HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Mathematik 1 Infotronik (12)

Gerald Kupris

29.11.2012

Lineare Algebra

Wiederholung: Addition und Subtraktion von Matrizen

Addition und Subtraktion von Matrizen sind komponentenweise definiert:

$$A \pm B = \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}$$

Komponentenweises Addieren - Voraussetzung: die Strukturen (Anzahl der Zeilen und Anzahl der Spalten) müssen bei beiden Matrizen identisch sein.

Zwei Matrizen derselben Dimension werden addiert bzw. subtrahiert, indem man die entsprechenden Elemente in jeder Zeile und jeder Spalte einzeln addiert bzw. subtrahiert.

Wiederholung: Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Die Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar ist komponentenweise definiert:

$$\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \cdots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \cdots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \cdots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda \in \Re$$

Eine Matrix wird mit einem Skalar multipliziert, indem man jedes einzelne Element der Matrix mit dem Skalar multipliziert.

Wiederholung: Rechenregeln der Matrizenrechnung

Für die einfache Rechnung mit Matrizen gelten die bekannten Gesetze:
Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz),
Distributivgesetz (Verteilungsgesetz),
Assoziativgesetz (Verknüpfungsgesetz).

Es seihen $A, B \in \Re^{m \times n}$ und $\lambda, \mu \in \Re$. Dann gelten:

$$A + B = B + A$$

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$$

$$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$$

$$\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda \cdot \mu) \cdot A$$

Matritzenrechnung: Multiplikation von zwei Matrizen

$$A \cdot B = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mk} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

$A \in \Re^{m \times n}$ m Zeilen, n Spalten

$B \in \Re^{n \times k}$ n Zeilen, k Spalten

$C \in \Re^{m \times k}$ m Zeilen, k Spalten

Matritzenrechnung: Multiplikation von zwei Matrizen

Multiplikation von Matrizen

Bei der Matrixmultiplikation $C = A \cdot B$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1j} & \cdots & c_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & c_{ij} & \cdots & c_{iq} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mj} & \cdots & c_{mq} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2q} \\ b_{31} & \cdots & b_{3j} & \cdots & b_{3q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nq} \end{pmatrix}$$

berechnet man das Element c_{ij} in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Matrix C durch

$$c_{ij} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + a_{i3}\, b_{3j} + \ldots a_{in}\, b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}.$$

Besonderheiten der Multiplikation von zwei Matrizen

$$A \cdot B = C$$

m Zeilen, n Spalten **n Zeilen, k Spalten** **m Zeilen, k Spalten**

A muss also genau so viele Spalten haben, wie ***B*** Zeilen hat - sonst kann man die Multiplikation nicht durchführen. ***A*** wird auch als linker und ***B*** als rechter Faktor bezeichnet.

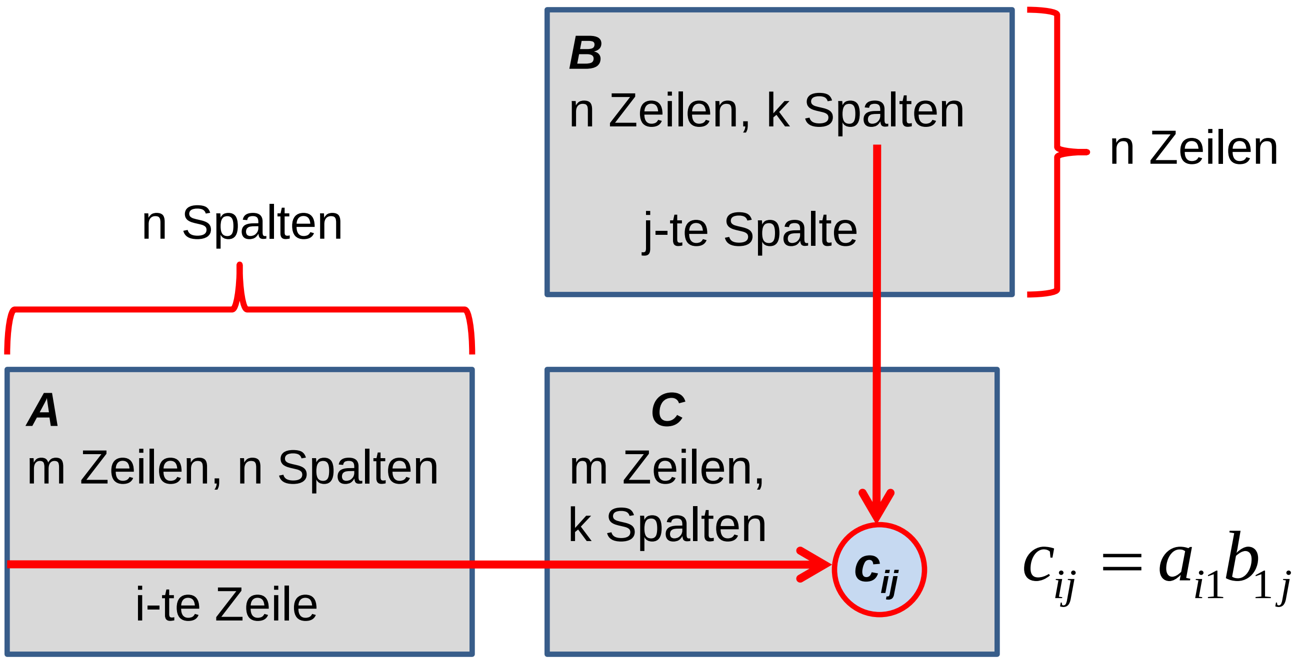
Im allgemeinen gilt auch:

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Die Matrizenmultiplikation ist also eine nicht kommutative Rechenoperation.

Multiplikation von zwei Matrizen: Falk-Schema

Für die praktische Berechnung eines Matrizenproduktes ***C* = *A* · *B*** ist das Schema nach Falk besonders geeignet. Dabei wird der linke Faktor ***A*** links unten und der rechte Faktor ***B*** rechts oben angeordnet. Das Matrixelement c_{ij} des Matrizenprodukts ***C* = *A* · *B*** befindet sich dann im Schnittpunkt der i-ten Zeile von ***A*** mit der j-ten Spalte von ***B***.



$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2i} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Beispiel

Wir berechnen das Produkt ***C* = *A* · *B*** der Matrizen nach dem Falk-Schema.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

			1	1	0
			-2	3	5
			0	1	4
1	4	2	-7	15	28
4	0	-3	4	1	-12

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2i} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

Können wir das Produkt ***D* = *B* · *A*** auf ähnliche Weise berechnen?

Beispiele für die Multiplikation von zwei Matrizen

$$\begin{pmatrix} X & X \\ X & X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ X \end{pmatrix}$$

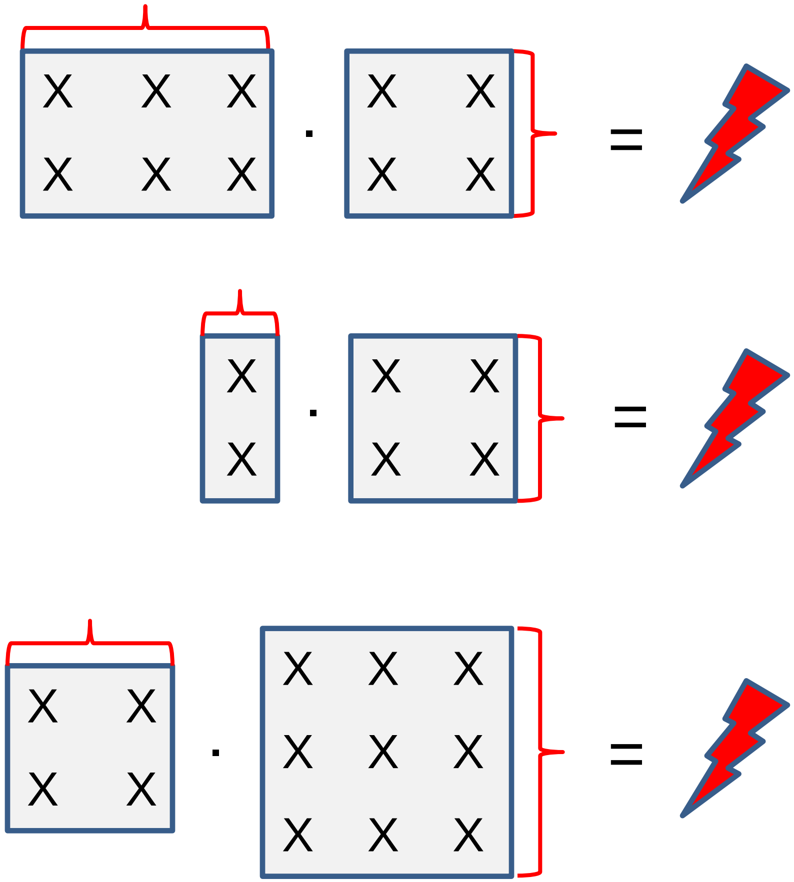
$$\begin{pmatrix} X & X \\ X & X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & X \\ X & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & X \\ X & X \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X & X \\ X & X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X & X & X \\ X & X & X \\ X & X & X \end{pmatrix}$$

Bei gleichartigen quadratischen Matrizen ist die Multiplikation immer möglich!

Beispiele für die Multiplikation von zwei Matrizen



Matrixprodukt

Das Produkt $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$ zweier Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ ist nur definiert, wenn die Anzahl der Spalten von $\boldsymbol{A}$ mit der Anzahl der Zeilen von $\boldsymbol{B}$ übereinstimmt. Die Ergebnismatrix $\boldsymbol{C}$ hat so viele Zeilen wie $\boldsymbol{A}$ und so viele Spalten wie $\boldsymbol{B}$:

$$\boldsymbol{C}_{mn} = \boldsymbol{A}_{mp} \cdot \boldsymbol{B}_{pn}.$$

Zur Berechnung der Elemente von $\boldsymbol{C}$ werden die Elemente in der entsprechenden Zeile von $\boldsymbol{A}$ mit den Elementen der entsprechenden Spalte von $\boldsymbol{B}$ multipliziert und summiert.

Matrixprodukt und Skalarprodukt

Das Skalarprodukt der Vektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ entspricht dem Produkt einer $(1, n)$-Matrix mit einer $(n, 1)$-Matrix

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b}.$$

Dabei wird der Vektor $\boldsymbol{a}$ durch Transponieren zu einem Zeilenvektor.

Matrixprodukt

Nullprodukt

Wenn das Produkt zweier Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ eine Nullmatrix ergibt, dann kann man daraus nicht schließen, dass die Matrix $\boldsymbol{A}$ oder die Matrix $\boldsymbol{B}$ eine Nullmatrix ist:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \quad \overset{\text{i.Allg.}}{\not\Longrightarrow} \quad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0} \text{ oder } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}.$$

Multiplikation mit Einheitsmatrix

Bei der Multiplikation einer (n,n)-Matrix $\boldsymbol{A}$ mit der (n,n)-Einheitsmatrix $\boldsymbol{E}$ gilt:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}.$$

Matrixprodukt

Multiplikation mit Diagonalmatrix

Multipliziert man eine Matrix $\boldsymbol{A}$ von links mit einer Diagonalmatrix $\boldsymbol{D}$, dann werden die einzelnen Zeilen der Matrix $\boldsymbol{A}$ mit den Elementen der Diagonale skaliert. Bei der entsprechenden Multiplikation von rechts werden die Spalten der Matrix $\boldsymbol{A}$ mit den Elementen der Diagonale skaliert.

Potenzen von Matrizen

Eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ kann man beliebig oft mit sich selbst multiplizieren:

$$\boldsymbol{A}^n = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{A}}_{n\text{-mal}}.$$

Rechenregeln für die Multiplikation von zwei Matrizen

Für die Multiplikation von zwei Matrizen gelten die bekannten Gesetze:
Assoziativgesetz (Verknüpfungsgesetz),
Distributivgesetz (Verteilungsgesetz).

Es gilt nicht das Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz).

Es seihen $A, B, C \in \Re^{m \times n}$, dann gilt
(vorausgesetzt, die Multiplikation ist durchführbar):

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

Beispielrechnung

Überprüfen Sie anhand eines Beispiels die Richtigkeit des Assoziativgesetzes:

$$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispielrechnung

Überprüfen Sie anhand eines Beispiels die Richtigkeit des Distributivgesetzes:

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispielrechnung

Überprüfen Sie anhand eines Beispiels die Richtigkeit:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispielrechnung

Überprüfen Sie anhand eines Beispiels die Richtigkeit:

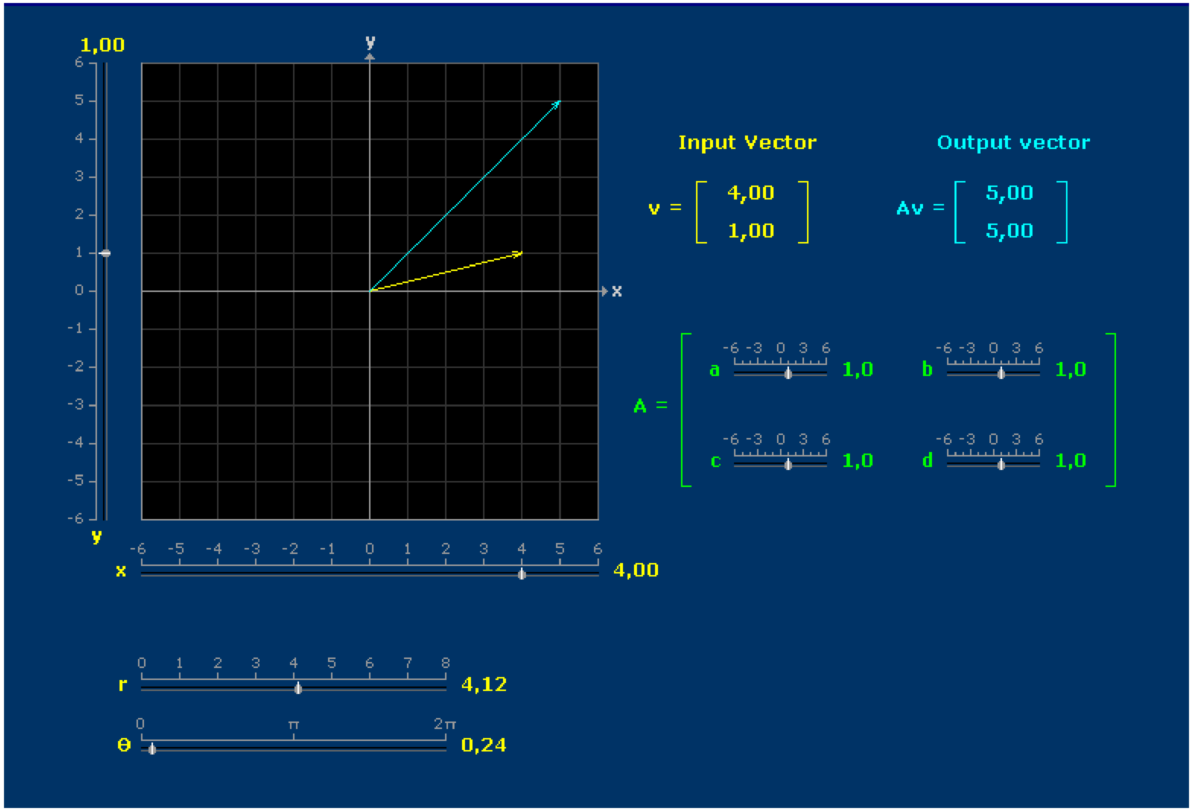
$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: Mathlet

d'Arbeloff Interactive Math Project : http://math.mit.edu/daimp/

Matrix Vector :http://math.mit.edu/daimp/MatrixVector.html



Einige einfache Transformationen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Abbildung eines Vektors auf sich selbst

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Dehnung entlang der x-Achse

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$ Maßstabsveränderung um den Faktor 2

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Spiegelung an der y-Achse

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$ Drehung um 90° nach links

Einheitsmatrix

Eine Einheitsmatrix ist ein Sonderfall einer Diagonalmatrix. Eine n-reihige Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen i_{ii} = 1 (i = 1, 2 …n) heißt n-reihige Einheitsmatrix.

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Die Einheitsmatrix $\boldsymbol{E_n}$ ist das neutrale Element der Multiplikation. Für jedes $A \in \Re^{n \times n}$ ist:

$$E_n \cdot A = A \cdot E_n = A$$

Beispielaufgaben

1. Gegeben seihen die beiden Matrizen A und B.
   Wie lauten jeweils die Produkte C = A · B und D = B · A ?

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Quellen

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf