HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences



Grundlagen der ET (11)

Gerald Kupris

19.12.2012

Weitere Analyse nach der Vereinfachung

Nach der Vereinfachung der Schaltung kann die weitere Analyse mittels verschiedener Hilfsmittel erfolgen:

- Knoten- und Maschenanalyse mit dem Verfahren des vollständigen Baumes
- Überlagerungsverfahren
- Einsatz von Ersatz-Quellen
- Maschenstromanalyse
- Knotenpotentialanalyse

Vollständige Knoten- und Maschenanalyse

1. Anwenden der Regeln der Netzwerkumformung, insbesondere Zusammenfassung von Schaltungsteilen, deren elektrische Größen nicht gesucht sind.

2. Es sind Zählpfeile für alle beteiligten Ströme und Spannungen festzulegen.

3. Aufstellen von **k-1** voneinander unabhängigen Knotengleichungen. Ströme mit zu dem Knoten weisenden Zählpfeil sind positiv zu werten.

4. Zeichnen des Graphen des Netzwerkes und Auswahl eines **vollständigen Baumes**.

5. Aufstellen von **m = z - k + 1** voneinander unabhängigen Maschengleichungen. Der Umlaufsinn ist für jede Masche beliebig wählbar.

6. Lösung des linearen Gleichungssystems für die **z** unbekannten Zweigströme.

7. Gegebenenfalls Rückgängigmachen der durchgeführten Netzwerkumformungen.

Anzahl der Knoten- und Maschengleichungen

Bei **k** Knotenpunkten in einem Netzwerk lassen sich **k** Stromgleichungen aufstellen. Die k-te Gleichung ergibt sich aber stets auch, wenn die übrigen Stromgleichungen addiert oder subtrahiert werden. Sie ist daher nicht unabhängig und somit für die Lösung nicht brauchbar.

Allgemein liefern **k** Knotenpunkte nur **k-1** voneinander unabhängige Knotengleichungen für die **z** Zweigströme. Die übrigen **z - (k - 1) = z - k + 1** Gleichungen müssen in Form von Maschengleichungen aufgestellt werden.

Während es gleichgültig ist, welchen der **k** Knoten man bei der Aufstellung der Knoten-gleichungen auslässt, ist es ratsam bei der Auswahl der Maschen einer bestimmten Strategie zu folgen. Daraus ergibt sich folgender Zusammenhang:

z	Gesamtzahl der Zweige und damit Gesamtzahl der Gleichungen
k - 1	Anzahl der Knotengleichungen
z - k + 1	Anzahl der Maschengleichungen

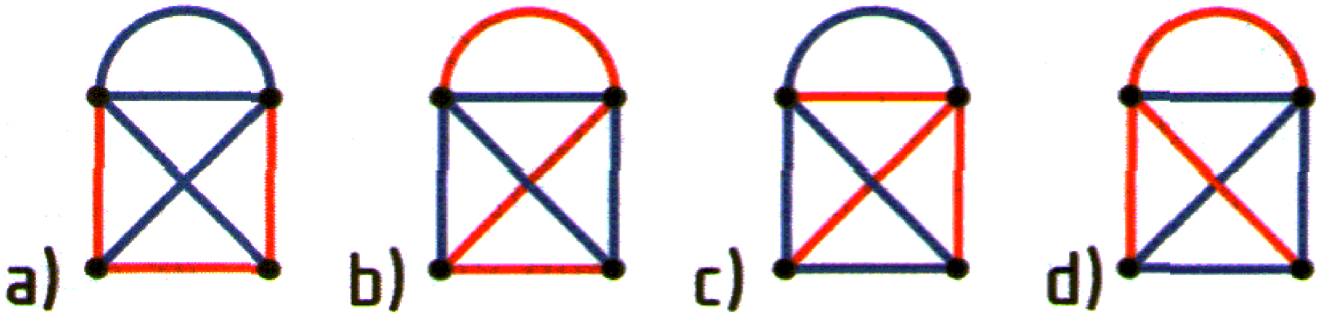
Verfahren des vollständigen Baumes

Um sicherzustellen, dass die ausgewählten Maschen Gleichungen liefern, die voneinander unabhängig sind, bedient man sich folgenden Verfahrens: man wählt aus den Zweigen des Netzwerkes einige aus, die gemeinsam die Verbindung zwischen allen Knoten des Netzwerkes herstellen, wobei darauf zu achten ist, dass die ausgewählten Zweige an keiner Stelle eine in sich geschlossene Schleife bilden, ansonsten ist die Auswahl der Zweige beliebig.

Ein solches Gebilde bezeichnet man als **vollständigen Baum**. Ein Linienkomplex, der keine Schleife bildet, nennt man einen Baum. Der Baum heißt vollständig, wenn er alle Knoten miteinander verbindet. Die Zweige des vollständigen Baumes nennt man auch Baumzweige.

Für ein umfangreiches Netzwerk gibt es sehr viele Möglichkeiten, einen vollständigen Baum auszuwählen. Bei einem vollständig besetzten Netzwerk (d. h. jeder Knoten ist mit jedem anderen Knoten mit genau einem Zweig verbunden) mit **k** Knoten gibt es genau $\mathbf{k^{k-2}}$ vollständige Bäume.

