Mathematik II

2. Semester

Dozent

Prof. Dr. rer. nat. Peter Ullrich

peter.ullrich@th-deg.de

Mitschrift

Christoph Stephan

chm.stephan@outlook.com

Inhaltsverzeichnis

Teil III.

Analysis einer Veränderlichen (Fortsetzung)

6. Funktionsreihen

6.1. Vorbetrachtung

- Reihe (von Zahlen) ist ein formaler Ausdruck der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ mit $a_k \in \mathbb{R}$ (bzw. $a_k \in \mathbb{C}$).

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Ist die Folge (s_n) der Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n \end{aligned}$$

konvergent, so ordnet man der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ den Grenzwert zu

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k;$$

In diesem Fall heißt die Reihe konvergent (oder summierbar).

- Funktionsreihe (= Reihe von Funktionen) ist ein formaler Ausdruck der Form $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ mit Funktionen $f_k = f_k(x)$.

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k = f_0 + f_1 + \ldots + f_n + \ldots$$

Für Zahlen $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe (von Zahlen) $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert, stellt die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ eine Funktion f dar:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ ist konvergent}\}$ heißt Konvergenzbereich (der Funktionsreihe).

Die Partialsummen $s_n(x)$ $(n \in \mathbb{N})$ der Funktionenreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k$ (sind Funktionen)

$$\begin{aligned}
s_0(x) &= f_0(x) \\
s_1(x) &= f_0(x) + f_1(x) \\
s_2(x) &= f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) \\
&\vdots \\
s_n(x) &= f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)
\end{aligned}$$

und werden als Approximationen (= Näherungen) der Funktion $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ betrachtet.

Beispiel: $f_k(x) = x^k \ (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = x^0 + x^1 + x^2 + \ldots$$
$$\mathbb{D} = \{x \mid |x| < 1\} =]-1; 1[$$

Es gilt: $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k = \dfrac{1}{1-x}$

Analogien zu Dezimalbruchentwicklung einer reellen Zahl:

Beispiel: $\frac{1}{3} = 0{,}\overline{3} = 0{,}333333\ldots = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-k}$ (unendliche Reihe)

Die Partialsummen

$$s_0 = 0$$
$$s_1 = 3 \cdot 10^{-1} = 0{,}3$$
$$s_2 = 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} = 0{,}33$$

$$s_3 = 3 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} = 0{,}333$$

$$\vdots$$

sind Approximationen von $\frac{1}{3}$.

In folgenden betrachten wir zwei Spezialfälle von Funktionsreihen:

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k \text{ mit } f_k = \begin{cases} a_k(x-x_0)^k & \text{«Potenz-/Taylorreihen»} \\ a_k \sin(kx) + b_k \cos(kx) & \text{«Fourier-Reihen»} \end{cases}$$

6.2. Taylorreihen, Potenzreihen

Beispiel: Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}, \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$

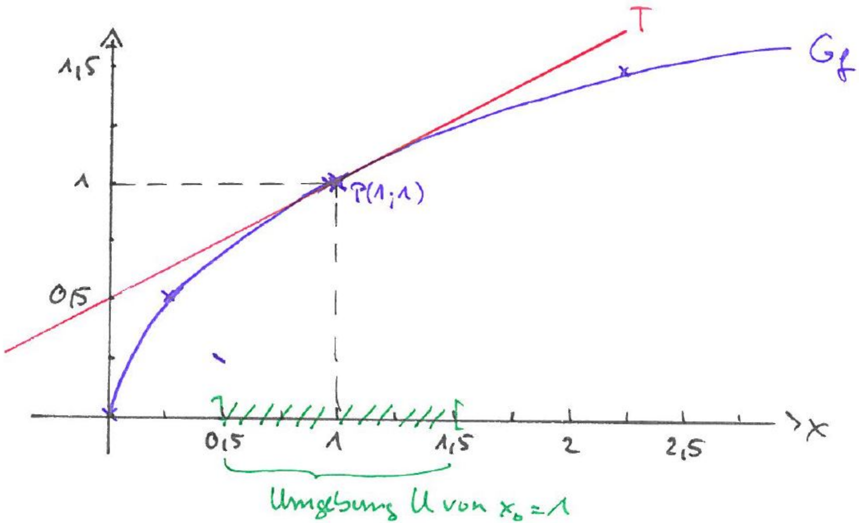

Abbildung 6.1.

Tangente an G_f durch $P(1;1)$:

$T : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ allg. Tangentengleichung durch $P(x_0; y_0)$

$\underline{x_0 = 1}$

$$f(x) = \sqrt{x}; \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(1) = \sqrt{1} = 1; \quad f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow T : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ Approximation von $f(x) = \sqrt{x}$ durch $T(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ für $x \approx 1$; je näher x bei $x_0 = 1$ liegt, desto besser wird $f(x)$ durch $T(x)$ dargestellt.

$$\underbrace{\sqrt{x}}_{f(x)} \approx \underbrace{1 + \frac{1}{2}(x-1)}_{T(x)} \text{ für } \underbrace{|x-1|}_{\substack{\text{Abstand von} \\ x \text{ zu } 1}} \underbrace{\ll 1}_{\substack{\text{sehr viel} \\ \text{kleiner als 1}}}$$

Allgemein gilt: $f(x)$ wird durch $T(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ in einer Umgebung U von x_0 approximiert. Da $T(x)$ eine lineare Funktion ist, spricht man auch von einer Linearisierung von f bei x_0.

Der Fehler der Approximation von $f(x)$ durch $T(x)$ wird durch die Funktion

$$\boxed{R(x) = f(x) - T(x)}$$

beschrieben; $R(x)$ heißt auch Restglied.

Zentrale Frage: Kann man die Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}$ noch genauer durch quadratische, kubische usw. Funktionen approximieren?

(quadratische Funktion: $g(x) = ax^2 + bx + c$)
(kubische Funktion; $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$)

Erster Schritt zum Ziel:
Finde eine bessere Beschreibung des Restgliedes $R(x) = f(x) - T(x)$ bei der Linearisierung von f.

Satz:

Taylorsche Formel, erster Schritt

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, (d.h. $f''(x)$ existiert und ist stetig), I ein Intervall und $x_0 \in I$.

Dann gilt für alle $x \in I$:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T(x)\ \text{«Linearisierung»}} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)\ \mathrm{d}t}_{R(x)\ \text{«Restglied»}}}$$

Zum Beweis des Satzes benötigen wir zwei Resultate aus der Integrationstheorie.

1. Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$, so gilt

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,;$$

da insbesondere $f(x)$ eine Stammfunktion von $f'(x)$ ist , gilt

$$\boxed{\int_{x_0}^{x} f'(t)\ \mathrm{d}t = f(x) - f(x_0)} \qquad (1)$$

2. Partielle Integration (P.I.):

$$\boxed{\int u \cdot v' \, \mathrm{d}t = u \cdot v - \int u' \cdot v \, \mathrm{d}t} \qquad (2)$$

Beweis des Satzes:

$$\begin{aligned}
f(x) - f(x_0) &\overset{(1)}{=} \int\limits_{x_0}^{x} f'(t) \, \mathrm{d}t = \int\limits_{x_0}^{x} f'(t) \cdot 1 \, \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Trick}}{=} - \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{f'(t)}_{u} \cdot \overbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x-t)}^{v'} \, \mathrm{d}t \\
&\overset{(2)}{=} \left[-\underbrace{f'(t)}_{u} \cdot \underbrace{(x-t)}_{v} \right]_{x_0}^{x} + \int\limits_{x_0}^{x} \underbrace{f''(t)}_{u'} \underbrace{(x-t)}_{v} \, \mathrm{d}t \\
&= f'(x_0)(x - x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x-t) \, \mathrm{d}t \qquad | + f(x_0)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T(x)} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t}_{R(x)}$$

$\square$

Satz:

Taylorsche Formel, zweiter Schritt

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion, (d.h. $f'''(x)$ existiert und ist stetig), I ein Intervall und $x_0 \in I$.

Dann gilt für alle $x \in I$:

$$\boxed{f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T(x)\ \text{«Linearisierung»}} + \underbrace{\frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2}_{Q(x)\ \text{«quadratisches Glied»}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,\mathrm{d}t}_{R(x)\ \text{«Restglied»}}}$$

Bemerkung: $f(x)$ wird durch die quadratische Funktion $T(x) + Q(x)$ in der Nähe von x_0 besser approximiert als nur durch $T(x)$.

Beweis: Nach der Taylorschen Formel (erster Schritt) gilt:

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}_{T(x)} + \underbrace{\int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)\ \mathrm{d}t}_{R_1(x)}$$

Wir wenden jetzt den bekannten Trick in Kombination mit partieller Integration auf $R_1(x)$ an.

$$\begin{aligned}
R_1(x) &= \int\limits_{x_0}^{x} f''(t)(x - t)\ \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Trick}}{=} -\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \underset{u}{f''(t)}\, \underset{v'}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x - t)^2}\ \mathrm{d}t \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} \left[-\frac{1}{2}\underset{u}{f''(t)}\,\underset{v}{(x - t)^2}\right]_{x_0}^{x} + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \underset{u'}{f'''(t)}\,\underset{v}{(x - t)^2}\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{2}f''(x)(x-x)^2}_{0} + \underbrace{\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}_{Q(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 \, \mathrm{d}t}_{R_2(x) \text{ (neues Restglied)}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}_{Q(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 \, \mathrm{d}t}_{R_2(x)}$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{T(x)} + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2}_{Q(x)} + \underbrace{\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2 \, \mathrm{d}t}_{R_2(x)}}_{R_1(x)}$$

$\square$

Beispiel: Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}; \qquad f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}; \qquad f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

$$f'(1) = \frac{1}{2}; \qquad f''(1) = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \underbrace{1 + \frac{1}{2}(x-1)}_{T(x)} - \underbrace{\frac{1}{8}(x-1)^2}_{Q(x)} + \underbrace{\frac{3}{8}\int_1^x t^{-\frac{5}{2}}(x-t)^2 \,\mathrm{d}t}_{R_2(x)}$$

Theorem:

Taylorsche Formel

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion, (d.h. $f^{(n+1)}(x)$ existiert und ist stetig), I ein Intervall und $x_0 \in I$. Dann gilt:

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)}$$

mit $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, \mathrm{d}t$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + R_1(x) && \text{Trick + P.I.}\\
R_1(x) &= \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + R_2(x) && \text{Trick + P.I.}\\
R_2(x) &= \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + R_3(x) && \text{Trick + P.I.}\\
&\vdots\\
R_{n-1}(x) &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + R_n(x) && \text{Trick + P.I.}\\
\text{mit } R_n(x) &= \frac{1}{n!} \int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$\square$

Definition: Taylor-Polynom T_n

Ist $f : I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar, $x_0 \in I$, so heißt

$$\boxed{T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n}$$

das n-te Taylor-Polynom von f zum/im Entwicklungspunkt x_0.

Summenschreibweise:

$$\boxed{T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}$$

Mit Hilfe des n-ten Taylor-Polynoms $T_n(x)$ gilt:

$$\boxed{f(x) = T_n(x) + R_n(x)} \qquad (f \text{ sei } (n+1)\text{-mal stetig differenzierbar})$$

Die Funktion

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x - t)^n \, \mathrm{d}t$$

heißt n-tes Restglied (Restfehlerfunktion).

Beispiel: Taylorpolynome der Wurzelfunktion $f(x) = \sqrt{x}; x_0 = 1$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \qquad f''(x) = \frac{-1}{4x\sqrt{x}}; \qquad f'''(x) = \frac{3}{8x^2\sqrt{x}}; \qquad f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16x^3\sqrt{x}}$$

$$T_1(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1)$$

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2$$

$$T_3(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3$$

$$T_4(x) = 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{1}{16}(x-1)^3 - \frac{5}{128}(x-1)^4$$

Bemerkung: Die Güte der Approximation von $f(x)$ durch das n-te Taylor-Polynom $T_n(x)$ ist durch das n-te Restglied $R_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt$ gegeben.

Für die Praxis ist es oftmals einfacher, eine andere Form des Restglieds zu verwenden.

Satz:

Lagrangesche Form des Restglieds

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, $x_0 \in I$. Dann gilt es zu jedem $x \in I$ ein ξ, welches zwischen x_0 und x liegt, mit

$$\boxed{f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}_{T_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}_{R_n(x)}}$$

$R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ heißt Lagrangesche Form des Restglieds.

