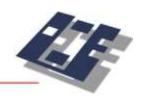


Mathematik für Infotronik (34)

Gerald Kupris
13.01.2011



Restliche Stunden Mathematik 1. Semester

10.01.2011 (Mo) 09:45 Uhr: Auswertung Fragebogen, Exponentialfunktion, e-funktion

12.01.2011 (Mi) 09:45 Uhr: Logarithmusfunktion, Logarithmusregeln

12.01.2011 (Mi) 11:45 Uhr: Ableitung und Integration von e-Funktion und Logarithmus

13.01.2011 (Do) 09:45 Uhr: Wiederholung Integration, Integration durch Substitution

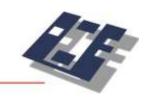
17.01.2011 (Mo) 09:45 Uhr: Partielle Integration, Partialbruchzerlegung

19.01.2011 (Mi) 08:00 Uhr: Rechenbeispiele, Flächenberechnung, Schwerpunkt

19.01.2011 (Mi) 09:45 Uhr: Anwendung der Integration, numerische Methoden

20.01.2011 (Do) 09:45 Uhr: allgemeine Wiederholung, Prüfungsvorbereitung

08.02.2011 (Di) 11:00 Uhr: Prüfung



Wiederholung: Stammfunktionen der wichtigsten Funktionen

Funktion	Stammfunktion	Funktion	Stammfunktion
$\int e^x dx$	$= e^x + C$	J	$= -\cos x + C$
$\int x^a \mathrm{d} x$	$= \frac{1}{a+1}x^{a+1} + C, a \neq -1$	$\int \cos x \mathrm{d} x$	$= \sin x + C$
$\int \frac{1}{x} \mathrm{d} x$	$= \ln x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d} x$	$= \arctan x + C$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

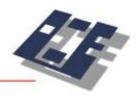


Innere Ableitung

Beim Ableiten verketteter Funktionen ist eine innere Ableitung zu berücksichtigen. Entsprechend vorsichtig müssen wir deshalb bei der Integration verketteter Funktionen vorgehen.

Beim Ableiten einer verketteten Funktion $f \circ u$ wird die Ableitung der äußeren Funktion f mit der Ableitung der inneren Funktion u multipliziert:

$$(f(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x).$$



Integration durch Substitution

Wenn man die Funktion unter dem Integral als ein Produkt aus einer verketteten Funktion $f \circ u$ und der inneren Ableitung u' darstellt, dann kann man alternativ auch einfach über die Funktion u integrieren:

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) \, \mathrm{d} x = \int f(u) \, \mathrm{d} u.$$

13.01.2011 5



Substitutionsregel

Eine Stammfunktion kann man durch eine geeignete Substitutionsfunktion u mit folgenden Schritten bestimmen:

- (1) Berechne das Verhältnis der Differenziale $\frac{du}{dx} = u'(x)$.
- (2) Ersetze im Integral Ausdrücke mit x durch Ausdrücke mit u und ersetze $dx = \frac{du}{u'(x)}$ so, dass im neuen Integral nur noch u und du vorkommen.
- (3) Führe, falls möglich, die Integration mit der Variablen u durch.
- (4) Durch Rücksubstitution erhält man Stammfunktionen, die wieder von x abhängen.



Lineare Substitution

Bei Integralen der Form $\int f(ax+b) dx$ erhält man durch die lineare Substitution

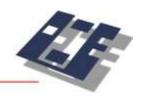
$$u(x) = ax + b, \quad dx = \frac{du}{a}$$

das neue Integral $\frac{1}{a} \int f(u) du$. Dabei sind $a \neq 0$ und b beliebige Konstanten.

Die lineare Substitution ist lediglich eine Transformationsregel. Sie ist nur dann zielführend, wenn man nach der Substitution für das neue Integral eine Stammfunktion angeben kann.

Beispiel

13.01.2011 7



Substitution bei Produkt aus Funktion und Ableitung

Stammfunktionen, bei denen unter dem Integral das Produkt aus einer Funktion f und ihrer Ableitung f' steht, kann man durch Substitution berechnen:

$$u(x) = f(x), \quad dx = \frac{du}{f'(x)},$$

$$\int f(x)f'(x) dx = \int u du = \frac{1}{2}u^2 + C = \frac{1}{2}f(x)^2 + C.$$

Beispiel



Substitution bei Quotient aus Ableitung und Funktion

Stammfunktionen, bei denen unter dem Integral der Quotient aus einer Ableitung f' und ihrer Funktion f steht, kann man durch Substitution berechnen:

$$u(x) = f(x), \quad dx = \frac{du}{f'(x)},$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C = \ln|f(x)| + C.$$

Beispiel



Substitution der Grenzen

Bei bestimmten Integralen ist es oft einfacher, anstatt der Rücksubstitution eine Substitution der Integrationsgrenzen durchzuführen:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) \, dx = \int_{u=u(a)}^{u=u(b)} g(u) \, du.$$

Beispiel

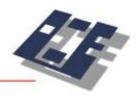


Produktregel der Ableitung

Beim Ableiten eines Produktes zweier Funktionen f und g summiert man das Produkt aus der Ableitung der ersten Funktion f' und der zweiten Funktion g und das Produkt aus der ersten Funktion f und der Ableitung der zweiten Funktion g':

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

Daraus kann man eine Regel zur partiellen Integration einwickeln.



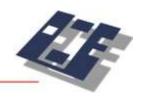
Partielle Integration

Wenn man die Funktion im Integral als ein Produkt einer Funktion f und der Ableitung g' einer Funktion g in der Form

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x$$

darstellt, dann kann man die Funktion teilweise integrieren:

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x.$$



Partielle Integration

Partielle Integration ist sinnvoll, falls

- man eine Stammfunktion g zu g' angeben kann und
- das neue Integral

$$\int f'(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$$

die Berechnung des ursprünglichen Integrals vereinfacht.

Beispiele



Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org