Mathematik 1 Infotronik (10)

Gerald Kupris

22.11.2012

Vorlesungsinhalte Komplexe Zahlen

Einführung in komplexe Zahlen
Anatomie der komplexen Zahlen
Darstellung komplexer Zahlen
Die Gaußsche Zahlenebene
Addition und Subtraktion komplexer Zahlen
Multiplikation und Division komplexer Zahlen
Konjugiert komplexe Zahlen
Betrag komplexer Zahlen
Darstellung komplexer Zahlen in Polarform
Rechenregeln
Rechnen mit komplexen Zahlen in Polarform
Anwendungen komplexer Zahlen

Anwendungen komplexer Zahlen: Wechselstromrechnung

Die Bestimmung des Verhältnisses von Strom zu Spannung in einem elektrischen Stromkreis ist eine der Grundaufgaben der Elektrotechnik.

Wird eine zeitlich konstante Spannung U vorgegeben und der Strom I bestimmt, oder wird der Strom I vorgegeben und die Spannung U bestimmt, so bezeichnet man das Verhältnis **U:I** als den **Widerstand R** oder das Verhältnis **I:U** als den **Leitwert G**.

In der Wechselstromtechnik hat man es mit **zeitlich veränderlichen** Spannungen und Strömen zu tun, die in diesem Fall einem sinusförmigen Verlauf folgen. Um diese Veränderlichkeit gegenüber den zeitlich fixen Größen auszudrücken, werden Momentan-werte, die sich zeitlich ändern, mit **Kleinbuchstaben** bezeichnet, Spannungen als **kleines u** und Ströme als **kleines i**.

Als passive lineare Elemente des Wechselstromkreises treten ohmsche Widerstände, Induktivitäten oder Kapazitäten auf. Für diese Elemente gilt:

$$i = \frac{u}{R} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C}$$

Wechselstromrechnung

Sinusförmige Spannung oder sinusförmiger Strom:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{\imath} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

$\hat{u}\ \hat{\imath}$	Maximalwert = Amplitude
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz
$\varphi_u\ \ \varphi_i$	Nullphasenwinkel
$\varphi_u - \varphi_i$	Phasenverschiebungswinkel

DIN 1304-1 und DIN 5483-3

Für die imaginäre Einheit verwendet man in der Elektrotechnik gemäß DIN 1302 den Buchstaben j (mit $j^2 = -1$), um Verwechslungen mit dem Buchstaben i, der für den (zeitabhängigen) Strom verwendet wird, zu vermeiden.

Formelzeichen komplexer Größen werden gemäß DIN 1304-1 und DIN 5483-3 durch einen Unterstrich gekennzeichnet.

Ein **rotierender Zeiger** für eine Spannung stellt diese als komplexe Spannung dar:

$$\underline{u}(\omega t) = \hat{u} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_u) + \mathrm{j} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)) = \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u}\angle(\omega t + \varphi_u)$$

$$\underline{i}(\omega t) = \hat{\imath} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_i) + \mathrm{j} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)) = \hat{\imath} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)} = \hat{\imath}\angle(\omega t + \varphi_i)$$

Darstellung der reellen Spannung als komplexe Schwingung

Reelle Form: $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$

Komplexe Form: $\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_u) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_u))$

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u} \cdot e^{j\omega t} = \underbrace{\underline{U}}_{\text{zeitunabhängige komplexe Amplitude}} \cdot \underbrace{e^{j\omega t}}_{\text{zeitabhängiger Faktor}}$$

$\hat{u}$	reelle Spannungsamplitude
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz
φ_u	Nullphasenwinkel der Spannung
$\underline{U} = \hat{u} \cdot e^{j\varphi_u}$	komplexe Spannungsamplitude

Darstellung des reellen Stroms als komplexe Schwingung

Reelle Form: $$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Komplexe Form: $$\underline{i}(t) = \hat{i} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_i) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_i))$$

$$\underline{i}(t) = \hat{i} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)} = \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t} = \underline{I} \cdot e^{j\omega t}$$

zeitunabhängige komplexe Amplitude

zeitabhängiger Faktor

$\hat{i}$	reelle Stromamplitude
$\omega = 2\pi f$	Kreisfrequenz
φ_i	Nullphasenwinkel des Stroms
$\underline{I} = \hat{i} \cdot e^{j\varphi_i}$	komplexe Stromamplitude