Korollar:

Abschätzung des Restglieds

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar, $x, x_0 \in I$.

Des Weiteren gebe es ein M mit

$$|f^{(n+1)}(t)| \leq M$$

für alle t zwischen x_0 und x. Dann folgt

$$\boxed{|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1}}$$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1, \quad x > 1$

$$\sqrt{x} = \underbrace{1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2}_{T_2(x)} + \underbrace{\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-1)^3}_{R_2(x)} \qquad (n = 2)$$

$|f'''(t)| = \dfrac{3}{8t^2\sqrt{t}} = \dfrac{3}{8} \cdot \dfrac{1}{t^{2,5}}$ ist streng monoton fallend und daher ist bei $t = x_0$ das (globale) Maximum.

$$\Rightarrow \quad M = |f'''(1)| = \tfrac{3}{8}$$

Somit folgt:

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{M}{3!}|x-1|^3 = \tfrac{1}{16}|x-1|^3 \overset{(x>1)}{=} \tfrac{1}{16}(x-1)^3$$

z.B. gilt

$$|f(x) - T_2(x)| < 10^{-3} \text{ falls } \tfrac{1}{16}(x-1)^3 < 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{16}(x-1)^3 < 10^{-3} \quad &&| \cdot 16 \\ \Leftrightarrow\ &(x-1)^3 < 16 \cdot 10^{-3} \quad &&| \sqrt[3]{} \text{ (streng monoton steigend)} \\ \Leftrightarrow\ &x - 1 < \sqrt[3]{16} \cdot 10^{-1} \\ \Leftrightarrow\ &x < 1 + \sqrt[3]{16} \cdot 10^{-1} \approx 1{,}25 \end{aligned}$$

Insgesamt gilt:

$$|f(x) - T_2(x)| < 10^{-3} \text{ für alle } 1 < x < 1{,}25$$

Definition:

1. Potenzreihe mit/im Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist eine Funktionsreihe der Form
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$
mit $a_n \in \mathbb{R}$. Die reellen Zahlen $a_0, a_1, a_2, \ldots$ heißen Koeffizienten.

2. Der Grenzwert (falls er existiert)
$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$
heißt Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.

   Die Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \left\{ \begin{array}{l} \text{konvergiert (absolut)} \\ \text{divergiert} \end{array} \right\}$ für alle x mit $\left\{ \begin{array}{l} |x - x_0| < r \\ |x - x_0| > r \end{array} \right\}$.
   Für $|x - x_0| = r$ ist eine allgemeine Konvergenzaussage nicht möglich.

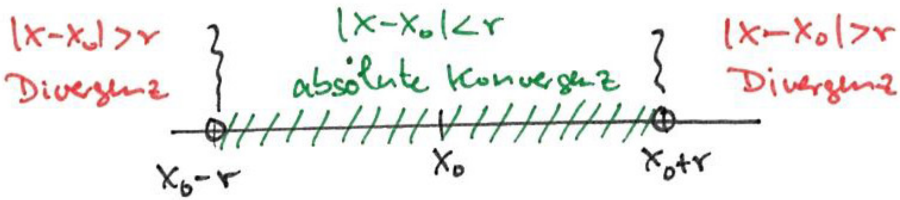

Abbildung 6.2.

Das Intervall $]x_0 - r; x_0 + r[$ heißt Konvergenzintervall.

Bemerkung:

1. Zur Berechnung des Konvergenzradius r gibt es eine allgemeine Formel, die verwendet wird, falls der Grenzwert nicht existiert ($\Rightarrow$ Konvergenzradius existiert für jede Potenzreihe).

2. Ist der Konvergenzradius $r = \infty$, so konvergiert die Potenzreihe für jedes $x \in \mathbb{R}$; für

das Konvergenzintervall gilt $]-\infty;\infty[$. Ist $r = 0$, so konvergiert die Potenzreihe nur für $x = x_0$; für das Konvergenzintervall gilt in diesem Fall $I = \{x_0\}$.

3. Durch eine Potenzreihe wird eine Funktion (genannt Potenzreihenfunktion) auf ihrem Konvergenzintervall definiert.
$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$
mit $\mathbb{D} =]x_0 - r; x_0 + r[= \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} \quad (r = \text{Konvergenzradius})$

Definition: Ist $f : I \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion, $x_0 \in I$, so heißt die Potenzreihe

$$\boxed{T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

die Taylor-Reihe von f mit/im Entwicklungspunkt x_0; im Falle $x_0 = 0$ heißt $T_f(x)$ auch Maclaurinsche Reihe.

Beachte:

1. Der Konvergenzradius einer Taylor-Reihe kann auch 0 sein.

2. Falls die Taylor-Reihe von f konvergiert, konvergiert sie nicht notwendig gegen f, d.h. $f(x) \neq T_f(x)$ für gewisse x möglich.

3. Die Taylor-Reihe konvergiert genau dann gegen $f(x)$, wenn das Restglied aus der Taylorschen Formel gegen 0 konvergiert, d.h. $\boxed{f(x) = T_f(x) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0}$

Definition: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar $x_0 \in I$. Unter einer Potenzreihenentwicklung von f um x_0 versteht man eine Darstellung von $f(x)$ durch eine Potenzreihe in einer Umgebung von x_0, d.h. es gibt $\epsilon > 0$ mit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

für alle $x \in]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[\subseteq I$.

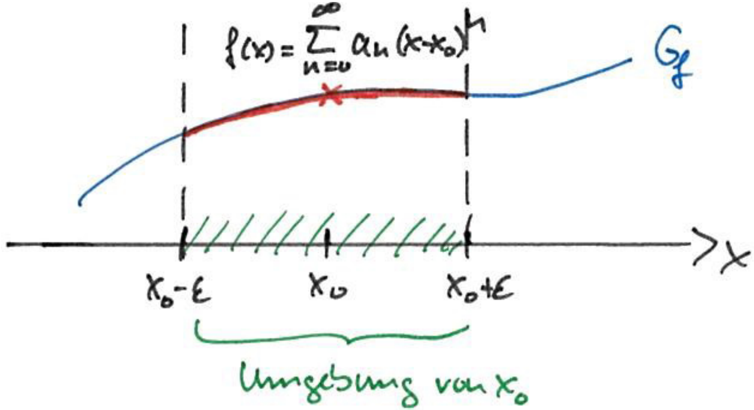

Abbildung 6.3.

Bemerkung: Besitzt f (irgendeine beliebige) Potenzreihenentwicklung um x_0, so stimmt die Potenzreihe stets mit der Taylor-Reihe überein, d.h. aus $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ folgt $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ (Eindeutigkeit der Potenzreihenentwicklung).

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{a_n}(x-x_0)^n$$

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

Beispiel: (Taylorreihen)

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$

   $x \in \mathbb{R}$ (Exponentialreihe)

2. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$

   $|x| < 1$ (Logarithmusreihe)

   alternierendes (=wechselndes) Vorzeichen (verursacht durch $(-1)^{n-1}$)

3. $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

   $x \in \mathbb{R}$ (Sinusreihe)

4. $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$

   $x \in \mathbb{R}$ (Cosinusreihe)

5. $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$

   $|x| \leq 1$ (Arkustangensreihe)

6. $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \binom{\alpha}{0} + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \ldots$

   $|x| < 1$ (Binomische Reihe)

verallgemeinerter Binomialkoeffizient:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot \ldots \cdot (\alpha-n+1)}{n!} = \prod_{k=0}^{n} \frac{\alpha-k+1}{k} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

Beispiel: $\binom{\alpha}{0} = 1, \quad \binom{\alpha}{1} = \alpha, \quad \binom{\alpha}{2} = \frac{\overbrace{\alpha\cdot(\alpha-1)}^{\text{2 Faktoren}}}{2!}, \quad \binom{\alpha}{3} = \frac{\overbrace{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot(\alpha-2)}^{\text{3 Faktoren}}}{3!},$ usw.

<u>Spezialfall:</u> $\alpha = -1$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$|x| < 1 \quad \text{(Geometrische Reihe)}$$

$$\frac{1}{1-x} = \underbrace{(1-x)^{-1}}_{[1+(-x)]^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} \cdot (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1}{n} (-1)^n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\binom{-1}{n} = \frac{(\overbrace{-1}^{\alpha}) \cdot (\overbrace{-1}^{\alpha} - 1) \cdot (\overbrace{-1}^{\alpha} - 2) \cdot (\overbrace{-1}^{\alpha} - 3) \cdot \ldots \cdot (\overbrace{-1}^{\alpha} - n + 1)}{n!}$$

$$= \frac{\overbrace{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4) \cdot \ldots \cdot (-n)}^{n \text{ Faktoren}}}{n!}$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n}{n!}$$

$$= \frac{(-1)^n \cdot n!}{n!} = (-1)^n$$

zu 1.

$$\begin{aligned} x_0 = 0, \quad (e^x)' &= e^x \\ (e^x)'' &= e^x \\ &\vdots \\ (e^x)^{(n)} &= e^x \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Taylorsche Reihe von $f(x) = e^x \qquad (x_0 = 0)$

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^0}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

zu 2. ($\rightarrow$ später noch weitere Berechnungsmöglichkeit)

$$\begin{aligned} x_0 = 0, \quad f(x) &= \ln(1+x) \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \\ f''(x) &= (-1)(1+x)^{-2} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f'''(x) &= (-1)(-2)(1+x)^{-3} \\
f^{(4)}(x) &= (-1)(-2)(-3)(1+x)^{-4} \\
f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} \\
T_f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= \underbrace{\frac{f(0)}{0!} x^0}_{f(0)=\ln(1)=0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} x^n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n
\end{aligned}
$$

zu 3.

$$x_0 = 0, \quad f(x) = \sin x \qquad\qquad f(0) = 0 \quad n = 0$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \quad n = 1 \\ f''(x) &= -\sin x & f''(0) &= 0 \quad n = 2 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \quad n = 3 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x = f(x) & f^{(4)}(0) &= 0 \quad n = 4 \end{aligned}$$

Nur ungerade $n = 1, 3, 5, 7, \ldots$ müssen berücksichtigt werden.
$\Rightarrow$ schreibe $n = 2k + 1 \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots)$
Damit gilt

$$\begin{aligned} f^{(n)}(0) &=? & (n = 2k+1) \\ f^{(2k+1)}(0) &= +1 & (k = 0) \\ f^{(2k+1)}(0) &= -1 & (k = 1) \\ f^{(2k+1)}(0) &= +1 & (k = 2) \\ f^{(2k+1)}(0) &= -1 & (k = 3) \\ &\vdots \\ f^{(2k+1)}(0) &= (-1)^k & (k = 3) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Taylorsche Reihe

$$\begin{aligned}
T_f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\
&\overset{(n=2k+1)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(2k+1)}(0)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}
\end{aligned}$$

zu 6.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{\alpha} \\
f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \\
f'''(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n} \\ &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \\ f^{(n)}(0) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Taylorsche Reihe

$$\begin{aligned} T_f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}}_{\binom{\alpha}{n}} x^n \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \end{aligned}$$

Satz:

Grundlegende Eigenschaften von Potenzreihen

1. $a \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a \cdot a_n(x-x_0)^n \quad (a \in \mathbb{R})$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \pm \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n$

3. $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right] \cdot \left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right] = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$

   mit $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0 = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (Cauchy-Produkt)

für alle $x \in \mathbb{D}_f \cap \mathbb{D}_g$ $\left[f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right]$ besitzen insbesondere $f(x), g(x)$ positive Konvergenzradien $r_f > 0, r_g > 0$, so gilt

$$r \geq \min(r_f; r_g)$$

für den Konvergenzradius r von $f(x) \pm g(x)$ bzw. $f(x) \cdot g(x)$.

Bemerkung: Multiplikationstabelle für das Cauchy-Produkt

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right] \cdot \left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

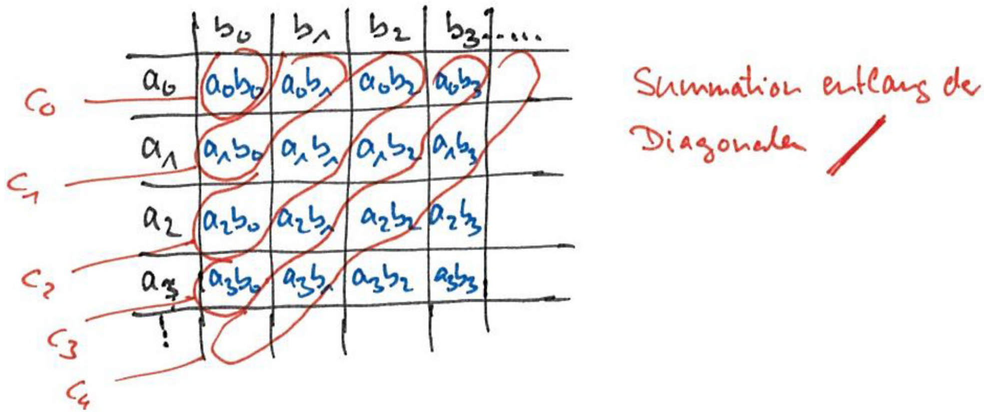

Abbildung 6.4.

Differenzieren und Integrieren von Potenzreihen

Satz:

1. Jede Potenzreihenfunktion $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ist auf ihrem Konvergenzintervall $]x_0 - r, x_0 + r[$ unendlich oft differenzierbar. Die Ableitung $f'(x)$ (und alle höheren Ableitungen) erhält man durch gliedweise Differentiation

$$\boxed{f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x - x_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n (x - x_0)^{n-1}}$$

2. Jede Potenzreihenfunktion $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ besitzt auf ihrem Konvergenzintervall $]x_0 - r, x_0 + r[$ eine Stammfunktion $F(x)$; eine solche erhält man durch gliedweise Integration

$$\boxed{F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \int a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1} + C}$$

Bemerkung: Für die k-te Ableitung von $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ gilt:

$$\boxed{f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) a_n (x - x_0)^{n-k}}$$

Beispiel:

1. $\cos(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x)$

   Wegen $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ folgt

$$\begin{aligned}
\cos(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^{2k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} (2k+1) x^{2k}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(2k+1)!} x^{2k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} x^{2k}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

2. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln(1+x) = \dfrac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\binom{-1}{n}}_{(-1)^n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

$$\ln(1+x) = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \,\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int x^n \,\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\text{aus } 0 = \ln(1+0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{n+1}}{n+1} + C = C$$

$$\text{folgt } C = 0$$

$$\Rightarrow \ln(1+x) <= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

3. $f(x) = \arctan(x)$
   $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Hier fehlt noch was!!!

Zusammenfassung: In 3 Schritten zur Potenzreihenentwicklung

1. Bestimmung der Taylor-Reihe $T_f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ von $f(x)$

2. Berechnung des Konvergenzradius r von $T_f(x)$
   $\Rightarrow$ Konvergenzintervall $]x_0 - r; x_0 + r[$

3. Bestimmung von ϵ mit $0 < \epsilon < r$, so dass das Restglied $R_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ gegen Null konvergiert für jedes $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon \Rightarrow f$ wird durch T_f auf $]x_0 - \epsilon; x_0 + \epsilon[$ dargestellt.

6.3. Fourier-Reihen

Periodische Vorgänge: Physikalische Vorgänge, bei denen nach endlicher Zeit T das physikalische System in den Ausgangszustand zurückkehrt, heißen periodisch; T nennt man Periode (oder Periodendauer).

Beispiel:

1. Schwingungsvorgang eines Pendels oder elektrischen Schwingkreises (oder Luftmoleküle)

2. Bewegung eines Planeten um die Sonne

Werte einer physikalischen Größe, die während eines periodischen Vorgangs gemessen werden, wiederholen sich nach der Periodendauer T; bezeichnet man mit $A(t)$ die physikalische Größe zum Zeitpunkt t, so gilt

$$\boxed{A(t+T) = A(t)} \quad \text{(für jedes } t\text{)}$$

$A(t)$ ist eine sogenannte periodische Funktion.

Der periodische Vorgang heißt harmonisch, wenn sich die (zeitabhängigen) physikalischen Größen in der Form

$$\boxed{A(t) = A_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)} \qquad \begin{array}{l} A_0 = \text{Amplitude } (A_0 > 0) \\ \omega = \dfrac{2\pi}{T} = \text{Kreisfrequenz} \\ \varphi_0 = \text{Phasenwinkel} \end{array}$$

schreiben lassen.

Beispiel: Schwingungen eines Faden- oder Federpendels («harmonische Schwingung»)

$$y(t) = \hat{y}\sin(\omega t) \qquad \text{(Auslenkung)}$$

$$v(t) = \hat{v}\cos(\omega t) \qquad \text{(Geschwindigkeit)}$$

$$a(t) = -\hat{a}\sin(\omega t) \qquad \text{(Beschleunigung)}$$

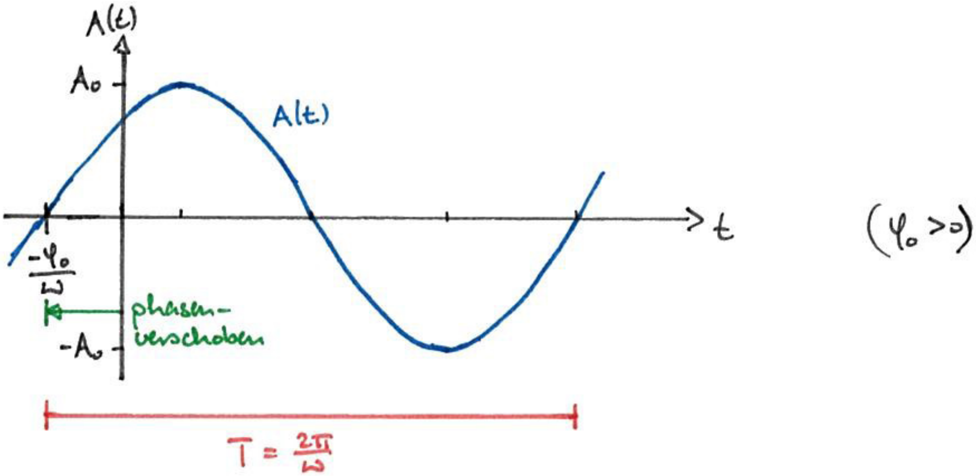

Abbildung 6.5.

Additionstheoreme des Sinus:

$$\sin(x_1 + x_2) = \sin(x_1) \cdot \cos(x_2) + \cos(x_1) \cdot \sin(x_2)$$

$$\Rightarrow \sin(\omega t + \varphi_0) = \sin(\omega t) \cdot \underbrace{\cos(\varphi_0)}_{a} + \cos(\omega t) \cdot \underbrace{\sin(\varphi_0)}_{b}$$

$$= a \cdot \underbrace{\sin(\omega t)} + b \cdot \underbrace{\cos(\omega t)}$$

keine Phasenverschiebung

$=$ «Überlagerung gleichfrequenter harmonischer Schwingungen»

Fourier: Jeder periodische Vorgang kann beschrieben werden als eine (i.a. unendliche) Überlagerung von harmonischen Vorgängen.

$\rightarrow$ «Fourier-Reihen».

6.3.1. Periodische Funktionen:

Mathematische Beschreibung periodischer Vorgänge!

Definition: Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to K$ ($K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$) heißt periodisch mit Periode T (>0) (oder T-periodisch), wenn

$$f(t+T) = f(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.

Bemerkung:

1. Ist T eine Periode von f, so auch jedes nT ($n \in \mathbb{N}$). ($\to$ viele periodische Funktionen besitzen eine kleinste positive Periode)

2. Periodentransformation:

$$f(t)\ T\text{-periodisch} \Rightarrow g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)\ 2\pi\text{-periodisch}$$
$$g(x)\ 2\pi\text{-periodisch} \Rightarrow f(t) = g\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\ T\text{-periodisch}$$

$\Rightarrow$ bei der Untersuchung periodischer Funktionen kann man sich oftmals auf den Spezialfall 2π-periodischer Funktionen beschränken.

Beispiel:

1. $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind 2π-periodisch

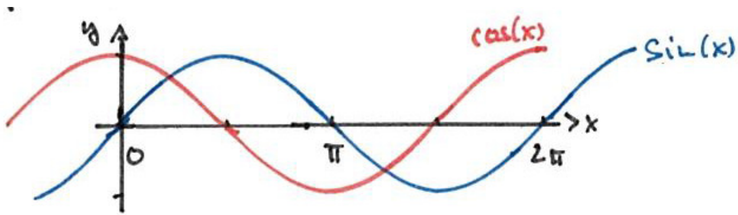

Abbildung 6.6.

2. $\tan x, \cot x$ sind π-periodisch

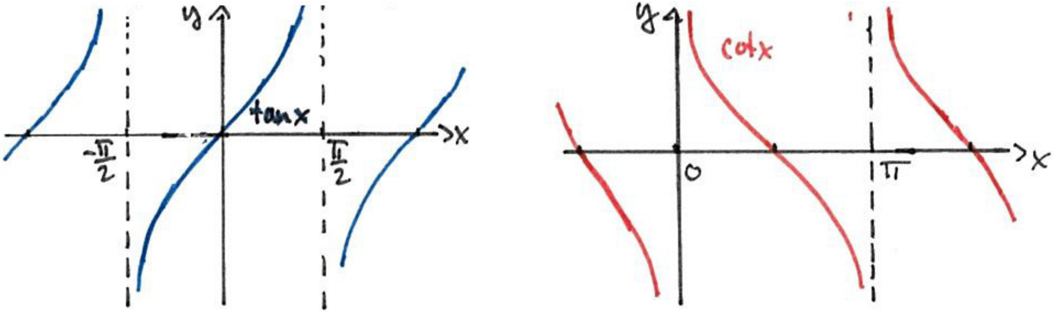

Abbildung 6.7.

3. $\sin(ax), \cos(ax) \qquad (a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

   $\sin(x)$ ist 2π-periodisch $\Rightarrow \sin\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$ ist T-periodisch

   $\cos(x)$ ist 2π-periodisch $\Rightarrow \cos\left(\dfrac{2\pi}{T}t\right)$ ist T-periodisch

   $\Rightarrow \sin(ax), \cos(ax) \quad (a > 0)$ ist T-periodisch mit $a = \dfrac{2\pi}{a}$, d.h. $T = \dfrac{2\pi}{a}$

z.B. sind $\sin(2x), \cos(2x)$ π-periodisch

allgemein gilt:

$$\boxed{\sin(kx), \cos(kx) \text{ sind } \frac{2\pi}{k}\text{-periodisch}} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

Definition: trigonometrische Polynome

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt trigonometrisches Polynom der Ordnung n, falls sie sich in der Form

$$\boxed{f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))} \quad (\#)$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Jedes trigonometrische Polynom ist 2π-periodisch, denn $\cos(kx)$ und $\sin(kx)$ sind $\frac{2\pi}{k}$-periodisch; insbesondere auch $k\frac{2\pi}{k} = 2\pi$-periodisch.
Die Koeffizienten a_k, b_k sind durch $f(x)$ eindeutig bestimmt, denn es gilt:

Satz:

Euler-Fouriersche Formel

Für die Koeffizienten a_k, b_k in (#) gilt:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

Die Integration in obigem Satz kann über jedes beliebige Intervall der Form $[a; a + 2\pi]$ $(a \in \mathbb{R})$ erfolgen, z.B. $[-\pi; \pi]$.

Definition:

1. Unter einer Fourier-Reihe (oder trigonimetrischen Reihe) versteht man eine Funktionenreihe der Form

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)}$$

mit $a_k, b_k \in \mathbb{R}$; a_k, b_k heißen Fourier-Koeffizienten.

2. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, die über $[0; 2\pi]$ integrierbar ist, so heißt

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)}$$

mit

$$\boxed{a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\ \mathrm{d}x \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots)}$$

$$\boxed{b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx)\ \mathrm{d}x \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)}$$

die Fourier-Reihe von f.

Bemerkung: Die Fourier-Reihe einer Funktion $f(x)$ muss nicht konvergieren. Selbst wenn sie für gewisse x konvergiert, muss sie nicht gegen $f(x)$ konvergieren.

$\rightarrow$ Konvergenzbedingungen?

Satz: **Hinreichende Bedingungen von Dirichlet**

Eine 2π-periodische Funktion $f(x)$ erfülle folgende Dirichlet-Bedingungen:

1. Das Periodenintervall $[0; 2\pi]$ lässt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, so dass $f(x)$ auf jedem Teilintervall stetig und differenzierbar ist und zudem $f'(x)$ stetig ist (d.h. f ist stückweise stetig differenzierbar (auch die Ableitung ist stetig)).

2. An jeder Unstetigkeitsstelle x_0 existieren links- und rechtsseitiger Grenzwert $f(x_0^{\pm}) := \lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x)$. $\quad \underbrace{\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)}_{f(x_0^-)} = y1 \quad \underbrace{\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)}_{f(x_0^+)} = y2$

Dann konvergiert die Fourier-Reihe von f gegen

a) $f(x)$, falls f in x stetig ist.

b) $\dfrac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2}$, falls f in x_0 unstetig ist.

Bemerkung: Alle bisherigen Aussagen gelten entsprechend auch für T-periodische Funktionen (ersetzte 2π-periodisch durch T-periodisch, 2π durch $T\ldots$).

- Fourier-Reihe:

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)} \qquad \left(\omega_0 = \frac{2\pi}{T},\ x \mathrel{\hat{=}} \omega_0 t\right)$$

- Euler-Fouriersche Formel

$$\boxed{a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos(k\omega_0 t)\ \mathrm{d}t \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)}$$

$$\boxed{b_k = \frac{2}{T} \int\limits_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin(k\omega_0 t)\ \mathrm{d}t \qquad (k = 1, 2, \ldots)}$$

- Bedingungen von Dirichlet
  (analog!)

Beispiel: Rechteckimpuls

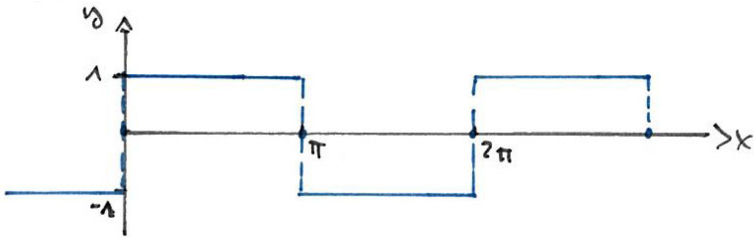

Abbildung 6.8.

$$f(x) = \begin{cases} +1, & \text{für } 0 < x < \pi \\ 0, & \text{für } x = \pi \\ -1, & \text{für } \pi < x < 2\pi \end{cases} \qquad \text{(periodisch fortgesetzt)}$$

Bestimmung der Fourier-Koeffizienten:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\ \mathrm{d}x \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} 1\ \mathrm{d}x - \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pi}^{2\pi} 1\ \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left[x\right]_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[x\right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= 1 - 1 = 0 \qquad \text{Gleichspannungsanteil} \end{aligned}$$

$k \geq 1$:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos(kx)\ \mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} 1\cdot\cos(kx)\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} 1\cdot\cos(kx)\,\mathrm{d}x\right\}\\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_0^{\pi} - \left[\frac{1}{k}\sin(kx)\right]_{\pi}^{2\pi}\right\}\\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{1}{k}\left[\underbrace{\sin(k\pi)}_{0} - \underbrace{\sin(0)}_{0}\right] - \frac{1}{k}\left[\underbrace{\sin(k2\pi)}_{0} - \underbrace{\sin(k\pi)}_{0}\right]\right\}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\pi} 1\cdot\sin(kx)\,\mathrm{d}x - \int_{\pi}^{2\pi} 1\cdot\sin(kx)\,\mathrm{d}x\right\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{1}{k}\cos(kx)\right]_{\pi}^{2\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\left[-\frac{1}{k}\cos(k\pi) + \frac{1}{k}\cos(0)\right] - \left[-\frac{1}{k}\cos(k2\pi) + \frac{1}{k}\cos(k\pi)\right]\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{-\frac{2}{k}\underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k} + \frac{1}{k}\underbrace{\cos(0)}_{1} + \frac{1}{k}\underbrace{\cos(k2\pi)}_{1}\right\} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{2}{k} - \frac{2}{k}\cos(k\pi)\right\} \\
&= \frac{2}{k\pi}\left(1 - \underbrace{\cos(k\pi)}_{(-1)^k}\right) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{für } k = 2, 4, 6, 8, \ldots \\ \dfrac{4}{k\pi}, & \text{für } k = 1, 3, 5, 7, \ldots \end{cases}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Fourier-Reihe von f:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} b_k \sin(kx) \\
&= \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{4}{k\pi} \sin(kx) \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(kx) \\
&= \frac{4}{\pi} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2\nu - 1} \sin((2\nu - 1)x) \\
&= \frac{4}{\pi} \left(\sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \ldots \right)
\end{aligned}$$

Definition: Eine Funktion $f(x)$ heißt $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\text{gerade}} \\ \underline{\text{ungerade}} \end{array} \right\}$, wenn $\left\{ \begin{array}{l} f(-x) = f(x) \\ f(-x) = -f(x) \end{array} \right\}$ gilt.

Bemerkung:

1. $f(x)$ gerade/ungerade $\Leftrightarrow$ Graph G_f ist achsen-/punktsymmetrisch
2. $\cos(x)$ ist gerade, $\sin(x)$ ist ungerade Funktion
   (analog auch für $\cos(kx)$, $\sin(kx)$)

Satz:

Sei f eine $\left\{ \begin{array}{c} \text{gerade} \\ \text{ungerade} \end{array} \right\}$ T-periodische Funktion
Für die Fourier-Reihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$$

gilt dann

$$\begin{cases} b_k = 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots \\ a_k = 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Beweis: Sei f gerade. Dann gilt

$$b_k = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\sin(k\omega_0 t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \underbrace{\overbrace{f(t)}^{\text{gerade}}\overbrace{\sin(k\omega_0 t)}^{\text{ungerade}}}_{ungerade}\ \mathrm{d}t = 0$$

Beweis: Sei f ungerade. Dann gilt

$$a_k = \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\cos(k\omega_0 t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} \underbrace{\overbrace{f(t)}^{\text{ungerade}}\ \overbrace{\cos(k\omega_0 t)}^{\text{gerade}}}_{ungerade}\ \mathrm{d}t = 0$$

6.4. Fourier-Reihen in spektraler Darstellung

die in eine Fourier-Reihe $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t)$ auftretenden Terme $a_k\cos(k\omega_0 t) + b_k\sin(k\omega_0 t)$ stellen phasenverschobene Sinuskurven (bzw. Kosinuskurven) mit Kreisfrequenzen $k\omega_0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$ dar.

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 6.9.

$$\boxed{y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)} \qquad (= A \cdot \cos(\omega t + \varphi^* \text{ mit } \varphi^* = \varphi - \tfrac{\pi}{2})$$

$A =$ Amplitude
$\omega = \dfrac{2\pi}{T} =$ Kreisfrequenz
$T =$ Periode

$\varphi =$ Phasenwinkel

Satz:

$$\boxed{A \cdot \sin(\omega t + \varphi) = a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t)}$$

mit $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\tan\varphi = \dfrac{a}{b}$ (bzw. $\cos\varphi = \dfrac{b}{A}$)

Geometrische Interpretation

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 6.10.

Beweis folgt aus dem Additionstheorem für $\sin(x)$:

$$\sin(x_1 \pm x_2) = \sin(x_1)\cos(x_2) \pm \cos(x_1)\sin(x_2)$$

$$\sin(\underbrace{\omega t}_{x_1} + \underbrace{\varphi}_{x_2}) = \sin(\underbrace{\omega t}_{x_1})\cos(\underbrace{\varphi}_{x_2}) + \cos(\underbrace{\omega t}_{x_1})\sin(\underbrace{\varphi}_{x_2})$$

$$\Rightarrow A\sin(\omega t + \varphi) = \underbrace{A \cdot \cos(\varphi)}_{b} \cdot \sin(\omega t) + \underbrace{A \cdot \sin(\varphi)}_{a} \cdot \cos(\omega t)$$

$$= a \cdot \cos(\omega t) + b \cdot \sin(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \text{(I) } a = A \cdot \sin(\varphi) \\ \text{(II) } b = A \cdot \cos(\varphi) \end{array}}$$

vergleiche Polarkoordinaten
$y = r \cdot \sin(\varphi)$
$x = r \cdot \cos(\varphi)$

$$a^2 + b^2 = A^2\sin^2(\varphi) + A^2\cos^2(\varphi) = A^2(\underbrace{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}_{1}) = A^2$$

$$\Rightarrow \boxed{A = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

aus (II) $\quad \cos(\varphi) = \dfrac{b}{A}$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{b}{A}\right), & \text{falls } a \geq 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) \\ -\arccos\left(\dfrac{b}{A}\right), & \text{falls } a < 0 \quad (-\pi < \varphi < 0) \end{cases}}$$

$\square$

Transformation $(A; \varphi) \leftrightarrow (b; a)$

$$\longrightarrow: \boxed{\begin{aligned} b &= A \cdot \cos\varphi \\ a &= A \cdot \sin\varphi \end{aligned}}$$

$$\longleftarrow: \boxed{\begin{array}{l} A = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \varphi = \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{b}{A}\right), & \text{falls } a \geq 0 \quad (0 \leq \varphi \leq \pi) \\ -\arccos\left(\dfrac{b}{A}\right), & \text{falls } a < 0 \quad (-\pi < \varphi < 0) \end{cases} \end{array}}$$

Definition:

a) Die Funktionenreihe

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} A_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k) = A_0 + A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega_0 t + \varphi_2) + \ldots}$$

heißt spektrale Darstellung (oder Spektraldarstellung) der Fourier-Reihe $\dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) +$ $b_k \sin(k\omega_0 t)$, wobei

$$\boxed{\begin{aligned} A_0 &= \frac{a_0}{2} \\ A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \qquad (k \geq 1) \\ \varphi_k &= \begin{cases} \arccos\left(\dfrac{b_k}{A_k}\right), & \text{falls } a_k \geq 0 \quad (k \geq 1) \\ -\arccos\left(\dfrac{b_k}{A_k}\right), & \text{falls } a_k < 0 \end{cases} \end{aligned}}$$

gilt.

b) Folgende Zuordnungen heißen Amplituden- oder Frequenzspektrum bzw. Phasenspektrum

$$(\omega = k\omega_0) \quad \boxed{\begin{aligned} &\frac{\omega}{\omega_0} = k \to A_k \qquad \underline{\text{Amplituden-}} \text{ oder } \underline{\text{Frequenzspektrum}} \\ &\hspace{20em} (k = 0, 1, 2, \ldots) \\ &\frac{\omega}{\omega_0} = k \to \varphi_k \qquad \underline{\text{Phasenspektrum}} \\ &\hspace{20em} (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}}$$

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 6.11.

6.5. Fourier-Reihen in komplexer Darstellung

6.5.1. Eulersche Formel

$$\boxed{e^{\imath x} = \cos x + \imath \sin x} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Aus (I) $e^{\imath x} = \cos x + \imath \sin x \quad (= z)$
und (II) $e^{-\imath x} = \cos(-x) + \imath \sin(-x) = \cos x - \imath \sin x \quad (= \overline{z})$
erhält man durch

- Addition (der Gleichungen)

$$e^{\imath x} + e^{-\imath x} = 2 \cos x \quad | : 2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\cos x = \tfrac{1}{2}(e^{\imath x} + e^{-\imath x})} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad (*)$$

- Subtraktion (der Gleichungen)

$$e^{\imath x} - e^{-\imath x} = 2\imath \cos x \quad | : 2\imath$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\sin x = \tfrac{1}{2\imath}(e^{\imath x} - e^{-\imath x})} \quad (x \in \mathbb{R}) \qquad (**)$$

Satz:

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\boxed{a\cos x + b\sin x = ce^{\imath x} + \overline{c}e^{-\imath x}}$$

mit $c = \frac{1}{2}(a - \imath b) \quad (\overline{c} = \frac{1}{2}(a + \imath b))$

Beweis: $\cos x = \frac{1}{2}(e^{\imath x} + e^{-\imath x}), \sin x = \frac{1}{2\imath}(e^{\imath x} - e^{-\imath x})$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow a\cos x + b\sin x &= \frac{a}{2}(e^{\imath x} + e^{-\imath x}) + \frac{b}{2\imath}(e^{\imath x} - e^{-\imath x}) \\
&= \underbrace{\left(\frac{a}{2} + \frac{b}{2\imath}\right)}_{c} e^{\imath x} + \left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2\imath}\right) e^{-\imath x} \qquad (\frac{1}{\imath} = -\imath) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}(a - \imath b)}_{c} e^{\imath x} + \underbrace{\frac{1}{2}(a + \imath b)}_{\overline{c}} e^{-\imath x}
\end{aligned}$$

$\square$

Satz:

Fourier-Polynom in komplexer Form

Es gilt

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\imath k\omega_0 t}}$$

mit $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$ und $c_k = \frac{1}{2}(a_k - \imath b_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + \imath b_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n)$

Beweis:

$$a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) = c_k e^{\imath k\omega_0 t} + \overline{c_k} e^{-\imath k\omega_0 t}$$

$$\text{mit } c_k = \frac{1}{2}(a_k - \imath b_k), \quad \overline{c_k} = \frac{1}{2}(a_k + \imath b_k)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\imath k\omega_0 t} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \overline{c_k} e^{-\imath k\omega_0 t}}_{\text{Summationsindex ändern!}}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{c_k} e^{-\imath k\omega_0 t} \stackrel{l=-k}{=} \sum_{l=-n}^{-1} \underbrace{\overline{c_{-l}}}_{\substack{=c_l \\ \text{per Def.}}} e^{\imath l\omega_0 t}$$

$$= \sum_{l=-n}^{-1} c_l e^{\imath l\omega_0 t}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{c_0} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) = \sum_{l=-n}^{-1} c_l e^{\imath l\omega_0 t} + c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\imath k\omega_0 t}$$

$$\stackrel{\substack{\text{schreibe für } l \\ \text{wieder } k}}{=} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\imath k\omega_0 t}$$

mit $c_k = \frac{1}{2}(a_k - \imath b_k)$ und $c_{-k} = \overline{c_k} = \frac{1}{2}(a_k + \imath b_k)$ $\qquad (k = 1, 2, \ldots)$

$\square$

Definition: die Funktionenreihe $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\imath k\omega_0 t}$ heißt konvergent, wenn die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\imath k\omega_0 t} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

konvergiert, d.h.

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\imath k\omega_0 t} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\imath k\omega_0 t}$$

Bestimmung der komplexen Koeffizienten c_k:

Sei $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{\imath k\omega_0 t}$

Dann gilt

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-\imath k\omega_0 t}\, \mathrm{d}t}$$

Denn:

$$c_k = \frac{1}{2}(a_k - \imath b_k) \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(t) \cos(k\omega_0 t)\ \mathrm{d}t$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int\limits_0^T f(t) \sin(k\omega_0 t)\ \mathrm{d}t$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{T} \left[\int\limits_0^T f(t) \cos(k\omega_0 t)\ \mathrm{d}t - \imath \int\limits_0^T f(t) \sin(k\omega_0 t)\ \mathrm{d}t \right]$$

$$= \frac{1}{T} \left[\int\limits_0^T f(t) \underbrace{(\cos(k\omega_0 t) - \imath \sin(k\omega_0 t)}_{e^{-\imath k\omega_0 t}}\ \mathrm{d}t \right]$$

$$= \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t) e^{-\imath k\omega_0 t}\ \mathrm{d}t$$

HÜ: $c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + \imath b_k) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$

Bemerkung: Ist $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine komplex-wertige Funktion, $u(x) = \Re(f(x))$, $v(x) = \Im(f(x))$ (d.h. $f(x) = u(x) + \imath v(x)$), so definiert man

$$\boxed{\int f(x)\, \mathrm{d}x := \underbrace{\int u(x)\, \mathrm{d}x}_{\in\mathbb{R}} + \imath \underbrace{\int v(x)\, \mathrm{d}x}_{\in\mathbb{R}} \quad \in \mathbb{C}}$$

Definition:

Satz:

Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ T-periodisch und über $[t_0; t_0 + T]$ integrierbar, so heißt

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\imath k\omega_0 t} = c_0 + c_{-1}e^{-\imath\omega_0 t} + c_1 e^{\imath\omega_0 t} + c_{-2}e^{-\imath 2\omega_0 t} + c_2 e^{\imath 2\omega_0 t} + \ldots}$$

mit $\boxed{c_k = \frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} f(t)e^{-\imath k\omega_0 t}\,\mathrm{d}t}$ $\quad (k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \text{ d.h. } k \in \mathbb{Z})$

die Fourier-Reihe von $f(t)$ in komplexer Darstellung.

Ist $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t)$ die (reelle) Fourier-Reihe von $f(t)$, so gilt

$$\boxed{\begin{aligned} &c_k = \tfrac{1}{2}(a_k - \imath b_k), \quad c_{-k}\tfrac{1}{2}(a_k + \imath b_k) = \overline{c_k} \\ &c_0 = \frac{a_0}{2} \qquad\qquad (k = 1, 2, \ldots) \end{aligned}}$$

bzw.

$$\boxed{\begin{aligned} &a_k = c_k + c_{-k} \quad [= 2\Re(c_k)] \\ &b_k = \imath(c_k - c_{-k}) \quad [= -2\Im(c_k)] \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots) \\ &a_0 = 2c_0 \end{aligned}}$$

Die Zuordnung $\frac{\omega}{\omega_0} = k \mapsto |c_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ heißt Sektrum.

Beispiel: Rechteckimpuls

reelle Fourier-Reihe $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \sin[(2n-1)x]$

$$\left.\begin{array}{lll} b_k & = \frac{4}{\pi k} & (k = 1, 3, 5, \ldots) \\ b_k & = 0 & (k = 2, 4, 6, \ldots) \\ a_k & = 0 & (k = 0, 1, 2, \ldots) \end{array}\right\} \begin{array}{rl} c_k & = \frac{1}{2}(a_k - \imath b_k) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \\ c_{-k} & = \frac{1}{2}(a_k + \imath b_k) \\ c_0 & = \frac{a_0}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow c_k \overset{a_k=0}{=} -\imath \frac{b_k}{2} = \begin{cases} -\imath \frac{2}{k\pi}, & k = 1, 3, 5, \ldots \\ 0, & k = 2, 4, 6, \ldots \end{cases} \qquad (c_0 = 0) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

HÜ: $[c_{-k} = \imath \frac{b_k}{2} = \ldots]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\imath \frac{2}{(2n-1)\pi} e^{\imath(2n-1)x} \\ &= -\frac{2\imath}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\imath(en-1)x}}{2n-1} \end{aligned}$$

Direkte Berechnung der komplexen Fourierkoeffizienten c_k:

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 6.12.

Periode $T = 2\pi$

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) e^{-\imath k x} \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{\pi} 1 \cdot e^{-\imath k x} \,\mathrm{d}x + \int\limits_{\pi}^{2\pi} (-1) e^{-\imath k x} \,\mathrm{d}x \right\} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int\limits_0^{\pi} e^{-\imath k x} \,\mathrm{d}x - \int\limits_{\pi}^{2\pi} e^{-\imath k x} \,\mathrm{d}x \right\} \qquad \int e^{ax} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} e^{ax} + C \quad (a \in \mathbb{C}, a \neq 0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-\imath k}e^{-\imath kx}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{-\imath k}e^{-\imath kx}\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= -\frac{1}{2\pi\imath k}\left[e^{-\imath k\pi} - \underbrace{e^{0}}_{1}\right] + \frac{1}{2\pi\imath k}\left[\underbrace{e^{-\imath k\cdot 2\pi}}_{1} - e^{-\imath k\pi}\right] \\
&= -\frac{2}{2\pi\imath k}e^{-\imath k\pi} + \frac{2}{2\pi\imath k} \\
&= \frac{}{\pi\imath k}(1 - e^{-\imath k\pi})
\end{aligned}
$$

$$
e^{-\imath k\pi} = \begin{cases} -1, & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \\ 1, & k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow c_k = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi\imath k}, & k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots \quad k = 2n-1 \quad (n = 1, 2, \ldots) \\ 0, & k = 0, \pm 2, \pm 4, \ldots \end{cases}
$$

$$
\Rightarrow f(x) = \frac{2}{\pi\imath}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i(2n-1)x}}{2n-1} \qquad \left(\frac{1}{\imath} = -\imath\right)
$$

7. Gewöhnliche Differenzialgleichungen

7.1. Grundbegriffe

Eine Differenzialgleichung stellt einen Zusammenhang zwischen einer Funktion $y(x)$ und deren Ableitungen $y'(x), y''(x), \ldots$ her.

Beispiel:

1. Fkt. $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, y(x) = x^2$

1. Ableitung: $y' = 2x$

Geometrische Deutung der 1. Ableitung:
$y'(x) =$ Steigung m_p des Graphen (= Steigung der Tangente) im Punkt $P(x; y(x))$

Betrachten wir $y' = 2x$ als Gleichung für eine unbekannte Funktion $y = y(x)$, so gibt die Gleichung $y' = 2x$ in jedem Punkt $P(x; y)$ der Ebene die Steigung eine Lösung $y = y(x)$ vor ($\rightarrow$ Richtungs- oder Linienfeld)

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 7.1.

Jede Lösung y der Differenzialgleichung $y' = 2x$ erfüllt die Steigungsvorgabe $m_p = 2x$ in jedem Punkt $P(x; y(x))$ des Graphen von y.

Die Funktion $y = x^2$ ist eine Lösung der Differenzialgleichung $y' = 2x$ aber auch $y = x^2 + C$ ($C \in \mathbb{R}$) sind Lösungen ($\rightarrow$ es gibt unendlich viele Lösungen)

Frage: Gibt es außer $y = x^2 + C$ noch weitere Lösungen?

Antwort: Nein!

Begründung: Ist $y = y(x)$ eine beliebige Lösung der Differenzialgleichung $y' = 2x$, so gilt $y = \int y' \, \mathrm{d}x + C = \int 2x \, \mathrm{d}x + C = x^2 + C$

Definition: Eine Gleichung der Form

$$\boxed{y' = F(x, y)}$$

heißt explizite, gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung.

Beispiel:

2. $y' = \dfrac{y}{x}$

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 7.2.

Lösungen der Differentialgleichung sind Geraden der Form $y = ax \quad (a \in \mathbb{R})$ (Ursprungsgeraden)

Probe:

linke Seite: $y' = (ax)' = a$

rechte Seite: $\frac{y}{x} = \frac{ax}{x} = a$

3. $y' = -\frac{x}{y}$

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 7.3.

Lösungen sind Halbkreise .... Hier fehlt noch was!!! <u>Kreisgleichung:</u> $x^2 + y^2 = r^2$ (r =Radius)

$$\Rightarrow y^2 = r^2 - x^2 \quad | \pm \sqrt{}$$
$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$$
$$y = +\sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{oberer Halbkreis}$$
$$y = -\sqrt{r^2 - x^2} \qquad \text{unterer Halbkreis}$$

<u>Probe:</u> $y' = -\frac{x}{y}$, $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

linke Seite: $y' = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

rechte Seite: $-\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

<u>Probe:</u> $y' = -\frac{x}{y}$, $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$

linke Seite: $y' = -\frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

rechte Seite: $-\dfrac{x}{y} = -\dfrac{x}{-\sqrt{r^2 - x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Definition:

1. Unter einer expliziten (gewöhnlichen) Differenzialgleichung n-ter Ordnung versteht man eine Gleichung der Form
$$\boxed{y^{(n)} = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})}\ , \qquad (*)$$
wobei $F(x, y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})$ eine stetige Funktion (mehrerer Veränderlicher) ist.

   Ist die Gleichung (*) nicht nach der höchsten Ableitung $y1(n)$ umgestellt, so heißt die Differenzialgleichung implizit.
$$\boxed{G(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0} \qquad (**)$$

2. Eine Lösung der Differentialgleichung (*) bzw. (**) ist eine n-mal differenzierbare Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ (I Intervall), $y = y(x)$, so dass
$$\boxed{y^{(n)}(x) = F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))}$$
bzw.

$$\boxed{G(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0}$$

für alle $x \in I$ gilt.

Beispiel:

1. $y' = \dfrac{2x}{y}$ explizite Differentialgleichung 1. Ordnung
2. $2x + y^2 y' = \cos x$ implizite Differentialgleichung 1. Ordnung
3. $y'' = -2xy$ explizite Differentialgleichung 2. Ordnung
4. $xy'' + x^2 y = \sqrt{x}$ implizite Differentialgleichung 2. Ordnung

Beispiel: Kinematik

Kinematik = Lehre von den Gesetzen der Bewegung von Punkten und Körpern im Raum (Ebene) ohne die Ursache der Bewegung (=Kräfte) zu beachten.

Beschreibung der Bewegung eines (Massen-)Punktes durch Angabe der augenblicklichen (= momentanen = zum Zeitpunkt t)

Position/Ort $x(t)$

Geschwindigkeit $v(t)$

Beschleunigung $a(t)$

Für die Bewegung entlang einer Geraden steht (1-dimensionale Bewegung), so sind $x(t), v(t), a(t)$ skalare Größen (= Zahl + Einheit). Bei Bewegungen in der Ebene oder im Raum sind $\vec{x}(t), \vec{v}(t), \vec{a}(t)$ vektorielle Größen.

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \text{ bzw. } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{pmatrix}, \text{ bzw. } \vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}, \text{ bzw. } \vec{a}(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \end{pmatrix}$$

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 7.4.

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 7.5.

In der Physik wird die Ableitung nach der Zeit t durch einen Punkt über dem Formelzeichen gekennzeichnet.

z.B. $\dot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \; \dot{v}(t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \; \ddot{x}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$

Es gelten folgenden Zusammenhänge zwischen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung:

$$\boxed{\dot{x}(t) = v(t), \quad \ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = a(t)}$$

für Bewegungen entlang einer Geraden bzw.

$$\boxed{\dot{\vec{x}}(t) = \vec{v}(t), \quad \ddot{\vec{x}}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = \vec{a}(t)}$$

für Bewegungen im Raum bzw. in der Ebene.

$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix} \text{ bzw. } \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix}$$

analog für $\ddot{\vec{x}}$ und $\dot{\vec{v}}$.

Denn:

1. Bewegung entlang einer Geraden

   $x(t) =$ Ort zum Zeitpunkt t

   $\dot{x}(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} =$ Hier fehlt noch was!!!

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 7.6.

$$\ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

2. Bewegung in der Ebene (bzw. im Raum)

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 7.7.

Ortsvektor $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$

Ortsvektor $\Delta\vec{x} = \vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)$

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 7.8.

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 7.9.

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{x}(t + \Delta t) - \vec{x}(t)}{\Delta t}$$

$\vec{v}(t)$ ist tangential zur Bahnkurve im Punkt P

Beispiel: Kreisbewegung

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 7.10.

$\vec{a}(t) \sim$ Hier fehlt noch was!!!

Durch einfache Integralrechnung erhält man die allgemeinen Bewegungsgleichungen

$$\boxed{\begin{aligned} v(t) &= v(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} a(\tau)\ \mathrm{d}\tau \\ x(t) &= x(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} v(\tau)\ \mathrm{d}\tau \end{aligned}}$$

bzw.

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{v}(t) &= \vec{v}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{a}(\tau)\ \mathrm{d}\tau \\ \vec{x}(t) &= \vec{x}(t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} \vec{v}(\tau)\ \mathrm{d}\tau \end{aligned}}\Big\}\text{komponentenweise Integration}$$

Beispiel: Hier fehlt noch was!!!

Hier fehlt noch was!!!

Satz:

Lösung durch Trennung der Variablen, TdV

Sei $y' = \dfrac{g(x)}{f(y)}$ eine separable Differentialgleichung. Ist $F(y)$ eine Stammfunktion von $f(y)$ und $G(x)$ eine Stammfunktion von $g(x)$, so gilt für die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \dfrac{g(x)}{f(y)}$:

$$\boxed{F(y(x)) = G(x) + c} \qquad (c \in \mathbb{R}) \quad (*)$$

Die allgemeine Lösung y erhält man durch Auflösen der Gleichung (*) nach y (falls möglich)

Beweis: Aus $y' = \dfrac{g(x)}{f(y)}$ folgt $f(y) \cdot y' = g(x)$

Wegen $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F(y(x)) = F'(y(x)) \cdot y'(x) = F'(y) \cdot y' = f(y) \cdot y' = g(x)$ ist $F(y(x))$ eine Stammfunktion von $g(x)$. Da sich Stammfunktionen nur durch eine Konstante unterscheiden, folgt $F(y(x)) = G(x) + c$. □

Systematische Vorgehensweise bei TdV:

$$y' = \frac{g(x)}{f(y)}$$

1. Trennung der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{g(x)}{f(y)} \quad | \cdot f(y) | \cdot \ \mathrm{d}x$$ Variablentrennung

$$f(y)\ \mathrm{d}y = g(x)\ \mathrm{d}x \quad | \int$$

2. Integration beider Seiten

$$\int f(y)\ \mathrm{d}y = \int g(x)\ \mathrm{d}x$$ Lösen beider Integrale

$$F(y) = G(x) + c$$

3. Auflösen der Gleichung nach y (falls möglich)

$$F(y) = G(x) + c$$

$$y = F^{-1}(G(x) + c) \quad \text{(falls } F^{-1} \text{ existiert)}$$

(bzw. $y_1, y_2, \ldots$) bei mehreren Lösungen

Beispiel: $y' = -\frac{x}{y} = \frac{-x}{y} = \frac{g(x)}{f(y)}$

1. Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} y' &= -\frac{x}{y} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{x}{y} \quad | \cdot\ \mathrm{d}x | \cdot y \\ y \cdot\ \mathrm{d}y &= -x \cdot\ \mathrm{d}x \quad \Big| \int \end{aligned}$$

2. Integration beider Seiten

$$\begin{aligned} \int y\ \mathrm{d}y &= -\int x\ \mathrm{d}x \\ \frac{1}{2}y^2 &= -\frac{1}{2}x^2 + c_1 \quad | \cdot 2 \\ y^2 &= -x^2 + \underbrace{2c_1}_{c} \\ y^2 &= c - x^2 \end{aligned}$$

3. Gleichung nach y auflösen

$$y^2 = c - x^2 \quad | \pm\sqrt{}$$
$$y = \pm\sqrt{c - x^2} \quad \text{allgemeine Lösung } (c > 0)$$

Wird zudem $y(0) = 1$ gefordert (AWP), so erhält man:

$$y = \pm\sqrt{c - x^2}$$

$y(0) = 1$ eingesetzt

$$1 = y(0) = \left(\overset{+}{-}\right) \sqrt{c - 0^2} = \sqrt{c}$$

$\Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow$ wir erhalten die eindeutige Lösung $y = \sqrt{1 - x^2}$ (obere Hälfte des Einheitskreises)

7.1.1. 7.2.2 Differentialgleichungen vom Typ $y' = f(ax + by + c)$

Satz:

Lösung durch Substitution $u = ax + by + c$

Ist $y = y(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\boxed{y' = f(ax + by + c)}, \qquad (*)$$

so ist $u = ax + by + c$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\boxed{u' = a + b \cdot f(u)} \qquad \text{(separable Dgl.) } (**)$$

Ist umgekehrt $u = u(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (**) ($b \neq 0$), so ist $y = \frac{1}{b}(u - ax - c)$ eine Lösung der Differentialgleichung (*).

Beweis: Für $u = ax + by + c$ gilt

$u' = a + by'$.

Somit gilt $\underbrace{u' = a + b \cdot f(u)}_{(**)}$ genau dann, wenn $\underbrace{y' = f(u)}_{(*)}$ gilt.

Beispiel: $y' = (x+y)^2 \quad = f(x+y)$ mit $f(u) = u^2$

Substitution: $u = x + y \quad (a = b = 1, c = 0)$

Dann ist u eine Lösung der Differentialgleichung

$$u' = 1 + u^2$$

$$u = x + y; \quad u' = 1 + y' = 1 + (\underbrace{x+y}_{u})^2 = 1 + u^2$$

Lösung durch TdV:

1. Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} u' &= 1 + u^2 \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 1 + u^2 \quad \mid \cdot\ \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}u &= (1+u^2) \cdot\ \mathrm{d}x \quad \mid : (1+u^2) \\ \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u &= \ \mathrm{d}x \quad \mid \int \end{aligned}$$

2. Integration beider Seiten

$$\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \int \mathrm{d}x$$
$$\arctan(u) = x + c$$

3. Auflösen der Gleichung nach u

$$\arctan(u) = x + c$$
$$u = \tan(x + c) \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Rücksubstitution: $u = x + y \qquad x + y = \tan(x + c)$

$y = \tan(x + c) - x$

7.1.2. 7.2.3 Differentialgleichung vom Typ $y' = f(\frac{y}{x})$

Satz:

Lösung durch Substitution $u = \frac{y}{x}$

Ist $y = y(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\boxed{y' = f(\tfrac{y}{x})}, \ (*)$$

so ist $u = \frac{y}{x}$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\boxed{u' = \frac{f(u) - u}{x}} \qquad \text{(separable Dgl.) } (**)$$

Ist umgekehrt $u = u(x)$ eine Lösung der Differentialgleichung (**), so ist $y = u \cdot x$ eine Lösung der Differentialgleichung (*).

Beweis: Für $u = \dfrac{y}{x}$ gilt

$$u' = \frac{y' \cdot x - y \cot 1}{x^2} = \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = \frac{y' - \frac{y}{x}}{x} = \frac{y' - u}{x}$$

Somit gilt

$$u' = \frac{f(u) - u}{x} \text{ genau dann, wenn } y' = f(u) \text{ gilt.}$$

□

Beispiel: $y' = \dfrac{x+2y}{x}$

$$y' = \frac{x+2y}{x} = 1 + 2\frac{y}{x}$$

$$\text{Substitution: } u = \frac{y}{x}$$

$$\Leftrightarrow y = x \cdot u$$

$$\Rightarrow y' = 1 \cdot u + x \cdot u' \Leftrightarrow u' = \frac{y' - u}{x} = \frac{f(\frac{y}{x}) - u}{x}$$

$$\Leftrightarrow u' = \frac{f(u) - u}{x} = \frac{1 + 2u - u}{x} = \frac{1+u}{x}$$

Transformierte Differentialgleichung: $u' = \dfrac{1+u}{x}$ (separable Differentialgleichung)

Lösung durch TdV

1. Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1+u}{x} \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1+u}{x} &\quad | \cdot \mathrm{d}x | : (1+u) \\ \frac{1}{1+u} \cdot \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &\quad | \int \end{aligned}$$

2. Integration beider Seiten

$$\int \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\ln|1+u| = \ln|x| + c_1$$

3. Gleichung nach u auflösen

$$\begin{aligned} \ln|1+u| = \ln|x| + c_1 &\quad | e^{\square} \\ |1+u| &= e^{\ln|x|+c_1} \end{aligned}$$

$$|1+u| = \underbrace{e^{\ln|x|}}_{|x|} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$

$$|1+u| = c_2 \cdot |x|$$

$$1+u = \pm c_2 \cdot x \qquad (c_2 > 0)$$

$$u = c_3 \cdot x - 1 \qquad (c_3 \in \mathbb{R})$$

Rücksubstitution: $u = \dfrac{y}{x}$

$\dfrac{y}{x} = c_3 \cdot x - 1 \quad | \cdot x \Leftrightarrow \underline{y = cx^2 - x} \qquad (c \in \mathbb{R}) \quad (c = c_3)$

7.1.3. 7.2.4 Lineare Differentialgleichungen

Definition: Eine lineare Differentialgleichung (1. Ordnung) ist eine Differentialgleichung der Form

$\boxed{y' + a(x)y = b(x)}$

mit Funktion $a(x), b(x) : I \to \mathbb{R}$. Ist $b(x) \equiv 0$ («≡» bedeutet «identisch Null», d.h. $b(x)$ ist die Nullfunktion), so heißt die lineare Differentialgleichung homogen, ansonsten inhomogen. $b(x)$ heißt auch Störglied der Differentialgleichung.

