Hochschule
Deggendorf

Mathematik für Infotronik (37)

Gerald Kupris

19.01.2011

Restliche Stunden Mathematik 1. Semester

10.01.2011 (Mo)	09:45 Uhr:	Auswertung Fragebogen, Exponentialfunktion, e-funktion
12.01.2011 (Mi)	09:45 Uhr:	Logarithmusfunktion, Logarithmusregeln
12.01.2011 (Mi)	11:45 Uhr:	Ableitung und Integration von e-Funktion und Logarithmus
13.01.2011 (Do)	09:45 Uhr:	Wiederholung Integration, Integration durch Substitution
17.01.2011 (Mo)	09:45 Uhr:	Partielle Integration, Partialbruchzerlegung
19.01.2011 (Mi)	08:00 Uhr:	Rechenbeispiele, Flächenberechnung, Schwerpunkt
19.01.2011 (Mi)	09:45 Uhr:	Anwendung der Integration, numerische Methoden
20.01.2011 (Do)	09:45 Uhr:	allgemeine Wiederholung, Prüfungsvorbereitung
24.01.2011 (Mo)	09:45 Uhr:	Rechnen der Probeklausur
08.02.2011 (Di)	11:00 Uhr:	Prüfung

Bogenlänge

Das Schaubild einer differenzierbaren Funktion f für x-Werte zwischen a und b hat die **Bogenlänge**

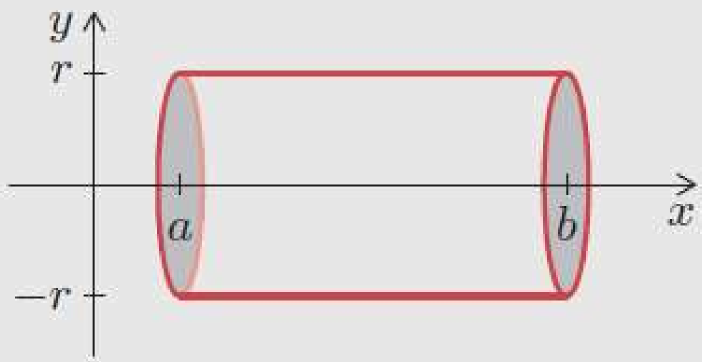
$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}\,x.$$

Beispiel

Rotationskörper

Durch Rotation des Schaubildes der konstanten Funktion $f(x) = r$ für x-Werte zwischen a und b um die x-Achse, entsteht ein **senkrechter Kreiszylinder**. Dieser Kreiszylinder hat das Volumen und die Mantelfläche

$$V = \pi\, r^2 (b - a), \quad M = 2\,\pi\, r\,(b - a).$$

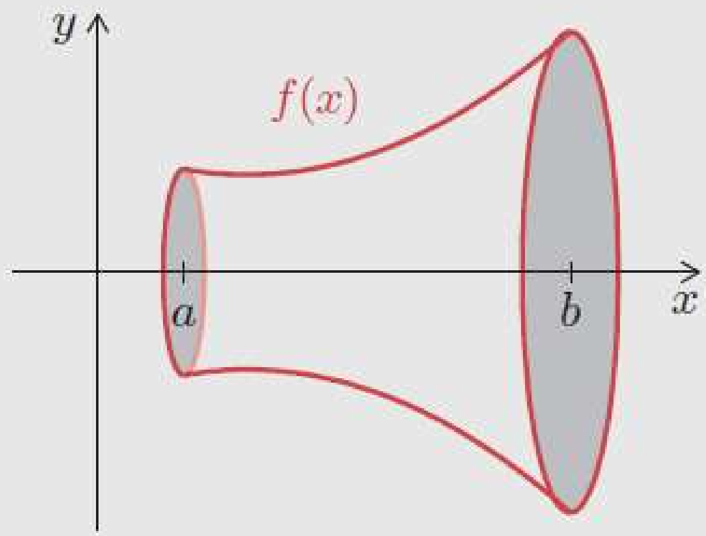


Rotationskörper

Durch Rotation des Schaubildes einer stetigen Funktion f für x-Werte zwischen a und b um die x-Achse entsteht ein Rotationskörper. Das **Volumen** dieses Rotationskörpers kann man mit der Formel

$$V_x = \pi \int_a^b f(x)^2 \,\mathrm{d}x$$

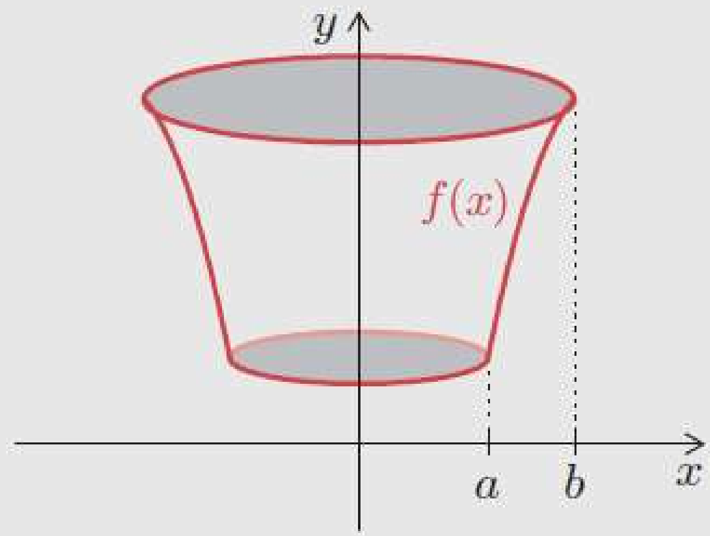
berechnen. Dabei darf das Schaubild der Funktion f die x-Achse nicht schneiden, sondern höchstens berühren.



Beispiel

Rotationskörper

Durch Rotation des Schaubildes einer stetigen Funktion f für x-Werte zwischen a und b um die y-Achse entsteht ein Rotationskörper. Wenn die Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$ umkehrbar ist, dann kann man das **Volumen** dieses Rotationskörpers mit der Formel



$$V_y = \pi \left| \int_{f(a)}^{f(b)} \left(f^{-1}(x)\right)^2 \, \mathrm{d}x \right|$$

berechnen. Dabei darf das Schaubild der Funktion f die y-Achse nicht schneiden, sondern höchstens berühren.

Beispiel

Mantelfläche

Durch Rotation des Schaubildes einer differenzierbaren Funktion f für x-Werte zwischen a und b um

- die x-Achse entsteht ein Rotationskörper mit **Mantelfläche**

$$M_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

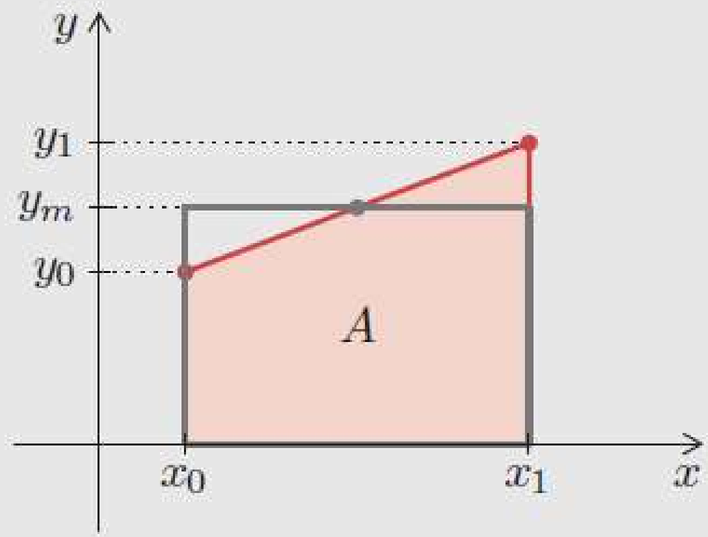
- die y-Achse entsteht ein Rotationskörper mit **Mantelfläche**

$$M_y = 2\pi \left| \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\sqrt{1+\left[(f^{-1}(x))'\right]^2}\,\mathrm{d}x \right|.$$

Numerische Integration: Trapez

Ein Viereck, das zumindest zwei parallele Seiten hat, bezeichnet man als **Trapez**. Die Fläche eines Trapezes ist genau gleich groß wie die Fläche des Rechtecks, das dieselbe Grundseite hat und dessen Höhe gerade dem Mittelwert y_m der beiden Höhen y_0 und y_1 des Trapezes entspricht:

$$A = (x_1 - x_0)\,\frac{y_0 + y_1}{2}.$$

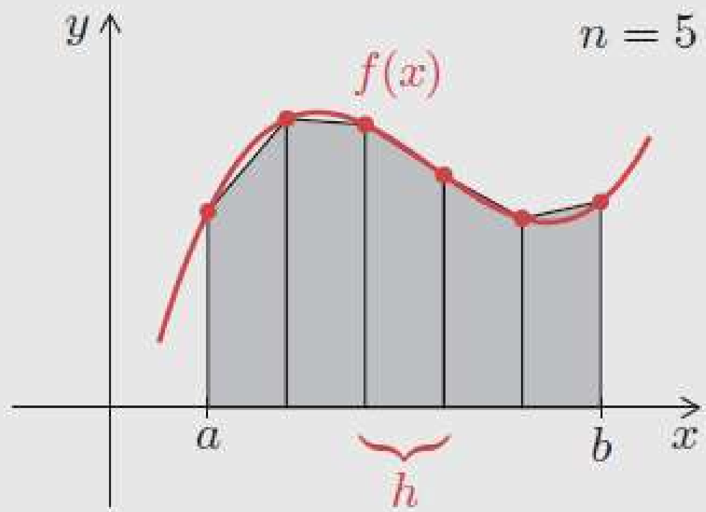


Numerische Integration: Trapezregel

Das bestimmte Integral einer Funktion f über dem Intervall $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

kann man durch eine Summe von n Trapezflächen annähern. Die Trapeze haben eine Grundseite der Länge $h = \frac{b-a}{n}$.



Die Funktionswerte müssen an $n+1$ Stellen berechnet werden. Die Formel zur Berechnung der Summe der Trapezflächen lautet

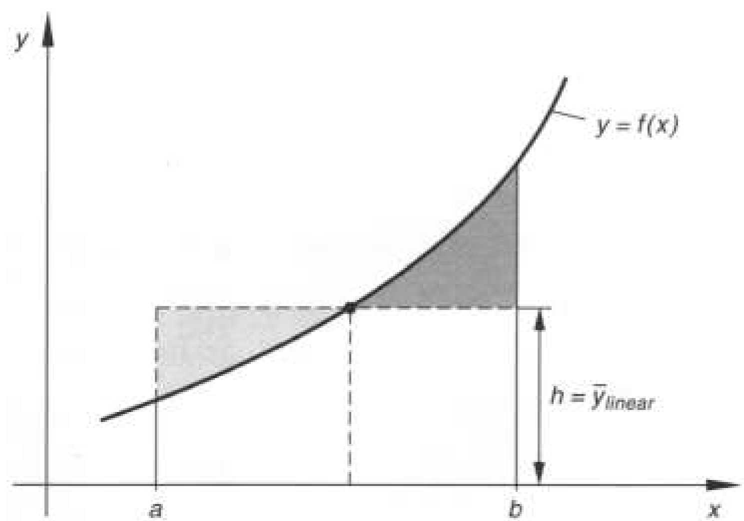
$$\tilde{A} = h\left(\tfrac{1}{2}f(a) + f(a+h) + f(a+2\,h) + \ldots + f(b-2\,h) + f(b-h) + \tfrac{1}{2}f(b)\right).$$

Beispiele

Linearer Mittelwert

Definition: Unter dem *linearen Mittelwert* einer Funktion $y = f(x)$ im Intervall $a \leq x \leq b$ versteht man die Größe

$$\bar{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{(V-142)}$$



Quadratischer Mittelwert

Definition: Unter dem *quadratischen Mittelwert einer Funktion* $y = f(x)$ im Intervall $a \le x \le b$ versteht man die Größe

$$\bar{y}_{\text{quadratisch}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, dx} \qquad \text{(V-145)}$$

Linearer und quadratischer Mittelwert einer periodischen F.

Linearer und quadratischer zeitlicher Mittelwert einer periodischen Funktion

Der *lineare* bzw. *quadratische zeitliche Mittelwert* einer periodischen Funktion $y = f(t)$ mit der Periodendauer T lässt sich wie folgt berechnen (die Integration erfolgt über ein Periodenintervall der Länge T):

$$\bar{y}_{\text{linear}} = \frac{1}{T} \cdot \int_{(T)} f(t)\, dt \qquad \text{(V-146)}$$

$$\bar{y}_{\text{quadratisch}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_{(T)} [f(t)]^2\, dt} \qquad \text{(V-147)}$$

Quellen

Thomas Rießinger: Mathematik für Ingenieure, Springer Verlag, Berlin 2009

Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler,
Vieweg+Teubner Verlag, 2009

Jürgen Koch, Martin Stämpfle: Mathematik für das Ingenieurstudium,
Hanser Verlag, München, 2010

Kurt Meyberg, Peter Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer Verlag,
Springer Verlag, Berlin 2003

http://de.wikipedia.org