Umrechnung der komplexen Schwingung in die reelle Form

Komplexe Form: $\underline{u}(t) = \hat{u} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_u) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_u))$

Reelle Form: $u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$

$$u(t) = \mathrm{Im}(\underline{u}(t))$$

Komplexe Form: $\underline{i}(t) = \hat{i} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_i) + j \cdot \sin(\omega t + \varphi_i))$

Reelle Form: $i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$

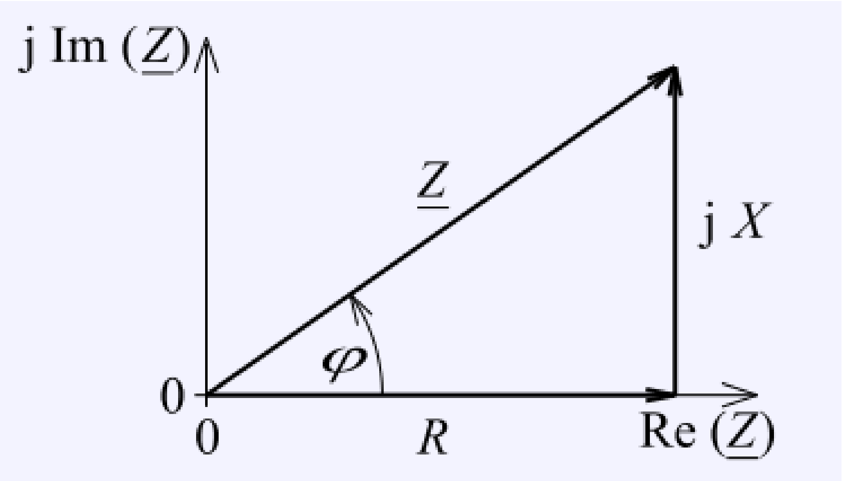
$$i(t) = \mathrm{Im}(\underline{i}(t))$$

Ohmsches Gesetz im komplexen Bereich

Das Verhältnis der komplexen Spannung zur komplexen Stromstärke ist unter den genannten Voraussetzungen eine komplexe Konstante. Diese Aussage ist das ohmsche Gesetz für komplexe Größen. Die Konstante wird als komplexer Widerstand oder Impedanz ***Z*** bezeichnet. Auch diese wird in der komplexen Ebene als Zeiger dargestellt, der aber als zeitunabhängige Größe nicht rotiert.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)}}{\hat{\imath} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)}} = \frac{\hat{u}}{\hat{\imath}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$\underline{Z} = R + \mathrm{j}X$$



$\underline{Z}$ = Impedanz
R = Re($\underline{Z}$) ohmscher Widerstand
X = Im($\underline{Z}$) Blindwiderstand

Ohmscher Widerstand

$$\underline{Z}_R = R = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}\angle 0 = \frac{\hat{u}}{\hat{i}}$$

Der komplexe Widerstand besteht hier nur aus einem positiven Ohmschen Widerstand.

Kondensator

Kondensator:

$$\frac{\underline{i}}{C} = \frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t} = \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)} \cdot \mathrm{j}\omega = \underline{u}\ \mathrm{j}\omega$$

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega C} = -\mathrm{j} \cdot \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{Z}_C = \mathrm{j} \cdot X_C = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}}{\hat{i}} \angle(-90°)$$

Der komplexe Widerstand besteht hier nur aus einem negativen Blindwiderstand.

$$X_C = -\frac{1}{\omega \cdot C} = -\frac{1}{2\pi f \cdot C}$$

1 Farad:

$$[C] = \frac{[Q]}{[U]} = \frac{1\,\mathrm{As}}{1\,\mathrm{V}} = 1\,\mathrm{F}$$

Spule

Spule:

$$\frac{\underline{u}}{L} = \frac{\mathrm{d}\underline{i}}{\mathrm{d}t} = \hat{\imath} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)} \cdot \mathrm{j}\omega = \underline{i}\,\mathrm{j}\omega$$

$$\frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \mathrm{j} \cdot \omega L = \omega L \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$$

$$\underline{Z}_L = \mathrm{j} \cdot X_L = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u}}{\hat{\imath}} \angle(90°)$$

Der komplexe Widerstand besteht hier nur aus einem positiven Blindwiderstand.

$$X_L = \omega \cdot L = 2\pi f \cdot L$$

1 Henry: 1 H = 1 Vs / 1A

Zusammenschaltung mehrerer komplexer Widerstände

Sind alle Bauelemente in Reihe geschaltet, so ist es zweckmäßig, den Strom vorzugeben. Man kann so für jedes Element, durch das derselbe Strom fließt, die angelegte Spannung bestimmen und dann alle Spannungen durch Addition der Zeiger zusammenfassen.

Gleichwertig kann man erst alle Widerstände komplex addieren und dann mit dem Strom multiplizieren.

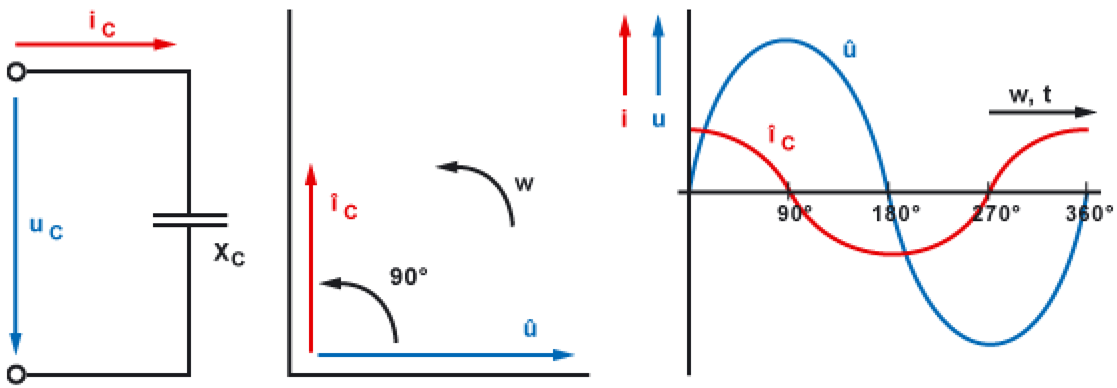
Sind jedoch alle Bauelemente parallel geschaltet, so wird man eine Spannung vorgeben. Man kann den Strom durch jedes Element getrennt berechnen und dann alle komplexen Ströme durch Aneinandersetzung der Zeiger addieren.

Gleichwertig kann man erst alle komplexen Leitwerte addieren und dann mit der Spannung multiplizieren.

Ist die Schaltung eine Mischform, so ist man gezwungen, sie elementar zu zerlegen und jede Teilschaltung getrennt zu berechnen, bevor man sie wieder zusammensetzt.

Phasenverschiebung

φ_u, φ_i	Nullphasenwinkel von ***u(t)***, ***i(t)***
$\varphi = \varphi_u - \varphi_i$	Phasenverschiebungswinkel zwischen ***u(t)*** und ***i(t)***
$0° < \varphi < 180°$	Spannung eilt Strom um $\boldsymbol{\varphi}$ voraus
$-180° < \varphi < 0°$	Strom eilt Spannung um | $\boldsymbol{\varphi}$ | voraus



Beispielaufgabe

2. An einem Wechselstromnetz (U = 220 V, f = 50 Hz) liegen in Reihenschaltung der Ohmsche Widerstand R = 100 Ω, die Kapazität C = 20 µF und die Induktivität L = 0,1 H.

   Zu berechnen sind:

   a) Der Scheinwiderstand Z und der Effektivwert I des Wechselstroms,

   b) die Phasenverschiebung φ zwischen Spannung und Strom,

   c) die Effektivwerte der Spannungsabfälle an den Einzelwiderständen.

Elektrische Leistungsberechnung

Elektrische Leistung ist das Produkt aus Spannung U und Strom I an einem Zweipol.

P = U · I

Strom und Spannung sind im allgemeinen zeitabhängig:

P(t) = u(t) · i(t)

P(t) - Momentanwert der elektrischen Leistung

P(t) > 0 : Energiefluß zum Verbraucher
P(t) < 0 : Energierückfluß zum Generator

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

Leistung

Der zeitunabhängige Zeiger wird in DIN 5483-3 und DIN 40110-1 als komplexe Leistung oder komplexe Scheinleistung bezeichnet.

$$\underline{S} = \underline{U}\ \underline{I}^{\star} = S\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)} = P + \mathrm{j}Q$$

Darin sind die in der Wechselstromtechnik üblichen drei Kenngrößen zur Leistung enthalten:

die Scheinleistung S (in VA):

$$S = |\underline{S}| = U\ I$$

die Wirkleistung P (in W), die als arithmetischer Mittelwert über p definiert wird:

$$P = \mathrm{Re}\ \underline{S} = U\ I\ \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

die ebenfalls frei von Schwingungsanteilen (Augenblickswerten) definierte Blindleistung (Verschiebungsleistung) Q (in var):

$$Q = \mathrm{Im}\ \underline{S} = U\ I\ \sin(\varphi_u - \varphi_i)$$

Beispielaufgabe

3. An einem Wechselstromnetz (U = 220 V, f = 50 Hz) liegen in Reihenschaltung der Ohmsche Widerstand R = 100 Ω, die Kapazität C = 20 µF und die Induktivität L = 0,1 H.

   Berechnen Sie die Scheinleistung, die Wirkleistung und die Blindleistung, die an dieser Reihenschaltung umgesetzt werden.

Transformation

In der Mathematik versteht man allgemein unter einer Transformation eine struktur-verträgliche Abbildung zwischen zwei gleich strukturierten Mengen oder spezieller auch eine Selbstabbildung auf einer Menge.

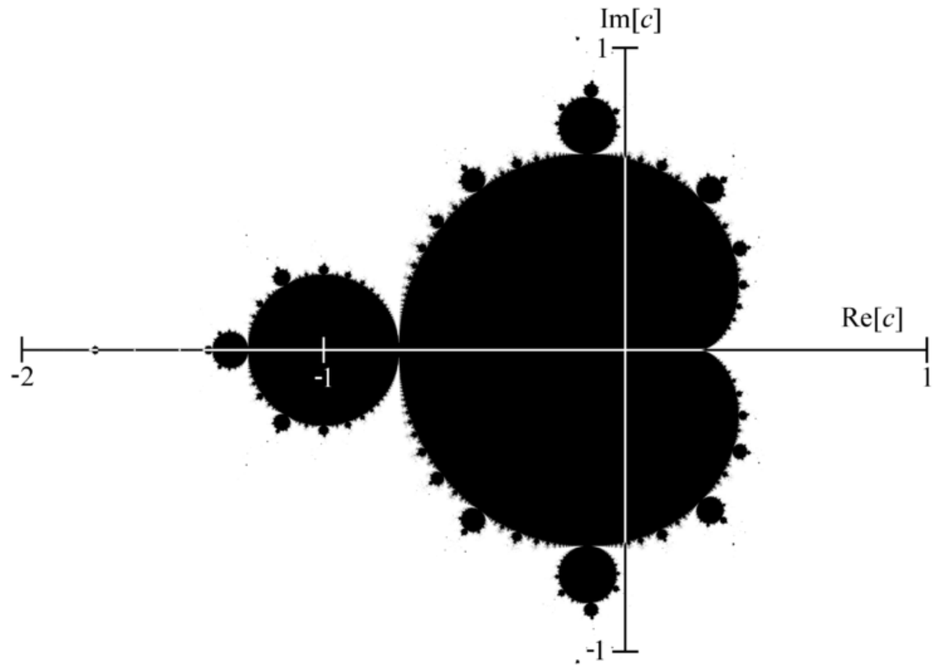
Die lineare Abbildung (auch linearer Operator) ist ein Begriff aus dem mathematischen Teilgebiet der linearen Algebra. Man bezeichnet damit eine Funktion zwischen zwei Vektorräumen, bei der es unerheblich ist, ob man zwei Vektoren zuerst addiert und dann deren Summe mittels der Funktion abbildet oder zuerst die Vektoren abbildet und dann die Summe der Bilder bildet. Gleiches gilt für die Multiplikation mit einem Skalar (z. B. einer reellen Zahl).

Die Mandelbrot-Menge

Die Mandelbrot-Menge (benannt nach dem französischen Mathematiker Benoît Mandelbrot) ist die Menge aller komplexen Zahlen c, für welche die rekursiv definierte Folge komplexer Zahlen mit dem Bildungsgesetz