Beispiel:

1. $y' + xy = 0$ homogene lineare Differentialgleichung
2. $y' + x^2 y = \sin x$ inhomogene lineare Differentialgleichung
3. $y' + \sqrt{x} y^2 = 0$ nicht-lineare Differentialgleichung (wegen y^2)
4. $yy' + x = 1$ nicht-lineare Differentialgleichung (wegen yy')

Satz:

allgemeine Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung

$$\boxed{y' + a(x)y = 0}$$

besitzt die allgemeine Lösung

$$\boxed{y = c \cdot e^{-\int a(x)\ \mathrm{d}x}} \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Das zugehörige AWP mit $y(x_0) = y_0$ (d.h. $P(x_0, y_0) \in G_y$) besitzt die eindeutige Lösung

$$\boxed{y = y_0 e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\ \mathrm{d}\xi}}$$

Beweis: Lösung durch TdV

1. Trennung der Variablen

$$y' + a(x)y = 0$$

$$y' = -a(x)y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -a(x)y \quad |\cdot\ \mathrm{d}x| : y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -a(x)\ \mathrm{d}x \quad \Big| \int$$

2. Integration beider Seiten

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int a(x)\ \mathrm{d}x$$
$$\ln|y| = -\int a(x)\ \mathrm{d}x + c_1$$

3. Gleichung nach y auflösen

$$\ln|y| = -\int a(x)\ \mathrm{d}x + c_1 \quad |e^{\square}$$
$$|y| = e^{-\int a(x)\ \mathrm{d}x + c_1}$$
$$|y| = e^{-\int a(x)\ \mathrm{d}x} \cdot \underbrace{e^{c_1}}_{c_2}$$
$$|y| = c_2 \cdot e^{-\int a(x)\ \mathrm{d}x}$$

$$y = \underbrace{\pm c_2}_{c} \cdot e - \int a(x)\ \mathrm{d}x$$

$$y = c \cdot e - \int a(x)\ \mathrm{d}x \qquad (c \in \mathbb{R})$$

Zusatz: $y(x_0) = y_0$

$$y_0 = y(x_0) = c \cdot e^{x_0} \overbrace{\int^{x_0} a(\xi)\ \mathrm{d}\xi}^{=0} = c \cdot e^0 = c$$

$$[(x) \quad y = c \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)\ \mathrm{d}\xi}] \Rightarrow y(x) = y_0 \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)\ \mathrm{d}\xi}$$

$\square$

Beispiel: $y' + \cos(x) y = 0$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $y = c \cdot e^{-A(x)}$ mit $A(x) = \int a(x)\ \mathrm{d}x$

$A(x) = \int a(x)\ \mathrm{d}x = \int \cos(x)\ \mathrm{d}x = \sin(x)$ (hier keine Integrationskonstante $\Rightarrow$ steckt bereits in c)

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung $y = y(x) = c \cdot e^{-sinx}$

$\boxed{\text{AWP}}$: zusätzlich gelte $y(0) = 2$

$2 = y(0) = c \cdot e^{-\sin(0)} = c$

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung $y = 2 \cdot e^{-\sin x}$

Zur Bestimmung der Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung unterscheidet man zwischen

- Variation der Konstanten (VdK)

- Bestimmung einer partikulären (speziellen) Lösung durch einen sogenannten «Störansatz».

Satz:

allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung durch VdK

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\boxed{y' + a(x)y = b(x)}$$

ist gegeben durch

$$\boxed{y = c(x)e^{-\int a(x)\ \mathrm{d}x}}$$

mit

$$\boxed{c(x) = \int \frac{1}{u(x)} b(x)\ \mathrm{d}x + c},$$

wobei

$$\boxed{u(x) = e^{-\int a(x)\ \mathrm{d}x}}$$

gilt.

Das zugehörige AWP mit $y(x_0) = y_0$ besitzt die eindeutige Lösung

$$\boxed{y(x) = c(x) \cdot e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(\xi)\ \mathrm{d}\xi}}$$

mit

$$c(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{u(\xi)} b(\xi)\ \mathrm{d}\xi \text{ und } u(x) = e^{-\int\limits_{x_0}^{x} a(t)\ \mathrm{d}t}$$

Bemerkung: $\dfrac{1}{u(x)} = e^{\int a(x)\ \mathrm{d}x} = e^{A(x)}$, wobei $A(x)$ eine Stammfunktion von $a(x)$ ist.
Somit gilt

$$\boxed{c(x) = \int e^{A(x)} b(x)\ \mathrm{d}x + c}$$

Beweis: Inhomogene Differentialgleichung $y' + a(x)y = b(x)$
zugehörige homogene Differentialgleichung $y' + a(x)y = 0$
$\Rightarrow$ allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung $\underbrace{y_{\text{hom}}}_{=u(x)} = c \cdot e^{-\int a(x)\ \mathrm{d}x}$

$\rightarrow$ Variation der Konstante c $\rightarrow$ allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

Ansatz: $y(x) = c(x) \cdot e^{-\int a(x)\ \mathrm{d}x} = \underbrace{c(x)}_{\text{noch zu bestimen}} \cdot \underbrace{u(x)}_{\text{Lsg. der zugeh. homogenen Dgl.}}$

Idee: Finde Differentialgleichung für $c(x)$!

$y = c \cdot u \quad \Rightarrow \quad y' = c' \cdot u + c \cdot \underbrace{u'}_{=-au} = c'u - cau = c'u - a\underbrace{cu}_{y} = c'u - ay$

$\Rightarrow \boxed{y' + ay = c'u}$

Da auch $y' + ay = b$ gilt, folgt $\boxed{c'u = b}$ (Differentialgleichung für $c(x)$).

$\Rightarrow c'(x) = \dfrac{1}{u(x)} b(x)$

Integration

$\Rightarrow c(x) = \displaystyle\int \frac{1}{u(x)} b(x) \, \mathrm{d}x + c$ $\square$

Beispiel: $y' + 2xy = x, \quad y(0) = 2$ (AWP)

1. allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

   $$y' + 2xy = 0$$

   $y_{\text{hom}}(x) = c \cdot e^{-A(x)}$ mit $A(x) = \int 2x \, \mathrm{d}x = x^2$ (<u>ohne</u> Integrationskonstante)

   $\Rightarrow y_{\text{hom}}(x) = c \cdot e^{-x^2}$

2. VdK

   $y(x) = c(x)e^{-x^2}$

   mit $c(x) = \int e^{x^2} \cdot x \, \mathrm{d}x + c = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$

   $\Rightarrow$ allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

   $y = (\frac{1}{2}ex^2 + c) \cdot e^{-x^2}$

AWP: $y(0) = 2$

$2 = y(0) = (\frac{1}{2}e^0 + c) \cdot e{-}0 = \frac{1}{2} + c$

$\Rightarrow c = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ eindeutige Lösung des AWP: $y(x) = (\frac{1}{2}e^{x^2} + \frac{3}{2})e^{-x^2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-x^2}$

Hier fehlt noch was!!!

Satz:

Allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

Die allgemeine Lösung y_{inh} der inhomogenen linearen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y' + a(x)y = b(x)$$

ist von der Form

$$\boxed{y_{\text{inh}} = y_{\text{hom}} + y_p},$$

wobei y_{hom} die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

$$y' + a(x)y = 0$$

und y_p eine partikuläre/spezielle Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung $y' + a(x)y = b(x)$ ist.

Beweis: Ist $y_{\text{inh}} = y_{\text{hom}} + y_p$, so gilt

$$y'_{\text{inh}} + a(x)y_{\text{inh}} = \underbrace{y'_{\text{hom}} + y'_p}_{y'_{\text{inh}}} + a(x)(\underbrace{y_{\text{hom}} + y_p}_{y_{\text{inh}}})$$

$$= \underbrace{y_{\text{hom}}' + a(x)y_{\text{hom}}}_{0} + \underbrace{y_p' + a(x)y_p}_{b(x)} = b(x)$$

$\Rightarrow y_{\text{inh}} = y_{\text{hom}} + y_p$ ist eine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Sei umgekehrt y_{inh} eine beliebige Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Für $y = y_{\text{inh}} - y_p$ gilt dann

$$\underbrace{y_{\text{inh}}' - y_p'}_{y'} + a(x)(\underbrace{y_{\text{inh}} - y_p}_{y}) = \underbrace{y_{\text{inh}}' + a(x)y_{\text{inh}}}_{b(x)} - [\underbrace{y_p' + a(x)y_p}_{b(x)}]$$

Hier fehlt noch was!!!

Es folgt, dass $y = y_{\text{inh}} - y_p$ eine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y' + a(x)y = 0$ ist, d.h. $y = y_{\text{hom}}$, und somit erhalten wir

$$\begin{aligned} y_{\text{hom}} &= y = y_{\text{inh}} - y_p \\ \Leftrightarrow y_{\text{inh}} &= y_{\text{hom}} + y_p \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Auffinden einer partikulären Lösung mittels Störansatz
Beim Auffinden einer partikulären Lösung mittel Störansatz (Lösungsansatz) setzt man y_p gleich einem bestimmten Funktionentyp, der noch diverse freie Parameter beinhaltet. Setzt man den Störansatz (d.h. y_p) in die inhomogene Differentialgleichung ein, so erhält man Gleichungen in den freien Parametern des Störansatzes und versucht diese zu lösen.
Für allgemeine inhomogene lineare Differentialgleichungen $y' + a(x)y = b(x)$ ist diese Vorgehensweise nur in einfachen (für die Praxis jedoch wichtigen) Fällen zielführend. Im allgemeinen ist es zu gegebenem $b(x)$ (=Störglied) schwierig, einen passenden Störansatz zu finden $\Rightarrow$ Spezialfälle

Beispiel: (Papula II, S. 379)
Differentialgleichung $y' - \tan(x) \cdot y = 2 \cdot \sin(x)$
allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y' - \tan(x) \cdot y = 0$

$$\begin{aligned} y_{\text{hom}} &= c \cdot e^{-\int (-\tan x)\ \mathrm{d}x} \\ &= c \cdot e^{\int \tan x\ \mathrm{d}x} \end{aligned}$$

$$\int \tan x \;\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|(+c)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow y_{\text{hom}} &= c_1 \cdot e^{-\ln|\cos x|}\\ &= c_1 \cdot e^{\ln|\cos x|^{-1}}\\ &= \frac{c_1}{|\cos x|}\\ &= \frac{c}{|\cos x|}\end{aligned}$$

Auffinden einer partikulären Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung:
Störansatz (Lösungsansatz): $y_p = A \cdot \cos x$

In die inhomogene Differentialgleichung eingesetzt: $y_p' - \tan(x) \cdot y_p = 2\sin(x)$

$$\underbrace{-A \cdot \sin(x)}_{y_p'} - \tan(x) \cdot \underbrace{A \cdot \cos(x)}_{y_p} = 2\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow -A \cdot \sin(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot A\cos(x) = 2\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow -2A\sin(x) = 2\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(x)\cdot(1+A) = 0$$

(Gl. von Funktionen!
Gleiheit gilt für alle x)

$$\Leftrightarrow 1 + A = 0$$

$$\Leftrightarrow A = -1$$

$\Rightarrow y_p = -\cos(x)$ ist eine partikuläre Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} y_{\text{inh}} &= y_{\text{hom}} + y_p \\ &= \frac{c}{\cos(x)} - \cos(x) \end{aligned}$$

Spezialfall: lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

$\boxed{y' = ay = b(x)}$ Konstante $a (= \text{const} \neq 0)$

Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_{\text{hom}} = c \cdot e^{-ax}$

Satz: **Folgende Störansätze sind für folgende Störglieder $b(x)$ zielführend**

	Störglied/-funktion $b(x)$	Störansatz für $y_p(x)$
1.	Konstante Funktion $b(x) = b_0$	Konstante Funktion $y_p = c_0$ (Parameter c_0)
2.	Lineare Funktion $b(x) = b_1 x + b_0$	Lineare Funktion $y_p = c_1 x + c_0$ (Parameter c_0, c_1)
3.	Quadratische Funktion $b(x) = b_2 x^2 + b_1 x + b_0$	Quadratische Funktion $y_p = c_2 x^2 + c_1 x + c_0$ (Parameter c_0, c_1, c_2)
4.	Polynomfunktion $b(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0$	Polynomfunktion $y_p = c_n x^n + \ldots + c_1 x + c_0$ (Parameter $c_0, c_1, \ldots, c_n$)
5.	$b(x) = A \cdot \sin(\omega x)$ oder $b(x) = B \cdot \cos(\omega x)$ oder $b(x) = A \cdot \sin(\omega x) + B \cdot \cos(\omega x)$	$y_p = c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x)$ bzw. $y_p = c \cdot \sin(\omega x + \varphi)$ (Parameter c_1, c_2 bzw. c, φ)

6.	Exponentialfunktion $b(x) = A \cdot e^{bx}$	$y_p =$ $c \cdot e^{bx}$, falls $b \neq -a$ $c \cdot xe^{bx}$, falls $b = -a$ (Parameter c)

Bemerkung: Ist $b(x) = c \cdot b^{\alpha x}$, so kann man $b(x)$ wie folgt als Exponentialfunktion schreiben:

$$b(x) = c \cdot e^{(\ln b) \cdot \alpha x}$$

Denn: $b^{\alpha x} = e^{\ln(b^{\alpha x})} = e^{\alpha x \cdot \ln b}$

Beispiel: (Papula II, S. 382)
Differentialgleichung $y' + 2y = 2x^2 - 4$
Allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y' + 2y = 0$

$$y_{\text{hom}} = c \cdot e^{-2x}$$

Störansatz: für partikuläre Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung:
$b(x) = 2x^2 - 4$ quadratische Funktion

$\Rightarrow$ «quadratischer» Ansatz

$$y_p = c_2x^2 + c_1x + c_0$$

Bestimmung der Parameter c_0, c_1, c_2 durch Einsetzen von y_p in die inhomogene Differentialgleichung.

$$\begin{aligned}
y_p' + 2y_p &= 2x^2 - 4 \\
\underbrace{2c_2x + c_1}_{y_p'} + 2(\underbrace{c_2x^2 + c_1x + c_0}_{y_p}) &= 2x^2 - 4 \\
2c_2x^2 + (2c_1 + 2c_2)x + c_1 + 2c_0 &= 2x^2 - 4 \\
\Rightarrow \text{Koeffizientenvergleich}&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2c_2 &= 2 && (I) \\
2c_1 + 2c_2 &= 0 && (II) \\
c_1 + 2c_0 &= -4 && (III)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2 &= 1 \\
c_1 &= -1
\end{aligned}$$

$$c_0 = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow y_p(x) = x^2 - x - \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$y_{\text{inh}} = y_{\text{hom}} + \text{Hier fehlt noch was!!!}$$

Hier fehlt noch was!!!

7.2. 7.3 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

7.2.1. 7.3.1 Grundlagen

Definition: Besitzt eine Differentialgleichung die Form

$$\boxed{y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)} \quad (*)$$

mit stetigen Funktionen $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x), b(x) : I \to \mathbb{R}$, so heißt sie
lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung; ansonsten heißt die Differentialgleichung nicht linear.

Die Funktion $a_0(x), \ldots, a_{n-1}(x)$ heißen Koeffizienten der Differentialgleichung.

Die lineare Differentialgleichung (*) heißt homogen, wenn $b(x) = 0$ für jedes $x \in I$. (d.h. $b(x) \equiv 0$, «identisch NULL». Ist $b(x) \not\equiv 0$, so heißt die lineare Differentialgleichung inhomogen.

Beispiel:

1. $y'' + \sqrt{x}y' - 3y = 0$ homogene, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

2. $y''' - \sin(x)y'' + 1 = \cos(x)$ inhomogene, lineare Differentialgleichung 3. Ordnung

3. $2xy^{(n)} + (4x^2 - 1)y' = \sqrt{x} - 1$
   $\Leftrightarrow y^{(n)} + \dfrac{4x^2 - 1}{2x}y' = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{2x}$ inhomogene, lineare Differentialgleichung 4. Ordnung

Satz:

allgemeine Lösung eine inhomogenen lineare Differentialgleichung n-ter Ordnung

Die allgemeine Lösung y_{inh} einer inhomogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

ist von der Form

$$\boxed{y_{\text{inh}} = y_{\text{hom}} + y_p},$$

wobei y_{hom} die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen linearen Differentialgleichung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

und y_p eine partikuläre Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist.

Zunächst untersuchen wir die Lösung homogener linearer Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Definition: Eine Familie $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ von n Lösungen $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$ einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad (*)$$

heißt Lösungsfundamentalsystem und die $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ heißen Fundamental- oder Basislösungen von (*), wenn die sogenannte Wronski-Determinante

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \ldots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \ldots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}$$

nicht (identisch) Null ist.

Bemerkung:

1. Die Wronski-Determinante $W(x)$ ist eine Determinante von Funktionen und daher

selbst eine Funktion $W(x) : I \to \mathbb{R}$.

2. Man kann zeigen, dass gilt:
   $W(x) \neq 0$ für jedes $x \in I \Leftrightarrow W(x) \neq 0$ für ein (beliebiges) $x = x_0 \in I$.

   Gleichwertig dazu ist:
   $W(x) = 0$ für jedes $x \in I \Leftrightarrow W(x) = 0$ für ein (beliebiges) $x = x_0 \in I$.

3. Nach 2, kann man $W(x) \neq 0$ wie folgt testen:
   Wähle beliebiges $x_0 \in I$ und bilde die Determinante von Zahlen
   $$W(x_0) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x_0) & \dots & \varphi_n(x_0) \\ \varphi_1'(x_0) & \dots & \varphi_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$
   $$W(x_0) \overset{?}{\neq} 0 \left\{ \begin{array}{ll} \text{ja} & W(x) \neq 0 \text{ für jedes } x \in I \\ \text{nein} & W(x) = 0 \text{ für jedes } x \in I \end{array} \right\}$$
   Oder: Man bestimmt $W(x)$ als Determinante von Funktionen und prüfe, ob $W(x) \equiv 0$ (identisch Null) gilt oder $W(x) \not\equiv 0$.

Satz:

1. Zu jeder homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung gibt es ein Lösungsfundamentalsystem $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$

2. Ist $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ein Lösungsfundamentalsystem einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung
$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (*)$$
so ist die allgemeine Lösung y_{hom} von der Form
$$\boxed{y_{\text{hom}} = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x)}$$
mit Parametern $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, d.h. jede Lösung von (*) ist eine Linearkombination der Basislösungen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$.

Beispiel: Gegeben sei die homogenen lineare Differentialgleichung 2. Ordnung
$$y'' - \frac{1}{2x}y' + \frac{1}{2x^2}y = 0$$
auf $x > 0$.
$(a_1(x) = -\dfrac{1}{2x} : I \to \mathbb{R}, a_0(x) = \dfrac{1}{2x^2} : I \to \mathbb{R}, I = \{x > 0\})$

Behauptung: $\varphi_1(x) = x$ und $\varphi_2(x) = \sqrt{x}$ bilden ein Lösungsfundamentalsystem.

- φ_1 und φ_2 sind Lösungen der Differentialgleichung, denn

$$\underbrace{x''}_{0} - \frac{1}{2x}x' + \frac{1}{2x^2}x = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} = 0$$

$$\sqrt{x}'' - \frac{1}{2x}\sqrt{x}' + \frac{1}{2x^2}\sqrt{x} = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{1}{2x}\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x^2}\sqrt{x} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} = 0$$

- Wronski-Determinante $W(x)$:

$$\begin{aligned} W(x) &= \det \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x & \sqrt{x} \\ 1 & \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{pmatrix} \\ &= x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 \cdot \frac{x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x} - \sqrt{x}$$
$$= -\frac{1}{2}\sqrt{x} \not\equiv 0$$

$\Rightarrow$ $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ bilden ein Lösungsfundamentalsystem.

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung

$$y_{\text{hom}} = c_1 x + c_2\sqrt{x} \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

Bemerkung: Die Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung bilden einen n-dimensionalen Vektorraum. Ein Lösungsfundamentalsystem ist eine Basis dieses Vektorraums. Die Bedingung $W(x) \neq 0$ ($W(x)$ =Wronski-Determinante) bedeutet, dass die Basislösungen $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ linear unabhängig sind, d.h. aus $c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) = 0$ (für jedes x) folgt c_1 Hier fehlt noch was!!!

Eine partikuläre Lösung y_p der inhomogenen linearen Differentialgleichung n-ter Ordnung findet man wieder ($\rightarrow$ sich inhomogene lineare Differentialgleichung 1. Ordnung) mithilfe eines geeigneten Störansatzes.

Hier fehlt noch was!!!

7.2.2. 7.4.2 Freie Schwingungen

Wirkt keine äußere Kraft $F(t)$ auf das mechanische System ein, so spricht man von einer freien Schwingung (des mechanischen Systems). In diesem Fall ist die Schwingungsgleichung eine homogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstantem Koeffizienten.

$$\boxed{m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0}$$ Schwingungsgleichung einer freien Schwingung)

A Freie ungedämpfte Schwingung

Es wirkt keine Dämpfungs-/Reibungskraft auf das mechanische System, d.h. $k = 0$

$\Rightarrow$ Schwingungsgleichung

$$\boxed{m\ddot{x} + cx = 0}$$

Lösung der Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + cx = 0 \qquad \big| : m$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega_0^2} x = 0 \qquad (\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}})$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$\Rightarrow$ charakteristisches Polynom:

$$P(x) = x^2 + \omega_0^2$$

charakteristische Gleichung:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= 0 \\ \lambda^2 + \omega_0^2 &= 0 \\ \lambda^2 &= -\omega_0^2 \\ \lambda_{1/2} &= \pm \imath \omega_0 \end{aligned}$$

Konj. komplexes Paar einfacher nit-reeller Nst.

$\Rightarrow$ Lösungsfundamentalsystem:

$$\varphi_1(t) = \sin(\omega_0 t)$$
$$\varphi_2(t) = \cos(\omega_0 t)$$
$$(\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \quad \text{Kreisfrequenz})$$

$\Rightarrow$ allgemein Lösung (der homogenen Differentialgleichung)

$$\boxed{x(t) = c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \cos(\omega_0 t)} \qquad \text{(Parameter } c_1, c_2\text{)}$$

Die Parameter c_1 und c_2 werden aus der (sogenannten) Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0 \qquad \text{Anfangsposition/-ort}$$
$$[v(0) =]\dot{x}(0) = v_0 \qquad \text{Anfangsgeschwindigkeit}$$

Die allgemeine Lösung ist T-periodisch mit $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$.

Aus $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}}$ und $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ folgt

$$\sqrt{\frac{2\pi}{m}} = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{c}}} \qquad \text{Periodendauer einer Schwingung}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f} \qquad (f = \frac{1}{T})$$

ω_0 = Kreisfrequenz = <u>Eigenfrequenz</u>

Eigenfrequenz = diejenige Kreisfrequenz, mit der das freie, ungedämpfte mechanische System (ohne äußeren Einfluss) eigenständig schwingt.

Wegen

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= c_1 \sin(\omega_0 t) + c_2 \cos(\omega_0 t) \\ &= A \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi) \end{aligned}}$$

mit

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$$
$$\varphi = \begin{cases} \arccos(\frac{c_1}{A}) & \text{, falls } c_2 \geq 0 \\ -\arccos(\frac{c_1}{A}) & \text{, falls } c_2 < 0 \end{cases}$$

ist die allgemeine Lösung $x(t)$ eine phasenverschobene Sinusschwingung (harmonische Schwingung)

Hier kommt noch ein Bild

Abbildung 7.11.

B Freie gedämpfte Schwingung

Eine Dämpfungs-/Reibungskraft wirkt auf das mechanische System ein, d.h. $k > 0$.
$\Rightarrow$ Schwingungsdifferentialgleichung

$$\boxed{m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0}$$

Lösung der Differentialgleichung:

$$m\ddot{x} + k\dot{x} + cx = 0 \qquad | : m$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{2\delta}\dot{x} + \underbrace{\frac{c}{m}}_{\omega_0^2}x = 0$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$\delta = \dfrac{k}{2m} =$ Abklingkonstante/Dämfpungsfaktor
$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{c}{m}} =$ Eigenfrequenz

$\Rightarrow$ charateristisches Polynom:

$$P(x) = x^2 + 2\delta x + \omega_0^2$$

charakteristische Gleichung

$$P(\lambda) = 0$$

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\begin{aligned}\lambda_{1/2} &= \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega_0^2}}{2}\\ &= \frac{-2\delta \pm 2\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}{2}\\ &= -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}$$

<u>1. Fall:</u> Schwache Dämpfung (Schwingungsfall) $\boxed{\delta < \omega_0}$

$$(\Leftrightarrow \quad \delta^2 < \omega_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad \delta^2 - \omega_0^2 < 0)$$

Setze $\boxed{\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$.

Dann gilt:

$$\sqrt{\delta^2 \omega_0^2} = \sqrt{-(\omega_0^2 - \delta^2)}$$

$$= \sqrt{-\omega_d^2}$$
$$= \imath\omega_d$$

$\Rightarrow$ für die Lösungen der charakteristischen Gleichung gilt:

$$\lambda_{1/2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$
$$= -\delta \pm \imath\omega_d \qquad \text{Konj. komplexes Paar einfacher nicht-reeller Nst.}$$

$\Rightarrow$ Lösungsfundamentalsystem

$$\varphi_1(t) = e^{-\delta t}\sin(\omega_d t)$$
$$\varphi_2(t) = e^{-\delta t}\cos(\omega_d t)$$

ω_d = Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung

$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} < \omega_0$ = Eigenfrequenz (= Kreisfrequenz der ungedämpften Schwingung)

ω_d ist kleiner als ω_0

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung

$$\boxed{x(t) = e^{-\delta t}(c_1 \sin(\omega_d t) + c_2 \cos(\omega_d t))} \qquad \text{(Parameter } c_1, c_2\text{)}$$

Hier fehlt noch was!!!