# BWL
# Investitionsrechung

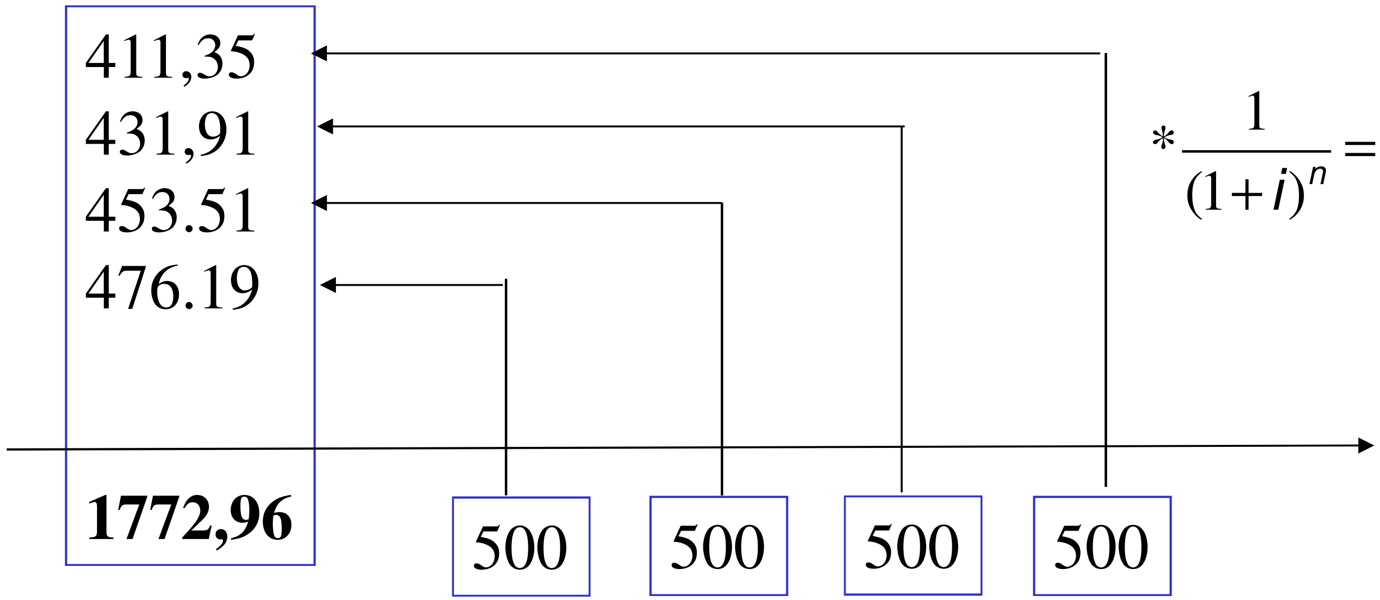
„Renten“

## Zahlungen, die in Reihen stattfinden nennt man Rente

Definition: **Renten sind gleichförmige, äquidistante Zahlungsreihen**.

Beispiel zu gewinnen im Lotto und erhalten für vier Jahre jeweils 500 €.

# Den Wert dieser Rente gibt der Barwert an




$$*\frac{1}{(1+i)^n} = q^{-n}$$

| to | t1 | t2 | t3 | t4 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 500 | 500 | 500 | 500 |

# Lösung durch Aufaddieren der diskontierten (abgezinsten) Zahlungsströme

$$B = \frac{C}{(1+i)^1} + \frac{C}{(1+i)^2} + (..) + \frac{C}{(1+i)^n}$$

$$B = C * (\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + (..) + \frac{1}{(1+i)^n})$$

Ziel:Vereinfachung der Formel

B = C * BWF

# Der Barwertfaktor erlaubt die Berechung über eine geschlossene Formel

$$BWF = \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + (..) + \frac{1}{(1+i)^n}$$

mit $1/(1+i)^n = q^{-n}$ oder $q = 1+i$

(I) $BWF = q^{-1} + q^{-2} + \ldots + q^{-n}$

(II) $BWFq = 1 + q^{-1} + q^{-2} + \ldots + q^{-(n-1)}$

(II) − (I)

$$BWF(q-1) = (1-q^{-n})$$

$$BWF = \frac{(1-q^{-n})}{(q-1)}$$

# Der Barwertfaktor erlaubt die Berechung über eine geschlossene Formel

$$BWF = \frac{(1 - q^{-n})}{(q - 1)}$$

$$BWF = \frac{(1 - q^{-n})}{(1 + i - 1)} = \frac{(1 - q^{-n})}{i}$$

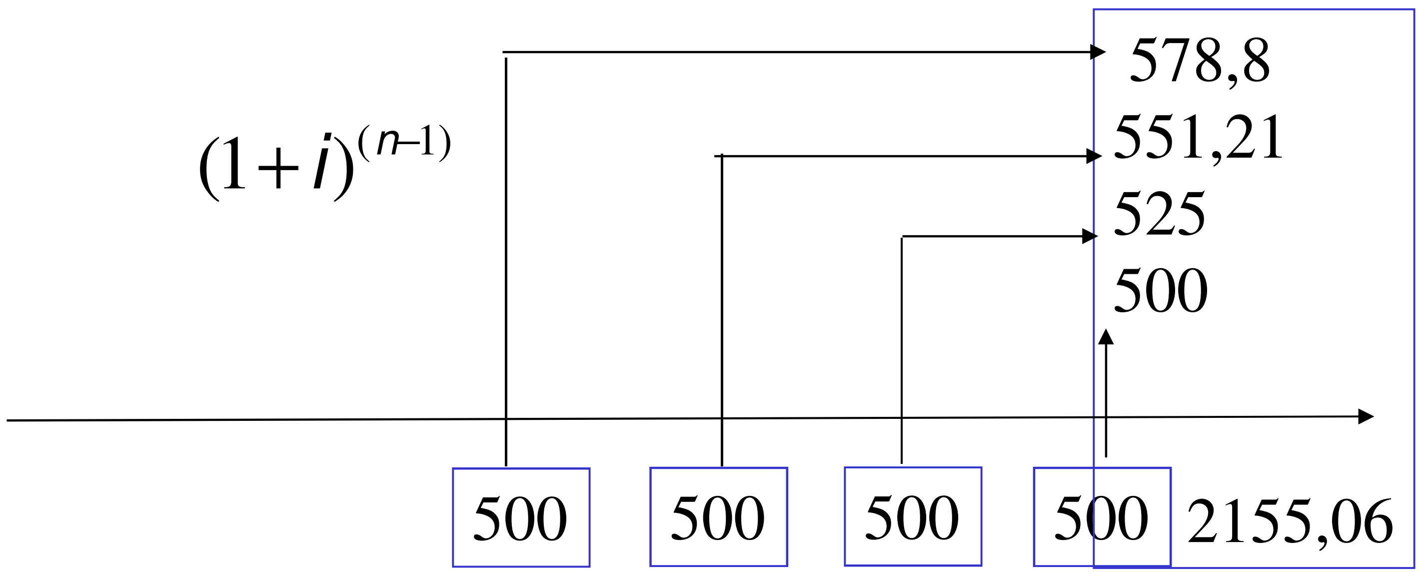
$$BWF = \frac{(q^{n} - 1)}{iq^{n}}$$

## Anstelle der Einzelberechnungen kann der Barwertfaktor und somit der Rentenbarwert direkt berechnet werden

$$BWF = ((1+i)^n - 1) / (1+i)^n i$$

$$B = C * BWF = C\frac{(q^n - 1)}{q^n r}$$

# Den Wert am Ende der Einzahlungszeit gibt der Endwert (Rentenendwert)




| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| to | t1 | t2 | t3 | t4 |
| n | n-1 | n-2 | n-3 | n-4 |
| 0 | 500 | 500 | 500 | 500 |

# Der Endwert gibt den Wert einer kontinuierlichen Zahlungsreihe nach n Jahren bei einem Zins r an

$$E = C(1+i)^{(n-1)} + C(1+i)^{(n-2)} + C(1+i)^{n-3} + (..) + C(1+i)^{1} + C(1+i)^{0}$$

$$E = C * \left[ (1+i)^{(n-1)} + (1+i)^{(n-2)} + (1+i)^{n-3} + (..) + (1+i)^{1} + (1+i)^{0} \right]$$

Gesucht geschlossene Formel:

$$E = C * EWF$$

# Der Endwert gibt den Wert einer kontinuierlichen Zahlungsreihe nach n Jahren bei einem Zins r an

$$EWF = \left\lfloor (1+i)^{(n-1)} + (1+i)^{(n-2)} + (1+i)^{n-3} + (..) + (1+i)^{1} + (1+i)^{0} \right\rfloor$$

$$\text{mit q} = 1+\text{i oder } (1+i)^{\text{n}} = q^{n}$$

$$EWF = q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + (..) + q^{1} + q^{0}$$

$$EWF = q(q^{n-2} + q^{n-3} + q^{n-4} + (..) + q^{0}) + 1$$

$$EWF = q(q^{n-2} + q^{n-3} + q^{n-4} + (..) + q^{0}) + q^{n} - q^{n} + 1$$

$$EWF = q(q^{n-2} + q^{n-3} + q^{n-4} + (..) + q^{0}) + qq^{(n-1)} - q^{n} + 1$$

$$EWF = q\underbrace{(q^{(n-1)} + q^{n-2} + q^{n-3} + q^{n-4} + (..) + q^{0})}_{EWF} - q^{n} + 1$$

# Der Endwert gibt den Wert einer kontinuierlichen Zahlungsreihe nach n Jahren bei einem Zins r an

$$EWF = q\underbrace{\left(q^{(n-1)} + q^{n-2} + q^{n-3} + q^{n-4} + (..) + q^{0}\right)}_{EWF} - q^{n} + 1$$

$$EWF = q * EWF - q^{n} + 1$$

$$EWF - q * EWF = 1 - q^{n}$$

$$EWF * (1 - q) = 1 - q^{n}$$

$$EWF = \frac{1 - q^{n}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n}}{1 - (1 + i)} = \frac{1 - q^{n}}{-i} = \frac{q^{n} - 1}{i}$$

Der Endwert gibt den Wert einer kontinuierlichen Zahlungsreihe nach n Jahren bei einem Zins r an

$$EWF = \frac{q^n - 1}{i}$$

$$E = C * EWF$$

# Somit lauten die wesentlichen Rentenformeln

$$\boxed{\begin{aligned} EWF &= \frac{q^n - 1}{i} \\ E &= C * EWF \end{aligned}}$$

Endwert und Endwertfaktor

$$\boxed{\begin{aligned} BWF &= \frac{(q^n - 1)}{q^n i} \\ B &= C * BWF \end{aligned}}$$

Barwert und Barwertfaktor

$$\boxed{BWF = EWF * \frac{1}{q^n}}$$

## Bei gegebnen Bar- oder Endwerten lässt sich eine äquivalente Rente berechnen

$$E = C * EWF$$

$$C = \frac{1}{EWF} * E = RVF * E$$

RVF nennt man Rückverteilungsfaktor

$$B = C * BWF$$

$$C = \frac{1}{BWF} * B = KWF * B$$

KWF nennt man Kapitalwiedergewinnungsfaktor

# Bei gegebnen Bar- oder Endwerten lässt sich eine äquivalente Rente berechnen

$$B = C * BWF$$

$$C = \frac{1}{BWF} * B = KWF * B$$

KWF nennt man Kapitalwiedergewinnungsfaktor