Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (2)

Gerald Kupris

07.10.2010

Off Topic: Verschiebung???

	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag
1	Digitaltechnik 1 Bö E 101		GET gem. mit MK-1 Ku C 106	Physik Ku A 111
2	Mathematik 1 Ku E 204	Einführung in die Programmierung Jr ITC-Computerraum	Mathematik 1 Ku E 102	GET gem. mit MK-1 Fr C 106
3	Physik Ku E 204	Einführung in die Programmierung Jr ITC-Computerraum	???	Mathematik 1 Ku E 102
4		Grundlagen der Informatik Jr ITC-Computerraum	Grundlagen der Betriebswirtschaft Schm E 102	
5		Grundlagen der Informatik Jr ITC-Computerraum		

Wiederholung: Intervalle

Intervalle sind Teilmengen der reellen Zahlen, die sich ohne Zwischenräume von einer Untergrenze a bis zu einer Obergrenze b erstrecken:

- abgeschlossenes Intervall $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- offenes Intervall $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- halboffenes Intervall $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- halboffenes Intervall $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$

Bei einem Intervall darf man für die Obergrenze auch das Symbol ∞ und für die Untergrenze das Symbol $-\infty$ verwenden. Man spricht dann von einem unendlichen Intervall:

- halboffenes Intervall $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\}$
- offenes Intervall $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < \infty\}$
- halboffenes Intervall $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq b\}$
- offenes Intervall $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < b\}$

Aufgaben

1. Gegeben seien folgende Mengen A, B, C und D:
   A = { 1; 2; 4; 6; 8, 9; 13 };
   B = { 0; 2; 5; 7 };
   C = { 4; 7; 8; 11 };
   D = { 4; 8; 9; 13};

   Bestimmen Sie die folgenden Mengen:
   a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$
   b) $\mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$
   c) $\mathbf{A} \cap \mathbf{D}$
   d) $(\mathbf{A} \setminus \mathbf{D}) \setminus \mathbf{B}$
   e) $(\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{D}$
   f) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{D})$

2. Gegeben seien folgende Mengen:
   $\mathbf{A} = \{ x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2 \};$
   $\mathbf{B} = \{ x \in \mathbb{R} \mid -0{,}5 < x < 7 \};$
   $\mathbf{C} = \{ x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq 0 \};$
   $\mathbf{D} = \{ x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x \leq 1 \};$

   Bestimmen Sie die folgenden Mengen:
   a) $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$
   b) $\mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$
   c) $\mathbf{A} \cap \mathbf{D}$
   d) $\mathbf{A} \cap \mathbf{C}$
   e) $\mathbf{D} \setminus \mathbf{C}$
   f) $\mathbf{A} \cup \mathbf{D}$
   g) $(\mathbf{A} \setminus \mathbf{D}) \setminus \mathbf{B}$
   h) $(\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) \cap \mathbf{D}$
   i) $(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{D})$

Betrag

Der **Betrag** einer reellen Zahl x ist definiert als

$$|x| = \begin{cases} x & \text{für} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

Das Betragszeichen lässt sich durch Fallunterscheidungen auflösen.

Für reelle Zahlen x und y gelten folgende Rechenregeln für den Betrag:

- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$
- $|x^a| = |x|^a$ für reelle Hochzahlen a

Was ist der Betrag?

Der Betrag lässt sich als Abstand interpretieren:

- Der Abstand der Zahl x zum Ursprung ist $|x|$.
- Der Abstand der beiden Zahlen x und y zueinander ist $|x-y|$.

Für beliebige reelle Zahlen x und y gelten die Dreiecksungleichungen für den Betrag:

- $|x \pm y| \leq |x| + |y|$
- $|x \pm y| \geq \Big| |x| - |y| \Big|$

Signum

Das **Signum** oder **Vorzeichen** einer reellen Zahl x ist definiert als

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x > 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ -1 & \text{für} \quad x < 0. \end{cases}$$

Summe und Produkte

Werden die reellen Zahlen $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n$ zu

- einer **Summe** addiert, so verwendet man die Summenschreibweise

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n,$$

- einem **Produkt** multipliziert, so verwendet man die Produktschreibweise

$$\prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot a_n.$$

Potenz

Für eine natürliche Zahl n bezeichnet man die n-te **Potenz** einer reellen Zahl x mit

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ Faktoren}}.$$

Negative Potenzen entsprechen dem Kehrwert $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$. Üblicherweise gilt die Festlegung $x^0 = 1$ für alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$.

Rechnen mit Potenzen

Bei der Multiplikation oder Division von Potenzen mit gemeinsamer Basis kann man die Exponenten zusammenfassen:

- $x^a \cdot x^b = x^{a+b}$
- $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

Bei der Multiplikation oder Division von Potenzen mit gemeinsamem Exponenten kann man die Basen zusammenfassen:

- $x^a \cdot y^a = (x \cdot y)^a$
- $\frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a$

Beim Potenzieren multiplizieren sich die Hochzahlen: ▸ $(x^a)^b = x^{a \cdot b} = (x^a)^b$

Die Potenzgesetze gelten für beliebige Hochzahlen a und b und reelle Zahlen x und y.

Wurzel

Für eine natürliche Zahl n bezeichnet man die n-te **Wurzel** einer reellen Zahl x mit $\sqrt[n]{x}$ oder $x^{\frac{1}{n}}$. Zwischen Potenz und Wurzel gilt der Zusammenhang

$$y = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \Longrightarrow \quad y^n = x.$$

Für gerade Zahlen n darf die Zahl unter der Wurzel nicht negativ sein.

Fakultät

Die **Fakultät** einer natürlichen Zahl n ist das Produkt aus den Faktoren 1 bis n:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Außerdem definiert man $0! = 1$.

Gleichungen

Eine Gleichung ist eine vergleichende Aussage über zwei Terme, die besagt, dass beide Terme den selben Wert ergeben.

Beim Lösen einer Gleichung versucht man folgende Fragen zu beantworten:

- Besitzt die Gleichung überhaupt eine Lösung (**Existenz**)?
- Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung (**Eindeutigkeit**)?
- Welche Werte darf man für die Unbekannte einsetzen, damit die Gleichung erfüllt ist (**Lösungsmenge**)?

Mithilfe von Umformungen versucht man eine Gleichung so zu verändern, dass man die Lösungen schließlich bestimmen kann. Eine **Äquivalenzumformung** verändert die Lösungsmenge einer Gleichung nicht. Äquivalenzumformungen lassen sich problemlos wieder rückgängig machen.

Lösen von Gleichungen: Lineare Gleichung

Lineare Gleichung

Eine Gleichung, die man in der Form $a\,x = b$ darstellen kann, bezeichnet man als **lineare Gleichung** für die Unbekannte x. Die Koeffizienten a und b sind dabei beliebige reelle Zahlen. Eine lineare Gleichung besitzt für $a \neq 0$ die eindeutige Lösung $x = \frac{b}{a}$.

Beispiel:

$$47 \cdot x - 11 = 8\,x + 15$$

Lösen von Gleichungen: Potenzgleichung

Potenzgleichung

Eine Gleichung, die man in der Form $x^n = a$ mit einer natürlichen Hochzahl n darstellen kann, bezeichnet man als **Potenzgleichung** für die Unbekannte x. Diese Gleichung hat

- für eine gerade Hochzahl n und $a \geq 0$ genau zwei Lösungen: $x_{1,2} = \pm \sqrt[n]{a}$,
- für eine gerade Hochzahl n und $a < 0$ keine Lösung,
- für eine ungerade Hochzahl n genau eine Lösung: $x = \sqrt[n]{a}$.

Beispiele:
$x^4 = 81$
$x^4 = - 81$
$x^3 = 8$
$x^3 = -8$

Lösen von Gleichungen: Quadratische Gleichung

Quadratische Gleichung

Eine Gleichung, die man in der Form

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0, \quad a, b, c, \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

darstellen kann, bezeichnet man als **quadratische Gleichung** für die Unbekannte x. Falls die **Diskriminante** $D = b^2 - 4\,a\,c$ nicht negativ ist, hat die Gleichung die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}.$$

Beispiele

Lösen von Gleichungen: Wurzelgleichungen

Wurzelgleichung

Gleichungen, bei denen die Unbekannte unter einer Wurzel vorkommt, versucht man durch Potenzieren zu lösen. Dabei ist Folgendes zu beachten:

(1) Vor dem Potenzieren isoliert man eine Wurzel.

(2) Wenn in der Gleichung mehrere Wurzelausdrücke vorkommen, muss man die Vorgehensweise wiederholen.

(3) Bei den durch Potenzieren berechneten Lösungen muss man unbedingt kontrollieren, ob sie tatsächlich die ursprüngliche Wurzelgleichung erfüllen.

Beispiele

Ungleichungen

Eine Ungleichung ist eine vergleichende Aussage über zwei Terme, die besagt, dass einer der Terme kleiner beziehungsweise kleiner-gleich ist als der andere.

Multiplikation bei Ungleichungen

Wird eine Ungleichung mit einer negativen Zahl multipliziert oder durch eine negative Zahl dividiert, so dreht sich das Relationszeichen um:

- Aus $<$ wird $>$ und umgekehrt.
- Aus $\leq$ wird $\geq$ und umgekehrt.

Multipliziert oder dividiert man eine Ungleichung mit einem Faktor, dessen Vorzeichen man nicht kennt, benötigt man eine Fallunterscheidung.

Ungleichungen

Kehrwert bei Ungleichungen

Wird der Kehrwert einer Ungleichung gebildet, bei der beide Seiten das gleiche Vorzeichen haben, so dreht sich das Relationszeichen um:

- Aus $<$ wird $>$ und umgekehrt.
- Aus $\leq$ wird $\geq$ und umgekehrt.

Haben beide Seiten der Ungleichung unterschiedliches Vorzeichen, so ändert die Kehrwertbildung das Relationszeichen nicht.

Beispiel

Lösung einer Ungleichung

Lösen einer Ungleichung

Zur Bestimmung der Lösung einer Ungleichung kann man folgendermaßen vorgehen:

(1) Bestimme diejenigen Werte, für welche die Ungleichung nicht definiert ist.

(2) Bestimme alle Lösungen der entsprechenden Gleichung.

(3) Identifiziere durch Testen geeigneter Werte diejenigen Bereiche, die zur Lösungsmenge gehören.

Beispiel

Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,
Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium,
Hanser Verlag, München 2010