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

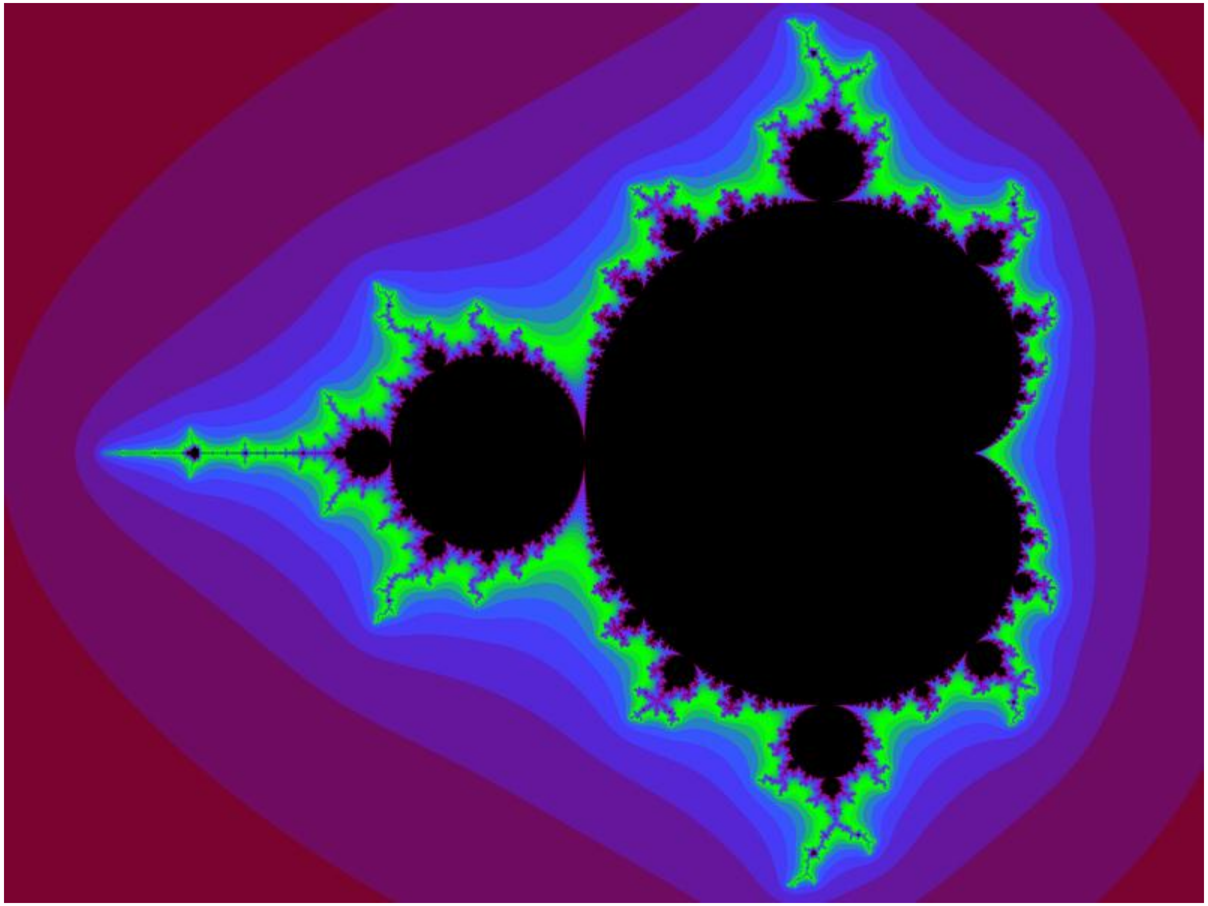
und dem Anfangsglied $z_0 = 0$ beschränkt bleibt, das heißt, der Betrag der Folgenglieder wächst nicht über alle Grenzen.



Die grafische Darstellung dieser Menge erfolgt in der komplexen Ebene. Die Punkte der Menge werden dabei in der Regel schwarz dargestellt und der Rest farbig, wobei die Farbe eines Punktes den Grad der Divergenz der zugehörigen Folge widerspiegelt .

Darstellung der Mandelbrot-Menge

Die grafische Darstellung der Mandelbrot-Menge und ihrer Strukturen im Randbereich ist nur mittels Computer möglich.

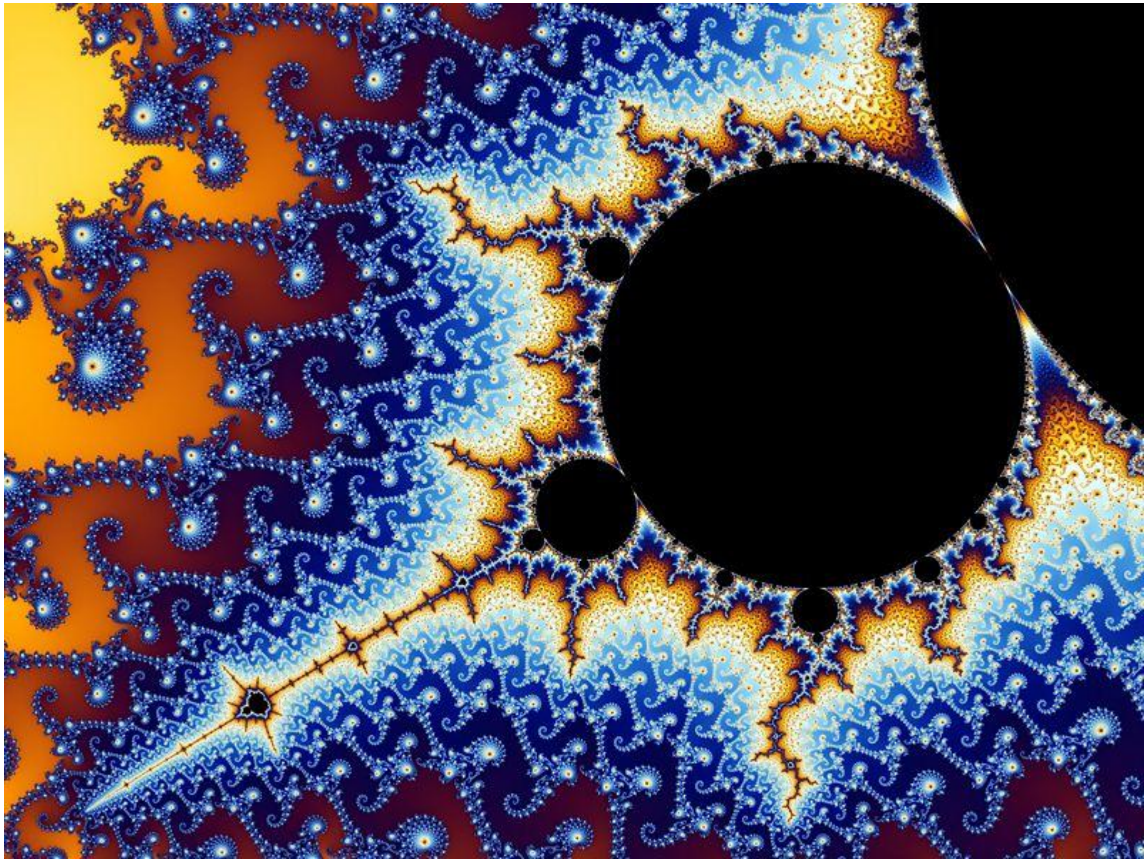


Dabei entspricht jedem Bildpunkt ein Wert c der komplexen Ebene. Der Computer ermittelt für jeden Bildpunkt, ob die zugehörige Folge divergiert oder nicht.

Sobald der Betrag $|z_n|$ eines Folgengliedes den Wert R=2 überschreitet, divergiert die Folge.

Darstellung der Mandelbrot-Menge

Grafisch besonders reizvoll ist die Darstellung des Randes der Mandelbrot-Menge mit seinem Formenreichtum. Je stärker die gewählte Vergrößerung ist, umso komplexere Strukturen lassen sich dort finden.



Mit entsprechenden Computer-programmen lässt sich dieser Rand wie mit einem Mikroskop mit beliebiger Vergrößerung darstellen. Die beiden einzigen künstlerischen Freiheiten, die dabei bestehen, sind die Wahl des Bildausschnittes sowie die Zuordnung von Farben zum Divergenzgrad.

Film

Dimensions by Jos Leys - Étienne Ghys - Aurélien Alvarez

Kapitel 6

Aufgaben

1. Geben Sie folgende Potenzen in kartesischer Form an:

a) $z = (3 - j \cdot \sqrt{3})^4$

b) $z = (3 \cdot e^{j\pi})^5$

c) $z = \left(\dfrac{3 - j}{2 + j} \right)^3$

d) $z = \left(2 \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{3} \right) + j \cdot 2 \cdot \sin\left(\dfrac{\pi}{3} \right) \right)^{10}$

2. Bestimmen Sie sämtliche Lösungen folgender Aufgaben:
a) $z^3 = j$ b) $z^2 = 1 + 2j$ c) $z^5 = 3 - 4j$

Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München 2010

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf