2. Die Komplexen Zahlen

2.1. Definition und Rechenregeln

Eine komplexe Zahl besteht aus Real- und Imaginärteil: $z = Re + i \cdot Im$.

$r = |z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{Re^2 + Im^2}$

① Kartesische Form
$z = Re + Im \cdot i$ $Re = r \cdot \cos\varphi$ $Im = r \cdot \sin\varphi$

② Trigonometrische Form (Polardarstellung)
$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$
$= |z| \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$

③ Exponentialform
$z = r \cdot e^{i\varphi}$
$= |z| \cdot e^{i\varphi}$

Addition
$z_1 + z_2 = (Re_1 + i \cdot Im_1) + (Re_2 + i \cdot Im_2)$
$= (Re_1 + Re_2) + i \cdot (Im_1 + Im_2)$
$= Re + i \cdot Im$

Subtraktion:
$z_1 - z_2 = (Re_1 + i \cdot Im_1) - (Re_2 - i \cdot Im_2)$
$= (Re_1 - Re_2) + i \cdot (Im_1 - Im_2)$
$= Re + i \cdot Im$

Multiplikation:
$z_1 \cdot z_2 = (Re_1 + i \cdot Im_1) \cdot (Re_2 + i \cdot Im_2)$
mit $i^2 = -1$ ausmultiplizieren

Multiplikation (Exponentialform)
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_2}$
$= (r_1 \cdot r_2) \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

Multiplikation (Trigonometrische Form)
$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) \cdot [\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1+\varphi_2)]$

Division
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(Re_1 + i Im_1)\cdot(Re_2 - i Im_2)}{(Re_2 + i Im_2)\cdot(Re_2 - i Im_2)}$$

Pascal'sches Dreieck

0	1
1	1 1
2	1 2 1 → $a^2 + 2ab + b^2$
3	1 3 3 1 → $a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$
4	1 4 6 4 1 → $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
5	1 5 10 5 1
6	1 6 15 6 1

Satz von de Moivre
$(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi)$

Winkel im Grad- und Bogenmaß
$\alpha = \frac{360°}{2\pi} \cdot x$ $x = \frac{2\pi}{360°} \cdot \alpha$

Additionstheoreme für sin(x) und cos(x)
$\cos(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cdot \cos(\psi) - \sin(\varphi) \cdot \sin(\psi)$
$\sin(\varphi + \psi) = \cos(\varphi) \cdot \sin(\psi) + \sin(\varphi) \cdot \cos(\psi)$

Komplex-Konjugation: $z = x + iy \rightarrow \bar{z} = x - iy$
$Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$; $Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$

Komplexe Exponential- und Logarithmusfunktion
kompl. Expfkt.
$e^z = e^x \cdot e^{iy}$
$= e^x \cdot (\cos y + i \cdot \sin y)$
• $Re(e^z) = e^x \cdot \cos y$
• $Im(e^z) = e^x \cdot \sin y$

kompl. Logarithmusfkt.
$Ln(w) = \ln|w| + i \cdot Arg(w)$ $(-\pi < Arg(w) < \pi)$
Hauptwert: $|w| = \sqrt{x^2+y^2}$
Argument: $Arg(w) = \arccos\left(\frac{x}{r}\right)$

2.4 Komplexe Wurzeln

Exponentialform von w:
$r = \sqrt{x^2+y^2}$
$\varphi = \begin{cases} +\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & y \geq 0 \\ -\arccos\left(\frac{x}{r}\right), & y < 0 \end{cases}$
$w = r \cdot e^{i\varphi}$

Spezielle n-te Wurzel:
$z_0 = r^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\frac{\varphi}{n}}$
$z_k = z_0 \cdot e^{i\frac{2\pi}{n} \cdot k}$
Bsp.: $n = 3$ $(k = 0, 1, 2)$
$z_1 = z_0 \cdot e^{i\frac{2\pi}{n} \cdot 1}$
$z_2 = z_0 \cdot e^{i\frac{2\pi}{n} \cdot 2}$

Anwendung auf Schwingungen
$A(t) = A_0 \cdot \sin(\omega t + \alpha_0)$
A_0 = Amplitude
α_0 = Phase
$f = \frac{1}{t}$ (Frequenz)
$\omega = \frac{2\pi}{T}$ = Winkelgeschw./Kreisfrequenz

$\underline{A}(t) = \underline{A_0} \cdot e^{i\omega t}$ mit $\underline{A_0} = A_0 \cdot e^{i\alpha_0}$
$\Rightarrow \underline{A}(t) = A_0 \cdot e^{i(\omega t + \alpha_0)}$
$A(t) = Im(\underline{A}(t)) = \sin(\omega t + \alpha_0)$
komplexe Schwingung mit reeller Amp.

Überlagerung – Superposition:
$C(t) = A(t) + B(t)$
Bsp.: $u_1(t) = 100V \cdot \sin(314\frac{1}{5}t)$
$u_2(t) = 200V \cdot \sin(314\frac{1}{3}t + \frac{5}{6}\pi)$
$\underline{u_1}(t) = 100V \cdot e^{i314\frac{1}{3}t}$ $\underline{u_2}(t) = 200V \cdot e^{i\frac{5}{6}\pi} \cdot e^{i314\frac{1}{3}t}$
$\underline{u}_{ges}(t) = \underline{u}(t) = \underline{u_1}(t) + \underline{u_2}(t) =$
$= 100V \cdot e^{i314\frac{1}{3}t} + 200V \cdot e^{i\frac{5}{6}\pi} \cdot e^{i314\frac{1}{3}t}$
$= \underbrace{(100V + 200V \cdot e^{i\frac{5}{6}\pi})}_{u_0 = \hat{\underline{u}}_{ges}} \cdot e^{i314\frac{1}{3}t}$

$\Rightarrow \hat{\underline{u}}_{ges} = 100V + 200V \cdot e^{i\frac{5}{6}\pi}$
$= 100 + 200 \cdot (\underbrace{\cos\tfrac{5}{6}\pi}_{-\frac{1}{2}\sqrt{3}} + i \cdot \underbrace{\sin\tfrac{5}{6}\pi}_{\frac{1}{2}})$
$= 100 - 100\sqrt{3} + i \cdot 100$
$= 100(1 - \sqrt{3} + i)$
$\Rightarrow |\hat{\underline{u}}_{ges}| = 100\sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 123,93$
$Arg(\hat{\underline{u}}_{ges}) = \arccos\left(\frac{x}{r}\right) = \arccos\frac{100 - 100\sqrt{3}}{123,93} = 2,20$
$\Rightarrow \underline{u}_{ges}(t) = \underbrace{123,9 \cdot e^{i2,20}}_{\hat{\underline{u}}_{ges}} \cdot e^{i314\frac{1}{3}t}$

3. Logik

3.2 Verknüpfungen von Aussagen
• Konjunktion $A \wedge B$ (und)
• Disjunktion $A \vee B$ (oder)
• Negation $\neg A$ (nicht)
• Implikation $A \rightarrow B$ (aus A folgt B)
• Äquivalenz $A \leftrightarrow B$ (gleich)

$\neg$ bindet stärker als $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
$\wedge, \vee$ bindet stärker als $\rightarrow, \leftrightarrow$

$\forall$ (für alle) All-Quantor
$\exists$ (es existiert) Existenz-Quantor

Für Aussagenvariablen A, B, C gilt:
① $A \wedge B \equiv B \wedge A$
$A \vee B \equiv B \vee A$
② $A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$
$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$
③ $A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$
$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
④ $A \wedge (A \vee B) \equiv A$
$A \vee (A \wedge B) \equiv A$
⑤ $A \wedge A = A$
$A \vee A = A$
⑥ $\neg(\neg A) = A$
⑦ $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$
$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$
⑧ $A \vee F \equiv A$; $A \wedge W = A$
F = Kontradiktion (alles falsch 0) W = Tautologie (alles wahr 1)
⑨ $A \wedge \neg A \equiv F$;
$A \vee \neg A \equiv W$
⑩ $A \wedge F \equiv F$; $A \vee W \equiv W$
⑪ $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$
$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$
$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
$\equiv (\neg A \wedge B) \wedge (\neg B \vee A)$
$A \leftrightarrow B \equiv \neg A \leftrightarrow \neg B$

3.3. Schaltalgebra

UND-Gatter (AND)	$x_1 \wedge x_2$	x_1, x_2 – [&] – Y
ODER-Gatter (OR)	$x_1 \vee x_2$	x_1, x_2 – [≥1] – Y
NICHT-Gatter (NOT)	$\neg x_1$	x_1 – [1]o – Y
NAND-Gatter (NOT AND)	$\neg(x_1 \wedge x_2)$	x_1, x_2 – [&]o – Y
NOR-Gatter (NOT OR)	$\neg(x_1 \vee x_2)$	x_1, x_2 – [≥1]o – Y
XOR-Gatter (exklusive OR)	$x_1 \oplus x_2 \equiv (x_1 \wedge \neg x_2) \vee (\neg x_1 \wedge x_2)$	x_1, x_2 – [=1] – Y
NXOR-Gatter (NOT XOR)	$\neg(x_1 \oplus x_2)$	x_1, x_2 – [=1]o – Y

Ganze Zahlen und Teilbarkeit
t = größter gemeinsamer Teiler ggT
$t = ggT(a,b)$
s = kleinstes gemeinsames Vielfaches
$s = kgV(a,b)$
$kgV(a_1,a_2) = \frac{a_1 \cdot a_2}{ggT(a_1,a_2)}$

Primfaktorzerlegung
$500 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^3 \cdot 7^0$
$525 = 2^0 \cdot 3^1 \cdot 5^2 \cdot 7^1$
$ggT(a,b) = 2^0 \cdot 3^0 \cdot 5^2 \cdot 7^0 = 25$
$kgV(a,b) = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^3 \cdot 7^1 = 10500$
TR: SHIFT FACT

Wurzelgleichungen
① Wurzel isolieren
② Quadrieren (bzw. Potenzieren)
③ Falls noch Wurzelterme ① und ② wiederholen
④ Wurzelfreie Gleichung lösen
⑤ evtl. Probe

Bsp.: $\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1$
$\sqrt{2x+8} - \sqrt{5+x} = 1 \quad | + \sqrt{5+x}$
$\underbrace{\sqrt{2x+8}}_{\geq 0} = 1 + \underbrace{\sqrt{5+x}}_{\geq 0} \quad | \uparrow^2$
$2x + 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -4$
$5 + x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$

$\Rightarrow G = [-4; +\infty[$
$= \{x \geq -4\}$
$2x + 8 = (1 + \sqrt{5+x})^2$
$2x + 8 = 1^2 + 2\sqrt{5+x} + 5 + x$
$x + 2 = 2\sqrt{5+x} \quad | : 2$
$\frac{1}{2}x + 1 = \underbrace{\sqrt{5+x}}_{\geq 0} \quad | \uparrow^2$
$\Rightarrow (\frac{1}{2}x + 1)^2 = 5 + x$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + x + 1 = 5 + x \quad | -5-x$
$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow x = \pm 4$

Probe: ±4 einsetzen in Gl.
$1 = 1$ w $-1 = 1$ f $\Rightarrow \mathbb{L} = \{4\}$

II. Algebra

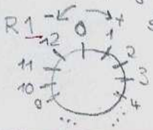
Primzahl = nur durch 1 und sich selbst teilbar.

Bestimme das multiplikative Inverse.
→ eukld. Algorithmus + lineare Darst.
z.B. von $\overline{1000}$ in $\mathbb{Z}/1013\mathbb{Z}$

Euklidscher Algorithmus
$ggT(48, 162)$
$162 = 3 \cdot 48 + 18$
$48 = 2 \cdot 18 + 12$
$18 = 1 \cdot 12 + 6$
$12 = 2 \cdot \underset{ggT}{6} + 0$

Lineare Darstellung/Zerlegung des ggT
$6 = -1 \cdot 48 + 3(162 - 3 \cdot 48) = 3 \cdot 162 - 10 \cdot 48$
$6 = 18 - 1 \cdot (48 - 2 \cdot 18) = -1 \cdot 48 + 3 \cdot 18$
$\Rightarrow 6 = 18 - 1 \cdot 12$
Lösung: $\Rightarrow ggT(48, 162) = 3 \cdot 162 - 10 \cdot 48 = 6$

Modulare Arithmetik, endliche Körper
Restklassenring
Bsp.: $(\bar{8} - \bar{3}) - (\bar{4} - \overline{10})^{-1}$ in $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$
$= (\bar{5})^4 - (-\bar{6})^{-1} = (\overline{625}) - (-\bar{6})^{-1}$
$= \overline{625} - (-\bar{6} + \underset{\hat{=}0}{\overline{13}})^{-1}$ $| 625 : 13 = 48 R 1$
$= \bar{1} - (\bar{7})^{-1} = \bar{1} - \bar{2}$
$= -\bar{1} = \overline{12}$



NR: (erw. eukld. Algorithmus)
$13 = 1 \cdot 7 + 6$
$7 = 1 \cdot 6 + 1 \Rightarrow 1 = 7 - 1 \cdot 6$
$6 = 6 \cdot 1 + 0$ ggT
$1 = 7 - 1 \cdot (13 - 1 \cdot 7) = -1 \cdot 13 + 2 \cdot 7$
$\Rightarrow \bar{1} = -\bar{1} \cdot \overline{13} + \bar{2} \cdot \bar{7}$
$\Rightarrow \bar{1} = \bar{2} \cdot \bar{7}$ in $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$
$\Rightarrow \bar{2} = \frac{\bar{1}}{\bar{7}} = \bar{7}^{-1}$

2. Gleichungen und Ungleichungen
Quadratische Gleichung:
$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$D = b^2 - 4ac$ $ax^2 + bx + c = 0$
$a > 0$: nach oben geöffnet
$a < 0$: nach unten geöffnet
Quadratische Ungleichung:
Faktorisieren + VZT
• $D < 0$: in $\mathbb{R}$ unzerlegbar/keine Lösung
• $D = 0$: $x_1 = x_2$ 1 Lösung (zweifach)
– $ax^2 + bx + c = a \cdot \underbrace{(x - x_1)^2}_{\geq 0}$
– VZT
• $D > 0$: $x_1 < x_2$ 2 Lösungen (einfach)
– $a(x - x_1)(x - x_2)$
– VZT

Bruchgleichungen/Ungleichungen
– HN bilden
→ HN multiplizieren
– Auflösen
– Probe (G)
– Fallunterscheidung bei Ungleichungen (HN > 0; HN < 0)

$\frac{2}{x^2} + \frac{3}{2x} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{4}{HN} + \frac{3x}{HN} = 0$
$\Leftrightarrow \frac{4 + 3x}{HN} = 0 \quad | \cdot HN$
$\Leftrightarrow 4 + 3x = 0$
$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \in G$

Bsp.: Bruchgleichung
$\frac{2}{x^2} + \frac{3}{2x} = 0$
$G = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \neq 0\}$

Nenner	EF (Erweiterungsfaktor)
x^2	2
$2x$	x
$HN = 2x^2$	

Vektoren:

Skalarprodukt: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Kreuzprodukt: $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} a_y\cdot a_z - a_z\cdot b_y \\ a_z\cdot b_x - a_x\cdot b_z \\ a_x\cdot b_y - a_y\cdot b_x \end{pmatrix}$

Spatprodukt: $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

Winkel zwischen 2 Vektoren: $\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Lineare Abhängigkeit:
- Komplanar $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0$
- Kollinear $\vec{a}\times\vec{b} = 0$

Ebene:
- Punkt-Richtungsform: $E: \vec{x} = \vec{r_1} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}$
- Drei-Punkte-Form: $E: \vec{x} = \vec{r_1} + \lambda(\vec{r_2}-\vec{r_1}) + \mu(\vec{r_3}-\vec{r_1})$

Gerade:
- Punkt-Richtungsf.: $g: \vec{x} = \vec{r_1} + \lambda\vec{a}$
- Zwei-Punkte-Form: $g: \vec{x} = \vec{r_1} + \lambda(\vec{r_2}-\vec{r_1})$

Abstand:
- Punkt-Gerade: $d = \left|\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\times(\vec{r_Q}-\vec{r_1})\right|$
- Punkt-Ebene: $d = \frac{|\vec{n}\cdot(\vec{r_P}-\vec{r_E})|}{|\vec{n}|}$
- Gerade-Gerade: $d = \frac{|\vec{a_1}\times(\vec{r_2}-\vec{r_1})|}{|\vec{a_1}|}$
- Ebene-Ebene: $d = \frac{|\vec{n_1}\cdot(\vec{r_2}-\vec{r_1})|}{|\vec{n_1}|}$
- Ebene-Gerade: $d = \frac{|\vec{n}\cdot(\vec{r_G}-\vec{r_E})|}{|\vec{n}|}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \vec{a}\times\vec{b}$

Schnittwinkel:
- Gerade-Gerade: $\cos\varphi = \frac{\vec{a_1}\cdot\vec{a_2}}{|\vec{a_1}|\cdot|\vec{a_2}|}$
- Gerade-Ebene: $\sin\varphi = \frac{\vec{n}\cdot\vec{a}}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}$
- Ebene-Ebene: $\cos\varphi = \frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}$

Schnittpunkt/ Schnittgerade
- Gerade-Gerade: $g_1 = g_2$
- Gerade-Ebene: $r_S = \vec{r_1} + \frac{\vec{n}\cdot(\vec{r_1}-\vec{r_0})}{\vec{n}\cdot\vec{a}}\cdot\vec{a}$
- Ebene-Ebene: $\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\cdot\vec{a}$, $\vec{a} = \vec{n_2}\times\vec{n_1}$

$E \parallel g$, wenn $\vec{n}\cdot\vec{a} = \emptyset$ $(\vec{n}\perp\vec{a})$

$g \perp E$, wenn $g \parallel h$, $\vec{n} = h\cdot\vec{a}$, $\vec{a_g}\times\vec{a_h} = \emptyset$

$E_1 \parallel E_2$, wenn $\vec{n_1}\times\vec{n_2}$ (wenn nicht schnitt) $\neq \emptyset$

$E_1 \perp E_2$, wenn $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = \emptyset$

$g \perp h$, wenn $\vec{a_g}\cdot\vec{a_h} = \emptyset$

a = Richtungsvektor

Matrizen

Addition/Subtraktion:

$A\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$

Bsp.: $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$

$A+B = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+2 \\ 3+5 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$

Matrizenmultiplikation:

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 8 \\ -6 & 8 \end{pmatrix}$

Skalarmultiplikation:

Bsp.: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}\cdot 5$

$= \begin{pmatrix} 1\cdot5 & -3\cdot5 & 2\cdot5 \\ 1\cdot5 & 2\cdot5 & 7\cdot5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 10 \\ 5 & 10 & 35 \end{pmatrix}$

Transponierte Matrix:

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$

① $(A+B)^T = A^T + B^T$
② $(\lambda A)^T = \lambda\cdot A^T$
③ $(A\cdot B)^T = B^T\cdot A^T$

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 8 & -2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

- Quadratische Matrix
- Nullmatrix
- Spaltenmatrix
- Zeilenmatrix
- Einheitsmatrix
- Diagonalmatrix
- Dreiecksmatrix (obere und untere)

Determinante

2×2 Matrix

$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$
$= a\cdot d - b\cdot c$

3×3 Matrix (Regel von Sarrus)

$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$

Bsp.: $A = |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$
$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}$

$= 0\cdot2\cdot0 + 3\cdot1\cdot2 + 1\cdot1\cdot1 - 2\cdot2\cdot1 - 1\cdot1\cdot0 - 0\cdot1\cdot3$
$= 6 + 1 - 4 = \underline{\underline{3}}$

Laplacscher Entwicklungssatz

$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$

Bsp.: $\det A = |A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$\longrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ mit Faktor $+0$

$\longrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ mit Faktor -1

$\longrightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$ mit Faktor $+2$

$\Rightarrow +0\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$
$= 0 + 1 + 2 = \underline{\underline{3}}$

Das Inverse einer Matrix A^{-1}

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -8 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$D_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$

$D_{12} = \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$

$D_{13} = \begin{vmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$D_{21} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$

$\vdots$

$A^{-1} = \frac{1}{A} = \begin{pmatrix} +1 & -2 & 0 \\ -1 & \cdots & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$

Lineare Gleichungssysteme

Gaußsches Eliminationsverfahren

Bsp.:
$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1$
$3x_1 + 2x_3 + x_4 = 3$
$4x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 1$
$-2x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 16$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & 6 & -2 & -2 & 16 \end{array}\right)$ $\begin{matrix} \\ -3\cdot1\text{ Zeile} \\ -4\cdot1\text{ Zeile} \\ +2\cdot1\text{ Zeile} \end{matrix}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 6 & -7 & 4 & 0 \\ 0 & 10 & -13 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 18 \end{array}\right)$ $:6$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 10 & -13 & 7 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -4 & 18 \end{array}\right)$ $\begin{matrix} \\ \\ -10\cdot2\text{ Zeile} \\ -2\cdot2\text{ Zeile} \end{matrix}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} & -\frac{16}{3} & 18 \end{array}\right)$ $|:(-\frac{4}{3})$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} & -\frac{16}{3} & 18 \end{array}\right)$ $-\frac{19}{3}\cdot3.Z.$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{6} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{4} & \frac{15}{4} \end{array}\right)$

$\Rightarrow -\frac{15}{4}x_4 = \frac{15}{4} \Rightarrow x_4 = -1$

$x_3 - \frac{1}{4}\cdot(-1) = \frac{9}{4} \Rightarrow x_3 = 2$

$x_2 - \frac{7}{6}x_3 + \frac{2}{3}x_4 = 0$

$\Rightarrow x_2 = 3$

$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 1x_3 = 1$

$\Rightarrow x_1 = 0$

Eigenwerte und Eigenvektoren

$(A - \lambda E)\cdot\vec{x} = \vec{\emptyset}$

λ = Eigenwert

$\det(A - \lambda E) = |A - \lambda E| = \emptyset$

($\hat{=}$ λ berechnen)

Bsp.: Ermitteln Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \overset{D}{\begin{pmatrix} -2-\lambda & -5 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\det(A - \lambda E) = (-2-\lambda)\cdot(4-\lambda) + 5\cdot1 = \emptyset$ (D)

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = \emptyset$ $\lambda_{1/2} =$

Eigenwerte: $\lambda_1 = -1$; $\lambda_2 = 3$

$\begin{pmatrix} -2-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow (A + \lambda_1\cdot E) = (A - 1\cdot E)$

I.) $-x_1 - 5x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + 5x_2 = \emptyset \Rightarrow \vec{x_1} = \begin{pmatrix} -5\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

II.) $x_1 + 5x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \alpha$ (Eigenvektor)

Von welchem Typ sind je die Matrizen A und B?
- A(Spalte, Zeile)
  A(3,3) ; A(4,3)

Bsp.:

$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^{r_1} + \lambda\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}^{a_1} + \mu\begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix}^{b_1}$ $E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}^{r_2} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}^{a_2} + \mu\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}^{b_2}$

III. Analysis einer Veränderlichen

1. Folgen und Reihen

1.1. Grundbegriffe

Glieder der Folge (a_n):

z.B. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$

$a_1 = 1 - \frac{1}{1} = 0$; $a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Partialsummen s_n einer Reihe:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots$

z.B. $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$s_0 = \sum_{k=0}^{0} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$

$s_1 = \sum_{k=0}^{1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}$

1.2. Grenzwerte- und Konvergenzkriterien

Folge (a_n): konvergent / divergent

konvergent: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

divergent: bestimmt divergent, $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$; unbest. divergent

Reihe: konvergent, wenn $a = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a$

bestimmt divergent, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \pm\infty$

Konvergenzkriterien für Reihen:

1. Quotientenkriterium: $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = q \begin{cases} <1 \\ >1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{konv.} \\ \text{diver.} \end{cases}$
2. Wurzelkriterium: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q \begin{cases} <1 \\ >1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{konv.} \\ \text{diverg.} \end{cases}$

2. Stetigkeit von Funktionen

Stetig in a, wenn $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Asymptoten

- Polstelle: senkr. A. bei $x = x_0$
- ZG < NG: waagr. A. bei $y_A = 0$
- ZG = NG: waagr. A. bei $y_A = \frac{a_n}{b_m}$
- ZG um 1 größer als NG: $\Rightarrow$ Polynomdivision, schiefe A. bei $y_A = f_A(x)$
- ZG um min. 2 größer als NG: $\Rightarrow$ Polynomdivision, krummlinige A. bei $y_A = f_A(x)$

3. Differentiation

Ableitungsregeln:

1. Summenregel: $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2. Faktorregel: $(\alpha \cdot u)' = \alpha \cdot u'$
3. Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4. Quotientenregel: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
5. Kettenregel: $u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Ableitung der Umkehrfunktion

$f^{-1\prime}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ wenn $f: D \to E$ eine differenzierbare und bijektive Fkt.

$\Rightarrow$ dann $f^{-1}: E \to D$ differenzierbar.

Ableitungen elementarer Fkt.

$x^n = nx^{n-1}$	$a^x = a^x \cdot \ln a$
$\sin x = \cos x$	$\ln x = \frac{1}{x}$
$\cos x = -\sin x$	$\log_a x = \frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cot x = -\frac{1}{\sin^2 x}$	
$e^x = e^x$	

Extremwerte und Krümmungen

$f''(x) < 0 \Rightarrow G_f$ ist rechtsgekrümmt

$f''(x) > 0 \Rightarrow G_f$ ist linksgekrümmt

Krümmung: $K = \frac{y''(x_0)}{(1 + y'(x_0)^2)^{\frac{3}{2}}}$

Krümmungsradius: $\varphi = \frac{1}{|K|} \Rightarrow K = \frac{1}{R}$

Potenzgesetze

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
3. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
4. $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$
5. $a^0 = 1$

Goniometrische Beziehungen

Doppelter Winkel:

$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \cdot \sin^2 x = 2 \cdot \cos^2 x - 1$

Summen von Differenzen:

$\sin x_1 \pm \sin x_2 = 2 \cdot \sin \frac{x_1 \pm x_2}{2} \cdot \cos \frac{x_1 \pm x_2}{2}$

$\cos x_1 + \cos x_2 = 2 \cdot \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \cos \frac{x_1 - x_2}{2}$

$\cos x_1 - \cos x_2 = -2 \cdot \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \cdot \sin \frac{x_1 - x_2}{2}$

Trigonometrischer Pythagoras

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Vollständige Induktion

Bsp.: $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Induktionsanfang: $n = 0$

linke Seite: $\sum_{k=0}^{0} k^3 = 0$

rechte Seite: $\frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0$

Induktionsschritt: $n \to n+1$

$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}$

$\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3$

$= \underbrace{\frac{n^2(n+1)^2}{4}} + (n+1)^3$

$= \frac{n^2(n+1)^2 + (n+1)^3 \cdot 4}{4}$

$= \frac{(n+1)^2 \cdot \boxed{n^2 + 4 \cdot (n+1)}}{4}$

$= \frac{(n+1)^2 \cdot [n^2 + 4n + 4]}{4}$

$= \frac{(n+1)^2 \cdot (n+2)^2}{4}$

Kurvendiskussion

Gebrochen rationale Fkt.

$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$

1. max. Def.menge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{x \mid N(x) = 0\}$
2. Nst. bestimmen: $Z(x) = 0$ (TR: Wertetabelle (Polynomdivision) + Mitternachtsformel)
3. Def. Lücke = Nst.
4. Polstellen best. = Term kürzen/faktorisieren
   - wenn x_0 Nst. von $N(x)$ $\Rightarrow$ Polstelle
   - wenn nicht, $\Rightarrow$ hebbare Def. lücke
5. Grenzwert bestimmen $\lim_{x\to x_0} f(x)$
6. Asymptoten

$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Bsp. $f(x) = \frac{x^3 - 7x^2 + 15x - 9}{x^2 - 9}$

(a) Def.lücken und max. Def.bereich.

$N(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0$

$x^2 = 9$

$x_{1/2} = \pm 3$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

Def.lücken bei $x_1 = 3$; $x_2 = -3$

(b) Nst. mit Vielfachheit.

$Z(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 7x^2 + 15x - 9$

$x = 1$ (ausprobieren)

$(x^3 - 7x^2 + 15x - 9) : (x - 1) = x^2 - 6x + 9$

$-(x^3 - x^2)$

$-6x^2 + 15x$

$-(-6x^2 + 6x)$

$9x - 9$

$-(9x - 9)$

0

$\Rightarrow f(x) = \frac{(x^2 - 6x + 9) \cdot (x-1)}{x^2 - 9}$

$x_{1/2} = \frac{6 \pm \sqrt{(6)^2 - 4 \cdot 9}}{2} = \frac{6}{2} = 3$

$\Rightarrow f(x) = \frac{(x-1) \cdot (x-3)^2}{(x-3) \cdot (x+3)}$

$\Rightarrow x_1 = 1$ (einf. Nst.) $x_2 = 3$ (zweif. Nst.)

(c) $f^*(x) = \frac{(x-1) \cdot (x-3)}{x+3}$ $\Rightarrow$ Polstelle: $x_{P1} = -3$ (1. Ordnung) VZW

$\Rightarrow$ hebbare Def.lücke: $x_{H1} = 3$ ($\to$ Loch im Graph)

(d) $\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} f^*(x) = \frac{(x-1) \cdot (x-3)}{x+3} = 0$

(e) $Z(x) > N(x) \to$ schiefe Asymptote

5. Integration

Grundintegrale

1. $\int 0 \, dx = 1 + C$
2. $\int 1 \, dx = x + C$
3. $\int x^r \, dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$
4. $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + C$
5. $\int e^x \, dx = e^x$
6. $\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
7. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
8. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
9. $\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + C$

Integration durch Partialbruchzerlegung (PBZ)

1. Für reelle Nst. a der Vielfachheit r von $N(x)$

   Teilansatz: $\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_r}{(x-a)^r}$
2. Für unzerlegbaren quadr. Faktor $q(x)$ von $N(x)$ der Vielfachheit r

   Teilansatz: $\frac{B_1 x + C}{q(x)} + \frac{B_2 x + C}{q(x)^2} + \dots + \frac{B_r x + C}{q(x)^r}$
3. Alle Teilansätze addieren und setze die Summe gleich $\frac{Z(x)}{N(x)}$
4. HN bilden (beim Gesamtansatz) und auf beiden Seiten multiplizieren. Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergl. durchführen.
5. Aus Koeffizientenvgl. ein LGS in den Konstanten A, B; usw. bestimmen und lösen.

Bsp.: $\frac{5x+1}{x^2-1}$ $N(x) = x^2 - 1 = (x-1) \cdot (x+1)$ (bei x^3 Polynomdivision)

$\Rightarrow$ zwei 1-fache reelle Nst.

Teilansatz für $x_1 = 1$: $\frac{A}{x-1}$ Teilansatz für $x_2 = -1$: $\frac{B}{x+1}$

$\Rightarrow$ Gesamtansatz: $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ mit $\frac{Z(x)}{N(x)}$ gleichsetzen:

$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{5x+1}{x^2-1}$

$\frac{A(x+1)}{x^2-1} + \frac{B(x-1)}{x^2-1} = \frac{5x+1}{x^2-1} \quad | \cdot (x^2-1)$

$A(x+1) + B(x-1) = 5x + 1$

$Ax + A + Bx - B = 5x + 1$

$(A + B)x + A - B = 5x + 1$

LGS (aus Koeffizientenvgl.)

I.) $A + B = 5$ I.) + II.) $2A = 6$

II.) $A - B = 1$ $A = 3$

aus I.) $B = 5 - A = 2$ $\Rightarrow \frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+1} = \frac{5x+1}{x^2-1}$

Integration durch Substitution

$\int_a^b f(u(x)) \, u'(x) \, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) \, du$

Bsp.: 1. Subst. $u = \sqrt{x}$

2. $\frac{du}{dx} = u'(x) \quad | \cdot dx$

$du = \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$

$dx = 2\sqrt{x} \, du$

$dx = 2u \, du$

3. $\Rightarrow \int_1^2 \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx = \int_{\sqrt{1}}^{\sqrt{2}} \frac{\cos u}{u} \cdot \frac{2u\,du}{dx}$

$= \int_1^{\sqrt{2}} 2\cos u \, du =$

$= 2 \cdot \int_1^{\sqrt{2}} \cos u \, du = 2 \cdot [\sin u]_1^{\sqrt{2}}$

$= 2 \cdot \sin\sqrt{2} - \sin 1$

Partielle Integration (Produktintegration)

$\int u \cdot v' \, dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx$

Bsp.: $\int \underset{u}{x} \cdot \underset{v'}{e^x} \, dx = \underset{u}{x} \cdot \underset{v}{e^x} - \int \underset{u'}{1} \cdot \underset{v}{e^x} \, dx$

$= x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + C$

$= e^x(x - 1) + C$

Rekursionsformel:

$\int x^n \cdot e^{ax} \, dx = x^n \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{ax} - \int n \cdot x^{n-1} \cdot \frac{1}{a} \cdot e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n \cdot e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cdot e^{ax} \, dx$

Faktorisierung: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$

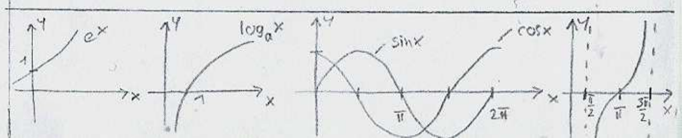
$\int \frac{Z(x)}{N(x)}$ lösen:

1. $\int \frac{A}{x-a} \, dx = A \cdot \int \frac{1}{x-a} \, dx = A \cdot \ln|x-a| + C$
2. $\int \frac{A}{(x-a)^r} \, dx = A \cdot \int (x-a)^{r} \, dx = A \cdot \frac{(x-a)^{-r+1}}{-r+1} + C \quad (r > 0)$
3. $\int \frac{Bx + C}{(x-a)^2 + b^2} \, dx = \int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} \, dx = \int \frac{\frac{B}{2} \cdot 2x + C}{x^2 + px + q} \, dx =$

$= \int \frac{\frac{B}{2} \cdot (2x + p) + C - \frac{B}{2}p}{x^2 + px + q} \, dx = \frac{B}{2} \int \frac{2x + p}{x^2 + px + q} \, dx + \int \frac{C - \frac{B}{2}p}{x^2 + px + q} \, dx =$

$= \frac{B}{2} \ln|x^2 + px + q| + \int \frac{C - \frac{B}{2}p}{(x-a)^2 + b^2} \, dx = \frac{B}{2} \ln|x^2 + px + q| + (C - \frac{B}{2}p)$

$\int \frac{1}{(x-a)^2 + b^2} \, dx = \frac{B}{2} \cdot \ln|x^2 + px + q| + \frac{C - \frac{B}{2}p}{b} \cdot \arctan \frac{x-a}{b} + C$

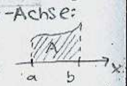


Anwendungen

Flächenberechnung:

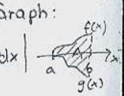
Graph und x-Achse:

$A = \left|\int_a^b f(x) \, dx\right|$



Graph und Graph:

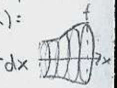
$A = \left|\int_a^b f(x) - g(x) \, dx\right|$



Volumenberechnung:

Rotationskörper: $(f: [a,b] \to \mathbb{R})$:

$V_x = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx$

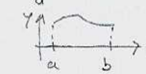


Kurvenlänge:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, Kurve $\Gamma = G_f$

Länge der Kurve Γ:

$l_\Gamma = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} \, dx$



Mittelwerte:

lineares Mittel:

$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) \, dx$

quadratisches Mittel:

$\bar{f}^q = \sqrt{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)^2 \, dx}$

1. Grundlagen

1. Elementare Mengenlehre

1.1. Mengen

Eigenschaften der Teilmengenrelation

1. $M \subseteq N$ (Reflexivität)
2. $M \subseteq N$ und $N \subseteq M \rightarrow M = N$ (Antisymmetrie)
3. $L \subseteq M$ und $M \subseteq N \rightarrow N$ (Transistivität)

Binomialkoeffizient

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$n!$ = Fakultät von n

Bsp.: $M = \{1,2,3\}$ $n = |M| = 3$

$\rightarrow$ 2-elementige Teilmengen von $M = \binom{3}{2}$

$= \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{3}$

Potenzmenge

$P(M) = \{A | A$ ist Teilmenge von $M\} = \{A | A \subseteq M\}$

Bsp.: $M = \{1;2;3\}$

$P(M) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{3\}; \{1,2\}; \{1,3\}; \{2,3\}; \{1,2,3\}$

Mächtigkeit (= Kardinalität) = Anzahl der Elemente der Menge M

Wenn M eine endliche Menge ist $\Rightarrow |P(M)| = 2^n$

① $|M \cup N| = |M| + |N| - |M \cap N|$ ③ $|M \times N| = |M| \cdot |N|$

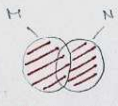
② $|N \setminus M| = |N| - |M|$ ($M \subseteq N$)

1.2. Operationen auf Mengen

① Vereinigungsmenge

$M \cup N = \{x | x \in M \vee x \in N\}$

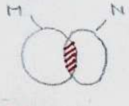
$= \{x | x$ ist in mind. einer der beiden Teilmengen enthalten$\}$



② Schnittmenge

$M \cap N = \{x | x \in M \wedge x \in N\}$

$= \{x | x$ ist in beiden Mengen enthalten$\}$



③ Differenzmenge / Komplementärmenge

$M \setminus N = \{x | x \in M \wedge x \notin N\}$

④ Symmetrische Differenz

$M \Delta N = \{x |$ entweder $x \in M$ oder $x \in N\}$

⑤ kartesische Produktmenge

$M \times N = \{(x,y) | x \in M, y \in M\}$

Siebformel – Das Prinzip der Exklusion und Inklusion

$$|M_1 \cup \ldots \cup M_r| = \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le r} \left| \bigcap_{\gamma=1}^{k} M_{i_\gamma} \right|$$

$$= \sum_{k=1}^{r} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le r} |M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_k}|$$

Bsp.: $r = 4$

$|M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4| = |M_1| + |M_2| + |M_3| + |M_4|$
$- |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - |M_1 \cap M_4| - |M_2 \cap M_3| - |M_2 \cap M_4|$
$- |M_3 \cap M_4| + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + |M_1 \cap M_2 \cap M_4|$
$+ |M_1 \cap M_3 \cap M_4| + |M_2 \cap M_3 \cap M_4|$
$- |M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap M_4|$

1.3. Rechenregeln, Mengenalgebra

① $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$ } Kommutativität

② $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$, $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ } Assoziativität

③ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ } Distributivität

④ $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$ } Absorption

⑤ $A \cap A = A$, $A \cup A = A$ } Idempotenz

⑥ $\bar{\bar{A}} = A$ ($\bar{A} = \Omega \setminus A$)

⑦ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ } Gesetze von de Morgan

⑧ $A \cup \emptyset = \emptyset$, $A \cap \Omega = A$

⑨ $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $A \cup \bar{A} = \Omega$

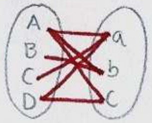
⑩ $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \Omega = \Omega$

- Vereinigung $\cup$
- Schnitt $\cap$
- Differenz $\setminus$
- Komplement $\overline{}$
- Produkt $\times$

1.4. Relationen und Abbildungen/Funktionen

① Relation

$R = \{(A;a), (A;b), (A;c), (B;b), (C;a), (D;a), (D;c)\}$



② Ordnungsrelation $R \le$ auf $\mathbb{R}$

$R \in \{(x;y) | x, y \in \mathbb{R}$ und $x \le y\}$

statt $x R_\le y$ schreibt man $x \le y$

③ Teilmengenrelation $R_\subseteq$ auf $P(M)$ (M Menge)

$R_\subseteq \{(A;B) | A, B \subseteq M, A \subseteq B\}$

statt $A R_\subseteq B$ schreibt man $A \subseteq B$

④ Teilbarkeitsrelation $R_|$ auf $\mathbb{N}$

$R_| = \{(n;m) | n, m \in \mathbb{N}, n | m\}$ "n teilt m"

⑤ Elementrelation $R_\in$ auf $M \times P(M)$

$R_\in = \{(x;A) | x \in M, A \in P(M)$ und $x \in A\}$

statt $x R_\in M$ schreibt man $x \in M$

Zu einer Relation definiert man i.d.R. ein Relationszeichen □ und schreibt $x \,□\, y$ statt $x R y$.

R heißt:
- reflexiv, wenn $x R x$
- symmetrisch, wenn $x R y \Rightarrow y R x$
- antisymmetrisch, wenn $x R y$ und $y R x \Rightarrow x = y$
- transitiv, wenn $x R y$ und $y R z \Rightarrow x R z$

Die Ordnungsrelation $R \le$ auf $\mathbb{R}$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.

Eine Relation $\le$ auf einer Menge M, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, heißt partielle Ordnung auf M, die Menge M heißt dann partiell geordnet.

Sind je zwei Elemente $x, y \in M$ bzgl. $\le$ vergleichbar, so heißt $\le$ totale Ordnung auf M und M heißt total geordnet. (linear, vollständig)

Äquivalenzrelation, wenn R: – reflexiv – symmetrisch – transitiv

statt $x R y$ schreibt man $x \sim_R y$ oder $x \sim y$

Für $x \in M$ heißt: $[x] = \{y | y \in M$ und $y \sim x\}$

Äquivalenzklasse von x; und x heißt Vertreter oder Repräsentant der Äquivalenzklasse $[x]$.

Bsp.: Rotationskörper $g: [0,h] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{r}{h} x$

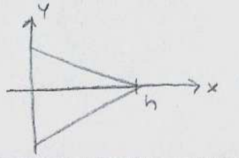
Volumenberechnung:

$V_x = \pi \cdot \int f(x)^2 dx = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} x\right)^2 dx =$

$= \pi \cdot \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2 dx = \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \int_0^h x^2 dx =$

$= \frac{r^2}{h^2} \cdot \pi \cdot \left[\frac{1}{3} x^3\right]_0^h = \frac{r^2}{\cancel{h^2}} \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} \cancel{h^3} - \cancel{\frac{1}{3} 0^3}$

$= r^2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{3} \cdot h = \underline{\underline{\frac{1}{3} \cdot r^2 \cdot h \cdot \pi}}$



$\Rightarrow$ Kreiskegel

Bsp. Unbestimmtes Integral berechnen:

$I = \int \frac{x+1}{x^2 - 4x + 4} dx = \int \frac{x+1}{(x-2)^2} dx$

Teilansatz für $x = 2$: $\frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2}$

Gesamtansatz: $\frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} = \frac{x+1}{(x-2)^2}$

$\frac{A_1 \cdot (x-2)}{(x-2)^2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} = \frac{x+1}{(x-2)^2} \quad | \cdot (x-2)^2$

$A_1 (x-2) + A_2 = x + 1$

$A_1 x - 2A_1 + A_2 = x + 1$

LGS (aus Koeffizientenvgl.):

(I) $A_1 = 1$

(II) $-2A_1 + A_2 = 1 \Rightarrow A_2 = 3$

$I = \int \left(\frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2}\right) dx = \int \frac{1}{x-2} dx + 3 \int \frac{1}{(x-2)^2} dx$

$= \ln|x-2| + 3 \cdot \frac{(x-2)^{-2+1}}{-2+1} + c$

$= \ln|x-2| + 3 \cdot \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + c$

$= \underline{\underline{\ln|x-2| + \frac{3}{x-2} + c}}$

quadratische Ergänzung:

$x^2 + px = x^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$

$= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$

Wurzelgesetze:

① $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$

② $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$

③ $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Grenzwerte:

① $\lim_{x \to \pm\infty} x^r = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } r \text{ gerade} \\ \pm\infty, & \text{falls } r \text{ ungerade} \end{cases}$ $r \in \mathbb{Z}, r > 0$

② $\lim_{x \to +\infty} x^r = +\infty$ für $r \notin \mathbb{Z}, r > 0$

③ $\lim_{x \to \pm\infty} x^r = 0$ ($r \in \mathbb{Z}, r < 0$)

④ $\lim_{x \to +\infty} x^r = 0$ ($r \notin \mathbb{Z}, r < 0$)