Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (23)

Gerald Kupris

01.12.2010

Lösung der Kubischen Gleichung

$$a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$$

Raten einer Lösung

Sind alle Vorfaktoren ganzzahlig, dann kann man versuchen, durch Polynomdivision zu einer einfacheren quadratischen Gleichung zu kommen, die mit klassischen Verfahren lösbar sind. Dazu braucht man eine bekannte Nullstelle.

Ist der führende Koeffizient a vom Betrag gleich 1, so kann man die ganzzahligen Teiler des letzten Faktors d durchprobieren (auch negative Werte!). Ist a von eins verschieden, so müssen alle Brüche, deren Zähler ein Teiler von d und deren Nenner ein Teiler von a ist, durchprobiert werden. Bei rationalen Vorfaktoren lässt sich eine Ganzzahligkeit durch Multiplikation der Gleichung mit dem kgV aller Nenner erreichen.

Beispiele

Horner-Schema

Das Horner-Schema (nach William George Horner) ist ein Umformungsverfahren für Polynome, um die Berechnung von Funktionswerten zu erleichtern. Es kann genutzt werden, um die Polynomdivision sowie die Berechnung von Nullstellen und Ableitungen zu vereinfachen.

Rechenvorteile

Bei Polynomen in der klassischen Schreibweise müssen die Potenzen a^2, a^3 usw. errechnet werden, wenn der Funktionswert an einer Stelle $x = a$ errechnet werden soll. Im umgeformten Polynom nach dem Horner-Schema kommen keine Potenzen, sondern nur noch Multiplikation und Addition vor. Die Berechnung wird beschleunigt, weil weniger Multiplikationen nötig sind: Deren Anzahl wird durch die Anwendung des Horner-Schemas auf fast die Hälfte reduziert.

In der klassischen Schreibweise sind $2n - 1$ Multiplikationen bei einem Polynom vom Grad n nötig.

Horner-Schema

Um den Graphen einer ganzrationalen Funktion höherer Ordnung zeichnen zu können, muss man eine Wertetabelle anlegen. Dabei kann es recht aufwendig sein, die dazu nötigen Funktionswerte zu berechnen.
Das Horner - Schema vereinfacht die Berechnungen sehr.

Beispiel : Ganzrationale Funktion 3. Ordnung

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Durch mehrmaliges Ausklammern von x entsteht:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = x\left[a_3x^2 + a_2x + a_1\right] + a_0 = \underline{\underline{\underbrace{x\underbrace{\left[x\left(\underbrace{a_3x + a_2}_{e_2}\right) + a_1\right]}_{e_4} + a_0}_{E}}}$$

Will man den Wert der Funktion für $x = x_1$ berechnen, so kann man folgendermaßen von innen nach außen vorgehen:
- runde Klammer berechnen
- Zwischenergebnis mit x_1 multiplizieren und zu a_1 addieren
- Ergebnis mit x_1 multiplizieren und zu a_0 addieren

Zerlegung von Polynomfunktionen

$$\frac{f(x)}{x-x_0} = \frac{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{x - x_0} = b_2 x^2 + b_1 x + b_0 + r(x)$$

$$b_2 = a_3, \qquad b_1 = a_2 + a_3 x_0, \qquad b_0 = a_1 + a_2 x_0 + a_3 x_0^2$$

$$r(x) = \frac{a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3}{x - x_0} = \frac{f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\frac{f(x)}{x-x_0} = \frac{a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{x - x_0} = \underbrace{b_2 x^2 + b_1 x + b_0}_{\text{1. reduzierts Polynom von } f(x)}$$

Wenn f(x) in x_0 gleich null ist, dann hat das Polynom in x_0 eine Nullstelle.

Horner-Schema: Vorgehensweise (1)

In die 1. Zeile schreibt man die Polynomkoeffizienten in der Reihenfolge fallender Potenzen.

Fehlen gewisse Potenzen (unvollständiges Polynom), so sind die entsprechenden Koeffizienten gleich Null und müssen im Horner-Schema berücksichtigt werden.

	a_3	a_2	a_1	a_0
x_0		$a_3 x_0$	$(a_2 + a_3 x_0) x_0$	$(a_1 + a_2 x_0 + a_3 x_0^2) x_0$
	a_3	$a_2 + a_3 x_0$	$a_1 + a_2 x_0 + a_3 x_0^2$	$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_3 x_0^3$
	b_2	b_1	b_0	$f(x_0)$

Horner-Schema: Vorgehensweise (2)

Die zweite Zeile bleibt zunächst frei.

Die dritte Zeile beginnt mit dem Koeffizenten a_3, der aus der ersten Zeile übernommen wird.

Dieser wird mit dem x-Wert x_0 multipliziert und das Ergebnis x_0a_3 in die zweite Zeile unter den Koeffizenten a_2 gesetzt und zu diesem addiert. Das Ergebnis dieser Addition wird unter dem Koeffizenten a_2 gespeichert.

Jetzt wird die in der dritten Zeile unterhalb von a_2 stehende Zahl $a_2 + a_3x_0$ mit dem x-Wert x_0 multipliziert und das Ergebnis $(a_2 + a_3x_0)\, x_0 = a_2x_0 + a_3x_0^2$ in die zweite Zeile unter den Koeffizenten a_1 gesetzt und zu diesem addiert. Sinngemäß geht es mit dem Koeffizenten a_0 weiter, bis das Horner-Schema vollständig ausgefüllt ist.

Die in der 3. Zeile stehenden Zahlenwerte sind der Reihe nach die Koeffizenten aus der Zerlegung und der Funktionswert $f(x_0)$. Wenn dieser Null ist, dann ist bei x_0 eine Nullstelle.

Das Horner-Schema ist sinngemäß auch auf Polynomfunktionen höheren Grades ($n > 3$) anwendbar.

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

http://de.wikipedia.org

http://www.komplexe-zahlen.de

http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_2/basics/b2_1_5.html

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/imaginaer1.htm