Mathematik für Infotronik (6)

Gerald Kupris

18.10.2010

Vorlesungsinhalte Vektorrechnung

1. Definition von Vektoren
2. Einfache Rechenregeln
3. Koordinatendarstellung von Vektoren
4. Beträge von Vektoren
5. Rechenregeln in der Koordinatendarstellung
6. Koordinatendarstellung mit Winkelfunktionen
7. Skalarprodukt
8. Vektorprodukt
9. Spatprodukt

Wiederholung: Definition Vektor (Physik)

Es seien A und B Punkte in der Ebene (2 Dimensionen) oder im Raum (3 Dimensionen). Unter einem Vektor $\overrightarrow{AB}$ versteht man eine gerichtete Strecke mit Anfangspunkt (Angriffspunkt) A und Endpunkt B.

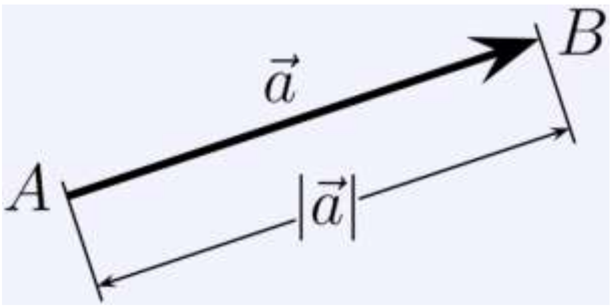
Ein freier Vektor wird durch **Richtung** und **Länge** eindeutig bestimmt.

Die Länge des Pfeils entspricht dabei dem Betrag des Vektors.

Im Gegensatz dazu: Skalar

Ein Skalar ist eine Größe, die allein durch die Angabe eines Zahlenwertes charakterisiert ist.

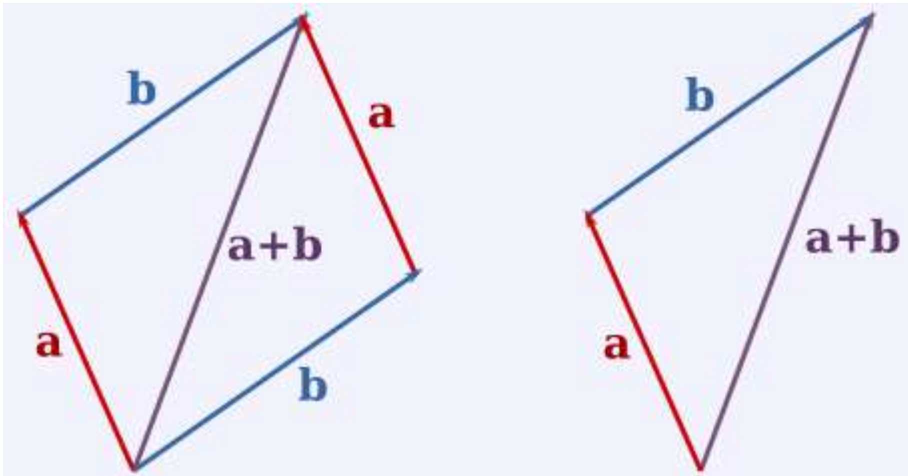
Wiederholung: Darstellung von Vektoren



Vektoren werden häufig als Pfeile dargestellt:
A wird in diesem Fall als Ausgangs- oder Startpunkt und B als Spitze oder Endpunkt des Vektors bezeichnet. Die Lage der Pfeilspitze gibt die **Orientierung** des Vektors, die Länge seinen **Betrag** und der Pfeilschaft seine **Richtung** an. Dieser Vektor kann auch als $\overrightarrow{AB}$ bezeichnet werden und sein Betrag als $|\overrightarrow{AB}|$ bzw. $\overline{AB}$.

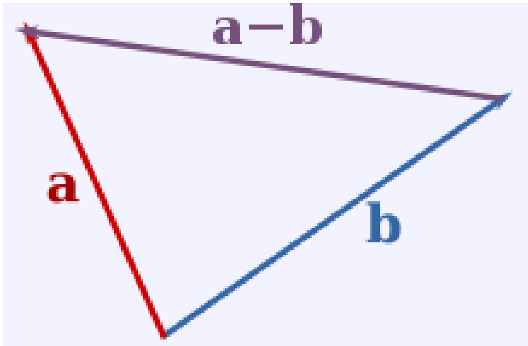
Variablen, die für Vektoren stehen, werden vor allem in der Schulmathematik und in der Physik häufig mit einem Pfeil gekennzeichnet ($\vec{a}$) oder, vor allem im englischsprachigen Raum, fett geschrieben (**a**). In englischen Handschriften wird dies häufig durch Unterstreichung (<u>a</u>) oder ähnliches repräsentiert.
Wie alle Variablen werden auch Vektoren allgemein kursiv gesetzt, unabhängig davon, ob sie fett (englisch) oder mit Pfeil (deutsch) gekennzeichnet sind. Früher war teilweise auch die Schreibweise mit Frakturbuchstaben ($\mathfrak{a}, \mathfrak{A}$) üblich.

Wiederholung: Einfache Rechenregeln für Vektoren: Addition



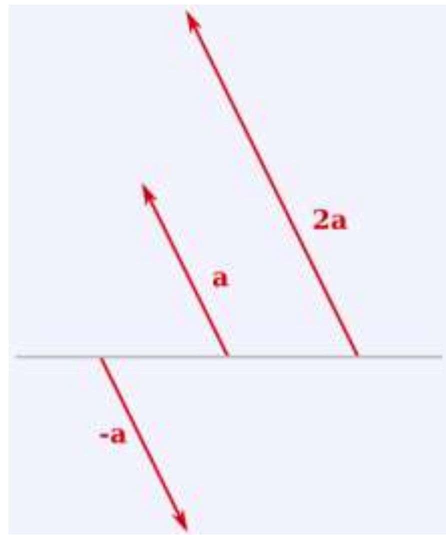
Die Vektoraddition kann man graphisch interpretieren, indem man den Startpunkt des zweiten Vektors mittels Parallelverschiebung auf den Endpunkt des ersten Vektors verschiebt.
Der Pfeil vom Startpunkt des ersten Vektors bis zum Endpunkt des zweiten Vektors repräsentiert den Ergebnisvektor.

Wiederholung: Einfache Rechenregeln für Vektoren: Subtraktion



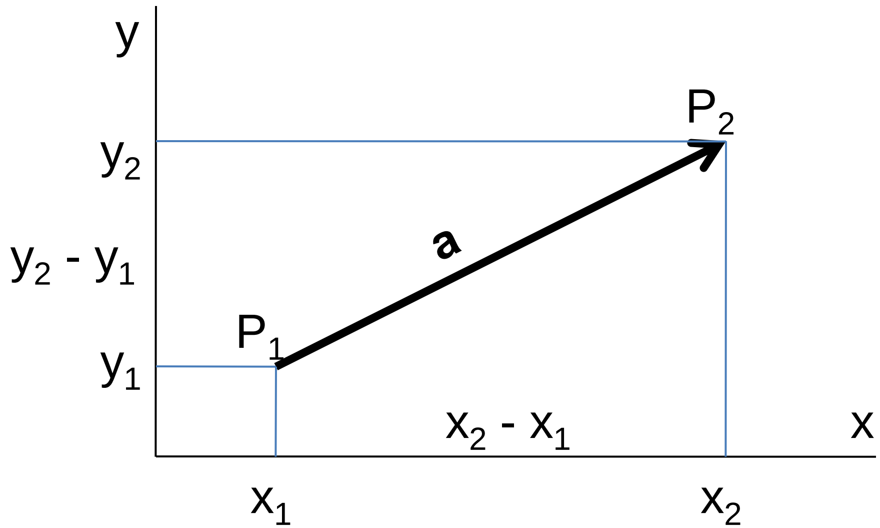
Die geometrische Interpretation der Subtraktion von zwei Vektoren ist:
Zwei Vektoren werden subtrahiert, indem man den Startpunkt des Gegenvektors des zweiten Vektors an den Endpunkt des ersten Vektors anschließt.
Geometrisch entspricht die Differenz dem Verbindungsvektor zwischen den Endpunkten des zweiten und des ersten Vektors.

Wiederholung: Einfache Rechenregeln für Vektoren: Skalare Multiplikation



Vektoren können mit reellen Zahlen (Skalaren) multipliziert werden (Skalare Multiplikation).
Die Länge des resultierenden Vektors ist daher $|r| \cdot |\vec{a}|$.
Wenn der Skalar positiv ist, zeigt der resultierende Vektor in dieselbe Richtung, ist er negativ, in die Gegenrichtung.

Koordinatendarstellung von Vektoren: 2D



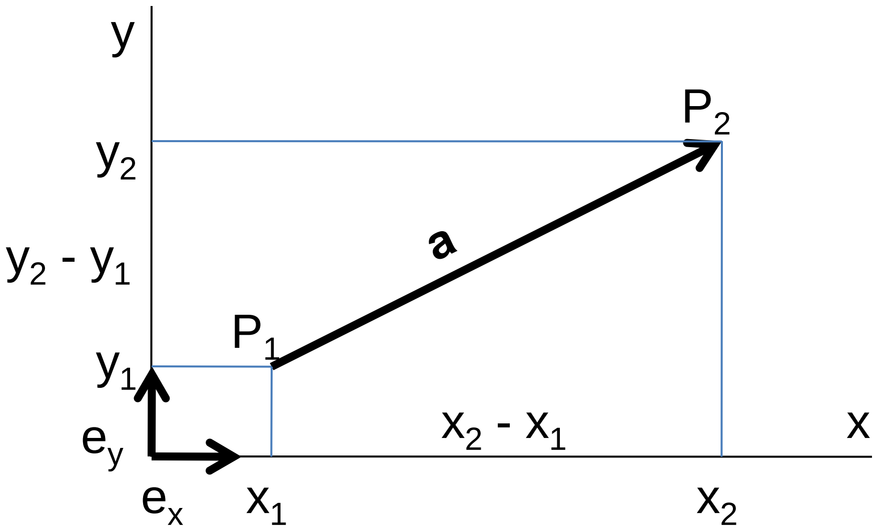
Vektor **a** verbindet die Punkte P_1 und P_2.

Um von zu P_1 zu P_2 gelangen, muss man
$x_2 - x_1$ Einheiten nach rechts und
$y_2 - y_1$ Einheiten nach oben.

Somit kann man die Koordinaten des Vektors a darstellen als:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Einheitsvektoren



$$\mathbf{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

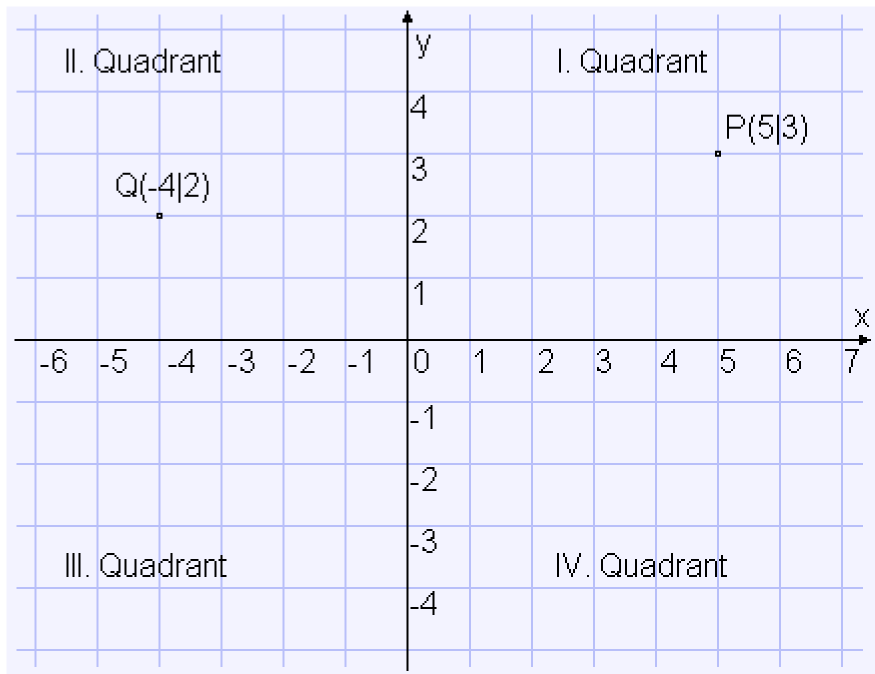
Um eine Normierung für die absolute Länge zu bekommen, werden so genannte **Einheitsvektoren** festgelegt.

Das sind Grundvektoren der **Länge 1**. Sie zeigen in die Richtung der jeweiligen Koordinatenachsen.

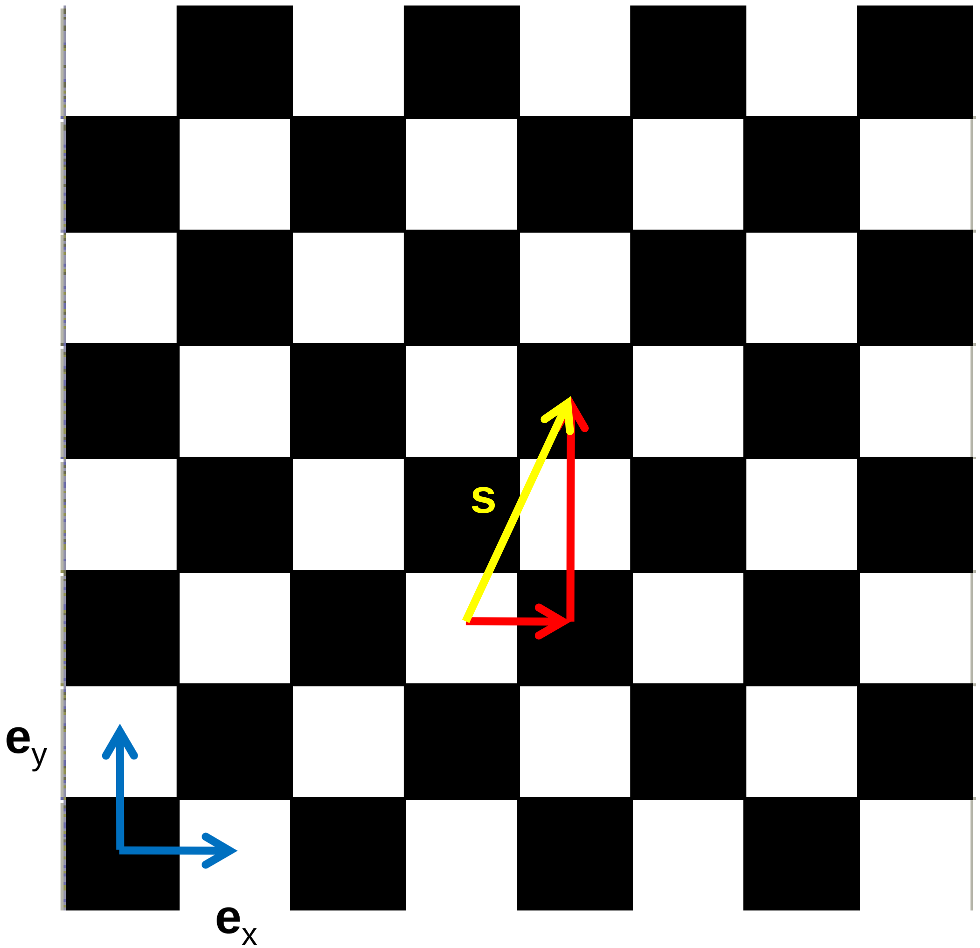
In der linearen Algebra ist ein Einheits-vektor oder normierter Vektor ein Vektor mit der Norm (anschaulich: der Länge) Eins. Einheitsvektoren gibt es also nur in einem normierten Vektorraum.

Kartesisches Koordinatensystem

Ein kartesisches Koordinatensystem ist ein orthogonales Koordinatensystem. Es ist nach dem latinisierten Namen Cartesius seines Erfinders René Descartes benannt. Im zwei- und dreidimensionalen Raum handelt es sich um das am häufigsten verwendete Koordinatensystem, da sich viele geometrische Sachverhalte in diesem am besten beschreiben lassen.



Beispiel für Koordinatendarstellung in 2D



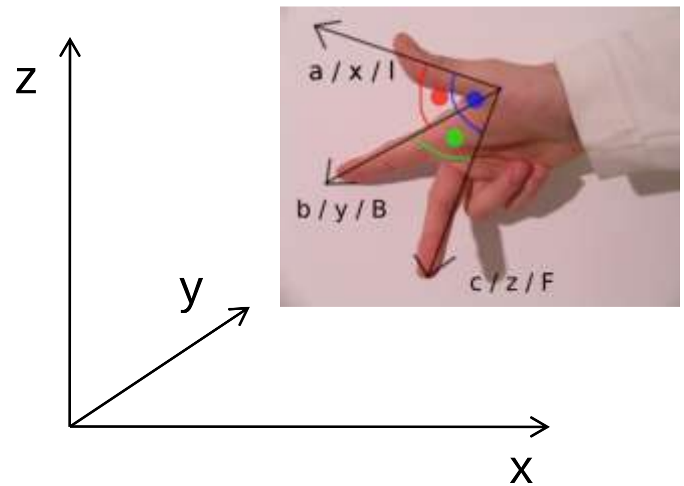
$\mathbf{e}_x$ und $\mathbf{e}_y$: Einheitsvektoren

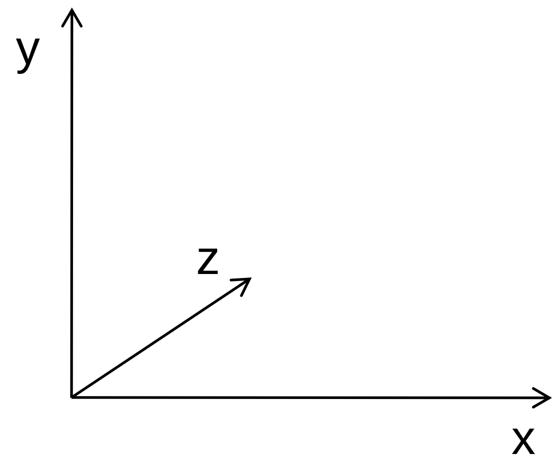
s : Verschiebungsvektor

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} 1 \cdot e_x \\ 2 \cdot e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Warum wurde der Vektor „**s**“ genannt (und nicht „**b**“ oder „**k**“)?

3 Dimensionen: Rechtssystem und Linkssystem





x, **y** und **z** bilden ein **Rechtssystem**, wenn man die rechte Hand so halten kann, dass Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger in die Richtung von **x**, **y** bzw. **z** zeigen.

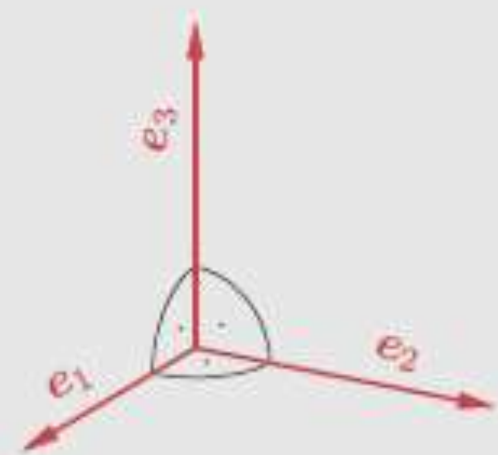
x, **y** und **z** bilden ein **Linkssystem**, wenn man die linke Hand so halten kann, dass Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger in die Richtung von **x**, **y** bzw. **z** zeigen.

Basisvektoren und Koordinaten

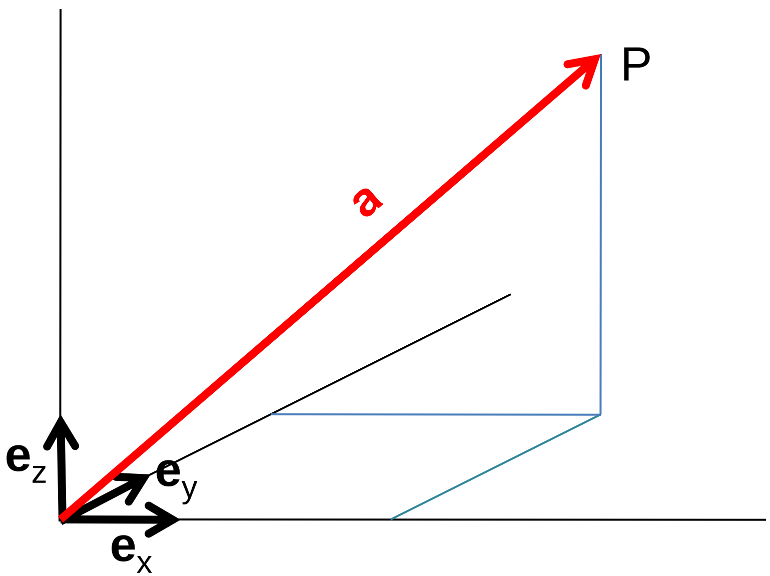
Drei Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ und $\boldsymbol{e}_3$, die paarweise senkrecht aufeinander stehen und in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, bezeichnet man als **Basisvektoren**. Jeder Vektor $\boldsymbol{a}$ lässt sich durch

$$\boldsymbol{a} = a_1\,\boldsymbol{e}_1 + a_2\,\boldsymbol{e}_2 + a_3\,\boldsymbol{e}_3$$

darstellen. Dabei nennt man die Skalare a_1, a_2 und a_3 die **Koordinaten** und die Vektoren $a_1\,\boldsymbol{e}_1$, $a_2\,\boldsymbol{e}_2$ und $a_3\,\boldsymbol{e}_3$ die **Komponenten** des Vektors $\boldsymbol{a}$.



Koordinatendarstellung in 3D



$$\vec{a} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z$$

$$\vec{b} = b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y + b_3\vec{e}_z$$

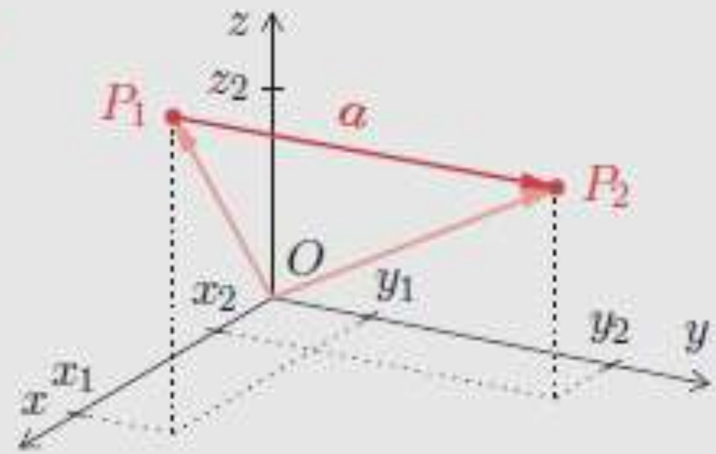
$$\mathbf{i} = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{j} = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k} = e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ortsvektor und Verbindungsvektor

Den Vektor $\boldsymbol{a}$ vom Punkt $P_1\,(x_1\,|\,y_1\,|\,z_1)$ zum Punkt $P_2\,(x_2\,|\,y_2\,|\,z_2)$ nennt man den **Verbindungsvektor**. Er hat die Koordinaten

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix}.$$

Ein **Ortsvektor** ist ein Verbindungsvektor vom Ursprung $O\,(0\,|\,0\,|\,0)$ zu einem Punkt.



Betrag eines Vektors

in 2D:

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}.$$

in 3D:

$$|\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$$

Das kann geometrisch nachvollzogen werden!

Addition und Subtraktion von Vektoren

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_x + a_2\vec{e}_y + a_3\vec{e}_z \qquad \vec{b} = b_1\vec{e}_x + b_2\vec{e}_y + b_3\vec{e}_z$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\vec{e_x} + (a_2 + b_2)\vec{e_y} + (a_3 + b_3)\vec{e_z} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\vec{e_x} + (a_2 - b_2)\vec{e_y} + (a_3 - b_3)\vec{e_z} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$$

Das kann geometrisch nachvollzogen werden!

Skalare Multiplikation von Vektoren

Bei der skalaren Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl wird jede Komponente mit dieser Zahl multipliziert.

$$\lambda \cdot \mathbf{a} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Um einen Vektor zu **normieren**, wird er mit dem Kehrwert seines Betrages skalar multipliziert. Somit ist der Betrag eines normierten Vektors immer gleich Eins.

Aufgaben

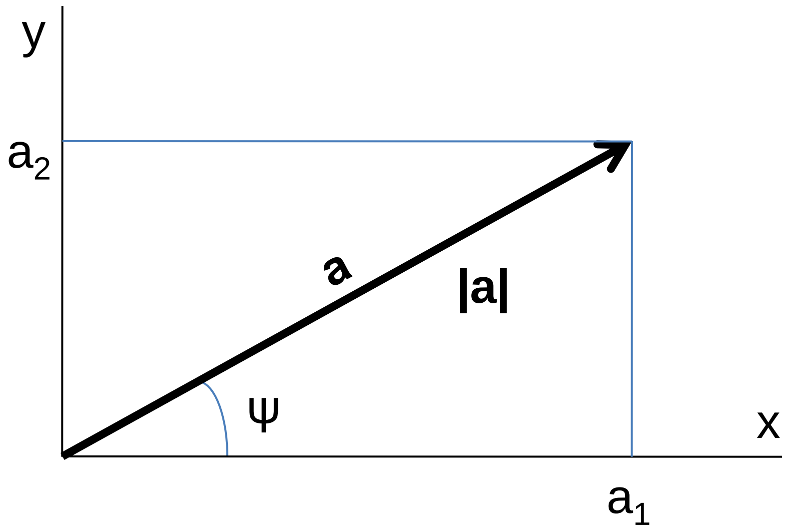
1. Wie lautet der Vektor **a**, der vom Punkt (3; -5; 7) zum Punkt (-2; 4; -1) weist und wie groß ist sein Betrag?

2. Der Vektor **a** = $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ habe den Anfangspunkt (1; 2; 3).
   Welche Koordinaten hat der Endpunkt dieses Vektors?

3. Welche Koordinaten besitzt ein Punkt Q, der die Strecke zwischen den Punkten (-4; 3; 2) und (1; 0; 4) halbiert?

4. Normieren Sie den Vektor **a** aus Aufgabe 1.
   Was erkennen Sie?

Koordinatendarstellung mit Winkelfunktionen

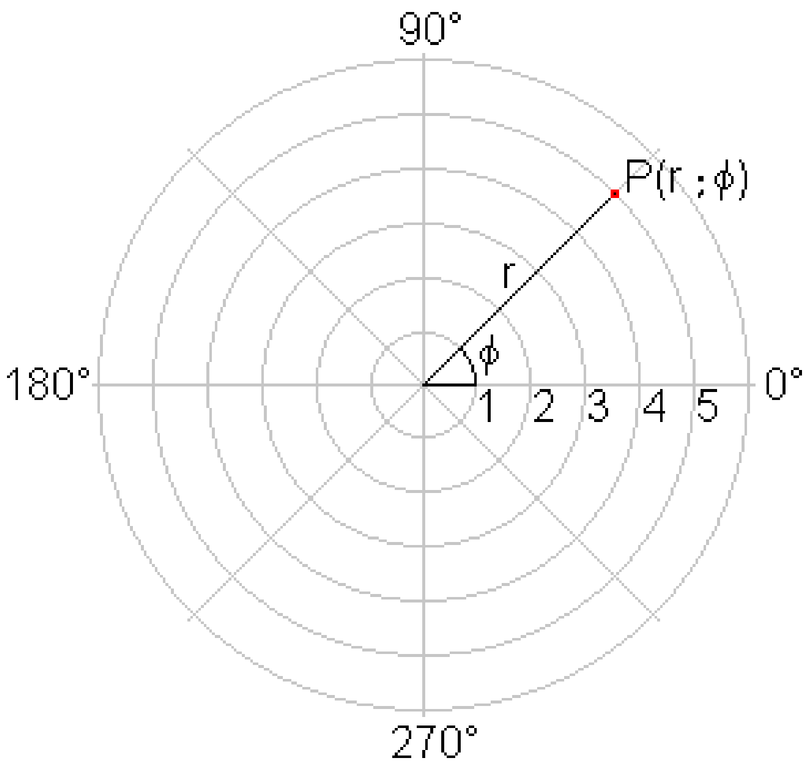


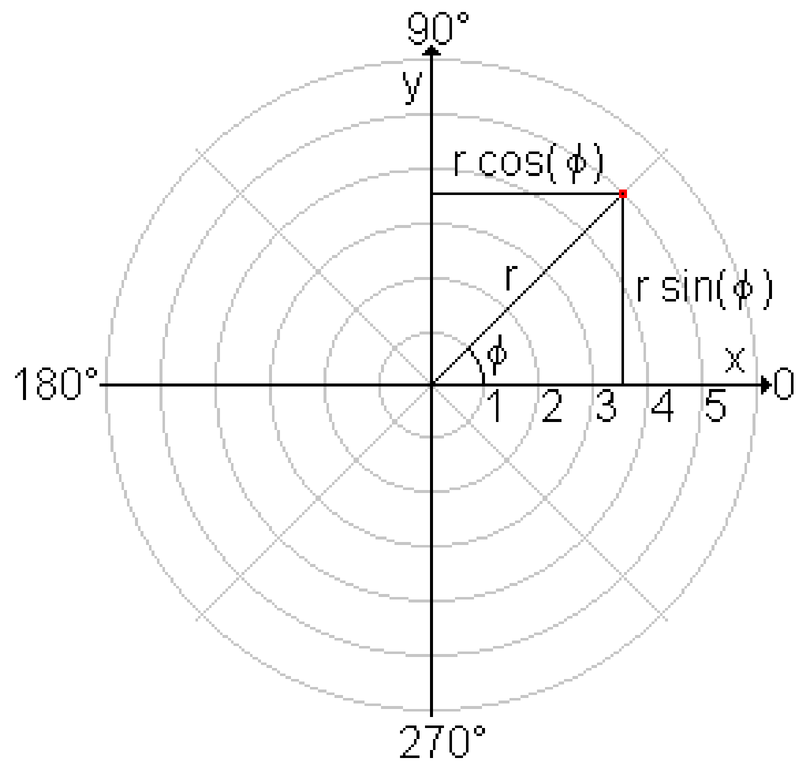
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a| \cdot \cos\psi \\ |a| \cdot \sin\psi \end{pmatrix}$$

Das ist gültig im ersten Quadranten! Bei Berechnungen in den anderen Quadranten müssen die Formeln angepasst werden.

Diese Darstellung wird auch polare Darstellung genannt. Sie ist in einigen Fällen praktischer als die Darstellung mit kartesischen Koordinaten (z.B. bei der Kräfte-bilanz oder der Rechnung mit komplexen Zahlen). Der Vorteil ist, dass die Komponenten Betrag und Richtung getrennt betrachtet werden können.

Polarkoordinaten 2D





Umrechnung

aus Polarkoordinaten
in kartesische Koordinaten

$$x = r \cdot \cos\varphi$$

$$y = r \cdot \sin\varphi$$

aus kartesischen Koordinaten
in Polarkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

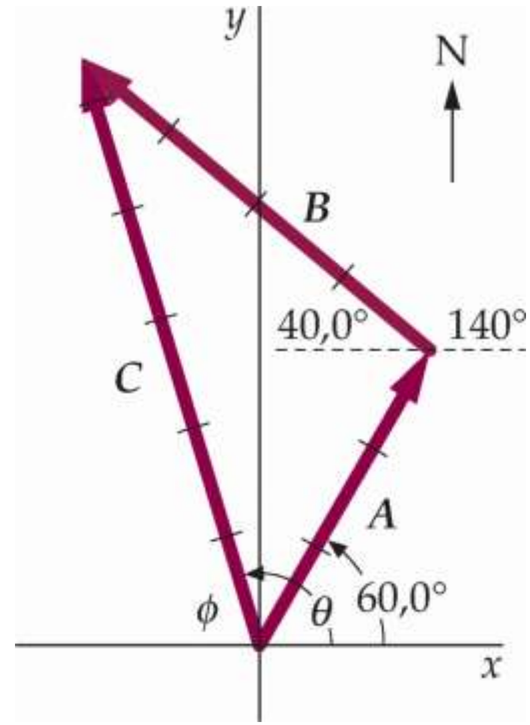
$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0,\ y \geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0,\ y < 0 \\ +\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

Aufgabe

Der Verwalter einer Tropeninsel erhält eine Karte mit dem Auftrag, an einem bestimmten Ort einen Schatz zu vergraben, den die Besucher dann suchen sollen. Hierzu muss er bestimmte Anweisungen befolgen. Der Verwalter möchte die Aufgabe schnell hinter sich bringen, um baden zu gehen. Die Anweisungen besagen, dass er 3,0 km unter einem Winkel von 60,0° nördlich der Ostrichtung und anschließend 4,0 km unter einem Winkel von 40,0° nördlich der Westrichtung gehen soll. In welche Richtung und wie weit muss er laufen, um die Sache möglichst schnell zu erledigen? Ermitteln Sie das Ergebnis:

a) grafisch oder

b) unter Verwendung von Vektorkomponenten.



Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,
Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium,
Hanser Verlag, München 2010