

Übungen zur Vorlesung „Mathematik 1“

Angewandte Informatik/Infotronik

Blatt 6

Aufgabe 51. (Zahlenfolgen)

a) Bestimmen Sie die ersten fünf Glieder der Folge (a_n) .

i) $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ ii) $a_n = n^2 + (-1)^n n$ iii) $a_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n}$

iv) $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{2}{a_n} \right)$ mit $a_1 = 1$ v) $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ mit $a_0 = 0, a_1 = 1$.

b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) für $n \rightarrow \infty$:

i) $a_n = \frac{2n-1}{3n+1}$ ii) $a_n = \left(\frac{2n+1}{n} \right)^{10}$ iii) $a_n = (-1)^n \frac{n}{1-n^2}$

iv) $a_n = \frac{-\frac{1}{3}n^3 + 4n^2 - 1}{\frac{2}{9}n^3 - n^2 + 1}$ v) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ vi) a_n wie in iv) von 51 a)

Aufgabe 52. (Reihen)

a) Bestimmen Sie die ersten fünf Partialsummen s_n folgender Reihen.

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$

iv) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ v) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!}$ vi) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{n!}$

b) Zeigen Sie, dass die Reihen aus a) konvergieren.

Aufgabe 53. Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(3x+1)}{4x-8}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \arctan \frac{1}{x}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin x}$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \cdot e^{-x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x}$

g) $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (1 - \sin x) \tan x$ i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$ k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{2e^x - x^2 - 2x - 2}$

Aufgabe 54. (Ableiten) Differenzieren Sie folgende Funktionen.

a) $y = e^{-2x} \cos x$ b) $y = e^x \sin x$ c) $y = (x^2 - 1)^2 (x + 5)^3$

d) $y = (4x - 1)^2 \sin 2x$ e) $y = x \ln(x + e^x)^2$ f) $y = x^x$

g) $y = \ln(\tanh x)$ h) $y = \left(\frac{x+1}{x} \right)^n$ i) $y = \sin(x^2 + 1) \cos(4x)$

k) $y = 2x\sqrt{x^2 - 1}$ l) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 4x + 10)^2}$ m) $y = \ln |\cos x|$

n) $y = \arccos \sqrt{x^2 - 1}$ o) $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \sin x}$ p) $y = \frac{\sqrt{x} - x^2}{x^2 + 1}$

Aufgabe 55. Bestimmen Sie das Krümmungsverhalten folgender Funktionen und berechnen Sie die Krümmung im jeweils angegebenen Punkt.

a) $y = (x - 1)^2 + 2$ $P(1; 2)$ b) $y = 8x^2(x + 1)$ $P(-\frac{1}{2}; 1)$ c) $y = e^{-x^2}$ $P(0; 1)$

Aufgabe 56. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich, Nullstellen, Polstellen, hebbare Definitionslücken und Asymptoten folgender gebrochenrationaler Funktionen.

a) $y = \frac{x^2 - 1}{(x - 1)^3}$ b) $y = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4}$ c) $y = \frac{2x^3 - 2x}{x^3 + x^2 - x - 1}$

Aufgabe 57. Führen Sie zu folgenden Funktionen jeweils eine Kurvendiskussion durch. (max. Def.bereich, Nullstellen, Pole, Symmetrie, lokale Extrema, Wendepunkte, Graph)

a) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$ b) $g(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 3}$ c) $h(x) = \frac{1}{2}x + \sqrt{9 - x^2}$
d) $k(x) = (1 - e^{-2x})^2$ e) $m(x) = \arctan(\frac{x}{1 + x^2})$ f) $n(x) = x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2$
g) $p(x) = 1 - \cosh(x^2 - 1)$ h) $q(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ i) $r(x) = (1 - \cos x)^2$

Aufgabe 58.

- Bestimmen Sie die Abmessungen ℓ (Länge) und b (Breite) des flächengrößten Rechtecks, das zwischen $y(x) = 12 - x^2$ und der x -Achse eingeschrieben werden kann.
- Ein Zaun der Länge U_0 soll eine möglichst große Rechteckfläche eingrenzen. Berechnen Sie diese und das zugehörige Seitenverhältnis, wenn
 - keine weiteren Bedingungen gestellt sind,
 - eine Seite an eine Mauer grenzt, sodass dort kein Zaun nötig ist,
 - zwei benachbarte Seiten an eine Mauer grenzen, sodass dort kein Zaun nötig ist.
- Berechnen Sie das Längenverhältnis h/r eines geraden Kreiszylinders mit vorgegeben Volumen V_0 und minimaler Oberfläche A_0 .

Aufgabe 59. Berechnen Sie das Integral

- $I_1 = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ unter Anwendung der Substitution $u = \sqrt{e^x - 1}$,
- $I_2 = \int_1^2 \frac{2x^2 + 3x - 2}{-x^3 + x^2} dx$ unter Anwendung einer Partialbruchzerlegung,
- $I_3 = \int x e^{-x} dx$ unter Anwendung einer partiellen Integration.

Aufgabe 60.

- Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die von den Funktionen $f(x) = x^2 - 4$, $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$ und der positiven y -Achse begrenzt wird.
- Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve $\Gamma = G_f$ mit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \cosh x$.
- Berechnen Sie das
 - lineare Mittel
 - quadratische Mittel
der Funktion $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x} + 1$.
- Der Graph der Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -4x(x - 1)$ erzeugt durch Rotation um die x -Achse die Mantelfläche eines Rotationskörpers. Bestimmen Sie sein Volumen V .