HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences



Mathematik 1 Infotronik (7)

Gerald Kupris

07.11.2012

Vorlesungsinhalte Komplexe Zahlen

Wiederholung: Anatomie der komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl ***z*** kann in der folgenden Form dargestellt werden:

$$z = a + b \cdot i$$

a und ***b*** sind **reelle** Zahlen. Die Menge der komplexen Zahlen wird mit ***C*** bezeichnet und kann folgendermaßen dargestellt werden:

$$C = \{a + b \cdot i \mid a, b \in R\} \qquad \mathbb{C}$$

a ist der **Realteil** der komplexen Zahl: $a = \mathrm{Re}(a + bi) \quad a = \Re(a + bi)$

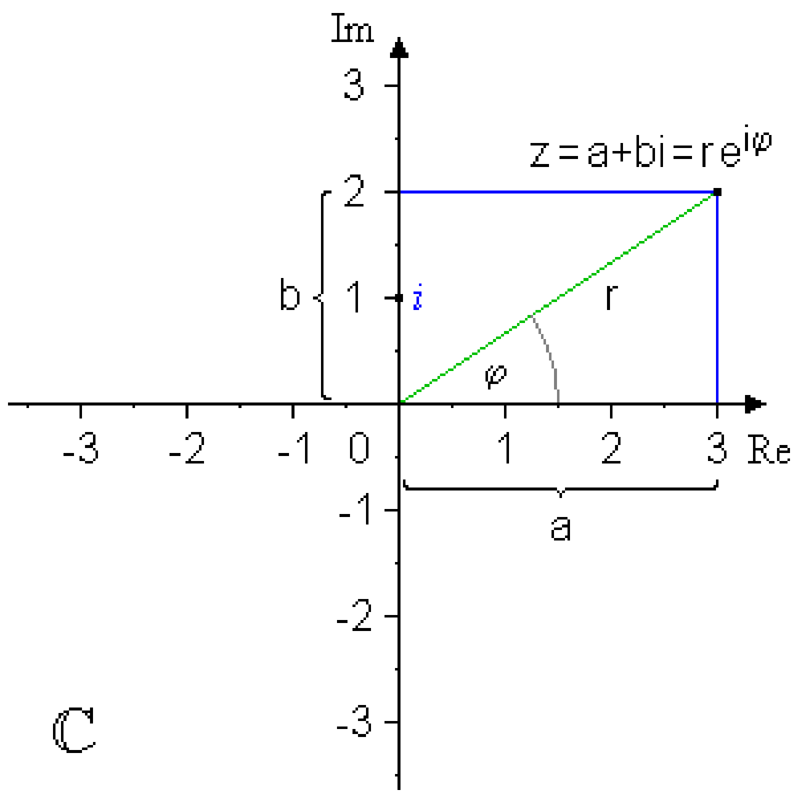
b ist der **Imaginärteil** der komplexen Zahl: $b = \mathrm{Im}(a + bi) \quad b = \Im(a + bi).$

Wiederholung: Die Gaußsche Zahlenebene

Während sich die Menge der reellen Zahlen durch Punkte auf einer Zahlengeraden veranschaulichen lässt, kann man die Menge der komplexen Zahlen als Punkte in einer **Ebene** (komplexe Ebene, Gaußsche Zahlenebene) darstellen.

Dies entspricht der „doppelten Natur“ der Menge der komplexen Zahlen als zweidimensionalem reellem Vektorraum. Die Teilmenge der **reellen** Zahlen bildet darin die **waagerechte** Achse, die Teilmenge der rein **imaginären** Zahlen (d. h. mit Realteil 0) bildet die **senkrechte** Achse.

Eine komplexe Zahl besitzt dann die horizontale Koordinate a und die vertikale Koordinate b.



Addition und Subtraktion komplexer Zahlen

Gemäß Definition entspricht die Addition komplexer Zahlen der Vektoraddition.

Addition: $(a+b\,\mathrm{i})+(c+d\,\mathrm{i})=(a+c)+(b+d)\,\mathrm{i}$

Beispiel: $(3+2\mathrm{i})+(5+5\mathrm{i})=(3+5)+(2+5)\mathrm{i}=8+7\mathrm{i}$

Subtraktion: $(a+b\,\mathrm{i})-(c+d\,\mathrm{i})=(a-c)+(b-d)\,\mathrm{i}$

Beispiel: $(5+5\mathrm{i})-(3+2\mathrm{i})=(5-3)+(5-2)\mathrm{i}=2+3\mathrm{i}$

Multiplikation und Division komplexer Zahlen

Die Multiplikation komplexer Zahlen ergibt sich mit der Definition ***i² = − 1*** durch einfaches Ausmultiplizieren und Neugruppieren.

$$(a + b\,\mathrm{i}) \cdot (c + d\,\mathrm{i}) = (ac - bd) + (ad + bc) \cdot \mathrm{i}$$

Beispiel:

$$(2+5\mathrm{i}) \cdot (3+7\mathrm{i}) = (2 \cdot 3 + 2 \cdot 7\mathrm{i}) + (5\mathrm{i} \cdot 3 + 5\mathrm{i} \cdot 7\mathrm{i}) = 6 + 14\mathrm{i} + 15\mathrm{i} - 35 = -29 + 29\mathrm{i}$$

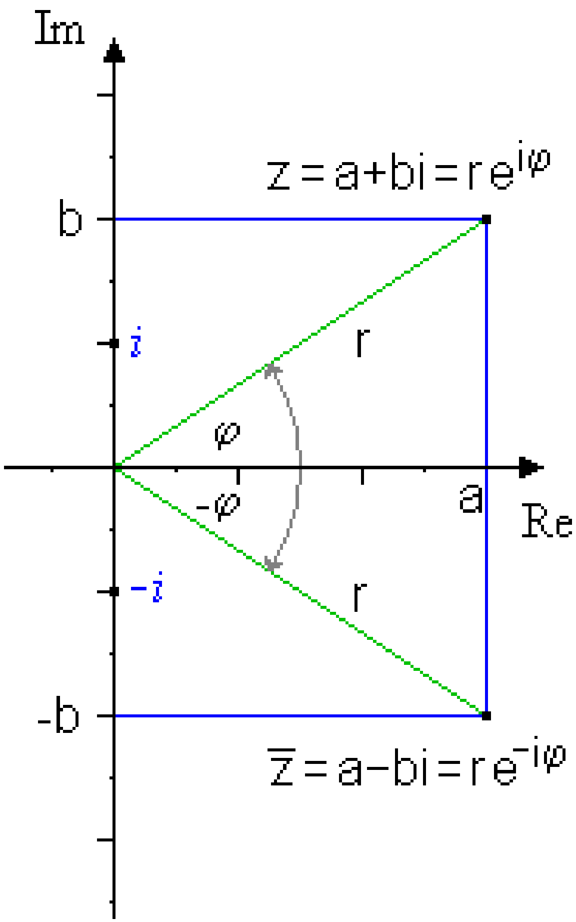
Die Division komplexer Zahlen lässt sich auf die Multiplikation zurückführen, allerdings möchte man vermeiden, dass ***i*** im Nenner steht. Daher muss der Bruch mit der zum Nenner **komplex konjugierten** Zahl erweitert werden.

Komplex konjugierte Zahlen

Dreht man das **Vorzeichen des Imaginärteils** b einer komplexen Zahl um, so erhält man die zu z komplex konjugierte (oder auch konjungiert komplexe) Zahl $\bar{z}$ (manchmal auch z* geschrieben).

$$\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad z = a + b \cdot \mathrm{i} \;\mapsto\; \bar{z} = a - b \cdot \mathrm{i}$$

Auffällig bei den zueinander komplex konjugierten Zahlen ist, dass sie in der Gaußschen Zahlenebene **symmetrisch zur reellen Achse** liegen, da sie sich nur durch das Vorzeichen im Imaginärteil unterscheiden.



Komplex konjugierte Zahlen

Das Produkt aus einer komplexen Zahl $z = a + bi$ und ihrer komplex konjugierten Zahl ergibt das Quadrat ihres Betrages:

$$z \cdot \bar{z} = (a + b\mathrm{i})(a - b\mathrm{i}) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Die Summe aus einer komplexen Zahl $z = a + bi$ und ihrer komplex konjugierten Zahl ergibt das 2-fache ihres Realteils:

$$z + \bar{z} = (a + b\mathrm{i}) + (a - b\mathrm{i}) = 2a = 2\,\mathrm{Re}(z)$$

Die Differenz aus einer komplexen Zahl $z = a + bi$ und ihrer komplex konjugierten Zahl ergibt das 2i-fache ihres Imaginärteils:

$$z - \bar{z} = (a + b\mathrm{i}) - (a - b\mathrm{i}) = 2b\mathrm{i} = 2\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z)$$

Rechenregeln komplex konjugierter Zahlen

Für alle komplexen Zahlen $z_1, z_2, z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ gilt:

$$a = \mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$$

$$b = \mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z - \overline{z})$$

$$z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$$

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$$

Division komplexer Zahlen in algebraischer Form

Für $z \neq 0$ gilt:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Für die Division zweier komplexer Zahlen erhalten wir:

$$\frac{y}{z} = \frac{y}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{y\bar{z}}{|z|^2}$$

$$\frac{a+b\mathrm{i}}{c+d\mathrm{i}} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}\,\mathrm{i}.$$

Der Betrag komplexer Zahlen

Der Betrag $|z|$ einer komplexen Zahl $\boldsymbol{z = a + b\,i}$ ist folgendermaßen definiert:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

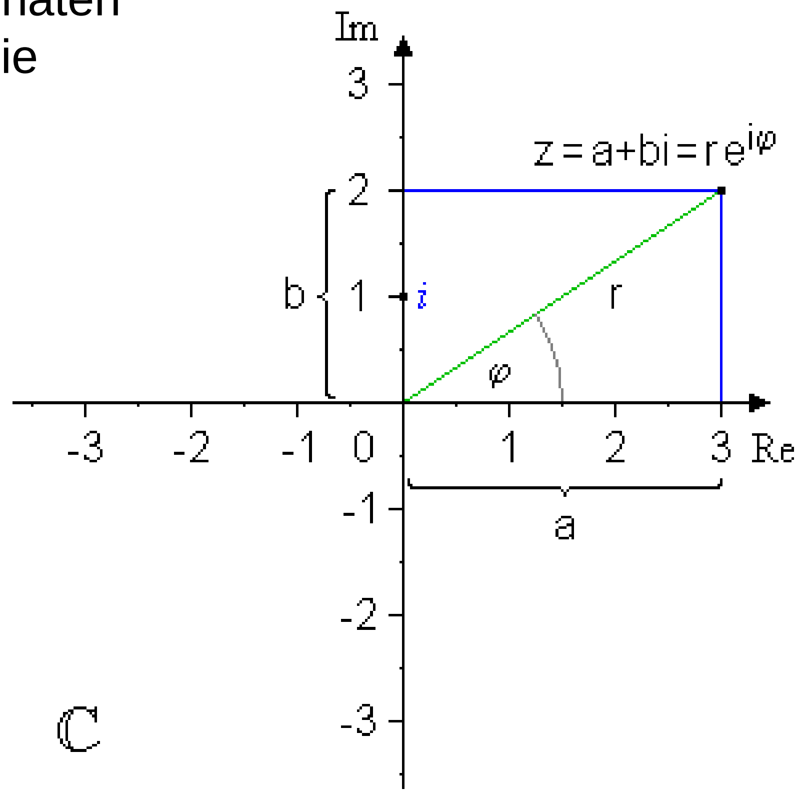
Diese Definition des Betrags einer komplexen Zahl entspricht dem Abstand der Zahl (in der Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene) vom Ursprung des Koordinatensystems.

Der Betrag einer komplexen Zahl und der dazu konjugiert komplexen Zahl ist gleich, da bei der Definition einer konjugiert komplexen Zahl nur das Vorzeichen des b differiert und laut Definition des Betrages einer komplexen Zahl a und b quadriert werden, somit also der Unterschied des Vorzeichens ohne den Verlust einer weiteren Lösung wegfällt.

$$|z| = |\bar{z}|$$

Darstellung komplexer Zahlen in Polarform

Verwendet man anstelle der kartesischen Koordinaten a und b die Polarkoordinaten r und φ , so kann die komplexe Zahl in **Polarform** dargestellt werden.



Algebraische Form einer komplexen Zahl :

$$z = a + b \cdot i$$

Trigonometrische Form einer komplexen Zahl:

$$z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

Exponentialform (Eulersche Form):

$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

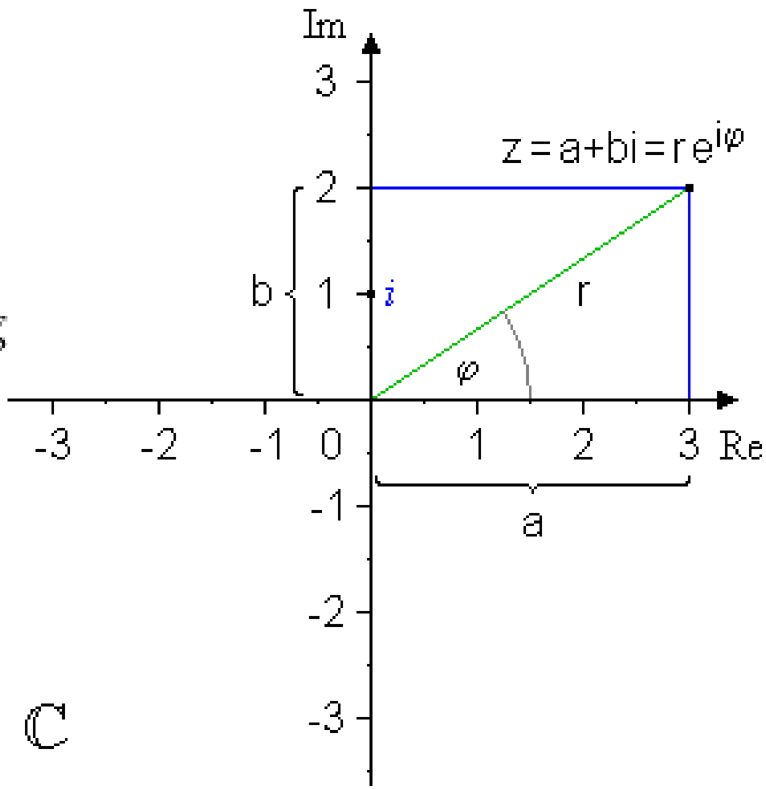
φ meist in rad
(360° = 2π)

Umwandlung von algebraischer Form in Polarform

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$$

$$\varphi = \arg(z) = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & \text{für } a > 0, b \text{ beliebig} \\ \arctan\frac{b}{a} + \pi & \text{für } a < 0, b \geq 0 \\ \arctan\frac{b}{a} - \pi & \text{für } a < 0, b < 0 \\ \pi/2 & \text{für } a = 0, b > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } a = 0, b < 0 \\ \text{unbestimmt} & \text{für } a = 0, b = 0 \end{cases}$$



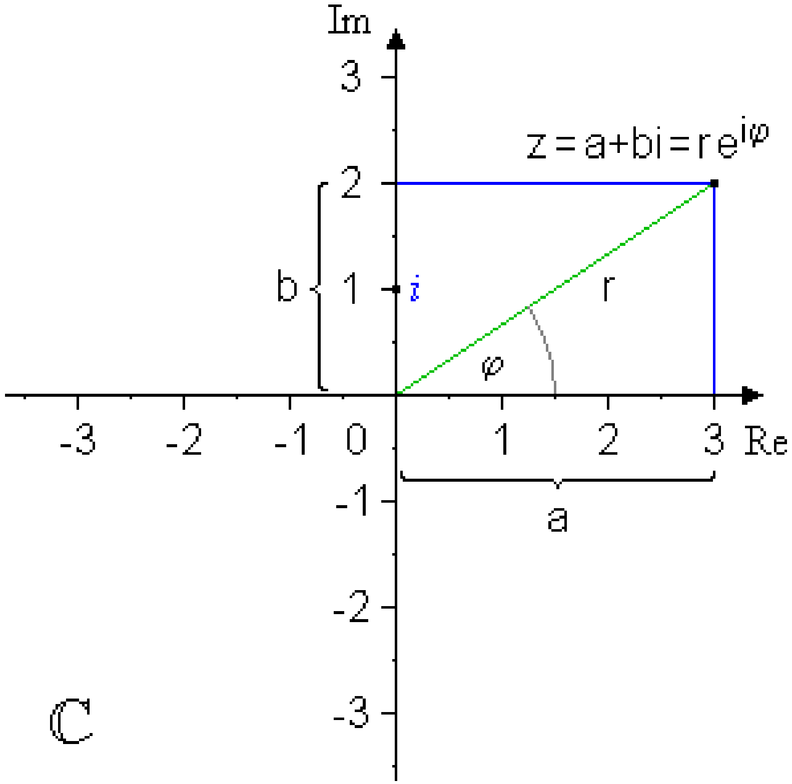
für: $-\pi < \varphi \leq \pi$

Umwandlung von Polarform in algebraische Form

$$z = a + b\,\mathrm{i}$$

$$a = \mathrm{Re}(z) = r \cdot \cos\varphi$$

$$b = \mathrm{Im}(z) = r \cdot \sin\varphi$$



Darstellung einer komplexen Zahl in Polarform

Die Darstellung einer komplexen Zahl über den **Betrag *r*** und die **Phase *φ*** wird als **Polarform** bezeichnet.

$$z = \overbrace{r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)}^{\text{Trigonometrische Form}} = \overbrace{r \cdot e^{j\varphi}}^{\text{Exponentialform (Eulersche Form)}}$$

Betrag

Eulersche Zahl

Argument
(Phase)

Die Grundlage für die Darstellung in Exponentialform ist die Eulersche Formel:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi$$

Die Eulersche Formel

Die Eulersche Formel erhält man am bequemsten aus der Mac Laurinschen Reihe von $\boldsymbol{e^x}$, indem man $\boldsymbol{x}$ durch $\boldsymbol{j\varphi}$ ersetztund dabei die Bedeutung $\boldsymbol{j^2=-1}$ beachtet.

$$e^{j\varphi} = 1 + \frac{(j\varphi)^1}{1!} + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{(j\varphi)^3}{3!} + \frac{(j\varphi)^4}{4!} + \frac{(j\varphi)^5}{5!} + \frac{(j\varphi)^6}{6!} + \frac{(j\varphi)^7}{7!} + \ldots$$

$$e^{j\varphi} = 1 + j\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - j\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - j\frac{\varphi^7}{7!} + \ldots$$

$$e^{j\varphi} = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots\right) + j\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right)$$

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

Die Eulersche Zahl

Die eulersche Zahl **e = 2,718281828459...** (nach dem Schweizer Mathematiker Leonhard Euler) ist eine irrationale und sogar transzendente reelle Zahl.

Die eulersche Zahl ist die Basis des natürlichen Logarithmus und der (natürlichen) Exponentialfunktion, die aufgrund dieser Beziehung zur Zahl e häufig kurz e-Funktion genannt wird. Sie spielt in der Differential- und Integralrechnung eine wichtige Rolle.

Der Buchstabe e für diese Zahl wurde zuerst von Euler 1736 in seinem Werk Mechanica benutzt. Es gibt keine Hinweise, dass dies in Anlehnung an seinen Namen geschah.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$e = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

$$\boxed{e^{i\cdot\pi} = -1}$$

$$e = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Leonhard Euler

(* 15. April 1707 in Basel; † 18. September 1783 in Sankt Petersburg) war einer der bedeutendsten jemals lebenden Mathematiker.
Ein großer Teil der heutigen mathematischen Symbolik geht auf Euler zurück (z. B. e, π, i, Summenzeichen ∑, f(x) als Darstellung für eine Funktion). 1744 gab er ein Lehrbuch der Variationsrechnung heraus. Euler kann auch als der eigentliche Begründer der Analysis angesehen werden. 1748 publizierte er das Grundlagenwerk „Introductio in analysin infinitorum", in dem zum ersten Mal der Begriff der Funktion die zentrale Rolle spielt. Andere Arbeiten setzen sich mit Zahlentheorie, Algebra, angewandter Mathematik und sogar mit der Anwendung mathematischer Methoden in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften auseinander.

Leonhard Euler
(1707-1783)

Entwicklung der Nachkommastellen von *e*

Datum	Dezimalstellen	Mathematiker
1748	18	Leonhard Euler
1853	137	William Shanks
1871	205	William Shanks
1884	346	J. Marcus Boorman
1949	2.010	John von Neumann (on the ENIAC)
1961	100.265	Daniel Shanks & John Wrench
1981	116.000	Stephen Gary Wozniak (on the Apple II)
1994	10.000.000	Robert Nemiroff & Jerry Bonnell
Mai 1997	18.199.978	Patrick Demichel
August 1997	20.000.000	Birger Seifert
Oktober 1999	869.894.101	Sebastian Wedeniwski
21. November 1999	1.250.000.000	Xavier Gourdon
16. Juli 2000	3.221.225.472	Colin Martin & Xavier Gourdon
18. September 2003	50.100.000.000	Shigeru Kondo & Xavier Gourdon
6. Mai 2009	200.000.000.000	Shigeru Kondo & Steve Pagliarulo

Multiplikation und Division in der Polarform

Bei der Multiplikation in der Polarform werden die Beträge multipliziert und die Phasen addiert. Bei der Division wird der Betrag des Dividenden durch den Betrag des Divisors geteilt und die Phase des Divisors von der Phase des Dividenden subtrahiert:

Trigonometrische Form:

$$r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi) \;\cdot\; s \cdot (\cos\psi + \mathrm{i} \cdot \sin\psi) = r \cdot s \cdot [\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi + \psi)]$$

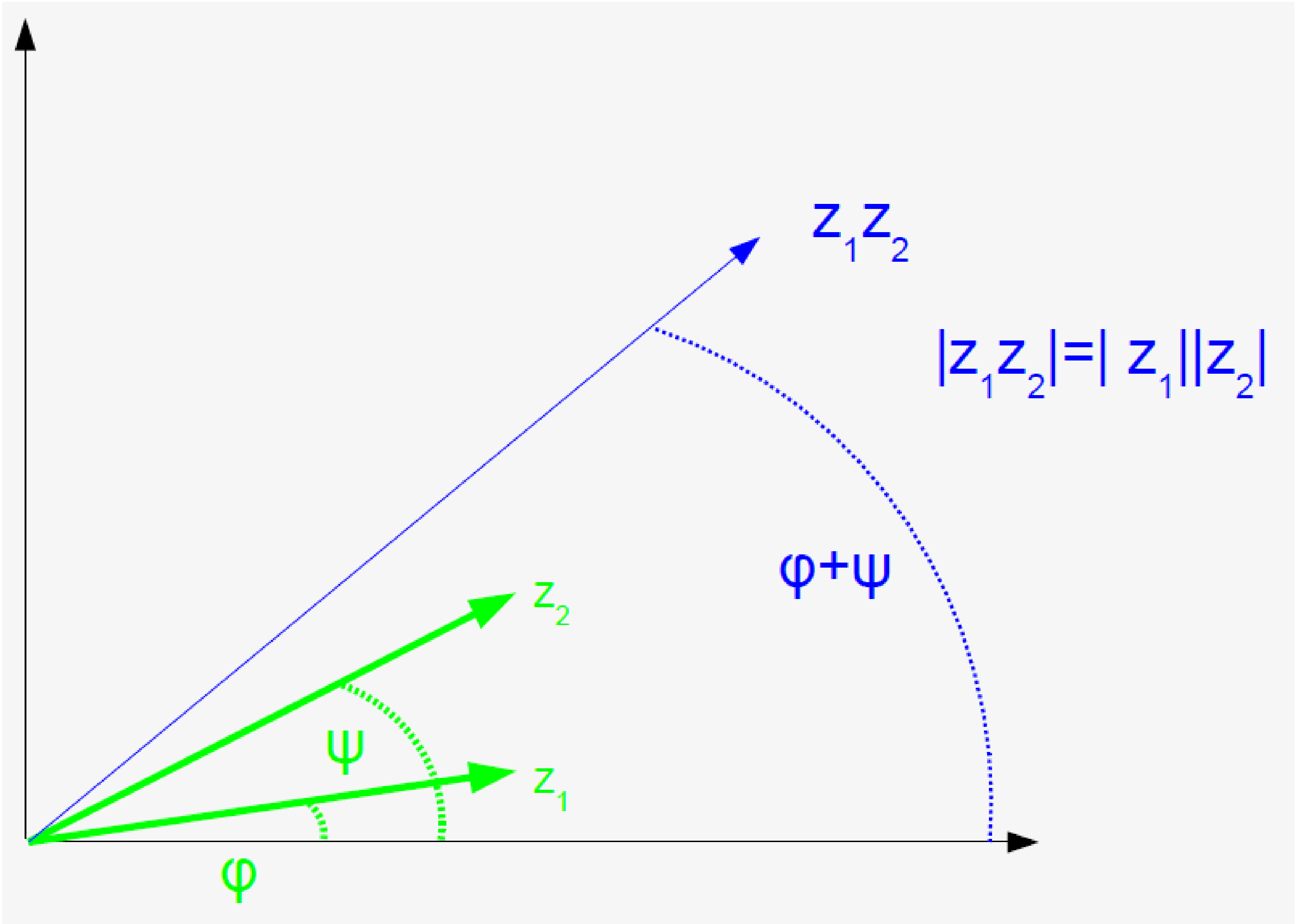
$$\frac{r \cdot (\cos\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin\varphi)}{s \cdot (\cos\psi + \mathrm{i} \cdot \sin\psi)} = \frac{r}{s} \cdot [\cos(\varphi - \psi) + \mathrm{i} \cdot \sin(\varphi - \psi)]$$

Exponentialform:

$$\left(r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}\right) \cdot \left(s \cdot e^{\mathrm{i}\psi}\right) = (r \cdot s) \cdot e^{\mathrm{i}(\varphi + \psi)}$$

$$\frac{\left(r \cdot e^{\mathrm{i}\varphi}\right)}{\left(s \cdot e^{\mathrm{i}\psi}\right)} = \frac{r}{s} \cdot e^{\mathrm{i}(\varphi - \psi)}$$

Grafische Darstellung der Multiplikation in Polarform



Einfache Rechenregeln

Man rechnet mit komplexen Zahlen am besten einfach so, als ob ***i*** eine ganz normale Variable wäre, man muss nur beim Multiplizieren daran denken, dass gilt: ***i² = -1***.

$$\frac{1}{i} = \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = -i$$

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen werden **in der algebraischen Form** komponentenweise durchgeführt.

Die Multiplikation komplexer Zahlen kann je nach Vorgabe vorteilhaft in algebraischer Form oder in Polarform durchgeführt werden.

Bei der Division komplexer Zahlen werden in Exponentialform ihre Beträge dividiert und ihre Argumente (Winkel) subtrahiert, oder in algebraischer Form mit dem konjugierten multipliziert und durch dessen Betragsquadrat dividiert.

Potenzen

Natürliche Exponenten für die algebraische Form ***z* = *a* + *b*i**

$$z^n = \sum_{k=0,k \text{ gerade}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k}{2}} a^{n-k} b^k + \mathrm{i} \sum_{k \text{ ungerade}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} a^{n-k} b^k.$$

Die *n*-te Potenz berechnet sich in der polaren Form:

$$z^n = r^n \cdot e^{\mathrm{i}n\varphi} = r^n \cdot (\cos n\varphi + \mathrm{i} \cdot \sin n\varphi)$$

Beliebige komplexe Exponenten:

$$z^\omega := \exp(\omega \cdot \ln z),$$

Radizieren (Wurzelziehen)

Üblicherweise wird die exponentielle (Eulersche) Darstellungsform der komplexen Zahl verwendet.

Bei der Berechnung der *n*-ten Wurzel der komplexen Zahl $z = re^{i\varphi}$ dient die Formel:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\mathrm{i}\frac{\varphi + 2k\pi}{n}},$$

wobei *k* die Werte 0, 1, …. n-1 durchläuft. **Eine Zahl hat also *n* komplexe *n*-te Wurzeln.**

Vorgehensweise beim Ziehen der n-ten Wurzel

1. Umwandlung der komplexen Zahl in die Exponentialform.

2. Berechnung des Betrages der Wurzel r_w

$$r_W = \sqrt[n]{r}$$

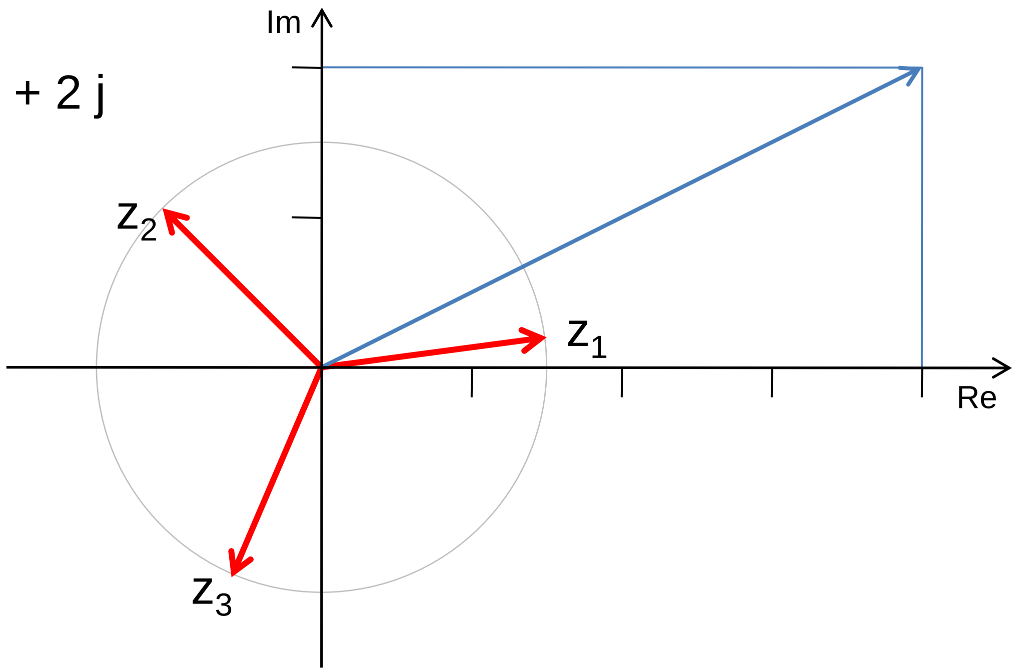
3. Berechnung der Argumente φ_W Es muss n Stück davon geben, für k = 0 bis (n-1).

$$\varphi_W = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

4. ggf. Rückumwandlung der n gefundenen Ergebnisse in die algebraische Form.

Beispiele von Wurzeln komplexer Zahlen

$z^3 = 4 + 2\,j$



Durchrechnen von zwei Beispielen:

$z^6 = 1$

$z^4 = 3 + 2\,j$

Pragmatische Rechenregeln

Addition und Subtraktion komplexer Zahlen werden in der **algebraischen** Form komponentenweise durchgeführt.

Die **Multiplikation** komplexer Zahlen kann je nach Vorgabe vorteilhaft in **algebraischer** Form oder in **Exponentialform** (Multiplikation der Beträge und Addition der Argumente (Winkel)) durchgeführt werden.

Bei der **Division** komplexer Zahlen werden in **Exponentialform** ihre Beträge dividiert und ihre Argumente (Winkel) subtrahiert, oder in **algebraischer** Form mit dem konjugierten multipliziert und durch dessen Betragsquadrat dividiert.

Beim **Potenzieren** einer komplexen Zahl mit einem reellen Exponenten wird ihr Betrag potenziert und ihr Argument (Winkel) mit dem Exponenten multipliziert.

Beim **Radizieren** (Wurzelziehen) einer komplexen Zahl mit einem reellen Exponenten wird ihr Betrag radiziert und ihr Argument (Winkel) durch den Exponenten dividiert. Hierdurch entsteht die erste Lösung. Bei einer n-ten Wurzel entstehen n Lösungen, die im Winkel von $2\pi / n$ um den Ursprung der gaußschen Ebene verteilt sind.

Aufgaben

1. Geben Sie folgende komplexen Zahlen in Polarform an:
   a) $3 + 4j$
   b) $-8 - 6j$
   c) $(3 + 4j) \cdot (-4 + 2j)$

2. Geben Sie folgende komplexe Zahlen in kartesischer Form an:
   a) $2 \cdot \cos(\pi/3) + 2j \cdot \sin(\pi/3)$
   b) $\dfrac{4 \cdot \overline{(3 - j)}}{(1 + j) \cdot (-1 + j)}$

3. Geben Sie für $z_1 = -\sqrt{3} - j$ und $z_2 = 2 \cdot e^{j \cdot 5\pi/6}$ folgende Ausdrücke in kartesischer Form an:
   a) $z_1 + z_2$
   b) z_1 / z_2
   c) $(z_1 / z_2)^{15}$

Aufgaben

4. Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in kartesischer Form an:

a) $$z = \frac{5 \cdot (1+2j)^5 \cdot (4-3j)^2}{(3+4j)^3 \cdot (2-j)^4}$$

b) $$z = (2-4j)^2 + \frac{|1-\sqrt{3} \cdot j|}{j}$$

c) $$z = \frac{(3+j) \cdot (\cos(120°) - j \cdot \sin(120°))}{(1-j)^2 \cdot (\overline{2j})} + \frac{2 \cdot (\cos(90°) + j\sin(90°))}{e^{-j \cdot 180°}}$$

5. Beweisen Sie die von Leibnitz entdeckte Beziehung:

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$$

Natürlicher Logarithmus einer komplexen Zahl

Im Bereich der reellen Zahlen wir der natürliche Logarithmus einer (positiven) Zahl ***a*** als diejenige Zahl ***x*** erklärt, mit der die Basiszahl e potenziert werden muss, um die Zahl ***a*** zu erhalten: $a = e^x$ $x = \ln a$ $(a > 0)$

Wir übertragen diesen Begriff nun sinngemäß auf die komplexen Zahlen.
Jede von Null verschiedene komplexe Zahl ***z*** ist darstellbar als:

$$z = r \cdot e^{j(\varphi + k2\pi)}$$

Unter ihrem natürlichen Logarithmus verstehen wir:

$$\ln z = \ln\left[r \cdot e^{j(\varphi + k2\pi)}\right] = \ln r + \ln e^{j(\varphi + k2\pi)}$$

$$\ln z = \ln r + j(\varphi + k \cdot 2\pi) \cdot \ln e = \ln r + j(\varphi + k \cdot 2\pi)$$

Das ist eine Menge von **unendlich vielen** komplexen Zahlen für $k \in Z$

Hauptwert und Nebenwerte des Logarithmus

Für $\boldsymbol{k}$=0 erhält man den so genannten **Hauptwert** des Logarithmus:

$$\mathrm{Ln}\,\boldsymbol{z} = \ln \boldsymbol{r} + \mathrm{j}\,\boldsymbol{\varphi}$$

Die übrigen Werte heißen **Nebenwerte** und ergeben sich aus dem Hauptwert durch Addition ganzzahliger Vielfacher von 2πj.

$$\ln \boldsymbol{z} = \mathrm{Ln}\,\boldsymbol{z} + \boldsymbol{k}\cdot 2\pi\mathrm{j} \quad (k \in Z)$$

Anmerkungen zum Logarithmus:
ln $\boldsymbol{z}$ ist für jede komplexe Zahl $\boldsymbol{z} \neq 0$ definiert, also beispielsweise auch für negative reelle Zahlen.
Die verschiedenen Werte von ln $\boldsymbol{z}$ stimmen im Realteil (= ln r) überein und unterscheiden sich im Imaginärteil um ganzzahlige Vielfache von 2 π.
Komplexe Zahlen müssen vor dem Logarithmieren zunächst in die Exponentialform gebracht werden.

Quellen

Peter Hartmann: Mathematik für Informatiker, Vieweg Verlag, Wiesbaden 2006

Manfred Brill: Mathematik für Informatiker, Hanser Verlag, München 2005

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium, Hanser Verlag, München 2010

HOCHSCHULE DEGGENDORF
University of Applied Sciences

Hochschule Deggendorf – Edlmairstr. 6 und 8 – 94469 Deggendorf