Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (18)

Gerald Kupris

17.11.2010

Lokale Extremwerte einer Funktion

Eine Funktion f besitzt an der Stelle x_0

- ein **lokales Minimum**, wenn alle anderen Funktionswerte in der Umgebung von x_0 größer sind als der Funktionswert an der Stelle x_0:

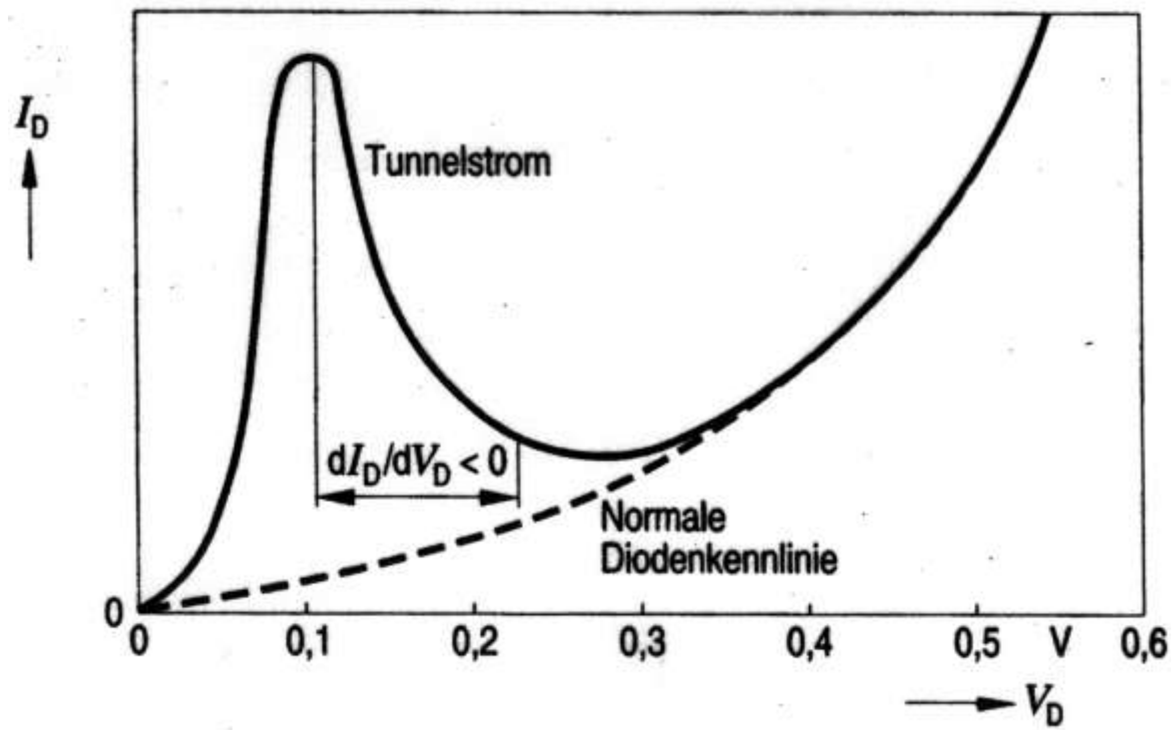
  $$f(x_0) < f(x), \quad x \neq x_0.$$

  Einen entsprechenden Punkt im Schaubild bezeichnet man als **Tiefpunkt**.
- ein **lokales Maximum**, wenn alle anderen Funktionswerte in der Umgebung von x_0 kleiner sind als der Funktionswert an der Stelle x_0:

  $$f(x_0) > f(x), \quad x \neq x_0.$$

  Einen entsprechenden Punkt im Schaubild bezeichnet man als **Hochpunkt**.

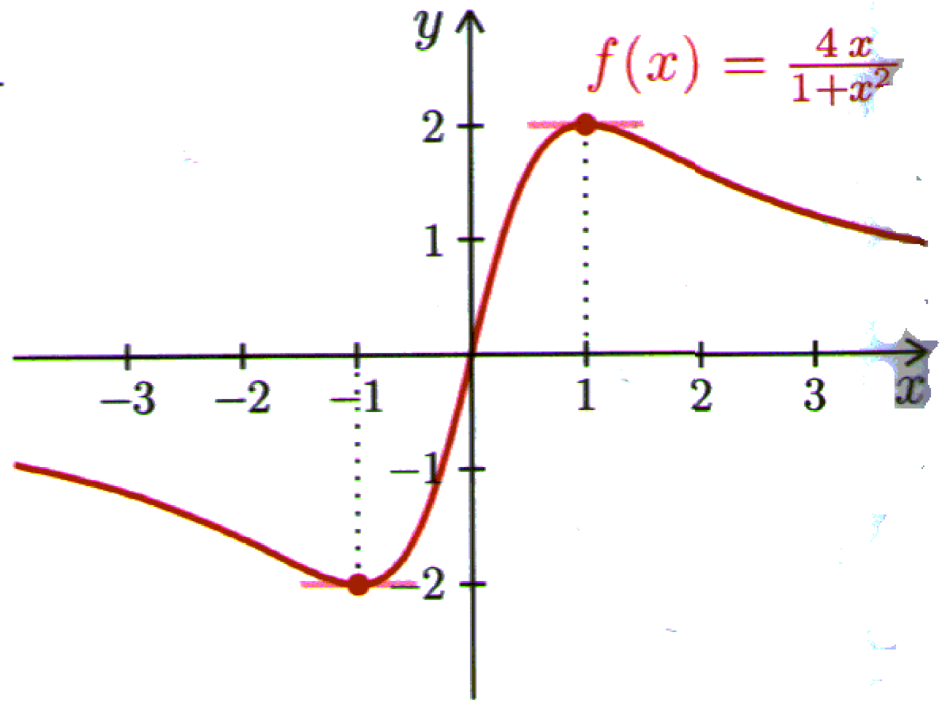
Beispiel: Extremwerte einer Funktion



Kennlinie einer Tunneldiode: Drain-Strom als Funktion der Drain-Spannung

Beispiel: Extremwerte einer Funktion

$$f(x) = \frac{4x}{1+x^2}$$



Grenzwert von Funktionen

Die Funktion f hat an der Stelle x_0 den **Grenzwert** G, wenn für jede gegen x_0 konvergente Zahlenfolge (x_n) die Folge der Funktionswerte $(f(x_n))$ gegen G konvergiert. Man verwendet die Schreibweise $f(x) \to G$ für $x \to x_0$ oder $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = G$.

Wenn f und g Funktionen sind mit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = F$ und $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = G$, dann gilt:

- Es existiert auch der Funktionsgrenzwert von $f(x) \pm g(x)$ an der Stelle x_0, nämlich $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \pm g(x)) = F \pm G$.
- Es existiert auch der Funktionsgrenzwert von $f(x) \cdot g(x)$ an der Stelle x_0, nämlich $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = F \cdot G$.
- Es existiert auch der Funktionsgrenzwert von $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ an der Stelle x_0, nämlich $\lim\limits_{x \to x_0} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{F}{G}$. Das gilt nur, wenn die Funktion $g(x)$ in einer Umgebung von x_0 und der Grenzwert G nicht null sind.

Linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert

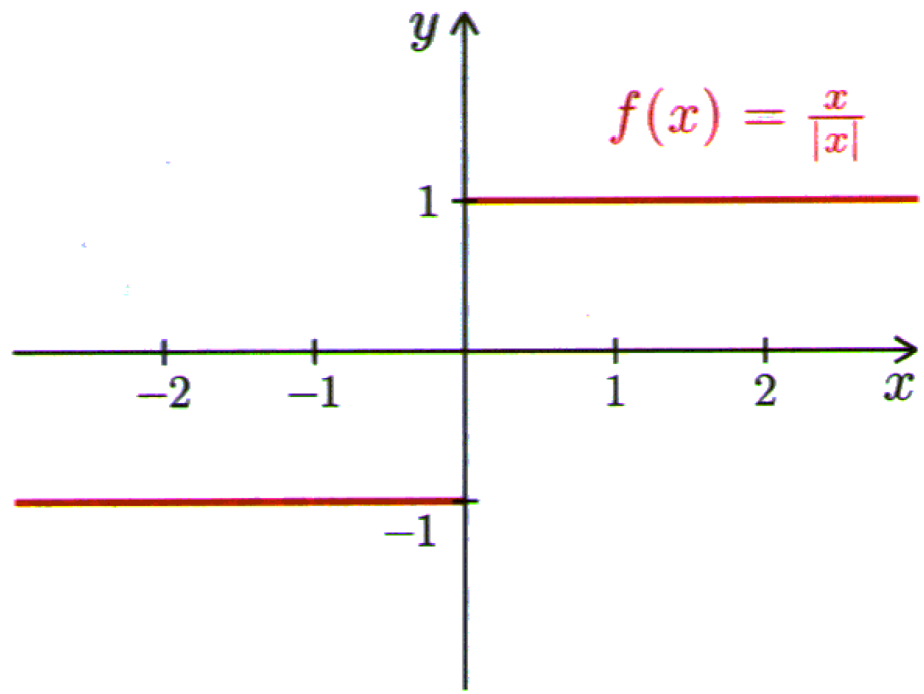
Wenn man bei der Grenzwertberechnung einer Funktion f an der Stelle x_0 nur Zahlenfolgen (x_n) betrachtet, die kleinere Werte als x_0 enthalten, dann bezeichnet man den Grenzwert als **linksseitigen Grenzwert** G_{L}, Zahlenfolgen mit größeren Werten als x_0 erzeugen den **rechtsseitigen Grenzwert** G_{R}. Man verwendet die Schreibweisen

$$\lim_{x \to x_0-} f(x) = G_{\mathrm{L}}, \qquad \lim_{x \to x_0+} f(x) = G_{\mathrm{R}}.$$

Beispiel: linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert

$$G_L = \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} \frac{x}{-x} = -1$$

$$G_R = \lim_{x \to 0+} f(x) = \lim_{x \to 0+} \frac{x}{x} = 1$$



Stetigkeit

Eine Funktion f heißt **stetig** an der Stelle x_0, wenn der Grenzwert der Funktion für x gegen x_0 existiert und gleich dem Funktionswert an der Stelle x_0 ist, falls also gilt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Man nennt eine Funktion stetig auf einem Intervall, wenn sie an allen Stellen des Intervalls stetig ist.

Eine Funktion ist genau dann stetig an der Stelle x_0, wenn alle folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(1) Die Funktion ist an der Stelle x_0 selbst und in einer Umgebung der Stelle x_0 definiert.

(2) Der Grenzwert der Funktion an der Stelle x_0 existiert. Insbesondere müssen der linksseitige Grenzwert G_L und der rechtsseitige Grenzwert G_R an der Stelle x_0 existieren und gleich sein.

(3) Grenzwert und Funktionswert stimmen an der Stelle x_0 überein.

Stetigkeit

Stetigkeit elementarer Funktionen
Alle elementaren Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich überall stetig.

Wenn f und g stetige Funktionen an der Stelle x_0 sind, dann gilt:

- Die Funktion $f \pm g$ ist auch stetig in x_0.
- Die Funktion $f \cdot g$ ist auch stetig in x_0.
- Die Funktion $\frac{f}{g}$ ist auch stetig in x_0, falls $g(x_0) \neq 0$.

Wenn g eine stetige Funktion an der Stelle x_0 ist und f eine stetige Funktionen an der Stelle $f(x_0)$ ist, dann gilt: Die Funktion $f \circ g$ ist auch stetig an der Stelle x_0.

Unstetigkeitsstellen

Unstetigkeitsstellen

Man unterscheidet folgende Arten von Unstetigkeitsstellen:

- Hebbare Unstetigkeitsstelle,
- Unstetigkeitsstelle 1. Art oder Sprungstelle,
- Unstetigkeitsstelle 2. Art, etwa eine Polstelle oder eine Oszillationsstelle.

Hebbare Unsetigkeitsstelle

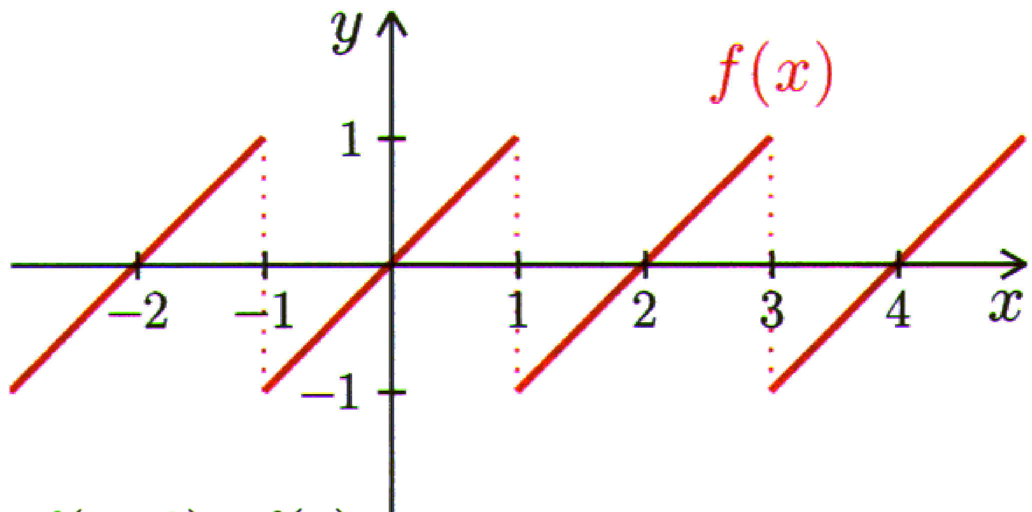
Wenn bei einer Funktion f der linksseitige Grenzwert $G_L = \lim_{x \to x_0-} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $G_R = \lim_{x \to x_0+} f(x)$ an der Stelle x_0 existieren und gleich sind, also $G_L = G = G_R$, aber nicht mit Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmen oder die Funktion f an der Stelle x_0 nicht definiert ist, dann kann man durch

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } x \neq x_0, \\ G & \text{für } x = x_0, \end{cases}$$

eine neue Funktion definieren, die an der Stelle x_0 stetig ist. Die Stelle x_0 heißt **hebbare Unstetigkeitsstelle**.

Unstetigkeitsstelle 1. Art

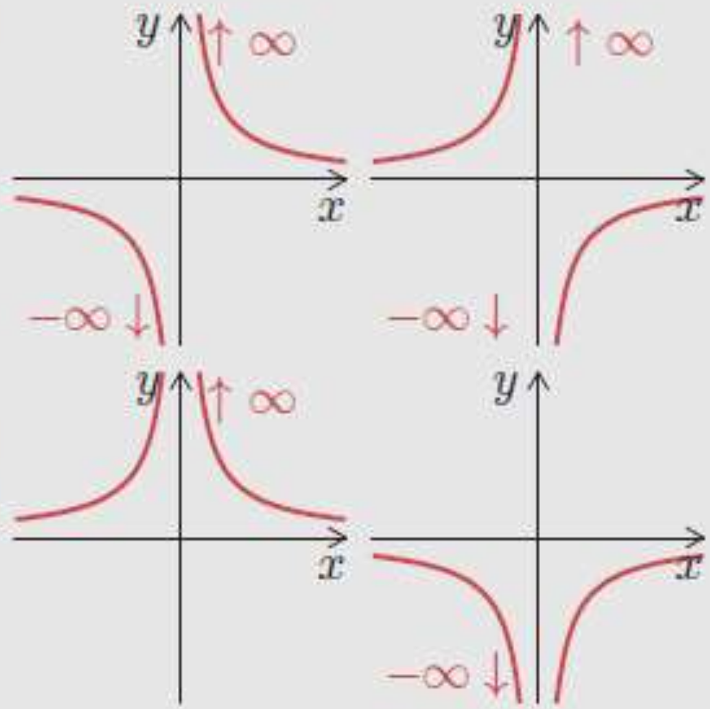
Wenn bei einer Funktion f der linksseitige Grenzwert $G_\mathrm{L} = \lim\limits_{x \to x_0 -} f(x)$ und der rechtsseitige Grenzwert $G_\mathrm{R} = \lim\limits_{x \to x_0 +} f(x)$ an der Stelle x_0 existieren, aber nicht gleich sind, also $G_\mathrm{L} \neq G_\mathrm{R}$, dann bezeichnet man diese Unstetigkeitsstelle als **Sprungstelle** oder **Unstetigkeitsstelle 1. Art**.



$f(x) = x$ für $x \in [-1, 1]$, $\quad f(x+2) = f(x)$

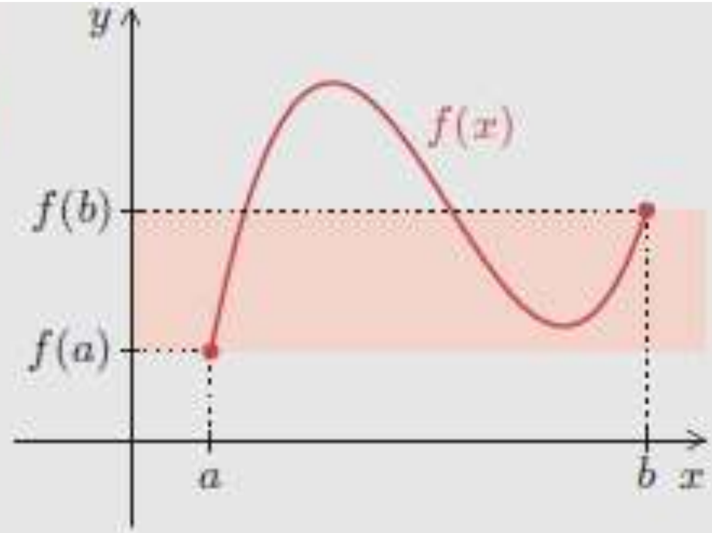
Unstetigkeitsstelle 2. Art

Man nennt die Stelle x_0 eine **Polstelle** oder kurz **Pol** einer Funktion f, wenn der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert an der Stelle x_0 uneigentliche Grenzwerte $\pm\infty$ sind. Eine Polstelle ist eine **Unstetigkeitsstelle 2. Art**. Das Schaubild der Funktion besitzt an einer Polstelle eine **senkrechte Asymptote**. Bei Polstellen mit **Vorzeichenwechsel** findet ein Übergang der Funktionswerte von $-\infty$ nach ∞ oder von ∞ nach $-\infty$ statt. Bei Polstellen ohne Vorzeichenwechsel sind entweder beide uneigentliche Grenzwerte ∞ oder beide $-\infty$.



Eigenschaften stetiger Funktionen

Kennt man zwei Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ einer stetigen Funktion f, dann nimmt f auf dem Intervall $[a, b]$ auch jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ mindestens einmal an.



Hat eine stetige Funktion f zwei Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ mit unterschiedlichem Vorzeichen, dann hat die Funktion zwischen a und b mindestens eine Nullstelle.

Grenzwerte für x → ∞

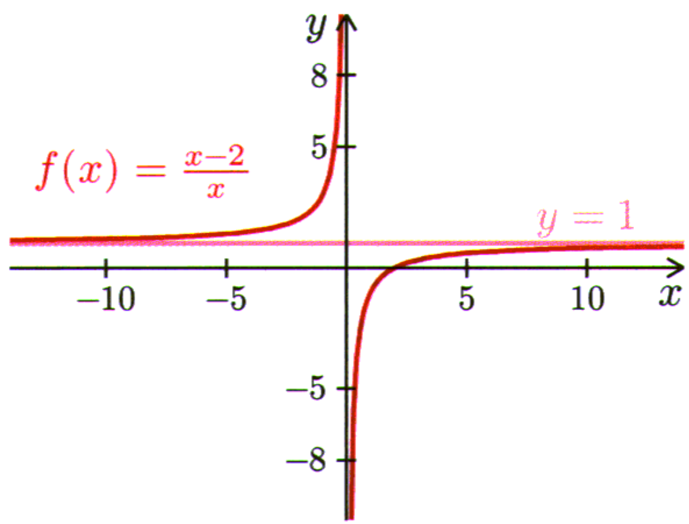
Besitzt eine Funktion für x gegen ∞ den Grenzwert g, also

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g,$$

dann ist die horizontale Gerade $y = g$ eine **waagrechte Asymptote** für $x \to \infty$. Entsprechendes gilt für $x \to -\infty$.

$$f(x) = \frac{x-2}{x} = 1 - \frac{2}{x}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 1) = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{2}{x} = 0.$$



Konvergenz / Divergenz

Der Limes oder Grenzwert einer Funktion an einer bestimmten Stelle ist derjenige Wert, dem sich die Funktion in der Umgebung der betrachteten Stelle annähert.

Ein solcher Grenzwert existiert jedoch nicht in allen Fällen. Existiert der Grenzwert, so **konvergiert** die Funktion, andernfalls **divergiert** sie.

Bestimmte Divergenz:
Bestimmte Divergenz gegen ∞ (bzw. - ∞) liegt vor, wenn eine Funktion jede reelle Zahl irgendwann überschreitet und dann darüber bleibt (bzw. jede reelle Zahl unterschreitet und dann darunter bleibt).

Die Funktion divergiert bestimmt gegen ∞ (bzw. - ∞).

Eigenschaften von Funktionen - „Steckbrief“

Abbildungsvorschrift

maximaler Definitionsbereich	Wertebereich
Definitionslücken	Periodizität
Nullstellen	Symmetrie
Polstellen	Monotonie
Beschränktheit	Umkehrfunktion
Supremum	Stetigkeit
Infimum	Konvergenz / Divergenz
Maximum	Grenzwert für $x \to \infty$
Minimum	Graph

Aufgabe

Teilen Sie sich in Gruppen auf und erstellen Sie einen Funktionen-"Steckbrief" für die zugeloste Funktion.

Stellen Sie die Funktion nach einer Vorbereitungszeit anhand des „Steckbriefs" vor.

$$y = f(x) = 1 - x^2$$

$$y = f(x) = (x+3)^2$$

$$y = f(x) = 1 + 2x - \frac{1}{2}x^2$$

$$y = f(x) = \frac{4x}{x^2+1}$$

$$y = f(x) = \frac{2x-1}{3+2x}$$

$$y = f(x) = \frac{x}{2} + 2$$

$$y = f(x) = \frac{1}{2x+1} - 1$$

$$y = f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$y = f(x) = \frac{2x+2}{x^2+4x+4}$$

$$y = f(x) = \frac{1}{x^2} - 1$$

$$y = f(x) = \frac{2x}{x^2-2x+1}$$

$$y = f(x) = \frac{3x-9}{x^2-6x+9}$$

Funktionsarten

Polynome

gebrochen rationale Funktionen

Potenzfunktion

Sinus, Cosinus, Trigonometrische Funktionen

Tangens, Cotangens

natürliche Exponentialfunktion, e-Funktion

Sinus Hyperbolicus, Cosinus Hyperbolicus

Wurzelfunktion

Arkussinus, Arkuskosinus, Arkustangens

Logarithmusfunktion

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,
Vieweg+Teubner Verlag, 2009

http://de.wikipedia.org

http://www.komplexe-zahlen.de

http://www.tf.uni-kiel.de/matwis/amat/mw1_ge/kap_2/basics/b2_1_5.html

http://members.chello.at/gut.jutta.gerhard/imaginaer1.htm