N$)

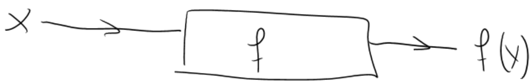


Abbildung 1.20.

x: Dummy-Variable (Platzhalter für den «Eingang» der Funktion)

Das durch $x \in M$ eindeutig bestimmte $y \in N$ mit $(x, y) \in R_f$ wird mit $f(x)$ bezeichnet (d.h. $y = f(x)$) und heißt das Bild von x unter f oder Funktionswert von f in x; x heißt Urbild von $y = f(x)$

2. Ist $f : M \to N$ eine Abbildung, so heißt

   a) $D_f = D(f) := M$ — Definitionsmenge/-bereich von f

   b) N — Ziel- oder Wertemenge

   c) $f(M) = \{f(x) \mid x \in M\}$ — Bildmenge/Bild von f

      allgemein in $A \subseteq M$ heißt $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ das Bild/Bildmenge von A unter f

   d) $G_f = \{(x, y) \mid x \in M, y = f(x)\} \quad (= R_f)$ — Graph von f

Beispiele:

1. $f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{a, b, c, d, e\}$

$$
\begin{array}{ll}
1 \mapsto a & f(1) = a \\
2 \mapsto a & f(1) = a \\
3 \mapsto c & f(1) = c \\
4 \mapsto b & f(1) = b \\
x \mapsto f(x) &
\end{array}
$$

$D(f) = \{1, 2, 3, 4\}$

a ist Bild von 1 unter f 1 ist Urbild von a unter f
a ist Bild von 2 unter f 2 ist Urbild von a unter f
c ist Bild von 3 unter f 3 ist Urbild von c unter f
b ist Bild von 4 unter f 4 ist Urbild von b unter f

Beachte: Zuordnungen der Form

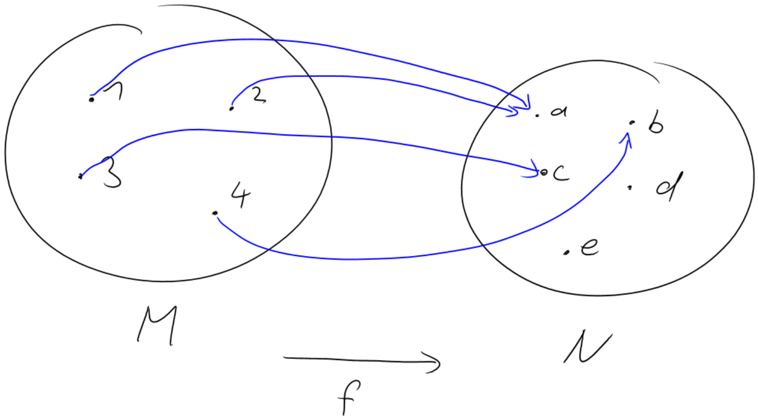


Abbildung 1.21.

$x \mapsto y_1 \qquad x \mapsto y_2 \qquad (y_1 \neq y_2)$

sind bei Abbildungen verboten (bei Relationen jedoch erlaubt)

$G_f = \{(1, a), (2, a), (3, c), (4, b)\}$

Bild von $f : f(M) = \{f(1), f(2), f(3), f(4)\} = \{a, b, c\}$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 (= f(x))$

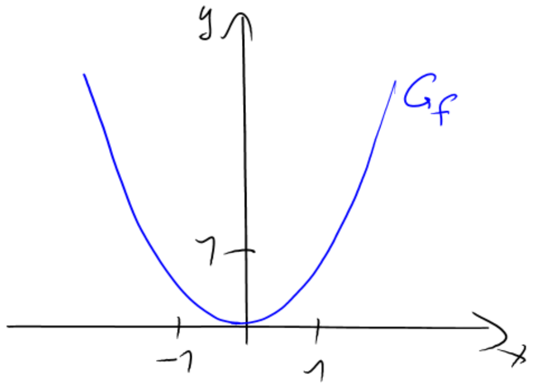


Abbildung 1.22.

$D(f) = \mathbb{R}$
$f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$

$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 (= g(x))$

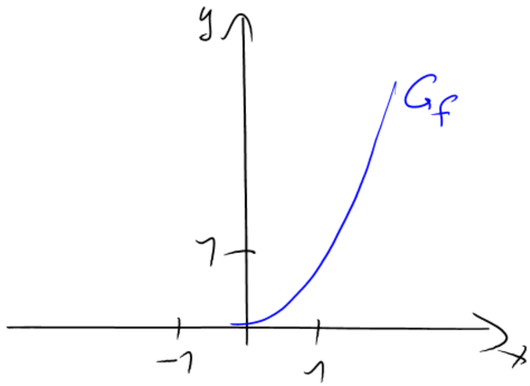


Abbildung 1.23.

$$D(g) = \mathbb{R}_0^+$$
$$g(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+$$

$$h : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^2 (= h(x))$$

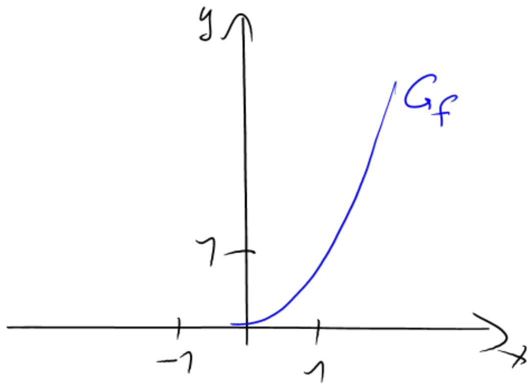


Abbildung 1.24.

Graph wie bei g

$D(h) = \mathbb{R}_0^+$
$h(\mathbb{R}_0^+) = \mathbb{R}_0^+$

$f \neq g, f \neq h, g \neq h$

$k : [-1; 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2 (= k(x))$

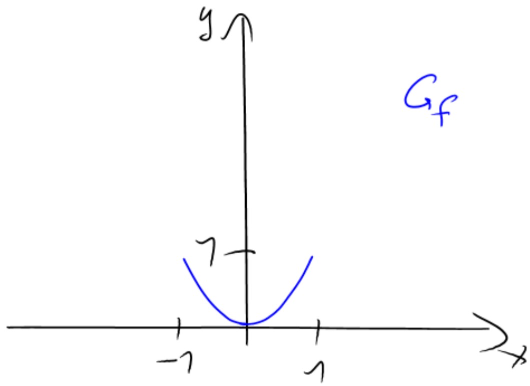


Abbildung 1.25.

$D(k) = [-1; 1]$
$k([-1; 1]) = [0; 1]$

3. $f : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

   $x \mapsto x \mod n$ (=Rest der Division $x : n$) Hashfunktion

4. $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y$

   $D(g) = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$
   $g(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$

Definition: (Komposition von Abbildungen)

Sind $f : L \to M$ und $g : M \to N$ Abbildungen, so ist auch
$\boxed{h : L \to N, x \mapsto g(f(x))(= h(x))}$
eine Abbildung, h heißt Komposition (Verkettung, Hintereinanderausführung) von f und g i.Z. $h = g \circ f$ (sprich: «g nach f»)

$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$
$g \circ f$

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Bemerkung: Damit die Komposition $g \circ f$ gebildet werden kann, muss
$f(L) \subseteq D_g$
Ausgang von f $\subseteq$ Eingang von g
Bild von f $\subseteq$ Definitionsmenge von g

Beispiel:
$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ $\qquad f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$
$g : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ $\qquad D_g = \mathbb{R}_0^+$
$f(\mathbb{R}) \subseteq D_g$

$g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2}$

Definition: Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt

- injektiv, wenn für alle $x_1, x_2 \in M, x_1 \neq x_2$ gilt: $f(x_1) \neq f(x_2)$

- surjektiv, wenn es für jedes $y \in N$ ein $x \in M$ mit $y = f(x)$ gibt

- bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist

Bemerkung: f ist

- nicht injektiv, wenn $x_1 \mapsto y, x_2 \mapsto y$ für gewisse $x_1 \neq x_2$ gilt.

- nicht surjektiv, wenn gewisse $y \in N$ «übrigbleiben»

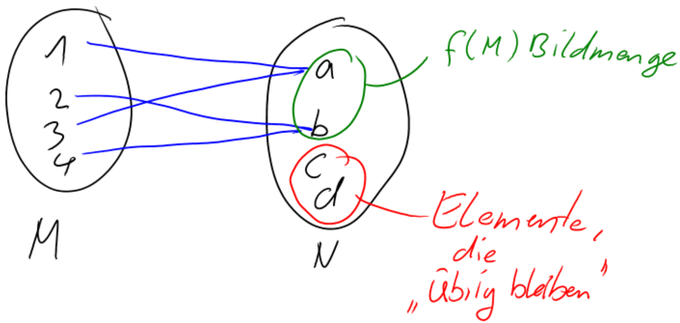


Abbildung 1.26.

$\boxed{f(M)} \neq N$

Beispiele:

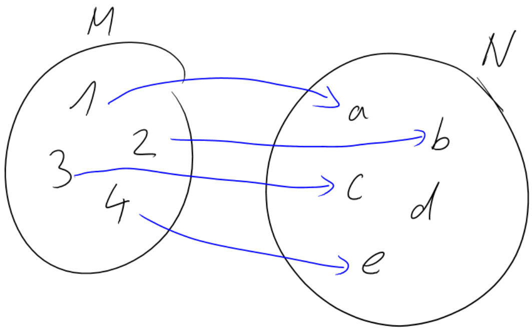


Abbildung 1.27. – injektiv, aber nicht surjektiv

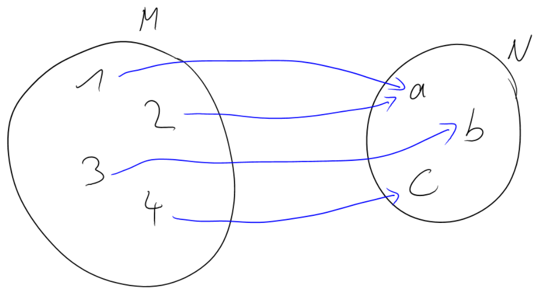


Abbildung 1.28. – surjektiv, aber nicht injektiv

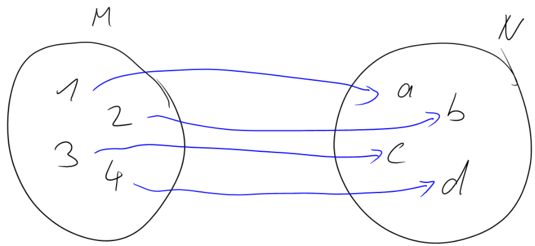


Abbildung 1.29. – injektiv und surjektiv, also bijektiv

Definition: Ist $f : M \to N$ bijektiv, so existiert die Umkehrabbildung/-funktion

$f^{-1} : N \to M$

für diese gilt:

$$\boxed{x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f(x) = y}$$

Ist f nicht bijektiv, so existiert auch keine Umkehrabbildung.

Satz:

Ist $f : M \to N$ bijektiv und $f^{-1} : N \to M$ die Umkehrabbildung, so gilt:

1. $f^{-1} \circ f = id_M$
2. $f \circ f^{-1} = id_N$

wobei $id_M : M \to M, x \mapsto x$ und $id_N : N \to N, y \mapsto y$ die sogenannten identischen Abbildungen sind.

Bemerkung:

zu 1: $(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = id_M(x) = x$

zu 2: $(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = id_N(y) = y$

(f und f^{-1} «löschen sich gegenseitig aus»)

Satz:

Für $M, N \subseteq \mathbb{R}$ gilt:

$f : M \to N$ ist genau dann bijektiv, wenn jede Parallele $y = a$ mit $a \in N$ (Parallele schneidet y-Achse bei a) den Graph von f genau einmal schneidet.

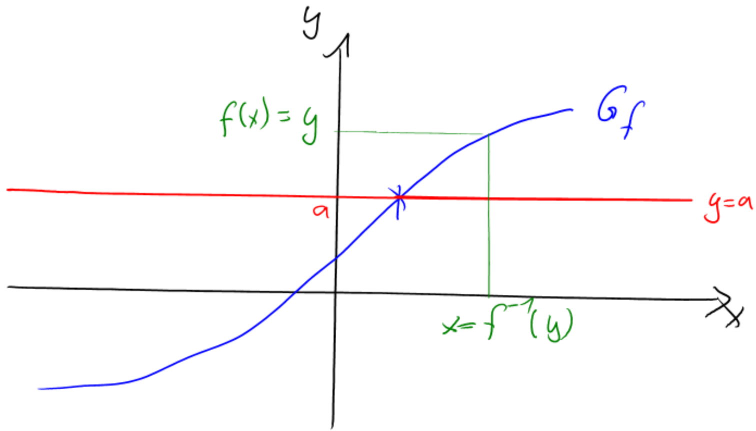


Abbildung 1.30.

Beispiele:

1. $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^2$

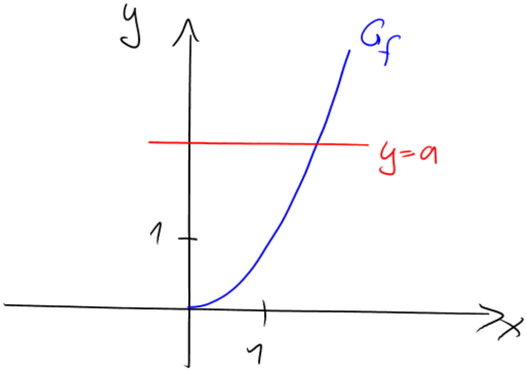


Abbildung 1.31.

f ist bijektiv

Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$

$x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$
$y = x^2 \mid \overset{+}{\scriptstyle(-)}\sqrt{\ }(x \geq 0)$
$\Leftrightarrow \overset{+}{\scriptstyle(-)}\sqrt{y} = x(\geq 0)$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{y} = f^{-1}(y)$

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2) = \sqrt{x^2} = x \text{ (da } x \geq 0)$

$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(\sqrt{y}) = \sqrt{y}^2 = y$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, x \mapsto b^x (b > 1)$

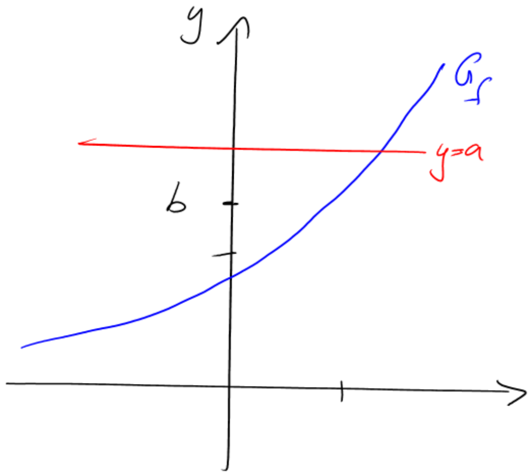


Abbildung 1.32.

f ist bijektiv

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = \log_b(y)$

$$y = b^x = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) = \log_b(y)$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(b^x) = \boxed{\log_b(b^x) = x}$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(\log_b(y)) = \boxed{b^{\log_b(y)} = y}$$

3. $f : \{x \geq 1\} \to \{y \geq 1\}, x \mapsto (x-1)^2 + 1$

   Scheitelpunktform einer Parabel: $y = a(x - x_s)^2 + y_s$
   Scheitel $S(x_s \mid y_s)$

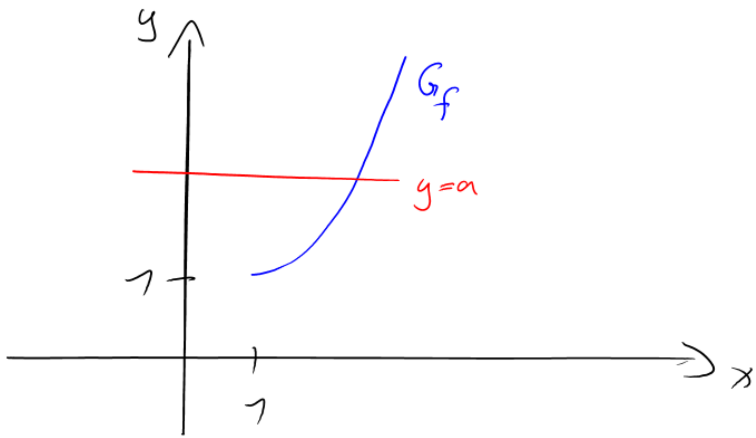


Abbildung 1.33.

f ist bijektiv

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion: $f^{-1} : \{y \geq 1\} \to \{x \geq 1\}$

$y = f(x) \Leftrightarrow y = (x-1)^2 + 1 \mid -1$
$\Leftrightarrow y - 1 = (x-1)^2 \mid \pm\sqrt{}$
$\Leftrightarrow \pm\sqrt{y-1} = x - 1 \ (\geq 0) \ (x \geq 1, \text{ d.h. } x - 1 \geq 0)$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{y-1} + 1 \ (= f^{-1}(y))$

4. $g : \{x \leq 1\} \rightarrow \{y \geq 1\}, x \mapsto (x-1)^2 + 1$

   Prüfe, ob g bijektiv ist und bestimme ggf. g^{-1}!

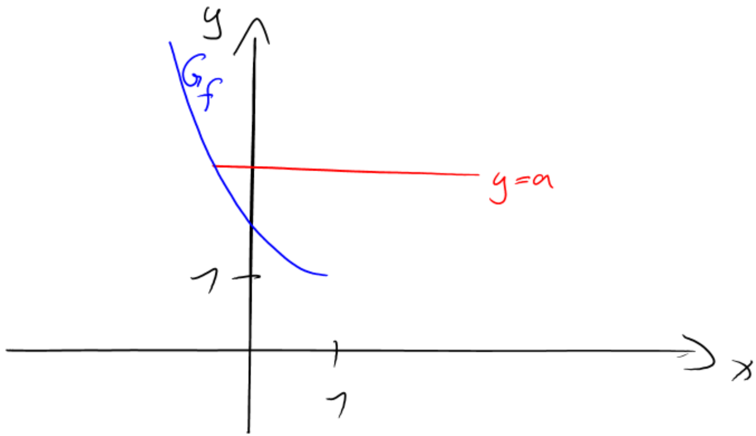


Abbildung 1.34.

g ist bijektiv

$\Rightarrow$ Umkehrfunktion $g^{-1} : \{y \geq 1\} \to \{x \leq 1\}$

$$
\begin{aligned}
y = g(x) \Leftrightarrow y &= (x-1)^2 + 1 \mid -1 \\
y - 1 &= (x-1)^2 \mid \pm\sqrt{} \\
\pm\sqrt{y-1} &= x - 1 \ (\leq 0) \ (x \leq 1,\ \text{d.h. } x - 1 \leq 0) \\
x &= -\sqrt{y-1} + 1
\end{aligned}
$$

Definition: Ist $f : M \to N, x \mapsto f(x)$ eine Abbildung und $D \subseteq M$ eine Teilmenge, so heißt
$f|_D : D \to N, x \mapsto f(x)$
die Einschränkung von f auf D.

Bemerkung: Ist f nicht injektiv, so ist oftmals die Einschränkung $f|_D$ auf eine geeignete Teilmenge D injektiv.

(Einschränkung der Zielmenge «liefert Surjektivität»)

Beispiel:

$f|_D : D \to N$ ist bijektiv

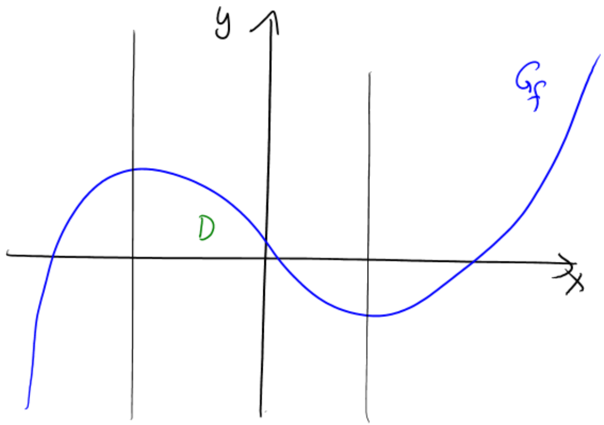


Abbildung 1.35.

2. Die komplexen Zahlen

2.1. Definition und Rechenregeln

Problem: Die quadratische Funktion $f(x) = x^2 + 1$ hat in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle. $(x^2 + 1 > 0)$

formal:

$$
\begin{aligned}
x^2 + 1 &= 0 \\
x^2 &= -1 \\
x_{1/2} &= \pm\sqrt{-1} \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

Kann man den Zahlenbereich $\mathbb{R}$ derart erweitern, dass $x^2 + 1$ darin eine Nullstelle hat?

2.1.1. Konstruktion der komplexen Zahlen

Definiere auf der Menge $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ wie folgt Addition und Multiplikation:

Für $z_1 = (x_1, y_1)$ und $z_2 = (x_2, y_2)$ sei

$$z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2\ ,\ y_1 + y_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2\ ,\ x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Definition: $\mathbb{R}^2$ zusammen mit obiger Definition von Addition und Multiplikation erfüllen die Gesetze eines sogenannten Zahlenkörpers (oder Körpers); man schreibt hierfür $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ und nennt $\mathbb{C}$ (den Körper der) komplexen Zahlen;
für $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ heißt
$x = \Re(z)$ der Realteil $(\mathrm{Re}(z))$
$y = \Im(z)$ der Imaginärteil $(\mathrm{Im}(z))$
von z.

2.1.2. Gesetze eines (Zahl-)Körpers (Körperaxiome)

1. $a + b = b + a$
   $a \cdot b = b \cdot a$ Kommutativgesetze

2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
   $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Assoziativgesetze

3. $a \cdot (b + c) = ab + ac$ Distributivgesetz

4. Es existiert ein Element 0 mit $a + 0 = 0 + a = a$ für jedes a
   (Existenz eines additiven neutralen Elements)

5. Es existiert ein Element 1 mit $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ für jedes a
   (Existenz eines multiplikativen neutralen Elements)

6. Zu jedem a gibt es ein Element $-a$ mit $a + (-a) = (-a) + a = 0$
   (Existenz eines additiven inversen Elements)

7. Zu jedem a $(a \neq 0)$ gibt es ein Element a^{-1} $(= \frac{1}{a})$ mit $a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = 1$
   (Existenz eines multiplikativen inversen Elements)

Die Abbildung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}; c \mapsto (x; 0)$ ist injektiv und verträglich mit den Additionen und Multiplikationen in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

$$(x_1;0) + (x_2;0) = (x_1 + x_2;0)$$
$$(x_1;0) \cdot (x_2;0) = (x_1 \cdot x_2;0)$$

$\Rightarrow$ Betrachte $\mathbb{R}$ als Teilmenge von $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$)

$$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$$
$$x \mathrel{\hat{=}} (x;0)$$
$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z = 0\}$$

Definition: Die imaginäre Zahl $\imath \in \mathbb{C}$ ist definiert durch $\imath = (0;1)$

Behauptung:

$$\begin{aligned} \imath^2 &= -1 \\ &= (0;1) \cdot (0;1) \\ &= (0-1; 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) \\ &= (-1;0) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Satz:

kartesische Darstellung

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ kann <u>eindeutig</u> geschrieben werden in der Form

$\boxed{z = x + \imath \cdot y}$ $(x, y \in \mathbb{R})$

es gilt $x = \Re z$ und $y = \Im z$

Beweis:

$$\begin{aligned} z &= (x;y) \\ x + \imath y &= (x;0) + (0;1) \cdot (y;0) \\ &= (x;0) + (0 \cdot y - 1 \cdot 0; 0 \cdot 0 + 1 \cdot y) \\ &= (x;0) + (0;y) \\ &= (x;y) \\ &= z \end{aligned}$$

Geometrische Interpretation (Gaußsche Zahlenebene)

$z = x + \imath y \mathrel{\widehat{=}}$ Punkt $P(x;y)$ bzw. Vektor $\vec{v} = \binom{x}{y}$

Beispiele:

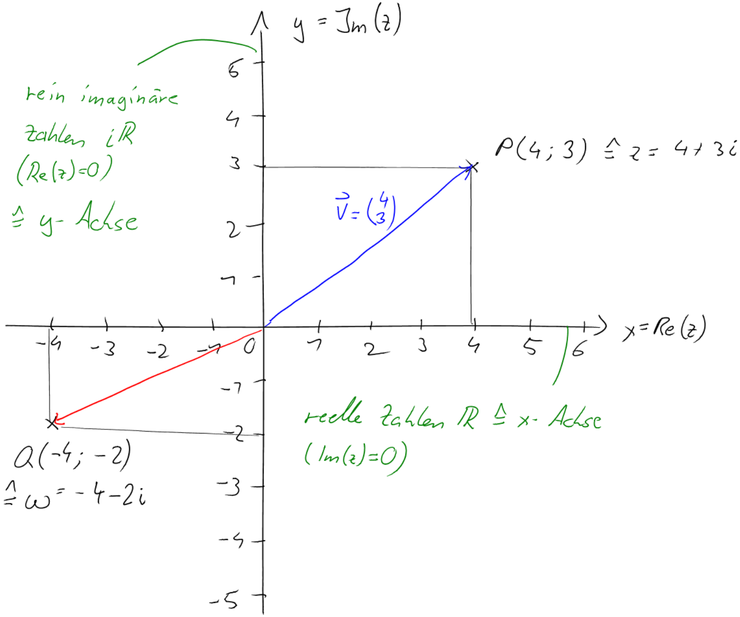


Abbildung 2.1.

1. $-2 + 3\imath + 4 - 8\imath$
   $= 2 - 5\imath$

2. $(-2+3\imath)\cdot(4-8\imath)$
   $= -8+16\imath+12\imath-24\underbrace{\imath^2}_{-1}$
   $= -8+28\imath+24$
   $= 16+28\imath$

3. $(-2+3\imath)^2 = (-2)^2+2\cdot(-2)\cdot3\imath+(3\imath)^2$
   $= 4-12\imath+3^2\underbrace{\imath^2}_{-1}$
   $= 4-12\imath-9$
   $= -5-12\imath$

2.2. Operationen auf komplexen Zahlen

2.2.1. Komplex-Konjugation

Definition: Für eine komplexe Zahl $z = x + \imath y$ heißt

$\boxed{\overline{z} = x - \imath y}$

die Komplex-Konjugierte von z; die Abbildung $\overline{} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \overline{z}$ heißt Komplex-Konjugation.

Geometrische Interpretation: $\overline{z}$ entsteht aus z durch Spiegelung an der reellen Achse.

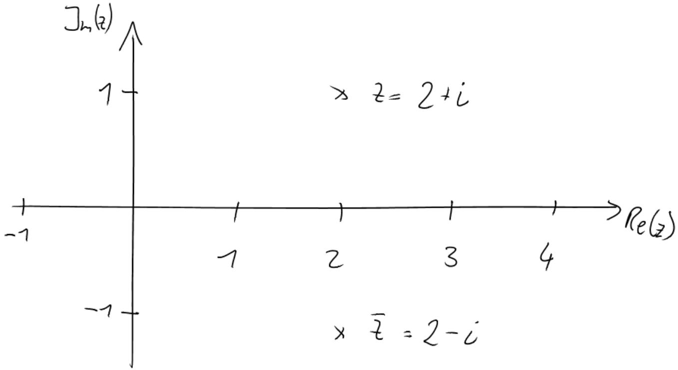


Abbildung 2.2.

Satz:

Eigenschaften der Komplex-Konjugation

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
3. $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
4. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
5. $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$
6. $\Im(z) = \frac{1}{2\imath}(z - \overline{z})$
7. $z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$
8. $z \in \imath\mathbb{R} \Longleftrightarrow z = -\overline{z}$

Beweis: HÜ

1. $z = x + \imath y, \overline{z} = x - \imath y, \overline{\overline{z}} = x - (-\imath y) = x + \imath y = z$

2. $z_1 = x_1 + \imath y_1, z_2 = x_2 + \imath y_2$
   $\overline{z_1} = x_1 - \imath y_1, \overline{z_2} = x_2 - \imath y_2$

$$\begin{aligned}
\overline{z_1 + z_2} &= \overline{(x_1 + \imath y_1) + (x_2 + \imath y_2)} \\
&= \overline{x_1 + x_2 + \imath(y_1 + y_2)} \\
&= x_1 + x_2 - \imath(y_1 + y_2) \\
\overline{z_1} + \overline{z_2} &= (x_1 - \imath y_1) + (x_2 - \imath y_2) \\
&= x_1 + x_2 - \imath y_1 - \imath y_2 \\
&= x_1 + x_2 - \imath(y_1 + y_2)
\end{aligned}$$

Beispiele:

1. $\overline{\overline{4 + 3\imath}} = \overline{4 - 3\imath} = 4 + 3\imath$

2. $\overline{(7-3\imath)+(-8+5\imath)} = \overline{(7-3\imath)} + \overline{(-8+5\imath)}$
   $= 7+3\imath+(-8-5\imath)$
   $= 7+3\imath-8-5\imath$
   $= -1-2\imath$

3. $\bar{\imath} = \overline{0+\imath} = 0-\imath = -\imath$

4. $\overline{(1-2\imath)\cdot(2-3\imath)} = \overline{(1-2\imath)}\cdot\overline{(2-3\imath)}$
   $= (1+2\imath)(2+3\imath)$
   $= 2+3\imath+4\imath+6\imath^2$
   $= 2+7\imath-6$
   $= -4+7\imath$

5. $\Re(5-2\imath) = 5; \Im(5-2\imath) = -2$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(z+\overline{z}) &= \frac{1}{2}(5-2\imath+5+2\imath)\\ &= \frac{1}{2}\cdot 10\\ &= 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\imath}(z-\overline{z}) &= \frac{1}{2\imath}(5-2\imath-(5+2\imath))\\ &= \frac{1}{2\imath}(5-2\imath-5-2\imath)\\ &= \frac{1}{2\imath}(-4\imath)\\ &= -\frac{4\imath}{2\imath}\\ &= -2\end{aligned}$$

2.2.2. Betrag

Definition: Für $z = x + \imath y \in \mathbb{C}$ heißt
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$
der Betrag von z.

Bemerkung: Im Spezialfall $z = x \in \mathbb{R}$ gilt
$|z| = \sqrt{x^2} = |x|$
neue Definition des Betrags einer komplexen Zahl «alte Definition» des Betrags einer reellen Zahl

Geometrische Interpretation des Betrags:

$z = 2 + 3\imath \stackrel{\wedge}{=}$ Punkt $P(2; 3)$

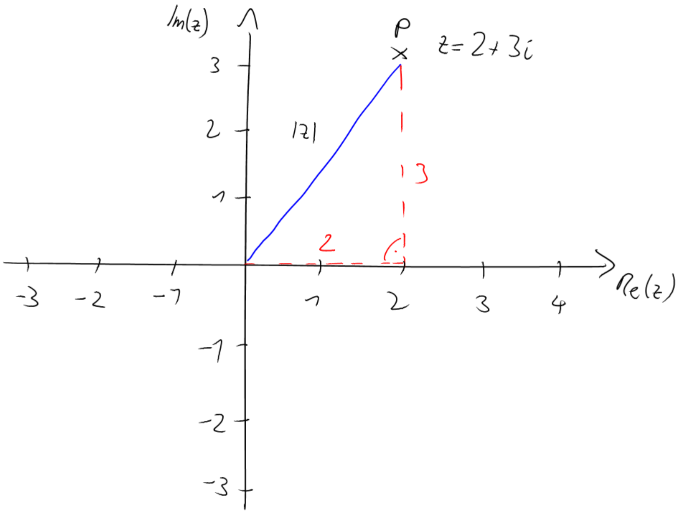


Abbildung 2.3.

bzw. Vektor $\vec{v} = \binom{2}{3}$

$|z|$ = Abstand von P zum Ursprung
= Länge des Vektors $\vec{v}$

Beispiele:

1. $|2+3\imath| = \sqrt{2^2+3^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$
2. $|-4+5\imath| = \sqrt{(-4)^2+5^2} = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$
3. $|\imath| = \sqrt{0^2+1^2} = \sqrt{1} = 1$

Bemerkung: $z = x + \imath y$

$z \cdot \overline{z} = (x+\imath y)(x-\imath y) = x^2 - (\imath y)^2 = x^2 - \imath^2 y^2 = x^2 - (-y^2) = x^2 + y^2$

$$= \frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$x^2 + y^2 = |z|^2$

Bemerkung: i.a. ist $|z|^2 \neq |z^2|$

2.2.3. Multiplikativ Inverses

Satz:

Formel für multiplikatives Inverses

Für $z = x + \imath y \in \mathbb{C}, z \neq 0$ gilt:

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{x^2 + y^2}}$$

Beweis: «mit $\overline{z}$ erweitern»

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{x^2 + y^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

$$\begin{aligned} z \cdot \overline{z} &= (x + \imath y)(x - \imath y) \\ &= x^2 - \imath xy + \imath xy - \imath^2 y^2 \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

Beispiele:

1. $\imath^{-1} = \frac{1}{\imath} = \frac{\bar{\imath}}{\imath \cdot \bar{\imath}} = \frac{-\imath}{x^2 + y^2} = \frac{-\imath}{0^2 + 1^2} = -\imath$

$$\begin{aligned} \imath &= 0 + 1\imath \\ \bar{\imath} &= 0 - 1\imath \\ &= -\imath \end{aligned}$$

Probe: $\frac{1}{\imath}\imath = (-\imath)\imath = -\imath^2 = 1$

2. $(2\imath)^{-1} = \frac{1}{2\imath} = \frac{\overline{2\imath}}{|2\imath|^2} = \frac{-2\imath}{0^2 + 2^2} = \frac{-2\imath}{4} = -\frac{1}{2}\imath$

Probe: $\frac{1}{2\imath}2\imath = (-\frac{1}{2}\imath)2\imath = -\frac{1}{2}2\imath^2 = 1$

Alternative Berechnung:

$(2\imath)^{-1} = \frac{1}{2\imath} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\imath} = -\frac{1}{2}\imath$

3. $(1+2\imath)^{-1} = \frac{1}{1+2\imath} = \frac{1}{1+2\imath} \cdot \frac{1-2\imath}{1-2\imath} = \frac{1-2\imath}{1^2+2^2} = \frac{1-2\imath}{5} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}\imath$

Probe: $\frac{1}{1+2\imath}(1+2\imath) = (\frac{1}{5} - \frac{2}{5}\imath)(1+2\imath) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}\imath - \frac{2}{5}\imath - \frac{4}{5}\imath^2 = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$

2.2.4. Inverses und Komplex-Konjugiertes

Inverses und Komplex-Konjugiertes

Satz:

$$\boxed{\overline{z^{-1}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}} = (\overline{z})^{-1}}$$

Beweis: $$\overline{z^{-1}} = \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{\overline{z}}{|z|^2}\right)} = \frac{\overline{\overline{z}}}{|z|^2} = \frac{\overline{\overline{z}}}{|\overline{z}|^2} = (\overline{z})^{-1}$$

$$|z|^2 = x^2 + y^2$$
$$|\overline{z}|^2 = x^2 + (-y)^2 = x^2 + y^2$$

Bemerkung: $$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \overline{\left(z_1 \cdot \frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \overline{\left(\frac{1}{z_2}\right)} = \overline{z_1} \cdot \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

2.3. Darstellungen komplexer Zahlen

2.3.1. Algebraische (kartesische) Form

$z = x + \imath y$

$(x, y \in \mathbb{R})$

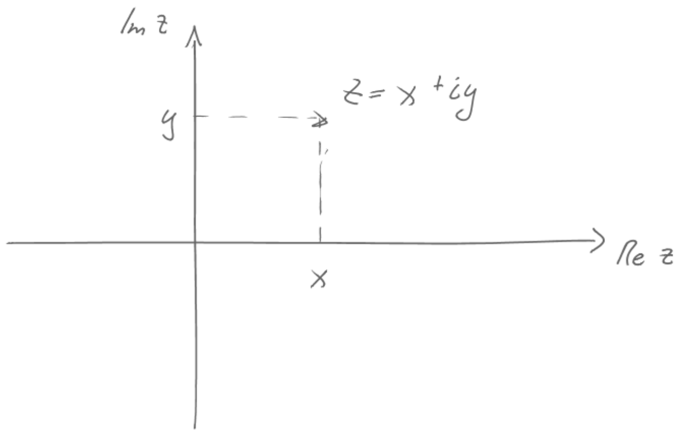


Abbildung 2.4.

2.3.2. Trigonometrische Form

Polarkoordinaten $(r; \varphi)$

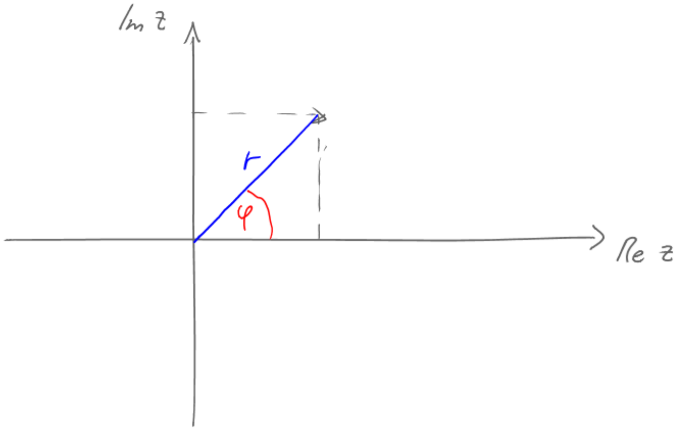


Abbildung 2.5.

$z \neq 0$

$r > 0, r \in \mathbb{R}$

$-\pi < \varphi \leq \pi, \varphi \in \mathbb{R}$

$\frac{x}{r} = \cos\varphi \Rightarrow x = r\cos\varphi$

$\frac{y}{r} = \sin\varphi \Rightarrow y = r\sin\varphi$

$z = x + \imath y$

$\Rightarrow z = x + \imath y = r\cos\varphi + \imath r\sin\varphi = r(\cos\varphi + \sin\varphi)$

Polardarstellung (trigonomerische Form)

$z = r\cos\varphi + \imath r\sin\varphi = r(\cos\varphi + \sin\varphi) =$

Kartesische Koordinaten $\leftrightarrow$ Polarkoordinaten

$(x, y) \leftrightarrow (r; \varphi)$

$x = r\cos\varphi \in \mathbb{R}$

$y = r\sin\varphi \in \mathbb{R}$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos(\frac{x}{r}), & \text{falls } y \geq 0 \\ -\arccos(\frac{x}{r}), & \text{falls } y < 0 \end{cases}$$

$\varphi = Arg(z) =$ (Hauptwert des) Argument(s) von z

$-\pi < \varphi \leq \pi)$

$z = x + \imath y$

Polarkoordinaten $r = |z|, \varphi = \text{Arg}(z)$

Bemerkung: $(\arccos x)$

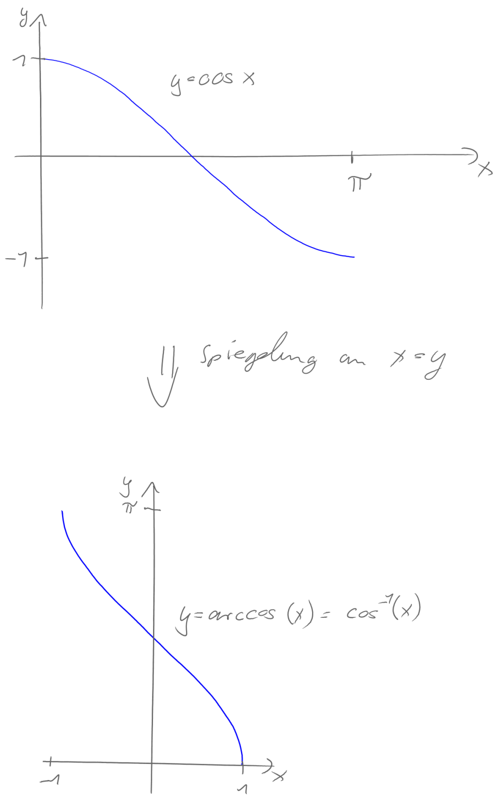


Abbildung 2.6.

2.3.3. Eulersche Form

$\boxed{e^{\imath\varphi} = \cos\varphi + \imath\sin\varphi}$ (komplexe Exponentialfunktion)

2.3.4. Exponentialform

$z \in \mathbb{C}, z \neq 0$

$\boxed{z = r \cdot e^{\imath\varphi}}$
$$r = |z| > 0$$
$$\varphi = \operatorname{Arg}(z), -\pi < \varphi \leq \pi$$

Folgt aus trigonometrischer Form

$z = r \cdot (\cos\varphi + \imath\sin\varphi)$

und der Eulerschen Formel

$e^{\imath\varphi} = \cos\varphi + \imath\sin\varphi$

Bemerkung: Verwende in der Exponentialform φ nur im Bogenmaß (als Vielfaches von π)

$\cancel{z = 4e^{\imath 30°}} \quad \Rightarrow \quad e^{\imath \frac{\pi}{4}}$

Beispiel: $z = 2 + 2\imath$ (kartesiche Form)

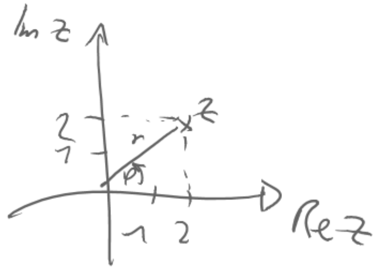


Abbildung 2.7.

Polarkoordinaten $(r; \varphi)$:

$r = |z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\varphi = \operatorname{Arg}(z) \qquad y \geq 0$

$= \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$

$= \arccos\left(\frac{2}{2\sqrt{2}}\right)$

$= \arccos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$

$= \frac{\pi}{4}$

Gradmaß α	Bogenmaß x
$180°$	π
α	x

$$\boxed{\frac{\alpha}{180°} = \frac{x}{\pi}}$$

trigonometrische Form

$z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \imath\sin\frac{\pi}{4})$

Exponential Form

$z = 2\sqrt{2} \cdot e^{\imath\frac{\pi}{4}}$

Satz:

Eigenschaften von $e^{\imath\varphi}$

$\varphi, \psi \in \mathbb{R}$

1. $e^{\imath\varphi}e^{\imath\psi} = e^{\imath(\varphi+\psi)}$
2. $e^{-\imath\varphi} = \dfrac{1}{e^{\imath\varphi}}$
3. $(e^{\imath\varphi})^n = e^{\imath n\varphi} \qquad (n \in \mathbb{Z})$
4. $|e^{\imath\varphi}| = 1 \qquad \begin{array}{l} \Re(e^{\imath\varphi}) = \cos\varphi \\ \Im(e^{\imath\varphi}) = \sin\varphi \end{array}$

Durchläuft φ das Intervall $[0; 2\pi[$ bzw. $]-\pi; \pi]$, so durchläuft $z = e^{\imath\varphi}$ alle Punkte auf dem

Einheitskreis $|z| = 1$.

Satz:

Satz von de Moivre

$$\boxed{(\cos\varphi + \imath \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + \imath \sin(n\varphi)} \qquad (n \in \mathbb{N}, \varphi \in \mathbb{R})$$

Beweis:

$(\cos\varphi + \imath \sin\varphi)^n = (e^{\imath\varphi})^n = e^{\imath n\varphi} = \cos(n\varphi) + \imath \sin(n\varphi)$

Anwendungsbeispiel:

1. Es gilt:

   $$\cos(2\varphi) = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$$
   $$\sin(2\varphi) = 2cos\varphi \sin\varphi$$

Beweis:

$$\begin{aligned}\cos(2\varphi) + \imath sin(2\varphi) &\overset{\text{de Moivre}}{=} (cos\varphi + \imath \sin\varphi)^2 \\ &= \cos^2\varphi + 2\cos\varphi\imath\sin\varphi + \underbrace{(\imath\sin\varphi)^2}_{-\sin^2\varphi} \\ &= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + \imath 2\cos\varphi\sin\varphi\end{aligned}$$

vergleiche die Real- und Imaginärteile

$$\begin{aligned}\cos(2\varphi) &= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \\ \sin(2\varphi) &= 2\cos\varphi\sin\varphi\end{aligned}$$

2. Additionstheoreme für $\sin(x)$ und $\cos(x)$

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi$$
$$\sin(\varphi + \psi) = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi+\psi) + \imath\sin(\varphi+\psi) &= e^{\imath(\varphi+\psi)} = e^{\imath\varphi}e^{\imath\psi}\\
&= (\cos\varphi + \imath\sin\varphi)(\cos\psi + \imath\sin\psi)\\
&= \cos\varphi\cos\psi + \cos\varphi\imath\sin\psi + \imath\sin\varphi\cos\psi + \imath^2\sin\varphi\sin\psi\\
&= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi + \imath(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)
\end{aligned}$$

vergleiche die Real- und Imaginärteile

Behauptung: s.o.

2.4. Komplexe Wurzeln

Definition: Sei $w \in \mathbb{C}$. Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$, die die Gleichung $z^n = w$ erfüllt, heißt n-te komplexe Wurzel von w.

Reelle Zahlen

$$x^n = a \qquad (a \geq 0) \qquad x \geq 0$$
$$x = \sqrt[n]{a} \geq 0$$

Satz:

Zu jedem $0 \neq w \in \mathbb{C}$ gibt es genau n verschiedene n-te komplexe Wurzeln. Diese sind wie folgt gegeben:

Ist $w = re^{\imath\varphi}$ die Exponentialform von w, so sind

$$\boxed{z_k = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\imath\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)}} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

alle n-ten komplexen Wurzeln von w.

Im Spezialfall $w = 1$ heißen die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ n-te (Komplexe) Einheitswurzeln.

$$\boxed{\zeta_{k,n} = e^{\imath \frac{2\pi}{n} k}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(z_k)^n &= \left(r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\imath(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k)}\right)^n \\
&= \left(r^{\frac{1}{n}}\right)^n \cdot \left(e^{\imath(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} k)}\right)^n \\
&= r \cdot e^{\imath(\varphi + 2\pi k)} \\
&= r \cdot e^{\imath\varphi + i2\pi k} \\
&= r \cdot e^{\imath\varphi} \cdot e^{\imath 2\pi k} = w \\
e^{\imath 2\pi k} &= (e^{\imath 2\pi})^k = (1)^k = 1
\end{aligned}$$

Bemerkung: $z_k = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\imath(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k)}$
$= r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\imath\frac{\varphi}{n}} \cdot e^{\imath\frac{2\pi}{n}k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$
$= z_0 \cdot e^{\imath\frac{2\pi}{n}k}$
$= z_0 \cdot \zeta_{n,k}$
$\boxed{z_k = z_0 \cdot \zeta_{n,k}}$

z_0: eine spezielle n-te Wurzel von w

$\zeta_{n,k}$: n-te Einheitswurzel

$$w = r \cdot e^{\imath\varphi}$$
$$\Rightarrow z_0 = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{\imath\frac{\varphi}{n}}$$
$$(z_0 = w^{\frac{1}{n}})$$
$$(r \cdot e^{\imath\varphi})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(e^{\imath\varphi})^{\frac{1}{n}}$$

Allgemein gilt: Multiplikation einer komplexen Zahl z mit $e^{\imath\psi}$ bedeutet geometrisch «Drehung des Vektors z um den Winkel ψ».

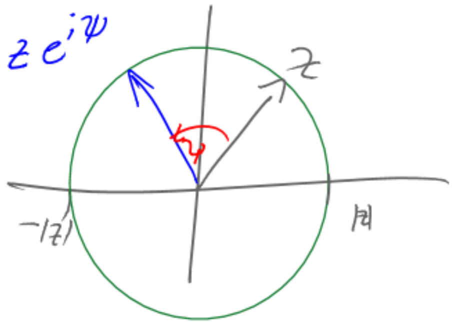


Abbildung 2.8.

1. Bestimme die 2-ten Wurzeln von $w = \imath$
   d.h. Lösung von $z^2 = \imath$!

   Exponentialform von $w = \imath$ $\qquad w = r \cdot e^{\imath\varphi}$
   $w = e^{\imath\frac{\pi}{2}}$ $\qquad r = |w| = 1$ $\qquad \varphi = \operatorname{Arg}(w) = \frac{\pi}{2}$

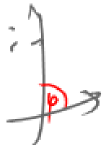


Abbildung 2.9.

spezielle 2-te Wurzel

$$z_0 = 1^{\frac{1}{2}} e^{\imath \frac{\pi}{4}} = e^{\imath \frac{\pi}{4}}$$

$$z_k = z_0 e^{\imath \frac{2\pi}{n} k}$$

$$z_1 = z_0 e^{\imath \frac{2\pi}{2} 1} = e^{\imath \frac{\pi}{4}} e^{\imath \pi} = e^{\imath \frac{5}{4} \pi}$$

Abbildung 2.10.

2. Bestimme die 2-ten Wurzeln von $w = 1 + \imath$, d.h.
   Lösungen von $z^2 = 1 + \imath$

$$w = \sqrt{2}e^{\imath\frac{\pi}{4}}$$

$$z_0 = \sqrt{2}^{\frac{1}{2}} e^{\imath\frac{\pi}{8}} = \sqrt[4]{2}e^{\imath\frac{\pi}{8}}$$

$$z_1 = z_0\zeta_{n,k} = z_0 e^{\imath\frac{2\pi}{n}k} = z_0 e^{\imath\pi} = \sqrt[4]{2}e^{\imath\frac{\pi}{8}}e^{\imath\pi} = 2^{\frac{1}{4}}e^{\imath\frac{9}{8}\pi}$$

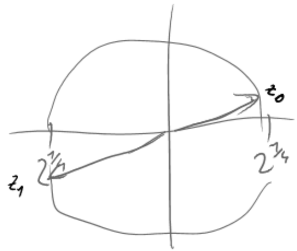


Abbildung 2.11.

3. Bestimme die 3-ten Wurzeln von $w = -1$

$$x^3 = -1$$

$$w = 1e^{\imath\pi} = e^{\imath\pi}$$

$$z_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{\imath \frac{\varphi}{n}} = 1^{\frac{1}{3}} e^{\imath \frac{\pi}{3}}$$

$$z_1 = 1^{\frac{1}{3}} e^{\imath \frac{\pi}{3}} \quad \underbrace{e^{\imath \frac{2\pi}{3}}}_{\text{Drehung } 120^\circ} \quad = e^{\imath \pi}$$

$$z_2 = e^{\imath \frac{\pi}{3}} e^{\imath \frac{2\pi}{3} 2} = e^{\imath \frac{5}{3} \pi}$$

4. Bestimme die 3-ten Wurzeln von $w = -1 + \imath$

$$w = \sqrt{2} e^{\imath \frac{3}{4} \pi}$$

$$z_0 = r^{\frac{1}{n}} e^{\imath \frac{\varphi}{n}} = \sqrt{2}^{\frac{1}{3}} e^{\imath \frac{3\pi}{4 \cdot 3}} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\imath \frac{\pi}{4}}$$

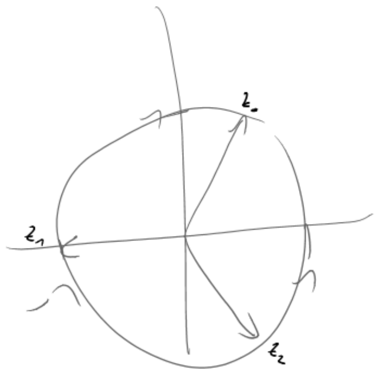


Abbildung 2.12.

$$z_1 = 2^{\frac{1}{6}} e^{\imath \frac{\pi}{4}} e^{\imath \frac{2}{3}\pi} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\imath \frac{11}{12}\pi}$$

$$z_2 = 2^{\frac{1}{6}} e^{\imath \frac{11}{12}\pi} e^{\imath \frac{2}{3}\pi} = 2^{\frac{1}{6}} e^{\imath \frac{19}{12}\pi}$$

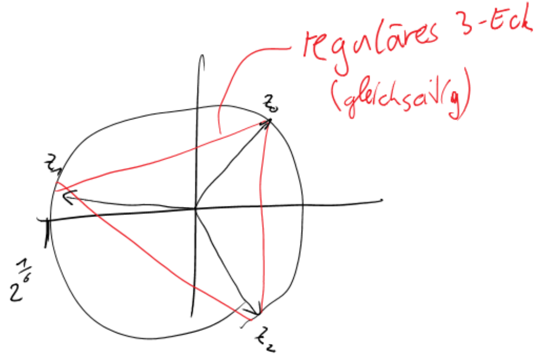


Abbildung 2.13.

5. Bestimme die 5-ten Wurzeln von $w = -32$

$$w = 32e^{\imath\pi}$$

$$z_0 = 32^{\frac{1}{5}} e^{\imath\frac{\pi}{5}}$$

$$z_1 = z_0 e^{\imath \frac{2\pi}{5}} = 32^{\frac{1}{5}} e^{\imath \frac{\pi}{5}} e^{\imath \frac{2}{5}\pi} = 32^{\frac{1}{5}} e^{\imath \frac{3}{5}\pi}$$

$$z_2 = z_1 e^{\imath \frac{2\pi}{5}} = 32^{\frac{1}{5}} e^{\imath \frac{3}{5}\pi} e^{\imath \frac{2}{5}\pi} = 32^{\frac{1}{5}} e^{\imath \pi}$$

$$z_3 = z_2 e^{\imath \frac{2\pi}{5}} = 32^{\frac{1}{5}} e^{\imath \pi} e^{\imath \frac{2}{5}\pi} = 32^{\frac{1}{5}} e^{\imath \frac{7}{5}\pi}$$

$$z_4 = z_3 e^{\imath \frac{2\pi}{5}} = 32^{\frac{1}{5}} e^{\imath \frac{7}{5}\pi} e^{\imath \frac{2}{5}\pi} = 32^{\frac{1}{5}} e^{\imath \frac{9}{5}\pi}$$

2.5. Komplexe Exponential- und Logarithmusfunktion

2.5.1. Komplexe Exponentialfunktion

Bisher wurde e^z für $z = \imath\varphi$ durch $e^{\imath\varphi} = \cos\varphi + \imath\sin\varphi$ «definiert». Nun folgt die allgemeine Definition.

Definition: (komplexe Exponentialfunktion)

Für $z = x + \imath y$ definiert man

$\boxed{e^z = e^x \cdot e^{\imath y} = e^x(\cos y + \imath \sin y)}$

und nennt die Funktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto e^z = \exp(z)$

komplexe Exponentialfunktion.

Beispiel:

$$e^{-2+4\imath} = e^{-2}e^{4\imath} = \frac{1}{e^2}(\cos 4 + \imath \sin 4) = \frac{1}{e^2}\cos 4 + \imath\frac{1}{e^2}\sin 4 = -0,09 - \imath \cdot 0,1$$

Satz:

Eigenschaften von $\mathbf{e^z}$

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$
2. $e^{zn} = e^{nz} \qquad (n \in \mathbb{Z})$
3. $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$
4. $\Re(e^z) = e^x \cos y \qquad (z = x + \imath y)$
5. $\Im(e^z) = e^x \sin y$
6. wenn e^z auf dem Einheitskreis liegt, d.h. $|e^z| = 1 \Leftrightarrow x = \Re(z) = 0$
7. $|e^z| = e^x > 0 \Rightarrow e^z$ besitzt in $\mathbb{C}$ keine Nullstellen

$e^x = a$

$x = \ln(a)$

$e^z = w$

2.5.2. Komplexe Logarithmusfunktion

Definition: Sei $w \in \mathbb{C}, w \neq 0$, eine beliebige komplexe Zahl.

Jede komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $e^z = w$ heißt (komplexer) natürlicher Logarithmus von w.

Bemerkung: Mit $z \in \mathbb{C}$ ist auch jede komplexe Zahl, $z + \imath 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$ ein (komplexer) natürlicher Logarithmus von w.

$$
\begin{aligned}
e^z = w \Rightarrow e^{z+\imath 2\pi k} \\
&= e^{x+\imath y+\imath 2\pi k} \\
&= e^{x+\imath(y+2\pi k)} \\
&= e^x e^{\imath y} \underbrace{e^{\imath 2\pi k}}_{=1} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\
&= e^{x+\imath y} = e^z = w
\end{aligned}
$$

Für je zwei (komplexe) natürliche Logarithmen z_1 und z_2 von w gilt $z_1 - z_2 = \imath 2\pi k$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.

Sei $S = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \Im z \leq \pi\}$
S ist ein Streifen in der Gaußschen Zahlenebene.

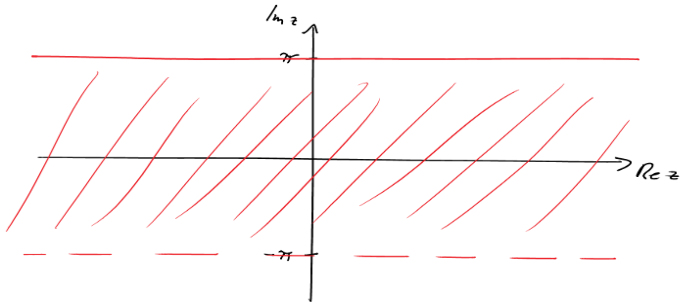


Abbildung 2.14.

Die komplexe Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist <u>nicht</u> injektiv da z.B. $e^z = e^{z+2\pi\imath} = w \qquad z_1 \mapsto w, z_2 \mapsto w$ aber surjektiv.

Satz:

Die Einschränkung der Exponentialfunktion auf den Streifen S

$$\exp : S \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ist bijektiv. Die Umkehrfunktion

$$\operatorname{Ln} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to S$$

heißt Hauptzweig des (komplexen, natürlichen) Logarithmus; es gilt:

$$\boxed{\operatorname{Ln}(w) = \ln |w| + \imath \operatorname{Arg}(w)} \qquad (-\pi < \operatorname{Arg}(w) \leq \pi)$$

hierbei ist $\ln |w|$ der reelle natürlichen Logarithmus $\operatorname{Ln}(w)$ heißt Hauptwert des (komplexen) Logarithmus.

Beweis:

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{Ln}(w)} &= e^{\ln |w| + \imath \operatorname{Arg}(w)} \\ &= e^{\ln |w|} e^{\imath \operatorname{Arg}(w)} \\ &= |w| e^{\imath \operatorname{Arg}(w)} = w \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Ln}(e^z) &= \ln|e^z| + \imath \operatorname{Arg}(e^z) \qquad (z = x + \imath y) \\ &= \ln(e^x) + \imath y \\ &= x + \imath y = z \end{aligned}$$

Bemerkung: Die komplexen Zahlen $\operatorname{Ln}(w) + \imath 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$ sind auch Logarithmen von w; sie heißen Nebenwerte des Logarithmus von w.

Beispiele:

1. $\operatorname{Ln}(\underbrace{3e^{\imath\frac{\pi}{2}}}_{w}) = \ln|w| + \imath \operatorname{Arg}(w)$
   $= \ln 3 + \imath\frac{\pi}{2}$

2. $\operatorname{Ln}(-1) = \underbrace{\ln\underbrace{|-1|}_{1}}_{0} + \imath \underbrace{\operatorname{Arg}(-1)}_{\pi}$

$= \imath\pi$

3. $\mathrm{Ln}(-8+6\imath) =$

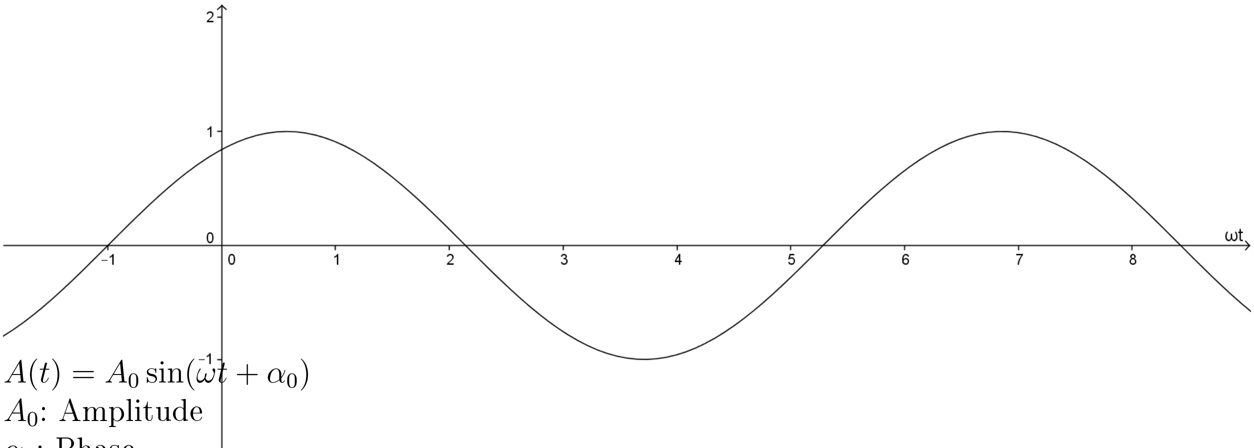
$|w| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{8^2+6^2} = \sqrt{100} = 10$

$\mathrm{Arg}(w) \underbrace{=}_{y\geq 0} \arccos(\frac{x}{r}) = \arccos(\frac{-8}{10}) = 2,49 \quad (= 143,1^\circ = \frac{143,1^\circ}{180^\circ}\pi = 0,795\pi)$

$\Rightarrow \mathrm{Ln}(-8+6\imath) = \ln|w| + \imath\,\mathrm{Arg}\,(w)$
$= \ln 10 + 2,49\imath$

2.6. Anwendung auf Schwingungen

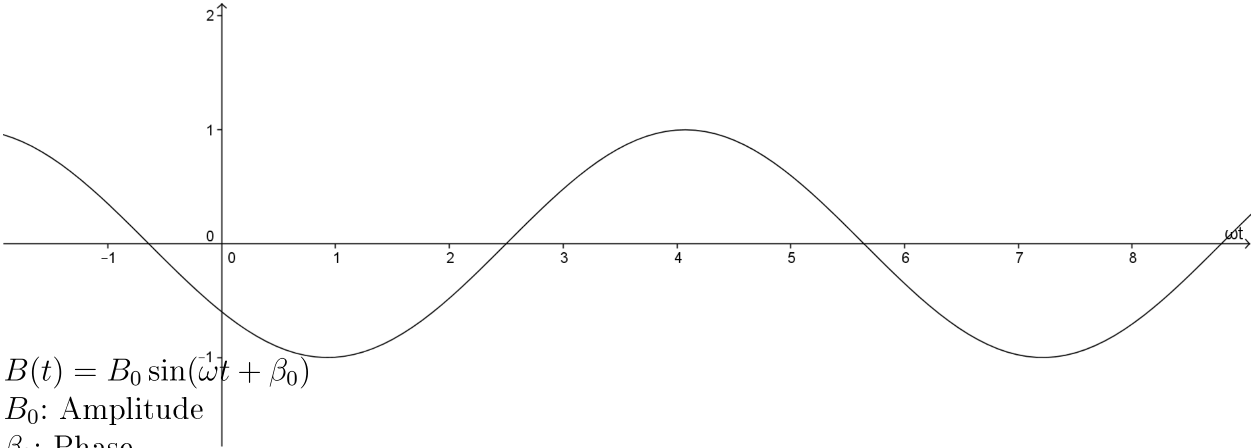
Zwei Schwingungen mit gleicher Schwingungsdauer T (Frequenz $f = \frac{1}{T}$).



$A(t) = A_0 \sin(\omega t + \alpha_0)$
A_0: Amplitude
α_0: Phase

Abbildung 2.15.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$: Winkelgeschwindigkeit = Kreisfrequenz



$B(t) = B_0 \sin(\omega t + \beta_0)$
B_0: Amplitude
β_0: Phase

Abbildung 2.16.

2.6.1. Überlagerung (=Superposition) der beiden Schwingungen

$$C(t) = A(t) + B(t)$$

$C(t)$ ist wieder von der Form $C(t) = C_0 \sin(\omega t + \gamma_0)$. Wie können C_0 und γ_0 bestimmt werden?

Schreibe $A(t)$ und $B(t)$ als Imaginärteile von komplexen Schwingungen (rotierende Vektoren/Zeiger).

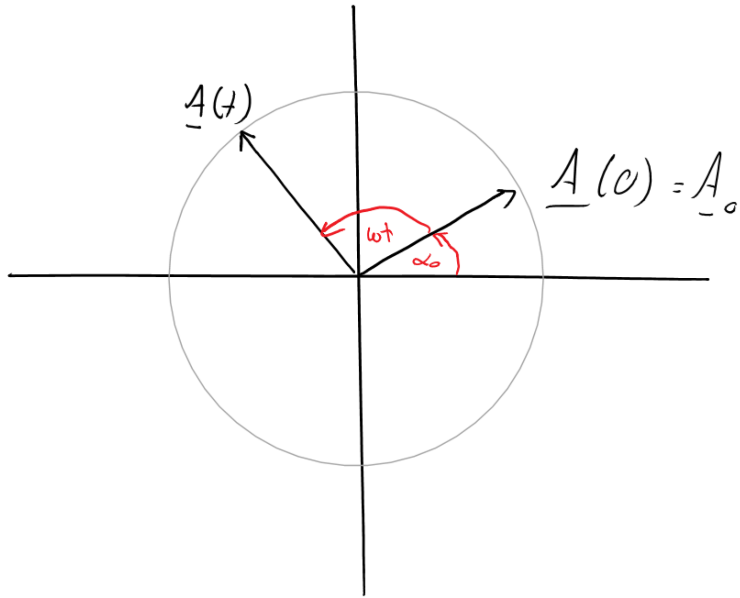


Abbildung 2.17.

2.6.2. A als Zeiger

$\boxed{\underline{A}(t) = \underline{A}_0 e^{\imath\omega t}}$ komplexe Schwingung mit komplexer Amplitude $\underline{A}_0$

$\underline{A}(t) = \underline{A}_0 e^{\imath\omega t} = A_0 e^{\imath\alpha_0} e^{\imath\omega t}$
$\Rightarrow A_0 e^{\imath(\omega t + \alpha_0)}$

$$\underline{A}(t) = A_0(\cos(\omega t + \alpha_0) + \imath \sin(\omega t + \alpha_0)) = A_0 \cos(\omega t + \alpha_0) + \imath \underbrace{A_0 \sin(\omega t + \alpha_0)}_{A(t)})$$

$$\underbrace{A(t)}_{\text{reelle Schwingung}} = \Im(\underbrace{\underline{A}(t)}_{\text{komplexe Schwingung}})$$

$|\underline{A}_0| = A_0$ (reelle Amplitude)

$\operatorname{Arg}(\underline{A}_0) = \alpha_0$ (Phase)

$\Rightarrow \boxed{\underline{A}_0 = A_0 e^{\imath\alpha_0}}$

$\underline{A}(t)$: Zeiger zum Zeitpunkt t

Zeiger, der Länge A_0 rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn.

$$A(t) = A_0 \sin(\omega t + \alpha_0) \longrightarrow \underline{A}(t) = A_0 e^{\imath(\omega t + \alpha_0)}$$

$$A(t) = \Im(\underline{A}(t)) \longleftarrow \underline{A}(t)$$

2.6.3. B als Zeiger

$$\begin{aligned} \underline{B}(t) &= \underline{B}_0 e^{\imath\omega t} \\ \underline{B}_0 &= B_0 e^{\imath\beta_0} \\ B(t) &= \Im(\underline{B}(t)) \end{aligned}$$

2.6.4. Überlagerung (Superposition)

$$\begin{aligned} C(t) &= A(t) + B(t) \\ &= \Im(\underline{A}(t)) + \Im(\underline{B}(t)) \\ &= \Im(\underbrace{\underline{A}(t) + \underline{B}(t)}_{\underline{C}(t)}) \\ &= \Im(\underline{C}(t)) \end{aligned}$$

D.h. für die Superposition $C(t)$ gilt

$$C(t) = \Im(\underline{C}(t))$$

mit

$$\begin{aligned} \underline{C}(t) &= \underline{A}(t) + \underline{B}(t) \\ &= \underline{A}_0 e^{\imath\omega t} + \underline{B}_0 e^{\imath\omega t} \\ &= (\underline{A}_0 + \underline{B}_0) e^{\imath\omega t} \end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{C}(t) = \underline{C}_0 e^{\imath\omega t}}$$

wobei $\boxed{\underline{C}_0 = \underline{A}_0 + \underline{B}_0}$ (Addition der komplexen Amplituden).

$\Rightarrow$ reelle Superposition $C(t) = C_0 \sin(\omega t + \gamma_0)$ mit $C_0 = |\underline{C}_0|$ und $\gamma_0 = \mathrm{Arg}(\underline{C}_0)$.

Addition der komplexen Amplituden

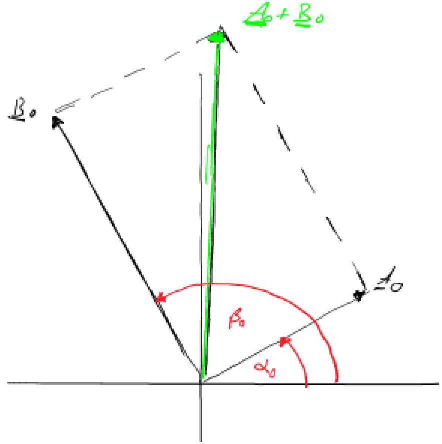


Abbildung 2.18. – Parallelogrammregel

2.6.5. Zusammenfassung

Geg: $A(t) = A_0 \sin(\omega t + \alpha_0), B(t) = B_0 \sin(\omega t + \beta_0)$
(+ evtl. weitere Schwingungen $\rightarrow$ analoge Vorgehensweise)

Ges: C_0, γ_0, sodass $A(t) + B(t) = C(t) = C_0 \sin(\omega t + \gamma_0)$ gilt (C_0 = Amplitude, γ_0 = Phase der Überlagerung)

1. Schritt: komplexe Darstellung der Schwingungen
$\underline{A}(t) = \underline{A}_0 e^{\imath\omega t}, \underline{B}(t) = \underline{B}_0 e^{\imath\omega t}$
mit komplexen Amplituden $\underline{A}_0 = A_0 e^{\imath\alpha_0}, \underline{A}_0 = A_0 e^{\imath\beta_0}$

2. Schritt: Addiere die komplexen Amplituden
$\underline{C}_0 = \underline{A}_0 + \underline{B}_0$ ($\rightarrow$ Rechne $\underline{A}_0$ und $\underline{B}_0$ zunächst in kartesische Form um) und schreibe $\underline{C}_0$ in Exponentialform
$\underline{C}_0 = C_0 e^{\imath\gamma_0}$, d.h. berechne $C_0 = |\underline{C}_0|$ und $\gamma_0 = \operatorname{Arg}(\underline{C}_0)$

3. Schritt: Reelle Beschreibung der Superposition
$C(t) = C_0 \sin(\omega t + \gamma_0)$

(Hinweis: Bei mehr als zwei Schwingungen müssen entsprechend mehrere komplexe Amplituden addiert werden.)

3. Logik

3.1. Aussagen

Definition: Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, welches entweder wahr (w) oder falsch (f) ist. Aussagen werden mit großen Buchstaben $A, B, C, \ldots$ bezeichnet.

Beispiele:

1. 5 ist größer als 3 (w)

2. 3 ist Teiler von 10 (f)

3. DEG liegt in Niederbayern (w)

4. Jede gerade Zahl größer als 2 ist eine Summe aus zwei Primzahlen (Goldbachsche Vermutung)

   (→ wahr oder falsch, jedoch weiß man es bis heute nicht, daher «Vermutung»)

5. $x^2 + y^2 = z^2$ Fermat'sche «Vermutung»
   bewiesen durch Andrew Wiles

6. Poincare-Vermutung
   bewiesen durch Perelman

7. P-NP Problem noch nicht bewiesen

3.2. Verknüpfung von Aussagen, Aussagenlogik

Sind A und B Aussagen, so definiert man wie folgt neue Aussagen:

1. **Konjunktion** $A \wedge B$ («A und B»)

   $A \wedge B$ ist genau wahr, wenn A und B wahr sind.

   Wahrheitstabelle:

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

2. **Disjunktion** $A \vee B$ («A oder B») «inklusives oder»

   $A \vee B$ ist genau dann wahr, wenn A oder B wahr ist (d.h. mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist)

   Wahrheitstabelle:

A	B	$A \vee B$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

3. **Negation** $\neg A$ («nicht A»)

   $\neg A$ ist genau dann wahr, wenn A falsch ist

   Wahrheitstabelle:

A	$\neg A$
w	f
f	w

4. **Implikation** $A \to B$ («A impliziert B», «aus A folgt B»)

   Wahrheitstabelle:

A	B	$A \to B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

5. **Äquivalenz** $A \leftrightarrow B$ («A äquivalent B», «aus A folgt B und aus B folgt A»)

   $A \leftrightarrow B$ ist genau dann wahr, wenn A und B denselben Wahrheitswert besitzen.

   Wahrheitstabelle:

A	B	$A \leftrightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w

Bemerkung:

$\neg$ bindet stärker als $\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$

$\wedge, \vee$ binden stärker als $\to, \leftrightarrow$

Definition:

a) Aus Aussagen $A, B, C, \ldots$ und dessen Verknüpfungen $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ können beliebige, neue Aussagen gebildet werden. Betrachtet man $A, B, C, \ldots$ als Variablen (oder Platzhalter) für Aussagen, so spricht man Formeln für Aussagen oder Aussagenformeln oder aussagenlogische Formel.

b) Zwei Aussageformeln P und Q heißen äquivalent, i.Z. $P \equiv Q$ (bzw. $P \leftrightarrow Q$) wenn sie für jede Belegung ihrer Variablen mit wahren oder falschen Aussagen übereinstimmende Wahrheitswerte besitzen.

c) Eine Aussageformel P heißt Tautologie bzw. Kontradiktion wenn sie für jede Belegung ihrer Variablen mit wahren oder falschen Aussagen, stets den Wahrheitswert w (bzw. f) liefert.

Beispiele:

1. $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \vee B)$
w	w	w	f
w	f	w	f
f	w	w	f
f	f	f	w

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \wedge \neg B$
w	w	f	f	f
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

2. $A \vee \neg A$

A	$\neg A$	$A \vee \neg A$
w	f	w
f	w	w

$\Rightarrow A \vee \neg A$ ist eine Tautologie

3. $A \wedge \neg A$

A	$\neg A$	$A \wedge \neg A$
w	f	f
f	w	f

$\Rightarrow A \wedge \neg A$ ist eine Kontradiktion

4. $A \to B \equiv \neg(A \wedge \neg B) \equiv \neg A \vee B$

A	B	$A \to B$	$\neg(A \wedge \neg B)$	$\neg A \vee B$
w	w	w	w	w
w	f	f	f	f
f	w	w	w	w
f	f	w	w	w

Satz: Für Aussagenvariablen A, B, C gilt:

F = Kontradiktion

W = Tautologie

1. $A \wedge B \equiv B \wedge A$

   $A \vee B \equiv B \vee A$ Kommutativität

2. $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$

   $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$ Assoziativität

3. $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

   $A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ Distributivität

4. $A \wedge (A \vee B) \equiv A$

   $A \vee (A \wedge B) \equiv A$ Absorption

5. $A \wedge A \equiv A$

   $A \vee A \equiv A$ Idempotenz

6. $\neg(\neg A) \equiv A$

7. $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$

   $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$ Gesetze von de Morgan

8. $A \vee F \equiv A, \qquad A \wedge W \equiv A$

9. $A \wedge \neg A \equiv F, \qquad A \vee \neg A \equiv W$

10. $A \wedge F \equiv F, \qquad A \vee W \equiv W$

11. $A \to B \equiv \neg A \vee B$
    $A \to B \equiv \neg B \to \neg A$
    $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
    $A \leftrightarrow B \equiv \neg A \leftrightarrow \neg B$

Beispiel: Zeigen Sie, dass die Aussageformeln $A \to (B \to \neg C)$ und $\neg(A \wedge B \wedge C)$ äquivalent sind durch
a) Umformungen (Äquivalenzumformungen)
b) Erstellen einer Wertetabelle

zu a)

$$
\begin{aligned}
A \to (B \to \neg C) &\equiv \neg A \vee (\neg B \vee \neg C) \\
&\equiv \neg(A \wedge \neg(\neg B \vee \neg C)) \\
&\equiv \neg(A \wedge (B \wedge C)) \\
&\equiv \neg(A \wedge B \wedge C)
\end{aligned}
$$

zu b)

A	B	C	$\neg(A \wedge B \wedge C)$	$B \to \neg C$	$A \to (B \to \neg C)$
w	w	w	f	f	f
w	w	f	w	w	w
w	f	w	w	w	w
w	f	f	w	w	w
f	w	w	w	f	w
f	w	f	w	w	w
f	f	w	w	w	w
f	f	f	w	w	w

3.2.1. Schaltalgebra

Der Erfolg der modernen Digitaltechnik gründet auf der Möglichkeit

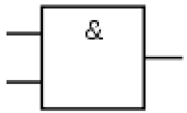
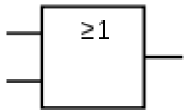
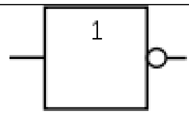
- Informationen in Einheiten von «Bits» (der kleinsten digitalen Informationseinheit) darzustellen bzw. zu speichern

- Informationen durch logische Verknüpfungen zu verarbeiten

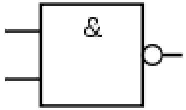
Die der Schaltalbebra zugrunde liegende (Schalt-)Logik ist zur Aussagelogik (bzw. Boolschen Algebra) äquivalent. Man verwendet analoge Formeln , jedoch anstatt der Aussagevariablen $A, B, C, \ldots$ nun Variablen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (mit Werten 0 oder 1), welche die (digitalen) Eingänge der logischen Schaltungen repräsentieren.

Jede logische Formel hat eine entsprechende Darstellung im Schaltplan.

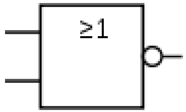
Für die atomaren Formeln $x_1 \wedge x_2, x_1 \vee x_2, \neg x_1$ gilt

Bezeichnung	logische	Symbol im Schaltbild (IEC)	Wahrheitstabelle
UND(AND)-Gatter	$x_1 \wedge x_2$		x_1 x_2 $x_1 \wedge x_2$ 1 1 1 1 0 0 0 1 0 0 0 0
ODER(OR)-Gatter	$x_1 \vee x_2$		x_1 x_2 $x_1 \vee x_2$ 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0 0
NICHT(NOT)-Gatter	$\neg x_1$		x_1 $\neg x_1$ 1 0 0 1

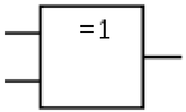
Man unterscheidet noch weitere Gatter

<table>
<tr><th>Bezeichnung</th><th>logische</th><th>Symbol im Schaltbild (IEC)</th><th>Wahrheitstabelle</th></tr>
<tr><td>NAND-Gatter</td><td>$\neg(x_1 \wedge x_2)$</td><td>
</td><td>

x_1	x_2	$\neg(x_1 \wedge x_2)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

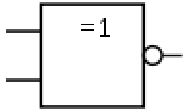
</td></tr>
<tr><td>NOR-Gatter</td><td>$\neg(x_1 \vee x_2)$</td><td>
</td><td>

x_1	x_2	$\neg(x_1 \vee x_2)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

</td></tr>
<tr><td>XOR-Gatter</td><td>$x_1 \oplus x_2$
$\equiv (x_1 \wedge \neg x_2) \vee$
$(\neg x_1 \wedge x_2)$</td><td>
</td><td>

x_1	x_2	$x_1 \oplus x_2$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

</td></tr>
</table>

XNOR-Gatter	$\neg(x_1 \oplus x_2)$		x_1	x_2	$\neg(x_1 \oplus x_2)$
			1	1	1
			1	0	0
			0	1	0
			0	0	1

Beispiele:

1. Zeichnen Sie das zugehörige Schaltbild

   a) $\neg x_1 \land x_2$

Abbildung 3.1.

   b) $(x_1 \lor \neg x_2) \land x_3$

Abbildung 3.2.

c) $(\neg x_1 \oplus x_2) \vee \neg(x_1 \wedge x_2)$

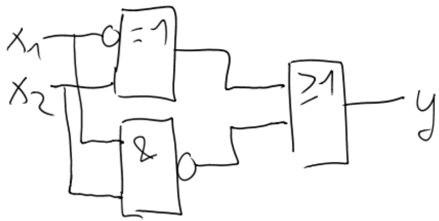


Abbildung 3.3.

2. Bestimmen Sie die zugehörigen logische Formel

a) $(x_1 \wedge x_2) \oplus (\neg x_1 \vee \neg x_2)$

b) $((x_1 \oplus x_2) \vee \neg x_3) \wedge x_1$

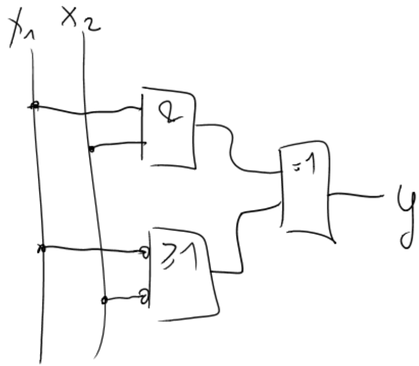


Abbildung 3.4.

c) $C = x_1 \wedge x_2$

$S = x_1 \oplus x_2 = (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2)$

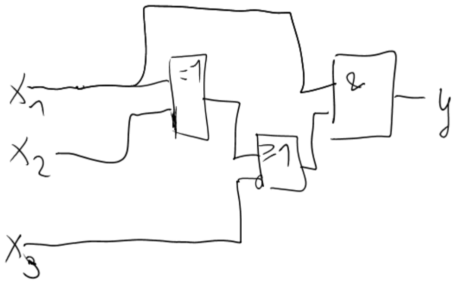


Abbildung 3.5.

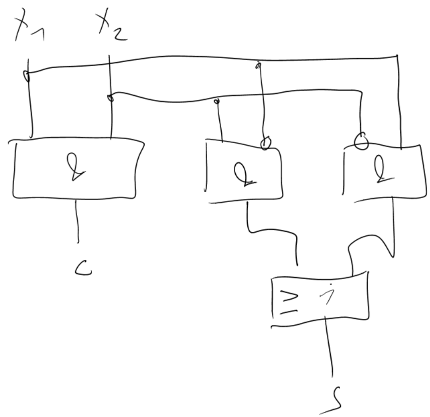


Abbildung 3.6. – Halbaddierer

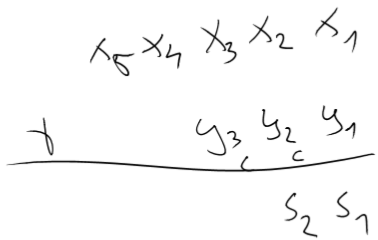


Abbildung 3.7.

3.2.2. Boolesche Funkion/Schaltfunktion

Definition: Unter einer Booleschen Funktion (Schaltfunktion) versteht man eine (beliebige) Funktion
$f : \{0;1\}^n \to \{0;1\}^m, (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_m)$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (\underbrace{f_1(x_1, \ldots, x_n)}_{y_1}, \underbrace{f_2(x_1, \ldots, x_n)}_{y_2}, \ldots, \underbrace{f_m(x_1, \ldots, x_n)}_{y_m})$$

$$f_j(x_1, \ldots, x_n) \in \{0;1\} \qquad (j = 1, \ldots, m)$$

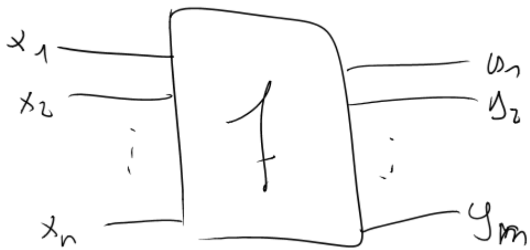


Abbildung 3.8.

Jede logische Formel $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ in den Variablen $x_1, \dots, x_n$ definiert eine Boolesche Funktion

$$f_\varphi : \{0;1\}^n \to \{0;1\}, (x_1, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ falsch} \\ 1, & \text{falls } \varphi(x_1, \dots, x_n) \text{ wahr} \end{cases}$$

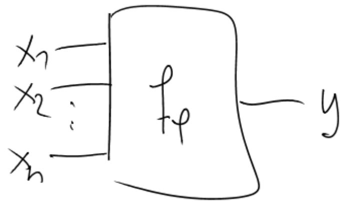


Abbildung 3.9.

Beispiel: $\varphi = x_1 \vee x_2$

$f_\varphi : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 \vee x_2 = y$

Beispiel: $\varphi = x_1 \wedge x_2$

$f_\varphi : \{0,1\}^2 \to \{0,1\}, (x_1, x_2) \mapsto x_1 \wedge x_2 = y$

Satz:

Hauptsatz der Schaltalgebra:

Jede Boolesche Funktion $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ lässt sich durch eine Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, die durch die drei logischen Operatoren UND, ODER, NEG gegeben ist, darstellen.
Man bezeichnet deshalb die logischen Operatoren UND, ODER, NEG als vollständiges Logiksystem (Basissystem).

Weitere vollständige Logiksysteme (Basissysteme)

1. $\wedge$ UND, $\neg$ NEG
   $x_1 \vee x_2 \equiv \neg(\neg x_1 \wedge \neg x_2)$

2. $\vee$ ODER, $\neg$ NEG
   $x_1 \wedge x_2 \equiv \neg(\neg x_1 \vee \neg x_2)$

3. NAND

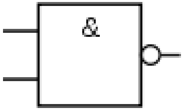


Abbildung 3.10. – NAND

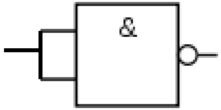


Abbildung 3.11. – NEG

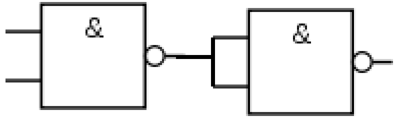


Abbildung 3.12. – AND

4. NOR

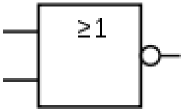


Abbildung 3.13. – NOR

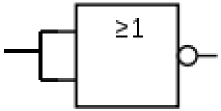


Abbildung 3.14. – NEG

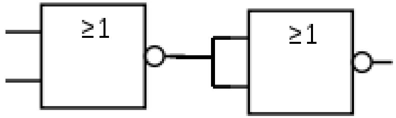


Abbildung 3.15. – OR

3.3. Formeln über R bzw. C, Quantoren

Wir betrachten Terme und Formeln über den reellen bzw. komplexen Zahlen ($\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$). Terme und Formeln sind Gegenstand einer sogenannten formalen Sprache. Bison, Yacc

Zunächst definiert man das Alphabet der formalen Sprache:
es besteht aus

1. Zeichen für Variablen $x_1, x_2, x_3, \ldots$ (über den komplexen Zahlen verwenden wir $z_1, z_2, \ldots$)
2. Zeichen für Konstanten c ($c \in \mathbb{R}$ bzw. $c \in \mathbb{C}$)
3. Zeichen für Addition, Multiplikation, Division $+, \cdot, -, :$ (bzw. $\frac{\square}{\square}$)
4. logische Zeichen $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
5. Relations- bzw. Funktionszeichen $=, \leq, \geq, <, >$ (bei $\mathbb{R}$), f(z.B. $\sin, \cos, \ldots$)
6. Quantoren

$\forall$ (für alle) All-Quantor

$\exists$ (es existiert) Existenz-Quantor

7. Hilfszeichen (,),[,],{,}

Definition:

(Term) induktive Definition

1. Variablen und Konstanten sind Terme (atomare Terme, Induktionsanfang)

2. Sind T_1 und T_2 Terme, so sind auch
$T_1 + T_2, T_1 - T_2, T_1 \cdot T_2, T_1 : T_2, \dfrac{T_1}{T_2}$ und $(T), [T], \{T\}$
Terme (Induktionsschritt)

3. Sind $T_1, \ldots, T_r$ Terme und ist f ein r-stelliges Funktionszeichen, so ist auch $f(T_1, \ldots, T_r)$ ein Term.

4. Keine weiteren Zeichenketten sind Terme.

Definition:

(Formel) induktive Definition

1. Sind T_1 und T_2 Terme, so ist $T_1 = T_2$ eine Formel (bei Formeln über $\mathbb{R}$ sind auch $T_1 \leq T_2, T_1 \geq T_2, T_1 < T_2, T_1 > T_2$ Formeln)
   (Induktionsanfang, atomare Formeln)

2. Sind φ, ψ Formeln, so sind auch $\neg\varphi$ (bzw. $\overline{\varphi}$), $(\varphi), [\varphi], \{\varphi\}, \varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi, \varphi \leftrightarrow \psi$ und $\forall x\varphi, \exists x\varphi$ Formeln

3. Keine weiteren Zeichenketten sind Formeln

Definition:
(Quantoren)

Die Symbole $\forall$ und $\exists$ heißen Quanotoren; speziell heißt $\forall$ All-Quantor und $\exists$ heißt Existenzquantor.
Ist x eine Variable, so bedeutet $\forall x$ «für alle x»
$\exists x$ «es existiert (gibt) ein x»
In den Formeln $\forall x \varphi$ und $\exists x \varphi$ liegt die Variable x im Wirkungsbereich eines Quantors und wird als gebundene Variable der Formel bezeichnet; ansonsten heißt die Variable frei (für die Formel).

Beispiel: für Terme

$$x_1 \cdot x_2 - 1, \quad x_1^2 + \sqrt{2}, \quad 2x_1^2 + 4x_1 + 9, \quad \frac{x_1}{x_1^2 + 1} \quad (\text{in } \mathbb{R})$$

speziell in $\mathbb{C}$: $z_1^3 - 5\imath$ (Konstante $i \in \mathbb{C}$)

Beispiel: für Formeln

$2x_1 - 3 = 1;\quad x_1^2 + x_2^2 < 1;\quad \dfrac{1}{x_1^2+1} < x_2^2$

$z_1 \cdot \overline{z_2} < 4;\quad (5x_1 + 6x_2 = 1) \wedge (x_1^2 + x_2^2 = 1)$

$\neg(4x_1 + 3x_2 > 5);$

$\forall x_1 \quad x_1 \geq 0$ (x_1 gebundene Variable)

$\exists x_1 \quad 5x_1^2 + 2x_2^2 = 1$ (x_1 gebunden, x_2 frei)

Definition:

1. Sind die freien Variablen einer Formel φ in der Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ enthalten, so schreibt man auch $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ statt φ.

2. Für eine Formel $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ bzw. $\varphi(z_1, \ldots, z_n)$ definiert man die Erfüllungsmenge durch $M_\varphi = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ ist in $\mathbb{R}$ wahr$\}$ (falls φ eine Formel über $\mathbb{R}$ ist)

   $M_\varphi = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ ist in $\mathbb{C}$ wahr$\}$ (falls φ eine Formel über $\mathbb{C}$ ist)

Bemerkung: Besitzt eine Formel keine freien Variablen, so stellt sie eine Aussage dar, die in $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$) wahr oder falsch ist.

Beispiel: Erfüllungsmengen für Formeln über $\mathbb{R}$, Aussagen über $\mathbb{R}$

1. $\varphi(x_1) := (x_1 \geq 0)$ $\quad (x_1 \in \mathbb{R}$, d.h. φ ist eine Formel über $\mathbb{R})$
   x_1 freie Variable

   $M_\varphi = \{a_1 \in \mathbb{R} \mid a_1 \geq 0 \text{ ist wahr in } \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_0^+$

2. $\varphi(x_1) := (4x_1 - 2 = 0)$ $\quad (x_1 \in \mathbb{R})$
   x_1 freie Variable

   $M_\varphi = \{\frac{1}{2}\}$

3. $\varphi(x_1, x_2) := ((2x_1 - x_2 = 4) \wedge (-x_1 + x_2 = 2))$
   x_1, x_2 freie Variablen

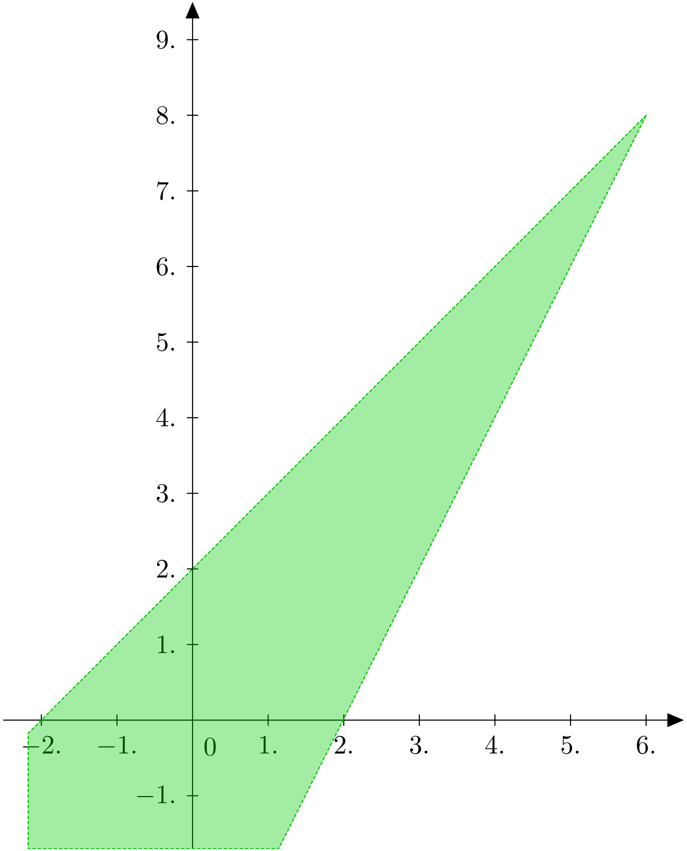
$$\begin{array}{rlr} 2x_1 - x_2 &= 4 & \text{(I)} \\ -x_1 + x_2 &= 2 & \text{(II)} \\ \hline x_1 &= 6 & \text{(I)+(II)} \\ x_2 &= 2 + x_1 = 8 & \text{in (II)} \end{array}$$

$M_\varphi = \{(6,8)\}$

4. $\varphi(x_1, x_2) := ((2x_1 - x_2 < 4) \wedge (-x_1 + x_2 < 2))$
   x_1, x_2 freie Variablen

$$
\begin{array}{rr}
2x_1 - x_2 < 4 & \text{(I)} \\
-x_1 + x_2 < 2 & \text{(II)} \\
\hline
2x_1 - 4 < x_2 & \text{(I)} \\
x_2 < x_1 + 2 & \text{(II)} \\
\hline
2x_1 - 4 < x_2 < x_1 + 2 &
\end{array}
$$

$M_\varphi =$ siehe Zeichnung



9.
8.
7.
6.
5.
4.
3.
2.
1.
−1.
−2.
−1.
0
1.
2.
3.
4.
5.
6.

5. $\varphi(x_1) := \exists x_2 \quad ((2x_1 - x_2 < 4) \land (-x_1 + x_2 < 2))$
   x_1 frei, x_2 gebunden

   $M_\varphi = \{x_1 \in \mathbb{R} \mid x_1 < 6\} =]-\infty; 6[$

6. $\exists x_1 \forall x_2 \qquad x_1 = x_2^2 \qquad$ (f) (über $\mathbb{R}$)
7. $\forall x_1 \exists x_2 \qquad x_1 = x_2^2 \qquad$ (f) (über $\mathbb{R}$)
   $\forall x_1 \exists x_2 \qquad x_1 \geq 0 \to x_1 = x_2^2 \qquad$ (w) (über $\mathbb{R}$)
8. $\forall x_1 \exists x_2 \qquad x_2 = x_1^2 \qquad$ (w) (über $\mathbb{R}$)

Beispiel: Erfüllungsmengen für Formeln über $\mathbb{C}$, Aussagen über $\mathbb{C}$

1. $\varphi(z_1) := (z_1^2 + 1 = 0)$

   $M_\varphi = \{\imath, -\imath\}$

2. $\varphi(z_1) := (z_1^3 + 8e^{\imath\frac{\pi}{4}} = 0)$

$$z_1^3 = -8e^{\imath\frac{\pi}{4}}$$
$$-1 = e^{\imath\pi}$$
$$z_1^3 = 8e^{\imath\pi}e^{\imath\frac{\pi}{4}}$$
$$z_1^3 = 8e^{\imath\frac{5}{4}\pi}$$

   $M_\varphi = \{2e^{\imath\frac{5}{12}\pi}; 2e^{\imath\frac{13}{12}\pi}; 2e^{\imath\frac{7}{4}\pi}\}$

3. $\varphi(z_1) := (z_1 \cdot \overline{z_1} = 4)$

$M_\varphi = \{z_1 \in \mathbb{C} \mid |z_1| = 2\}$

4. $\varphi(z_1, z_2) := (z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2})$

   $M_\varphi = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1| = |z_2|\}$
   $= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid$
   z_1 und z_2 liegen auf dem selben Kreis mit Mittelpunkt $0 \in \mathbb{C}\}$

5. $\exists z_1 \forall z_2 \quad z_1 = z_2^2$ (f) (über $\mathbb{C}$)
6. $\forall z_1 \exists z_2 \quad z_1 = z_2^2$ (w) (über $\mathbb{C}$)
7. $\forall z_1 \exists z_2 \quad z_2 = z_1^2$ (w) (über $\mathbb{C}$)

3.4. Vollständige Induktion

Induktionsaxiom (5. Peano-Axiom)
Für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen gelte:

1. $1 \in M$
2. $n \in M \to n + 1 \in M$

Dann folgt $M = \mathbb{N}$

Bemerkung: Das Induktionsaxiom ist Bestandteil der Definition der natürlichen Zahlen (Peano-Axiome) und beschreibt eine bestimmte Eigenschaft der natürlichen Zahlen.

3.4.1. Vollständige Induktion

Wir betrachten eine (unendliche) Folge von Aussagen $A(n)(n \in \mathbb{N})$ und möchten zeige, dass $A(n)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr ist.

Mittels vollständiger Induktion kann man dies in zwei Schritten zeigen:

1. Induktionsanfang $(n = 1)$
   Zeige, dass $\boxed{A(1) \text{ wahr ist}}$.

2. Induktionsschritt $(n \to n + 1)$
   Unter der Annahme, dass $A(n)$ wahr ist (Induktionsannahme), zeige man, dass auch $A(n + 1)$ wahr ist, d.h. zeige $\boxed{A(n) \to A(n + 1)}$

Mithilfe des Induktionsaxioms der natürlichen Zahlen gilt dann
$M = \{n \in \mathbb{N} \mid A(n) \text{ ist wahr}\} = \mathbb{N}$
d.h. $A(n)$ ist für jedes $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Bemerkung: Modifikation

Aussagen $A(n), n \in \mathbb{Z}, n \geq n_0$

1. Induktionsanfang: $(n = n_0)$
   Zeige, dass $A(n_0)$ wahr ist

2. Induktionsschritt $(n \to n+1)$
   Zeige: $A(n) \to A(n+1)$

Beispiel: Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion:

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $\sum\limits_{\substack{k=0 \\ k \text{ ungerade}}}^{2n-1} k = n^2$

3. #k-elementige Teilmengen einer n-elementige Menge $(k \leq n)$ ist gleich $\binom{n}{k}$

4. Bemoullische Ungleichung
   $(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad (x \in \mathbb{R}, 1 + x \geq 0, n \in \mathbb{N})$

5. Binomischer Lehrsatz
   $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$

zu 1) $A(n) := (\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$

Induktionsanfang: $(n = 0)$
Zeige, dass $A(0)$ wahr ist.

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0$$
$$\frac{n(n+1)}{2} = 0$$

Induktionsschritt: $(n \to n+1)$

Induktionsannahme $A(n)$ ist wahr, d.h. es gelte $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$

zeige $A(n+1)$ ist wahr d.h.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k \stackrel{!}{=} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

zu 2) $A(n) := ((1+x)^n \geq 1 + nx) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

Induktionsanfang: (n=1)

Zeige, dass $A(1)$ wahr ist.

$$(1+x)^1 = 1 + x$$
$$1 + 1x = 1 + x$$

Induktionsschritt: $(n \rightarrow n+1)$
Induktionsannahme: $A(n)$ ist wahr, d.h. $(1+x)^n \geq 1 + nx$
Zeige, dass $A(n+1)$ wahr ist, d.h.

$$(1+x)^{n+1} \overset{!}{\geq} 1+(n+1)x$$

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx}(1+x)$$

$$\underbrace{(1+x)^n}_{\geq 1+nx}(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$$

$$(1+x)^n(1+x) \geq 1+nx+nx^2+x = 1+(n+1)x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+(n+1)x$$

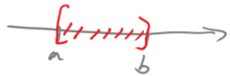
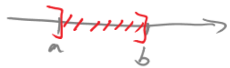
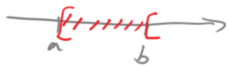
$(1+x)^n \geq 1+nx$ I.A.

$\Rightarrow$ $(1+x)^n(1+x) \geq (1+nx)(1+x)$

$1+x \geq 0$

Abbildung 3.16.

4. Intervalle

abgeschlossene Intervalle	$[a;b]=\{a \leq x \leq b\}$	
halboffene Intervalle	$]a;b]=\{a < x \leq b\}$	
	$[a;b[=\{a \leq x < b\}$	
offene Intervalle	$]a;b[=\{a < x < b\}$	

statt $]a; b]$ schreibt man auch $(a; b]$
statt $[a; b[$ schreibt man auch $[a; b)$
statt $]a; b[$ schreibt man auch $(a; b)$

4.1. Uneigentliche Intervalle

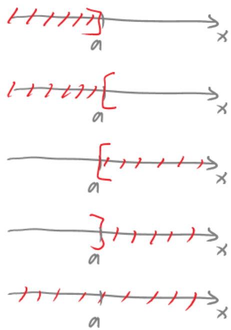
$]-\infty; a]$

$]-\infty; a[$

$[a; \infty[$

$]a; \infty[$

$]-\infty; \infty[$



statt $]-\infty; a]$ schreibt man auch $(-\infty; a]$
statt $]-\infty; a[$ schreibt man auch $(-\infty; a)$

statt $[a;\infty[$ schreibt man auch $[a;\infty)$

statt $]a;\infty[$ schreibt man auch $(a;\infty)$

statt $]-\infty;\infty[$ schreibt man auch $(-\infty;\infty)$

Teil II.

Algebra und Arithmetik

1. Zahlen

1.1. Ganze Zahlen und Teilbarkeit

$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ Menge der ganzen Zahlen

Definition: $t \in \mathbb{Z}$ heißt Teiler von $a \in \mathbb{Z}$ (und a Vielfaches von t), wenn es ein $q \in \mathbb{Z}$ gibt mit $\boxed{a = q \cdot t}$

man schreibt dann $t|a$ («t teilt a» oder «t ist Teiler von a»)

Bemerkung: 1 und $a \in \mathbb{Z}$ sind stets Teiler von a; sie heißen <u>triviale</u> (<u>unechte</u>) Teiler von a; Teiler $t \neq 1, a$ heißen <u>echte</u> Teiler von a.

Division mit Rest: Für beliebige $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, gibt es eindeutige ganze Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit

$\boxed{a = q \cdot b + r}$ und $0 \leq r < |b|$

r heißt <u>Rest</u> der Division von a durch b man schreibt $r = a \mod b$.

In $\mathbb{Q}$ gilt dann: $\boxed{\dfrac{a}{b} = q + \dfrac{r}{b}}$ (echter Bruch $r < |b|$, q: ganzzahliger Anteil)

$$\boxed{q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor}$$

$\lfloor x \rfloor$ = untere Gauß-Klammer von x = größte ganze Zahl $\leq x$

Beispiele: $\lfloor 4{,}6 \rfloor = 4$ $\lfloor -2{,}7 \rfloor = -3$

Beispiele:

1. $a = 14, b = 5$

   $14 = 2 \cdot 5 + 4$ $$\frac{14}{5} = 2 + \frac{4}{5}$$

2. $a = -8, b = 3$

   $-8 = -3 \cdot 3 + 1$ $$\frac{-8}{3} = -3 + \frac{1}{3}$$

Beachte: Für den Rest r muss stets $r \geq 0$ gelten $(0 \leq r < |b|)$

3. $a = 16, b = -7$

   $16 = -2 \cdot (-7) + 2$ $$\frac{16}{-7} = -2 + \frac{2}{-7}$$

4. $a = -18, b = -15$

   $-18 = -2 \cdot (-15) + 12$ $$\frac{-18}{-15} = -2 + \frac{12}{-15}$$

5. $a = 328, b = 14$

$$328 : 14 = 23 \text{ R}6$$
$$-28$$
$$48$$
$$-42$$
$$6$$

$328 = 23 \cdot 14 + 6$

$$\frac{328}{14} = 23 + \frac{6}{14}$$

6. $a = -1024, b = 23$

$$1024 : 23 = 44 \text{ R } 12$$
$$-92$$
$$104$$
$$-92$$
$$12$$

$1024 = 44 \cdot 23 + 12$

$-1024 = -44 \cdot 23 - 12$

$-1024 = -45 \cdot 23 + 11$

$$\frac{-1024}{23} = -45 + \frac{11}{23}$$

Definition: Eine Primzahl ist eine natürliche Zahl $p \geq 2$, die keine echten Teiler besitzt.

Beispiel: Primzahlen

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$

Satz:

Euklid

Es gibt unendlich viele Primzahlen

Theorem:

Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie

Jede ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}, a \neq 0, \pm 1$ kann eindeutig als Produkt von Primzahlen geschrieben werden, d.h.

$a = \epsilon \cdot p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$

mit $\epsilon \in \{\pm 1\}$ und Primzahlen $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ und Exponenten $e_1, \ldots, e_k \in \mathbb{N}$

Beispiele:

1. $12 = 2^2 \cdot 3$

2. $-28 = -2^2 \cdot 7$

3. $-1024 = -2^{10}$

4. $47293129 = 13^2 \cdot 23^4$

Definition:

1. t heißt größter gemeinsamer Teiler von a und b (i.Z. $t = \mathrm{ggT}(a, b)$, gcd), wenn t ein Teiler von a und b, und $t'|t$ für jeden gemeinsamen Teiler t' von a und b gilt.

2. s heißt kleinstes gemeinsames Vielfaches von a und b, (i.Z. $s = \mathrm{kgV}(a, b)$, scm), wenn s ein Vielfaches von a und b ist, und $s|s'$ für jedes gemeinsame Vielfache s' von a und b gilt.

3. ggT und kgV von mehr als zwei Zahlen sind analog definiert und es gilt:
   $\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$
   $\mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_n) = \mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_{n-1}), a_n)$

Bemerkung: ggT und kgV sind bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt, z.B. sind 5 und -5 größte gemeinsame Teiler von 15 und 20;
oftmals bezeichnet man nur $t > 0$ (bzw. $s > 0$) als ggT (bzw. kgV)

Bemerkung: $\mathrm{kgV}(a_1, a_2) = \dfrac{a_1 \cdot a_2}{\mathrm{ggT}(a_1, a_2)}$

Satz:

Seien $a, b \in \mathbb{Z}, a, b \neq 0, \pm 0$; wir schreiben
$a = \epsilon p_1^{e_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{e_n}$ und
$b = \eta p_1^{f_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{f_n}$
mit $e, f \geq 0$ und Primzahlen $p_1 < \ldots < p_n$

Dann gilt:
$\mathrm{ggT}(a, b) = p_1^{\min(e_1, f_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\min(e_n, f_n)}$
$\mathrm{kgV}(a, b) = p_1^{\max(e_1, f_1)} \cdot \ldots \cdot p_n^{\max(e_n, f_n)}$

Beispiele:

1. $a = 12, b = 18$
   $12 = 2^2 \cdot 3$
   $18 = 2 \cdot 3^2$
   $\mathrm{ggT}(12, 18) = 2 \cdot 3 = 6$
   $\mathrm{kgV}(12, 18) = 2^2 \cdot 3^2 = 36$

2. $a = 1400, b = 1452$

$$1400 = 2^3 \cdot 5^2 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^0$$
$$1452 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^2$$
$$\text{ggT}(a,b) = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 \cdot 7^0 \cdot 11^0 = 4$$
$$\text{kgV}(a,b) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11^2 = 508200$$

Definition: $a, b \in \mathbb{Z}, a, b \neq 0$, heißen <u>teilerfremd</u>, wenn $\text{ggT}(a,b) = 1$ gilt, d.h. wenn a und b keine gemeinsamen echten Teiler besitzen.

Beispiel: $a = 2^3 \cdot 5^2 = 200, b = 3^2 \cdot 7 = 63$

1.2. Euklidischer Algorithmus

Der euklidischer Algorithmus ist ein effizientes Verfahren zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers zweier ganzer Zahlen.

Euklidischer Algorithmus zur Berechnung von $\mathrm{ggT}(a, b), a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$.
Man führt fortlaufend Divisionen mit Rest durch, bis zum ersten Mal die Division aufgeht, d.h. der zugehörige Rest Null ist.

$$
\begin{aligned}
a &= q_1 \cdot b + r_1 & 0 &\leq r_1 < |b| \\
b &= q_2 \cdot r_1 + r_2 & 0 &\leq r_2 < r_1 \\
r_1 &= q_3 \cdot r_2 + r_3 & 0 &\leq r_3 < r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= q_n \cdot r_{n-1} + r_n & 0 &\leq r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} &= q_{n+1} \cdot r_n + 0 & 0 &= r_{n+1} < r_n
\end{aligned}
$$

Division geht zum ersten Mal auf, d.h. $r_{n+1} = 0$

Dann gilt: $\boxed{r_n = \mathrm{ggT}(a, b)}$

Bemerkung:

1. Der Algorithmus terminiert (d.h. endet irgendwann) da $|b| > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > r_n \geq 0$ gilt und somit die Folge der Reste $r_1, r_2, r_3, \ldots$ irgendwann Null wird.
2. Wegen $\text{ggT}(a,b) = \text{ggT}(b, r_1) = \text{ggT}(r_1, r_2) = \ldots = \text{ggT}(r_{n-1}, r_n) = \text{ggT}(r_n, 0) = r_n$ ist der Algorithmus korrekt.

Beispiele:

1. $\text{ggT}(56, 41)$

$$\begin{aligned}
56 &= 1 \cdot 41 + 15 \\
41 &= 2 \cdot 15 + 11 \\
15 &= 1 \cdot 11 + 4 \\
11 &= 2 \cdot 4 + 3 \\
4 &= 1 \cdot 3 + 1 \leftarrow \text{ggT}(56, 41) \\
3 &= 3 \cdot 1 + 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{ggT}(56, 41) = 1$, d.h. 56 und 41 sind teilerfremd.

2. $\operatorname{ggT}(9625, 9075)$

$$\begin{aligned} 9625 &= 1 \cdot 9075 + 550 \\ 9075 &= 16 \cdot 550 + 275 \leftarrow \operatorname{ggT} \\ 550 &= 2 \cdot 275 + 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \operatorname{ggT}(9625, 9075) = 275$

Satz:

Lineare Darstellung des ggT

Zu $a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$, gibt es stets ganze Zahlen $p, q \in \mathbb{Z}$ mit

$\boxed{pa + qb = \operatorname{ggT}(a, b)}$

Der sogenannte erweiterte Euklidischer Algorithmus bestimmt neben dem $\operatorname{ggT}(a, b)$ zusätzlich ganze Zahlen $p, a \in \mathbb{Z}$ mit $pa + qb = \mathrm{ggT}(a, b)$.

Man erhält die Koeffizienten p und q durch «Rückwärtseinsetzen» im Divisionsschema des Euklidischen Algorithmus.

Beispiele:

1. $\mathrm{ggT}(56, 41)$

$$\begin{aligned}
56 &= 1 \cdot 41 + 15 & \qquad 1 &= -4 \cdot 41 + 11 \cdot (56 - 1 \cdot 41) = 11 \cdot 56 - 15 \cdot 41 \\
41 &= 2 \cdot 15 + 11 & 1 &= 3 \cdot 15 - 4 \cdot (41 - 2 \cdot 15) = -4 \cdot 41 + 11 \cdot 15 \\
15 &= 1 \cdot 11 + 4 & 1 &= -1 \cdot 11 + 3 \cdot (15 - 1 \cdot 11) = 3 \cdot 15 - 4 \cdot 11 \\
11 &= 2 \cdot 4 + 3 & 1 &= 4 - 1 \cdot (11 - 2 \cdot 4) = -1 \cdot 11 + 3 \cdot 4 \\
4 &= 1 \cdot 3 + 1 & 1 &= 4 - 1 \cdot 3
\end{aligned}$$

2. $\mathrm{ggT}(9625, 9075)$

$$\operatorname{ggT}(9625, 9075)$$

$$9625 = 1 \cdot 9075 + 550 \Rightarrow 275 = 9075 - 16(9625 - 1 \cdot 9075) = -16 \cdot 9625 + 17 \cdot 9075$$

$$9075 = 16 \cdot 550 + \underset{\substack{\uparrow \\ \operatorname{ggT}}}{275} \Rightarrow 275 = 9075 - 16 \cdot 550$$

Abbildung 1.1.

1.3. Modulare Arithmetik, endliche Körper

Wir hatten bereits die Äquivalenzrelation $\sim_n$ $(n \in \mathbb{N})$ auf $\mathbb{Z}$ wie folgt definiert: $(a, b \in \mathbb{Z})$

$$a \sim_n b \leftrightarrow n|(a-b)$$

(d.h. n teilt $a-b$ bzw. $a-b$ ist durch n teilbar)

statt $a \sim_n b$ schreibt man $a \equiv b \mod n$ und spricht «a kongruent b modulo n».

Die Äquivalenzklassen $[a]$ $(a \in \mathbb{Z})$ (wir schreiben auch $\overline{a}$ statt $[a]$) nennt man
Kongruenz- oder Restklassen modulo n;
ein vollständiges Repräsentantensystem ist $[0], [1][2], \ldots, [n-1]$;
dabei besteht die Klasse $[r]$ $(=\overline{r})$ aus allen ganzen Zahlen, die bei Division durch n den Rest r ergeben.

$$
\begin{aligned}
[0] &= \{k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
[1] &= \{1 + k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
[2] &= \{2 + k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\} \\
&\vdots \\
[n-1] &= \{n - 1 + k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\}
\end{aligned}
$$

Für die Restklassen definiert man Addition und Multiplikation wie folgt: (Definition erfolgt repräsentantenweise)

$$[a] + [b] := [a + b] \qquad (\text{bzw. } \overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b})$$
$$[a] \cdot [b] := [a \cdot b] \qquad (\text{bzw. } \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b})$$

Man kann zeigen, dass die Definitionen von der Wahl der Repräsentanten der Klassen nicht abhängen.
($\Rightarrow$ Addition und Multiplikation sind wohldefiniert)

Satz:

Definition:
die Menge $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[0], [1], \ldots, [n-1]\}$ zusammen mit obiger Addition und Multiplikation ist ein sogenannter Ring und heißt Restklassenring modulo n.
Die auf $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ definierte Arithmetik nennt man modulare Arithmetik (anschaulich manchmal auch «Zeigerarithmetik»)

$(\mathbb{Z}, +, \cdot) \stackrel{\wedge}{=}$ Ring

Definition: Eine Menge R zusammen mit zwei Verknüpfungen $+ : R \times R \to R, (a, b) \mapsto a + b, \cdot : R \times R \to R, (a, b) \mapsto a \cdot b$ heißt (kommutativer) Ring (mit Eins), wenn folgendes gilt:

1. $a + b = b + a$
   $a \cdot b = b \cdot a$ Kommutativität

2. $a + (b + c) = (a + b) + c$
   $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ Assoziativität

3. $a(b + c) = ab + ac$ Distributivität

4. Existenz neutraler Elemente

   - additives neutrales Element
     es existiert ein Element $0 \in R$ mit $a + 0 = 0 + a = a$ für alle $a \in R$

- multiplikatives neutrales Element
  es existiert ein Element $1 \in R$ mit $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ für alle $a \in R$

5. Existenz additiver inverser Elemente
   zu jedem $a \in R$ existiert ein additives inverses Element $-a$ mit $a+(-a) = (-a)+a = 0$

   Definiere die Subtraktion durch $a - b := a + (-b)$

6. Existenz multiplikativer inverser Elemente
   zu jedem $a \in R, a \neq 0$ existiert ein multiplikatives inverses Element $a^{-1}(= \frac{1}{a})$ mit $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ heißt R <u>Körper</u>.

Beispiel:

$(\mathbb{N}, +, \cdot)$ ist <u>kein</u> Ring (es fehlen die additiven inversen Elemente)
$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist ein Ring, aber <u>kein</u> Körper (es fehlen die multiplikativen inversen Elemente)
$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ ist ein Körper
$(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper
$(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ist ein Körper

Beispiele:

1. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}\}$

$$\overline{0} + \overline{1} = \overline{0+1} = \overline{1}$$
$$\overline{1} + \overline{1} = \overline{1+1} = \overline{2} = \overline{0}$$

2. $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \dots, \overline{11}\}$

$$\overline{2} + \overline{3} = \overline{2+3} = \overline{5}$$
$$\overline{2} + \overline{11} = \overline{2+11} = \overline{13} = \overline{1}$$
$$\overline{4} + \overline{10} = \overline{4+10} = \overline{14} = \overline{2}$$

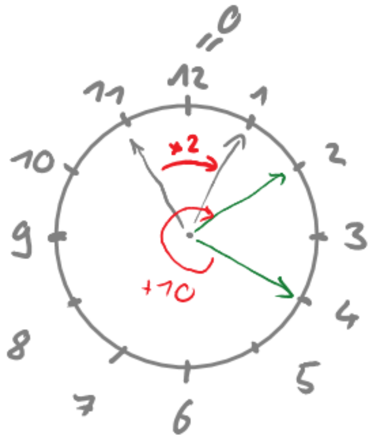


Abbildung 1.2. – «Zeigerarithmetik» Uhr

in $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ gibt es sogenannte <u>Nullteiler</u> (in $\mathbb{Z}$ gibt es diese nicht)

$\overline{3} \cdot \overline{4} = \overline{3 \cdot 4} = \overline{12} = \overline{0}$ ($\overline{3}$ und $\overline{4}$ sind <u>Nullteiler</u>)

$\overline{3} \neq \overline{0}$ und $\overline{4} \neq \overline{0}$, jedoch ist das Produkt $\overline{3} \cdot \overline{4}$ gleich $\overline{0}$ (Vorsicht!)

d.h. aus $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{0}$ folgt i.a. <u>nicht</u> $\overline{a} = 0$ oder $\overline{b} = 0$

Satz: Für jede Primzahl p ist $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper er heißt endlicher Körper (oder Galoiskörper) mit p Elementen und wird mit $\mathbb{F}_p$ (oder $\mathrm{GF}(p)$) bezeichnet.

Bemerkung: allgemein gibt es genau zu jeder Primzahlpotenz p^n genau einen endlichen Körper $\mathrm{GF}(p^n)$ mit p^n Elementen ($\mathrm{GF}(p^n) \neq \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ für $n > 1$)

Bemerkung: In $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{p-1}\}$ gibt es zu $\overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{p-1}$ jeweils ein multiplikatives Inverses; diese erhält man mithilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus.

Satz: Mithilfe des erweiterten Euklidischen Algortihmus findet man zu $\overline{a} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \overline{a} \neq \overline{0}$ ganze Zahlen $s, t \in \mathbb{Z}$ mit
$sa + tp = 1$.
Dann ist $\overline{s}$ das multiplikative Inverse zu $\overline{a}$, d.h. $\overline{s} = \overline{a}^{-1}$

Beweis: Da $\overline{a} \neq \overline{0}$ gilt, ist a durch p nicht teilbar
d.h. die Primzahl p kommt in der Primfaktorisierung von a nicht vor $\Rightarrow \mathrm{ggT}(a, p) = 1$

aus linearer Darstellung des ggT folgt $\qquad sa + tp = 1$
für gewisse $s, t \in \mathbb{Z}$.

Bildet man die Restklassen, so folgt

$$\begin{aligned} \overline{sa + tp} &= \overline{1} \\ \overline{s} \cdot \overline{a} + \underbrace{\overline{t} \cdot \underbrace{\overline{p}}_{\overline{0}}}_{\overline{0}} &= \overline{1} \\ \overline{s} \cdot \overline{a} &= \overline{1} \end{aligned}$$

d.h. $\overline{s} = \overline{a}^{-1}$

Beispiele:

1. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$

$$\overline{1} \cdot \overline{1} = \overline{1 \cdot 1} = \overline{1} \Rightarrow \overline{1}^{-1} = \overline{1}$$
$$\overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{2 \cdot 2} = \overline{4} = \overline{1} \Rightarrow \overline{2}^{-1} = \overline{2}$$

2. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$

$$\overline{1}^{-1} = \overline{1}$$
$$\overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{2 \cdot 3} = \overline{6} = \overline{1} \Rightarrow \overline{2}^{-1} = \overline{3}$$
$$\overline{4} \cdot \overline{4} = \overline{4 \cdot 4} = \overline{16} = \overline{1} \Rightarrow \overline{4}^{-1} = \overline{4}$$

3. $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \dots, \overline{16}\}$
   Bestimme das multiplikative Inverse von $\overline{15}$ (in $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$)

$\mathrm{ggT}(17,15) = 1 \overset{\text{erw. Eukl. Alg.}}{\Longrightarrow} s \cdot 15 + t \cdot 17 = 1; \overline{s} = \overline{15}^{-1}$

$$17 = 1 \cdot 15 + 2 \qquad \Rightarrow 1 = 15 - 7 \cdot (17 - 1 \cdot 15) = -7 \cdot 17 + 8 \cdot 15$$

$$15 = 7 \cdot 2 + 1_{\mathrm{ggT}} \qquad \Rightarrow 1 = 15 - 7 \cdot 2$$

$\Rightarrow 8 \cdot 15 - 7 \cdot 17 = 1$ (lineare Darstellung des ggT) $\overline{8} = \overline{15}^{-1}$ <u>Probe</u>: $\overline{8 \cdot 15} = \overline{120} = \overline{7 \cdot 17 \cdot +1} = \overline{1}$

4. $\mathbb{Z}/1013\mathbb{Z} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{1012}\}$
   Bestimme das multiplikative Inverse von $\overline{1000}$ (in $\mathbb{Z}/1013\mathbb{Z}$)

$$
\begin{aligned}
1013 &= 1\cdot 1000 + 13 & \quad 1 &= -1\cdot 1000 + 77(1013 - 1\cdot 1000) = 77\cdot 1013 - 78\cdot 1000\\
1000 &= 76\cdot 13 + 12 & \quad 1 &= 13 - 1\cdot(1000 - 76\cdot 13) = -1\cdot 1000 + 77\cdot 13\\
13 &= 1\cdot 12 + \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ggT}}}{1} & \quad 1 &= 13 - 1\cdot 12
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \overline{1000}^{-1} &= \overline{-78} = \overline{-78} + \overline{0} = \overline{-78} + \overline{1013}\\
&= \overline{-78+1013} = \overline{935}
\end{aligned}
$$

$\underline{\text{Probe:}}$ $\quad \overline{935}\cdot\overline{1000} = \overline{935000} = \overline{923\cdot 1013+1} = \overline{1}$

Abbildung 1.3.

1.4. Stellenwertsysteme

Stellenwertsystem = Zahlensystem, bei dem Zahlen durch eine Folge von Symbolen (Ziffern) dargestellt werden und die Wertigkeit eines Symbols auch von seiner Position (=Stelle) in der Folge abhängt.

b-adische Zahlensysteme sind spezielle Stellenwertsysteme ($b \in \mathbb{N}, b \geq 2$)

- b Ziffern: $0, 1, 2, \ldots, 9, A, B, C, D, \ldots$ (b-adische Ziffern)
- Wertigkeit der i-ten Ziffer an der j-ten stelle (von rechts nach links gezählt) ist gleich $\boxed{(i-1) \cdot b^{j-1}}$ Wert der reinen Ziffer Gewicht der j-ten Stelle

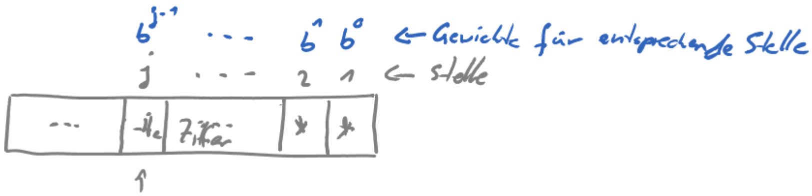


Abbildung 1.4.

Satz:
Sei $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$. Dann besitzt jede ganze Zahl $n \geq 1$ eine eindeutige Darstellung in der Form

$(a_r a_{r-1} \dots a_0)_b$

mit b-adischen Ziffern $a_0, \dots, a_r (a_r \neq 0)$; sie heißt b-adische Darstellung von n. Ihr Wert berechnest sich durch

$\boxed{n = \sum_{i=0}^{r} a_i \cdot b^i}$ $\qquad a_i$: Wert der reinen Ziffer

Beispiel:

1. Dualsystem (2-adisch)
   Ziffern: $0, 1$

$$(1011)_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3$$
$$= 1 + 2 + 8 = \underline{\underline{11}}$$

Abbildung 1.5.

2. Oktalsystem (8-adisch)
   Ziffern: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$

«OCT 31 = DEC 25»(Joke)
Halloween = Weihnachten

$$(31)_8 = 1 \cdot 8^0 + 3 \cdot 8^1$$
$$= 8 + 24 = \underline{\underline{25}}$$

Abbildung 1.6.

3. Dezimalsystem (10-adisch)
   Ziffern: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

$$(328)_{10} = 8 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 = 328$$

Abbildung 1.7.

4. Hexadezimalsystem (16-adisch)
   Ziffern: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F$

$$(1A)_{16} = 10 \cdot 16^0 + 1 \cdot 16^1 = 26$$

$$(A1)_{16} = 1 \cdot 16^0 + 10 \cdot 16^1 = 161$$

$$(FF)_{16} = 255$$

Abbildung 1.8.

1.4.1. Umrechnen Dezimaldarstellung in b-adische Darstellung

Fortlaufende Division durch b (mit Rest) liefert von rechts nach links die Ziffern der b-adischen Darstellung (aus den Resten der Division).

$$
\begin{aligned}
n &= q_1 \cdot b + r_1 && 0 \leq r_1 < b \\
q_1 &= q_2 \cdot b + r_2 && 0 \leq r_2 < b \qquad q_1 \neq 0 \\
q_2 &= q_3 \cdot b + r_3 && 0 \leq r_3 < b \qquad q_2 \neq 0 \\
&\vdots \\
q_{s-2} &= q_{s-1} \cdot b + r_{s-1} && 0 \leq r_{s-1} < b \qquad q_{s-1} \neq 0 \\
q_{s-1} &= q_s \cdot b + r_s && 0 < r_s < b \qquad q_s = 0
\end{aligned}
$$

$n \mathrel{\hat{=}} (r_s \ldots r_1)_b$

Algorithmus terminiert da

$q_1 > q_2 > \ldots > q_{s-1} > q_s = 0$

Beispiele:

1. $287 \to$ 2-adisch

$$\begin{aligned}
287 &= 143 \cdot 2 + 1 \\
143 &= 71 \cdot 2 + 1 \\
71 &= 35 \cdot 2 + 1 \\
35 &= 17 \cdot 2 + 1 \\
17 &= 8 \cdot 2 + 1 \\
8 &= 4 \cdot 2 + 0 \\
4 &= 2 \cdot 2 + 0 \\
2 &= 1 \cdot 2 + 0 \\
1 &= 0 \cdot 2 + 1 \\
\Rightarrow 287 &= (100011111)_2
\end{aligned}$$

Probe: $1+2+4+8+16+256=287$

2. $287 \to$ 8-adisch

$$\begin{aligned} 287 &= 35 \cdot 8 + 7 \\ 35 &= 4 \cdot 8 + 3 \\ 4 &= 0 \cdot 8 + 4 \\ \Rightarrow 287 &= (437)_8 \end{aligned}$$

3. $287 \to$ 16-adisch

$$\begin{aligned} 287 &= 17 \cdot 16 + 15 \\ 17 &= 1 \cdot 16 + 1 \\ 1 &= 0 \cdot 16 + 1 \\ \Rightarrow 287 &= (11F)_{16} \end{aligned}$$

Bemerkung: In der Regel muss man/sollte man bei Umrechnungen von einem Zahlensystem in ein anderes den Weg über das Dezimalsystem wählen.

Ausnahme: 2-adisch $\leftrightarrow$ 16-adisch

Idee: $\underbrace{\square\square\square\square}_{\text{im Dualsystem}} \;\widehat{=}\; \underbrace{\square}_{\text{im Hexadezimalsystem}}$

Zerlege (von rechts beginnend) die Dualzahl in Gruppen von jeweils 4 benachbarten Bits und rechne jeder 4er Gruppe in eine Hexadezimalziffer um.

$$\underbrace{\square\square\square\square}_{\square}\,\underbrace{\square\square\square\square}_{\square}\,\underbrace{\square\square\square\square}_{\square}\,\underbrace{\square\square\square\square}_{\square}\,\text{2-adisch}_{\text{16-adisch}}$$

Erzeuge aus jeder Ziffer aus dem Hexadezimalsystem ein 4-Bit-Muster und füge diese zu einer Dualzahl zusammen. Streiche führende Nullen.

2. Gleichungen und Ungleichungen

2.1. Definitionen

- Term (induktive Definition)

  1. Variablen und Zahlen (=Konstanten) sind Terme (atomare Terme)
  2. Sind T_1 und T_2 Terme, so sind $T_1 + T_2, T_1 - T_2, T_1 \cdot T_2, T_1 : T_2, \dfrac{T_1}{T_2}, (T_1)$ Terme
  3. Sind $T_1, \ldots, T_r$ Terme und ist f ein r-stelliges Funktionszeichen, so ist auch

$f(T_1, \ldots, T_r)$ ein Term

4. Keine weiteren Zeichenketten sind Terme

Beispiel: $5, x_1, x_1 + x_2, \sin(5x_1 + x_2 - x_3), \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Bezeichnung: Sind die Variablen eines Terms T in der Menge $\{x_1, \ldots, x_n\}$ enthalten, so schreiben wir $T(x_1, \ldots, x_n)$

- Äquivalenz zweier Terme

Zwei Terme $T_1(x_1,\ldots,x_n)$ und $T_2(x_1,\ldots,x_n)$ heißen äquivalent über einer Grundmenge $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ (bzw. $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{C}^n$) $T_1(a_1,\ldots,a_n) = T_2(a_1,\ldots,a_n)$ für alle $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{G}$ gilt; i.Z. $T_1(x_1,\ldots,x_n) \underset{\mathbb{G}}{\equiv} T_2(x_1,\ldots,x_n)$ bzw. (unpräziser formuliert) $T_1(x_1,\ldots,x_n) = T_2(x_1,\ldots,x_n)$ (über $\mathbb{G}$)

Beispiele:

1. $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ über $\mathbb{G} = \mathbb{R}$
2. $\dfrac{x^2+x}{2x} = \dfrac{x+1}{2}$ über $\mathbb{G} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \neq 0\}$
3. $\dfrac{x_1^2+x_2}{x_1} = x_1 \cdot x_2$ über $\mathbb{G} = (\mathbb{R}\setminus\{0\})\times\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2 = \{(x_1,x_2) \mid x_1 \neq 0\} = \{x \neq 0\}$
4. $\sqrt{x^2} = |x|$ über $\mathbb{G} = \mathbb{R}_0^+ = \{x \geq 0\}$
5. $e^{2\ln(x)} = x^2$ über $\mathbb{G} = \mathbb{R}^+ = \{x > 0\}$

- Gleichung/Ungleichung

Eine Gleichung (bzw. Ungleichung) in den unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ übe einer Grundmenge $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{C}^n$) ist ein formaler Ausdruck der Form $T_1(x_1, \ldots, x_n) \Box T_2(x_1, \ldots, x_n)$ wobei $T_1(x_1, \ldots, x_n)$ und $T_2(x_1, \ldots, x_n)$ Terme sind und $\Box$ für $=$ (bzw. $\leq, \geq, <, >$) steht.

Eine Lösung obiger Gleichung (bzw. Ungleichung) ist ein n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{G}$, so dass $T_1(a_1, \ldots, a_n) \Box T_2(a_1, \ldots, a_n)$ eine wahre Aussage ist; mit $\mathbb{L} = \{(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{G} \mid (a_1, \ldots, a_n) \text{ ist Lösung}\} \subseteq \mathbb{G}$ bezeichnen wir die Lösungsmenge der Gleichung (bzw. Ungleichung).

Bemerkung: $\mathbb{L}$ hängt wesentlich von der Wahl der Unbestimmten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und der Grundmenge $\mathbb{G}$ ab.

Beispiele:

1. Gleichung $2x_1 = 5$ in x_1 über $\mathbb{G} = \mathbb{Z}$
   $\Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

2. Gleichung $2x_1 = 5$ in x_1 über $\mathbb{G} = \mathbb{Q}$
   $\Rightarrow \mathbb{L} = \{\frac{5}{2}\}$

3. Gleichung $2x_1 = 5$ in x_1, x_2 über $\mathbb{G} = \mathbb{R}^2$
   $\Rightarrow \mathbb{L} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = \frac{5}{2}, x_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$

Definition: Zwei Gleichungen φ_1 und φ_2 in den Unbestimmten $x_1, \dots, x_n$ über einer (gemeinsamen) Grundmenge $\mathbb{G}$ heißen <u>äquivalent</u>, wenn sie übereinstimmende Lösungsmenge besitzen; i.Z. $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$

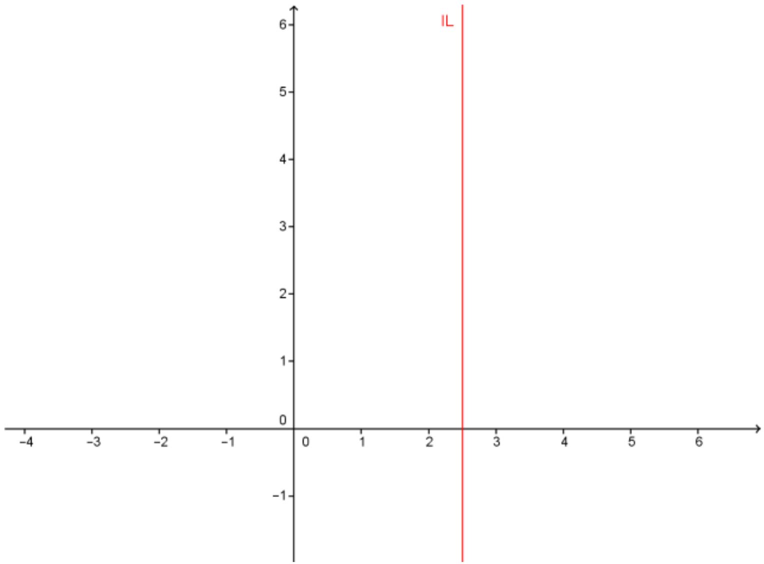


Abbildung 2.1.

- <u>Äquivalenzumformungen</u>

Äquivalenzumformung	Gleichung $T_1 = T_2$	Ungleichung $T_1 \leq T_2$ (analog für $T_1 \geq T_2, T_1 < T_2, T_1 > T_2$)
Vertauschen beider Seiten	$T_1 = T_2$ $\Leftrightarrow T_2 = T_1$	$T_1 \leq T_2$ $\Leftrightarrow T_2 \geq T_1$
Seite(n) durch (über $\mathbb{G}$) äquivalente Terme ersetzen ($T_1' = T_1$ über $\mathbb{G}$ $T_2' = T_2$ über $\mathbb{G}$)	$T_1 = T_2$ $\Leftrightarrow T_1' = T_2'$	$T_1 \leq T_2$ $\Leftrightarrow T_1' \leq T_2'$

Addition bzw. Subtraktion mit einem Term T	$T_1 = T_2 \mid \pm T$ $\Leftrightarrow T_1 \pm T = T_2 \pm T$	$T_1 \leq T_2 \mid \pm T$ $\Leftrightarrow T_1 \pm T \leq T_2 \pm T$	
Multiplikation mit bzw. Division durch eine Zahl $a \neq 0$	$T_1 = T_2 \mid \cdot : a$ $\Leftrightarrow T_1 \cdot a = T_2 \cdot a$ $\Leftrightarrow \dfrac{T_1}{a} = \dfrac{T_2}{a}$	$\boxed{a > 0}$ $T_1 \leq T_2 \mid \cdot : a$ $\Leftrightarrow T_1 \cdot a \leq T_2 \cdot a$ $\Leftrightarrow \dfrac{T_1}{a} \leq \dfrac{T_2}{a}$	$\boxed{a < 0}$ $T_1 \leq T_2 \mid \cdot : a$ $\Leftrightarrow T_1 \cdot a \geq T_2 \cdot a$ $\Leftrightarrow \dfrac{T_1}{a} \geq \dfrac{T_2}{a}$

- Umformungen, die i.a. keine Äquivalenzumformungen sind

1. Multiplikation mit bzw. Division durch einen Term
   Da eine Division durch T einer Multiplikation mit $\frac{1}{T}$ entspricht, betrachten wir im folgenden nur die Multiplikation mit einem Term T.

   Uneingeschränkter Gebrauch der Multiplikation mit einem Term kann zu Widersprüchen führen, wie z.B. $x-1=0 \mid \cdot \frac{x-2}{x-1} (=T) \Leftrightarrow x-2=0 \Rightarrow$ Vorsicht!!!

   Gleichung $\quad T_1 = T_2 \quad$ über $\mathbb{G}$
   will man die Gleichung mit einem Term T multiplizieren, so ist dies nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn T auf $\mathbb{G}$ definiert (d.h. $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{D}_T =$ Definitionsmenge von T) und $T \neq 0$ auf $\mathbb{G}$ gilt.
   Ansonsten sind Fallunterscheidungen nötig, bei der die Grundmenge $\mathbb{G}$ unterschiedlich eingeschränkt wird.

   $T_1 = T_2$ (über $\mathbb{G}$) (mit T multipliziert)

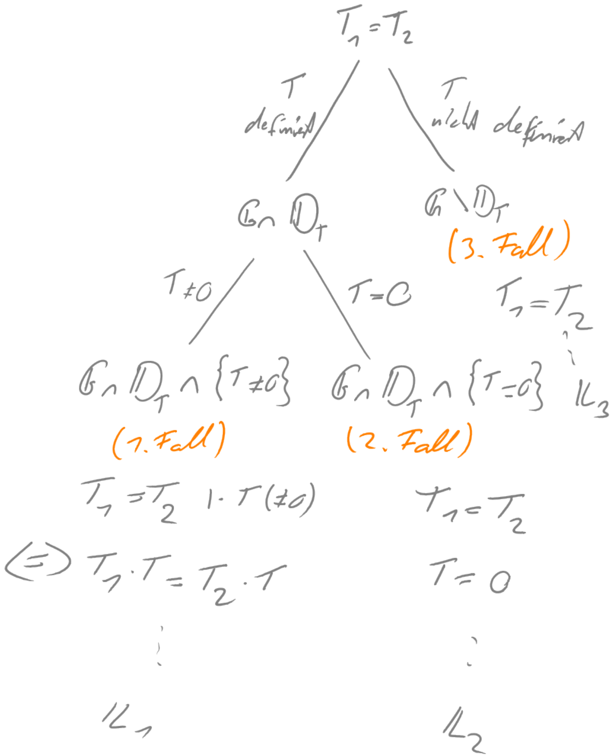


Abbildung 2.2.

Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ gilt:

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3$

Beispiele:

a) $x^2 = 3x$ über $\mathbb{G} = \mathbb{R}$
mit $T = \dfrac{1}{x}$ multiplizieren; $\mathbb{D}_T = \{x \neq 0\}$

<u>1.Fall:</u> $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G} \cap \mathbb{D}_T \cap \{T \neq 0\}$
$= \mathbb{R} \cap \{x \neq 0\} \cap \mathbb{R}$
$= \{x \neq 0\}$

$$x^2 = 3x \mid \cdot \frac{1}{x} \quad (\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow x = 3 \in \mathbb{G}_1$$
$$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{3\}$$

$$\underline{\text{2.Fall:}}\ \mathbb{G}_2 = \mathbb{G} \cap \mathbb{D}_T \cap \{T = 0\}$$
$$= \mathbb{R} \cap \{x \neq 0\} \cap \emptyset$$
$$= \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \emptyset$$

$$\underline{\text{3.Fall:}}\ \mathbb{G}_3 = \mathbb{G} \setminus \mathbb{D}_T$$
$$= \mathbb{R} \setminus \{x \neq 0\}$$
$$= \{x = 0\}$$

$$x^2 = 3x$$

$x = 0$ in obige Gleichung eingesetzt $\Rightarrow 0 = 0$

$\Rightarrow$ jedes Element aus $\mathbb{G}_3$ ist Lösung

$$\Rightarrow \mathbb{L}_3 = \{0\}$$

insgesamt:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \mathbb{L} &= \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 \\ &= \{0; 3\}\end{aligned}$$

Bemerkung: Versuche Multiplikation mit bzw. Division durch einen Term zu vermeiden, z.B.

$$\begin{aligned} x^2 &= 3x \\ \Leftrightarrow x^2 - 3x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 0 \vee x - 3 = 0 \\ \mathbb{L} &= \{0; 3\}\end{aligned}$$

b) $x - 1 = 0$ über $\mathbb{G} = \mathbb{R}$
Wir wollen unbedingt die Gleichung mit $\dfrac{x-2}{x-1}$ multiplizieren

($x-1=0 \mid \dfrac{x-2}{x-1} \Leftrightarrow x-2=0$, uneingeschränkter Gebrauch $\rightarrow$ Widersprüche)

$T = \dfrac{x-2}{x-1} \qquad \mathbb{D}_T = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \{x \neq 1\}$

<u>1.Fall:</u> $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G} \cap \mathbb{D}_T \cap \{T \neq 0\}$

$$= \mathbb{R} \cap \{x \neq 1\} \cap \{x \neq 2\}$$
$$= \{x \neq 1, x \neq 2\}$$

$$x-1=0 \mid \cdot \frac{x-2}{x-1} \quad (\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow x-2=0$$
$$\Leftrightarrow x=2 \notin \mathbb{G}_1$$
$$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \emptyset$$

<u>2.Fall:</u> $\mathbb{G}_2 = \mathbb{G} \cap \mathbb{D}_T \cap \{T = 0\}$

$$= \mathbb{R} \cap \{x \neq 1\} \cap \{x = 2\}$$

$$= \{x = 2\}$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 2 \qquad !!!$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \emptyset$$

<u>3.Fall:</u> $\mathbb{G}_3 = \mathbb{G} \setminus \mathbb{D}_T$

$$= \mathbb{R} \setminus \{x \neq 1\}$$

$$= \{x = 1\}$$

$$x - 1 = 0$$

$x = 1$ in obige Gleichung eingesetzt $\Rightarrow 0 = 0$

$\Rightarrow$ jedes Element aus $\mathbb{G}_3$ ist Lösung

$$\Rightarrow \mathbb{L}_3 = \{1\}$$

insgesamt:

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{L} &= \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 \\
&= \{1\}
\end{aligned}
$$

<u>Ungleichung</u> $T_1 \leq T_2$ über $\mathbb{G}$

will man die Ungleichung mit einem Term T multiplizieren, so ist dies nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn T auf $\mathbb{G}$ definiert (d.h. $\mathbb{G} \subseteq \mathbb{D}_T$ = Definitionsmenge von T) und $T \neq 0$ auf $\mathbb{G}$ gilt.
Ansonsten sind Fallunterscheidungen nötig, bei der die Grundmenge $\mathbb{G}$ unterschiedlich eingeschränkt wird.

$T_1 \leq T_2$ (über $\mathbb{G}$) (mit T multipliziert)

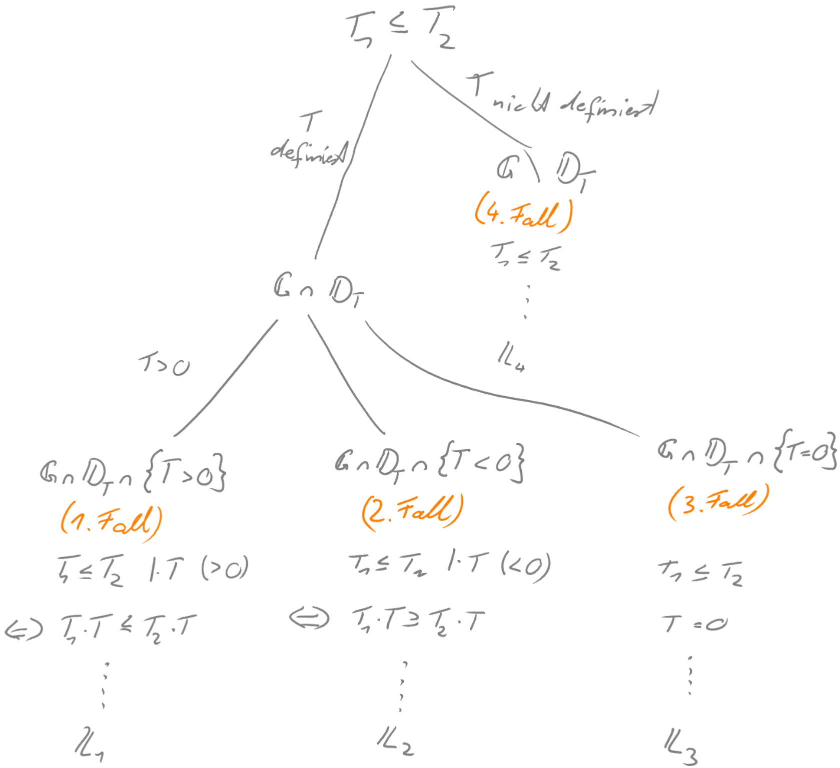


Abbildung 2.3.

Für die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ gilt:

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 \cup \mathbb{L}_4$

Beispiele:

a) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \geq 0$ über $\mathbb{G} = \mathbb{R} \setminus \{1\} = \{x \neq 1\}$
mit $T = x - 1$ multiplizieren; $\mathbb{D}_T = \mathbb{R}$

<u>1.Fall:</u> $\mathbb{G}_1 = \mathbb{G} \cap \mathbb{D}_T \cap \{T > 0\}$

$$= \{x \neq 1\} \cap \mathbb{R} \cap \{x > 1\}$$

$$= \{x > 1\}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \geq 0 \mid \cdot (x-1) \quad (> 0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

Nullstelle von $x^2 - 3x + 2$

$$x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 2}}{2}$$

$$= \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{x \geq 2\}$$

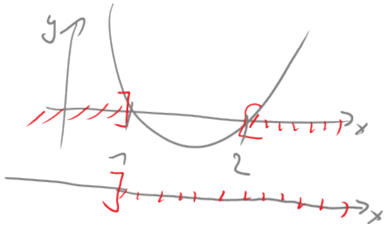


Abbildung 2.4.

$$\underline{\text{2.Fall:}}\ \mathbb{G}_1 = \mathbb{G} \cap \mathbb{D}_T \cap \{T < 0\}$$
$$= \{x \neq 1\} \cap \mathbb{R} \cap \{x < 1\}$$
$$= \{x < 1\}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \geq 0 \mid \cdot (x-1) \quad (< 0)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

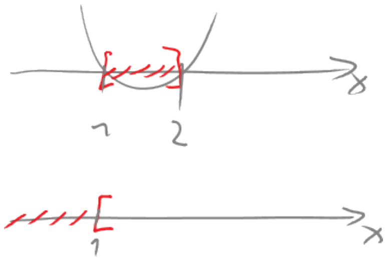


Abbildung 2.5.

$$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \emptyset$$

<u>3.Fall:</u> $\mathbb{G}_3 = \mathbb{G} \cap \mathbb{D}_T \cap \{T = 0\}$
$$= \{x \neq 1\} \cap \mathbb{R} \cap \{x = 1\}$$
$$= \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_3 = \emptyset$$

<u>4.Fall:</u> $\mathbb{G}_4 = \mathbb{G} \setminus \mathbb{D}_T$

$$= \{x \neq 1\} \setminus \mathbb{R}$$
$$= \emptyset$$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_4 = \emptyset$$

<u>insgesamt:</u>

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 \cup \mathbb{L}_4$$
$$= \{x \geq 2\}$$

Bemerkung:

$$
\begin{aligned}
x2 - 3x + 2 &= (x-1)(x-2) \\
\frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} &\geq 0 \qquad (x \neq 1) \\
\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-2)}{1 \cdot (x-1)} &\geq 0 \\
\Leftrightarrow x - 2 &\geq 0 \\
\Leftrightarrow x &\geq 2
\end{aligned}
$$

2. <u>Anwenden einer Funktion $f(x)$ auf beiden Seiten</u> der Gleichung/Ungleichung

   $\boxed{\text{Gleichung}}$ $T_1 = T_2$ über $\mathbb{G}$

   Will man auf beiden Seiten der Gleichung eine Funktion anwenden $f(x)$, so ist dies nur dann eine Äquivalenzumformung, wenn $f(x)$ auf $T_1(\mathbb{G}) \cup T_2(\mathbb{G})$ (d.h. auf der linken und rechten Seite) definiert und injektiv (z.B. streng monoton steigend/fallend) ist.

$T(\mathbb{G}) = \{T(a_1, \ldots, a_n) \mid (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{G}\}$ Bildmenge von T

Ist $f(x)$ auf $T_1(\mathbb{G}) \cup T_2(\mathbb{G})$ definiert, aber nicht injektiv, so muss am Ende der Rechnung eine <u>Probe</u> durchgeführt werden.

$$T_1 = T_2 \mid f(\ldots)$$
$$\Rightarrow f(T_1) = f(T_2) \ldots \Rightarrow \mathbb{L} + \text{Probe!}$$

Pfeil nur in eine Richtung da keine Äquivalenzumformung

Beispiel: $\sqrt{x}, \ln x, e^x$ sind streng monoton steigend

Beachte: $\sqrt{x}$ ist nur für $x \geq 0$ und $\ln x$ ist nur für $x > 0$ definiert. x^2 ist für $x \geq 0$ streng monoton steigend und für $x \leq 0$ streng monoton fallend.

$\boxed{\text{Ungleichung}}$ $T_1 \leq T_2$ über $\mathbb{G}$ (bzw. $T_1 < T_2$ über $\mathbb{G}$)

Ist $f(x)$ auf $T_1(\mathbb{G}) \cup T_2(\mathbb{G})$ definiert und

- streng monoton steigend, so rechne wie folgt

$$\begin{aligned} T_1 &\leq T_2 \mid f(\ldots) \\ \Leftrightarrow f(T_1) &\leq f(T_2) \end{aligned}$$

  bzw.

$$\begin{aligned} T_1 &< T_2 \mid f(\ldots) \\ \Leftrightarrow f(T_1) &< f(T_2) \end{aligned}$$

- streng monoton fallend, so rechne wie folgt

$$
\begin{aligned}
T_1 \leq T_2 &\mid f(\ldots) \\
\Leftrightarrow f(T_1) \geq f(T_2)
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
T_1 < T_2 &\mid f(\ldots) \\
\Leftrightarrow f(T_1) > f(T_2)
\end{aligned}
$$

Beispiel: $\underbrace{x^2}_{\geq 0} > \underbrace{4}_{\geq 0}$

$\sqrt{x}$ ist auf $x \geq 0$ definiert und streng monoton steigend

$$x^2 > 4 \mid \sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{x^2}}_{|x|} > \sqrt{4}$$
$$\Leftrightarrow |x| > 2$$
$$\Leftrightarrow x > 2 \vee x < -2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sqrt{x^2} = |x| \\ \sqrt{x}^2 = x \end{array}}$$

$|x| =$ Abstand zur 0 auf dem Zahlenstrahl

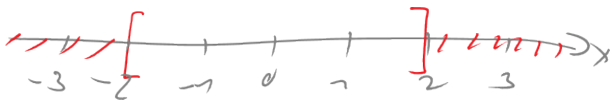


Abbildung 2.6.

2.2. Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Allgemeine Form:

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ $\boxed{\text{Gleichung}}$

$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b$ $\boxed{\text{Ungleichung}}$ (bzw. $\geq, <, >$)

(mindestens ein $a_i \neq 0$)

Ist $a_i \neq 0$, so kann die Gleichung/Ungleichung nach x_i umgestellt werden. $\Rightarrow$ explizite Form

$x_i = \frac{1}{a_i}(-a_1x_1 - \ldots - a_{i-1}x_{i-1} - a_{i+1}x_{i+1} - \ldots - a_nx_n + b)$ $(*)$

bei Ungleichungen müssen die Fälle $a_i > 0$ und $a_i < 0$ unterschieden werden.

In $(*)$ kann man $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ als <u>freie Parameter</u> auffassen $\Rightarrow$ ∞-viele Lösungen

$\mathbb{L}$ ist eine sogenannte $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^n$.

A) Lineare Gleichung/Ungleichung in einer Unbestimmten

$\boxed{\text{Gleichung}}$ $a_1x_1 = b$ in der Unbestimmten x_1 über $\mathbb{G} = \mathbb{R}$
$(a_1 \neq 0)$

$$a_1x_1 = b \mid : a_1$$
$$x_1 = \frac{b}{a_1}$$
$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\frac{b}{a_1}\}$$

Abbildung 2.7. – Punkt auf der Zahlengeraden

$\boxed{\text{Ungleichung}}$ $a_1 x_1 \leq b$ in der Unbestimmten x_1 über $\mathbb{G} = \mathbb{R}$
$(a_1 \neq 0)$

$\boxed{a_1 > 0}$

$$a_1 x_1 \leq b \,|: a_1 \quad (> 0)$$
$$x_1 \leq \frac{b}{a_1}$$
$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left]-\infty; \frac{b}{a_1}\right]$$

Abbildung 2.8.

$\boxed{a_1 < 0}$

$$
\begin{aligned}
a_1 x_1 \leq b \,|: a_1 \quad (< 0) \\
x_1 \geq \frac{b}{a_1} \\
\Rightarrow \mathbb{L} = \left[\frac{b}{a_1}; \infty\right[
\end{aligned}
$$

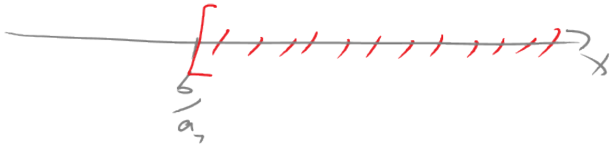


Abbildung 2.9.

B) Lineare Gleichungen und Ungleichungen in zwei Unbestimmten

$\boxed{\text{Gleichung}}$ $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ über $\mathbb{G} = \mathbb{R}^2$
$(a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0)$

$\boxed{a_2 = 0}$ Dann ist $a_1 \neq 0$

$$\begin{aligned} & a_1x_1 = b \;|: a_1 \text{ (in den Unbestimmten } x_1, x_2) \\ \Leftrightarrow\ & x_1 = \frac{b}{a_1} \\ \Rightarrow\ & \mathbb{L} = \{(x_1; x_2) \mid x_1 = \frac{b}{a_1}, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ & \quad = \{(\frac{b}{a_1}; x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

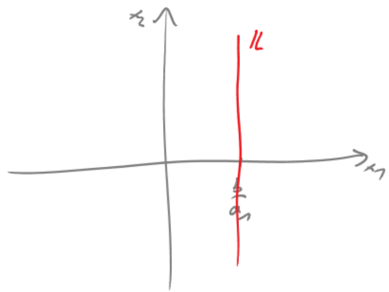


Abbildung 2.10. – Parallele zur x_2-Achse

$\boxed{a_2 \neq 0}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b \mid -a_1x_1 \qquad \text{(implizite Form)}$$

$$\Leftrightarrow a_2x_2 = b - a_1x_1 \mid : a_2 \quad (\neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x_2}_{\substack{\text{von } x_1 \\ \text{abhängig}}} = -\frac{a_1}{a_2}\underbrace{x_1}_{\substack{\text{frei} \\ \text{wählbar}}} + \frac{b}{a_2} \qquad \text{(explizite Form)}$$

$y = mx + t$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(x_1; x_2) \mid x_2 = -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}, x_1 \in \mathbb{R}\}$$

Wiederholung der Geradengleichungen

⋮

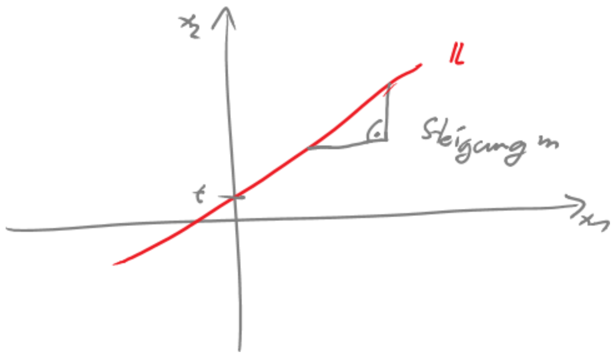


Abbildung 2.11. – Gerade mit Steigung $m = -\dfrac{a_1}{a_2}$ und x_2-Abschnitt $t = \dfrac{b}{a_2}$

$\boxed{\text{Ungleichung}}$ $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ über $\mathbb{G} = \mathbb{R}^2$

$\boxed{a_2 = 0}$ Dann ist $a_1 \neq 0$

$\boxed{a_1 > 0}$

$$
\begin{aligned}
& a_1x_1 \leq b \,|: a_1 \quad (> 0) \\
\Leftrightarrow\ & x_1 \leq \frac{b}{a_1} \\
& \Rightarrow \mathbb{L} = \{(x_1; x_2) \mid x_1 \leq \frac{b}{a_1}, x_2 \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

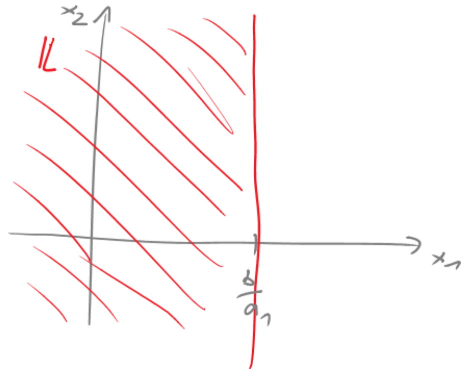


Abbildung 2.12. – $\mathbb{L}$ ist eine sogenannte Halbebene

$\boxed{a_1 < 0}$

$$
\begin{aligned}
& a_1 x_1 \leq b \,|: a_1 \quad (> 0) \\
\Leftrightarrow\ & x_1 \geq \frac{b}{a_1} \\
\Rightarrow\ & \mathbb{L} = \{(x_1; x_2) \mid x_1 \geq \frac{b}{a_1}, x_2 \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

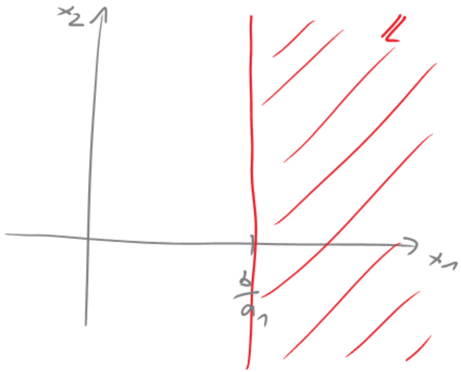


Abbildung 2.13. – $\mathbb{L}$ ist eine sogenannte Halbebene

$\boxed{a_2 \neq 0}$

$\boxed{a_2 > 0}$

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \mid -a_1x_1 \\ \Leftrightarrow a_2x_2 \leq b - a_1x_1 \mid : a_2 \quad (> 0) \\ \Leftrightarrow x_2 \leq -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2} \\ \Rightarrow \mathbb{L} = \{(x_1; x_2) \mid x_2 \leq -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}, x_1 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

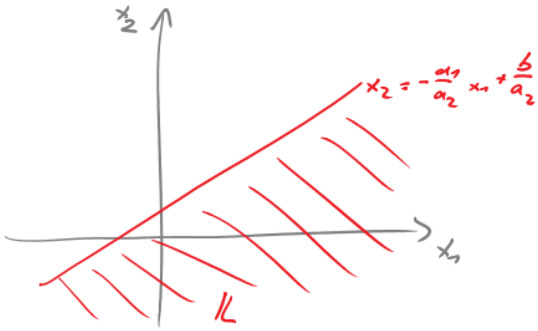


Abbildung 2.14. – untere Halbebene mit Rand

$\boxed{a_2 < 0}$

$$
\begin{aligned}
a_1x_1 + a_2x_2 \leq b \mid -a_1x_1 \\
\Leftrightarrow a_2x_2 \leq b - a_1x_1 \mid : a_2 \quad (< 0) \\
\Leftrightarrow x_2 \geq -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2} \\
\Rightarrow \mathbb{L} = \{(x_1; x_2) \mid x_2 \geq -\frac{a_1}{a_2}x_1 + \frac{b}{a_2}, x_1 \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}
$$

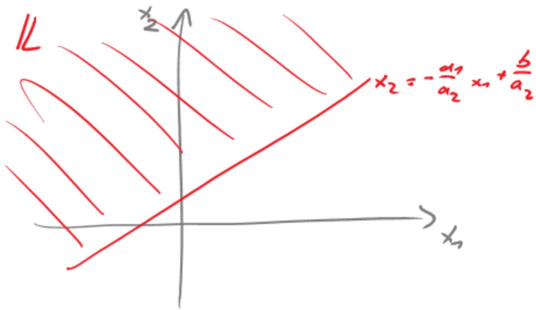


Abbildung 2.15. – obere Halbebene mit Rand

Bemerkung: Ungleichungssysteme

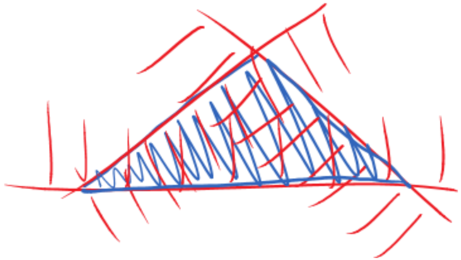


Abbildung 2.16.

C) Lineare Gleichungen und Ungleichungen in drei Unbestimmten

$\boxed{\text{Gleichung}}$ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ über $\mathbb{G} = \mathbb{R}^3$
$(a_1 \neq 0 \vee a_2 \neq 0 \vee a_3 \neq 0)$

$\boxed{a_3 = 0}$

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b$$
$$\Rightarrow \mathbb{L} = \{(x_1; x_2; x_3) \mid a_1x_1 + a_2x_2 = b, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

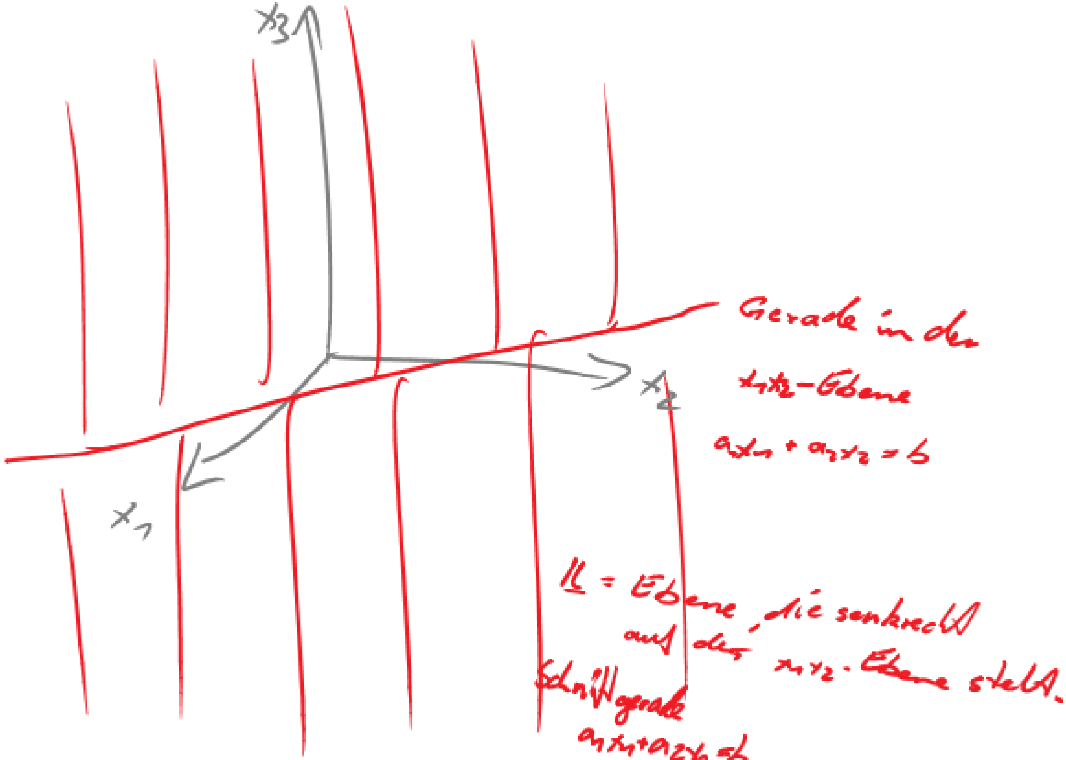


Abbildung 2.17.

$\boxed{a_3 \neq 0}$

$$
\begin{aligned}
a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \mid -a_1x_1 - a_2x_2 \\
\Leftrightarrow a_3x_3 = b - a_1x_1 - a_2x_2 \mid : a_3 \quad (\neq 0) \\
\Leftrightarrow \underbrace{x_3}_{\text{abhängig}} = -\frac{a_1}{a_3}\underbrace{x_1}_{\substack{\text{frei} \\ \text{wählbar}}} - \frac{a_2}{a_3}\underbrace{x_2}_{\substack{\text{frei} \\ \text{wählbar}}} + \frac{b}{a_3} \qquad \text{(explizite Form)} \\
\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{(x_1; x_2; x_3) \mid x_3 = -\frac{a_1}{a_3}x_1 - \frac{a_2}{a_3}x_2 + \frac{b}{a_3}, x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}\right\}
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{Ungleichung}}$ $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \leq b$ über $\mathbb{G} = \mathbb{R}^3$

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ ist ein sogenannter Halbraum der von der Ebene $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 = b$ (halbseitig) begrenzt wird.

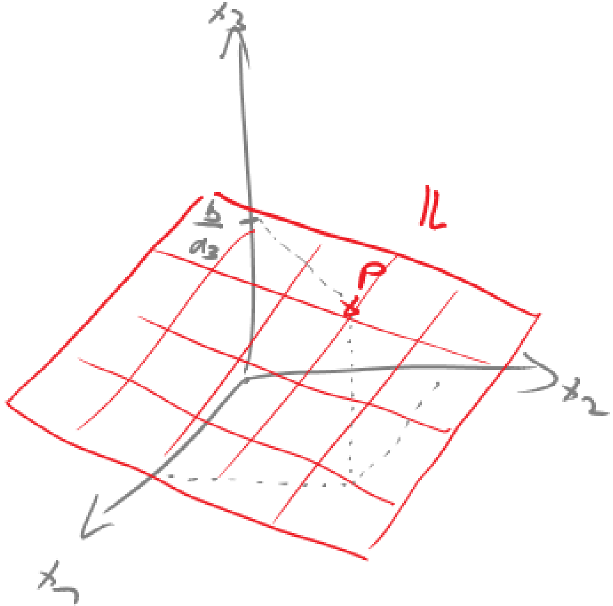


Abbildung 2.18.

2.3. Algebraische Gleichungen und Ungleichungen

2.3.1. Eine Unbestimmte x

Definition: Eine algebraische Gleichung/Ungleichung in der Unbestimmten x ist eine Gleichung/Ungleichung der Form
$\boxed{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0}$ (bzw. $\geq, \leq, >, <$)
mit $a_n \neq 0, a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$).

n heißt Grad der algebraischen Gleichung/Ungleichung; der Term
$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
($a_n \neq 0$) heißt Polynom vom Grad n in der Unbestimmten x.

$a_0, \ldots, a_n$ heißen Koeffizienten des Polynoms; $a_n x^n$ Leitform und a_0 konstanter Term.

Algebraische Gleichungen/Ungleichungen (bzw. Polynome) vom Grad $n = 1, 2, 3, \ldots$ heißen lineare, quadratische, kubische, $\ldots$ Gleichungen/Ungleichungen (bzw. Polynome).

Quadratische Gleichung/Ungleichung

A) Quadratische Gleichung

$a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \qquad (a_2 \neq 0)$

$(ax^2 + bx + c = 0)$

Lösungsformel (für $ax^2 + bx + c = 0$)

$$\boxed{x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

$\boxed{D = b^2 - 4ac}$ heißt <u>Diskriminante</u>

$D > 0:$ Zwei verschiedene (einfache) reelle Lösungen
$x_1 \neq x_2, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

$D = 0:$ Eine (zweifache) reelle Lösungen
$x_1 = x_2 \in \mathbb{R}$

$D < 0:$ Keine reelle Lösungen, aber zwei (einfache) konjugierte-komplexe-Lösungen
$$x_{1/2} = z_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{|D|}}{2a}$$

Geometrische Interpretation

Die Lösungen der quadratischen Gleichung sind bei den Nullstellen der Parabel $y = ax^2 + bx + c$; a heißt Öffnungsfaktor der Parabel.

$S(x_s, y_s)$ heißt Scheitel der Parabel.

Es gibt $x_s = -\dfrac{b}{2a}$
$y_s = P(x_s)$ mit $P(x) = ax^2 + bx + c$

Normalform: $\boxed{P(x) = ax^2 + bx + c}$

Scheitelform: $\boxed{P(x) = a(x - x_s)^2 + y_s}$ $S(x_s, y_s)$ Scheitel

Linearfaktorform: $\boxed{P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)}$

mit $x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

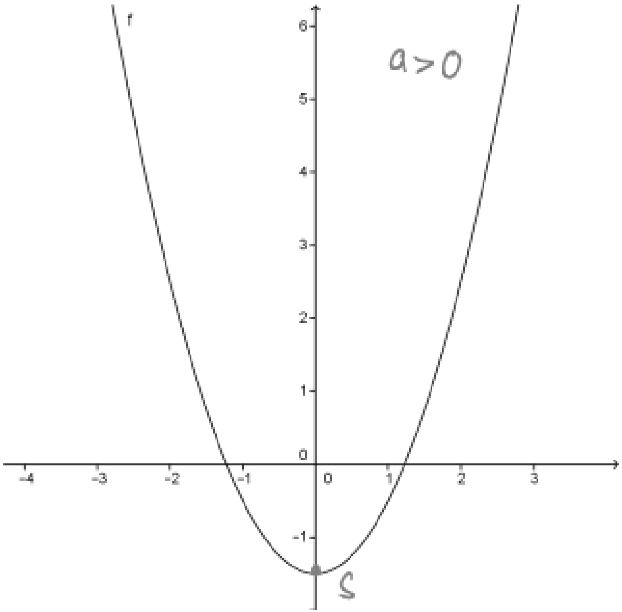


Abbildung 2.19.

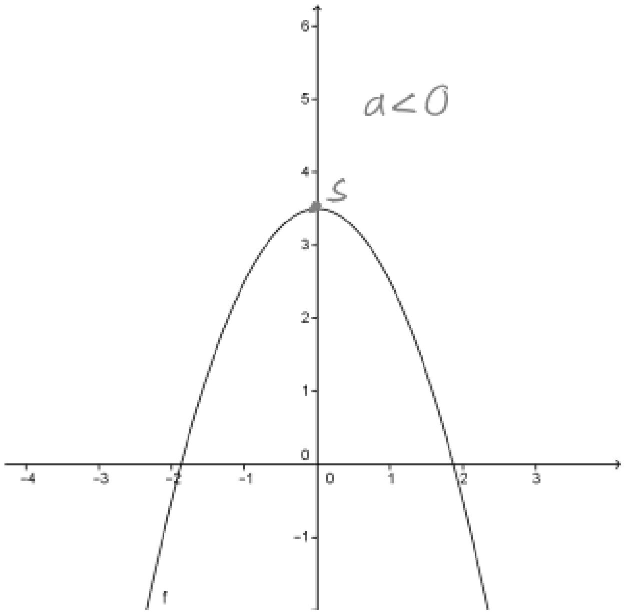


Abbildung 2.20.

B) Quadratische Ungleichung

$ax^2 + bx + c \leq 0 \quad (a \neq 0)$

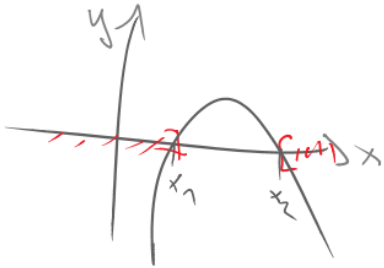


Abbildung 2.21. – $D > 0, \quad a < 0$

$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq x_1 \vee x \geq x_2\}$

$=]-\infty; x_1] \cup [x_2; \infty[$

2. Methode: Faktorisieren und Vorzeichentabelle (VZT)

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
mit $x_{1/2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ (falls $D \geq 0$)

$\boxed{\text{Für } D < 0}$ ist $ax^2 + bx + c$ (über $\mathbb{R}$) unzerlegbar und hat für alle $x \in \mathbb{R}$ ein konstantes Vorzeichen (= Vorzeichen von c)

$\boxed{\text{Für } D = 0}$: $x_1 = x_2$

$$ax^2 + bx + c = a\underbrace{(x - x_1)^2}_{\geq 0}$$

VZT:

Faktoren	$-\infty < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < \infty$
a	VZ	VZ	VZ
$(x - x_1)^2$	$+$	0	$+$
$f(x)$	VZ	0	VZ

$\boxed{\text{Für } D > 0}$: $x_1 < x_2$

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

VZT:

Faktoren	$-\infty < x < x_1$	$x = x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x = x_2$	$x_2 < x < \infty$
a	VZ	VZ	VZ	VZ	VZ
$x - x_1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - x_2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	VZ	0	VZ	0	VZ

Beispiele:

1. $-2x^2 + 4x - 2 \geq 0$

   $D = 16 - 4(-2)(-2) = 0$

   $$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{-4} = 1$$

   $\Rightarrow -2x^2 + 4x - 2 = -2(x-1)^2$

   VZT:

Faktoren	$-\infty < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < \infty$
-2	$-$	$-$	$-$
$(x-1)^2$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-$	$\underbrace{0}_{\geq 0}$	$-$

   $\Rightarrow \mathbb{L} = \{1\}$

2. $-3x^2 + 6x - 2 \leq 0$

$D = 36 - 4(-3)(-2) = 12 > 0$

$\Rightarrow x_1 < x_2$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{-6} = \frac{-6 \pm 2\sqrt{3}}{-6} = 1 \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{3}$$

$\Rightarrow f(x) = -3(x - 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3})(x - 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3})$

VZT:

Faktoren	$-\infty < x < 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$	$x = 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$	$1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} < x < 1+\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$x = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$	$1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} < x < \infty$
a	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x - 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\underbrace{-}_{\leq 0}$	$\underbrace{0}_{\leq 0}$	$+$	$\underbrace{0}_{\leq 0}$	$\underbrace{-}_{\leq 0}$

$\Rightarrow \mathbb{L} =]-\infty; 1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}] \cup [1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}; \infty[$

Abbildung 2.22.

3. $-x^2 + x - 1 > 0$

$D = 1 - 4(-1)(-1) = -3 < 0$

$\Rightarrow -x^2 + x - 1$ (über $\mathbb{R}$) unzerlegbar

$\Rightarrow$ konstantes VZ
$x = 0$ eingesetzt $\Rightarrow -x^2 + x - 1 < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

3. Methode: Quadratische Ergänzung und nach x umstellen (direkte Methode)

Beispiel: $-3x^2 + 6x - 2 \leq 0$

Quadratische Ergänzung

$$\begin{aligned}
-3x^2 + 6x &= -3(x^2 - 2x + 1^2 - 1^2) \\
a^2 - 2ab + b^2 &= (a-b)^2 \\
&= -3((x-1)^2 - 1) \\
&= -3(x-1)^2 + 3 \\
\Rightarrow -3x^2 + 6x - 2 &= -3(x-1)^2 + 3 - 2 \\
&= -3(x-1)^2 + 1
\end{aligned}$$

$$-3x^2 + 6x - 2 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow -3(x-1)^2 + 1 \leq 0 \mid -1$$
$$-3(x-1)^2 \leq -1 \mid : (-3)$$
$$\underbrace{(x-1)^2}_{\geq 0} \leq \underbrace{\frac{1}{3}}_{\geq 0} \mid \sqrt{}$$
$$\underbrace{|x-1|}_{\text{Abstand zwischen } x \text{ und } 1} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\underbrace{x^2}_{\geq 0} = \underbrace{4}_{\geq 0} \mid \sqrt{}$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$$
$$|x| = 2$$
$$x = \pm 2$$

Allgemein:

$|x-a| =$ Abstand von x und a

$$\Rightarrow \mathbb{L} =]-\infty; 1 - \tfrac{1}{3}\sqrt{3}] \cup [1 + \tfrac{1}{3}\sqrt{3}; \infty[$$

Bemerkung:

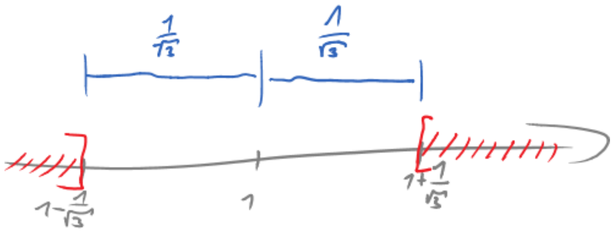


Abbildung 2.23.

a) $|x-a| \leq r \qquad (\Leftrightarrow a-r \leq x \leq a+r)$

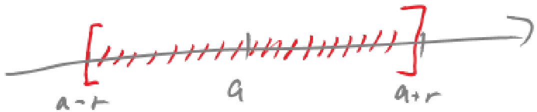


Abbildung 2.24.

b) $|x-a| \geq r \qquad (\Leftrightarrow x \leq a-r \quad \vee \quad x \geq a+r)$

Abbildung 2.25.

Gleichung/Ungleichung höheren Grades $(n \geq 3)$

A) Gleichung vom Grad n

$$\underbrace{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}_{P(x) \quad \text{Polynom vom Grad } n} = 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

Bemerkung: Für $n \geq 5$ gibt es (prinzipiell) keine Lösungsformeln ($\Rightarrow$ numerische Verfahren)

Spezialfall: Nullstelle $x = x_0$ sei bekannt

$\Rightarrow$ Polynomdivision $\underbrace{P(x)}_{\substack{\text{Polynom}\\ \text{vom}\\ \text{Grad } n}} : (x - x_0) = \underbrace{Q(x)}_{\substack{\text{Polynom}\\ \text{vom}\\ \text{Grad}\\ n-1}}$ (mit Rest $= 0$)

$\Rightarrow$ Faktorisierung $P(x) = (x - x_0) \cdot Q(x) \mathrel{\hat{=}}$ «Linearfaktor $(x - x_0)$ abspalten»

Gilt wiederum $Q(x_0) = 0$, so kann mittels Polynomdivision wieder der Linearfaktor $(x - x_0)$ abgespalten werden.

$\boxed{Q(x) = (x - x_0) \cdot Q_2(x)}$

$\Rightarrow \boxed{P(x) = (x - x_0)^2 \cdot Q_2(x)}$

Verfahren kann solange fortgesetzt werden, bis $\boxed{P(x) = (x - x_0)^m \cdot Q_m(x)}$ mit $Q_m(x_0) \neq 0$ gilt.

Der Exponent m heißt <u>Vielfachheit</u> der Nullstelle x_0 von $P(x)$.

Beispiel: $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 2$ (alle Teiler von $-2 : \pm 1, \pm 2$ als Nullstelle ausprobieren)

$\Rightarrow$ z.B. $x = 1$ ist Nullstelle

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^3 - 4x^2 + 5x - 2) : (x-1) = x^2 - 3x + 2 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad / \quad -3x^2 + 5x \\
\quad \underline{-(-3x^2 + 3x)} \\
\qquad / \quad 2x - 2 \\
\qquad \quad \underline{-(2x - 2)} \\
\qquad \quad / \quad /
\end{array}
$$

Abbildung 2.26. – Polynomdivision

$$\underbrace{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}_{P(x)} = (x-1)(\underbrace{x^2 - 3x + 2}_{Q(x)})$$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^2 - 3x + 2) : (x - 1) = x - 2 \\
\underline{-(x^2 - x)} \\
\quad / \quad -2x + 2 \\
\quad \underline{-(-2x + 2)} \\
\qquad / \quad /
\end{array}$$

Abbildung 2.27. – Polynomdivision

$$\underbrace{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}_{P(x)} = (x-1)^2(\underbrace{x-2}_{Q_2(x)}) \text{ (vollständige Faktorisierung)}$$

Nullstellen von $P(x)$ $\quad x_1 = 1 \quad$ (2-fach)

$\quad x_2 = 2 \quad$ (1-fach)

$$x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = (x-1)^2(x-2)$$

x^3: Leiterm, bestimmt das Verhalten im Unendlichen

Satz:

vollständige Faktorisierung

Jedes reelle Polynom (vom Grad ≥ 0) ist darstellbar als Produkt von Faktoren der Form

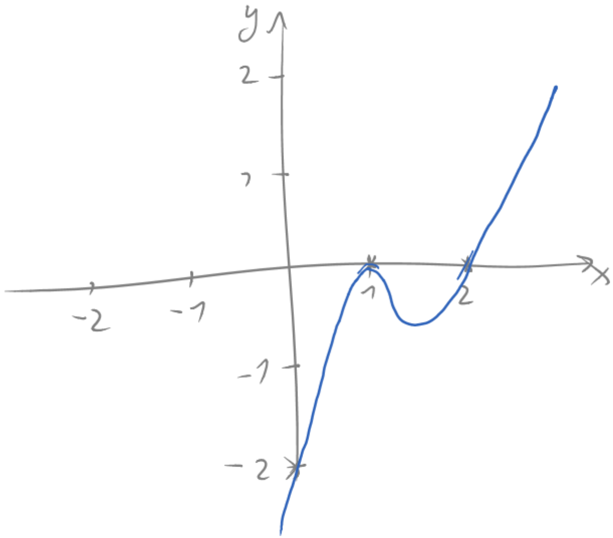


Abbildung 2.28. – Graph/Skizze

1. $a \quad (a \in \mathbb{R})$ Konstante

2. $(x-b) \quad (b \in \mathbb{R})$ Linearfaktor

3. $(x-c)^2 + d^2 \quad (c, d \in \mathbb{R}; \quad d \neq 0)$ quadratischer Faktor, (über $\mathbb{R}$) unzerlegbar $D < 0$

m-fache Nullstelle x_0

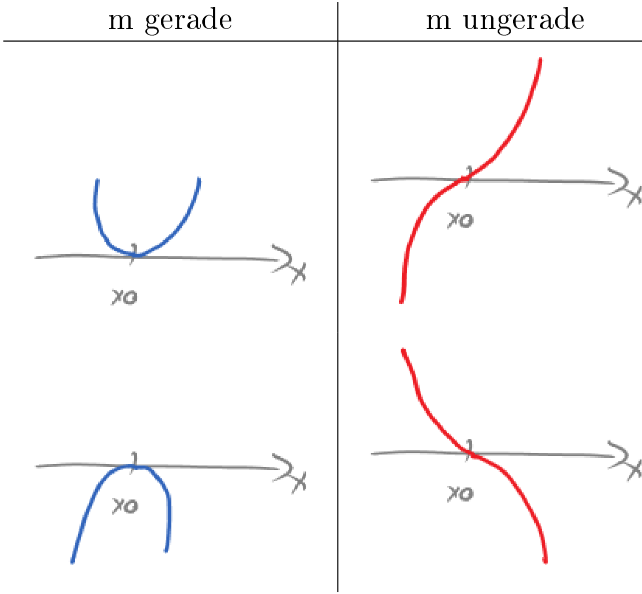


Abbildung 2.29. – m-fache Nullstelle x_0

Bemerkung: Über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ können die Faktoren $(x-c)^2 + d^2$ in 2 Linearfaktoren $(x - z_1)(x - z_2)$ zerlegt werden. $(z_1, z_2 \in \mathbb{C}; \quad \overline{z_1} = z_2)$
$z_{1/2} = c \pm \imath d$

B) Ungleichung vom Grad n

$$\underbrace{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}_{P(x) \quad \text{Polynom vom Grad } n} \leq 0 \qquad (a_n \neq 0)$$

Beispiele:

1. $-2x^2 + 8x - 6 \leq 0$

   Vollständige Faktorisierung: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

   $$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 3$$

   $$\Rightarrow -2x^2 + 8x - 6 = -2(x-1)(x-3)$$

   VZT:

Faktoren	$-\infty < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < 3$	$x = 3$	$3 < x < \infty$
-2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$x-1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$\underbrace{-}_{\leq 0}$	$\underbrace{0}_{\leq 0}$	$+$	$\underbrace{0}_{\leq 0}$	$\underbrace{-}_{\leq 0}$

   $$\Rightarrow \mathbb{L} =]-\infty; 1] \cup [3; \infty[$$

Abbildung 2.30.

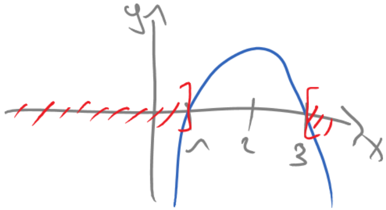


Abbildung 2.31.

2. $\underbrace{-x^3 + 3x2 - 3x + 2}_{P(x)} > 0$

Vollständige Faktorisierung: Nullstellen erraten $\Rightarrow$ Teiler des konstanten Glieds $\pm 1, \pm 2$

$P(2) = 0$

Polynomdivision: $P(x) : (x - 2)$

$$
\begin{array}{l}
(-x^3 + 3x^2 - 3x + 2) : (x-2) = -x^2 + x - 1 \\
-(-x^2 + 2x^2) \\
\hline
/ \quad x^2 - 3x \\
\quad -(x^2 - 2x) \\
\hline
\quad / \quad -x + 2 \\
\quad\quad -(-x - 2) \\
\hline
\quad\quad / \quad /
\end{array}
$$

Abbildung 2.32.

$$\Rightarrow P(x) = -x^3 + 3x2 - 3x + 2 = (x-2)(\underbrace{-x^2 + x - 1}_{\text{weiter zerlegbar?}})$$

$$D = 1^2 - 4(-1)(-1) = 1 - 4 = -3 < 0$$

$\Rightarrow$ (über $\mathbb{R}$) unzerlegbar

VZT:

Faktoren	$-\infty < x < 2$	$x = 2$	$2 < x < \infty$
-2	$-$	$-$	$-$
$x-2$	$-$	0	$+$
$-x^2 + x - 1$	$-$	$-$	$-$
$P(x)$	$\underbrace{+}_{>0}$	0	$-$

$$\Rightarrow \mathbb{L} =]-\infty; 2[= \{x < 2\}$$

3. $-4(x+2)^3x^5(x-1)^2(x-2)(\underbrace{2x^2-2x+3}) \leq 0$

   $D = b^2 - 4ac < 0$

   $\Rightarrow$ (über $\mathbb{R}$) unzerlegbar

   $P(x) = -4(x+2)^3x^5(x-1)^2(x-2)(2x^2-2x+3)$ ist bereits vollständig faktorisiert.

   Nullstellen: $-2, 0, 1, 2$

   VZT:

Faktoren	$-\infty < x < -2$	$x=-2$	$-2 < x < 0$	$x=0$	$0 < x < 1$	$x=1$	$1 < x < 2$	$x=2$	$2 < x < \infty$
-4	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x+2)^3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
x^5	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x^2-2x+3$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$+$	$\underbrace{0}_{\leq 0}$	$\underbrace{-}_{\leq 0}$	$\underbrace{0}_{\leq 0}$	$+$	$\underbrace{0}_{\leq 0}$	$+$	$\underbrace{0}_{\leq 0}$	$\underbrace{-}_{\leq 0}$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = [-2; 0] \cup \{1\} \cup [2; \infty[$$

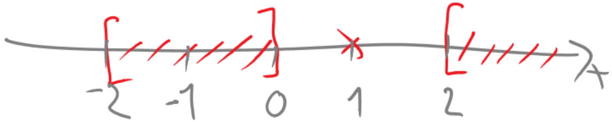


Abbildung 2.33.

4. $x^4 - (a+1)x^2 + a < 0 \qquad (a \in \mathbb{R})$
   Vollständig Faktorisieren: $x^4 - (a+1)x^2 + a = 0$ (biquadratische Gleichung)

   Substitution: $u = x^2$
   $u^2 - (a+1)u + a = 0$

   $D = (a+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = (a+1)^2 - 4a = a^2 + 2a + 1 - 4a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$

   $$\Rightarrow u_{1/2} = \frac{a+1 \pm \sqrt{(a-1)^2}}{2} = \frac{a+1 \pm |a-1|}{2} = \frac{a+1 \pm (a-1)}{2}$$

   $\Rightarrow x_1 = a, \quad x_2 = 1$

   $u^2 - (a+1)u + a = 0 = (u-a)(u-1)$

   Rücksubstitution: $x^2 = u$
   $x^4 - (a+1)x^2 + a = (x^2 - a)(x^2 - 1) = (x^2 - a)(x-1)(x+1)$

   $(x^2 - a)$ weiter zerlegbar? (ja, in Abhängigkeit von a)

   <u>1. Fall</u>: $a < 0$

$\Rightarrow x^2 - a$ (über $\mathbb{R}$) unzerlegbar (da $-a > 0$)

VZT:

Faktoren	$-\infty < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < \infty$
$x^2 - a$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$+$	0	$\underbrace{-}_{<0}$	0	$+$

$\Rightarrow \mathbb{L} =]-1;1[= \{-1 < x < 1\}$

<u>2. Fall</u>: $a = 0$

$\Rightarrow x^4 - (a+1)x^2 + a = x^2(x-1)(x+1)$ (vollständig faktorisiert)

VZT:

Faktoren	$-\infty < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < \infty$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$P(x)$	$+$	0	$\underbrace{-}_{<0}$	0	$\underbrace{-}_{<0}$	0	$+$

$\Rightarrow \mathbb{L} =]-1;0[\cup]0;1[$

<u>3. Fall</u>: $a > 0$

$\Rightarrow x^4 - (a+1)x^2 + a = (x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})(x-1)(x+1)$ (vollständig faktorisiert)

Nullstellen: $\pm 1, \pm\sqrt{a}$

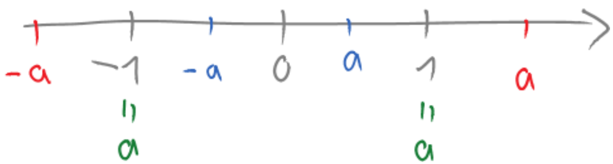


Abbildung 2.34.

$\underline{(0<)\sqrt{a}<1}$:

VZT:

Faktoren	$-\infty < x < -1$	$x=-1$	$-1 < x < -\sqrt{a}$	$x=-\sqrt{a}$	$-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$	$x=\sqrt{a}$	$\sqrt{a} < x < 1$	$x=1$	$1 < x < \infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x+\sqrt{a}$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-\sqrt{a}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$+$	0	$\underbrace{-}_{<0}$	0	$+$	0	$\underbrace{-}_{<0}$	0	$+$

$\Rightarrow \mathbb{L} =]-1;-\sqrt{a}[\cup]\sqrt{a};1[$

$\underline{\sqrt{a}=1}$:

$\Rightarrow (x-1)^2(x+1)^2 \geq 0$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$

$\underline{\sqrt{a} > 1}$:

VZT:

Faktoren	$-\infty < x < -\sqrt{a}$	$x = -\sqrt{a}$	$-\sqrt{a} < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < \sqrt{a}$	$x = \sqrt{a}$	$\sqrt{a} < x < \infty$
$x + \sqrt{a}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x - \sqrt{a}$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$P(x)$	$+$	0	$\underbrace{-}_{<0}$	0	$+$	0	$\underbrace{-}_{<0}$	0	$+$

$\Rightarrow \mathbb{L} =]-\sqrt{a}; -1[\cup]1; \sqrt{a}[$

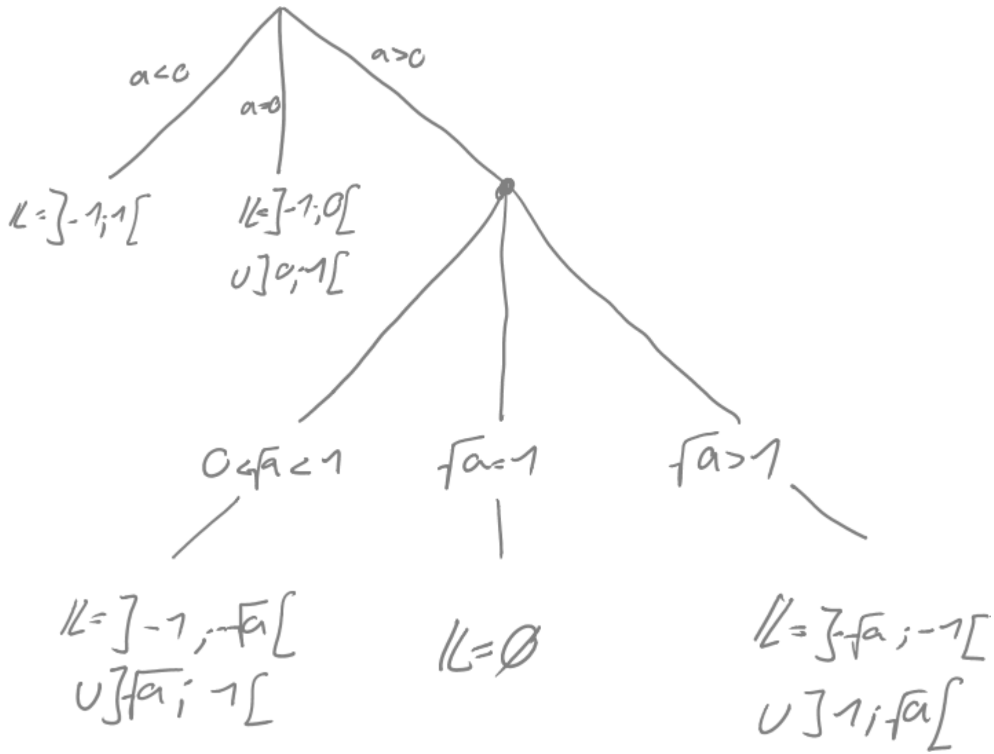


Abbildung 2.35. – Lösungsbaum

2.3.2. Zwei Unbestimmte x_1, x_2 (x, y)

Quadratische Gleichung/Ungleichung

A) Quadratische Gleichung

$a_1x_1^2 + a_2x_1x_2 + a_3x_2^2 + a_4x_1 + a_5x_2 + a_6 = 0$

Die Lösungsmengen (als Teilmengen der Ebene $\mathbb{R}^2$) heißen <u>Kegelschnitte</u> (oder <u>Quadriken</u>)
zur Vereinfachung sei $a_2 = 0 \Rightarrow$ <u>achsenparallele</u> Kegelschnitte

Koordinaten x, y:

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0} \quad (A, B, C, D, E \in \mathbb{R}; \quad \underbrace{A \neq 0 \vee B \neq 0}_{A^2+B^2\neq 0})$$

Klassifikation:

Kreis:	$A = B$
Ellipse:	$A \cdot B > 0 \wedge A \neq B$
Hyperbel:	$A \cdot B < 0$
Parabel:	$A = 0 \quad (\wedge B \neq 0) \qquad \vee \qquad B = 0 \quad (\wedge A \neq 0)$

Kreis $=$ Menge aller Punkte P, für die $\overline{PM} = r = \text{const}$ gilt.

Mittelpunkt $M(x_M; y_M)$
Radius r

Abbildung 2.36.

<u>Hauptform</u> (allgemeine Kreisgleichung) $\boxed{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2}$ (implizite Gleichung)

Ellipse = Menge aller Punkte P, für die $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a = \text{const}$ gilt.

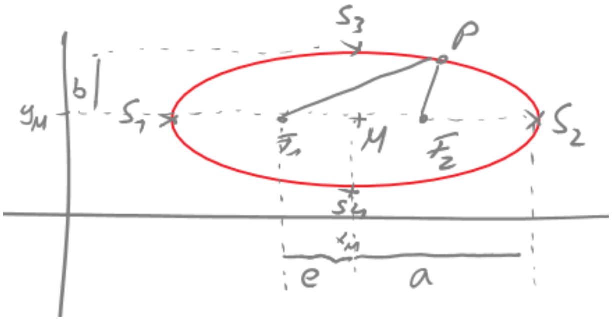


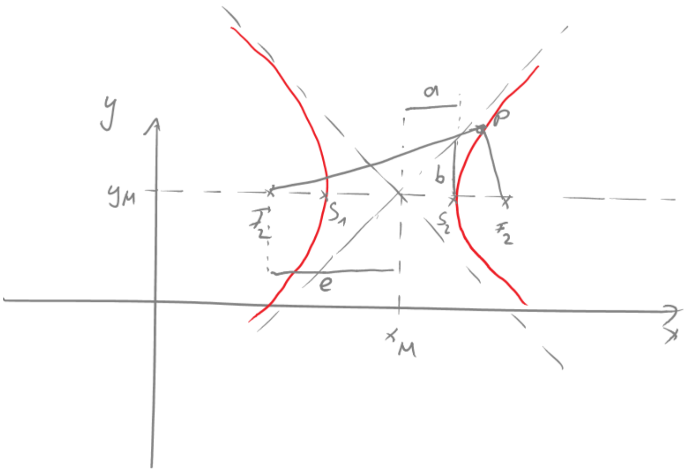
Abbildung 2.37.

Mittelpunkt $M(x_M; y_M)$
a : (große) Halbachse
b : (kleine) Halbachse
Brennpunkte: F_1, F_2
Brennweite: e (Exzentrizität)
Hauptscheitel S_1, S_2
Nebenscheitel S_3, S_4

$$\boxed{\underbrace{a^2}_{\text{groß}} = e^2 + \underbrace{b^2}_{\text{klein}}}$$

Hauptform (allgemeine Ellipsengleichung) $\boxed{\dfrac{(x-x_M)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_M)^2}{b^2} = 1}$ (implizite Gleichung)

Hyperbel = Menge aller Punkte P, für die $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a = \text{const}$ gilt.



Mittelpunkt $M(x_M; y_M)$
a : (große) reelle Halbachse
b : (kleine) imaginäre Halbachse
Brennpunkte: F_1, F_2
Brennweite: e (Exzentrizität)
Scheitel S_1, S_2

Abbildung 2.38.

$\boxed{e^2 = a^2 + b^2}$

Hauptform (allgemeine Hyperbelgleichung) $\boxed{\dfrac{(x - x_M)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_M)^2}{b^2} = 1}$ (implizite Gleichung)

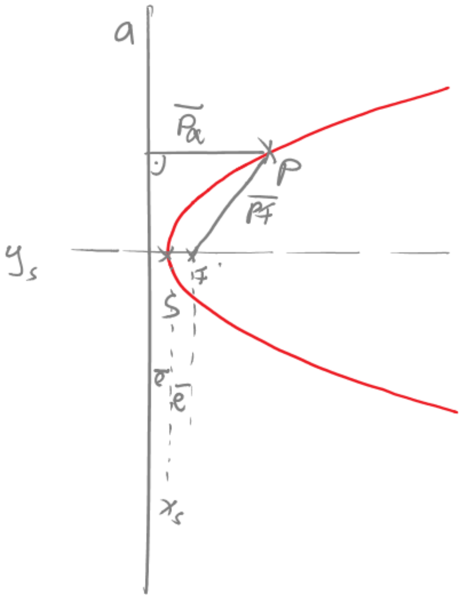
zwei Asymptoten: $\boxed{y = y_M \pm \frac{b}{a}(x - x_M)}$ $\quad (a, b > 0)$

Parabel = Menge aller Punkte P, für die $\overline{PF} = \overline{Pa}$ (a = Gerade) gilt.

<u>Hauptform</u> (allgemeine Parabelgleichung) $\boxed{(y - y_S)^2 = 2p(x - x_S)}$ (implizite Gleichung)

$p > 0$ so ist Parabel nach rechts geöffnet

$p < 0$ so ist Parabel nach links geöffnet



Scheitel $S(x_S; y_S)$
$|p|$ = Abstand Brennpunkt $\leftrightarrow$ Leitlinie
a Leitlinie
F Brennpunkt
$e = \frac{|p|}{2} = \overline{FS}$ Brennweite

Abbildung 2.39.

Transformation: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0 \longrightarrow$ Hauptform

$$\underbrace{Ax^2 + Cx}_{\substack{\text{quadratische} \\ \text{Ergänzung} \\ \text{bezüglich } x \\ (\text{falls } C \neq 0)}} + \underbrace{By^2 + Dy}_{\substack{\text{quadratische} \\ \text{Ergänzung} \\ \text{bezüglich } y \\ (\text{falls } D \neq 0)}} + E = 0$$

Wiederholung Quadratische Ergänzung:

$\vdots$

B) Quadratische Gleichung

$\vdots$

Gleichung/Ungleichung höheren Grades ($n \geq 3$)

Die Lösungsmengen der algebraischen Gleichung
$P(x, y) = 0$
heißen algebraische Kurven.

$P(x, y) =$ Polynom (multivariates)

Beispiel: $P(x, y) = y^2 - x^3 - ax - b$, d.h. $y^2 - x^3 - ax - b = 0 \Leftrightarrow y^2 = x^3 + ax + b$ (Lösung ist eine sogenannte elliptische Kurve)

($\Rightarrow$ Kryptographie!)

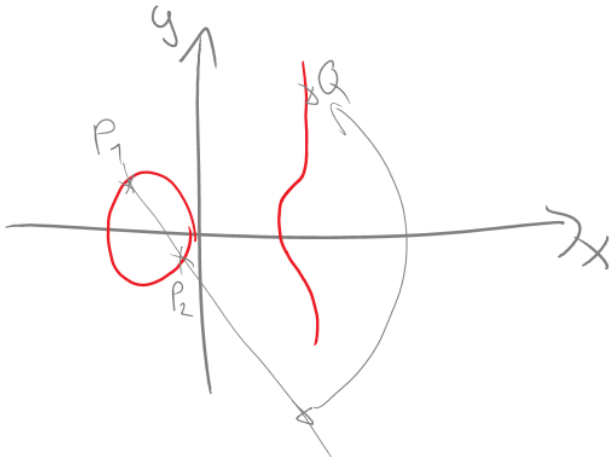


Abbildung 2.40. – Addition auf elliptischen Kurven $P_1 \oplus P_2 = Q$

2.4. Bruchgleichungen und Bruchungleichungen

Unbestimmte tritt (bzw. treten) im Nenner von Bruchtermen auf.

Lösungsstrategie:

1. Gleichungen/Ungleichungen mit Hauptnenner (HN) multiplizieren ($\Rightarrow$ Fallunterscheidung! HN$>$0, HN$<$0 bei Ungleichungen)
2. Nennerfreie Gleichung/Ungleichung lösen
3. Probe (erforderlich, falls Grundmenge $\mathbb{G}$ nicht bestimmt ist)

Wiederholung Bruchregeln

$\vdots$

Beispiele:

1. $\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{3}{2x} = 0 \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \neq 0\}$

Nenner	EF (Erweiterungsfaktor)
x^2	2
$2x$	x
HN$=2x^2$	HN$\neq 0$ auf $\mathbb{G}$

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{x^2}+\frac{3}{2x}&=0\\
\Leftrightarrow \frac{4}{\mathrm{HN}}+\frac{3x}{\mathrm{HN}}&=0\\
\Leftrightarrow \frac{4+3x}{\mathrm{HN}}&=0 \mid \cdot\mathrm{HN}(\neq 0)\\
\Leftrightarrow 4+3x&=0\\
\Leftrightarrow x&=-\frac{4}{3}\in\mathbb{G}
\end{aligned}
$$

alternativ «Probe» durchführen

2. $\dfrac{x^2}{4x-8} = \dfrac{5-x^2}{x-2}$ $\mathbb{G} = \mathbb{R} \setminus \{2\} = \{x \neq 2\}$

Nenner	EF (Erweiterungsfaktor)
$4x-8=4(x-2)$	1
$x-2$	4
HN$=4(x-2)$	

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{4x-8} &= \frac{5-x^2}{x-2} \\
\Leftrightarrow \frac{x^2}{\mathrm{HN}} &= \frac{4(5-x^2)}{\mathrm{HN}} \mid \cdot\mathrm{HN}(\neq 0) \\
\Leftrightarrow x^2 &= 4(5-x^2) \\
\Leftrightarrow x^2 &= 20-4x^2 \mid +4x^2 \\
\Leftrightarrow 5x^2 &= 20 \\
\Leftrightarrow x^2 &= 4 \\
\Leftrightarrow x &= \pm 2 \qquad\qquad \mathbb{G} = \{x \neq 2\}
\end{aligned}$$

$x_1 = 2 \notin \mathbb{G} \Rightarrow$ keine Lösung der Bruchgleichung
$x_2 = -2 \in \mathbb{G} \Rightarrow$ Lösung der Bruchgleichung

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-2\}$

3. $\dfrac{x^2}{4x-8} < \dfrac{5-x^2}{x-2}$ $\qquad \mathbb{G} = \mathbb{R} \setminus \{2\} = \{x \neq 2\}$

HN$=4(x-2)$ siehe 2)

$$\begin{aligned} &\frac{x^2}{4x-8} < \frac{5-x^2}{x-2} \\ \Leftrightarrow\ &\frac{x^2}{\text{HN}} < \frac{4(5-x^2)}{\text{HN}} \qquad (\text{HN} \neq 0) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{1. Fall}}$ HN>0, d.h. $4(x-2) > 0 \Leftrightarrow \boxed{\text{x}>2}$

$$\frac{x^2}{\text{HN}} < \frac{4(5-x^2)}{\text{HN}} \mid \cdot\text{HN}(>0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 < 4(5-x^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 < 20 - 4x^2 \mid +4x^2$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 < 20 \mid : 5$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2}_{\geq 0} < \underbrace{4}_{\geq 0} \mid \sqrt{} \qquad \text{(streng monoton steigend auf } x \geq 0\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} < \sqrt{4}$$

$$\Leftrightarrow |x| < 2$$

$$\Leftrightarrow -2 < x < 2$$

zudem gilt $\mathbb{G} = \{x > 2\}$

$\Rightarrow \mathbb{L}_1 = \emptyset$

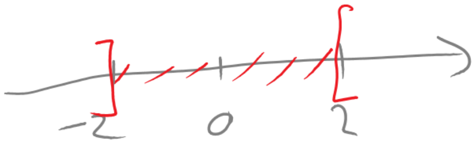


Abbildung 2.41. – $|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$

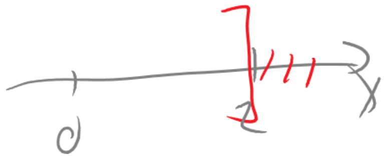


Abbildung 2.42. – $\mathbb{G} = \{x > 2\}$

$\boxed{\text{2. Fall}}$ HN<0, d.h. $4(x-2) > 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{x<2}}$

$$\frac{x^2}{\mathrm{HN}} < \frac{4(5-x^2)}{\mathrm{HN}} \mid \cdot\mathrm{HN}(<0)$$

$$\Leftrightarrow x^2 \boxed{>} 4(5-x^2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 > 20 - 4x^2 \mid +4x^2$$

$$\Leftrightarrow 5x^2 > 20 \mid : 5$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2}_{\geq 0} > \underbrace{4}_{\geq 0} \mid \sqrt{}$$ (streng monoton steigend auf $x \geq 0$)

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2} > \sqrt{4}$$

$$\Leftrightarrow |x| > 2$$

zudem gilt $\mathbb{G} = \{x < 2\}$

$$\Rightarrow \mathbb{L}_2 = \{x < -2\}$$

$\boxed{\text{insgesamt}} \Rightarrow \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x < -2\}$

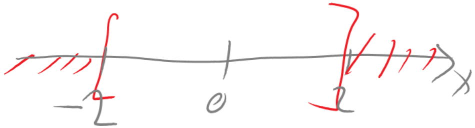


Abbildung 2.43. – $|x| > 2$

Abbildung 2.44. – $\mathbb{G} = \{x < 2\}$

2.5. Wurzelgleichungen

Unbestimmte steht (bzw. stehen) unter einer Wurzel (bzw. in einem Term mit echt rationalen Exponenten)

Lösungsstrategie:

1. Wurzel (bzw. Term mit rationalem Exponenten) isolieren
2. Quadrieren (bzw. Potenzieren)
3. Falls noch Wurzelterme auftreten wiederhole 1. und 2.

4. Löse die wurzelfreie Gleichung

5. Probe

Beachte: Potenzieren mit geradzahligen Exponenten ist i.a. <u>keine</u> Äquivalenzumformung.
$\Rightarrow$ zusätzliche (Schein-)Lösungen können auftreten
$\Rightarrow$ Probe notwendig

Beispiel: $\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1$

$2x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$

$5 + xx \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$

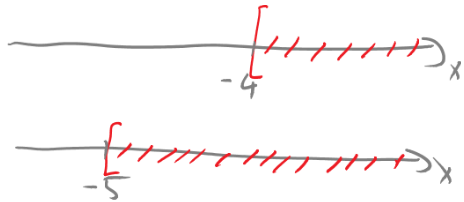


Abbildung 2.45.

$\Rightarrow \mathbb{G} = [-4; \infty[= \{x \geq -4\}$

$$\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1 \mid +\sqrt{5+x}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{2x+8}}_{\geq 0} = \underbrace{1+\sqrt{5+x}}_{\geq 0} \mid \square^2$$

$$\Leftrightarrow 2x+8 = (1+\sqrt{5+x})^2$$

$$\Leftrightarrow 2x+8 = 1^2 + 2\sqrt{5+x} + 5 + x$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 2\sqrt{5+x} \mid : 2$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{2}x+1}_{?} = \underbrace{\sqrt{5+x}}_{\geq 0} \mid \square^2$$

wurzelfreie Gleichung $\Rightarrow (\frac{1}{2}x+1)^2 = 5+x$ <u>keine</u> Äquivlenzumformung, daher $\Rightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 5 + x \mid -5-x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 = 4$$

$\Leftrightarrow x^2 = 16$

$\Leftrightarrow x = \pm 4$ Lösung der wurzelfreien Gleichung

$\pm 4 \in \mathbb{G}$

Notiz: Wenn in der Form $ax^2 + bx + c = 0$ $c = 0$ oder $b = 0$ dann kann die Gleichung ohne Lösungsformel aufgelöst werden.

Probe:

$\boxed{x = 4}$: $\ldots 1 = 1$ Ok

$\boxed{x = -4}$: $\ldots -1 = 1$ Geht nicht

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{4\}$

2.6. Exponential- und Logarithmusgleichungen

Unbestimmte steht (bzw. stehen) im Exponenten einer Potenz (Exponentialgleichung) bzw. im Argument eines Logarithmus (Logarithmusgleichung).

Lösungsstrategie: Exponentialgleichungen

1. Potenz(en) isolieren
2. Logarithmieren (beide Seiten)
3. Lösung bestimmen (auf $\mathbb{G}$ achten)
4. (evtl.) Probe

Ist bei 1. Isolierung nicht möglich $\Rightarrow$ Substitution

Wiederholung Potenzgesetze

$\vdots$

Wiederholung Logarithmusgesetze

⋮

Beispiele: Exponentialgleichung

1. $5^x = 12$

$$\begin{aligned} 5^x &= 12 \mid \ln(\square) \\ \Leftrightarrow \ln(5^x) &= \ln(12) \qquad \text{(bzw. } \ln 5^x = \ln 12\text{)} \\ \Leftrightarrow x \cdot \ln 5 &= \ln 12 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\ln 12}{\ln 5} \end{aligned}$$

2. $\left(\frac{5}{2}\right)^{2x-1} = \frac{1}{4^x}$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{5}{2}\right)^{2x-1} &= \frac{1}{4^x} \\
\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{2x-1} &= 4^{-x} \mid \ln \square && \text{Potenzen isoliert} \\
\Leftrightarrow \ln\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{2x-1}\right) &= \ln\left(4^{-x}\right) \\
\Leftrightarrow (2x-1)\ln\frac{5}{2} &= -x\ln 4 \\
\Leftrightarrow 2x\ln\frac{5}{2} - \ln\frac{5}{2} &= -x\ln 4 \mid +x\ln 4 + \ln\frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow 2x\ln\frac{5}{2} + x\ln 4 &= \ln\frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow x\left(2\ln\frac{5}{2} + \ln 4\right) &= \ln\frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow x\left(\ln\frac{25}{4} + \ln 4\right) &= \ln\frac{5}{2}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x\left(\ln\frac{25\cdot 4}{4}\right) = \ln\frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow x\ln 25 = \ln\frac{5}{2}$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\frac{5}{2}}{\ln 25}$$

3. $5\cdot 3^{2x} = 3^{x+3} - 34$

   Potenzen können wegen Subtraktion (auf rechten Seite) <u>nicht</u> isoliert werden.

   $\Rightarrow$ <u>Substitution</u>: $u = 3^x$

   $3^{2x} = (3^x)^2 = u^2$
   $3^{x+3} = 3^x\cdot 3^3 = 27u$

   $\Rightarrow 5u^2 = 27u - 34$

   $\Rightarrow$ Lösungsformel $u_1 = 2;\quad u_2 = 3{,}4$

<u>Rücksubstitution</u>:

$\boxed{u = 2}\,(> 0)$

$u = 3^x$

$2 = 3^x$

$\ln 2 = x \ln 3$

$x = \dfrac{\ln 2}{\ln 3}$

$\boxed{u_2 = 3{,}4}$

$u = 3^x$

$3{,}4 = 3^x$

$\ln 3{,}4 = x \ln 3$

$x = \dfrac{\ln 3{,}4}{\ln 3}$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\dfrac{\ln 2}{\ln 3}; \dfrac{\ln 3{,}4}{\ln 3}\}$

Lösungsstrategie: Logarithmusgleichung

1. Logarithmus(-men) isolieren ($\Rightarrow$ sonst Substitution)
2. In den Exponenten heben (beide Seiten)
3. Lösungen bestimmen (auf $\mathbb{G}$ achten)
4. (evtl.) Probe

Beispiele:

1. $\log_3(2x) = 2 \qquad \mathbb{G} = \{x > 0\}$

$$\begin{aligned} \log_3(2x) &= 2 \mid 3^{\square} \qquad \text{(log bereits isoliert)} \\ \Leftrightarrow 3^{\log_3(2x)} &= 3^2 \\ \Leftrightarrow 2x &= 9 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

Probe: $\ldots 2$ Ok

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\frac{9}{2}\}$

2. $\ln(2x+3) + \ln(1-x) = \ln(1-4x) \qquad \mathbb{G} =]-\frac{3}{2}; \frac{1}{4}[$

$\mathbb{G}$ bestimmen: $2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{2}$

$$1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$$
$$1 - 4x > 0 \Leftrightarrow x < \tfrac{1}{4}$$

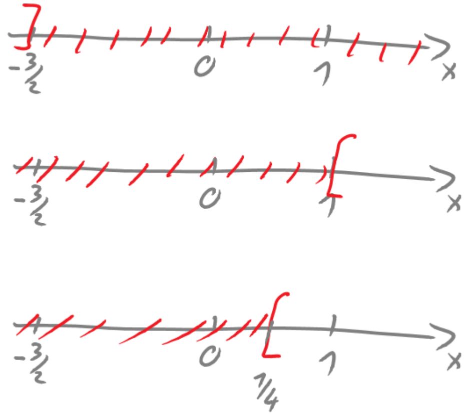


Abbildung 2.46.

$$\begin{aligned}
\ln(2x+3)+\ln(1-x) &= \ln(1-4x) \\
\Leftrightarrow \ln[(2x+3)(1-x)] &= \ln(1-4x) \mid e^{\square} \\
\Leftrightarrow (2x+3)(1-x) &= 1-4x \\
\Leftrightarrow 2x^2-3x-2 &= 0 \\
x_{1/2} &= \frac{3\pm 5}{4} \\
\Rightarrow x_1 &= 2 \notin \mathbb{G} \\
x_2 &= -\frac{1}{2} \in \mathbb{G}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-\frac{1}{2}\}$

2.7. Goniometrische Gleichungen

Die Unbestimmte(n) tritt (treten) im Argument einer Winkelfunktion (trigonometrischen Funktion) auf.

Wiederholung Winkelfunktionen

⋮

Es gilt:

$\cos\alpha = \sin\beta = \sin(90^\circ - \alpha)$

$\sin\alpha = \cos\beta = \cos(90^\circ - \alpha)$

$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} = \cot\beta = \cot(90^\circ - \alpha) = \dfrac{1}{\tan(90^\circ - \alpha)}$

Gleichungen der Form $\sin x = a, \cos x = a$**:**

Beachte: dass $-1 \leq \sin x \leq 1$ und $-1 \leq \cos x \leq 1$ gilt.

D.h. Gleichungen der Form $\sin x = a$ bzw. $\cos x = a$ haben für $|a| > 1$ keine Lösungen.

$\boxed{a = 0:}$

$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 + k\pi = k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$\boxed{a = 1:}$

$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0 + k2\pi = k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$\boxed{a = -1:}$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\pi + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$\boxed{0 < a < 1:}$

$\sin x = a$

Lösung im I. Quadrant

$x_1 = \arcsin a = \sin^{-1} a > 0$

Lösung im II. Quadrant

$x_2 = \pi - x_1$

allgemeine Lösungen:

$x_1 + k2\pi$

$x_2 + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$\cos x = a$

Lösung im I. Quadrant

$x_1 = \arccos a = \cos^{-1} a > 0$

Lösung im IV. Quadrant

$x_2 = 2\pi - x_1$

allgemeine Lösungen:

$x_1 + k2\pi$

$x_2 + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$\boxed{-1 < a < 0:}$

$\sin x = a$

Lösung im III. Quadrant

$x_1 = \arcsin a = \sin^{-1} a < 0$

Lösung im IV. Quadrant

$x_2 = \pi - x_1$

allgemeine Lösungen:

$x_1 + k2\pi$

$x_2 + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$\cos x = a$

Lösung im II. Quadrant

$x_1 = \arccos a = \cos^{-1} a > 0$

Lösung im III. Quadrant

$x_2 = 2\pi - x_1$

allgemeine Lösungen:

$x_1 + k2\pi$

$x_2 + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Beachte:

$0 \leq \arccos a \leq \pi$ (I. oder II. Quadrant)

$-\frac{\pi}{2} \leq \arccos a \leq \frac{\pi}{2}$ (I. oder IV. Quadrant)

Goniometrische Beziehungen:

<u>Additionstheoreme:</u>

$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin x_1 \cos x_2 \pm \cos x_1 \sin x_2$

$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \sin x_1 \sin x_2$

<u>Doppelter Winkel:</u>

$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - sin^2 x = 1 - 2sin^2 x = 2cos^2 x - 1$

<u>Summen und Differenzen:</u>

$\sin x_1 \pm \sin x_2 = 2 \sin \dfrac{x_1 \pm x_2}{2} \cos \dfrac{x_1 \mp x_2}{2}$

$\cos x_1 + \cos x_2 = 2 \cos \dfrac{x_1 + x_2}{2} \cos \dfrac{x_1 - x_2}{2}$

$\cos x_1 - \cos x_2 = -2 \sin \dfrac{x_1 + x_2}{2} \sin \dfrac{x_1 - x_2}{2}$

<u>Trigonometrischer Pythagoras:</u>

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Beispiele: Goniometrische Gleichungen

1. $\sin x = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{G} = \mathbb{R}$

   Lösung im
   I. Quadranten $x_1 = \arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$
   II. Quadranten $x_2 = \pi - x_1 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi$
   allgemeine Lösungen:
   $x_1 = \frac{\pi}{6} + k2\pi$

$x_2 = \frac{5}{6}\pi + k2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

2. $\sin 2x = sinx \qquad \mathbb{G} = [0; 2\pi[$

$$\begin{aligned} \underbrace{\sin 2x}_{2\sin x\cos x} &= sinx \\ \Leftrightarrow 2\sin x\cos x &= sinx \mid -\sin x \\ \Leftrightarrow 2\sin x\cos x - \sin x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x = 0 &\vee \underbrace{2\cos x - 1 = 0}_{\cos x = \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pi$$
$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5}{3}\pi$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{0; \frac{\pi}{3}; \pi; \frac{5}{3}\pi\}$

3. $2\cos^2 x = 1 - \sin x \qquad \mathbb{G} = [0; 2\pi[$

$$\begin{aligned} 2\cos^2 x &= 1 - \sin x \\ \Leftrightarrow 2(1-\sin^2 x) &= 1 - sinx \mid u = \sin x \\ \Leftrightarrow 2(1-u^2) &= 1-u \\ \Leftrightarrow 2(1-u)(1+u)-(1-u) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-u)(2(1+u)-1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (1-u)(1+2u) &= 0 \\ \Leftrightarrow u = 1 \vee u &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\boxed{\sin x = u}$ $\boxed{u = 1:}$ $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$
$\boxed{u = 1:}$ $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{11}{6}\pi \vee x = \frac{7}{6}\pi$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{\frac{\pi}{2}; \frac{11}{6}\pi; \frac{7}{6}\pi\}$

4. $\sqrt{2}\sin^2(2x) - \sin(2x) = 0 \qquad \mathbb{G} = [0; 2\pi[$

5. $\cos^4 x - 3\cos^2 x \sin 2x = 0 \qquad \mathbb{G} = [0; 2\pi[$

2.8. Das Newton-Raphson-Verfahren

Für viele Gleichungen ist es oftmals unmöglich eine exakte Lösung zu bestimmen $\Rightarrow$ Näherungslösungen (approximative Lösungen)!

Beispiel:

Gesucht ist eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$

Starte mit beliebigem Punkt x_0

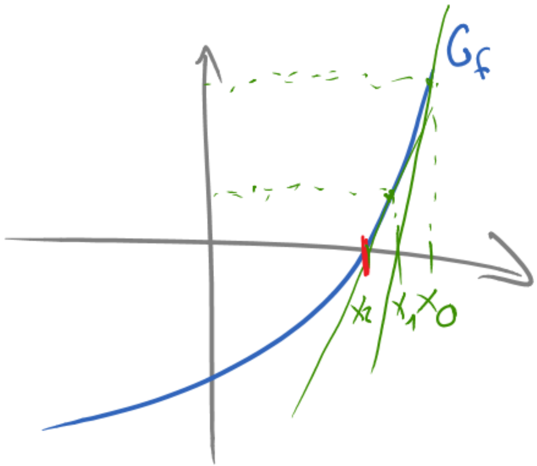


Abbildung 2.47.

- Konstruiere die Tangente an G_f durch $P_0(x_0; \underbrace{y_0}_{f(x_0)})$

  Tangentengleichung $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

- diese schneidet bei $x = x_1$ die x-Achse

$$0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \Leftrightarrow x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

- Wiederholt man die Konstruktion, so erhält man eine Folge $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ durch

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Gilt für den Startwert x_0 die sogenannte <u>Lipschitz-Bedingung</u>

$\left|\dfrac{f(x_0) \cdot f''(x_0)}{(f'(x_0))^2}\right| < 1$, (hinreichendes Konvergenzkriterium)

so konvergiert die Folge $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ gegen eine Nullstelle von $f(x)$.

Teil III.

Analysis einer Veränderlichen

1. Folgen und Reihen

1.1. Grundbegriffe

Definition: Eine reelle (bzw. komplexe) Folge ist eine Abbildung $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$), $n \mapsto a_n$ (bzw. $n \mapsto z_n$); für Folge schreibt man auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ (bzw. $(z_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$) oder einfach nur (a_n) (bzw. (z_n)).

Beispiel:

1. $a_n = 2n \quad (n \geq 0) \quad (a_n) = (0, 2, 4, 6, 8, \ldots)$

2. $a_n = n^2 \quad (n \geq 0) \quad (a_n) = (0, 1, 4, 9, \ldots)$

3. Rekursive Definiton
   $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 10$
   $a_n = \frac{1}{2}(a_{n-3} + a_{n-2} - 2a_{n-1}) \quad (n \geq 3)$

   $a_3 = \frac{1}{2}(a_0 + a_1 - 2a_2) = \ldots = -7{,}5$ $a_4 = \frac{1}{2}(a_1 + a_2 - 2a_3) = \ldots = 14{,}5$

Definition: Sind $(a_n), (b_n)$ Folgen und $\alpha \in \mathbb{R}$ (bzw. $\alpha \in \mathbb{C}$), so definiert man

a) $(a_n) \pm (b_n) = (a_n \pm b_n)$

b) $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n \cdot b_n)$

c) $(a_n) : (b_n) = (a_n : b_n)$

d) $\alpha \cdot (a_n) = (\alpha \cdot a_n)$

Definition: Eine unendliche, reelle (bzw. komplexe) Reihe ist ein formaler Ausdruck der Form

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots}$$

wobei (a_k) eine Folge ist.

Beispiel:

1. $\sum_{k=0}^{\infty} k = 0 + 1 + 2 + \dots$
2. $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \dots$

Definition: Sind $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ Reihen, $\alpha \in \mathbb{R}$, so definiert man:

a) $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)$

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k$

mit $c_k = \sum\limits_{m=0}^{k} a_m \cdot b_{k-m}$ (Cauchy-Produkt)

c) $\alpha \cdot \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \right) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha \cdot a_k$

Bemerkung: zu b) Cauchy-Produkt

$(a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \ldots)$

	b_0	b_1	b_2	b_3	$\ldots$
a_0	a_0b_0	a_0b_1	a_0b_2	a_0b_3	$\ldots$
a_1	a_1b_0	a_1b_1	a_1b_2	a_1b_3	$\ldots$
a_2	a_2b_0	a_2b_1	a_2b_2	a_2b_3	$\ldots$
a_3	a_3b_0	a_3b_1	a_3b_2	a_3b_3	$\ldots$

$c_0 = \sum\limits_{m=0}^{0} a_m b_{0-m} = a_0 b_0$

$$c_1 = \sum_{m=0}^{1} a_m b_{1-m} = a_0 b_1 + a_1 b_0$$
$$c_2 = \sum_{m=0}^{2} a_m b_{2-m} = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0$$
$$c_3 = \sum_{m=0}^{3} a_m b_{3-m} = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0$$

1.2. Grenzwerte und Konvergenzkriterien

Definition:

1. Eine (reelle) Folge (a_n) heißt Konvergent, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$, so dass gilt:

   Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \epsilon$ für alle $n \geq n_0$

   wir schreiben dann

   $\boxed{\lim_{n \to \infty} a_n = a}$ (bzw. $a_n \to a$ für $n \to \infty$)

   und nennen a den Grenzwert der Folge (a_n); ist a_n nicht konvergent, so heißt die Folge divergent.

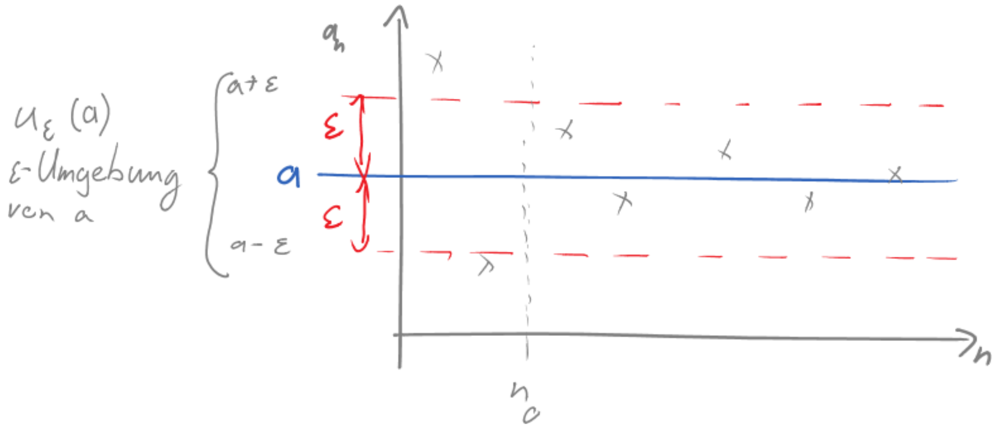


Abbildung 1.1.

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ bedeutet, dass es zu jeder noch so kleinen ϵ-Umgebung $U_\epsilon(a)$ stets eine Schranke $n_o \in \mathbb{N}$ gibt, so dass alle a_n mit $n \geq n_0$ in $U_\epsilon(a)$ liegen.

Analog definiert man Konvergenz auch für komplexe Folgen (z_n); hierbei ist $|z_n - z|$ der Betrag für komplexe Zahl. Geometrisch ist $|z_n - z|$ der Abstand von z_n zu z in der Gaußschen Zahlenebene.

2. Eine Folge (a_n) heißt bestimmt divergent mit uneigentlichem Grenzwert $\pm\infty$, wenn es zu jedem $M \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit

   $\boxed{a_n > M \text{ für alle } n \geq n_0}$ (bzw. $a_n < M$ für alle $n \geq n_0$)

   wir schreiben dann

   $$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty}$$

   ansonsten heißt (a_n) unbestimmt divergent.

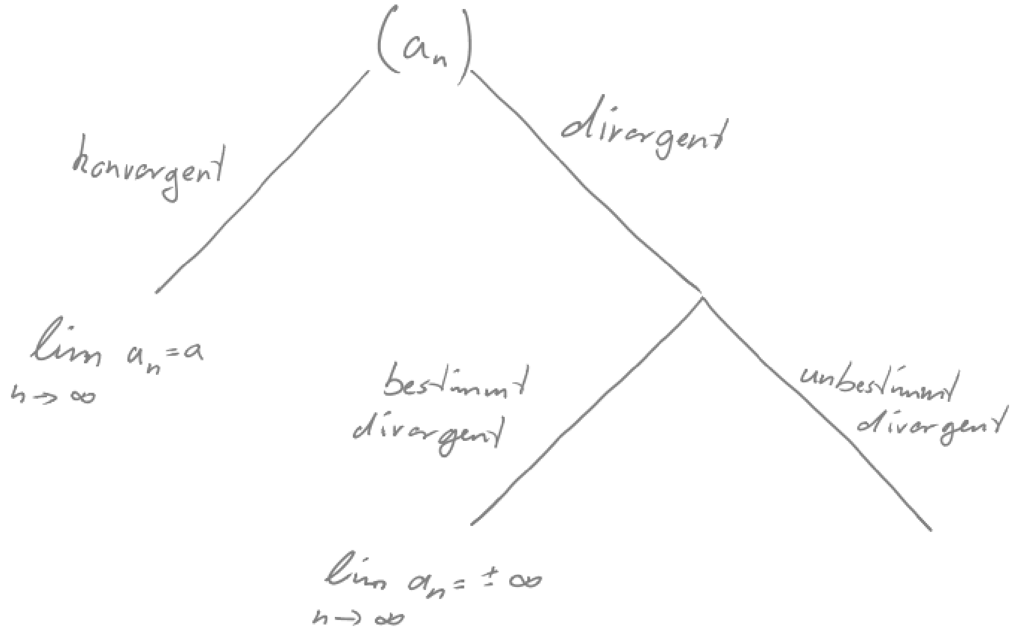


Abbildung 1.2.

Bemerkung: Eine komplexe Folge $(z_n), z_n = a_n + ıb_n$ ist genau dann konvergent, wenn Realteil (a_n) und Imaginärteil $(b_n j)$ konvergente Folgen sind; dabei gilt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} a_n + \imath b_n = a + \imath b} \text{ mit } \boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim_{n\to\infty} b_n = b}$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ (Eulersche Zahl $e = 2,71\ldots$)
bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$ (konvergent)

$|a_n - e^x| < 10^{-8}$ maximaler Fehler

$\Rightarrow n \geq n_0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$ (bestimmt divergent)

c) $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ (konvergent)

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad (a > 0)$

1.2.1. Rechenregeln für Grenzwerte

$(a_n), (b_n)$ Folgen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm b_n = a \pm b$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$
3. Falls $b \neq 0$ und $b_n \neq 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot a \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$

Sandwich-Lemma: sind $(a_n), (b_n), (c_n)$ Folgen und gilt

1. $a_n \leq b_n \leq c_n$ «Sandwich»
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

Dann ist (b_n) konvergent und es gilt $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n}$

Beispiel: $b_n = \dfrac{\sin(n)}{n} \qquad (n > 0)$

Es gilt:

$$\begin{aligned} -1 \le \sin(n) &\le 1 \,|: n \\ \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{1}{n}}_{a_n \to 0} \le \underbrace{\frac{\sin(n)}{n}}_{b_n} &\le \underbrace{\frac{1}{n}}_{c_n \to 0} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Sandwich-Lemma $b_n = \dfrac{\sin(n)}{n}$ ist konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)}{n} = 0$

Definition:

a) Eine (unendliche) Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_n$ heißt <u>konverget</u>, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass Folge (s_n) der <u>Partialsummen</u>
$s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$
gegen a konvergiert, d.h. $a = \lim\limits_{n\to\infty} s_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$, wir schreiben dann

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a}$$

und nennen a den Grenzwert der Reihe; ist die Reihe nicht konvergent, so heißt sie divergent.

b) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergent ist.

c) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt bestimmt divergent, wenn die Folge $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ der Partialsummen bestimmt divergent ist; wir schreiben dann

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \pm\infty}$$

ansonsten heißt die Reihe unbestimmt divergent; $\pm\infty$ heißt uneigentlicher Grenzwert.

Beispiel:

1. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} q^k = q^0 + q^1 + q^2 + \ldots = \dfrac{1}{1-q}$ $\quad (0 \leq q < 1)$ (geometrische Reihe)

2. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

3. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$ (harmonische Reihe)

4. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$

Bemerkung: Eine absolut konvergente Reihe ist auch konvergent (absolut konvergent $\Rightarrow$ konvergent). Die Umkehrung gilt i.a. nicht.

1.2.2. Konvergenzkriterien für Reihen

hinreichende Kriterien

1. Quotientenkriterium (D'Almbert)

Gilt $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q\left\{\begin{array}{c} <1 \\ >1 \end{array}\right\}$, so ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \left\{\begin{array}{c} \text{konvergent} \\ \text{divergent} \end{array}\right\}$.

2. Wurzelkriterium (Cauchy)

   Gilt $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = q\left\{\begin{array}{c} <1 \\ >1 \end{array}\right\}$, so ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \left\{\begin{array}{c} \text{konvergent} \\ \text{divergent} \end{array}\right\}$.

3. Majorantenkriterium

   Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent und $|b_k| \le a_k$ für alle $k \ge N$, so ist auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent.

   Ebenso gilt: Ist $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ divergent und gilt $b_k \ge a_k$ für alle $k \ge N$, so ist auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ divergent.

4. Kriterium für alternierende Reihen (Leibniz)

   Ist (a_n) eine monoton fallende Folge, d.h. $a_0 \ge a_1 \ge a_2 \ge \ldots$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$.

Bemerkung: Notwendiges Kriterium für Konvergenz (Bedingung)

Ist die Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergent, so ist (a_k) eine sogenannte Nullfolge, d.h. $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$.

Implikation $A \to B$ «aus A folgt B», «A impliziert B»
Die Gültigkeit der Bedingung A ist hinreichend für die Gültigkeit von B
d.h. A ist eine hinreichende Bedingung/Kriterium für B.

Die Gültigkeit der Bedingung B ist notwendig für die Gültigkeit von A
d.h. B ist eine notwendige Bedingung/Kriterium für A.

«Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ konvergiert»→«(a_k) ist Nullfolge»

Rechenregeln für konvergente Reihen

Es seien $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k = a$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k = b$ konvergente Reihen, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dann sind auch die Reihen $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k)$ und $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha a_k$ konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k \pm b_k) = a \pm b$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha a_k = \alpha a$$

Sind insbesondere $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ <u>absolut konvergent</u>, so ist auch das Cauchy-Produkt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{\sum_{m=0}^{k} a_m b_{k-m}}_{c_k}$$

absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = a \cdot b$$

2. Stetigkeit von Funktionen

Definition: Grenzwerte bei Funktionen

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion $(\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R})$ und $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Man schreibt

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ $\quad$ ($c =$ Grenzwert von $f(x)$ für $x \to a$) falls für jede Folge $(x_n), x_n \in \mathbb{D}$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$ gilt.

b) $\lim\limits_{x \to a^\pm} f(x) = c$ $\quad$ ($c =$ rechts-/linksseitiger Grenzwert von $f(x)$ für $x \to a^\pm$) falls für jede Folge $(x_n), x_n \in \mathbb{D}, x_n \begin{smallmatrix} > \\ < \end{smallmatrix} a$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = c$ gilt.

Bemerkung: Der Grenzwert $c = \lim_{x \to a} f(x)$ existiert genau dann, wenn die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x \to a^\pm} f(x)$ existieren und übereinstimmen. In diesem Fall gilt
$\lim_{x \to a^\pm} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$.

Beispiel: $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ Signum-Funktion (Signum $\triangleq$ Vorzeichen)

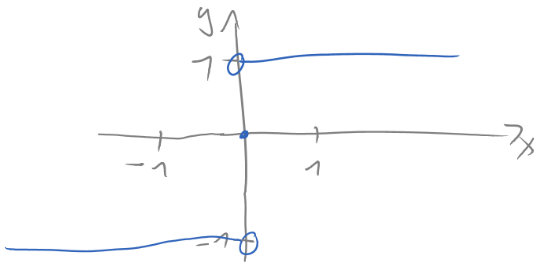


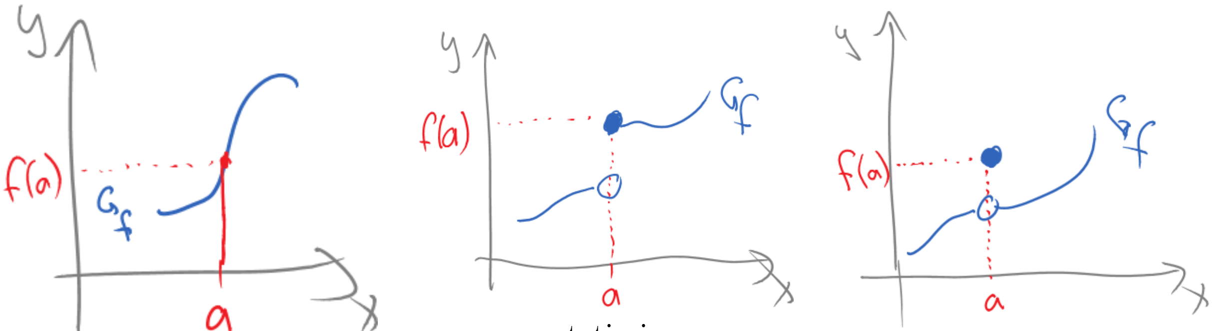
Abbildung 2.1.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn}(x) = -1$$
$$\neq$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn}(x) = 1$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn}(x)$ existiert nicht, obwohl die einseitigen Grenzwerte existieren.

Definition: Stetigkeit

Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $a \in \mathbb{D}$. Die Funktion f heißt <u>stetik in a</u>, falls $\boxed{\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)}$ gilt; ansonsten heißt f <u>unstetig in a</u>. f heißt <u>stetig</u> (in $\mathbb{D}$), falls f in <u>jedem</u> $a \in \mathbb{D}$ stetig ist; ansonsten heißt f <u>unstetig</u>.



stetig in a unstetig in a unstetig in a

Abbildung 2.2.

Bemerkung:

1. f ist stetig in a, wenn der Graph von f bei $x = a$ keinen «Sprung» macht.

2. Alle ganzrationalen und gebrochenrationalen Funktionen sind stetig,
   alle Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen sind stetig,
   alle trigonometrischen Funktionen sind stetig,
   alle Logarithmusfunktionen sind stetig.

3. $\epsilon - \delta$-Kriterium der Stetigkeit

   f ist stetig in $a \in \mathbb{D} \leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{D} |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

Satz:

Zwischenwertsatz

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und es gelte $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Dann existiert ein $x_0 \in]a, b[$ mit $f(x_0) = 0$.

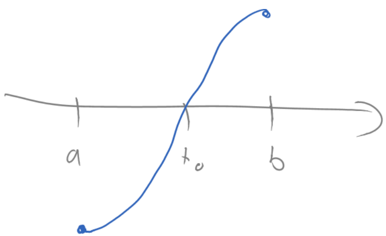


Abbildung 2.3.

3. Differentiation

3.1. Differenzierbarkeit

Problem: Bestimmung der Steigung der Tangente an den Graphen von f in Punkt $P(x_0; f(x_0))$

Sekantensteigung $m_{s,\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

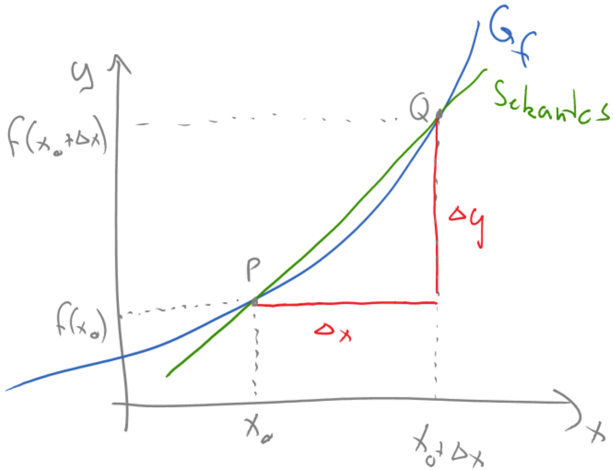


Abbildung 3.1.

Für $\Delta x \to 0$ geht die Sekante in die Tangente t über (im Grenzfall)

Für die Steigung m_t der Tangente t gilt dann

$m_t = \lim\limits_{\Delta x \to 0} m_{s,\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ (falls der Grenzwert sprich die Tangente existiert)

Definition:

a) $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt <u>differenzierbar in $x_0 \in \mathbb{D}$</u>, wenn der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

existiert; $f'(x_0)$ heißt <u>Differentialquotien in x_0</u> oder <u>Ableitung von f in x_0</u>; man schreibt auch

$$f'(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \text{ (Leibniz-Schreibweise)}$$

($\mathrm{d}f$ und $\mathrm{d}x$ heißen <u>Differentiale</u>)

b) $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ heißt <u>differenzierbar</u> (in $\mathbb{D}$), wenn f differenzierbar in <u>jedem</u> $x_0 \in \mathbb{D}$ ist.

Bemerkung: $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ ist genau dann in $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar, wenn die einseitigen Grenzwerte $\lim_{\Delta x \to 0^\pm} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ existieren und übereinstimmen.

Satz:

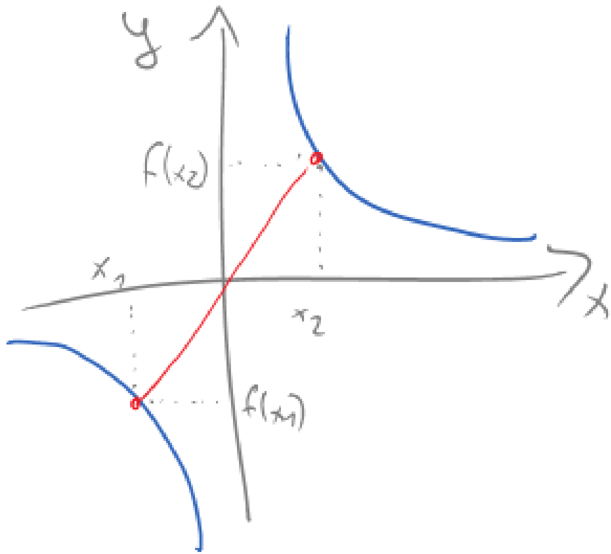
Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in \mathbb{D}$ differenzierbar, so ist f in x_0 stetig «Differenzhierbarkeit»$\to$«Stetigkeit».

Satz: Ist $f\ :]a;b[\to\mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f'(x) \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0$ in $]a;b[$, so ist f streng monoton $\left\{\begin{matrix}\text{steigend}\\ \text{fallend}\end{matrix}\right\}$ auf $]a;b[$.

Abbildung 3.2.

Beachte: Die Voraussetzung im obigen Satz, dass $\mathbb{D}=]a;b[$ ein Intervall ist, ist wesentlich, denn z.B. gilt für $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}, x\mapsto\frac{1}{x}$ folgendes:
$f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$, jedoch ist f <u>nicht</u> streng monoton fallend.

Auf dem Jeweiligen Intervall $]-\infty;0[$ bzw. $]0;\infty[$ ist f streng monoton fallend, jedoch nicht auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.



streng monoton fallend auf $]-\infty;0[$

streng monoton fallend auf $]0;\infty[$

Abbildung 3.3.

Satz:

Regel von L'Hospital

Führt die Betrachtung von $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ auf einen unbestimmten Ausdruck der Form «$\frac{0}{0}$» bzw. «$\frac{\infty}{\infty}$», so gilt $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$

Die Regel ist wiederholt anwendbar.

Anwendung der L'Hospitalschen Regel auf weitere unbestimmte Ausdrücke durch vorherige Transformation.

$\varphi(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$ führt zu unbestimmten Ausdruck	Transformation
$f(x)\cdot g(x)$	«$0\cdot\infty$», «$0\cdot -\infty$»	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$
$f(x) - g(x)$	«$\infty - \infty$»	$\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}$
$f(x)^{g(x)}$	«0^0», «∞^0», «$1^{\pm\infty}$»	$\lim\limits_{x\to x_0} e^{g(x)\ln(f(x))}$ $(f(x) > 0)$

Beispiel:

1. Die Betragsfunktion $|\ldots| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ ist in $x = 0$ <u>nicht</u> differenzierbar.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

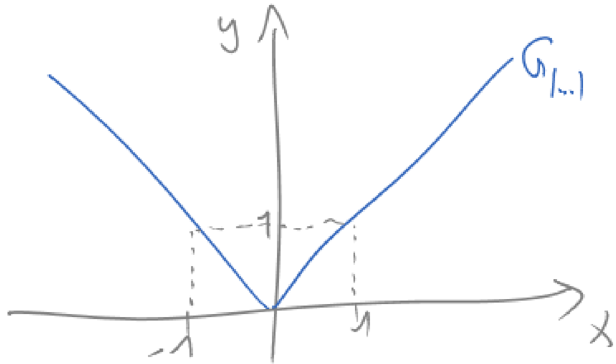


Abbildung 3.4.

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = +1$$

$\Rightarrow$ einseitige Grenzwerte existieren, stimmen jedoch <u>nicht</u> überein.

2. $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & \text{falls } x < 0 \\ (x+1)^2, & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$

Behauptung: f ist in $x = 0$ <u>nicht</u> differenzierbar (HÜ)

3.2. Ableitung erster und höherer Ordnung

Definition:

a) Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ differenzierbar (in $\mathbb{D}$), so heißt die Funktion $f' : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, x \mapsto f'(x)$ die <u>Ableitung</u> von f.

b) Ist die Ableitung $f' : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ differenzierbar (in $\mathbb{D}$), so heißt $f''(x) = (f'(x))'$ die

zweite Ableitung von f;
analog definiert man die k-te Ableitung durch
$f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)}(x))'$,
falls $f^{(k)}$ existiert.

Beispiel:

1. $f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f''(x) = 2$

2. $f(x) = \sin(x), f'(x) = \cos(x), f''(x) = -\sin(x)$

3. $f(x) = e^x, f'(x) = e^x, f''(x) = e^x$

4. $f(x) = \ln x, f'(x) = \frac{1}{x}, f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

3.3. Ableitungsregeln

Satz:

Es seien u, v differenzierbare Funktionen, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Summenregel $\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$

b) Faktorregel $\boxed{(\alpha u)' = \alpha \cdot u'}$ (α = multiplikative Konstante)

c) Produktregel $\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$

d) Quotientenregel $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}$

e) Kettenregel $\boxed{(u \circ v)' = (u' \circ v) \cdot v'}$ Nachdifferenzieren = Multiplikation mit v'

bzw. $u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

bzw. $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$

3.3.1. Ableitung elementarer Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1} $(n \in \mathbb{R})$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Bemerkung: Mehrfaches Nachdifferenzieren

$$u(v(w(x)))' = u'(v(w(x))) \cdot v(w(x))' = u'(v(w(x))) \cdot v'(w(x)) \cdot w'(x)$$

bzw. $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} \cdot \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}w} \cdot \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$

Beispiel: $[\sin(\sqrt{x^2+1})]' = \cos(\sqrt{x^2+1}) \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$

3.4. Ableitung der Umkehrfunktion

Satz: Es sei $f : \mathbb{D} \to E$ eine differenzierbare, bijektive Funktion. Dann ist auch die Umkehrfunktion $f^{-1} : E \to \mathbb{D}$ differenzierbar und es gilt

$$\boxed{{f^{-1}}'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Beispiel:

1. $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ist bijektiv.

   Umkehrfunktion $\ln x : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

   $$(\ln x)' = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

2. $\sin : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$ bijektiv

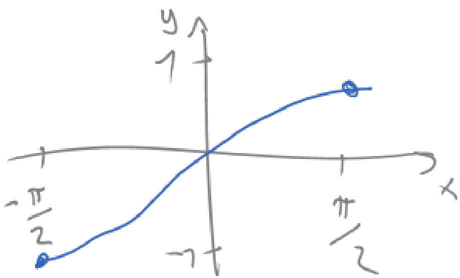


Abbildung 3.5.

Umkehrfunktion $\arcsin(= \sin^{-1}) : [-1; 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

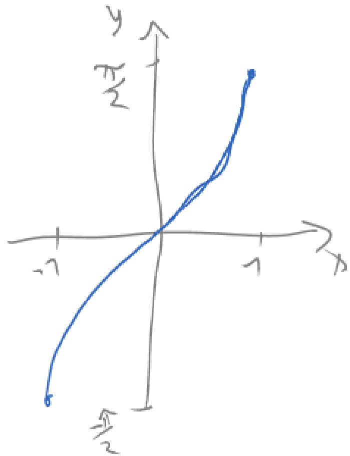


Abbildung 3.6.

$$\arcsin(x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

trigonometrischer Pythagoras: $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
$\Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$$\underbrace{\Leftrightarrow}_{\cos x \geq 0} \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\cos(\arcsin(x)) > 0 \quad (-\tfrac{\pi}{2} \leq \arcsin x \leq \tfrac{\pi}{2})$$

$$\Rightarrow arcsin(x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3. Ableitung $\arccos(x)$ HÜ

3.5. Extremwerte und Krümmung

Definition: $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ besitzt bei $x_0 \in]a;b[$ ein (isoliertes) $\left\{ \begin{array}{c} \text{lokales Maximum} \\ \text{lokales Minimum} \end{array} \right\}$, wenn $\left\{ \begin{array}{c} f(x) < f(x_0) \\ f(x) > f(x_0) \end{array} \right\}$ für alle $x \in U_\epsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$ gilt (für ein $\epsilon > 0$).
$U_\epsilon(x_0) =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ «ϵ-Umgebung von x»

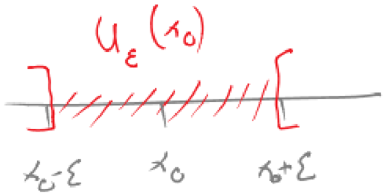


Abbildung 3.7.

Der Punkt $P(x_0; f(x_0))$ heißt dann $\left\{ \begin{array}{c} \underline{\text{Hochpunkt (HP)}} \\ \underline{\text{Tiefpunkt (TP)}} \end{array} \right\}$. Ein lokales Maximum/Minimum heißt auch lokales Extremum.

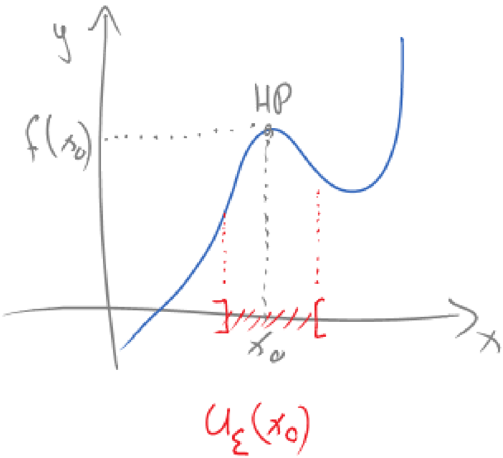


Abbildung 3.8. – lokales Maximum

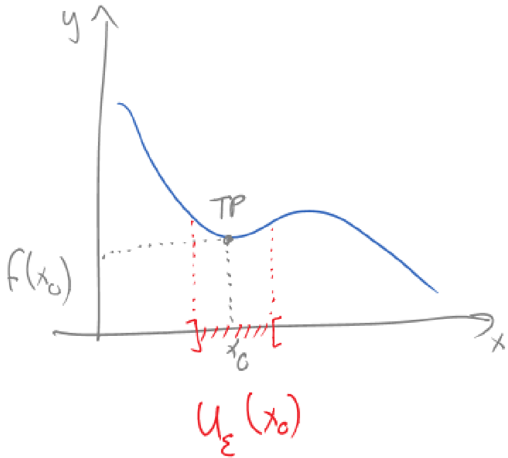


Abbildung 3.9. – lokales Minimum

f hat bei $x_0 \in [a;b]$ ein $\left\{\begin{array}{c}\text{globales Maximum}\\ \text{globales Minimum}\end{array}\right\}$, wenn $\left\{\begin{array}{c} f(x) \leq f(x_0) \\ f(x) \geq f(x_0)\end{array}\right\}$ für alle $x \in [a;b]$ gilt.

$f(x_0)$ heißt dann globales Maximum bzw. Minimum (von f).

Bemerkung: hat f bei $x_1, \ldots, x_n$ alle lokalen Extrema, so gilt:
globales Maximum/Minimum $=$ Max/Min$\{f(a), f(x_1), \ldots, f(x_n), f(b)\}$ Ränder des Intervalls berücksichtigen!

Definition: Hat $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ bei $x = a$ oder $x = b$ (Ränder des Intervalls) ein globales Maximum/Minimum, so nennt man $f(x_0)$ ein Randmaximum/Randminimum.

Satz:

f sei differenzierbar; $x_0 \in]a;b[$

f hat bei x_0 ein lokales $\left\{ \begin{array}{c} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} \right\}$

$\Leftrightarrow f'$ wechselt bei x_0 das Vorzeichen $\left\{ \begin{array}{c} \text{von } + \text{ nach } - \\ \text{von } - \text{ nach } + \end{array} \right\}$.

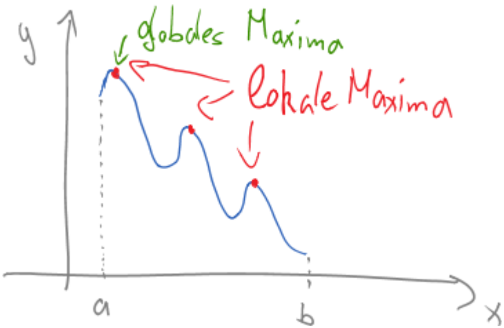


Abbildung 3.10.

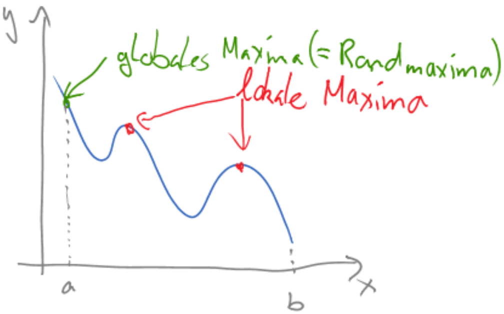


Abbildung 3.11.

Satz:

notwendiges Kriterium für Extremum

f sei stetig differenzierbar, d.h. differenzierbar und f' sei stetig.
Besitzt f bei $x_0 \in]a;b[$ ein lokales Extremum, so gilt $\boxed{f'(x_0) = 0}$

Satz:

hinreichendes Kriterium für Extremum

f sei zweimal stetig differenzierbar, d.h. f'' existiert und ist stetig.
Gilt dann $f'(x_0) = 0$ und $\left\{ \begin{array}{c} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array} \right\}$ für ein $x_0 \in]a; b[$, so hat f bei x_0 ein (isoliertes) $\left\{ \begin{array}{c} \text{lokales Minimum} \\ \text{lokales Maximum} \end{array} \right\}$.

Beispiel:

1. $f(x) = -2(x-3)^2 + 4$
   $f'(x) = -4(x-3) = -4x + 12$
   $f''(x) = -4 < 0$
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 3$
   $\Rightarrow f$ hat bei $x = 3$ ein lokales Maximum

2. $f(x) = x^4$
   $f'(x) = 4x^3$

$f''(x) = 12x^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Jedoch ist $f''(0) = 0 \Rightarrow$ Kriterium nicht anwendbar.

$f'(x) = 4x^3$ hat aber bei $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+ \Rightarrow f$ hat bei $x = 0$ ein lokales Minimum.

3. $f(x) = |x|$

   $f'(x) = \begin{cases} +1, & \text{für } x > 0 \\ -1, & \text{für } x < 0 \end{cases}$

   $f'(0)$ existiert nicht.

   $f'(x) = \operatorname{sgn}(x) \quad (x \neq 0)$

   $f'(x)$ hat bei $x = 0$ einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+ \Rightarrow f$ hat bei $x = 0$ ein lokales Minimum.

Definition: f heißt in einer Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ von x_0 (oder bei x_0 (mit kleiner Umgebung)) $\left\{\begin{matrix} \text{linksgekrümmt} \\ \text{rechtsgekrümmt} \end{matrix}\right\}$, wenn die Ableitung f' auf $U_\epsilon(x_0)$ $\left\{\begin{matrix} \text{streng monoton steigt} \\ \text{streng monoton fällt} \end{matrix}\right\}$.

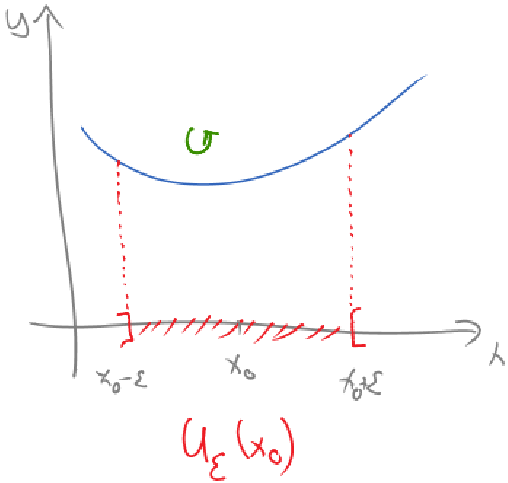


Abbildung 3.12. – linksgekrümmt

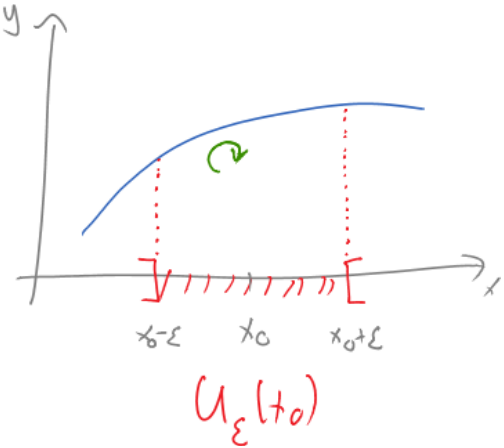


Abbildung 3.13. – rechtsgekrümmt

Satz:

f sei zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ ist bei } x_0 \left\{ \begin{array}{c} \text{linksgekrümmt} \\ \text{rechtsgekrümmt} \end{array} \right\} \text{ genau dann, wenn } \left\{ \begin{array}{c} f''(x_0) > 0 \\ f''(x_0) < 0 \end{array} \right\} \text{ gilt.}$$

Definition: Der Zahlenwert $\boxed{\kappa = \dfrac{y''(x_0)}{(1+y'(x_0)^2)^{\frac{3}{2}}}}$ heißt Krümmung der Kurve $y = f(x)$ im Punkt $P(x_0; f(x_0))$

Mit $\boxed{\rho = \dfrac{1}{|\kappa|}}$ bezeichne man den Krümmungsradius.

Bemerkung: ρ ist der Radius des Krümmungskreises (Schmiegkreis) an die Kurve $y = f(x)$ im Punkt $P(x_0; f(x_0))$.

Beispiel: Behauptung: Ein Kreis mit Radius R hat konstante Krümmung $|\kappa| = \dfrac{1}{R}$.

$x^2 + y^2 = R^2$

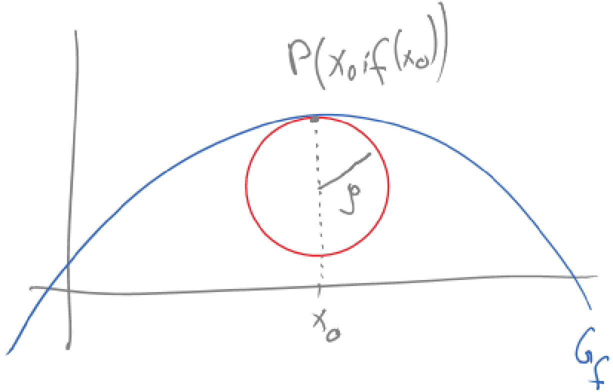


Abbildung 3.14. – ρ = Krümmungsradius

Kreisgleichung nach y umstellen

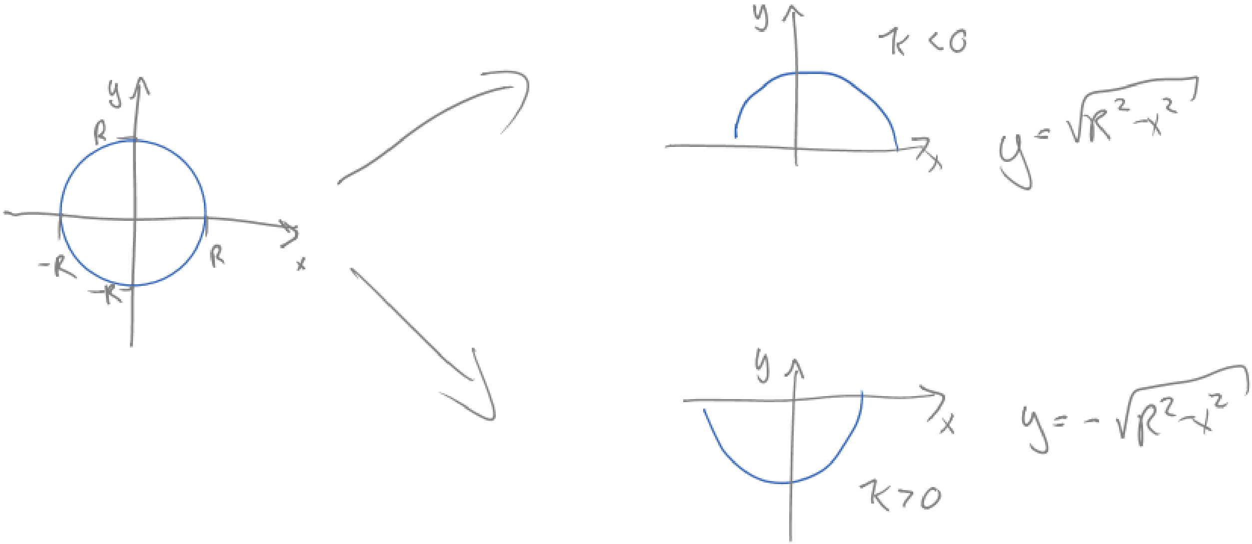


Abbildung 3.15.

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= R^2 \\
\Leftrightarrow y^2 &= R^2 - x^2 \mid \pm\sqrt{\ } \\
\Leftrightarrow y &= \pm\sqrt{R^2 - x^2}
\end{aligned}
$$

Berechne Krümmung κ für oberen Halbkreis:

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{R^2 - x^2} \\
y' &= \frac{1}{2\sqrt{R^2 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \\
y'' &= \frac{-\sqrt{R^2 - x^2} + x \cdot \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}}{R^2 - x^2} = H
\end{aligned}
$$

Definition: $W(x_0; f(x_0))$ heißt Wendepunkt von $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{D}$, wenn f bei x_0 das Krümmungsverhalten wechselt.

Gleichwertig mit dem Wechsel des Krümmungsverhaltens ist der Wechsel des Vorzeichens der zweiten Ableitung f'' bei $x = x_0$.

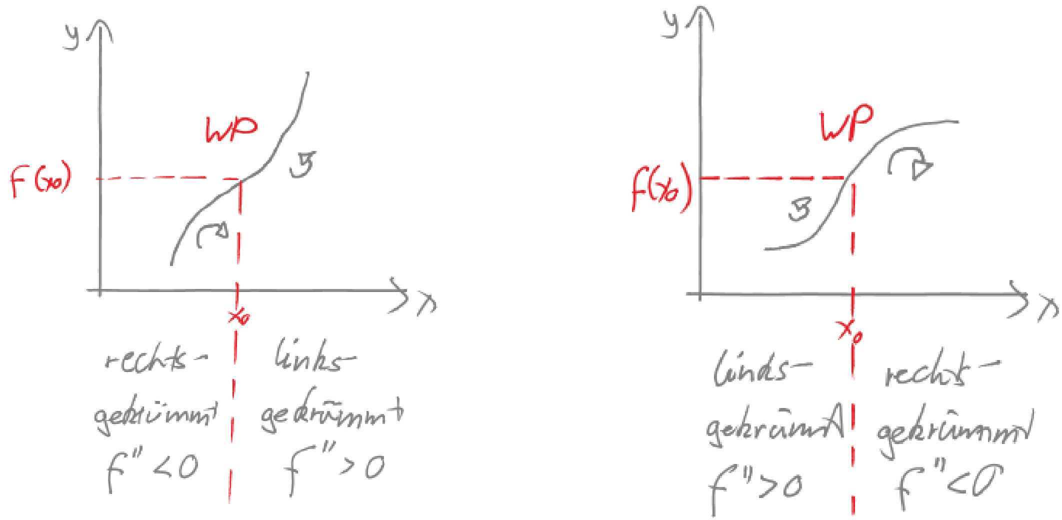


Abbildung 3.16.

Satz:

hinreichendes Kriterium für WP

f sei 3-mal differenzierbar und f''' sei in x_0 stetig.

$x_0 \in]a;b[$.

Gilt dann $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$, so hat f bei x_0 einen Wendepunkt.

Bemerkung: Ist z.B. $f'''(x_0) = 0$, so kann obiges Kriterium nicht verwendet werden $\rightarrow$ Vorzeichenwechsel von f''' bei $x = x_0$ nachweisen.

4. Elementare Funktionen und Kurven

4.1. Potenzfunktionen

Definition: Funktionen der Form $\boxed{f(x) = a \cdot x^r}$ $(a, r \in \mathbb{R})$ heißen Potenzfunktionen.

A) <u>Ganzzahlige Exponenten</u> $r = n \in \mathbb{Z}$

$\boxed{n > 0}$ $(\mathbb{D} = \mathbb{R})$

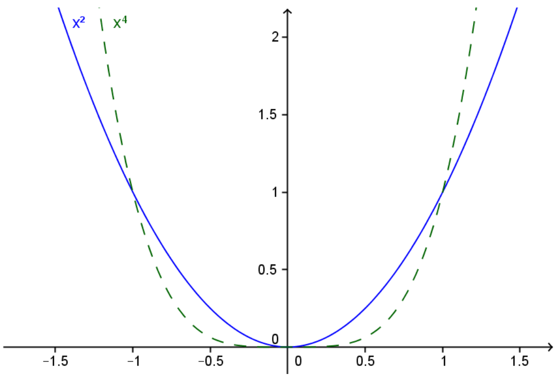


Abbildung 4.1. – n gerade (Achsen-symmetrisch)

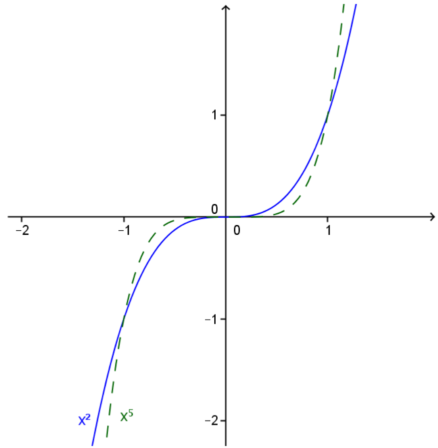


Abbildung 4.2. – n ungerade (Punkt-symmetrisch)

$\boxed{n < 0}$ $(\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\})$

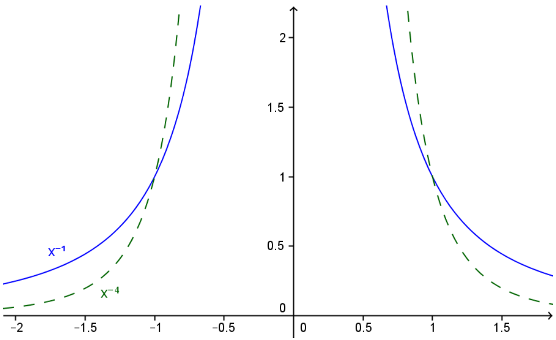


Abbildung 4.3. – n gerade (Achsen-symmetrisch)

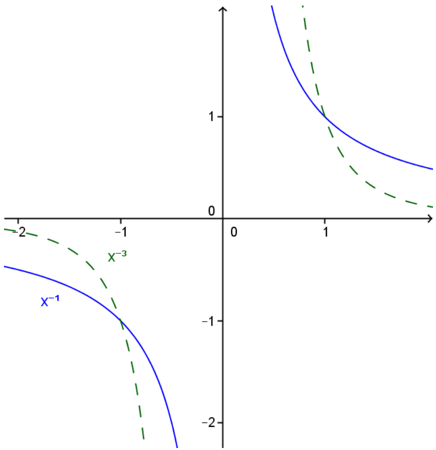


Abbildung 4.4. – n ungerade (Punkt-symmetrisch)

B) <u>Rationale Exponenten</u> $r^{\frac{p}{q}}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, r \notin \mathbb{Z}$

$\boxed{n > 0}$ $(\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+)$ $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$

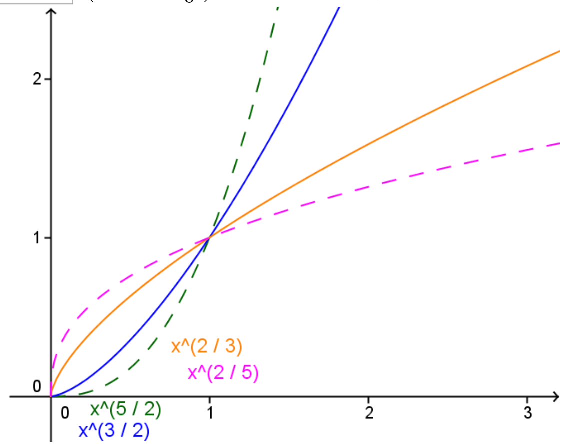


Abbildung 4.5.

$\boxed{n < 0}$ $(\mathbb{D} = \mathbb{R}^+)$

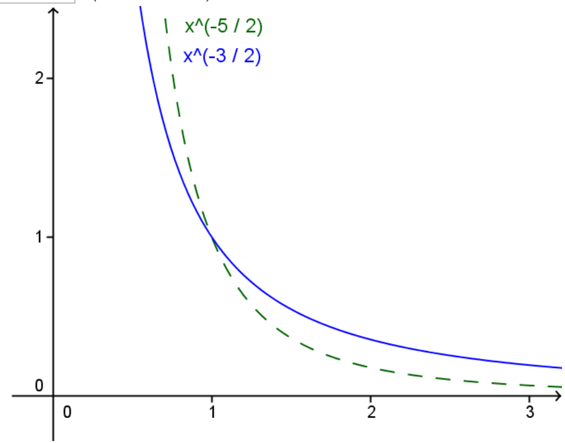


Abbildung 4.6.

C) <u>Irrationaler Exponent</u> z.B. $r = \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$

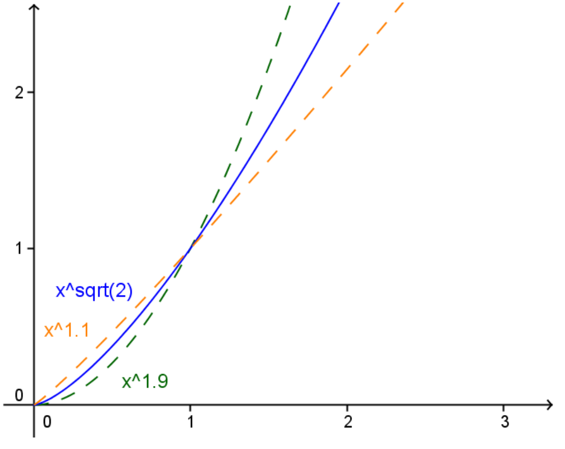


Abbildung 4.7.

Umkehrfunktion zu $f(x) = x^r$ ist $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{r}}$

$G_{f^{-1}}$ durch Spiegelung von G_f an der Winkelhalbierenden $y = x$.

Ableitung: $(x^r)' = rx^{r-1} \qquad (r \in \mathbb{R})$

Grenzwerte: für $x \to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^r = \begin{cases} +\infty & \text{, falls } r \text{ gerade} \\ \pm\infty & \text{, falls } r \text{ ungerade} \end{cases} \qquad r \in \mathbb{Z}, r > 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^r = +\infty \text{ für } r \notin \mathbb{Z}, r > 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^r = 0 \text{ für } r \in \mathbb{Z}, r < 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^r = 0 \text{ für } r \notin \mathbb{Z}, r < 0$$

4.2. Ganzrationale Funktionen

Definition: Funktionen der Form
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
$(a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}, a_n \neq 0)$ heißen ganzrationale Funktionen, n ist der Grad von f; $n = \text{grad}(f)$.

- $n = 1$: $f(x) = a_1 x + a_0$ lineare Funktionen

- $n = 2$: $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ quadratische Funktionen

- $n = 3$: $f(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ kubische Funktionen

Nullstellen mit Vielfachheiten

Satz:

Ist x_0 eine Nullstelle einer ganzrationalen Funktion $f(x)$ vom Grad n so kann $f(x)$ geschrieben werden als

$$\boxed{f(x) = (x - x_0)^r \cdot g(x)}$$

mit $g(x_0) \neq 0$; $g(x)$ ist eine ganzrationale Funktion vom Grad $n - r$

r heißt Vielfachheit der Nullstelle x_0 von f

Bemerkung: Die Darstellung erhält man durch (sukzessive) Polynomdivision.

Satz:

Hauptsatz der (reellen) Algebra

Jede ganzrationale Funktion $f(x)$ vom Grad $n \geq 1$ besitzt eine Darstellung der Form

$$\boxed{f(x) = a \cdot (x - x_1)^{e_1} \cdot (x - x_2)^{e_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_r)^{e_r} \cdot q_1 \cdot \ldots \cdot q_s}$$

vorbei $x_1, \ldots, x_r$ die Nullstellen von $f(x)$ mit Vielfachheiten $e_1, \ldots, e_r$, $a \in \mathbb{R}$ und $q_1, \ldots, q_s$ (Unzerlegbare, d.h. Diskriminante $D < 0$) quadratische ganzrationale Funktionen sind. Obige Darstellung heißt vollständige Faktorisierung von $f(x)$. Die Faktoren $(x - x_i)$ heißen Linearfaktoren $(i = 1, \ldots, r)$.

Folgerung: Eine ganzrationale Funktion $f(x)$ vom Grad $n \geq 1$ besitzt (mit Vielfachheiten gezählt) höchstens n Nullstellen.

Beispiel: $f(x) = 2x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 4x + 2$

Finde Nulstellen von $f(x)$ durch «Probieren» Teste alle Teiler des «konstanten Glieds», hier 2:

$\pm 1; \pm 2 \Rightarrow f(1) = 0$

$\Rightarrow$ Polynomdivision $f(x) : (x-1) = 2x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 2x - 2$

$$f(x) : (x-1) = 2x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 2x - 2 \quad | \cdot (x-1)$$

$$f(x) = \underbrace{(x-1)}_{\text{Linearfaktor}} \cdot \underbrace{(2x^4 - 2x^3 + 0x^2 + 2x - 2)}_{f_1(x)}$$

$f_1(1) = 0 \qquad \Rightarrow$ Polynomdivision $f_1(x) : (x-1) = 2x^3 + 0x^2 + 0x + 2$

$$f_1(x) = (x-1) \cdot (2x^3 + 2) = 2 \cdot \underbrace{(x-1)}_{\text{Linearfaktor}} \cdot \underbrace{(x^3 + 1)}_{f_2(x)}$$

$$f(x) = 2 \cdot (x-1)^2 \cdot \underbrace{(x^3 + 1)}_{f_2(x)}$$

Wegen $f_2(1) \neq 0$ kann kein weiterer Linearfaktor $(x-1)$ durch Polynomdivision abgespalten werden.

Da $f_2(-1) = 0$ $\Rightarrow$ Polynomdivision $f_2(x) : (x+1) = x^2 - x + 1$

$f_2(x) = \underbrace{(x+1)}_{\text{Linearfaktor}} \cdot \underbrace{(x^2 - x + 1)}_{f_3(x)}$

Für $f(x)$ folgt: $f(x) = 2 \cdot (x-1)^2(x+1)(x^2 - x + 1)$ (*)

Die quadratische Funktion $x^2 - x + 1$ ist (über $\mathbb{R}$) unzerlegbar, da für die Diskriminante $D = 1 - 4 < 0$ gilt.

$\Rightarrow$ (*) ist vollständige Faktorisierung von $f(x)$

$f(x)$ hat die Nullstellen:

$x_1 = 1$ (2-fach)

$x_2 = -1$ (1-fach)

Der quadratische Faktor $x^2 - x + 1$ ist stets positiv, d.h. $x^2 - x + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

<u>VZT für $f(x)$:</u>

	$-\infty < x < -1$	$x = -1$	$-1 < x < 1$	$x = 1$	$1 < x < \infty$
2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(x-1)^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$x^2 - x + 1$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Skizze: $f(0) = 2$

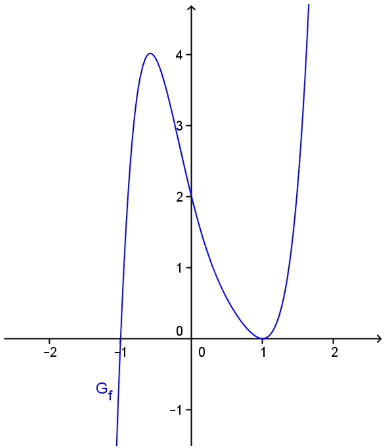
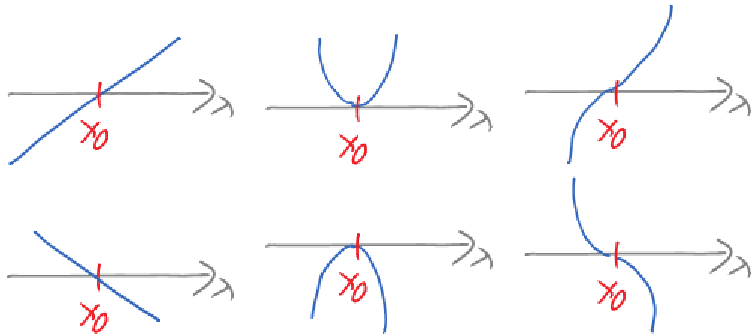


Abbildung 4.8.

Verlauf von G_f in der Nähe von einer Nullstelle x_0 mit Vielfachheit r.



$r = 1$ $r > 1$ gerade $r > 1$ ungerade

Abbildung 4.9.

Umkehrfunktion: meist nur stückweise definiert (auf Intervallen, in denen f streng monoton steigt/fällt).

Ableitung: $f'(x) = na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_2 2x + a_1$

Grenzwerte: $\boxed{\lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \lim\limits_{x\to\pm\infty} a_n x^n}$

Der Term $a_n x^n$ heißt Leitterm von $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$. Das Verhalten von $f(x)$ im Unendlichen wird durch das Verhalten des Leitterms im Unendlichen bestimmt.

Beweis: $$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n + \ldots + a_0 = \lim_{x\to\pm\infty} (a_n x^n)\left(\underbrace{1 + \frac{a_{n-1}}{a_n}\frac{1}{x} + \frac{a_{n-2}}{a_n}\frac{1}{x^2} + \ldots + \frac{a_1}{a_n}\frac{1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n}\frac{1}{x^n}}_{\to 1}\right) =$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$$

4.3. gebrochen rationale Funktionen

Definition: Funktionen der Form

$$\boxed{f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}}$$

wobei $Z(x), N(x)$ ganzrationale Funktionen sind, heißen gebrochen-rationale Funktionen.

Ist $\text{grad}(Z(x)) < \text{grad}(N(x))$, so heißt $f(x)$ echt gebrochen-rational, ansonsten unecht gebrochen-rational.

Maximale Definitionsmenge: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{x \mid N(x) = 0\}$

Nullstellen: x_0 ist Nullstelle von $f(x)$
$\Leftrightarrow Z(x_0) = 0$ und $x_0 \in \mathbb{D}$
$\Leftrightarrow Z(x_0) = 0$ und $N(x_0) \neq 0$

Definitionslücken: Definitionslücken = Nullstellen des Nenners $N(x)$

- Polstellen

- $\boxed{\text{Hebbare Definitionslücken}}$

x_0 ist Polstelle von $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$, wenn $|f(x)|$ (=Betrag von $f(x)$) in einer Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ unbegrenzt wächst, d.h. falls

$$\boxed{\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty, \ \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty}$$

x_0 ist hebbare Definitionslücke von $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$, wenn

$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = c < \infty}$ gilt.

Satz:

hinreichendes Kriterium für Polstelle

Gilt $Z(x_0) \neq 0$ und $N(x_0) = 0$, so hat $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$ bei $x = x_0$ einen Pol, d.h. x_0 ist eine Polstelle.

Allgemeine Vorgehensweise zur Bestimmung der Polstellen (mit entsprechender Ordnung) von

$f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$

1. Zerlege $Z(x)$ und $N(x)$ vollständig in lineare und (unzerlegbare) quadratische Faktoren (vollständige Faktorisierung)

2. Kürze anschließend gleiche Faktoren von Zähler und Nenner $\Rightarrow$ neuer Zähler $Z^*(x)$, neuer Nenner $N^*(x)$
   $Z^*(x)$ und $N^*(x)$ haben keine gemeinsamen (reellen) Nullstellen und es gilt:
   $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)} = \dfrac{Z^*(x)}{N^*(x)} \qquad (\text{auf } \mathbb{D})$
   Die Polstellen von $f(x)$ sind genau die Nullstellen von $N^*(x)$, die Vielfachheiten der Nullstelle von $N^*(x)$ sind die sogenannten <u>Ordnungen</u> der Polstellen (oder Pole).

Bemerkung: Ist x_0 eine hebbare Definitionslücke, d.h. $N(x_0) = 0$ und x_0 ist keine Polstelle, so besitzt der Graph von f an der Stelle $L(x_0; y_0)$ ein «Loch».

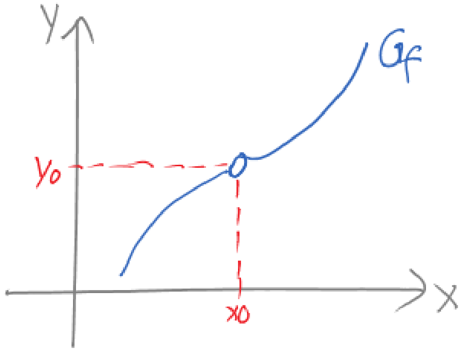


Abbildung 4.10.

Dabei gilt:

$$y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{Z(x)}{N(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{Z^*(x)}{N^*(x)} = \frac{Z^*(x_0)}{N^*(x_0)}$$

also:

$$\boxed{y_0 = \frac{Z^*(x_0)}{N^*(x_0)}}$$

$N^*(x_0) \neq 0$, da x_0 eine hebbare Definitionslücke ist.

Beispiel:

1. $f(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+1)}{(x-2)^2(x+2)} = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$

   keine gemeinsamen Faktoren: $Z(x) = Z^*(x), N(x) = N^*(x)$
   $\Rightarrow \dfrac{Z(x)}{N(x)} = \dfrac{Z^*(x)}{N^*(x)}$

   $\Rightarrow$ <u>Nullstellen</u>:

   $x_1 = 1$ (2-fach) (kein VZW)

   $x_2 = -1$ (1-fach) (VZW)

   $\Rightarrow$ <u>Polstellen</u>:

   $x_{p1} = 2$ (Ordnung 2) (kein VZW)

   $x_{p2} = -2$ (Ordnung 1) (VZW)

   alle Definitionslücken sind Polstellen $\Rightarrow$ keine hebbaren Definitionslücken

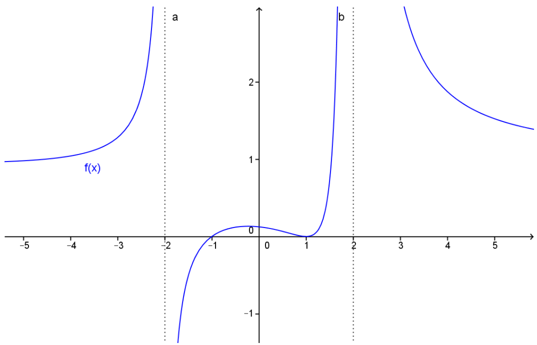


Abbildung 4.11.

2. $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)^3} = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$

   Definitionslücke: $x_1 = 1 \Rightarrow$ maximale Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

   $\Rightarrow$ Bruchterm vollständig Kürzen:
   $f(x) = \dfrac{x+2}{(x-1)^2} = \dfrac{Z^*(x)}{N^*(x)}$

   $\Rightarrow$ Nullstellen:
   $x_{n1} = -2 \quad$ (1-fach) (VZW)

   $\Rightarrow$ Polstellen:
   $x_{p1} = 1 \quad$ (2. Ordnung) (kein VZW)

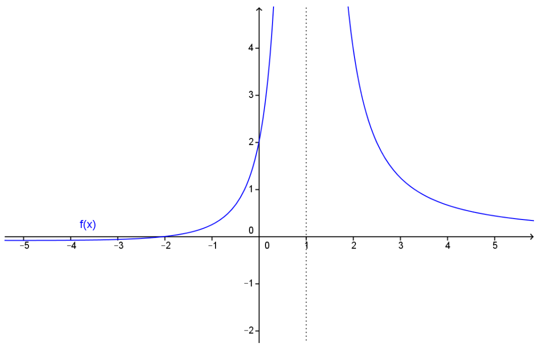


Abbildung 4.12.

3. $f(x) = \dfrac{2(x-2)^2(x+5)}{(x-1)(x-2)(x+5)}$

   Definitionslücken: $x_1 = -5, x_2 = 1, x_3 = 2$

   $\Rightarrow$ maximale Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5; 1; 2\}$

   Bruchterm vollständig Kürzen:
   $f(x) = \dfrac{2(x-2)}{x-1} = \dfrac{Z^*(x)}{N^*(x)}$

   $\Rightarrow$ Nullstellen:
   $Z^*(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \notin \mathbb{D} \Rightarrow f$ hat keine Nulstellen

   $\Rightarrow$ Polstellen:
   $x_{p1} = 1 \quad$ (1. Ordnung) (VZW)

   Hebbare Definitionslücken:
   $x_{h1} = -5; x_{h2} = 2 \quad (\Rightarrow$ 2 Löcher im Graphen)
   $y_{h1} = \lim\limits_{x \to x_{h1}} f(x) = \lim\limits_{x \to x_{h1}} \dfrac{Z(x)}{N(x)} = \lim\limits_{x \to x_{h1}} \dfrac{Z^*(x)}{N^*(x)} = \lim\limits_{x \to x_{h1}} \dfrac{Z^*(-5)}{N^*(-5)} = \dfrac{-14}{-6} = \dfrac{7}{3}$

$$y_{h2} = \lim_{x \to x_{h2}} f(x) = \lim_{x \to x_{h2}} \frac{Z(x)}{N(x)} = \lim_{x \to x_{h2}} \frac{Z^*(x)}{N^*(x)} = \lim_{x \to x_{h2}} \frac{Z^*(2)}{N^*(2)} = 0$$

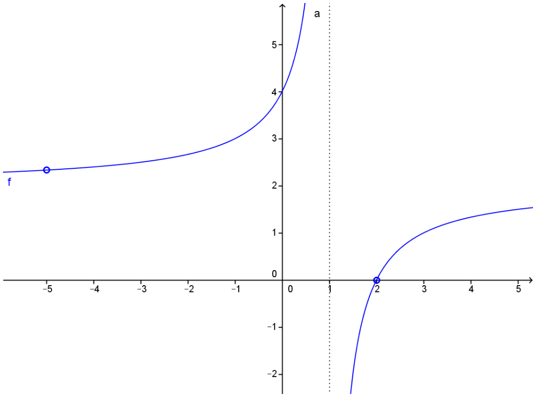


Abbildung 4.13.

Asymptoten:

- senkrechte Asymptoten:
  Ist x_0 eine Polstelle von $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$, so ist die senkrechte Gerade $x = x_0$ eine Asymptote von $f(x)$.

- Asymptoten im Unendlichen:
  Eine Funktion $p(x)$ heißt Asymptoten von $f(x)$ für $x \to \pm\infty$, wenn
  $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - p(x) = 0 \text{ bzw. } \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - p(x) = 0}$.

Satz:

1. Ist $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ eine <u>echt</u> gebrochen-rationale Funktion, so gilt $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{Z(x)}{N(x)} = 0$, d.h. die Gerade $y = 0$ ($\stackrel{\wedge}{=}$ x-Achse) ist Asymptote für $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$.

2. Ist $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ eine <u>unecht</u> gebrochen-rationale Funktion, d.h. $\text{grad}(Z(x)) \geq$

grad$(N(x))$, so erhält man aus der Polynomdivision (mit Rest) $Z(x) : N(x)$ eine ganz-rationale Funktion $p(x)$ und eine <u>echt</u> gebrochen-rationale Funktion $\frac{R(x)}{N(x)}$ mit $\frac{Z(x)}{N(x)} = p(x) + \frac{R(x)}{N(x)}$ $\qquad$ ($R(x)$ = Rest der Polynomdivision)

Dann ist $p(x)$ Asymptote für $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$, denn

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{Z(x)}{N(x)} - p(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{R(x)}{N(x)} = 0 \text{ (siehe 1.)}$$

Die Nullstellen von $\frac{R(x)}{N(x)}$ sind genau die Schnittstellen (= x-Koordinaten der Schnittpunkte) von $f(x)$ mit der Asymptote $p(x)$.

Beispiel: $f(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1}{x^2 + 3x + 2}$ (unecht gebrochen-rationale Funktion)

$Z(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1 = \frac{1}{2}(x^3 - 3x + 1)$
$Z(1) = 0$

$\Rightarrow (x^3 - 3x + 2) : (x - 1) = x^2 + x - 2$

$\Rightarrow Z(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x - 2)(x - 1)$

$x^2 + x - 2$ weiter zerlegen: Diskriminante $D = 1 - 4(-2) = 9 > 0$
$x_{1/2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2} \quad x_1 = -2, x_2 = 1$

$\Rightarrow Z(x) = \frac{1}{2}(x + 2)(x - 1)^2$

Analog für Nennerpolynom: $N(x) = x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$

Somit folgt:
$f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)} = \dfrac{\frac{1}{2}(x-1)^2(x+2)}{(x+1)(x+2)} = \dfrac{\frac{1}{2}(x-1)^2}{x+1} = \dfrac{(x-1)^2}{2(x+1)} = \dfrac{Z^*(x)}{N^*(x)}$

<u>Definitionslücken</u>: $x_1 = -1, x_2 = -2$

<u>maximale Definitionsmenge</u>: $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$

<u>Nullstellen</u>: $x_n = 1 \in \mathbb{D} \quad$ (2-fach)

Polstellen: $x_p = -1 \quad$ (1. Ordnung) (VZW)

hebbare Definitionslücke: $x_h = -2$

$$y_h = \lim_{x \to x_h} f(x) = \frac{Z^*(-2)}{N * (-2)} = -4{,}5$$

Asymptoten:

senkrechte Asymptote: $x = -1$

Asymptote im Unendlichen: Polynomdivision $Z(x) : N(x)$ bzw. $Z^*(x) : N^*(x) = (x-1)^2 : 2(x+1)$

$(x^2 - 2x + 1) : (2x + 2) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \; R(x) = 4$

$$\Rightarrow f(x) = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2} + \frac{4}{2x+2} = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{3}{2} + \frac{2}{x+1}$$

$\Rightarrow$ Asymptote für $x \to \pm\infty$

$p(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

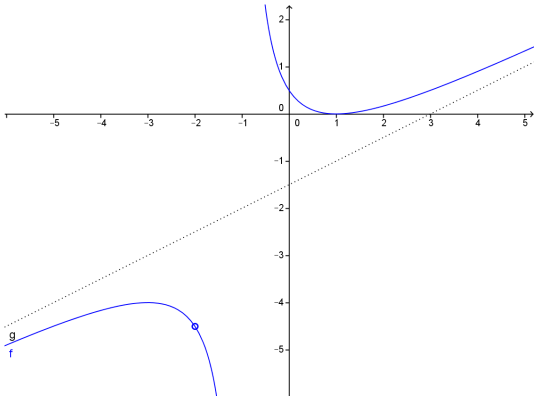


Abbildung 4.14.

4.4. Exponential- und Logarithmusfunktionen

Definition: Funktionen der Form $f(x) = a^x$ $(a > 0, a \neq 0)$ (oder allgemein $f(x) = c \cdot a^x, c \in \mathbb{R}, c \neq 0$) heißen Exponentialfunktionen ($\mathbb{D} = \mathbb{R}$)

$a > 1$:

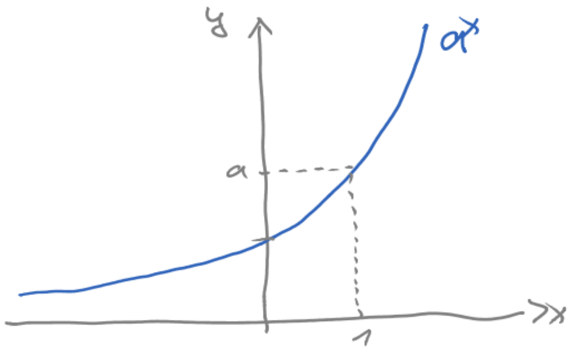


Abbildung 4.15.

streng monoton steigend

$\lim_{x \to +\infty} a^x = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$

$0 < a < 1$:

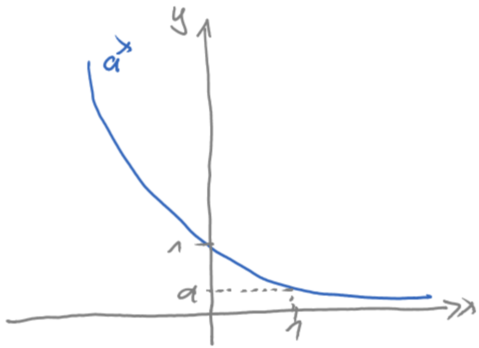


Abbildung 4.16.

streng monoton fallend

$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = \infty$

Für $a = e = 2{,}71\ldots$ Eulersche Zahl heißt $e^x = \exp(x)$ <u>natürliche Exponentialfunktion</u>:

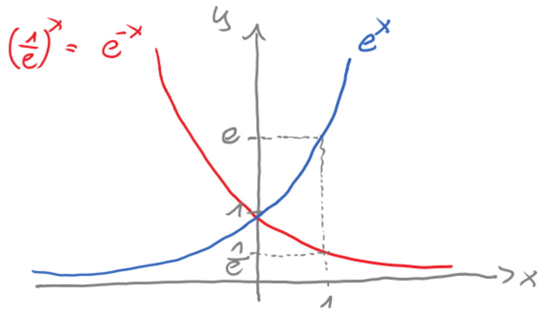


Abbildung 4.17.

Ableitung: $(a^x)' = a^x \cdot \ln(a)$ (insbesondere $(e^x)' = e^x$)

Definition: Funktionen der Form $f(x) = \log_a(x)$ $(a > 0, a \neq 0)$ heißen Logarithmusfunktionen $(\mathbb{D} = \mathbb{R}^+)$

$\underline{a > 0}$:

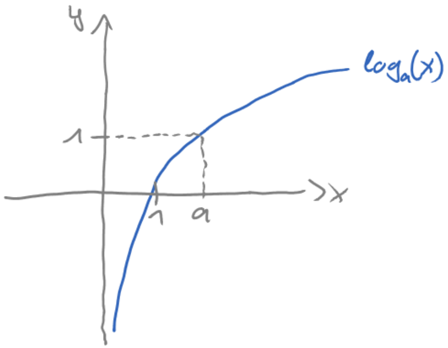


Abbildung 4.18.

streng monoton steigend

$\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty$

$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$

$\underline{0 < a < 0}$:

Satz:

$(a > 0, a \neq 0)$

$\boxed{y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(y)}$

d.h. $\log_a(x) = f^{-1}(x)$ ist die Umkehrfunktion von $a^x = f(x)$

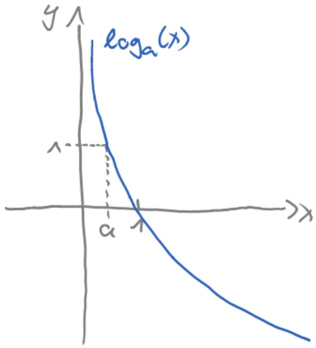


Abbildung 4.19.

streng monoton fallend

$\lim_{x\to\infty} \log_a(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \log_a(x) = \infty$

Ableitung: $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$ (insbesondere $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$)

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$$

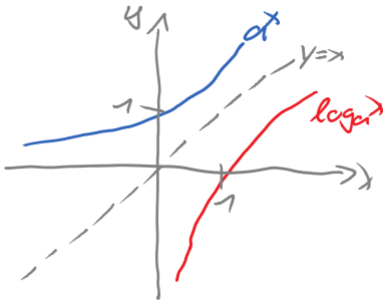


Abbildung 4.20. – $a > 1$

4.5. Trigonometrischen Funktionen

Definition: Als trigonometrischen Funktionen bezeichnet man die Funktionen $\sin x, \cos x, \tan x$ und $\cot x$.

- $\sin x : \mathbb{R} \to [-1; 1], \cos x : \mathbb{R} \to [-1; 1]$

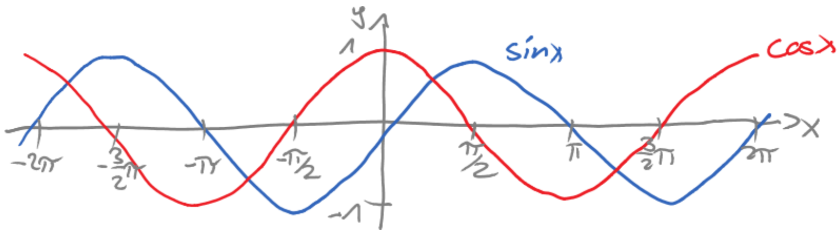


Abbildung 4.21.

Nullstellen:

$\sin x = 0 \quad x_k = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$\cos x = 0 \quad x_k = \frac{\pi}{2}k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Periode: jeweils 2π

Ableitung:
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$

Symmetrie:
$\sin(-x) = -\sin(x)$ (ungerade Funktion, punktsymmetrisch)
$\cos(-x) = \cos(x)$ (gerade Funktion, achsensymmetrisch)

- allgemeine Sinusfunktion/Cosinusfunktion:

  $$y = a\sin(bx + c), y = a\cos(bx + c)$$

$\boxed{a > 0}$

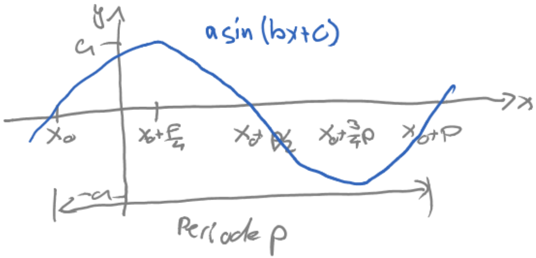


Abbildung 4.22.

$$bx_0 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x_0 = -\frac{c}{b}}$$
$$b(x_0 + p) + c = 2\pi$$
$$\Leftrightarrow p = \frac{2\pi - c}{b} - x_0$$
$$\Leftrightarrow p = \frac{2\pi}{b} - \frac{c}{b} + \frac{c}{b}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{p = \frac{2\pi}{b}}$$

(bei $a < 0$ Spiegelung an x-Achse)

Sinusschwingung: $y = a\sin(\omega t + \alpha_0)$
Cosinusschwingung: $y = a\sin(\omega t + \alpha_0)$
$t_0 = -\frac{\alpha_0}{\omega}$ «Startwert»
$T = \frac{2\pi}{\omega}$ Periode

$\boxed{a > 0}$

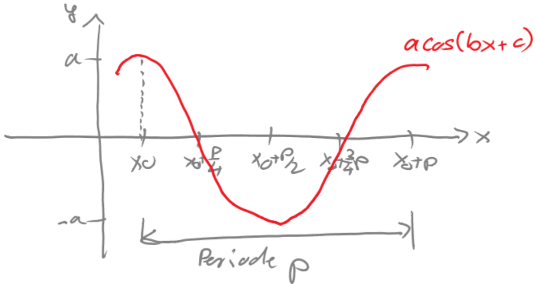


Abbildung 4.23.
(bei $a < 0$ Spiegelung an x-Achse)

analog gilt:

$$\boxed{x_0 = -\frac{c}{b}}$$

$$\boxed{p = \frac{2\pi}{b}}$$

- $\tan x : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

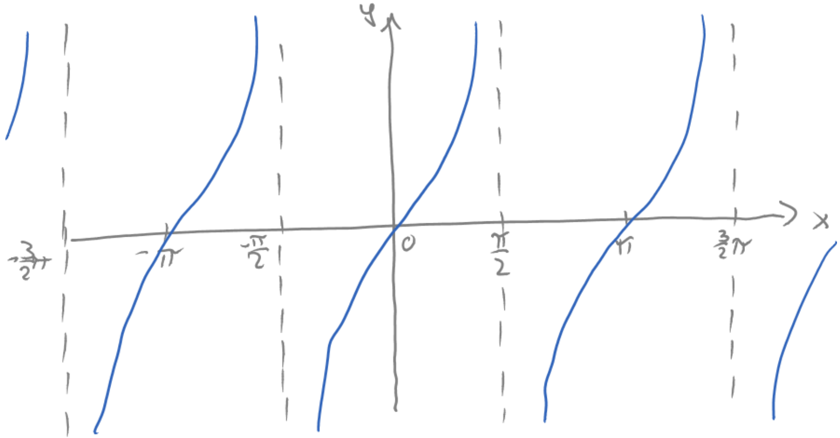


Abbildung 4.24.

<u>Nullstellen</u>:

$x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

<u>Polstellen</u>:

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Periode: π

Ableitung:

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Symmetrie:

$\tan(-x) = -\tan x$ (ungerade Funktion, punktsymmetrisch)

- $\cot x : \mathbb{D} \to \mathbb{R} \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

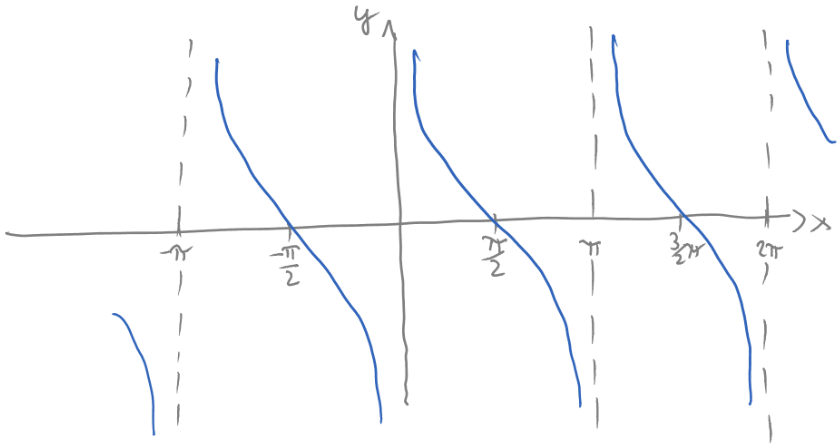


Abbildung 4.25.

<u>Nullstellen</u>:

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

<u>Polstellen</u>:

$x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

<u>Periode</u>: π

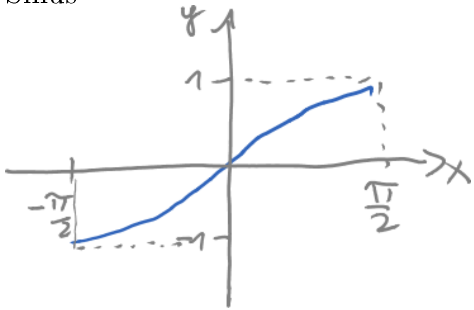
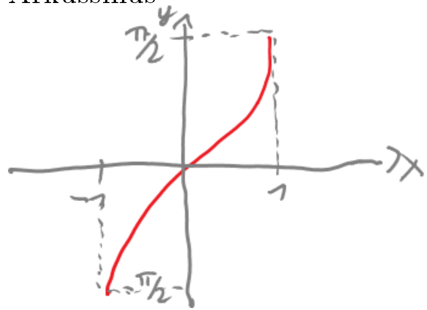
<u>Ableitung</u>:

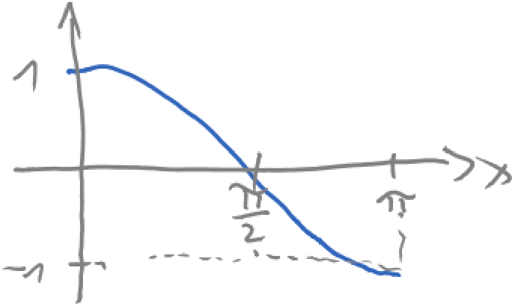
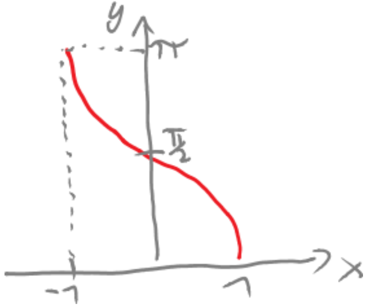
$(\cot x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

<u>Symmetrie</u>:

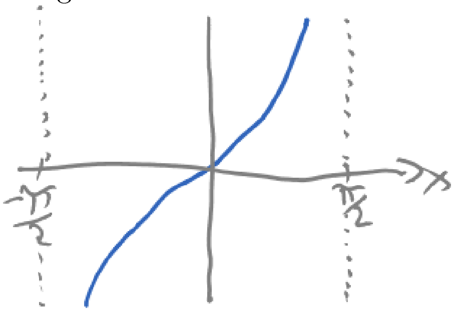
$\cot(-x) = -\cot x$ (ungerade Funktion, punktsymmetrisch)

Zugehörige Umkehrfunktionen: Die trigonometrischen Funktionen sind nur auf entsprechenden Einschränkungen ihres Definitionsbereichs bijektiv (umkehrbar).

Funktion	Umkehrfunktion
Sinus  $\sin : [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}] \to [-1; 1]$	Arkussinus  $\arcsin : [-1; 1] \to [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

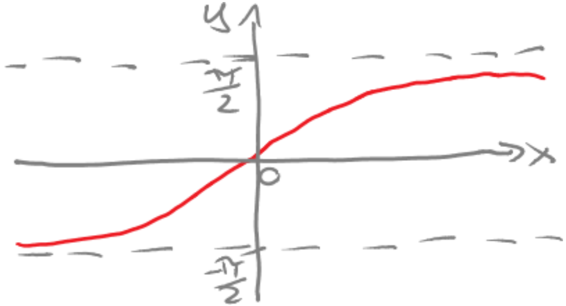
Cosinus	Arkuscosinus
	
$\cos : [0; \pi] \to [-1; 1]$	$\arccos : [-1; 1] \to [0; \pi]$

Tangens

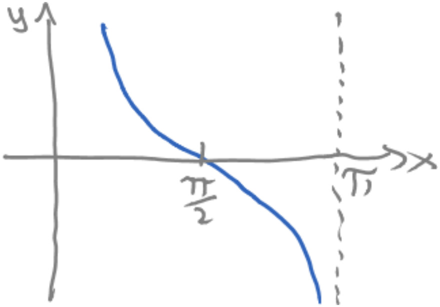
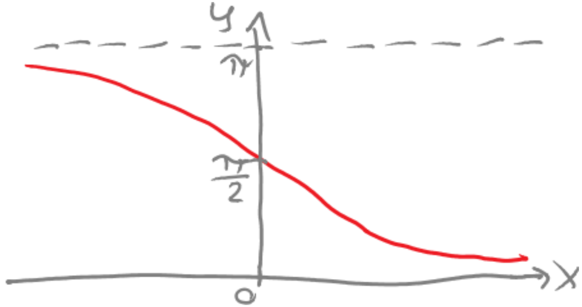


$\tan :]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$

Arkustangens



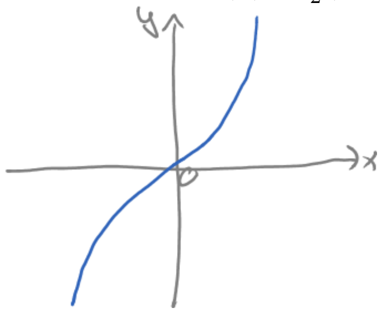
$\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

Cotangens	Arkuscotangens
	
$\cot :]0;\pi[\to \mathbb{R}$	$\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to]0;\pi[$

4.6. Hyperbelfunktionen

Definition: Hyperbelfunktionen

a) Sinus hyperbolicus $\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$



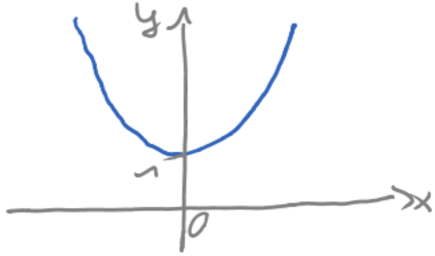
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Asymptote für $x \to \pm\infty : y = \pm\frac{1}{2}e^{\pm x}$

Nullstelle: $x = 0$

Symmetrie: $\sinh(-x) = -\sinh(x)$ (ungerade Funktion, punktsymmetrisch)

b) Cosinus hyperbolicus $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$



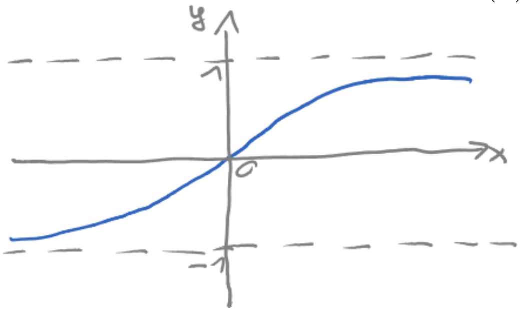
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Asymptote für $x \to \pm\infty : y = \frac{1}{2}e^{\pm x}$

Nullstelle: keine

Symmetrie: $\cosh(-x) = \cosh(x)$ (gerade Funktion, achsensymmetrisch)

c) Tangens hyperbolicus $\tanh(x) = \dfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$



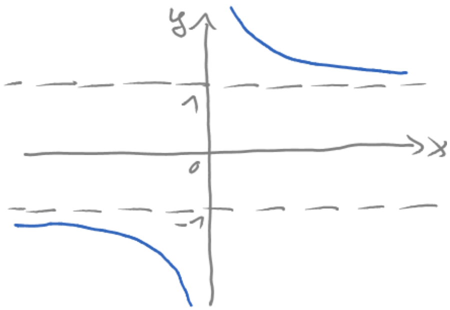
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Asymptote für $x \to \pm\infty : y = \pm 1$

Nullstelle: $x = 0$

Symmetrie: $\tanh(-x) = -\tanh(x)$ (ungerade Funktion, punktsymmetrisch)

d) Cotangens hyperbolicus $\coth(x) = \dfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$



$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Asymptote für $x \to \pm\infty : y = \pm 1$

senkrechte Asymptote: $x = 0$

Nullstelle: keine

Polstelle: $x = 0$

Symmetrie: $\coth(-x) = -\coth(x)$ (ungerade Funktion, punktsymmetrisch)

Ableitungen:

$(\sinh x)' = \cosh x$

$(\cosh x)' = \sinh x$

Additionstheoreme:

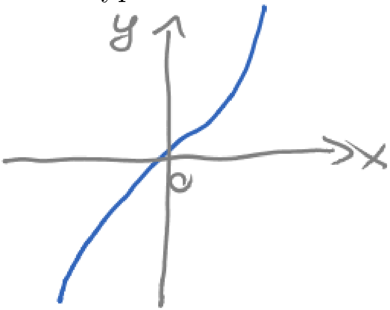
$\sinh(x_1 \pm x_2) = \sinh x_1 \cosh x_2 \pm \cosh x_1 \sinh x_2$

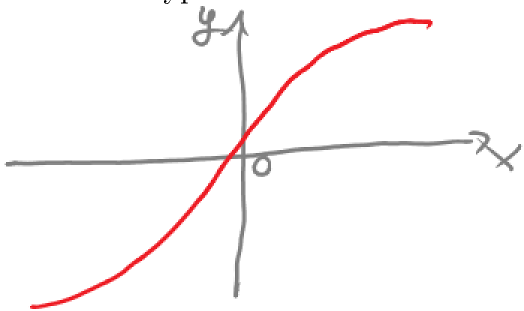
$\cosh(x_1 \pm x_2) = \cosh x_1 \cosh x_2 \pm \sinh x_1 \sinh x_2$

Hyperbolischer Pythagoras:

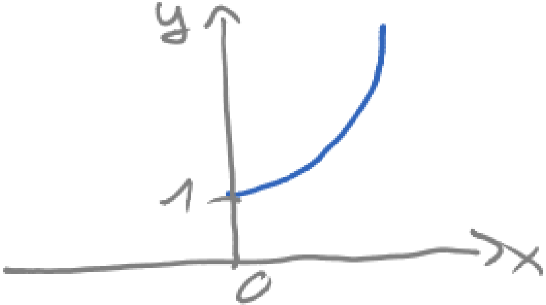
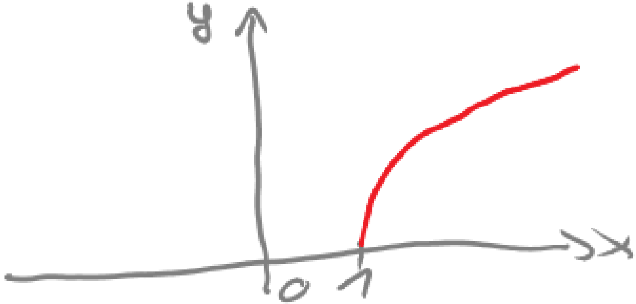
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

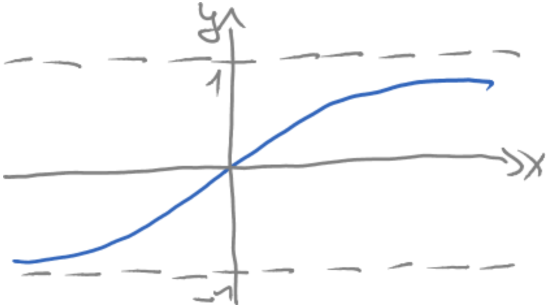
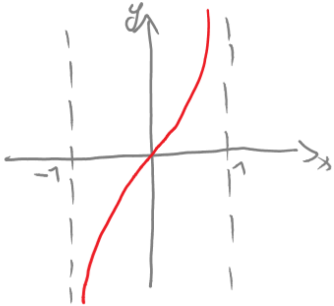
Zugehörige Umkehrfunktionen:

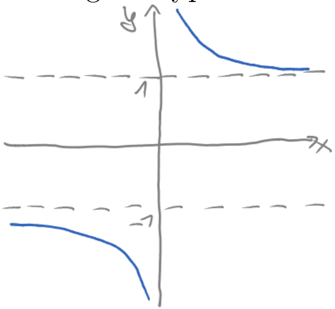
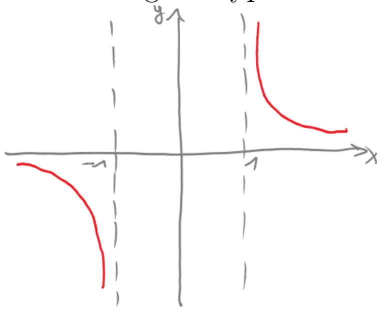
<table>
<tr><th>Funktion</th><th>Umkehrfunktion</th></tr>
<tr>
<td>Sinus hyperbolicus


$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$</td>
<td>Areasinus hyperbolicus


$\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Cosinus hyperbolicus

$\cosh : [0; \infty[\to [1; \infty[$</td>
<td>Areacosinus hyperbolicus

$\operatorname{arcosh} : [1; \infty[\to [0; \infty[$</td>
</tr>
</table>

Tangens hyperbolicus	Areatangens hyperbolicus
	
tanh : $\mathbb{R} \to]-1;1[$	artanh : $]-1;1[\to \mathbb{R}$

Cotangens hyperbolicus	Areacotangens hyperbolicus
	
$\coth : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \{\lvert x\rvert > 1\}$	$\operatorname{arcoth} : \{\lvert x\rvert > 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Darstellung durch Logarithmusfunktionen:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \qquad (x \geq 1)$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \tfrac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \qquad (|x| < 1)$$

$$\operatorname{arcoth}(x) = \tfrac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad (|x| > 1)$$

5. Integration

5.1. Bestimmtes Integral

Problem: Bestimmung des Flächeninhalts der Fläche zwischen dem Graphen G_f einer Funktion $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ $(f \geq 0)$ und der x-Achse.

Dazu betrachtet man Zerlegungen $Z : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ des Intervalls $[a; b]$. In jedem Teilintervall $[x_{i-1}; x_i]$ werde ein (beliebiges) ξ_i ausgewählt, $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Die Zahl

$$\boxed{\sigma(Z) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(\underbrace{x_i - x_{i-1}}_{\Delta x_i})}$$

wird die zur Zerlegung Z und zur Wahl der ξ_i gehörenden Zwischensumme genannt.

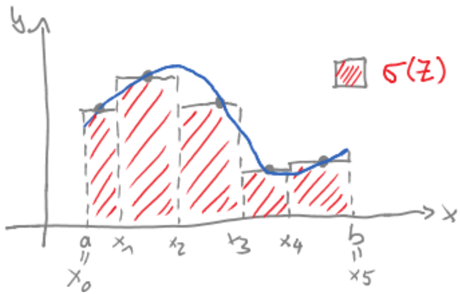


Abbildung 5.1. – Näherung für exakten Flächeninhalt A

Verfeinert man die Zerlegung Z des Intervalls $[a; b]$, d.h. fügt man weitere Punkte zur Zerlegung Z hinzu, so erhält man immer bessere Näherungen für den exakten Flächeninhalt A. Konvergieren die Zwischensummen $\sigma(Z)$ bei immer größerer Verfeinerung der Zerlegung Z

(unabhängig von der Auswahl der ξ_i) gegen einen festen Grenzwert I, so heißt die Funktion $f(x)$ über das Intervall $[a;b]$ (Riemann-)integrierbar und I heißt betimmtes Integral von $f(x)$ über das Intervall $[a;b]$. In Analogie zur Bildung der Zwischensumme schreibt man

$$\boxed{I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

x heißt Integrationsvariable, a bzw. b nennt man untere bzw. obere Integrationsgrenze, $f(x)$ heißt Integrand.

Bemerkung: Ist $f(x) > 0$ auf $]a;b[$, so ist $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = A$ gleich dem Flächeninhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse.

Das Bestimmte Integral $I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ wird über den Grenzwert von Zwischensummen auch

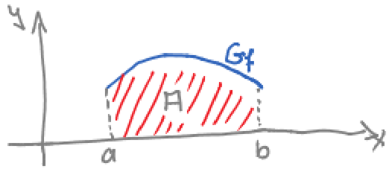


Abbildung 5.2.

für Funktionen definiert, für die nicht stets $f(x) > 0$ gilt. In diesem Fall ist $I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ gleich der <u>Flächenbilanz</u> der von dem Graphen von f und der x-Achse eingeschlossenen Flächenstücke; dabei werden Flächen oberhalb der x-Achse positiv und diejenigen unterhalb der x-Achse negativ gezählt.

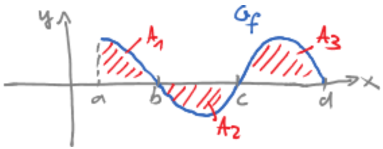


Abbildung 5.3.

$$\int_a^d f(x)\ \mathrm{d}x = A_1 - A_2 + A_3$$

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = A_1 > 0$$

$$\int_b^c f(x)\ \mathrm{d}x = A_2 < 0$$

$$\int_c^d f(x)\ \mathrm{d}x = A_3 > 0$$

Satz:

Sei $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. In folgenden Fällen ist $f(x)$ über $[a; b]$ integrierbar:

a) f ist auf $[a; b]$ stetig.

b) f ist beschränkt, d.h. $|f(x)| \leq M$ für alle $x \in [a; b]$ und f ist an nur endlich vielen Stellen unstetig.

c) f ist auf $[a; b]$ beschränkt und monoton.

Beispiel: $f : [0;1] \to \mathbb{R}, f(x) = 1 - x^2$

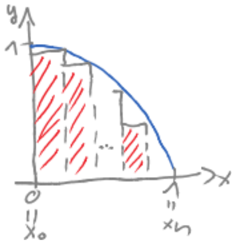


Abbildung 5.4.

Da f stetig ist, ist f integrierbar (über $[0;1]$).

Um $I = \int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ zu berechnen, betrachten wir äquidistante Zerlegungen Z, d.h. Zerlegungen mit $\Delta x_i = \Delta x = \text{const}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei Z_n die Zerlegung definiert durch
$\Delta x = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$ und $x_i = x_0 + i \cdot \Delta x \quad (i = 1, \ldots, n)$

Für die ξ_i wählen wir

$\xi_i = x_i = x_0 + i \cdot \Delta x = 0 + i \cdot \frac{1}{n} = \frac{i}{n}$

Damit ergibt sich für die zugehörige Zwischensumme

$$\begin{aligned}
\sigma(Z_n) &= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[1 - \left(\frac{i}{n}\right)^2\right] \cdot \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n} \cdot \left[n - \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i^2\right]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= 1 - \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= 1 - \frac{1}{6} \frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} \\
&= 1 - \frac{1}{6} \frac{n}{n} \frac{n+1}{n} \frac{2n+1}{n} \\
&= 1 - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

Da $f(x)$ integrierbar ist, gilt

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to\infty} \sigma(Z_n) = \lim_{x\to\infty} 1 - \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{2}{6} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Eigenschaften des Bestimmten Integrals:

1. $\displaystyle\int\limits_a^b (f(x) + g(x))\ \mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int\limits_a^b c \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = c \cdot \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \qquad (c \in \mathbb{R})$

3. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\ \mathrm{d}x$

4. $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\ \mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\ \mathrm{d}x$

5.2. Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (HDI)

Definition: Für eine stetige Funktion $f(x)$ sei

$$I_a(x) := \int\limits_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

$I_a(x)$ ist wiederum eine Funktion und heißt Integralfunktion.

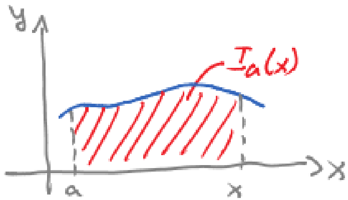


Abbildung 5.5.

Theorem:

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI)

Die Integralfunktion $I_a(x)$ ist differenzierbar und es gilt:

$\boxed{I_a' = f(x)}$

Beweis:

$$\begin{aligned} I_a'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{I_a(x+h) - I_a(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\int\limits_a^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t - \int\limits_a^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \right] \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left[\int\limits_a^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t + \int\limits_x^{a} f(t)\ \mathrm{d}t \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \underbrace{\int\limits_{x}^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t}_{A}$$

Zur besseren Anschaulichkeit sei $f > 0$ und streng monoton steigend.

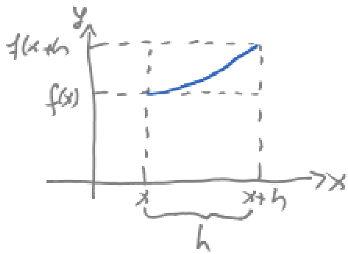


Abbildung 5.6.

Durch Flächenvergleich erhält man

$f(x) \cdot h \leq A \leq f(x+h) \cdot h$

aus $f(x) \cdot h \leq A \leq f(x+h) \cdot h$ folgt
$f(x) \leq \frac{1}{h} \cdot A \leq f(x+h)$

Da $f(x)$ stetig ist, folgt (nach dem Sandwich-Lemma)
$\lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot A = f(x)$,

d.h. $f(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot A = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{x}^{x+h} f(t)\ \mathrm{d}t = I_a'(x)$

$\square$

Bemerkung: $I_a'(x) = f(x)$ bedeutet:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_{a}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t = f(x)}$$

«Integrieren = Umkehrung des Differenzierens»

5.3. Stammfunktionen

Im folgenden sei I ein Intervall.

Definition: Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$, wenn

$$\boxed{F' = f}$$

gilt.

Bemerkung: Der HDI besagt, dass die Integralfunktion $I_a(x) = \int\limits_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist.

Satz: Seien $F, G : I \to \mathbb{R}$ zwei Stammfunktionen von $f(x)$. Dann gilt

$$\boxed{F - G = \text{const.}}$$

d.h. es gibt eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit $F(x) - G(x) = C$ für alle $x \in I$.

Lemma: Ist $H : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $H'(x) = 0$ für alle $x \in I$, so gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit $H(x) = C$ für alle $x \in I$.

(folgt aus dem sogenannten Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Beachte: Die Voraussetzung «I ein Intervall» ist entscheidend, z.B.
$H(x) = \begin{cases} +1 & , x > 0 \\ -1 & , x < 0 \end{cases}$ ist differenzierbar ($\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$)
und $H'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{D}$, jedoch ist $H(x) \neq$ const.

Beweis des Satzes: $F, G : I \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen von $f(x)$. Für $H(x) = F(x) - G(x)$ gilt dann $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$

$\overset{\text{Lemma}}{\Longrightarrow}$ $H(x) = \text{const.} = C$, d.h. $F(x) - G(x) = C$ für alle $x \in I$.

$\square$

Zusammenfassend gilt:

Je zwei Stammfunktionen einer Funktion $f(x)$ auf einem Intervall I unterscheiden sich nur durch eine Konstante.

5.4. Berechnen von bestimmten Integralen

Satz:

Berechnen von bestimmten Integralen

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, $a, b \in \mathbb{R}$.

Ist F eine beliebige Stammfunktion von f, so gilt

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) =: \big[F(x)\big]_a^b}$$

Beweis: Da die Integralfunktion $I_a(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist (nach HDI), so gibt es eine Konstante C mit $F(x) - I_a(x) = C$ für alle $x \in I$.

Somit folgt: $F(x) = I_a(x) + C$

$$F(b) - F(a) = \underbrace{I_a(b) + C}_{F(b)} - (\underbrace{I_a(a) + C}_{F(a)})$$

$$= I_a(b) = \int\limits_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

$\square$

Bezeichnung: Ist $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$, so schreiben wir

$$\boxed{\int f(x)\ \mathrm{d}x = F(x) + C}$$

und nennen $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ unbestimmtes Integral von $f(x)$.
(«unbestimmt», da keine Integrationsgrenzen abgegeben sind.)

Grundintegrale:

1. $$\int 0 \ \mathrm{d}x = 1 + C$$

2. $$\int 1 \ \mathrm{d}x = x + C$$

3. $$\int x^r \ \mathrm{d}x = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C \qquad (r \in \mathbb{R}, r \neq -1)$$

4. $$\int \frac{1}{x} \ \mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

5. $$\int e^x \ \mathrm{d}x = e^x + C$$

6. $$\int a^x \ \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

7. $$\int \cos x \ \mathrm{d}x = \sin x + C$$

8. $$\int \sin x \ \mathrm{d}x = -\cos x + C$$

9. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x + C$

10. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x + C$

5.5. Integrationsmethoden

5.5.1. Elementare Integrationsregeln

- Faktorregel:

$$\boxed{\int\limits_a^b \lambda f(x)\ \mathrm{d}x = \lambda \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

- Summenregel:

$$\boxed{\int\limits_a^b f_1(x) + \ldots + f_n(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_a^b f_1(x)\ \mathrm{d}x + \ldots + \int\limits_a^b f_n(x)\ \mathrm{d}x}$$

- Vertauschungsregel:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = -\int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x}$$

- Gleiche Integrationsgrenzen:

$$\boxed{\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0}$$

- Aufspalten der Integration:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Beispiele:

1. $$\int\limits_a^b 5x^2\,\mathrm{d}x = 5\int\limits_a^b x^2\,\mathrm{d}x = 5\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

2. $$\int\limits_a^b x + x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right]_a^b$$

5.5.2. Integration durch Substitution:

Satz: $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig und $u : [a;b] \to \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar (d.h. u sei differenzierbar und u' stetig) mit $u([a;b]) \subseteq I$. Dann gilt:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(u(x))u'(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(u)\ \mathrm{d}u}$$

Bemerkung: $\int\limits_a^b h(x)\ \mathrm{d}x$ sei zu berechnen

1. Führe Substitution $\underline{u = u(x)}$ durch $\Rightarrow$ $\underline{h(x) = f(u(x))}$

   $\mathrm{d}u = u'(x)\ \mathrm{d}x \Leftrightarrow \underline{\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{u'(x)}}$

   $$\Rightarrow \int\limits_a^b h(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_{u(a)}^{u(b)} f(u) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{g(u)} \qquad u'(x) = g(u(x))$$

2. Führe Substitution $x = \varphi(t)$ durch
   $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \varphi'(t) \Leftrightarrow\ \mathrm{d}x = \varphi'(t)\ \mathrm{d}t$ wähle t_a und t_b mit $a = \varphi(t_a)$ und $b = \varphi(t_b)$
   $\Rightarrow \int\limits_a^b h(x)\ \mathrm{d}x = \int\limits_{t_a}^{t_b} h(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$

Beispiel: $\int\limits_1^2 \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$

1. Substitution $u = \sqrt{x}$
   $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u'(x) \mid \cdot\ \mathrm{d}x$
   $\mathrm{d}u = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x \mid \cdot 2\sqrt{x}$
   $\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}\ \mathrm{d}u$
   $\mathrm{d}x = 2u\ \mathrm{d}u$
   $\int\limits_1^2 \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{\cos(u)}{u} \underbrace{2u\ \mathrm{d}u}_{\mathrm{d}x} = \int\limits_1^{\sqrt{2}} 2\cos(u)\ \mathrm{d}u = 2 \cdot \int\limits_1^{\sqrt{2}} \cos(u)\ \mathrm{d}u = 2\left[+\sin(u)\right]_1^{\sqrt{2}} =$

$2(\sin\sqrt{2} - \sin 1)$

2. Substitution $x = t^2 \quad (= x(t)) \qquad x(1) = 1, x(\sqrt{2}) = 2$

$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t \mid \cdot\ \mathrm{d}t$

$\mathrm{d}x = 2t \cdot\ \mathrm{d}t$

$$\int_1^2 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int_{x(1)}^{x(\sqrt{2})} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\cos\sqrt{t^2}}{\sqrt{t^2}} \underbrace{2t\ \mathrm{d}t}_{\mathrm{d}x} = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\cos t}{t} 2t\ \mathrm{d}t = 2\int_1^{\sqrt{2}} \cos t\ \mathrm{d}t$$

5.5.3. Integration durch Partialbruchzerlegung (PBZ)

Gebrochen-rationale Funktion $f(x) = \dfrac{Z(x)}{N(x)}$ mit $\operatorname{grad}(Z(x)) < \operatorname{grad}(N(x))$ (ansonsten Polynomdivision falls $\operatorname{grad}(Z(x)) \geq \operatorname{grad}(N(x))$)

Vorgehensweise: (PBZ)

1. Für jede reelle Nullstelle a der Vielfachheit r von $N(x)$ mache den Teilansatz:
   $\boxed{\dfrac{A_1}{x-a} + \dfrac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \dfrac{A_r}{(x-a)^r}}$ (A_i noch zu bestimmen)

2. Für jeden unzerlegbaren (über $\mathbb{R}$) quadratischen Faktoren (d.h. keine reellen Nullstellen $D < 0$) $q(x) = (x-a)^2 + b^2$ von $N(x)$ der Vielfachheit r mache den Teilansatz:
   $\boxed{\dfrac{B_1x + C_1}{q(x)} + \dfrac{B_2x + C_2}{q(x)^2} + \ldots + \dfrac{B_rx + C_r}{q(x)^r}}$

3. Addiere alle Teilansätze und setzte die Summe gleich $\dfrac{Z(x)}{N(x)}$

4. Bilde den Hauptnenner HN beim Gesamtansatz und multipliziere beide Seiten mit dem Hauptnenner HN ($=N(x)$) Multipliziere den Zähler des Gesamtansatzes aus und führe einen Koeffizientenvergleich mit $Z(x)$ durch.

5. Bestimme aus dem Koeffizientenvergleich ein LGS in den Konstanten A_i, B_j usw. und löse dieses.

Beispiel:

1. $\dfrac{5x+1}{x^2-1}$ $N(x) = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$
   $\Rightarrow$ zwei 1-fache reelle Nullstellen

   Teilansatz für $x_1 = 1$: $\dfrac{A}{x-1}$
   Teilansatz für $x_2 = -1$: $\dfrac{B}{x+1}$

   Gesamtansatz: $\dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1}$

mit $\dfrac{Z(x)}{N(x)}$ gleichsetzen:

$$\begin{aligned}
\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} &= \frac{5x+1}{x^2-1} \\
\frac{A(x+1)}{x^2-1} + \frac{B(x-1)}{x^2-1} &= \frac{5x+1}{x^2-1} \quad | \cdot (x^2-1) \\
A(x+1) + B(x-1) &= 5x+1 \\
Ax + A + Bx - B &= 5x+1 \\
(A+B)x + A - B &= 5x+1
\end{aligned}$$

LGS (aus Koeffizientenvergleich):

(I) $\quad A + B = 5$

(II) $\quad A - B = 1$

$\Rightarrow A = 3, B = 2$

$$\Rightarrow \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{5x+1}{x^2-1}$$

2. $\dfrac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)}$

$\Rightarrow x_1 = 1$ (2-fache Nullstelle)
$\Rightarrow x_2 = -1$ (1-fache Nullstelle)

Teilansatz für $x_1 = 1$: $\dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{(x-1)^2}$
Teilansatz für $x_2 = -1$: $\dfrac{B}{x+1}$

Gesamtansatz: $\dfrac{A_1}{x-1} + \dfrac{A_2}{(x-1)^2} + \dfrac{B}{x+1} = \dfrac{2x+1}{(x-1)^2(x+1)}$
HN $= (x-1)^2(x+1)$

$$\Leftrightarrow \frac{A_1(x-1)(x+1) + A_2(x+1) + B(x-1)^2}{\text{HN}} = \frac{2x+1}{\text{HN}} \mid \cdot\text{HN}$$
$$\Leftrightarrow A_1(x^2-1) + A_2(x+1) + B(x^2-2x+1) = 2x+1$$
$$\Leftrightarrow (A_1+B)x^2 + (A_2-2B)x - A_1 + A_2 + B = 2x+1$$

LGS (aus Koeffizientenvergleich):

(I) $A_1 + B = 0$

(II) $A_2 - 2B = 2$

(III) $-A_1 + A_2 + B = 1$

$\Rightarrow A_1 = \frac{1}{4}, A_2 = \frac{3}{2}, B = -\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)} = \frac{\frac{1}{4}}{x-1} + \frac{\frac{3}{2}}{(x-1)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{x+1}$$

3. $\dfrac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9 + 13}$

$N(x) = x^3 - 3x^2 + 9 + 13$

$N(-1) = 0 \Rightarrow$ Polynomdivision $N(x) = (x+1)\ \underbrace{(x^2 - 4x + 13)}_{\text{unzerlegbar, da } D<0}$

$\Rightarrow$ Nullstellen $x_1 = -1$ (1-fach)

unzerlegbarer, quadratischer Faktor $q(x) = x^2 - 4x + 13$

Teilansatz für $x_1 = -1$: $\dfrac{A}{x+1}$

Teilansatz für $q(x) = x^2 - 4x + 13$: $\dfrac{Bx + C}{x^2 - 4x + 13}$

Gesamtansatz: $\dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx + C}{x^2 - 4x + 13} = \dfrac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9 + 13}$
HN $= (x + 1)(x^2 - 4x + 13)$

$$\Leftrightarrow \frac{A(x^2 - 4x + 13) + (Bx + C)(x + 1)}{\text{HN}} = \frac{7x^2 - 10x + 37}{\text{HN}} \mid \cdot\text{HN}$$
$$\Leftrightarrow A(x^2 - 4x + 13) + Bx^2 + (B + C)x + C = 7^2 - 10x + 37$$
$$\Leftrightarrow (A + B)x^2 + (-4A + B + C)x + \ldots = 7^2 - 10x + 37$$

LGS (aus Koeffizientenvergleich):

(I) $\quad A + B = 7$

(II) $\quad -4A + B + C = -10$

(III) $\quad 13A + C = 37$

$\Rightarrow A = 3, B = 4, C = -2$

$$\Rightarrow \frac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13} = \frac{3}{x+1} + \frac{4x - 2}{x^2 - 4x + 13}$$

Integrale für PBZ

Um das Integral $\int \frac{Z(x)}{N(x)}\,\mathrm{d}x$ zu lösen, verwendet man nachfolgende Integrale:

1. $$\int \frac{A}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\int \frac{1}{x-a}\,\mathrm{d}x = A\cdot \ln|x-a| + C$$

2. $$\int \frac{A}{(x-a)^r}\,\mathrm{d}x = A\int (x-a)^{-r}\,\mathrm{d}x = A\cdot \frac{(x-a)^{-r+1}}{-r+1} + C \quad (r>0)$$

3. $$\int \frac{Bx+C}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Bx+C}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{B}{2}(2x+p)+C-\frac{B}{2}p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{B}{2}\underbrace{\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x}_{\ln|x^2+px+q|+C_1} + \int \frac{C-\frac{B}{2}p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$
$$\int \frac{C-\frac{B}{2}p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x = \int \frac{C-\frac{B}{2}p}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x = (C-\frac{B}{2}p)\int \frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,\mathrm{d}x$$

   Substitution $u = \frac{x-a}{b} \Rightarrow \mathrm{d}x = b\cdot\,\mathrm{d}u$

$$= \frac{C - \frac{B}{2}p}{b} \arctan \frac{x-a}{b} + C_2$$

Beispiel:

1. $$\int \frac{5x+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= 3\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + 2\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x-1| + 2\ln|x+1| + C$$

2. $$\int \frac{2x+3}{(x-1)^2(x+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{1}{4}\ln|x-1| - \tfrac{3}{2}\frac{1}{x-1} - \tfrac{1}{4}\ln|x+1| + C$$

3. $$\int \frac{7x^2-10x+37}{x^3-3x^2+9x+13}\,\mathrm{d}x = 3\underbrace{\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x}_{\ln|x+1|} + \int \frac{4x-2}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{4x-2}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x-1}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{(2x-4)+3}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2 \underbrace{\int \frac{2x-4}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x}_{\ln|x^2-4x+13|+C_1} + 6 \int \frac{1}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = x^2 - 4x + 13$$
$$f'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$
$$y = f(2) = 3^2$$
$$\Rightarrow f(x) = (x-2)^2 + 3^2$$

$$\int \frac{1}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-2)^2+3^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3^2}\int \frac{1}{\left(\frac{x-2}{3}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x$$

Substitution $u = \dfrac{x-2}{3} \Rightarrow \ \mathrm{d}x = 3\ \mathrm{d}u$

$$3\tfrac{1}{3^2}\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C_2$$

$$\int \frac{4x-2}{x^2-4x+13}\,\mathrm{d}x = 2\ln|x^2-4x+13| + 2\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C_3$$

insgesamt gilt:

$$\int \frac{7x^2 - 10x + 37}{x^3 - 3x^2 + 9x + 13}\,\mathrm{d}x = 3\ln|x+1| + 2\ln|x^2 - 4x + 13| + 2\arctan\left(\frac{x-2}{3}\right) + C$$

5.5.4. Partielle Integration (Produktintegration)

Produktregel:

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\Leftrightarrow u \cdot v' = (u \cdot v)' - u' \cdot v \mid \int \ldots \, \mathrm{d}x$

$$\boxed{\int u \cdot v' \, \mathrm{d}x = u \cdot v - \int u' \cdot v \, \mathrm{d}x}$$

Beispiel:

a) $\displaystyle\int xe^x \, \mathrm{d}x = x \cdot e^x - \int 1 \cdot e^x \, \mathrm{d}x$
$= e^x(x-1) + C = e^x(x-1) + C$

b) $\displaystyle\int \ln x \, \mathrm{d}x = \int \ln x \cdot 1 \, \mathrm{d}x = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, \mathrm{d}x = x(\ln x - 1) + C$

c) Rekursionsformel
$$\int x^n e^{ax} \, \mathrm{d}x = x^n \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{ax} - \int n x^{n-1} \cdot \frac{1}{a} e^{ax} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, \mathrm{d}x$$

5.6. Uneigentliche Integrale

Definition:

$$\int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x := \lim_{\lambda\to\infty} \int_a^\lambda f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^a f(x)\ \mathrm{d}x := \lim_{\lambda\to-\infty} \int_\lambda^a f(x)\ \mathrm{d}x$$

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\ \mathrm{d}x := \int_a^\infty f(x)\ \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^a f(x)\ \mathrm{d}x$$

(falls die Grenzwerte existieren)

Beispiele:

1. $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty}\int_1^\lambda x^{-2}\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty}\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_1^\lambda = \lim_{\lambda\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\lambda = \lim_{\lambda\to\infty} -\frac{1}{\lambda}+1 = 1$$

2. $$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty}\int_1^\lambda \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to\infty}\big[\ln|x|\big]_1^\lambda = \lim_{\lambda\to\infty}\ln\lambda = \infty$$

5.7. Anwendungen

- Fläche zwischen Graph und x-Achse
  f habe in $]a;b[$ keine Nullstellen.

$$\boxed{A = \left| \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \right|}$$

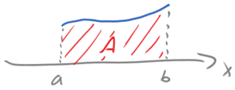


Abbildung 5.7.

- Fläche zwischen zwei Graphen
  f und g haben über $]a;b[$ keine gemeinsamen Schnittpunkte.

$$\boxed{A = \left| \int\limits_a^b f(x) - g(x)\ \mathrm{d}x \right| = \left| \int\limits_a^b g(x) - f(x)\ \mathrm{d}x \right|}$$

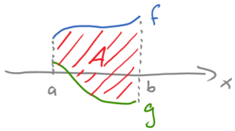


Abbildung 5.8.

- Volumenberechnung
  Volumen eines Rotationskörpers
  $f : [a; b] \to \mathbb{R}$

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 \, \mathrm{d}x}$$

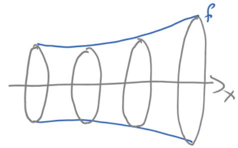


Abbildung 5.9.

- Kurvenlänge
  $f : [a; b] \to \mathbb{R}$, Kurve $\Gamma = G_f$

$$\boxed{l_\Gamma = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, \mathrm{d}x}$$

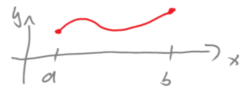


Abbildung 5.10. – Kurve mit Länge l_Γ

- Mittelwerte
  $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig.
  - lineares (arithmetisches) Mittel

$$\boxed{\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)\ \mathrm{d}x}$$

  - quadratisches Mittel (RMS, Effektivwert)

$$\boxed{\overline{f}^q = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f(x)^2\ \mathrm{d}x}}$$