Hochschule Deggendorf

Mathematik für Infotronik (12)

Gerald Kupris

03.11.2010

Wiederholung: Darstellungsformen komplexer Zahlen

Algebraische Form einer komplexen Zahl :

$$z = a + b \cdot i$$

Trigonometrische Form einer komplexen Zahl:

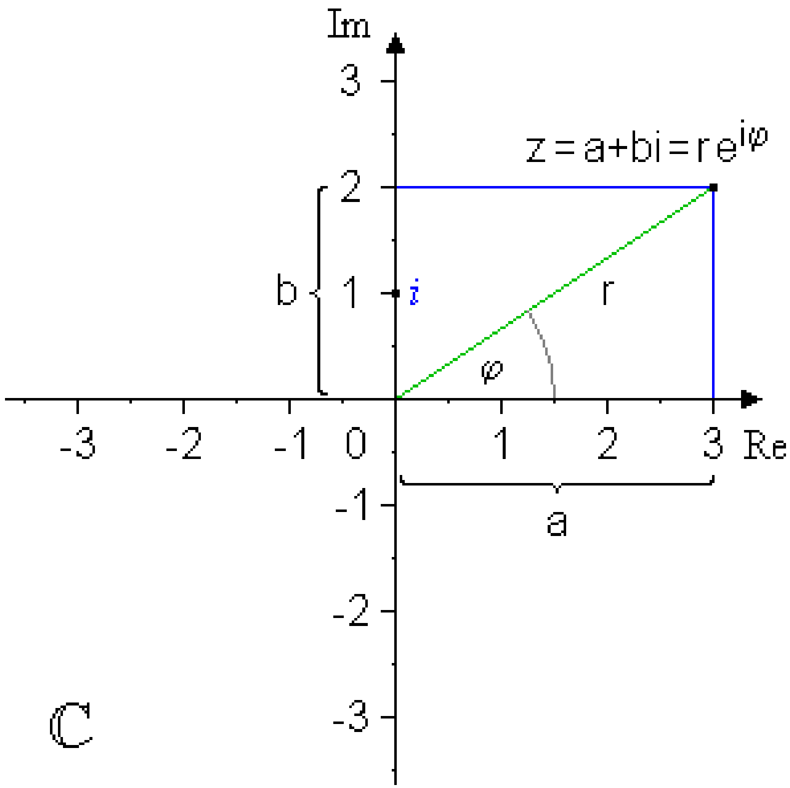
$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Exponentialform (Eulersche Form):

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

φ meist in rad
(360° = 2π)

φ meist im Wertebereich
$-\pi < \varphi \leq \pi$ oder auch
$0 \leq \varphi < 2\pi$



Wiederholung: Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen werden in der algebraischen Form komponentenweise durchgeführt.

Die Multiplikation komplexer Zahlen kann je nach Vorgabe vorteilhaft in algebraischer Form oder in Exponentialform (Multiplikation der Beträge und Addition der Argumente (Winkel)) durchgeführt werden.

Bei der **Division** komplexer Zahlen werden in Exponentialform ihre Beträge dividiert und ihre Argumente (Winkel) subtrahiert, oder in algebraischer Form mit dem konjugierten multipliziert und durch dessen Betragsquadrat dividiert.

Beim **Potenzieren** einer komplexen Zahl mit einem reellen Exponenten wird ihr Betrag potenziert und ihr Argument (Winkel) mit dem Exponenten multipliziert.

Beim **Radizieren (Wurzelziehen)** einer komplexen Zahl mit einem reellen Exponenten wird ihr Betrag radiziert und ihr Argument (Winkel) durch den Exponenten dividiert. Hierdurch entsteht die erste Lösung. Bei einer n-ten Wurzel entstehen n Lösungen, die im Winkel von $2\pi / n$ um den Ursprung der gaußschen Ebene verteilt sind.

Wiederholung: Radizieren (Wurzelziehen)

Es wird die exponentielle (Eulersche) Darstellungsform der komplexen Zahl verwendet.

Bei der Berechnung der *n*-ten Wurzel der komplexen Zahl $z = re^{i\varphi}$ dient die Formel:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$$

wobei *k* die Werte 0, 1, …. n-1 durchläuft.

Eine Zahl hat also *n* komplexe *n*-te Wurzeln.

Die Wurzeln haben den gleichen Betrag und unterschiedliche Argumente.

Vorgehensweise beim Ziehen der n-ten Wurzel

1. Umwandlung der komplexen Zahl in die Exponentialform.

2. Berechnung des Betrages der Wurzel r_w

$$r_W = \sqrt[n]{r}$$

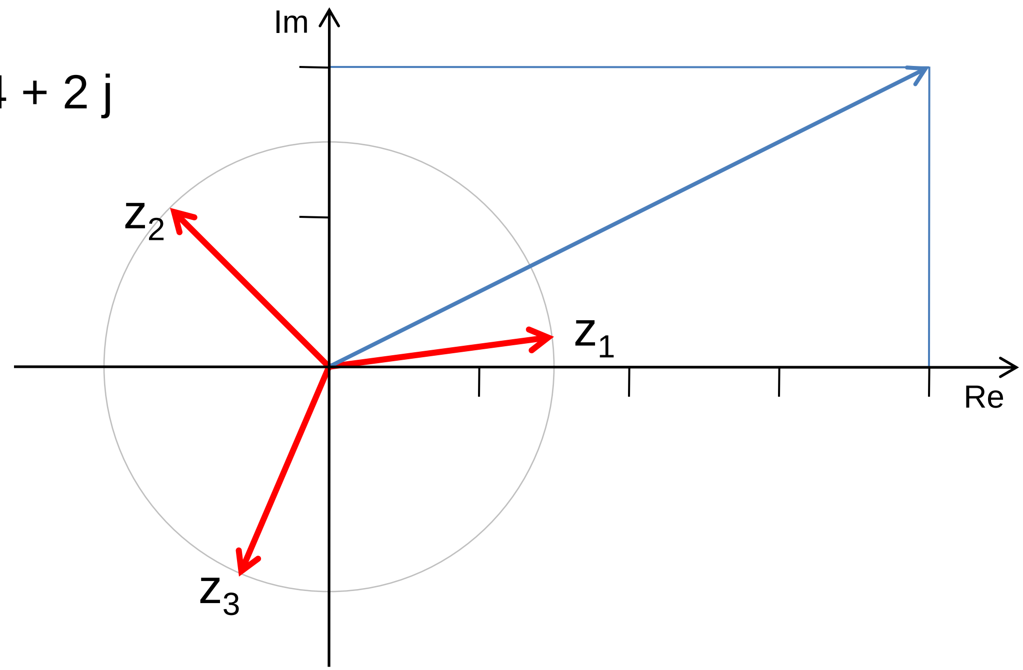
3. Berechnung der Argumente φ_W Es muss n Stück davon geben, für k = 0 bis (n-1).

$$\varphi_W = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

4. ggf. Rückumwandlung der n gefundenen Ergebnisse in die algebraische Form.

Beispiele von Wurzeln komplexer Zahlen

$z^3 = 4 + 2\,j$



Durchrechnen von zwei Beispielen:

$z^6 = 1$

$z^4 = 3 + 2\,j$

Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl

Im Bereich der reellen Zahlen wir der natürliche Logarithmus einer (positiven) Zahl ***a*** als diejenige Zahl ***x*** erklärt, mit der die Basiszahl e potenziert werden muss, um die Zahl ***a*** zu erhalten: $a=e^x$ $x=\ln a$ $(a>0)$

Wir übertragen diesen Begriff nun sinngemäß auf die komplexen Zahlen.
Jede von Null verschiedene komplexe Zahl ***z*** ist darstellbar als:

$$z = r \cdot e^{j(\varphi + k2\pi)}$$

Unter ihrem natürlichen Logarithmus verstehen wir:

$$\ln z = \ln r \cdot e^{j(\varphi + k2\pi)} = \ln r + \ln e^{j(\varphi + k2\pi)}$$

$$\ln z = \ln r + j(\varphi + k \cdot 2\pi) \cdot \ln e = \ln r + j(\varphi + k \cdot 2\pi)$$

Das ist eine Menge von **unendlich vielen** komplexen Zahlen für $k \in \mathbb{Z}$

Hauptwert und Nebenwerte des Logarithmus

Für $\boldsymbol{k}$=0 erhält man den so genannten **Hauptwert** des Logarithmus:

$$\mathrm{Ln}\,\boldsymbol{z} = \ln \boldsymbol{r} + \mathrm{j}\,\boldsymbol{\varphi}$$

Die übrigen Werte heißen **Nebenwerte** und ergeben sich aus dem Hauptwert durch Addition ganzzahliger Vielfacher von 2πj.

$$\ln \boldsymbol{z} = \mathrm{Ln}\,\boldsymbol{z} + \boldsymbol{k}\cdot 2\pi\mathrm{j} \quad (k \in Z)$$

Anmerkungen zum Logarithmus:
ln $\boldsymbol{z}$ ist für jede komplexe Zahl $\boldsymbol{z} \neq 0$ definiert, also beispielsweise auch für negative reelle Zahlen.
Die verschiedenen Werte von ln $\boldsymbol{z}$ stimmen im Realteil (= ln r) überein und unterscheiden sich im Imaginärteil um ganzzahlige Vielfache von 2 *π.*
Komplexe Zahlen müssen vor dem Logarithmieren zunächst in die Exponentialform gebracht werden.

Anwendungen komplexer Zahlen: Wechselstromrechnung

Die Bestimmung des Verhältnisses von Strom zu Spannung in einem elektrischen Stromkreis ist eine der Grundaufgaben der Elektrotechnik.

Wird eine zeitlich konstante Spannung U vorgegeben und der Strom I bestimmt, oder wird der Strom I vorgegeben und die Spannung U bestimmt, so bezeichnet man das Verhältnis **U:I** als den **Widerstand R** oder das Verhältnis **I:U** als den **Leitwert G**.

In der Wechselstromtechnik hat man es mit **zeitlich veränderlichen** Spannungen und Strömen zu tun, die in diesem Fall einem sinusförmigen Verlauf folgen. Um diese Veränderlichkeit gegenüber den zeitlich fixen Größen auszudrücken, werden Momentan-werte, die sich zeitlich ändern, mit **Kleinbuchstaben** bezeichnet, Spannungen als **kleines u** und Ströme als **kleines i**.

Als passive lineare Elemente des Wechselstromkreises treten ohmsche Widerstände, Induktivitäten oder Kapazitäten auf. Für diese Elemente gilt:

$$i = \frac{u}{R} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L} \qquad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C}$$

Harmonische Schwingung

Eine **harmonische Schwingung** ist als Projektion eines mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω umlaufenden Punktes auf die x-Achse (Kosinusschwingung) bzw. auf die y-Achse (Sinusschwingung) darstellbar:

$$x = x(t) = \hat{x}\cos(\omega t + \varphi) = X_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$y = y(t) = \hat{y}\sin(\omega t + \varphi) = Y_{eff} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$x(t)$	Momentanwert der Schwingung
$\hat{x}$	Scheitelwert oder Amplitude
t	Zeit [s]
$\omega = 2\pi \cdot f = 2\pi / T$	Kreisfrequenz [1/s]
f	Frequenz [Hz]
$T = 1/f$	Periodendauer [s]
φ	Nullphasenwinkel
X_{eff}	Effektivwert der Schwingung

Komplexe Schwingung

Eine **komplexe Schwingung** ergibt sich, wenn der komplexe Zeiger z in mit konstanter Winkelgeschwindigkeit *ω* im mathematisch positiven Sinn um den Nullpunkt **rotiert**.

$$\underline{z}(t) = |\underline{z}| \cdot (\cos[\omega t + \varphi] + j \cdot \sin[\omega t + \varphi])$$

$$\underline{z}(t) = \hat{z} \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \hat{z} \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t} = \hat{\underline{z}} \cdot e^{j\omega t}$$

$\underline{z}(t) = \hat{\underline{z}} \cdot e^{j\omega t}$	Momentanwert der komplexen Schwingung
$\hat{z}$	Reelle Amplitude, Betrag
$\hat{\underline{z}} = \hat{z} \cdot e^{j\varphi}$	Komplexe Amplitude
$Zeff = \hat{\underline{z}} / \sqrt{2}$	Komplexer Effektivwert

$$x(t) = Re\{\underline{z}(t)\}, \quad y(t) = Im\{\underline{z}(t)\}, \quad \underline{z}(t) = x(t) + jy(t)$$

Die komplexe Schwingung ist demnach die Addition der senkrecht aufeinander stehenden harmonischen Schwingungen in der komplexen Ebene.

DIN 1304-1 und DIN 5483-3

Für die imaginäre Einheit verwendet man in der Elektrotechnik gemäß DIN 1302 den **Buchstaben j** (mit $j^2 = -1$), um Verwechslungen mit dem Buchstaben i, der für den (zeitabhängigen) Strom verwendet wird, zu vermeiden. Formelzeichen komplexer Größen werden gemäß DIN 1304-1 und DIN 5483-3 durch einen **Unterstrich** gekennzeichnet. Ein **rotierender Zeiger** für eine Spannung stellt diese als komplexe Spannung dar:

$$\underline{u}(\omega t) = \hat{u} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_u) + \mathrm{j} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)) = \hat{u} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)} = \hat{u}\angle(\omega t + \varphi_u)$$

$$\underline{i}(\omega t) = \hat{\imath} \cdot (\cos(\omega t + \varphi_i) + \mathrm{j} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)) = \hat{\imath} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)} = \hat{\imath}\angle(\omega t + \varphi_i)$$

Die reellen Größen können als Realteil der komplexen Größen dargestellt werden:

$$u(\omega t) = \mathrm{Re}\ \underline{u}(\omega t)$$
$$i(\omega t) = \mathrm{Re}\ \underline{i}(\omega t)$$

Überlagerung (Superposition) gleichfrequenter Schwingungen

Nach dem Superpositionsprinzip der Physik überlagern sich zwei Schwingungen $y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t+\varphi_1)$ und $y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t+\varphi_2)$ ungestört und ergeben die resultierende

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin(\omega t+\varphi_1) + A_2 \cdot \sin(\omega t+\varphi_2) = A \cdot \sin(\omega t+\varphi)$$

Amplitude A und Phase φ lassen sich schrittweise aus den Amplituden A_1 und A_2 sowie den Phasenwinkeln φ_1 und φ_2 der Einzelschwingungen berechnen:

1. Übergang von der reellen Form zur komplexen Form:

Die Einzelschwingungen y_1 und y_2 werden durch komplexe Zeiger dargestellt.

$$\underline{y}_1 = \underline{A}_1 \cdot e^{j\omega t} \quad \text{und} \quad \underline{y}_2 = \underline{A}_2 \cdot e^{j\omega t}$$

$\underline{A}_1$ und $\underline{A}_2$ sind dabei die komplexen Schwingungsamplituden

$$\underline{A}_1 = A_1 \cdot e^{j\varphi 1} \quad \text{und} \quad \underline{A}_2 = A_2 \cdot e^{j\,\varphi 2}$$

Überlagerung (Superposition) gleichfrequenter Schwingungen

2. **Superposition in komplexer Form:**

   Die komplexen Zeiger $\underline{y}_1$ und $\underline{y}_2$ werden zur Überlagerung gebracht und ergeben einen resultierenden komplexen Zeiger $\underline{y}$:

$$\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = \underline{A}_1 \cdot e^{j\omega t} + \underline{A}_2 \cdot e^{j\omega t} = (\underline{A}_1 + \underline{A}_2) \cdot e^{j\omega t} = \underline{A} \cdot e^{j\omega t}$$

3. **Rücktransformation aus der komplexen Form in die reelle Form:**

   Die resultierende Schwingung $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$ ist der Imaginärteil des resultierenden komplexen Zeigers $\underline{y}$:

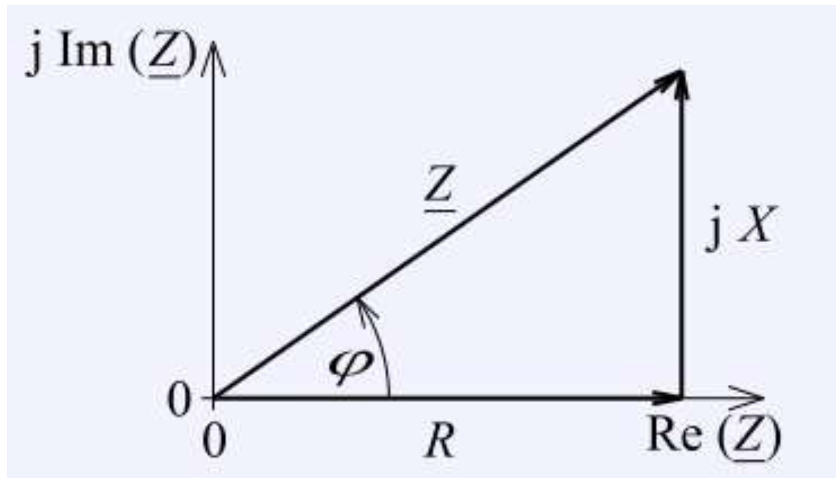
$$y = \mathrm{Im}\,(\underline{y}) = \mathrm{Im}\,(\underline{A} \cdot e^{j\omega t}) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Ohmsches Gesetz im komplexen Bereich

Das Verhältnis der komplexen Spannung zur komplexen Stromstärke ist unter den genannten Voraussetzungen eine komplexe Konstante. Diese Aussage ist das ohmsche Gesetz für komplexe Größen. Die Konstante wird als komplexer Widerstand oder Impedanz ***Z*** bezeichnet. Auch diese wird in der komplexen Ebene als Zeiger dargestellt, der aber als zeitunabhängige Größe nicht rotiert.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \frac{\hat{u} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_u)}}{\hat{\imath} \cdot e^{j(\omega t + \varphi_i)}} = \frac{\hat{u}}{\hat{\imath}} \cdot e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

$$\underline{Z} = R + jX$$



$\underline{Z}$ = Impedanz
R = Re($\underline{Z}$) ohmscher Widerstand
X = Im($\underline{Z}$) Blindwiderstand

Leistung

Der zeitunabhängige Zeiger wird in DIN 5483-3 und DIN 40110-1 als komplexe Leistung oder komplexe Scheinleistung bezeichnet.

$$\underline{S} = \underline{U}\ \underline{I}^{\star} = S\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_u - \varphi_i)} = P + \mathrm{j}Q$$

Darin sind die in der Wechselstromtechnik üblichen drei Kenngrößen zur Leistung enthalten:

die Scheinleistung S:

$$S = |\underline{S}| = U\ I$$

die Wirkleistung P, die als arithmetischer Mittelwert über p definiert wird:

$$P = \mathrm{Re}\ \underline{S} = U\ I\ \cos(\varphi_u - \varphi_i)$$

die ebenfalls frei von Schwingungsanteilen (Augenblickswerten) definierte (Verschiebungs-)Blindleistung Q

$$Q = \mathrm{Im}\ \underline{S} = U\ I\ \sin(\varphi_u - \varphi_i)$$

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,
Vieweg+Teubner Verlag, 2009

http://de.wikipedia.org

http://www.komplexe-zahlen.de

http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_2/basics/b2_1_5.html

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/imaginaer1.htm