Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (24)

Gerald Kupris

06.12.2010

Differenzialrechnung

Die Differenzialrechnung beschäftigt sich mit dem Änderungsverhalten einer Funktion.

Ausgehend von einem bestimmten Funktionswert kann man mit Mitteln der Differenzialrechnung über den weiteren Verlauf einer Funktion spekulieren.

Bei der Differenzialrechnung konzentriert man sich auf kleine Änderungen. Bei kleinen Änderungen in der Variablen lässt sich die Veränderung der Funktion sehr zuverlässig prognostizieren.

Die Differenzialrechnung ist ein unverzichtbares Hilfsmittel bei der mathematischen Modellbildung. Dabei versucht man, die Wirklichkeit durch Funktionen zu beschreiben.

Sekante und Differenzenquotient

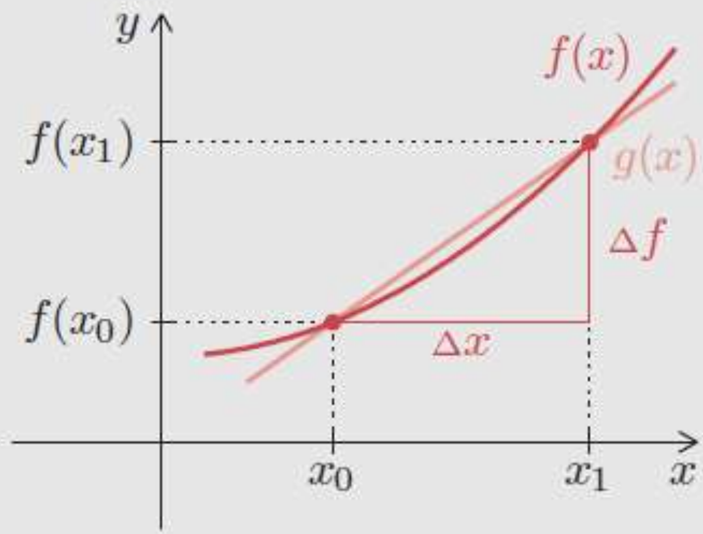
Eine **Sekante** einer Funktion f ist eine Gerade durch zwei Punkte des Schaubildes von f. Das Verhältnis der Differenzen der Funktionswerte und der x-Werte

$$m = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

beschreibt die Steigung der Sekante

$$g(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

und wird als **Differenzenquotient** bezeichnet.



Beispiel: Sekante und Differenzenquotient

Wir bestimmen die Sekante der Funktion

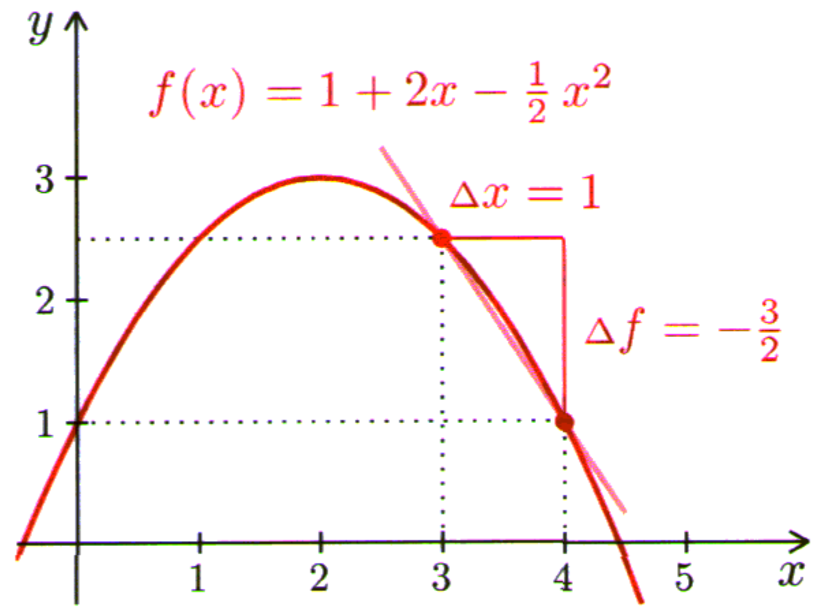
$$f(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2$$

an den Stellen $x_0 = 3$ und $x_1 = 4$. Die Steigung m der Sekante ermitteln wir mit dem Steigungsdreieck

$$m = \frac{f(4) - f(3)}{4 - 3} = \frac{1 - \frac{5}{2}}{1} = -\frac{3}{2}$$

Die Geradengleichung der Sekante lautet

$$y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2}(x - 3).$$



Wenn die beiden Punkte auf der Sekante nahe beieinanderliegen, dann unterscheidet sich die Sekante zwischen diesen beiden Punkten kaum von der Funktion. Deshalb definiert man die Steigung einer Funktion als Grenzwert der Sekantensteigung.

Ableitung und Differenzierbarkeit an der Stelle x_0

Der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

heißt, falls er existiert, **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0. Man nennt dann die Funktion f **differenzierbar** an der Stelle x_0. Es sind verschiedene Schreibweisen gebräuchlich:

$$f'(x_0) = \dot{f}(x_0) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \mathrm{D}\, f|_{x_0} \, .$$

Tangente und Differenzialquotient

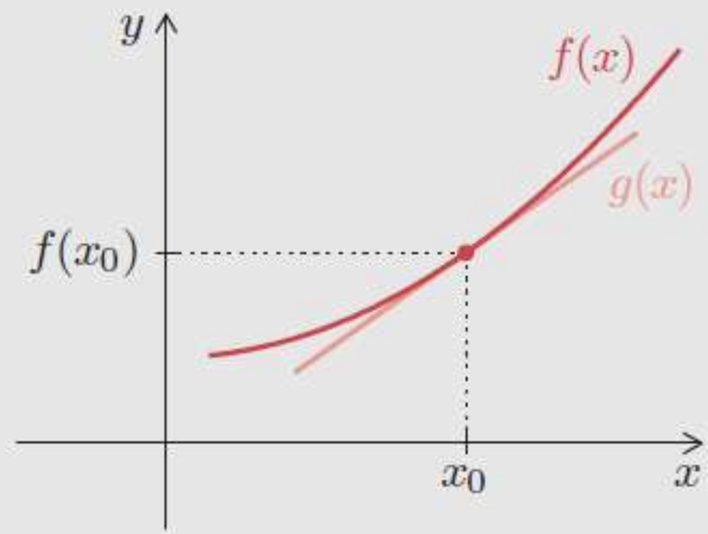
Eine **Tangente** einer Funktion f ist eine Gerade durch einen Punkt des Schaubildes von f. Die Tangente berührt das Schaubild von f. Der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \left.\frac{\mathrm{d} f}{\mathrm{d} x}\right|_{x_0}$$

beschreibt die Steigung der Tangente

$$g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

und wird als **Differenzialquotient** bezeichnet.

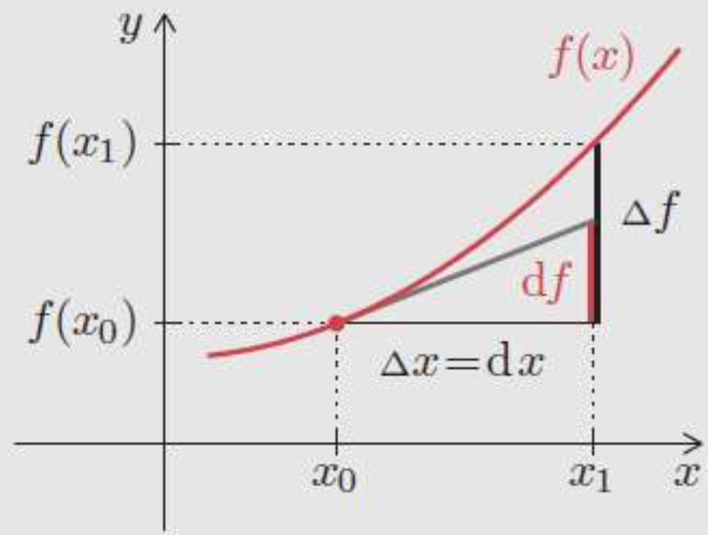


Differenzial

Das **Differenzial** einer Funktion f an der Stelle x_0 ist definiert durch

$$\mathrm{d}f|_{x_0} = f'(x_0)\,\mathrm{d}x.$$

Es beschreibt die Veränderung des y-Wertes entlang der Tangente an der Stelle x_0, wenn sich die Variable x um den Wert $\mathrm{d}x$ ändert.



Das Differenzial der Funktion f an der Stelle x_0 liefert für kleine Änderungen Δx eine gute Näherung für die tatsächliche Änderung des Funktionswerts:

$$\mathrm{d}f|_{x_0} = f'(x_0)\Delta x \approx \Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Differenzierbare Funktion

Ist die Funktion f an jeder einzelnen Stelle eines Intervalls I differenzierbar, so heißt die Funktion f differenzierbar auf dem gesamten Intervall I.

Jede differenzierbare Funktion ist auch stetig und hat an allen Stellen eine eindeutige Steigung. Das Schaubild einer differenzierbaren Funktion hat weder Sprünge noch Knicke.

Ableitungsfunktion

Ist eine Funktion f differenzierbar, so kann man eine neue Funktion f' dadurch definieren, dass man jedem Wert x die Steigung der Tangente an der Stelle x zuordnet:

$$x \mapsto f'(x).$$

Ableitungsfunktionen werden oft einfach auch als Ableitungen bezeichnet.

Ableitungsfunktionen werden mithilfe des Grenzwertes von Differenzenquotienten oder mithilfe von geeigneten Ableitungstechniken durchgeführt.

Beim Ableiten von Funktionen ändern sich die Symmetrieeigenschaften.

Ableitung der Potenzfunktion

Wir berechnen die Ableitungsfunktion der Potenzfunktion $f(x) = x^n$ für natürliche Zahlen n mithilfe des Grenzwertes des Differenzenquotienten

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x}.$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n\, x^{n-1}\, \Delta x + \ldots + (\Delta x)^n}{\Delta x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} n\, x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} (\Delta x)^2 + \ldots + (\Delta x)^{n-1} = n\, x^{n-1}$$

Die Ableitungsfunktion einer geraden Funktion ist eine ungerade Funktion und die Ableitungsfunktion einer ungeraden Funktion ist eine gerade Funktion.

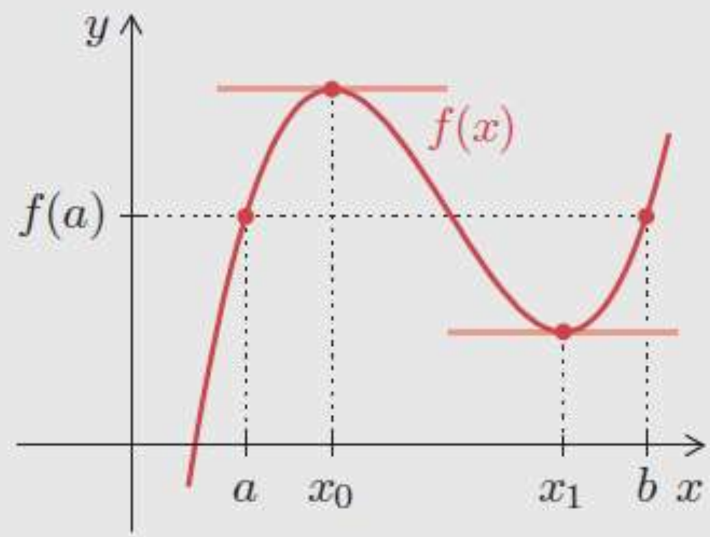
Satz von Rolle

Bei einer Funktion f, die auf dem Intervall $[a, b]$ differenzierbar ist und bei der die beiden Funktionswerte an den Intervallgrenzen gleich sind,

$$f(a) = f(b),$$

gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \in (a, b)$, an der die Steigung null ist:

$$f'(x_0) = 0.$$



Beispiel: $f(x) = x / 2^{x-1}$

Ableitungen höherer Ordnung

Die Ableitung der Ableitung bezeichnet man als zweite Ableitung. Durch wiederholtes Differenzieren erhält man so Ableitungen beliebiger Ordnung:

- $f, \quad f', \quad f'', \quad \ldots, \quad f^{(n)}, \quad \ldots$
- $f, \quad \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}, \quad \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}, \quad \ldots, \quad \dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}, \quad \ldots$
- $f, \quad \mathrm{D}f, \quad \mathrm{D}^2 f, \quad \ldots, \quad \mathrm{D}^n f, \quad \ldots$

Beispiel: $f(x) = x^2$

Ableitungsregeln (1)

Eine konstante Funktion hat überall die Steigung null:

$$f(x) = C \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = 0.$$

Beim Ableiten bleibt ein konstanter Faktor vor einer Funktion erhalten:

$$(C \cdot f(x))' = C \cdot f'(x).$$

Beim Ableiten einer Summe oder Differenz von Funktionen darf man jede Funktion einzeln differenzieren:

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x).$$

Ableitungsregeln (2)

Beim Ableiten eines Produktes zweier Funktionen f und g summiert man das Produkt aus der Ableitung der ersten Funktion f' und der zweiten Funktion g und das Produkt aus der ersten Funktion f und der Ableitung der zweiten Funktion g':

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) \; + \; f(x) \cdot g'(x).$$

Beim Ableiten eines Quotienten zweier Funktionen f und g benutzt man die Formel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}.$$

Ableitungsregeln (3)

Beim Ableiten einer verketteten Funktion $f \circ u$ wird die Ableitung der äußeren Funktion f mit der Ableitung der inneren Funktion u multipliziert:

$$(f\,(u(x)))' = f'(u(x)) \cdot u'(x).$$

Ableitungsregeln (4)

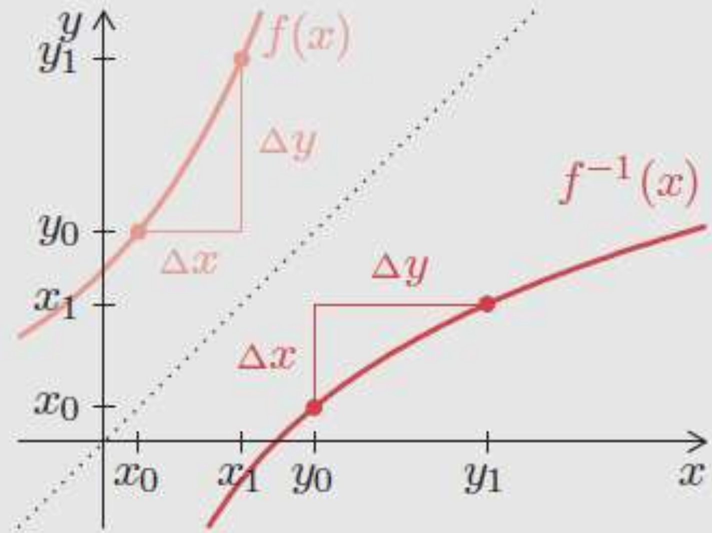
Die Ableitung der Umkehrfunktion f^{-1} an der Stelle y ist der Kehrwert der Ableitung der Funktion f an der Stelle x:

$$\left(f^{-1}(y)\right)' = \frac{1}{f'(x)}.$$

Dabei beschreibt

$$y = f(x), \quad x = f^{-1}(y)$$

den Zusammenhang zwischen x und y.