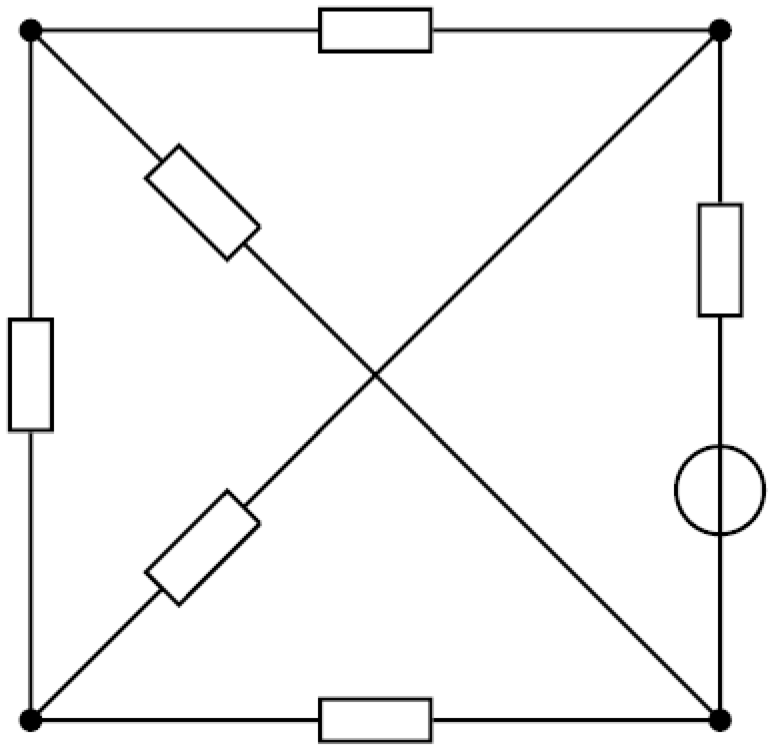
Baum eines Graphen



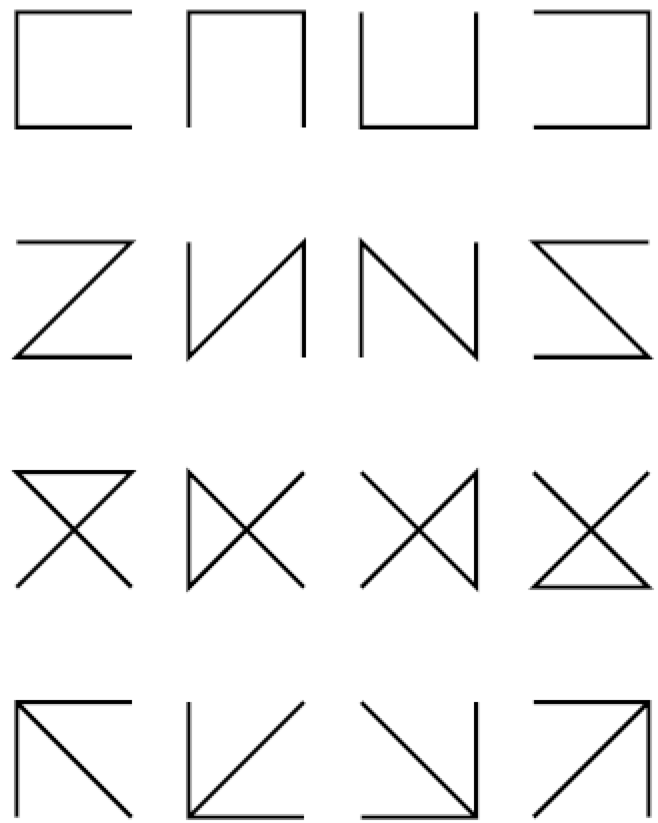
Ein vollständiger Baum eines Graphen ist eine zusammenhängende Verbindung aller Knoten des Graphen, die keine Masche enthält.In komplexen Graphen existieren meist mehrere verschiedene vollständige Bäume.

Um **k** Knoten maschenfrei miteinander zu verbinden, werden **k-1** Zweige benötigt. Daher enthält jeder vollständige Baum genau **k-1** Zweige. Die Zweige, die zu dem ausgewählten vollständigen Baum gehören, heißen Baumzweige (rot), die anderen Verbindungszweige (blau). Ein Graph mit **z** Zweigen und **k** Knoten enthält **z - (k-1) = z - k + 1** Verbindungszweige. Durch einen vollständigen Baum und einen Verbindungszweig wird genau eine Masche definiert. Daher enthält jeder Baum **z - k + 1** Maschen.

Beispiel eines Netzwerk mit allen vollständigen Bäumen



$k = 4 \;,\quad z = 6 \;,\quad k^{k-2} = 16$



Festlegung der Maschengleichungen

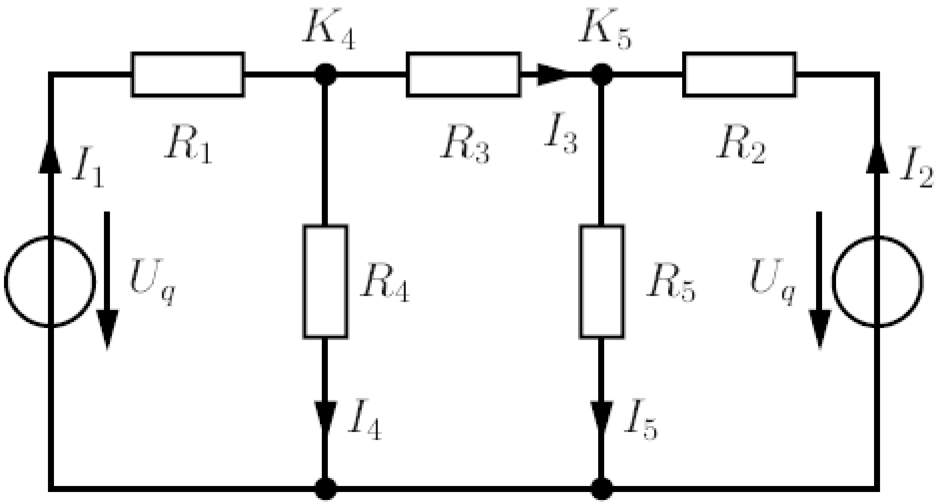
Allen vollständigen Bäumen ist gemeinsam, dass sie bei **k** miteinander zu verbindenden Knoten aus genau **k-1** Zweigen bestehen. Es bleiben daher stets **z - (k - 1) = z - k + 1** Zweige übrig, die nicht Bestandteil des vollständigen Baumes sind. Ihre Anzahl entspricht exakt der Anzahl der noch benötigten Maschengleichungen.

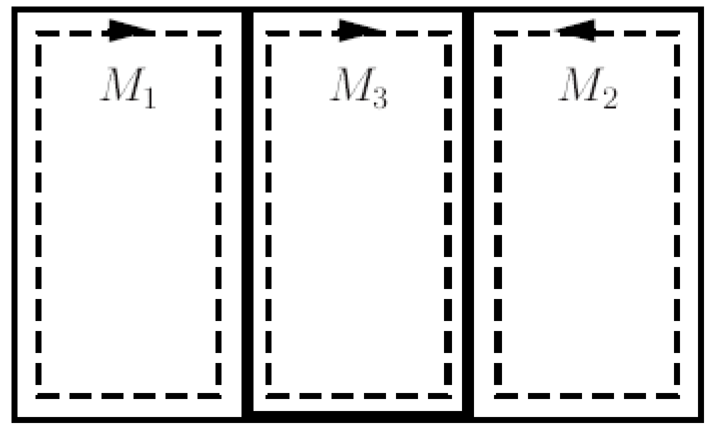
Die Festlegung der **z - k +1** Maschen muss so vorgenommen werden, dass jede Masche genau einen der **z - k +1** Verbindungszweige enthält. Sie muss also ansonsten über den vollständigen Baum geschlossen werden. Auf diese Weise entstehen **z - k + 1** unterschiedliche Maschen, in denen jeweils ein Zweig auftritt, der in den anderen Gleichungen nicht vorkommt.

Bei festgelegtem vollständigen Baum steht damit automatisch für jede Masche und damit für jeden Verbindungszweig der Weg über den vollständigen Baum fest.

Maschen, die mit Hilfe des Verfahrens des vollständigen Baumes festgelegt worden sind, liefern mit Sicherheit Maschengleichungen, die voneinander unabhängig sind. Bei kleineren Netzwerken kann man aber häufig auf dieses Verfahren verzichten.

Beispiel eines Netzwerkes (1)





Vollständiger Baum

Verbindungszweige

Maschen

$k = 3\,, \quad z = 5$

$k - 1 = 2\,, \quad z - k + 1 = 3$

$K_4 : I_1 = I_3 + I_4$

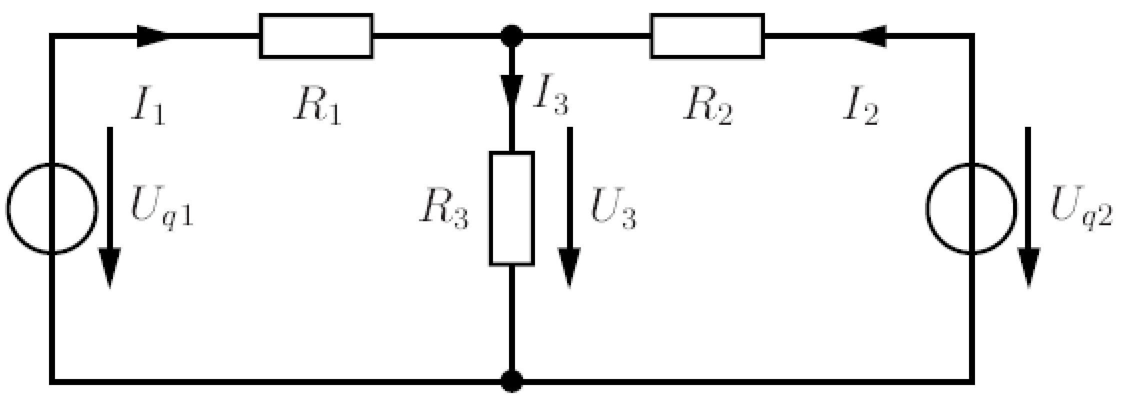
$K_5 : I_2 = I_5 - I_3$

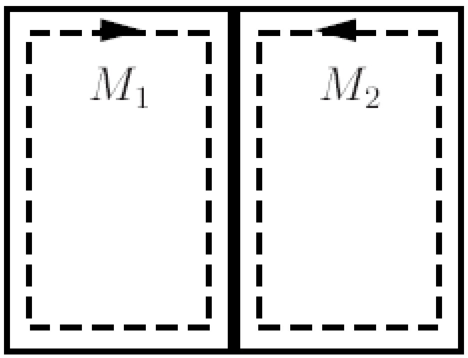
$M_1 : I_1 R_1 + I_4 R_4 - U_q = 0$

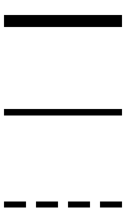
$M_2 : I_2 R_2 + I_5 R_5 - U_q = 0$

$M_3 : I_3 R_3 + I_5 R_5 - I_4 R_4 = 0$

Beispiel eines Netzwerkes (2)







$k = 2\,, \quad z = 3$

$k - 1 = 1$

$z - k + 1 = 2$

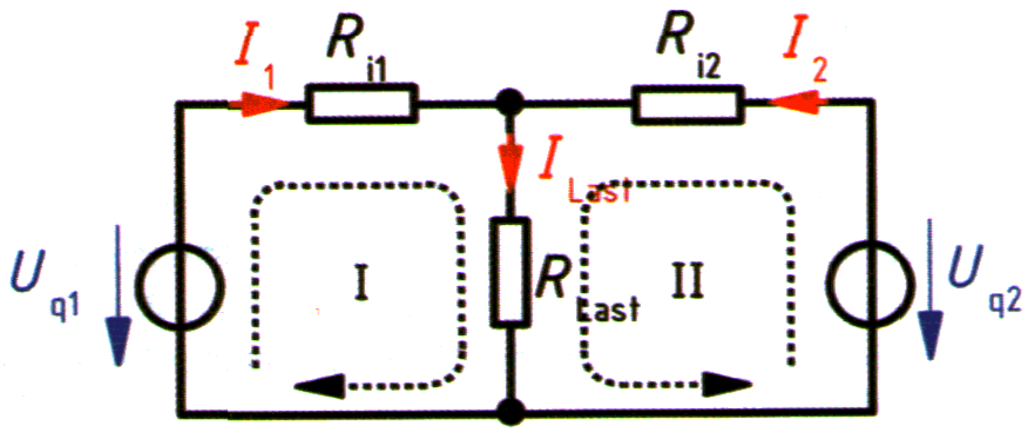
$$I_3 = I_1 + I_2$$

$$M1 : R_1 I_1 + R_3 I_3 - U_{q1} = 0$$

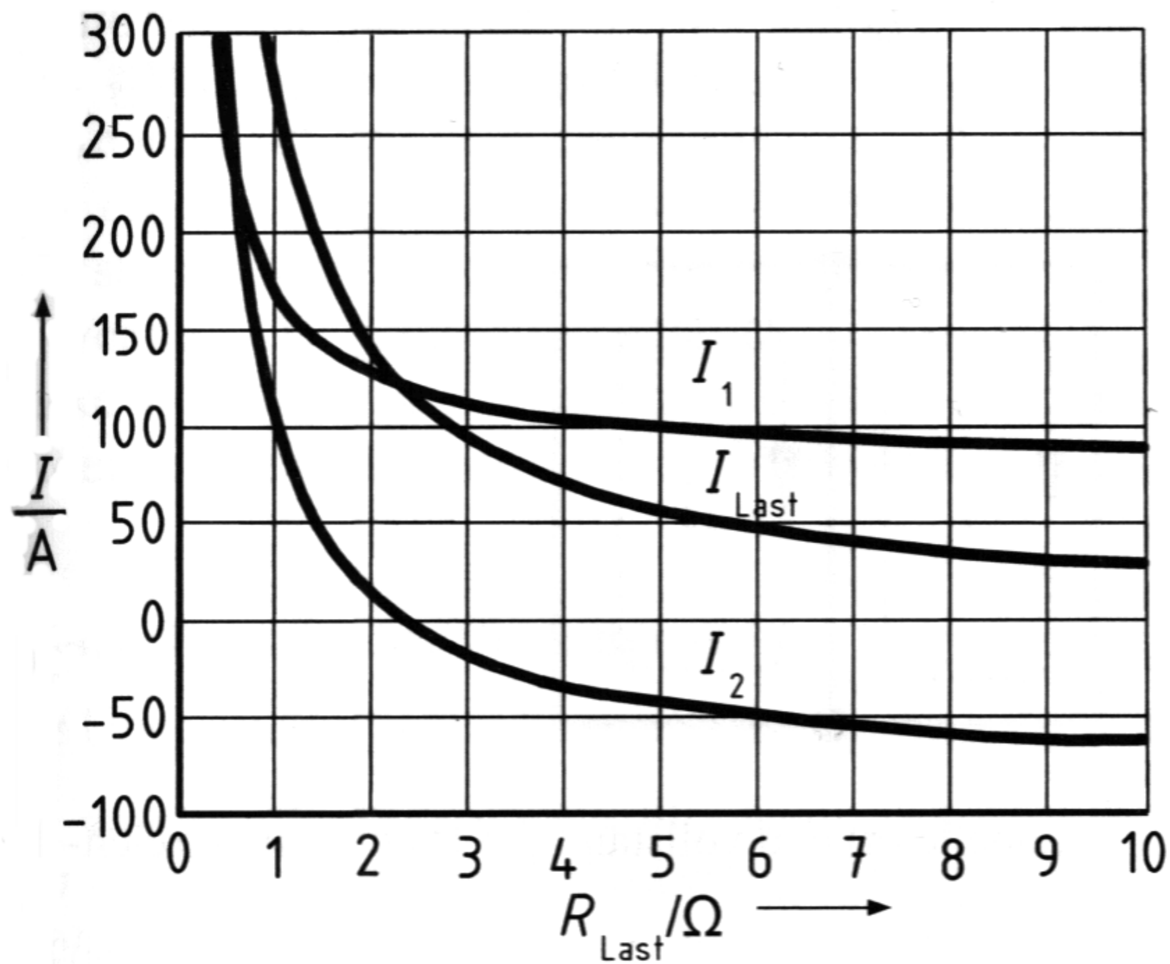
$$M2 : R_2 I_2 + R_3 I_3 - U_{q2} = 0$$

Beispiel: Berechnung des Laststroms

Ein Generator mit der Quellspannung $\mathbf{U_{q1} = 300\ V}$ und dem Innenwiderstand $\mathbf{R_{i1} = 0{,}25\ \Omega}$ sowie ein Akkumulator mit der Quellspannung $\mathbf{U_{q2} = 270\ V}$ und dem Innenwiderstand $\mathbf{R_{i2} = 0{,}12\ \Omega}$ sind parallel auf einen Verbraucher $\mathbf{R_{Last}}$ geschaltet.
Wie teilt sich der Laststrom $\mathbf{I_{Last}}$ auf die beiden Quellen auf, wenn der Verbraucher-widerstand im Bereich $\mathbf{0 < R_{Last} < 10\ \Omega}$ verändert wird?
Gesucht ist der Strom $\mathbf{I_2}$ durch den Akkumulator, wenn der Lastwiderstand den Wert $\mathbf{R_{Last} = 6\ \Omega}$ hat.



Teilströme I_1 und I_2 sowie Verbraucherstrom I_{Last}



Modifiziertes Verfahren zur Behandlung von Stromquellen

Die Berechnung des Netzwerkes kann an einigen Stellen durch eine Sonderbehandlung von Stromquellen vereinfacht werden.

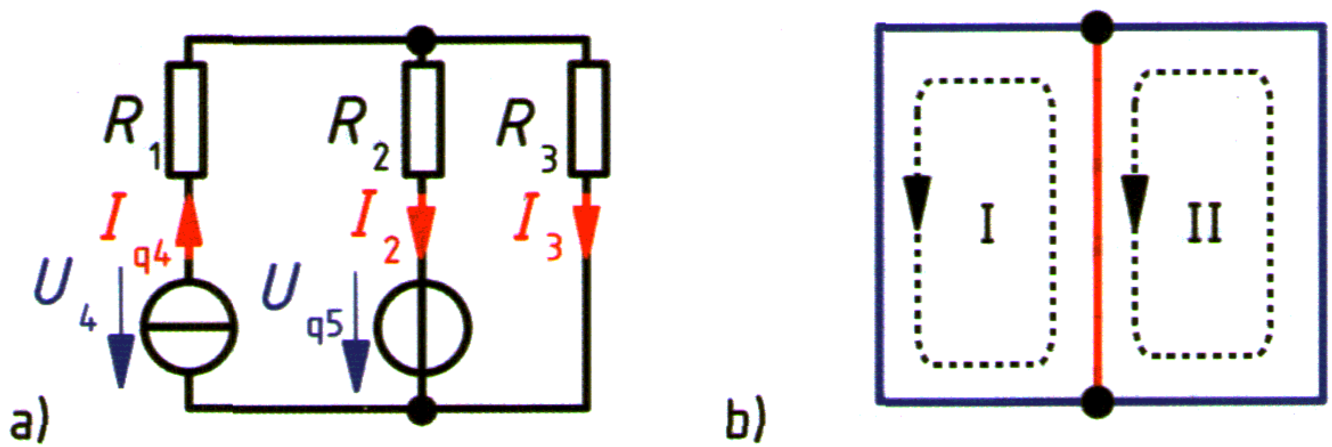
1. Alle Parallelschaltungen aus einer idealen Stromquelle und einem linearen Widerstand werden als lineare Stromquellen aufgefasst und in lineare Spannungsquellen umgewandelt. Hierdurch verringert sich die Zahl der Zweige im Netzwerk und damit die Anzahl der Gleichungen im Gleichungssystem.

2. Der vollständige Baum wird so gewählt, dass Zweige mit idealen Stromquellen in Verbindungszweigen liegen. Dadurch wird erreicht, dass die unbekannten Spannungen über diesen Stromquellen jeweils nur in einer Maschengleichung auftreten.

3. Die Spannungsabfälle über ideale Stromquellen werden mittels je einer Gleichung einzeln berechnet. Anschließend wird für lineare Stromquellen, die in lineare Spannungsquellen umgewandelt wurden, der Strom durch den Parallelwiderstand der Stromquelle und daraus die Spannung über der Stromquelle berechnet.

Beispiel: Gleichstromnetzwerk mit Stromquelle

Für die Schaltung sind die unbekannten Zweigströme sowie die Spannung $\mathbf{U_4}$ über der Stromquelle zu berechnen. Bekannt sind die Werte der Widerstände $\mathbf{R_1}$, $\mathbf{R_2}$, $\mathbf{R_3}$ sowie die Quellenparameter $\mathbf{I_{q4}}$ und $\mathbf{U_{q5}}$.



Weitere Analyse nach der Vereinfachung

Nach der Vereinfachung der Schaltung kann die weitere Analyse mittels verschiedener Hilfsmittel erfolgen:

- Knoten- und Maschenanalyse mit dem Verfahren des vollständigen Baumes
- Überlagerungsverfahren
- Einsatz von Ersatz-Quellen
- Maschenstromanalyse
- Knotenpotentialanalyse

Überlagerungsverfahren

Zur Berechnung von Netzwerken mit mehreren Strom- und Spannungsquellen kann das **Superpositionsprinzip von Helmholtz** verwendet werden.

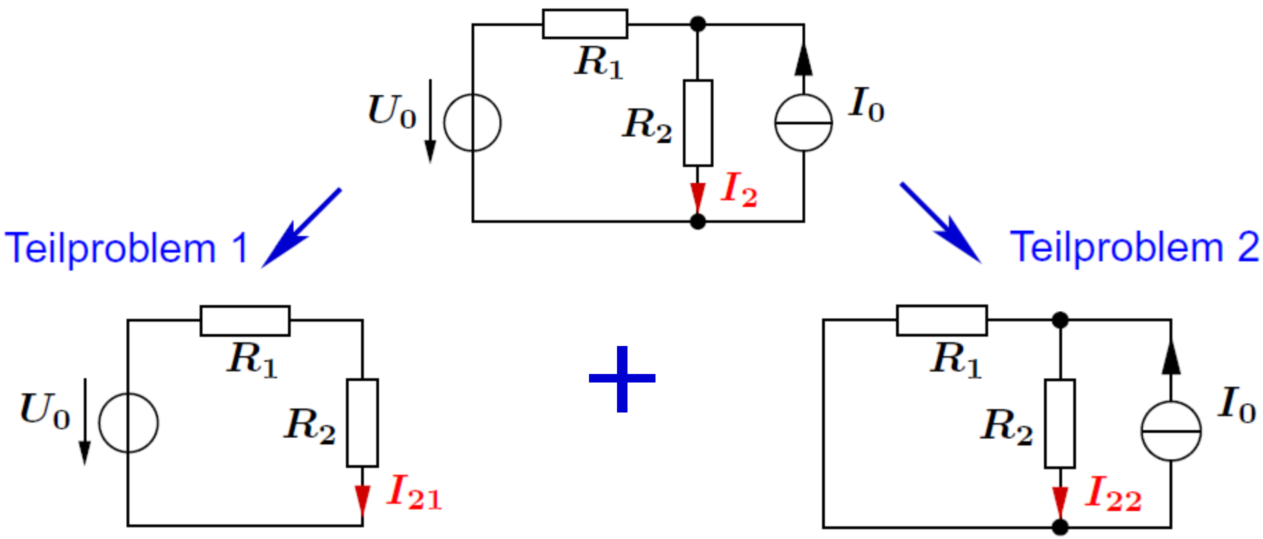
Voraussetzung

- lineare Netzwerkelemente (UI-Kennlinie ist eine Gerade)
- Quellen müssen unabhängig voneinander sein

Vorgehensweise

- es wird nur jeweils eine wirksame Quelle betrachtet. Alle unwirksamen idealen Stromquellen werden unterbrochen und alle unwirksamen idealen Spannungsquellen werden kurzgeschlossen.
- Wiederholung der Berechnung für jede vorhandene Quelle und Superposition.

Überlagerungsverfahren

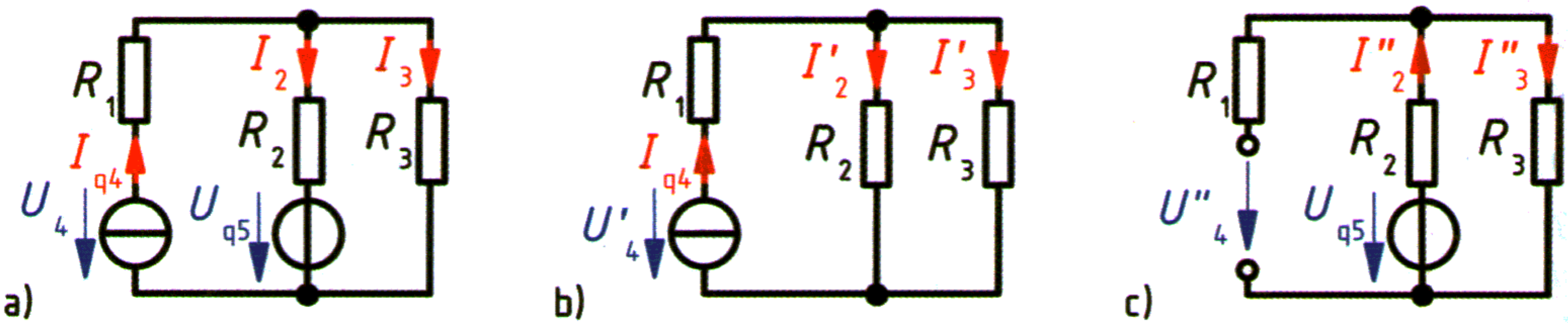


$$I_{21} = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

$$I_{22} = I_0 \frac{G_2}{G_1 + G_2}$$

$\rightarrow$ Superposition: $I_2 = I_{21} + I_{22}$

Anwendung des Überlagerungssatzes



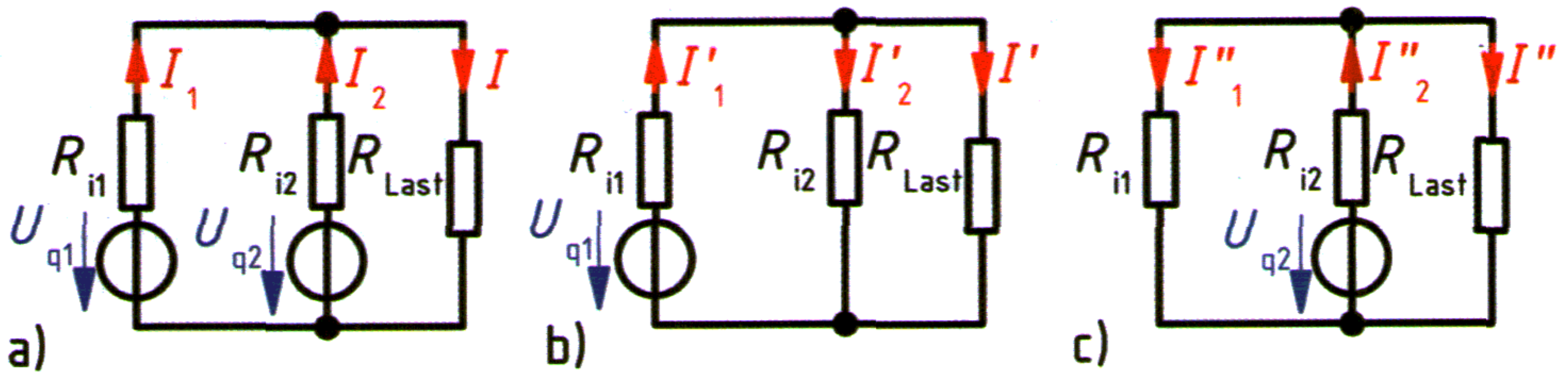
Lineares Gleichstrom-netzwerk mit zwei Quellen

Teilnetzwerk mit deaktivierter Spannungsquelle

Teilnetzwerk mit deaktivierter Stromquelle

Beispiel: Berechnung des Laststroms mit Überlagerungsverfahren

Ein Generator mit der Quellspannung $\mathbf{U_{q1} = 300\ V}$ und dem Innenwiderstand $\mathbf{R_{i1} = 0{,}25\ \Omega}$ sowie ein Akkumulator mit der Quellspannung $\mathbf{U_{q2} = 270\ V}$ und dem Innenwiderstand $\mathbf{R_{i2} = 0{,}12\ \Omega}$ sind parallel auf einen Verbraucher $\mathbf{R_{Last}}$ geschaltet. Gesucht ist der Strom $\mathbf{I_2}$ durch den Akkumulator, wenn der Lastwiderstand den Wert $\mathbf{R_{Last} = 6\ \Omega}$ hat.

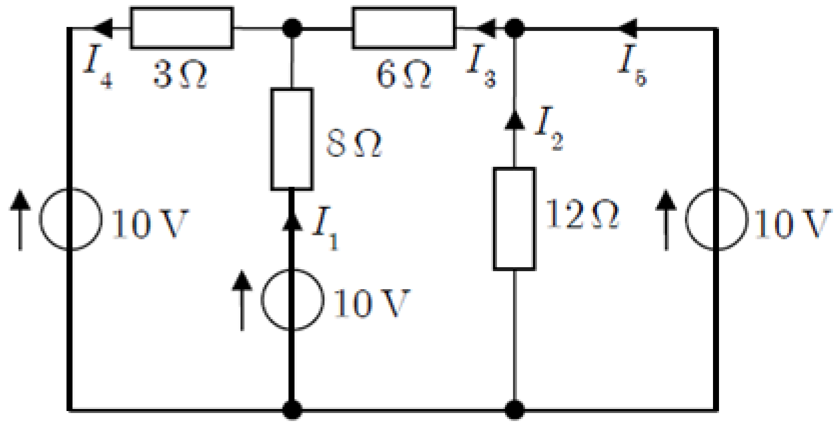


Schaltung mit zwei Spannungquellen

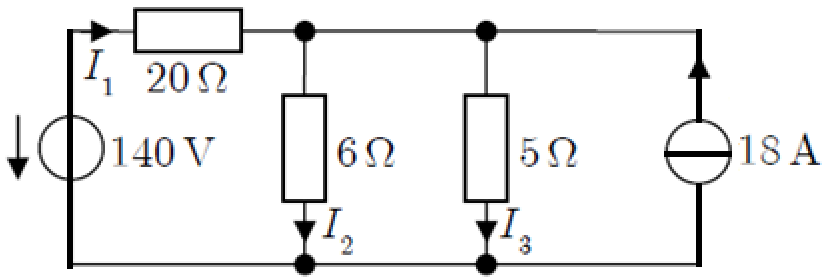
jeweils nur eine wirksame Spannungsquelle

Aufgaben

1. Für das untenstehend dargestellte Netzwerk sind die eingetragenen Zweigströme zu berechnen. Es ist dazu die Stromteilerregel in Verbindung mit dem Überlagerungssatz anzuwenden.

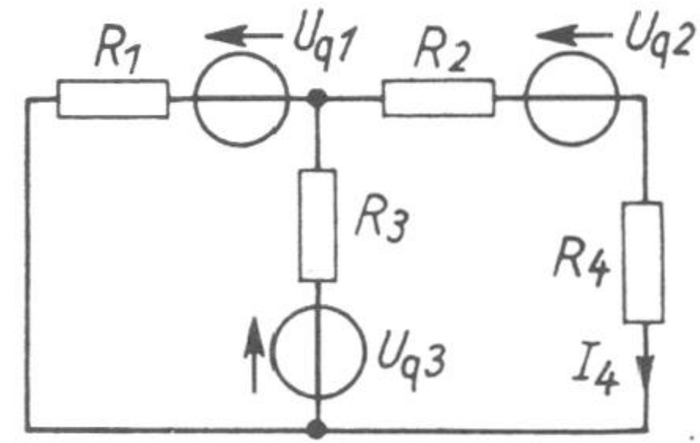


2. Die Ströme I_1, I_2, und I_3 sind mit Hilfe des Überlagerungsverfahrens und dann mit Hilfe der Kirchhoffschen Sätze zu berechnen!

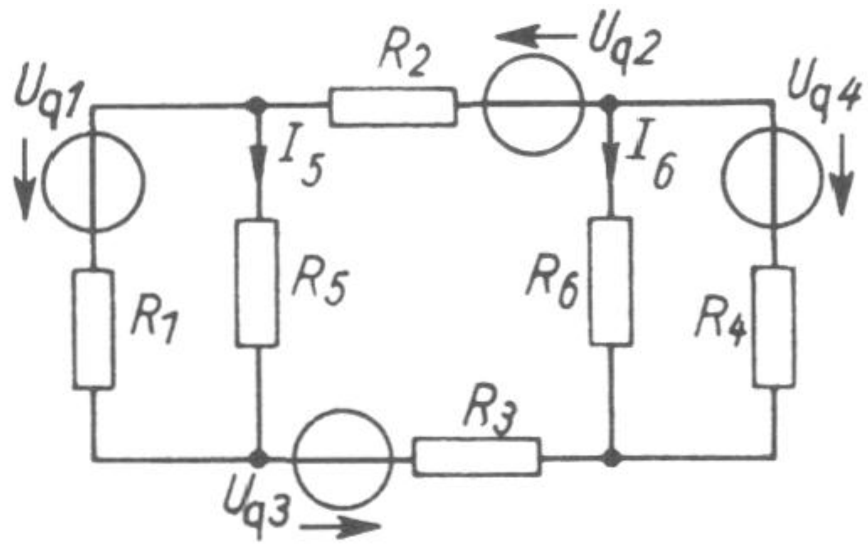


Aufgaben Überlagerungssatz

3. Gegeben sind:
   U_{q1} = 4,5 V; U_{q2} = 6 V; U_{q3} = 7,5 V;
   R_1 = 3 Ω; R_2 = 5 Ω; R_3 = 4 Ω; R_4 = 1 Ω;
   Gesucht ist I_4.

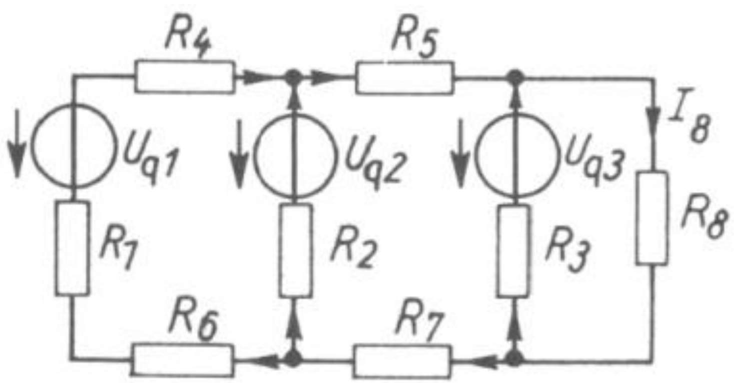


4. Gegeben sind:
   U_{q1} = 6 V; U_{q2} = 6 V; U_{q3} = 6 V; U_{q4} = 6 V;
   R_1 = 2 Ω; R_2 = 2 Ω; R_3 = 2 Ω; R_4 = 2 Ω;
   R_5 = 10 Ω; R_6 = 10 Ω;
   Gesucht sind I_5 und I_6.

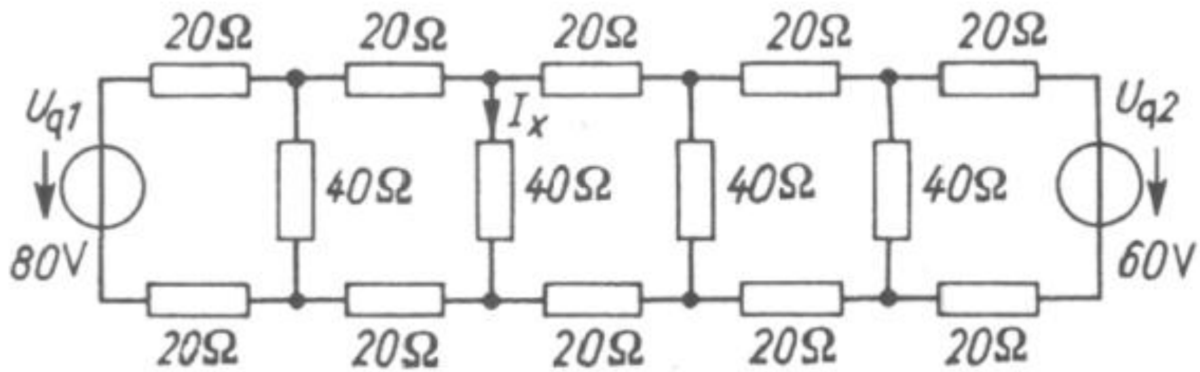


Aufgaben Überlagerungssatz

Gegeben:
$U_{q1} = U_{q2} = U_{q3} = 1{,}5\ V$;
R_1 bis $R_3 = 1{,}5\ \Omega$;
R_4 bis $R_7 = 0{,}5\ \Omega$; $R_8 = 4\ \Omega$;
Gesucht: alle Zweigströme

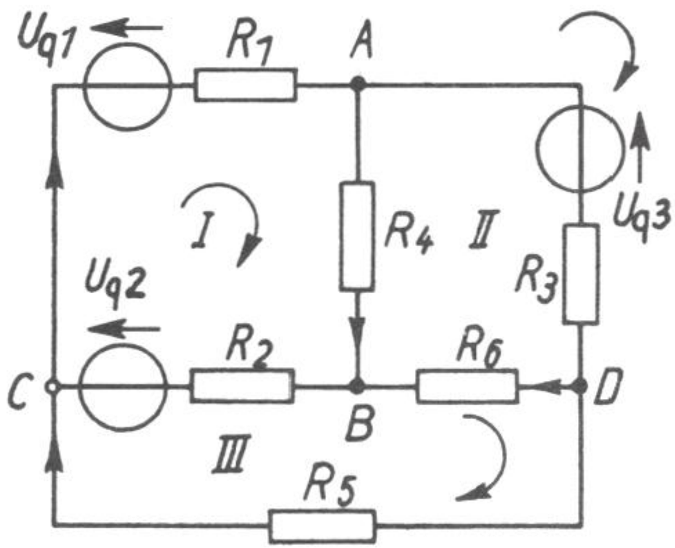


Gesucht: I_x

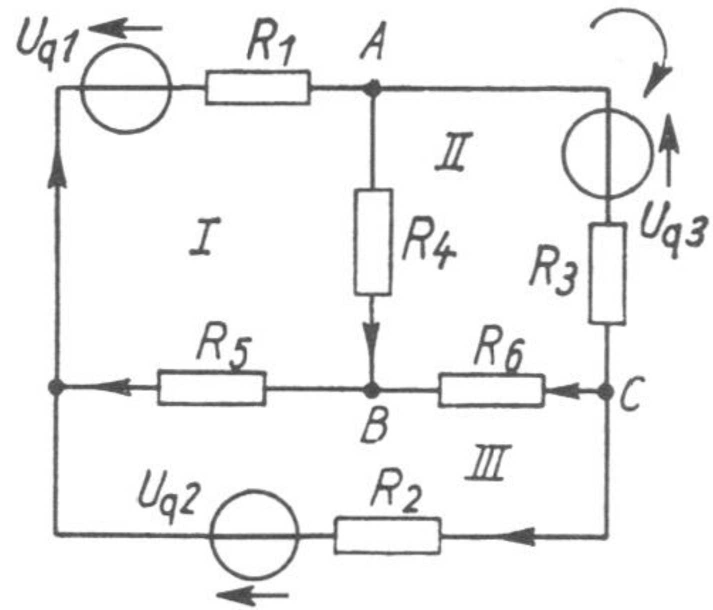


Aufgaben

Gegeben:
U_{q1} = 10 V; U_{q2} = 15 V; U_{q3} = 20 V;
R_1 bis R_6 = 10 Ω
Gesucht: I_1 bis I_6

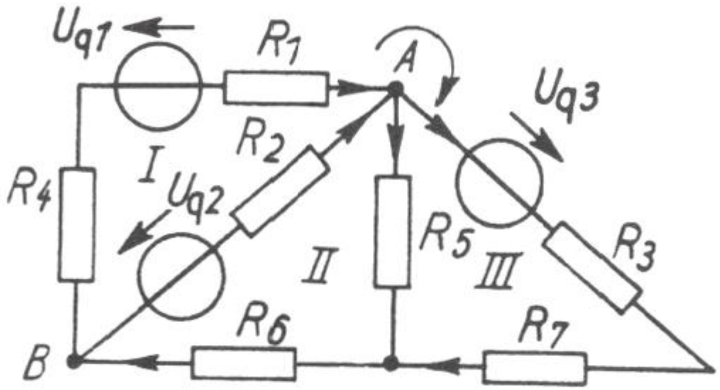


Gegeben:
U_{q1} = 18 V; U_{q2} = 16 V; U_{q3} = 14 V;
R_1 bis R_6 = 5 Ω
Gesucht: alle Zweigströme

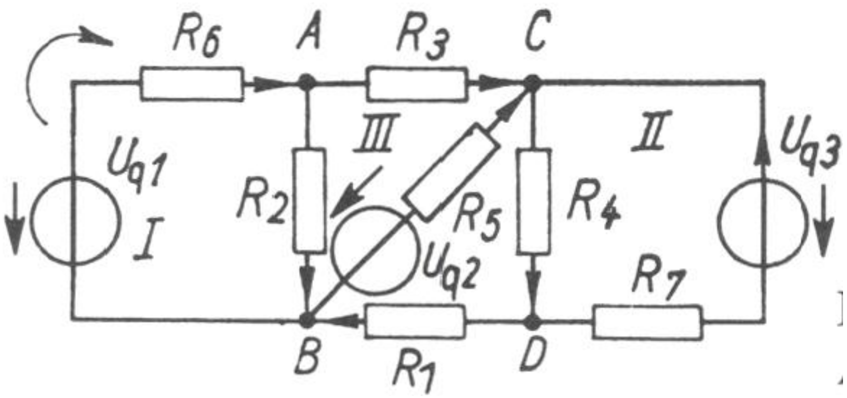


Aufgaben

Gegeben:
$U_{q1} = U_{q2} = U_{q3} = 210$ V;
R_1 bis $R_7 = 5\ \Omega$
Gesucht: alle Zweigströme

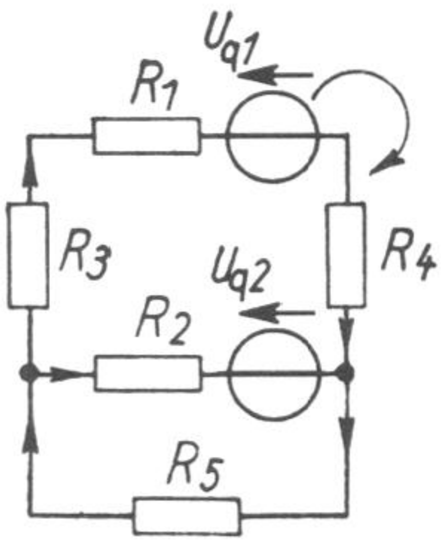


Gegeben:
$U_{q1} = U_{q2} = U_{q3} = 100$ V;
R_1 bis $R_7 = 10\ \Omega$
Gesucht: alle Zweigströme

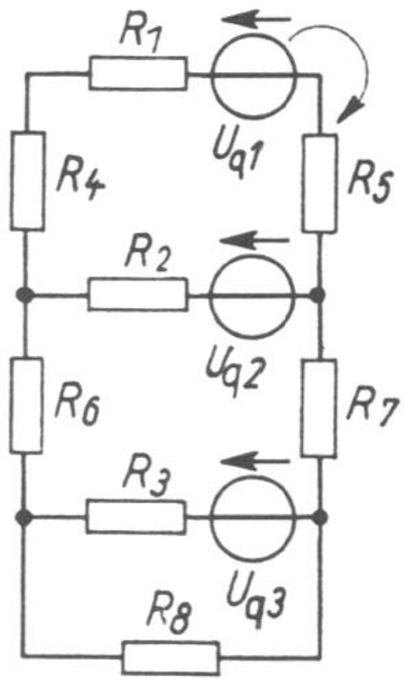


Aufgaben

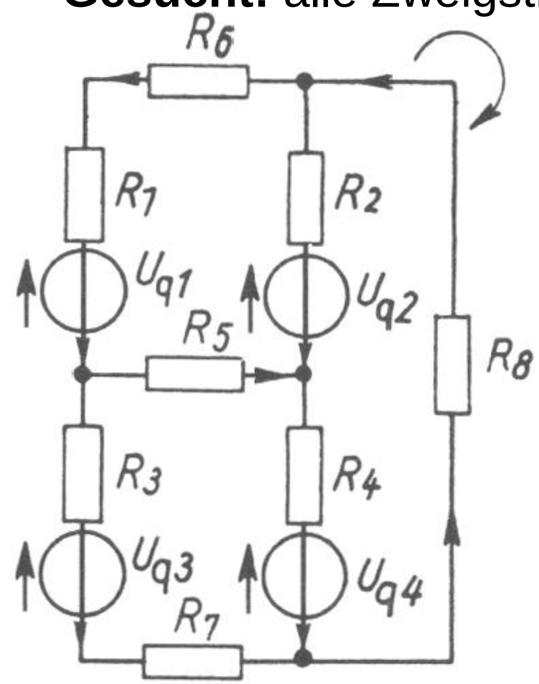
Gegeben:
$U_{q1} = U_{q2} = 60V$;
$R_1 = R_2 = 3\ \Omega$; $R_3 = R_4 = 5\ \Omega$;
$R_5 = 10\ \Omega$
Gesucht: alle Zweigströme



Gegeben:
$U_{q1} = U_{q2} = U_{q3} = 50\ V$;
R_1 bis $R_7 = 5\ \Omega$
Gesucht: alle Zweigströme



Gegeben:
$U_{q1} = U_{q2} = U_{q3} = U_{q4} = 1{,}5\ V$;
R_1 bis $R_4 = 0{,}5\ \Omega$;
$R_5 = R_8 = 10\ \Omega$; $R_6 = R_7 = 1\ \Omega$;
Gesucht: alle Zweigströme



Literatur

M. Filtz, TU Berlin: Vorlesung Grundlagen der Elektrotechnik, WS2006/07

Moeller: Grundlagen der Elektrotechnik, Vieweg + Teubner Verlag

Helmut Lindner: Elektro - Aufgaben Band 1: Gleichstrom, Hanser Fachbuchverlag

Paul A. Tipler, Gene Mosca: Physik für Wissenschaftler und Ingenieure, Spektrum Akademischer Verlag, August 2009

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf