

Mathematatik 1 Infotronik (5)

Gerald Kupris

25.10.2012

Vorlesungsinhalte Vektorrechnung

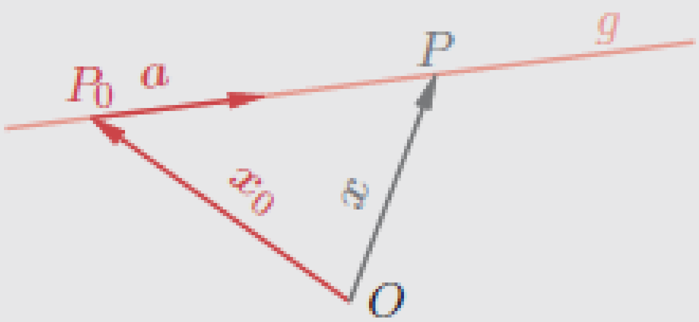
1. Definition von Vektoren
2. Einfache Rechenregeln
3. Koordinatendarstellung von Vektoren
4. Beträge von Vektoren
5. Rechenregeln in der Koordinatendarstellung
6. Koordinatendarstellung mit Winkelfunktionen
7. Skalarprodukt
8. Vektorprodukt
9. Spatprodukt
10. Rechnen mit Vektoren

Darstellung einer Geraden

Punktrichtungsform:

Eine Gerade g kann durch einen Richtungsvektor $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ und durch einen Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}_0$ festgelegt werden:

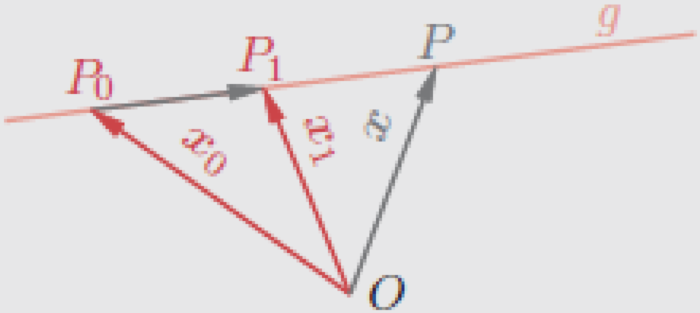
$$g: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\, \boldsymbol{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



Zweipunktform:

Eine Gerade g kann durch zwei verschiedene Punkte P_0 und P_1 mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{x}_0$ und $\boldsymbol{x}_1$ festgelegt werden:

$$g: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\,(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$



Zwei Geraden im Raum

Zwei Geraden im Raum können:

- identisch sein
- parallel sein
- sich schneiden
- aneinander vorbei gehen (windschief sein)

Schnitt zweier Geraden

Die Schnittpunkte zweier Geraden g_1 und g_2 in Parameterdarstellung bestimmt man aus dem linearen Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{ll} g_1: & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \lambda_1\, \boldsymbol{a}_1 \\ g_2: & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + \lambda_2\, \boldsymbol{a}_2 \end{array}\right\} \implies \quad g_1 \cap g_2: \quad \boldsymbol{x}_1 + \lambda_1\, \boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{x}_2 + \lambda_2\, \boldsymbol{a}_2$$

mit den beiden Unbekannten λ und μ. Falls das Gleichungssystem

- genau eine Lösung hat, dann besitzen die beiden Geraden einen Schnittpunkt,
- unendlich viele Lösungen hat, dann sind die beiden Geraden identisch,
- keine Lösung hat, dann sind die Geraden parallel oder windschief.

Aufgabe: Schnittpunkt zweier Geraden

Berechnen Sie, ob sich die beiden Geraden g_1 und g_2 schneiden, die von den folgenden Parametergleichungen beschrieben werden:

$$g_1 : x = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : x = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Schnittwinkel

Den Winkel zwischen den beiden Geraden g_1 und g_2 in der Darstellung

$$g_1: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \lambda_1 \boldsymbol{a}_1, \qquad g_2: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\cos \angle(g_1, g_2) = \frac{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1|\,|\boldsymbol{a}_2|}.$$

Aufgabe: Schnittwinkel zweier Geraden

Berechnen Sie den Winkel zwischen den beiden Geraden g_1 und g_2, die von den folgenden Parametergleichungen beschrieben werden:

$$g_1 : x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$g_2 : x = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

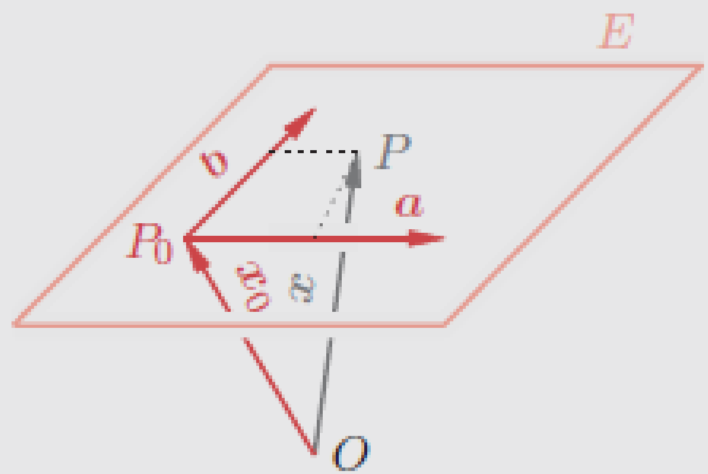
Darstellung einer Ebene

Punktrichtungsform:

Eine Ebene E kann durch zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{b}$ und durch einen Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}_0$ festgelegt werden:

$$E: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\,\boldsymbol{a} + \mu\,\boldsymbol{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Die Parameter λ und μ sind unabhängig voneinander.

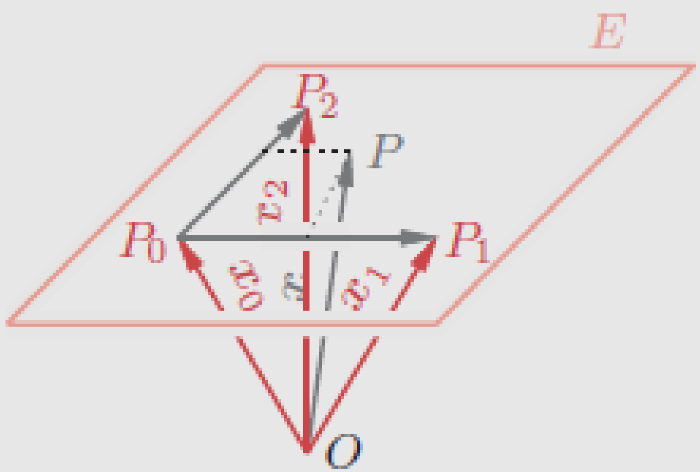


Darstellung einer Ebene

Dreipunkteform:

Eine Ebene E kann durch drei Punkte P_0, P_1 und P_2, die nicht alle auf einer Geraden liegen, mit den Ortsvektoren $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_1$ und $\boldsymbol{x}_2$ festgelegt werden:

$$E: \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\,(\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_0) + \mu\,(\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_0)\,, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$



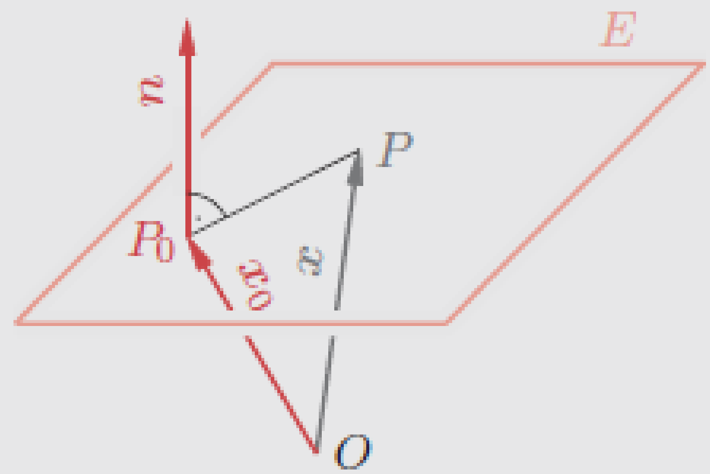
Die Parameter λ und μ sind unabhängig voneinander.

Parameterfreie Darstellung einer Ebene

Eine Ebene E durch den Punkt P_0 mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}_0$ und dem Normalenvektor $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$ kann man in Form einer Gleichung darstellen:

$$E: \quad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{n} = 0.$$

Ein Punkt P mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}$ liegt genau dann in der Ebene, wenn die Gleichung erfüllt ist.



Bei der parameterfreien Darstellung einer Ebene

$$E: \quad n_x x + n_y y + n_z z = d$$

sind die Faktoren n_x, n_y und n_z die Koordinaten des Normalenvektors $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{0}$. Falls der Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ ein Einheitsvektor ist, bezeichnet man die Darstellung als Hessesche Normalenform.

Darstellung einer Ebene mit und ohne Parameter

Die Umrechnung zwischen einer Parameterdarstellung und einer parameterfreien Darstellung einer Ebene

$$E: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda\,\boldsymbol{a} + \mu\,\boldsymbol{b} \quad \Longleftrightarrow \quad (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{n} = 0$$

erfolgt mittels der Beziehung $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene

Die Schnittpunkte einer Geraden g mit einer Ebene E bestimmt man, indem man

- eine Parameterdarstellung der Geraden g und eine Parameterdarstellung der Ebene E gleichsetzt oder
- eine Parameterdarstellung der Geraden g in eine parameterfreie Gleichung der Ebene E einsetzt.

Aufgabe: Schnittpunkt einer Gerade mit einer Ebene

Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Gerade g und der Ebene E:

$$g : x = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E : 5x + 2y + 4z - 6 = 0$$

Schnitt zweier Ebenen

Die Schnittpunkte zweier Ebenen E_1 und E_2 bestimmt man, indem man

- die Parameterdarstellungen der beiden Ebenen gleichsetzt oder
- das Gleichungssystem aus den beiden Ebenengleichungen löst oder
- eine Parameterdarstellung einer Ebene in eine parameterfreie Gleichung der anderen Ebene einsetzt.

Aufgabe: Schnitt zweier Ebenen

Bestimmen Sie die Gerade g, die den Schnitt der Ebenen E_1 und E_2 darstellt:

$$E_1 : x - 2y + 4z + 2 = 0$$

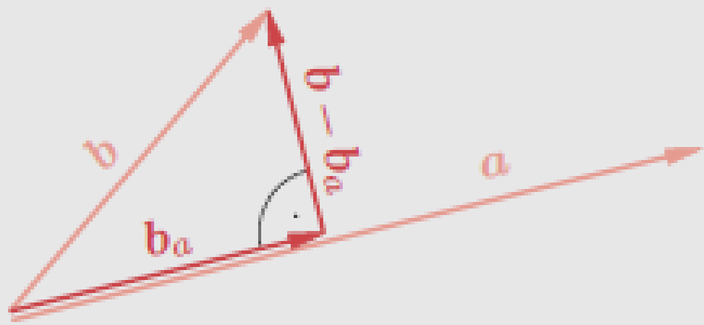
$$E_2 : 2x - 3y + z - 5 = 0$$

Senkrechte Projektion

Die senkrechte Projektion des Vektors $\boldsymbol{b}$ in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ ist definiert durch

$$\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{a}} = |\boldsymbol{b}| \cos \angle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|^2} \boldsymbol{a}.$$

Diese Projektion ist ein Vektor in Richtung des Vektors $\boldsymbol{a}$ mit der Länge $|\boldsymbol{b}| \cos \angle (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.



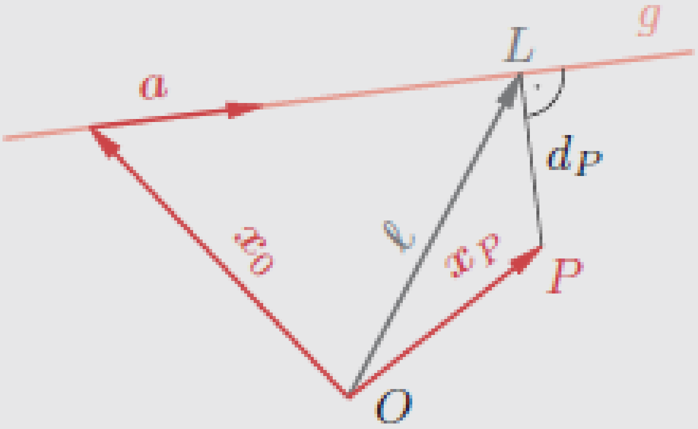
Abstand eines Punktes zu einer Geraden

Der Abstand des Punktes P mit dem Ortsvektor $\boldsymbol{x}_P$ zur Geraden g

$$g: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{a}$$

ist die Entfernung zwischen dem Punkt P und seinem Lotfußpunkt:

$$d_P = \left| \boldsymbol{x}_P - \left(\boldsymbol{x}_0 + \frac{(\boldsymbol{x}_P - \boldsymbol{x}_0) \cdot \boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} \, \boldsymbol{a} \right) \right| .$$



Aufgabe: Abstand eines Punktes zu einer Geraden

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P (3; 2; 1) zu der Geraden, die mit folgender

Parametergleichung beschrieben wird:

$$g : x = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

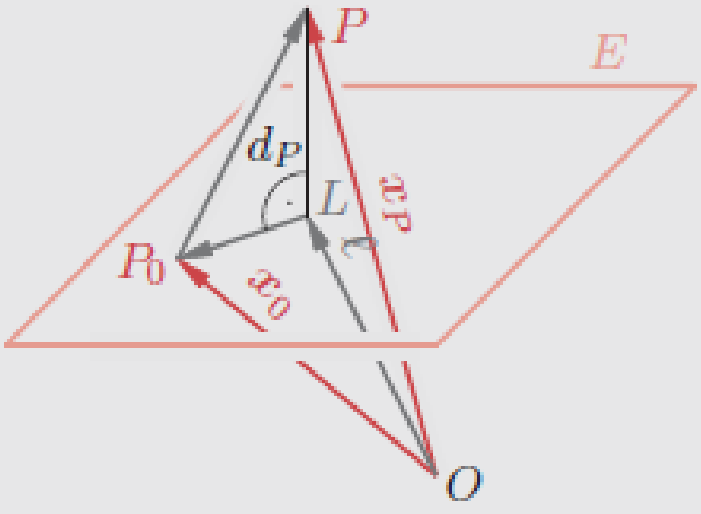
Abstand eines Punktes zu einer Ebene

Mit der Hesseschen Normalenform einer Ebene

$$E: \quad n_x x + n_y y + n_z z + d = 0,$$
$$\sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1$$

berechnet man den Abstand eines Punktes P mit dem Ortsvektor x_P zur Ebene E durch Einsetzen von P in die Ebenengleichung:

$$d_P = \left| n_x x_P + n_y y_P + n_z z_P + d \right|.$$



Aufgabe: Abstand eines Punktes zu einer Ebene

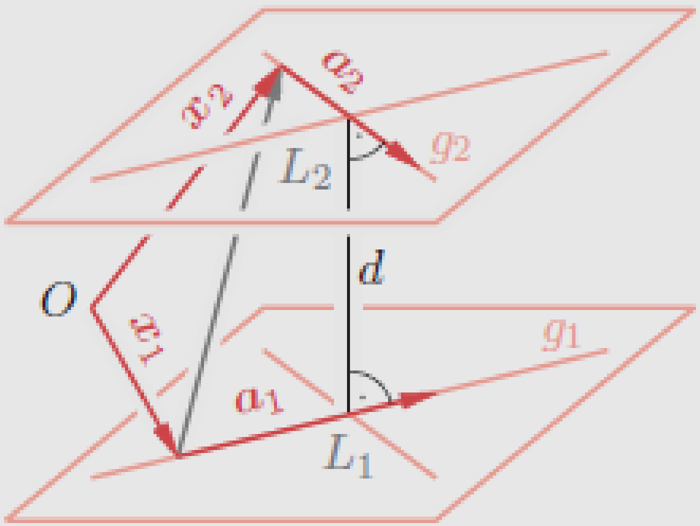
Berechnen Sie den Abstand des Punktes P (1; -2; 4) zur Ebene E mit der Gleichung:

$$E: -2x + 2y - z + 4 = 0$$

Windschiefe Geraden

Den Abstand der beiden windschiefen Geraden

$$\begin{aligned} g_1: \quad & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \lambda_1 \boldsymbol{a}_1 \\ g_2: \quad & \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2 \end{aligned}$$



kann man durch folgende Formel berechnen:

$$d = \frac{|(\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2) \cdot (\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1)|}{|\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2|}.$$

Den Winkel zwischen den beiden Geraden g_1 und g_2 in der Darstellung

$$g_1: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \lambda_1 \boldsymbol{a}_1, \qquad g_2: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2 + \lambda_2 \boldsymbol{a}_2$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\cos \angle (g_1, g_2) = \frac{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1| \, |\boldsymbol{a}_2|}.$$

Winkel zwischen Gerade und Ebene

Den Winkel zwischen der Geraden g und der Ebene E in der Darstellung

$$g: \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \lambda \boldsymbol{a}, \qquad E: \quad n_x x + n_y y + n_z z + d = 0$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\sin \angle (g, E) = \frac{|\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{n}|}.$$

Bestimmung des Winkels eines Vektors zu einer Ebenen

Aufgabenstellung:

Die Vektoren ***a*** und ***b*** definieren eine Ebene. Der Vektor ***x*** schneidet diese Ebene. Berechnen Sie den Schnittwinkel α des Vektors ***x*** mit der Ebene.

Vorgehensweise:

Der resultierende Vektor einer Vektormultiplikation ***c*** = ***a*** × ***b*** steht immer senkrecht auf der Ebene, die von den Vektoren ***a*** und ***b*** gebildet wird. Einen Vektor, der senkrecht auf einer Ebene steht, nennt man auch Normalenvektor.

Mit Hilfe des Skalarprodukts kann man den Winkel β des Vektors ***x*** zu der Normale der Ebene ***c*** berechnen. Der Schnittwinkel α ist dann (90° - β).

Winkel zwischen zwei Ebenen

Den Winkel zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2 in der Darstellung

$$E_1: \quad n_{1x}x + n_{1y}y + n_{1z}z + d_1 = 0, \qquad E_2: \quad n_{2x}x + n_{2y}y + n_{2z}z + d_2 = 0$$

kann man mit folgender Formel berechnen:

$$\cos\angle(E_1, E_2) = \frac{\boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{n}_2}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}.$$

Aufgabe: Winkel zwischen zwei Ebenen

Bestimmen Sie den Winkel zwischen den beiden Ebenen E_1 und E_2.

$$E_1 : x - 2y + 4z + 2 = 0$$

$$E_2 : 2x - 3y + z - 5 = 0$$

Aufgaben

1. Gegeben seien die drei Vektoren $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$

   Sind die Vektoren ***a***, ***b*** und ***c*** komplanar?

2. Wie muss man den Parameter x wählen, damit die drei Vektoren

   $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} x \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ in einer Ebene liegen?

Aufgaben

1. Beweisen Sie, dass die drei Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_y$ und $\boldsymbol{e}_z$ jeweils senkrecht aufeinander stehen.

2. Bestimmen Sie den Flächeninhalt des von den Vektoren $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ aufgespannten Parallelogramms.

3. Berechnen Sie den Flächeninhalt eines Dreiecks mit den Eckpunkten (1; 2; -2), (2; 3; -1) und (4; 0; 1).

Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München 2010

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf