Mathematik für Infotronik (27)

Gerald Kupris

15.12.2010

Wiederholung: echt und unecht gebrochenrationale Funktionen

Falls bei einer gebrochenrationalen Funktion der Grad des Zählerpolynoms größer oder gleich dem Grad des Nennerpolynoms ist, nennt man die Funktion **unecht gebrochenrational** und sonst **echt gebrochenrational**.

Beispiele

Durch Polynomdivision kann man jede unecht gebrochenrationale Funktion zerlegen in eine Summe aus einem Polynom und einer echt gebrochenrationalen Funktion.

Beispiele

Wozu diese Zerlegung? Bestimmung der Asymptoten.

Asymptotisches Verhalten von Polynomen

Ein Polynom f vom Grad n

$$f(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots + a_n\,x^n, \quad a_n \neq 0$$

verhält sich asymptotisch gleich wie das Glied mit der höchsten Potenz. Wir verwenden die Schreibweise

$$a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + a_3\,x^3 + \ldots + a_n\,x^n \approx a_n\,x^n \quad \text{für } x \to \pm\infty.$$

Polynome haben das folgende asymptotische Verhalten: Ein Polynom mit

- geradem Grad ist entweder nach unten oder nach oben beschränkt,
- ungeradem Grad ist weder nach unten noch nach oben beschränkt und besitzt mindestens eine Nullstelle.

Asymptotisches Verhalten

Besitzt eine Funktion für x gegen ∞ den Grenzwert g, also

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = g,$$

dann ist die horizontale Gerade $y = g$ eine **waagrechte Asymptote** für $x \to \infty$. Entsprechendes gilt für $x \to -\infty$.

Unterscheidet sich eine Funktion für x gegen ∞ von einer Näherungskurve $g(x)$ nicht, also

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0,$$

dann ist die Funktion $g(x)$ eine **schiefe Asymptote** für $x \to \infty$. Entsprechendes gilt für $x \to -\infty$.

Asymptotisches Verhalten gebrochenrationaler Funktionen

Gebrochenrationale Funktionen haben das folgende asymptotische Verhalten:

- Echt gebrochenrationale Funktionen haben für $x \to \pm\infty$ die x-Achse als waagrechte Asymptote.
- Bei unecht gebrochenrationalen Funktionen findet man waagrechte und schiefe Asymptoten durch Polynomdivision.

Beispielaufgaben

Diskutieren Sie den Verlauf der gebrochenrationalen Funktion

$$y = \frac{2x^4 - 2x^3 - 20x^2 + 8x + 48}{x^3 + x^2 - 4x - 4}$$

(Definitionslücken, Nullstellen, Pole, Asymptoten, Schnittpunkt mit der y-Achse). Gibt es *hebbare* Definitionslücken? Wie lautet gegebenenfalls die „erweiterte" Funktion? *Skizzieren* Sie den Kurvenverlauf.

Bestimmen Sie den Verlauf der gebrochenrationalen Funktion

$$y = \frac{2(x^2 - 6x + 9)}{(x+3)^2} \qquad (x \neq -3)$$

aus den Null- und Polstellen, den Asymptoten und dem Schnittpunkt mit der y-Achse.

Partialbrüche für Linearfaktoren

Jeder Nennernullstelle x_0 einer echt gebrochenrationalen Funktion ordnet man einen Partialbruch zu. Die Form des Partialbruches hängt dabei wie folgt von der Vielfachheit der Nullstelle x_0 ab:

$$
\begin{array}{lcl}
\text{einfache Nullstelle} & \Longrightarrow & \dfrac{A_1}{x-x_0} \\
\text{zweifache Nullstelle} & \Longrightarrow & \dfrac{A_1}{x-x_0} + \dfrac{A_2}{(x-x_0)^2} \\
\vdots & & \\
p\text{-fache Nullstelle} & \Longrightarrow & \dfrac{A_1}{x-x_0} + \dfrac{A_2}{(x-x_0)^2} + \ldots + \dfrac{A_p}{(x-x_0)^p}
\end{array}
$$

Die Konstanten $A_1, A_2, \ldots, A_p$ bestimmt man durch Koeffizientenvergleich.

Beispiel

Partialbruchzerlegung für Linearfaktoren

Eine echt gebrochenrationale Funktion, bei der sich der Nenner in Linearfaktoren zerlegen lässt, kann man auf folgende Weise in eine Summe von Partialbrüchen zerlegen:

(1) Bestimme alle Nullstellen des Nenners.

(2) Ordne jeder Nennernullstelle einen geeigneten Partialbruch zu.

(3) Bestimme die Konstanten in den Partialbrüchen so, dass die Summe der Partialbrüche mit der Funktion übereinstimmt.

Beispiel

Partialbrüche für quadratische Funktionen

Jedem quadratischen Faktor $x^2 + bx + c$ im Nenner einer echt gebrochenrationalen Funktion ordnet man einen Partialbruch zu. Die Form des Partialbruches hängt dabei wie folgt von der Vielfachheit des Faktors $x^2 + bx + c$ ab:

$$\begin{array}{lcl}
\text{einfacher Faktor} & \Longrightarrow & \dfrac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c} \\
\text{zweifacher Faktor} & \Longrightarrow & \dfrac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c} + \dfrac{B_2x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} \\
\vdots & & \\
p\text{-facher Faktor} & \Longrightarrow & \dfrac{B_1x + C_1}{x^2 + bx + c} + \dfrac{B_2x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2} + \ldots + \dfrac{B_px + C_p}{(x^2 + bx + c)^p}
\end{array}$$

Die Konstanten $B_1, B_2, \ldots, B_p$ und $C_1, C_2, \ldots, C_p$ bestimmt man durch Koeffizientenvergleich.

Partialbruchzerlegung

Eine gebrochenrationale Funktion lässt sich auch dann in Partialbrüche zerlegen, wenn sich das Nennerpolynom nicht vollständig in Linearfaktoren zerlegen lässt:

(1) Bestimme alle linearen und quadratischen Faktoren des Nenners.

(2) Ordne jedem Faktor einen geeigneten Partialbruch zu.

(3) Bestimme die Konstanten in den Partialbrüchen so, dass die Summe der Partialbrüche mit der Funktion übereinstimmt.

Beispiel

Hochschule Deggendorf

Funktionen-Steckbrief

Eigenschaft		
Abbildungsvorschrift		
Definitionsbereich		
Definitionslücken		
Nullstellen		
Polstellen		
Beschränktheit		
Supremum		
Infimum		
Maximum		
Minimum		
Wertebereich		
Periodizität		
Symmetrie		
Monotoniebereiche		
Umkehrfunktion		
Stetigkeitsbereiche		
Konvergenz / Divergenz		
Grenzwert für $x \rightarrow \pm\infty$		
Graph		

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München, 2010

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag, Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org