



Mathematik 1 Infotronik (22)

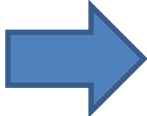
Gerald Kupris

17.01.2013

Weiterer Plan für dieses Semester

- 16. (13.12.2012): Lineare Abbildung, 2D Abbildungen, 2D Grafik
- 17. (19.12.2012): Projektion, Verschiebung, homogene Koordinaten
- 18. (20.12.2012): Drehung um einen beliebigen Punkt, Scherung

Feiertage

- 19. (09.01.2013): Definition von Eigenvektoren und Eigenwerten
- 20. (10.01.2013): Berechnung von Eigenvektoren und Eigenwerten
- 21. (16.01.2013): Eigenschaften von Eigenvektoren und Eigenwerten
-  22. (17.01.2013): Anwendung von Eigenvektoren und Eigenwerten
- 23. (23.01.2013): Anwendung von Eigenvektoren und Eigenwerten
- 24. (24.01.2013): Wiederholung, Prüfungsvorbereitung

Wiederholung: Eigenvektor und Eigenwert

Ein **Eigenvektor** einer Abbildung ist in der linearen Algebra ein vom Nullvektor verschiedener Vektor, dessen **Richtung** durch die Abbildung nicht verändert wird.

Ein Eigenvektor wird also nur gestreckt, und man bezeichnet den Streckungsfaktor als **Eigenwert** der Abbildung.

Eigenwerte charakterisieren wesentliche Eigenschaften linearer Abbildungen, etwa ob ein entsprechendes lineares Gleichungssystem eindeutig lösbar ist oder nicht.

In vielen Anwendungen beschreiben Eigenwerte auch physikalische Eigenschaften eines mathematischen Modells.

Definitionen Eigenvektor und Eigenwert (1)

Ist V ein Vektorraum über einem Körper K und $f : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung von V in sich selbst (Endomorphismus), so bezeichnet man als **Eigenvektor** einen Vektor $v \neq 0$, der durch f auf ein Vielfaches $\lambda \in K$ von sich selbst abgebildet wird: $f(v) = \lambda v$

Den Faktor λ nennt man dann den zugehörigen **Eigenwert**.

Anders formuliert: Hat für ein $\lambda \in K$ die Gleichung $f(v) = \lambda v$ eine Lösung $v \neq 0$ (der Nullvektor ist natürlich immer eine Lösung), so heißt λ **Eigenwert** von f . Jede Lösung $v \neq 0$ heißt **Eigenvektor** von f zum **Eigenwert** λ .

Definitionen Eigenvektor und Eigenwert (2)

Ist der Vektorraum endlichdimensional, so kann jeder Endomorphismus f durch eine quadratische Matrix A beschrieben werden. Die obige Gleichung lässt sich dann als Matrizengleichung schreiben:

$$A \cdot x = \lambda x$$

wobei x hier einen Spaltenvektor bezeichnet. Man nennt eine Lösung $x \neq 0$ und λ in diesem Fall **Eigenvektor** bzw. **Eigenwert** der Matrix A .

Diese Gleichung kann man auch in der Form $A \cdot x = \lambda E \cdot x$ schreiben, wobei E die Einheitsmatrix bezeichnet, und äquivalent umformen zu

$$(A - \lambda E) \cdot x = 0$$

bzw.

$$(\lambda E - A) \cdot x = 0$$

Wiederholung: Berechnung der Eigenwerte

Die Gleichung

$$(A - \lambda E) \cdot x = 0$$

die Eigenwerte definiert, stellt ein homogenes lineares Gleichungssystem dar.

Da $x \neq 0$ vorausgesetzt wird, ist dieses genau dann lösbar wenn gilt:

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

Expandiert man die Determinante auf der linken Seite, so erhält man ein Polynom n-ten Grades in λ . Dieses wird charakteristisches Polynom genannt, und dessen Nullstellen sind die Eigenwerte, also die Lösungen der Gleichung

$$\alpha_n \cdot \lambda^n + \alpha_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \cdot \lambda + \alpha_0 = 0$$

Charakteristisches Polynom

Das charakteristische Polynom wird als Determinante derjenigen Matrix berechnet, die entsteht, wenn in A von den Hauptdiagonalelementen jeweils λ abgezogen wird.

Die Spur einer Matrix A (spur A) ist die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonalen.

Für $n = 2$ und $n = 3$ ist das ausgeschrieben:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \text{spur } A \lambda + \det A \quad (n = 2)$$

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + \text{spur } A \lambda^2 - c_2 \lambda + \det A \quad (n = 3)$$

$$c_2 \text{ ist für } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \text{ definiert als } c_2 = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & c \\ g & j \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & f \\ h & j \end{vmatrix}.$$

Wiederholung: Berechnung der Eigenvektoren

Für einen Eigenwert λ lassen sich die Eigenvektoren aus der Gleichung

$$(A - \lambda E) \cdot x = 0$$

bestimmen.

Die Eigenvektoren spannen einen Raum auf, dessen Dimension als geometrische Vielfachheit des Eigenwertes bezeichnet wird. Für einen Eigenwert λ der geometrischen Vielfachheit μ lassen sich also linear unabhängige Eigenvektoren

$$x_1, \dots, x_\mu$$

finden, so dass die Menge aller Eigenvektoren zu λ gleich der Menge der Linearkombinationen von x_1, \dots, x_μ ist.

x_1, \dots, x_μ heißt dann Basis aus Eigenvektoren zum Eigenwert λ .

Anleitung zur Bestimmung von Eigenvektor und Eigenwert

„Schritt-für-Schritt“:

1. Die Eigenwerte werden über die charakteristische Gleichung bestimmt (Nullstellen des charakteristischen Polynoms).
2. Die gefundenen Eigenwerte werden in die Gleichung $(A - \lambda E) \cdot x = 0$ eingesetzt.
3. Das Gleichungssystem wird gelöst, dadurch wird ein Eigenvektor (von vielen möglichen) zu dem jeweiligen Eigenwert gefunden.
4. Probe: der gefundene Vektor wird mit der Matrix multipliziert, um zu überprüfen, ob es sich tatsächlich um einen Eigenvektor handelt.

Beispiel

Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren

Das Produkt der Eigenwerte ist die Determinante der Matrix.

Beispiel: Berechnen Sie sämtliche Eigenwerte, Spur und Determinante sowie die Eigenvektoren der Matrix **A**.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren

Die Summe der Eigenwerte ist die Summe entlang der Diagonale (der Spur der Matrix).

Beispiel: Berechnen Sie sämtliche Eigenwerte, Spur und Determinante sowie die Eigenvektoren der Matrix **A**.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren

Die Eigenwerte einer n -reihigen Diagonal- bzw. Dreiecksmatrix **A** sind identisch mit den Elementen der Hauptdiagonale.

Beispiel: Berechnen Sie sämtliche Eigenwerte, Spur und Determinante sowie die Eigenvektoren der Matrix **A**.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von Diagonal- und Dreiecksmatrizen

Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix oder einer unteren oder oberen Dreiecksmatrix stehen in der Diagonalen. Sie müssen also nicht berechnet, sondern können einfach abgelesen werden. Insbesondere besitzt eine (n, n) -Dreiecksmatrix n reelle Eigenwerte.

Beispielaufgaben

Bestimmen Sie auf möglichst einfache Art sämtliche Eigenwerte, Spur und Determinante sowie die Eigenvektoren der folgenden Matrizen (mit Kontrolle):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren

Wenn **A** eine $n \times n$ Matrix ist, dann gibt es maximal n Eigenwerte und n Eigenvektoren.

Beispiel: Bestimmen Sie auf möglichst einfache Art sämtliche Eigenwerte, Spur und Determinante sowie die Eigenvektoren der folgenden Matrix **A**:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren

Eine Matrix \mathbf{A} und die dazu gehörende transponierte Matrix \mathbf{A}^T haben die selben Eigenwerte.

Die Matrix \mathbf{A} und die Matrix \mathbf{A}^T haben das selbe charakteristische Polynom, daher besitzen sie die selben Eigenwerte.

Beispiel: Berechnen Sie sämtliche Eigenwerte, Spur und Determinante sowie die Eigenvektoren der Matrix \mathbf{A} und der transponierten Matrix \mathbf{A}^T .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren

Wenn die Matrix **A** eine singuläre Matrix ist, dann ist $\lambda = 0$ ein Eigenwert.

Die Matrix $(A - \lambda \cdot E)$ ist dann auch eine singuläre Matrix.

Die Determinante dieser Matrix ist dann 0.

Beispiel: Berechnen Sie sämtliche Eigenwerte, Spur und Determinante sowie die Eigenvektoren der Matrix **A**. Sind die Eigenvektoren linear unabhängig?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren

Es ist **A** genau dann invertierbar, wenn alle Eigenwerte $\neq 0$ sind.

Ist λ ein Eigenwert von **A** mit Eigenvektor **b**, dann ist λ^{-1} ein Eigenwert von **A**⁻¹ mit demselben Eigenvektor **b**.

Beispiel: Berechnen Sie sämtliche Eigenwerte, Spur und Determinante sowie die Eigenvektoren der Matrix **A** und der inversen Matrix **A**⁻¹.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Wiederholung: Matrizeninvertierung

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A heißt invertierbar oder auch regulär, wenn es eine Matrix

$A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt mit der Eigenschaft $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E_n$.

In diesem Fall heißt A^{-1} die inverse Matrix von A .

Aber Achtung: nicht jede Matrix lässt sich invertieren!

Folgerung: eine Matrix heißt invertierbar oder auch regulär, wenn ihre Determinante nicht gleich Null ist.

Determinante der inversen Matrix

Beweisen Sie den Satz:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Definition inverse Matrix:

$$A \cdot A^{-1} = E$$

Multiplikationstheorem:

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$$
$$\det E = 1 = \det A \cdot \det A^{-1}$$

Daraus folgt:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Daraus folgt: die Determinante der inversen Matrix ist immer ungleich Null.

Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren

Eigenwerte von Potenzen einer Matrix

Es sei $A \in K^{n \times n}$, $k \in \mathbb{N}$, und λ sei Eigenwert von A zum Eigenvektor v . Dann ist λ^k Eigenwert von A^k zum Eigenvektor v .

Ist A invertierbar, so gilt diese Aussage sogar für beliebige ganze Zahlen k , wobei $A^{-k} = (A^{-1})^k$.

Beispiel: Berechnen Sie sämtliche Eigenwerte, Spur und Determinante sowie die Eigenvektoren der Matrix \mathbf{A} und der inversen Matrix \mathbf{A}^{-1} .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Komplexe Eigenwerte

Da auch reelle Polynome nichtreelle Nullstellen haben können, kann eine reelle Matrix **A** auch nichtreelle komplexe Eigenwerte haben. In diesem Fall kann man zu **A** komplexe Eigenvektoren bestimmen.

Ist $\lambda = a + ib$ einen nichtreeller Eigenwert, so ist auch $\lambda = a - ib$ ein Eigenwert.

Beispiel: Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Eigenschaften von Eigenwerten und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer Matrizen:

Für die Eigenwerte und Eigenvektoren einer symmetrischen (n, n) -Matrix gilt:

- ▶ Alle Eigenwerte sind reell.
- ▶ Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht zueinander.
- ▶ Es gibt n paarweise orthogonale Eigenvektoren.

Beispiel: Berechnen Sie sämtliche Eigenwerte, Spur und Determinante sowie die Eigenvektoren der Matrix **A** und überprüfen Sie, ob die Eigenvektoren orthogonal sind.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Symmetrische Matrizen

Symmetrische Matrizen haben stets nur reelle Eigenwerte.

$$A = A^* = \overline{A}^T = \overline{A^T}.$$

Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

Positive Symmetrische Matrizen: alle Eigenwerte sind positiv.
Die Determinante ist auch positiv.

Beispiel: Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix:

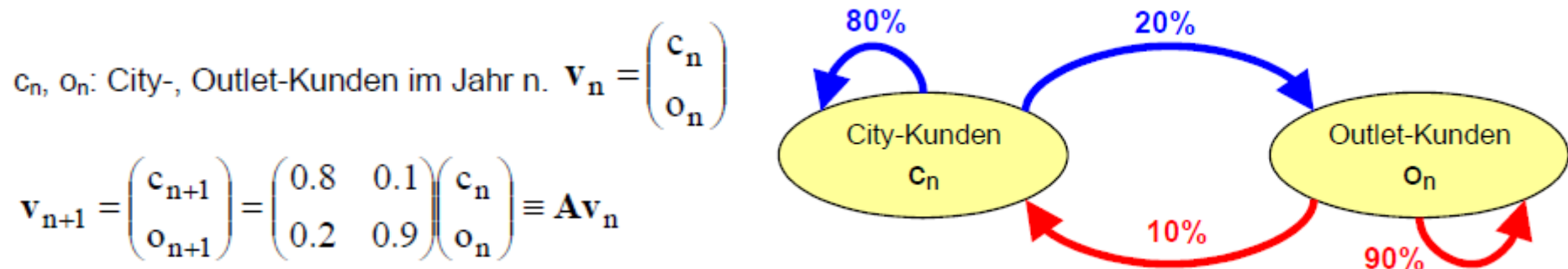
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Die Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix stehen senkrecht aufeinander!

Eigenwert-Beispiel: City – Factory Outlet (1)

Kunden und Kundenwanderung von Jahr zu Jahr:

Um ihre Lagerbestände besser planen zu können, fragen sich die City-Einzelhändler: Gibt es einen stationären Zustand? D. h. gibt es ein Verhältnis von City-Kunden zu Outlet-Kunden, das im nächsten Jahr – und damit in allen Folgejahren – genau gleich sein wird?



Wenn wir einen stationären Zustand suchen, dann ist dies ein \mathbf{v} mit $\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v}$.
Wir suchen also Eigenvektoren \mathbf{v} der Matrix \mathbf{A} zu Eigenwert $\lambda=1$.

Eigenwert-Beispiel: City – Factory Outlet (2)

Bestimmen Sie die Eigenwerte und –vektoren der Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.9 \end{pmatrix}$$

aus dem City – Factory Outlet-Beispiel!

Welcher Gleichgewichts-Kundenvektor stellt sich also ein?

Eigenwert-Beispiel: Google's PageRank (1)

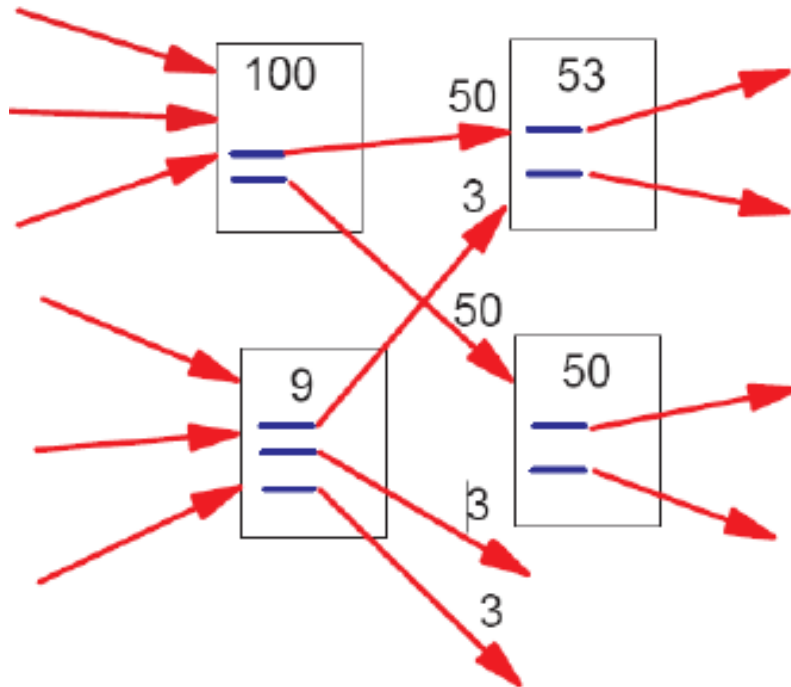
Eine der berühmtesten Suchmaschinen im Web, Google, gegründet von Larry Page und Sergej Brin, hat nicht zuletzt deshalb eine solch überragende Verbreitung erlangt, weil sie die Abertausend Weblinks zu einer Suchanfrage clever sortiert.

Grundidee: Die Websites nach Bedeutung sortieren.

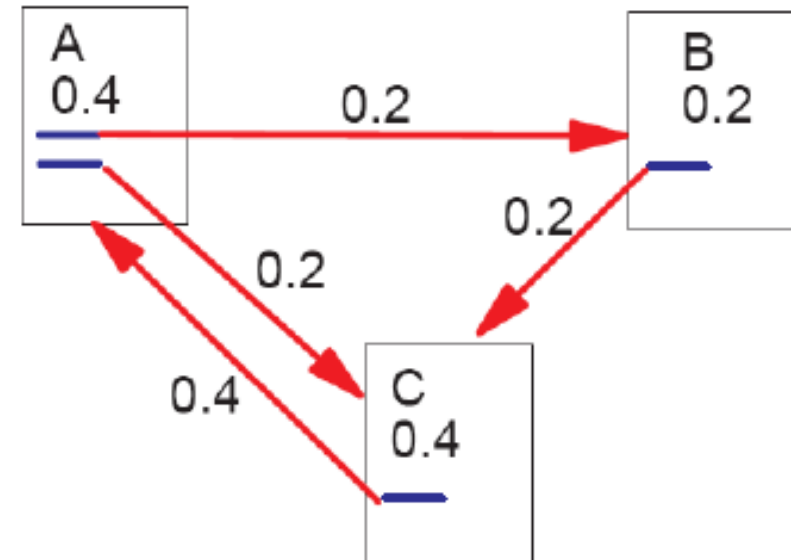
- Was ist "bedeutend"? Eine Website \mathbf{v} ist umso bedeutender, je mehr bedeutende Websites \mathbf{u} auf sie zeigen.
- Henne-Ei-Problem: Um die Bedeutung von \mathbf{v} zu berechnen, müssen wir bereits die Bedeutung von \mathbf{u} kennen. Wie kommen wir da raus?
- Formulieren wir genauer (vereinfachter PageRank-Algorithmus):
 - \mathbf{x}_u : Bedeutung der Website \mathbf{u}
 - \mathbf{N}_u : Anzahl der Websites, auf die \mathbf{u} zeigt (sog. Outlinks von \mathbf{u}).

Jede Website \mathbf{u} verteilt ihre Bedeutung \mathbf{x}_u auf ihre Outlinks, und zwar zu gleichen Teilen.

Eigenwert-Beispiel: Google's PageRank (2)



Bedeutungsübertragung



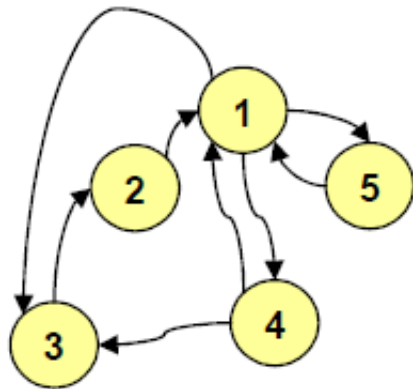
konvergierter Zustand im vereinfachten PageRank-Verfahren

Eigenwert-Beispiel: Google's PageRank (3)

$$x_v = \sum_u A_{vu} x_u \quad \text{mit} \quad A_{vu} = \begin{cases} 1/N_u & \text{wenn } u \text{ auf } v \text{ zeigt} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Matrix **A** heißt spaltenstochastisch: Die Summe der Elemente in jeder Spalte ergibt 1.

Beispiel: Wir betrachten ein minimales WWW-Universum aus **5 Websites** mit folgender Linkstruktur:



$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Der Vektor **x** ist der Vektor der Bedeutungen der Websites. Kennen wir den Eigenvektor der Matrix **A** zum Eigenwert **λ=1**, dann haben wir das Problem der Bedeutungsfindung gelöst!

Eigenwert-Beispiel: Google's PageRank (4)

Der PageRank-Algorithmus hat einen konvergierten Endzustand \mathbf{x} erreicht, wenn die Anwendung von \mathbf{A} wieder \mathbf{x} liefert.

Kennen wir also den Eigenvektor der Matrix \mathbf{A} zu Eigenwert $\lambda=1$, so haben wir das Henne-Ei-Problem zur Bedeutungsfindung gelöst! Die Web-Crawler, die für Google das gigantische WWW durchsurfen erledigen also periodisch eine gigantische Eigenwertaufgabe (letzte Zählung: > 3 Mrd. Webseiten)

THE \$25,000,000,000* EIGENVECTOR THE LINEAR ALGEBRA BEHIND GOOGLE

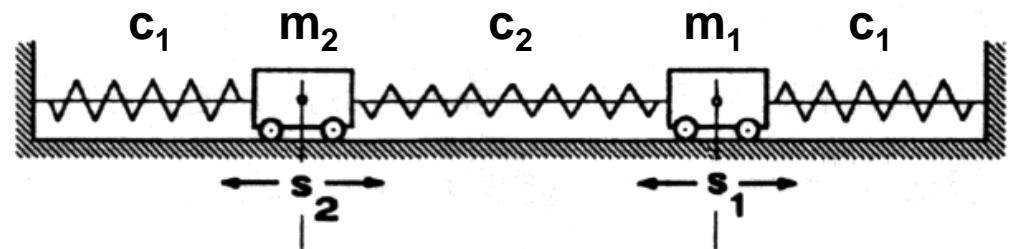
KURT BRYAN[†] AND TANYA LEISE[‡]

Abstract. Google's success derives in large part from its PageRank algorithm, which ranks the importance of webpages according to an eigenvector of a weighted link matrix. Analysis of the PageRank formula provides a wonderful applied topic for a linear algebra course. Instructors may assign this article as a project to more advanced students, or spend one or two lectures presenting the material with assigned homework from the exercises. This material also complements the discussion of Markov chains in matrix algebra. Maple and Mathematica files supporting this material can be found at www.rose-hulman.edu/~bryan.

Key words. linear algebra, PageRank, eigenvector, stochastic matrix

Eigenwert-Beispiel: Resonanz von Koppelschwingungen (1)

Zwei Linearerschwinger mit Massen m_1 und m_2 und gleicher Federkonstante c_1 sind über eine dritte Feder der Konstante c_2 gekoppelt. Das Gesetz von Hooke liefert für die Auslenkungen s_1 , s_2 die Bewegungsgleichungen:



$$\begin{pmatrix} \ddot{s}_1 \\ \ddot{s}_2 \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = (\cos \omega t) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (\cos \omega t) v$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{c_1 + c_2}{m_1} & -\frac{c_2}{m_1} \\ -\frac{c_2}{m_2} & \frac{c_1 + c_2}{m_2} \end{pmatrix}$$

Eigenwert-Beispiel: Resonanz von Koppelschwingungen (2)

$$\begin{pmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \end{pmatrix} = (\cos \omega t) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (\cos \omega t) v$$

$$A \cdot v = \lambda \cdot v$$

$$A \cdot v = \omega^2 v$$

$$\omega_{1,2} = \sqrt{\lambda_{1,2}}$$

$$\lambda^2 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_1 + c_2}{m_2} \right) \lambda + \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} \cdot \frac{c_1 + c_2}{m_2} - \frac{c_2}{m_1} \cdot \frac{c_2}{m_2} \right) = 0$$

$$\lambda^2 - \left(\frac{m_2(c_1 + c_2) + m_1(c_1 + c_2)}{m_1 \cdot m_2} \right) \lambda + \left(\frac{c_1^2 + 2c_1c_2}{m_1 \cdot m_2} \right) = 0$$

Eigenwert-Beispiel: Resonanz von Koppelschwingungen (3)

$$m = m_1 = m_2$$

$$\lambda^2 - \left(\frac{2c_1 + 2c_2}{m} \right) \lambda + \left(\frac{c_1^2 + 2c_1c_2}{m^2} \right) = 0$$

$$p = - \left(\frac{2c_1 + 2c_2}{m} \right)$$

$$q = \left(\frac{c_1^2 + 2c_1c_2}{m^2} \right)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{c_1 + c_2}{m} \pm \sqrt{\left(\frac{c_1 + c_2}{m} \right)^2 - \left(\frac{c_1^2 + 2c_1c_2}{m^2} \right)}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{c_1 + c_2}{m} \pm \sqrt{\frac{c_1^2 + 2c_1c_2 + c_2^2 - c_1^2 - 2c_1c_2}{m^2}}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{c_1 + c_2}{m} \pm \sqrt{\frac{c_2^2}{m^2}}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{c_1 + c_2}{m} \pm \frac{c_2}{m}$$

gleichphasige Schwingung:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{m}} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegenphasige Schwingung:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{c_1 + 2c_2}{m}} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Quellen

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

<http://de.wikipedia.org>



Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf