Hochschule
Deggendorf

# Mathematik für Infotronik (16)

Gerald Kupris

15.11.2010

# Wiederholung: Reelle Funktion

Der Begriff der Funktion wird in der Mathematik sehr allgemein gefasst. Typischerweise definiert man eine Funktion als eine Abbildung von einer Menge in eine andere Menge. Wir wollen jedoch Abbildungen zwischen reellen Zahlen betrachten.

Unter einer **reellen Funktion** $f$ versteht man eine Abbildung, die jeder reellen Zahl $x$ aus einer **Definitionsmenge** $D \subset \mathbb{R}$ genau eine reelle Zahl $y$ aus einer **Wertemenge** $W$ zuordnet.

$$x \mapsto y = f(x), \quad x \in D.$$

Man bezeichnet $x$ als **unabhängige Variable** und $y$ als **abhängige Variable**.

Strenggenommen sollte man zwischen f und f(x) unterscheiden. f ist der Name der Funktion und f(x) ist der Wert, der x zugeordnet ist. Manchmal sagt man auch Definitions- und Wertebereich anstelle von Definitions- und Wertemenge.

# Wiederholung: Definitions- und Wertemenge

**Maximaler Definitionsbereich, Definitionslücke**

Oftmals wird der Definitionsbereich einer Funktion nicht explizit angegeben. In diesem Fall betrachtet man die Funktion auf dem maximal möglichen Definitionsbereich. Definitionslücken sind einzelne Stellen, die nicht im Definitionsbereich liegen.

Beispiele

**Wertebereich**

Zur Bestimmung des Wertebereichs einer Funktion benötigt man in der Regel einige Informationen über die Funktion, wie etwa die Extremwerte, die Monotonieeigenschaften und das asymptotische Verhalten.

Beispiele

# Funktion als Abbildung einer Menge auf die andere

Eine Funktion *f* ordnet jedem Element *x* einer Definitionsmenge *D* genau ein Element *y* einer Zielmenge *Z* oder *B* zu:

$$f\colon D \to Z,\ x \mapsto y.$$

Die Umkehrung gilt nicht: Ein Element der Zielmenge muss (wenn überhaupt) nicht nur einem Element des Definitionsbereiches zugeordnet worden sein. Sind *D* und *Z* Teilmengen der reellen Zahlen, so nennt man *f* eine reelle Funktion.

**Definitionsmenge:** Die Definitionsmenge (oder Definitionsbereich) einer Funktion ist jene Teilmenge einer Grundmenge, für die im jeweiligen Zusammenhang eine wohldefinierte Aussage über die Funktion möglich ist. Die Definitionsmenge wird oft mit einem D abgekürzt, manchmal wird das D auch mit einem senkrechten Doppelstrich geschrieben.

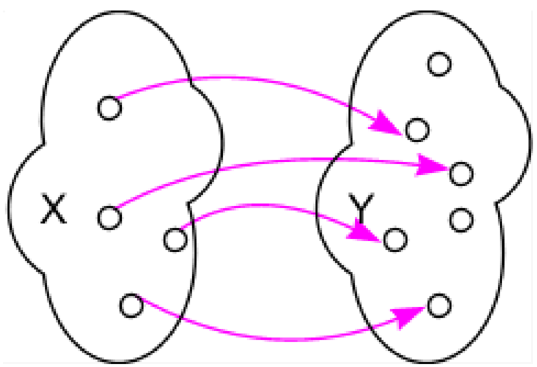
**Zielmenge:** Die Zielmenge ist der Vorrat für mögliche Werte der Funktion *f,* es ist nicht zwingend erforderlich, dass diese auch tatsächlich alle durch die Funktion angenommen werden.

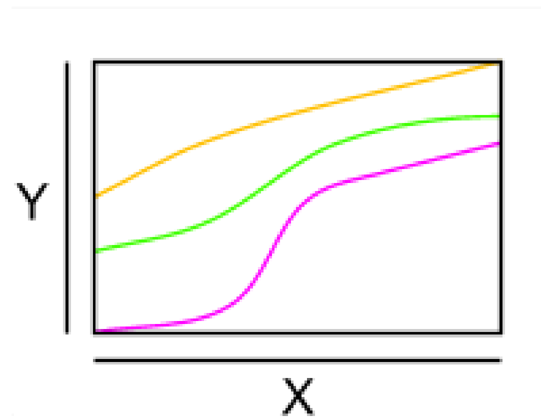
**Bildmenge:** Die Menge der Werte, die tatsächlich als Funktionswert der Funktion *f* erscheinen, ist die Bildmenge.

# Injektivität

Injektivität oder Linkseindeutigkeit ist eine Eigenschaft einer mathematischen Funktion bzw. Relation. Sie besagt, dass jedes Element der Zielmenge höchstens einmal als Funktionswert angenommen wird. Es werden also keine zwei verschiedenen Elemente der Definitionsmenge auf ein und dasselbe Element der Zielmenge abgebildet. Dabei darf die Bildmenge kleiner als die Zielmenge sein – wie es beispielsweise in der Grafik der Fall ist. Dies macht den Unterschied zu einer bijektiven Abbildung aus, bei der unbedingt jedem Element der Zielmenge ein Element der Definitionsmenge entsprechen muss.

Das Prinzip der Injektivität: Jeder Punkt in der Zielmenge (Y) wird höchstens einmal getroffen.



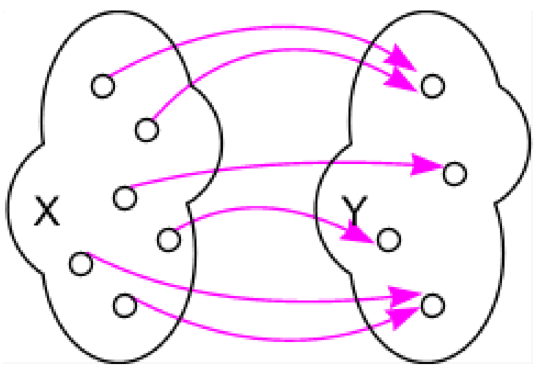



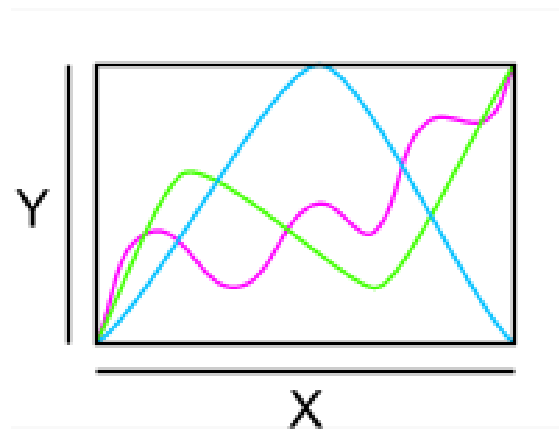
# Surjektivität

Ist die Bildmenge einer Funktion *f* gleich der Zielmenge der Funktion *f*, so heißt die Funktion *f* surjektiv.

Surjektivität (surjektiv) ist eine Eigenschaft einer mathematischen Funktion. Sie bedeutet, dass jedes Element der Zielmenge mindestens einmal als Funktionswert angenommen wird, also mindestens ein Urbild hat. Eine surjektive Funktion wird auch als Surjektion bezeichnet.

Das Prinzip der Surjektivität: Jeder Punkt in der Zielmenge (Y) wird mindestens einmal getroffen.



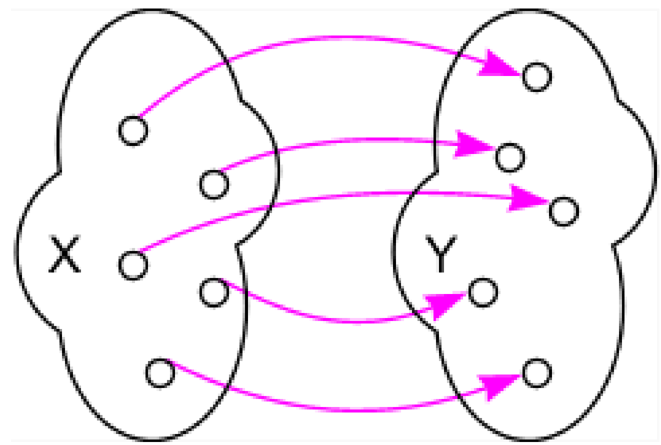
# Bijektivität

Bijektivität (bijektiv oder umkehrbar eindeutig auf oder eineindeutig auf) ist eine Eigenschaft einer mathematischen Funktion; eine bijektive Funktion nennt man auch Bijektion.

Eine Funktion ist bijektiv wenn sie sowohl injektiv (kein Wert der Zielmenge wird mehrfach angenommen) als auch surjektiv (jeder Wert der Zielmenge wird angenommen) ist. Insgesamt heißt das, es findet eine vollständige Paarbildung zwischen den Elementen von Definitionsmenge und Zielmenge statt.

Nur Bijektionen behandeln ihren Definitions-bereich und ihren Wertebereich symmetrisch, sodass eine bijektive Funktion immer eine Umkehrfunktion hat bzw. invertierbar ist.

Das Prinzip der Bijektivität: Jeder Punkt in der Zielmenge (Y) wird genau einmal getroffen.



# Umkehrbarkeit von Funktionen

Ist die Funktion $f : D \to Z$ bijektiv, so bildet die Umkehrabbildung $f^{-1} : D \to Z$ nach Konstruktion für jedes $x$ Element von $D$ das Element $f(x)$ Element von $Z$ wieder auf $x$ Element von $D$ ab. Insbesondere folgt daraus, dass $f^{-1}$ selbst wieder bijektiv (mit Umkehrabbildung $f$ ) ist.

$$f: \quad D \to Z, \quad x \mapsto y$$

$$f^{-1}: \quad Z \to D, \quad y \mapsto x$$

Eine Funktion, deren Umkehrfunktion existiert, wird auch als *invertierbar* bezeichnet.

Eine Funktion $f$ nennt man **umkehrbar** auf dem Definitionsbereich $D$, wenn es zu jedem Funktionswert $y$ aus dem Wertebereich $W$ genau ein Argument $x$ aus dem Definitionsbereich $D$ gibt mit $y = f(x)$.

# Umkehrfunktion

Das $^{-1}$ ist nicht mit einer negativen Potenz bezüglich der Multiplikation zu verwechseln; es handelt sich vielmehr um die Umkehrung bezüglich der Hintereinanderausführung (Verkettung) von Funktionen.

Die **Umkehrfunktion** oder **inverse Funktion** $f^{-1}$ einer umkehrbaren Funktion $f$ ist definiert durch

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{und} \quad f\left(f^{-1}(x)\right) = x.$$

Man bestimmt die Umkehrfunktion einer umkehrbaren Funktion $f$ in zwei Schritten:

(1) Durch Auflösen der Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach $x$ erhält man $x = f^{-1}(y)$.

(2) Vertauschen von $x$ und $y$ ergibt eine neue Funktion $y = f^{-1}(x)$.

Durch das Vertauschen von $x$ und $y$ werden Definitionsbereich und Wertebereich vertauscht. Das Schaubild der Umkehrfunktion erhält man durch Spiegeln des Schaubildes der Funktion an der ersten Winkelhalbierenden.

# Komposition

Unter der **Komposition** der Funktionen $g$ und $h$ versteht man die Nacheinanderausführung

$$f(x) = g(h(x)), \quad f = g \circ h$$

der beiden Funktionen. Man wendet die **äußere Funktion** $g$ auf das Ergebnis der **inneren Funktion** $h$ an und erhält somit die **zusammengesetzte Funktion** $f$.

Bei der Komposition von Funktionen ist die Reihenfolge entscheidend. In der Regel sind die beiden Funktionen $g \circ h$ und $h \circ g$ nicht identisch.

Beispiel:

g (x) = 5 / x
h (x) = 1 - x
$f_1(x) = g(h(x)) \neq f_2(x) = h(g(x))$
Die Komposition ist eine nicht kommutative Verknüpfung.

# Verschiebung, Translation

Definiert man eine neue Funktion $\tilde{f}$, indem man in der Funktion $f$ die Variable $x$ durch $x - x_0$ ersetzt und zu dem Funktionswert $y_0$ addiert

$$\tilde{f}(x) = f(x - x_0) + y_0,$$

dann entsteht das Schaubild der neuen Funktion $\tilde{f}$ durch Verschieben des Schaubildes von $f$ in Richtung der $x$-Achse um $x_0$ und in Richtung der $y$-Achse um $y_0$. Dabei erzeugt ein positiver $x_0$-Wert eine Verschiebung nach rechts und ein negativer $x_0$-Wert eine Verschiebung nach links. Ein positiver $y_0$-Wert verschiebt nach oben und ein negativer $y_0$-Wert nach unten.

Beispiele

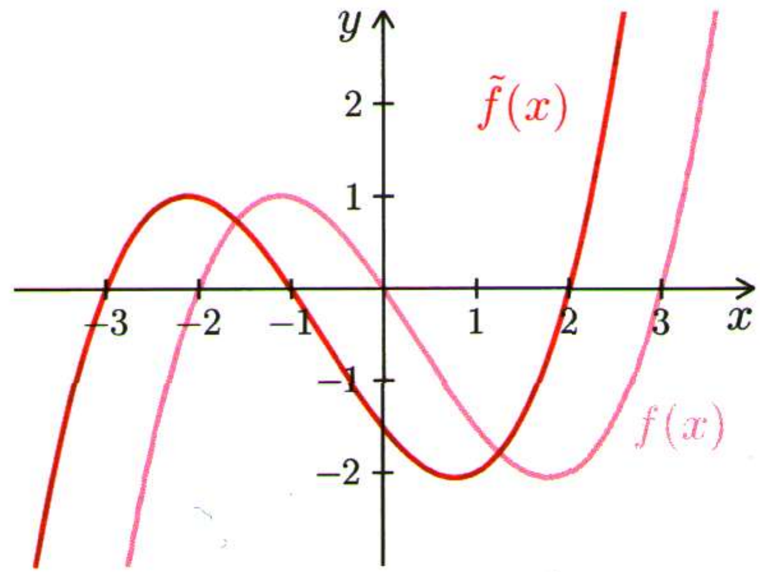
# Beispiel: Funktion verschieben in x-Richtung

Das Schaubild der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$$

soll um 1 nach links verschoben werden. Bei der Verschiebung um 1 nach links ersetzen wir in der Funktionsgleichung $x$ durch $x + 1$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= f(x+1)\\ &= \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}.\end{aligned}$$



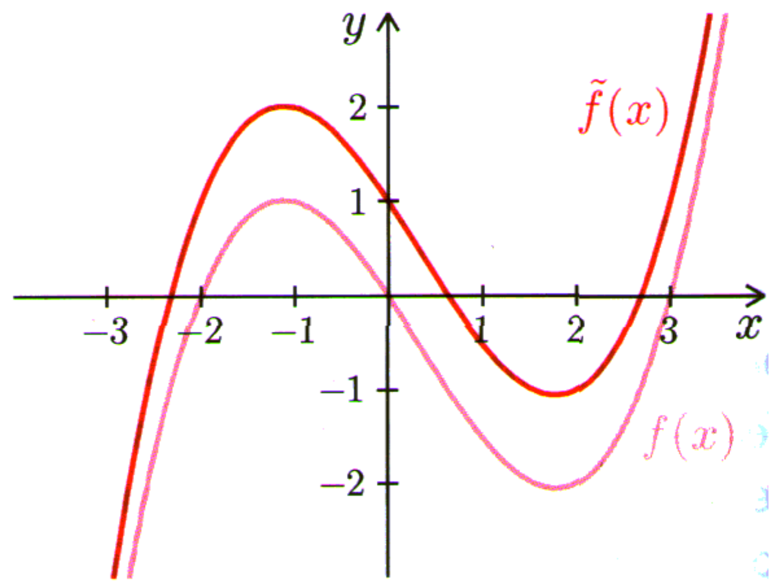
# Beispiel: Funktion verschieben in y-Richtung

Das Schaubild der Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$$

soll um 1 nach oben verschoben werden. Dazu müssen wir lediglich den Wert 1 zur Funktionsgleichung addieren:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= f(x) + 1 \\ &= \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1.\end{aligned}$$



# Skalierung in x-Richtung

Definiert man eine neue Funktion $\tilde{f}$, indem man in der Funktion $f$ die Variable $x$ durch $a\,x$ ersetzt

$$\tilde{f}(x) = f(a\,x),$$

dann entsteht das Schaubild der neuen Funktion $\tilde{f}$ durch **Skalierung** des Schaubildes von $f$ in Richtung der $x$-Achse. Für $a > 1$ wird das Schaubild gestaucht, für $0 < a < 1$ wird es gedehnt. Negative $a$-Werte erzeugen zusätzlich eine Spiegelung an der $y$-Achse.

Beispiele Skalierung und Spiegelung

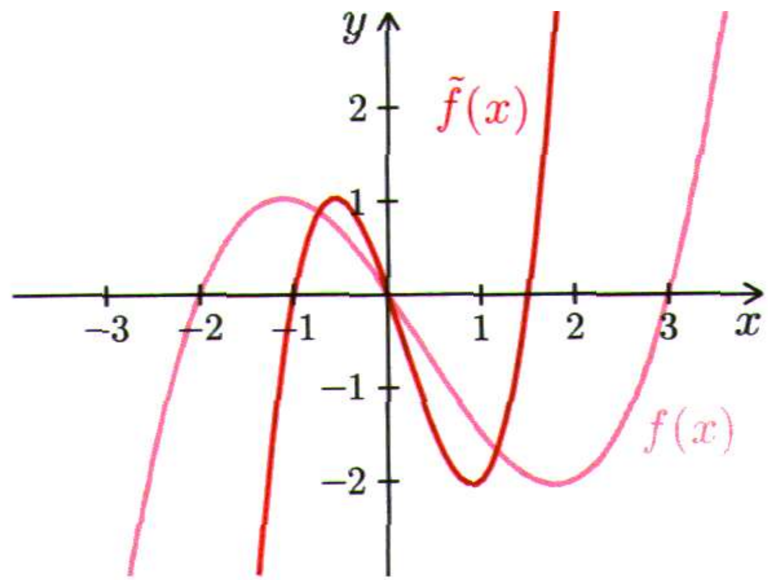
# Beispiel: Funktion skalieren in x-Richtung

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$$

soll um den Faktor 2 in $x$ skaliert werden. Dazu ersetzen wir $x$ durch $2x$ in der Funktionsgleichung:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= f(2x) \\ &= \frac{1}{4}(2x)^3 - \frac{1}{4}(2x)^2 - \frac{3}{2}(2x) \\ &= 2x^3 - x^2 - 3x.\end{aligned}$$



# Skalierung in y-Richtung

Definiert man eine neue Funktion $\tilde{f}$, indem man die Funktion $f$ mit dem konstanten Faktor $a$ multipliziert

$$\tilde{f}(x) = a\,f(x),$$

dann entsteht das Schaubild der neuen Funktion $\tilde{f}$ durch **Skalierung** des Schaubildes von $f$ in Richtung der $y$-Achse. Für $a > 1$ wird das Schaubild gedehnt, für $0 < a < 1$ wird es gestaucht. Negative $a$-Werte erzeugen zusätzlich eine **Spiegelung** an der $x$-Achse.

Beispiele Skalierung und Spiegelung

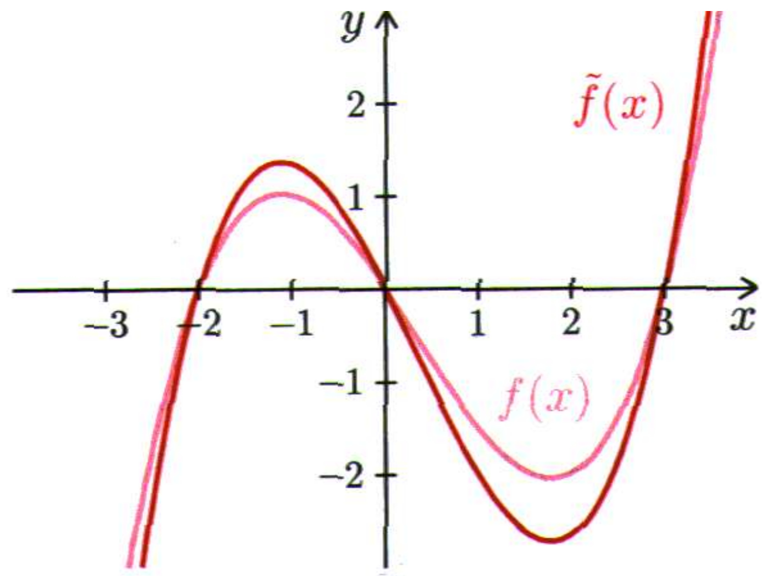
# Beispiel: Funktion skalieren in y-Richtung

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$$

soll um den Faktor $\frac{4}{3}$ in $y$ skaliert werden. Dazu wird die Funktionsgleichung mit diesem Faktor multipliziert:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= \frac{4}{3}f(x) \\ &= 3x^3 - 3x^2 - 6x.\end{aligned}$$



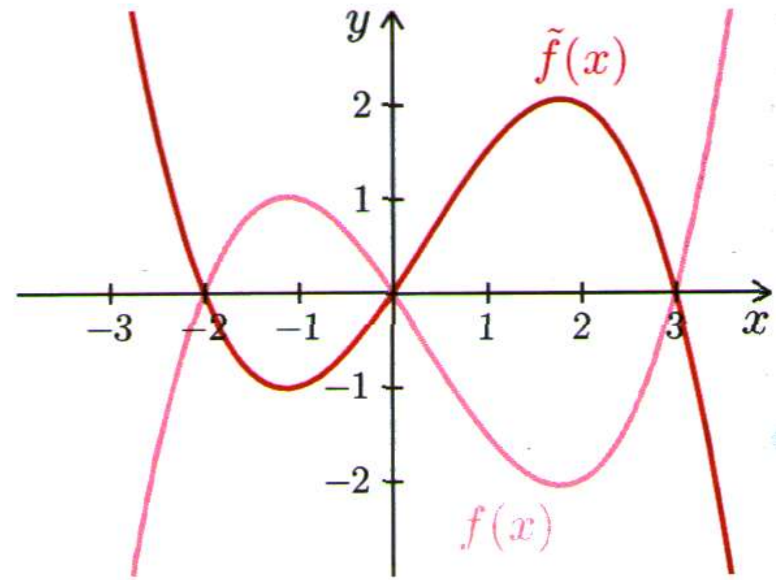
# Beispiel: Funktion spiegeln an x-Achse

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$$

soll an der $x$-Achse gespiegelt werden. Dazu multipliziert man die Funktionsgleichung mit $-1$:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &= -f(x) \\ &= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x.\end{aligned}$$



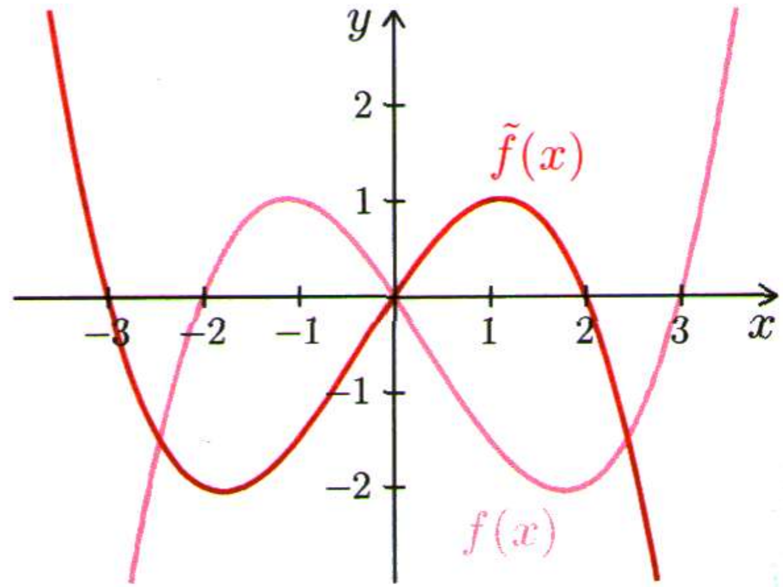
# Beispiel: Funktion spiegeln an y-Achse

Die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$$

soll an der $y$-Achse gespiegelt werden. Dazu ersetzt man in der Funktionsgleichung $x$ durch $-x$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= f(-x) \\ &= \frac{1}{4}(-x)^3 - \frac{1}{4}(-x)^2 - \frac{3}{2}(-x) \\ &= -\frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x. \end{aligned}$$

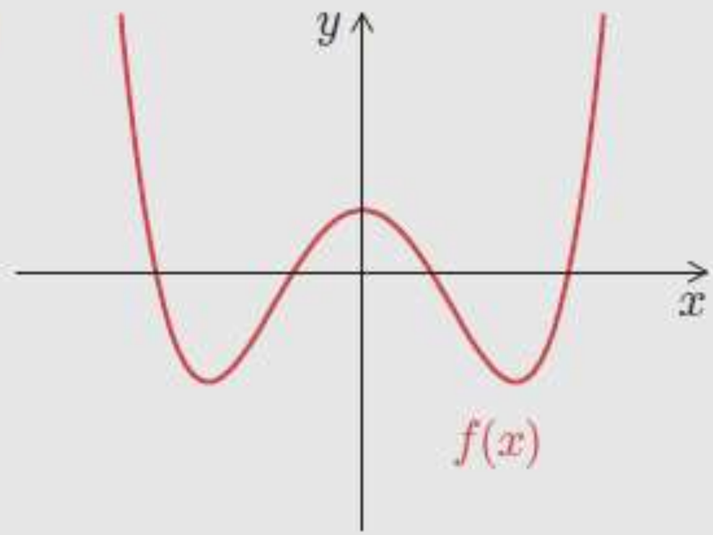


# Gerade Funktion

Man bezeichnet $f$ als eine **gerade Funktion** auf dem Intervall $I$, falls für alle $x \in I$

$$f(-x) = f(x).$$

Das Schaubild einer geraden Funktion ist symmetrisch zur $y$-Achse.

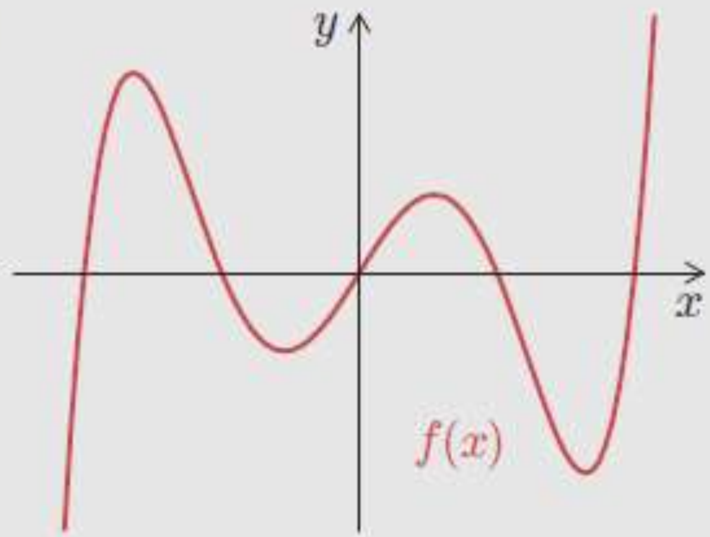


# Ungerade Funktion

Man bezeichnet $f$ als eine **ungerade Funktion** auf dem Intervall $I$, falls für alle $x \in I$

$$f(-x) = -f(x).$$

Das Schaubild einer ungeraden Funktion ist symmetrisch zum Ursprung.



# Gerade und ungerade Funktionen

Gerade und ungerade Funktionen haben folgende Eigenschaften:

- Die Summe und die Differenz zweier gerader Funktionen ergeben eine gerade Funktion und die Summe und die Differenz zweier ungerader Funktionen ergeben eine ungerade Funktion.
- Das Produkt zweier gerader oder zweier ungerader Funktionen ergibt eine gerade Funktion und das Produkt einer geraden mit einer ungeraden Funktion ergibt eine ungerade Funktion.
- Der Kehrwert einer geraden Funktion ist eine gerade Funktion und der Kehrwert einer ungeraden Funktion ist eine ungerade Funktion.

Eine Funktion $f$ lässt sich als Summe einer geraden Funktion $f_g$ und einer ungeraden Funktion $f_u$ darstellen

$$f(x) = f_g(x) + f_u(x).$$

Dabei sind die geraden und ungeraden Anteile definiert durch

$$f_g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ und } f_u(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

# Eigenschaften von Funktionen

Abbildungsvorschrift
maximaler Definitionsbereich
Definitionslücken
Nullstellen
Polstellen
Beschränktheit
Supremum
Infimum
Maximum
Minimum
Wertebereich
Periodizität
Symmetrie
Monotonie
Umkehrfunktion
Stetigkeit
Konvergenz / Divergenz
Grenzwert für $x \to \infty$
Graph

# Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin  2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

http://de.wikipedia.org

http://www.komplexe-zahlen.de

http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_2/basics/b2_1_5.html

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/imaginaer1.htm