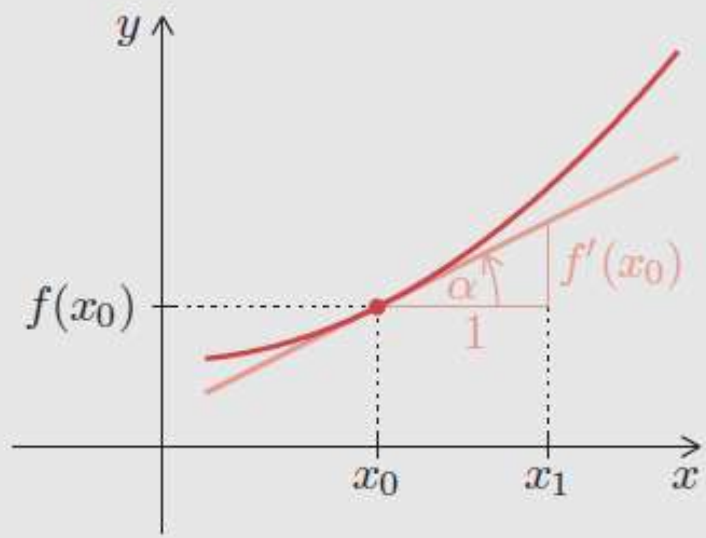
Zusammenfassung der Ableitungsregeln

Faktorregel	$(C \cdot f(x))'$	$=$	$C \cdot f'(x)$
Summenregel	$(f(x) \pm g(x))'$	$=$	$f'(x) \pm g'(x)$
Produktregel	$(f(x) \cdot g(x))'$	$=$	$f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
Quotientenregel	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	$=$	$\frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$
Kettenregel	$(f(u(x)))'$	$=$	$f'(u(x)) \cdot u'(x)$
Umkehrfunktion	$\left(f^{-1}(y)\right)'$	$=$	$\frac{1}{f'(x)}$

Geometrische Bedeutung: Neigungswinkel

Der **Neigungswinkel** des Graphen einer Funktion f im Punkt $(x_0 \,|\, f(x_0))$ ist der Winkel α, den die Tangente an der Stelle x_0 mit der x-Achse bildet. Zwischen dem Winkel α und der Ableitung der Funktion an der Stelle x_0 besteht der Zusammenhang

$$\tan \alpha = f'(x_0).$$



Schnittwinkel

Der **Schnittwinkel** α der Graphen von zwei Funktionen f und g, die sich an der Stelle x_0 in einem gemeinsamen Punkt schneiden, ist die Differenz der beiden Neigungswinkel α_f des Schaubildes der Funktion f an der Stelle x_0 und α_g des Schaubildes der Funktion g an der Stelle x_0:

$$\alpha = \alpha_f - \alpha_g.$$

Der Schnittwinkel lässt sich mit den Ableitungen berechnen:

$$\tan\alpha = \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)\, g'(x_0)}.$$

Orthogonale und berührende Graphen

Die Graphen der Funktionen f und g, die für x_0 denselben Funktionswert haben,

- stehen genau dann senkrecht zueinander, wenn das Produkt der beiden Ableitungen an der Stelle x_0 den Wert -1 ergibt:

$$f(x_0) = g(x_0) \quad \text{und} \quad f'(x_0) \cdot g'(x_0) = -1.$$

- berühren sich genau dann, wenn die Ableitungen an der Stelle x_0 übereinstimmen:

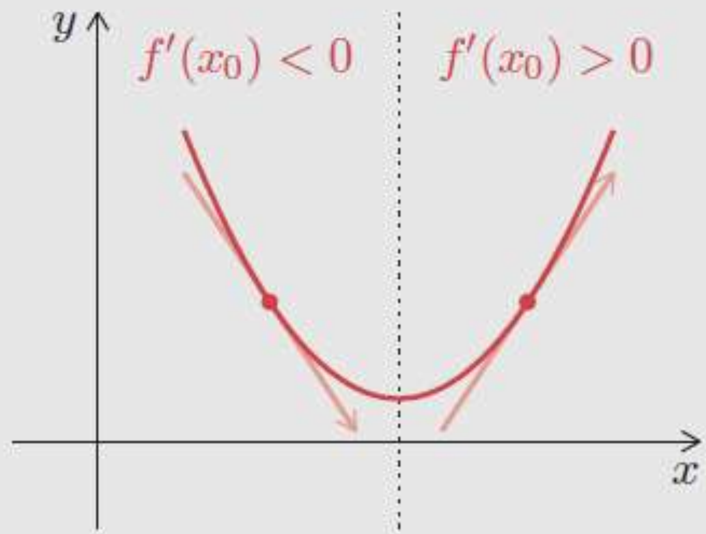
$$f(x_0) = g(x_0) \quad \text{und} \quad f'(x_0) = g'(x_0).$$

Geometrische Bedeutung der ersten Ableitung

Die erste Ableitung an der Stelle x_0 beschreibt das Steigungsverhalten einer Funktion f in der unmittelbaren Umgebung der Stelle x_0:

$$f'(x_0) \begin{cases} < 0 \implies \text{Funktion fällt} \\ > 0 \implies \text{Funktion wächst.} \end{cases}$$

Dabei betrachtet man die Funktion stets in Richtung zunehmender x-Werte.



Erste Ableitung und Monotonie

Falls die erste Ableitung einer Funktion f für alle x-Werte aus einem Intervall I

- positiv ist, dann ist die Funktion auf ganz I streng monoton wachsend:

$$f'(x) > 0 \text{ für alle } x \in I \quad \Longrightarrow \quad f(x) \text{ streng monoton wachsend.}$$

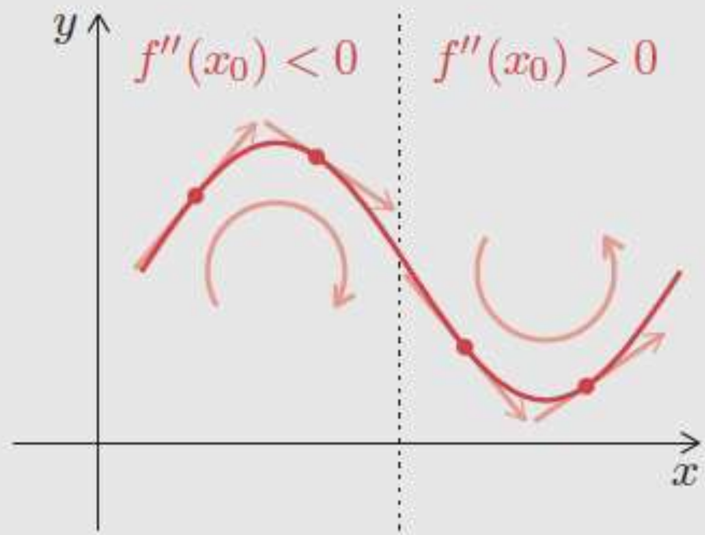
- negativ ist, dann ist die Funktion auf ganz I streng monoton fallend:

$$f'(x) < 0 \text{ für alle } x \in I \quad \Longrightarrow \quad f(x) \text{ streng monoton fallend.}$$

Geometrische Bedeutung der zweiten Ableitung

Die zweite Ableitung an der Stelle x_0 beschreibt das Krümmungsverhalten einer Funktion f in der unmittelbaren Umgebung der Stelle x_0:

$$f''(x_0) \begin{cases} < 0 \implies & \text{Rechtskrümmung, Steigung nimmt ab} \\ > 0 \implies & \text{Linkskrümmung, Steigung nimmt zu.} \end{cases}$$



Lokales Minimum und Maximum

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0

- ein **lokales Minimum**, wenn alle anderen Funktionswerte in der Umgebung von x_0 größer sind als der Funktionswert an der Stelle x_0:

  $$f(x_0) < f(x), \quad x \neq x_0.$$

  Einen entsprechenden Punkt im Schaubild bezeichnet man als **Tiefpunkt**.

- ein **lokales Maximum**, wenn alle anderen Funktionswerte in der Umgebung von x_0 kleiner sind als der Funktionswert an der Stelle x_0:

  $$f(x_0) > f(x), \quad x \neq x_0.$$

  Einen entsprechenden Punkt im Schaubild bezeichnet man als **Hochpunkt**.

Lokales Minimum

Wenn eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0

- ein lokales Minimum hat, dann besitzt sie dort eine waagrechte Tangente. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist somit notwendig.
- eine waagrechte Tangente hat und zusätzlich links gekrümmt ist, dann hat sie dort ein lokales Minimum. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ ist somit hinreichend.
- eine waagrechte Tangente hat und die Ableitung f' beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen von minus nach plus wechselt, so hat f genau dann an der Stelle x_0 ein lokales Minimum. Diese Bedingung ist somit notwendig und hinreichend.

Lokales Maximum

Wenn eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0

- ein lokales Maximum hat, dann besitzt sie dort eine waagrechte Tangente. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist somit notwendig.
- eine waagrechte Tangente hat und zusätzlich rechts gekrümmt ist, dann hat sie dort ein lokales Maximum. Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ ist somit hinreichend.
- eine waagrechte Tangente hat und wenn die Ableitung f' beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen von plus nach minus wechselt, so hat f genau dann an der Stelle x_0 ein lokales Maximum. Diese Bedingung ist somit notwendig und hinreichend.

Wendepunkt

Ein **Wendepunkt** ist ein Kurvenpunkt, an dem das Schaubild einer Funktion von einer Linkskrümmung auf eine Rechtskrümmung wechselt oder umgekehrt.

Wenn eine differenzierbare Funktion f an der Stelle x_0

- einen Wendepunkt hat, dann ist dort die zweite Ableitung null. Die Bedingung $f''(x_0) = 0$ ist somit notwendig.
- eine zweite Ableitung hat, die dort null ist, und die dritte Ableitung dort zusätzlich ungleich null ist, dann hat sie dort einen Wendepunkt. Die Bedingung $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$ ist somit hinreichend.
- eine zweite Ableitung hat, die dort null ist, und die Ableitung f'' beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen wechselt, so hat f genau dann an der Stelle x_0 einen Wendepunkt. Diese Bedingung ist somit notwendig und hinreichend.

Sattelpunkt

Ein **Sattelpunkt** ist ein Wendepunkt, an dem das Schaubild der Funktion zusätzlich eine waagrechte Tangente besitzt.

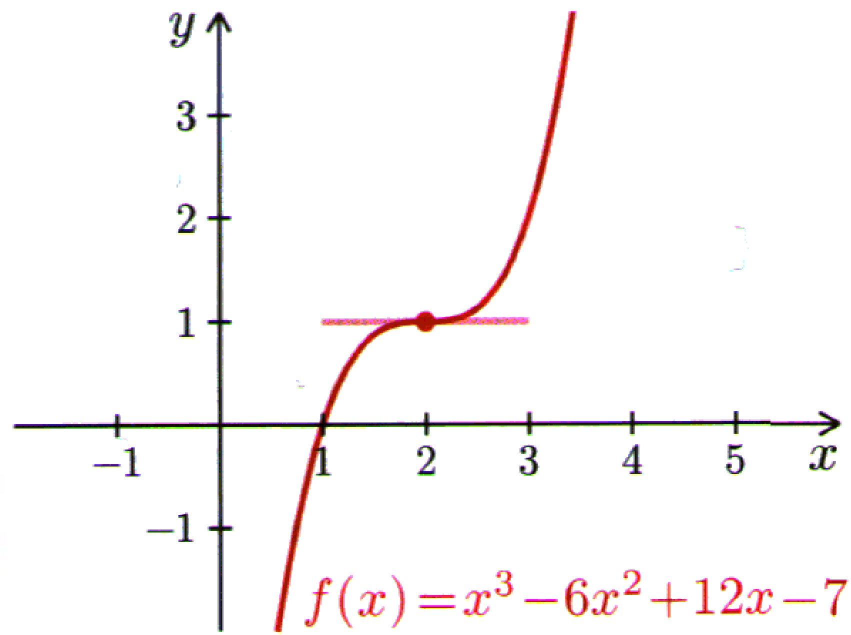
Wendepunkte der Funktion

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 7$$

bestimmen wir mithilfe der Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 12 \\ f''(x) &= 6x - 12 \end{aligned}$$

Nur die Stelle $x = 2$ kommt für einen Wendepunkt in Frage. Es ist $f'''(2) = 6$ und somit steht fest, dass an der Stelle $x = 2$ tatsächlich ein Wendepunkt vorliegt.



Globales Minimum und Maximum

Eine auf einem Intervall I definierte Funktion f besitzt an der Stelle x_0

- ein **globales Minimum**, wenn alle anderen Funktionswerte im Intervall I nicht kleiner sind als der Funktionswert an der Stelle x_0:

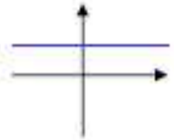
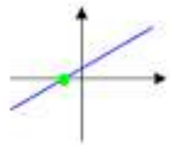
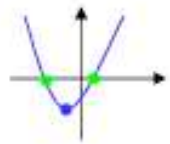
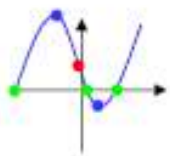
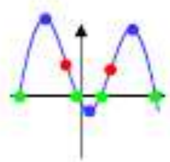
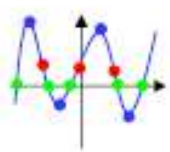
$$f(x) \geq f(x_0), \quad x \in I.$$

- ein **globales Maximum**, wenn alle anderen Funktionswerte im Intervall I nicht größer sind als der Funktionswert an der Stelle x_0:

$$f(x) \leq f(x_0), \quad x \in I.$$

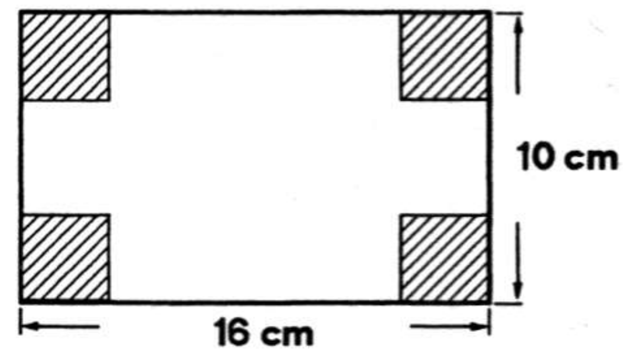
Jede auf einem abgeschlossenen Intervall $I = [a, b]$ definierte stetige Funktion besitzt dort ein globales Minimum und ein globales Maximum. Es kann jedoch mehrere Stellen geben, an denen die Funktion den minimalen und den maximalen Funktionswert annimmt.

Ganzrationale Funktionen

	Grad (Ordnung)	Gleichung	Max. Anzahl Nullstellen	Max. Anzahl Extrema	Max. Anzahl Wendepkte
	0 Waagerechte Gerade	$f(x) = a$ Bsp.: $f(x) = 3$	0	0	0
	1 Gerade	$f(x)=ax+b$ (oft auch $f(x)=mx+b$ wobei m die Steigung ist und b der Y-Achsenabschnitt) Bsp.: $f(x) = 2x+3$	1	0	0
	2 Parabel	$f(x) = ax^2+bx+c$ Bsp.: $f(x)=2x^2-x+1$	2	1	0
	3	$f(x) = ax^3+bx^2+cx+d$ Bsp.: $f(x) = 4x^3-2x^2+x+22$	3	2	1
	4	$f(x) = ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$	4	3	2
	5	$f(x) = ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$	5	4	3
Bsp. für Polynom 6. Grades $f(x) = 3x^6+5x^5-2x^4-8x^3+11x^2-7x+8$ Allg.-form Polynom 6. Grades $f(x) = ax^6+bx^5+cx^4+dx^3+ex^2+fx+g$ Allg.-form Polynom n. Grades $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots\ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$			n	n-1	n-2

Aufgaben

1. Aus einer rechtwinkligen Blechplatte der Seitenlängen 16 cm und 10 cm soll eine quaderförmige oben offene Wanne mit maximalem Volumen geformt werden.
   Wie sind die Abmaße der Wanne?



2. Die Funktion f(x) = $x^3 - x^2 - 2x$ schneidet die Funktion g(x) = x / 2.
   Bestimmen Sie die Anzahl der Schnittpunkte und Schnittwinkel der Graphen.

3. Gegeben sei die Funktion f(x) = $x^3 - 2x^2 - x + 2$.
   Bestimmen Sie: Nullpunkte, Minimum, Maximum, Wendepunkt.

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, HanserVerlag, München, 2010

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org