

Physikalische Grundlagen der Sensorik "ilearn-Kurs"

Passwort: SENSOR

(Hering/Martin Physik für Ingenieure)
[Neburk, G. Lindner, Physik, Messtechnik
mit Sensoren)

zu 1.3

Physikalische Größen, Einheiten, Vorsätze

$$G = \{G\} \cdot [G] \quad m = 80 \text{ kg} \quad [m] = \text{kg}$$

↑ ↑
Zahlenwert Einheit

Umrechnung von Einheiten

$$80 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 22,2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

↑ ↓
3,6

Bsp:

$$\textcircled{1} \quad 60 \text{ mph} = 60 \text{ miles per hour} = 96,56 \frac{\text{km}}{\text{h}}$$

$$1 \text{ Landmeile} = 1609,344 \text{ m} = 1,609344 \text{ km} \quad 1 \text{ mph} = 1,6$$

\textcircled{2} Um welchen Faktor ist Heizöl teurer als Rohöl?

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\text{Heizölpreis}}{\text{Rohölpreis}} \quad P_1 = 51,7 \frac{\$}{\text{bbl}} \quad P_2 = \frac{61,7 \text{ €}}{100 \text{ l}} : 100$$

$$1 \text{ bbl} = 1 \text{ barrel} = 158,988 \text{ l} \quad 158,988 \text{ l}$$

$$1 \text{ US\$} = 0,9412 \text{ €}$$

$$51,7 \text{ \$} = 48,166 \text{ €} \Rightarrow P_1 = \frac{48,166 \text{ €}}{158,988 \text{ l}} : 158$$

$$P_1 = \frac{0,31 \text{ €}}{1 \text{ l}} \quad P_2 = \frac{0,617 \text{ €}}{1 \text{ l}} \quad \Rightarrow \quad \frac{P_2}{P_1} = \frac{0,617 \text{ €}}{0,31 \text{ €}}$$

PLT = Prozessleittechnik

[zu 1.4 Sensordefinition]

Sensoraufgaben:

- Verbindung zum technischen Prozess
- Umwandlung der Messgröße zur elektr. Größe

Unterteilung:

- aktiver Sensor: direkte Umformung nicht-elektr. Energie in elektr. Energie.
- passiver Sensor: Änderung elektr. Eigenschaften (R,L,C) mit Hilfsenergie

Form: relativ kleines Volumen

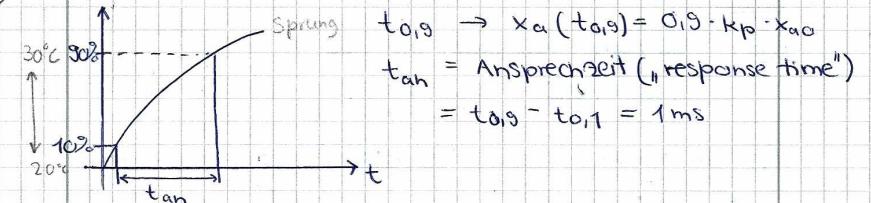
zu 1.5.2. Dynamische Kenngrößen

Kp: Proportionalitätsbeiwert

(P)

$$= x_{0,0} \left(1 - e^{-\frac{t_{0,5}}{\tau}} \right) \boxed{E1}$$

$$\text{Zeitprozentkennwerte: } t_{0,5} \rightarrow x_a(t_{0,5}) = 0,5 \cdot K_p \cdot x_{0,0}$$



Bsp.: $t_{0,1} = 1 \text{ ms}$

$$\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$$

$$\text{a.) } \tau = ? = 0,455 \text{ ms}$$

$$\text{b.) } t_{0,5} = ? = 0,315 \text{ ms}$$

→ Formeln für $t_{0,5}$ und $t_{0,1}$

$$t_{0,1} = t_{0,5} - t_{0,1}$$

$$x_a(t_{0,1}) = x_{0,0} \left(1 - e^{-\frac{t_{0,1}}{\tau}} \right) = x_{0,0} \cdot 0,1 \quad x_a(t_{0,5}) = 0,5 \cdot 1 \cdot x_{0,0}$$

$$x_a(t_{0,5}) = x_{0,0} \left(1 - e^{-\frac{t_{0,5}}{\tau}} \right) = x_{0,0} \cdot 0,5$$

$$\rightarrow 1 - e^{-\frac{t_{0,5}}{\tau}} = 0,5$$

$$1 - e^{-\frac{t_{0,5}}{\tau}} = 0,9$$

$$\rightarrow 1 - 0,1 = 0,9 = e^{-\frac{t_{0,5}}{\tau}}$$

$$1 - 0,1 = 0,1 = e^{-\frac{t_{0,5}}{\tau}}$$

$$e^{-\frac{t_{0,1}}{\tau}} = 0,9 \quad | \ln$$

$$-\frac{t_{0,1}}{\tau} = \ln(0,9)$$

$$t_{0,1} = -\ln(0,9) \cdot \tau$$

$$e^{-\frac{t_{0,2} - t_{0,1}}{\tau}} = \frac{0,1}{0,9} \rightarrow e^{+\frac{t_{0,2} - t_{0,1}}{\tau}} = \frac{0,9}{0,1} = 9 \quad | \ln$$

$$\frac{t_{0,2} - t_{0,1}}{\tau} = \ln 9 \rightarrow \tau = \frac{t_{0,2} - t_{0,1}}{\ln 9} = 0,455 \text{ ms}$$

$$x_a(t_{0,2}) \Rightarrow 1 - e^{-\frac{t_{0,2}}{\tau}} = 0,5$$

$$1 - 0,5 = e^{-\frac{t_{0,2}}{\tau}}$$

$$0,5 = e^{-\frac{t_{0,2}}{\tau}} \quad | \ln$$

$$\ln(0,5) = -\frac{t_{0,2}}{\tau}$$

$$\rightarrow t_{0,2} = -\tau \cdot \underbrace{\ln(0,5)}_{-0,69} = 0,315 \text{ ms}$$

zu 15.3 Fehlerangaben

spezielle Fehlergrenzen:

- Eichfehlergrenze / v.E.
- Verkehrsfehlergrenze / v.E.

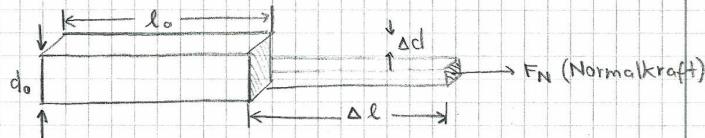
Zusätzl.
punkte
für
Erkenntnis!

→ keine
negativen
Zeiten!

10.0 - 1.1

zu 2.1

Sensorprinzipien aus elastischer Verformung



$$\text{Längsdehnung: } \varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

$$\text{Normalspannung: } \sigma = \frac{F_N}{A} = E \cdot \frac{\Delta l}{l_0} = E \cdot \varepsilon$$

mit E : Elastizitätsmodul, E-Modul

$$\text{Querdehnung: } \varepsilon_q = \frac{d - d_0}{d_0} = \frac{\Delta d}{d_0} = -\mu \cdot \varepsilon$$

mit μ : Querdehnungszahl, Poissonzahl

Physik
Tutorium:

Floian
Regenhart

- Grundlagen
- Anwendung

zu 2.1 (1)

• elastische Dehnung: ε_E

Belastungs- und Entlastungskurve liegen übereinander (Hooke'sche Gerade)

• Grenzen: Streckgrenze R_E

Zugfestigkeit R_m (max. Belastbarkeit)

Bsp.:

Materialen: a.) Alu, $E = 7,1 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $\mu = 0,34$

b.) Cu, $E = 12,3 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $\mu = 0,35$

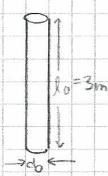
c.) Stahl, $E = 20,6 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $\mu = 0,28$

$\Delta l = 0,5 \text{ mm}$ ges: $\varepsilon = ?$; $\sigma = E \cdot \varepsilon$; F_N

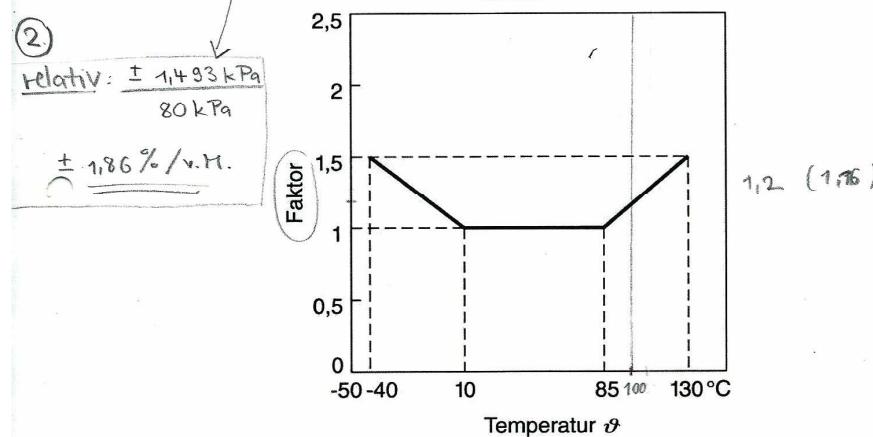
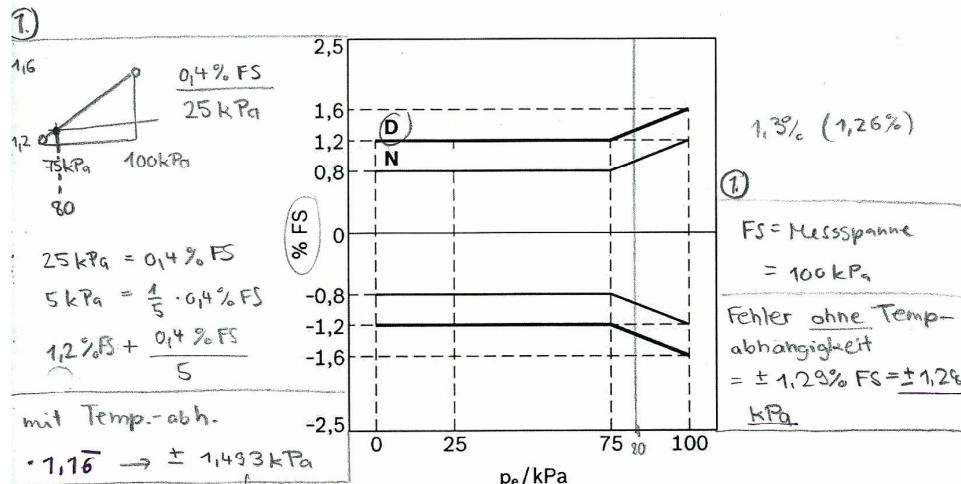
$R_m(\text{Alu}) = 40 \dots 160 \text{ MPa}$

$R_m(\text{Cu}) = 200 \dots 400 \text{ MPa}$

$R_m(\text{Stahl}) = 440 \dots 2100 \text{ MPa}$



① absoluter Druckmessfehler [Dauerzustand]
 $\Rightarrow FS \cdot Faktor = 1,3\% \cdot 1,2 = 1,6\%$



zu 21. (4.)

Parameter: τ : Schubspannung

γ : (elastische) Scherung

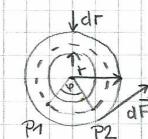
F : Schubkraft

$$\tan \gamma = \frac{s}{l} \approx \gamma \quad (\text{für kleine Scherungen})$$

$$\tau = \frac{F}{A} = G \cdot \gamma$$

G: Schubmodul
 (Schermodul, Torsionsmodul)

speziell: Torsion eines Zylinders



Richtbogen: $\varphi \cdot r = s = l \cdot \tan \gamma = l \cdot \gamma$

Kreisfläche: $|dA| = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot dr$

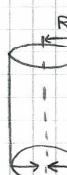
$$\tau = \frac{dF}{dA} = G \cdot \gamma = G \cdot \frac{\varphi \cdot r}{l}$$

$$\rightarrow (dF) = G \cdot \frac{\varphi \cdot r}{l} \cdot dA$$

Drehmoment: $dM = r \cdot dF = G \cdot \frac{\varphi \cdot r^2}{l} \cdot |dA|$
 $= G \cdot \frac{\varphi \cdot r^2}{l} \cdot 2\pi r \cdot dr = r^3 \cdot 2\pi \cdot G \cdot \frac{\varphi}{l} \cdot dr$

$$M = \int_{(A)} dM = \int_0^R r^3 \cdot 2\pi \cdot G \cdot \frac{\varphi}{l} \cdot dr = 2\pi \cdot G \cdot \frac{\varphi}{l} \int_0^R r^3 dr = 2\pi \cdot G \cdot \frac{\varphi}{l} \cdot \frac{1}{4} \cdot R^4$$

A: ges. Querschnittsfläche



$$M = \frac{\pi \cdot G \cdot R^4}{2 \cdot l} \cdot \varphi$$

D: Winkelrichtgröße
 φ : Drehwinkel

zu 21 (6.)

hydrostatischer Druck $p_{\text{hydr}} = p_a + p_h$

äußerer Druck p_a (vgl. Atmosphäre)

$$\text{Schwere druck d. Flüssigkeit} p_h = \frac{m \cdot g}{A} = \frac{s \cdot V \cdot g}{A} = \frac{s \cdot A \cdot h \cdot g}{A}$$

$$\text{Dichte: } s = \frac{m}{V}$$

$$h(s) = \frac{\Delta p}{s \cdot g} = \frac{p_{\text{Boden}} - p_h}{s \cdot g}$$

Bemerkung: p_h unabhängig von Neigung der Begrenzungsfächen

Bsp.: Füllstand Wasserbehälter

$\vartheta / ^\circ C$	$s / g/cm^3$	prozentualer Unterschied bei Δp -Messung bei $\vartheta_1 = 20^\circ C$; $\vartheta_3 = 90^\circ C$ (Bezug: $20^\circ C$). $\Delta p(\vartheta_2) - \Delta p(\vartheta_1)$
0	0,99984	
20	0,998206	
50	0,98804	
70	0,97776	
90	0,9653	

$h = \text{gleich}$ $g = \text{gleich}$ nur s ändert sich

$$\frac{s(\vartheta_2) - s(\vartheta_1)}{s(\vartheta_1)} = -3,3\%$$

2.2 Sensorprinzipien aus dem Gleichgewicht mechanischer Kräfte

25.03.15

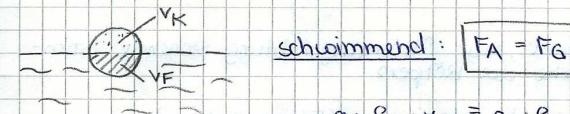
$$\sum_i \vec{F}_i = m \cdot a$$

$$F_A = g \cdot S_F \cdot V_F = \text{statische Auftriebskraft}$$

S_F = Dichte der (verdrängten) Flüssigkeit
 V_F = Volumen der Flüssigkeit

$$F_G = m_K \cdot g = s_K \cdot V_K \cdot g \quad s_K = \text{Dichte des Körpers}$$

gesamten
 V_K = Volumen des Körpers



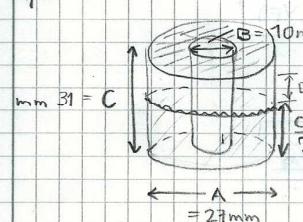
schwimmend: $F_A = F_G$

$$g \cdot S_F \cdot V_F = g \cdot s_K \cdot V_K$$

$$V_K > V_F$$

Bsp.: $S_F = 0,7 \frac{g}{cm^3} \cdot \frac{9 \cdot 10^3}{10^6} m_K = 7g$

Frz.: ①



Volumen Zylinder

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot A^2 \cdot h$$

$$V_1 = \frac{\pi}{4} \cdot (27 \cdot 10^{-3} m)^2 \cdot 31 \cdot 10^{-3} m = 1,7749 \cdot 10^{-5} m^3$$

$$V_2 = \frac{\pi}{4} \cdot (10 \cdot 10^{-3} m)^2 \cdot 31 \cdot 10^{-3} m = 2,4347 \cdot 10^{-6} m^3$$

$$V_{\text{alles}} = V_1 - V_2 = 1,53143 \cdot 10^{-5} m^3 \quad ; \quad V_{\text{Hölle}} = 7,657 \cdot 10^{-6} m^3$$

$$F_G = F_A \quad \text{mit}$$

$$m_K \cdot g = S_F \cdot V_F \cdot g \quad V_F = \frac{\pi}{4} A^2 h - \frac{\pi}{4} B^2 h$$

$$m_K = S_F \cdot \frac{\pi}{4} \cdot h (A^2 - B^2) \quad V_F = \frac{\pi}{4} \cdot h (A^2 - B^2)$$

$$\rightarrow h = \frac{m_K}{S_F} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{A^2 - B^2} = \frac{7 \cdot 10^3 \text{ kg}}{0,7 \cdot 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{(27 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 - (10 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}$$

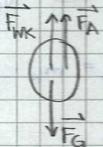
$$\frac{c}{2} + D = h \rightarrow D = h - \frac{c}{2} =$$

$$= 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 5 \text{ mm}$$

zu 2.2. (3)

zusätzlicher Strömungswiderstand

$$\vec{F}_{wk} = c_w \cdot A_{str} \cdot \frac{\rho_F}{2} \cdot v^2$$



c_w : Widerstandsbeiwert

A_{str} : größte, zur Strömungsrichtung stehende Stirnfläche des Körpers

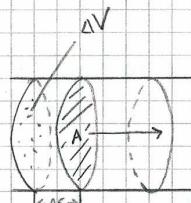
ρ_F : Dichte des Mediums (Flüssigkeit u.a.)

Kräftegleichgewicht

$$(m_K \cdot g) = g \cdot \rho_F \cdot V_F + c_w \cdot A_{str} \cdot \frac{\rho_F}{2} \cdot v^2$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot g (\rho_K \cdot v_K - \rho_F \cdot V_F)}{c_w \cdot A_{str} \cdot \rho_F}}$$

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot g (\rho_K - \rho_F) \cdot v_K}{c_w \cdot A_{str} \cdot \rho_F}}$$



$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{A \cdot \Delta S}{\Delta t} \quad \Delta t \rightarrow 0$$

$$\rightarrow \frac{dV}{dt} = \dot{V} = \vec{A} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{A} \cdot \vec{v}$$

Volumenstrom

$$\dot{m} = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} (\rho \cdot V) = \rho \cdot \dot{V}$$

Massenstrom



$$V = A \cdot V = \frac{\pi}{4} (D^2 - D_K^2) \cdot V$$

(für Schwebekörperanordnung)

$$\dot{m} = \rho \cdot \frac{\pi}{4} (D^2 - D_K^2) \cdot V$$

$$\tan \alpha = \frac{1}{2} \frac{(D - D_0)}{h}$$

$$\alpha = \arctan \left(\frac{D - D_0}{2 \cdot h} \right)$$

$$D(h) = 2 \cdot h \cdot \tan \alpha + D_0$$

$$\rightarrow \dot{V} = v \cdot \frac{\pi}{4} ((2 \cdot h \cdot \tan \alpha + D_0)^2 - D_K^2)$$

$$\rightarrow \dot{V} = \underbrace{\frac{2 \cdot g \cdot V_K \cdot (\rho_K - \rho_F)}{c_w \cdot A_{str} \cdot \rho_F} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot [4 \cdot h^2 \tan^2 \alpha + 4 \cdot h \tan \alpha \cdot D_0 + D_0^2 - D_K^2]}_{\approx u} \cdot \frac{1}{A_{str}}$$

$$\dot{V} = c \cdot \underbrace{\frac{1}{A_{str}} \cdot \frac{\pi}{4} (D_0^2 - D_K^2)}_{\text{Konstant}} + c \cdot \underbrace{\frac{1}{A_{str}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 4 \cdot h \cdot \alpha \cdot D_0}_{\approx u}$$

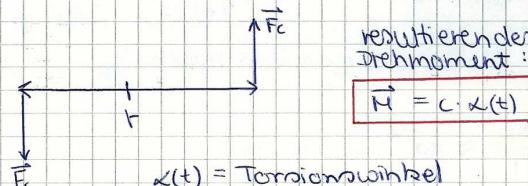
$$\Rightarrow \dot{V} = C_2 + C_1 \cdot h$$

zu 2.3 (3) Corioliskraft

01.04.15

$$\dot{g} = \frac{\dot{m}}{\dot{V}} \rightarrow m = g \cdot V = g \cdot A \cdot l$$

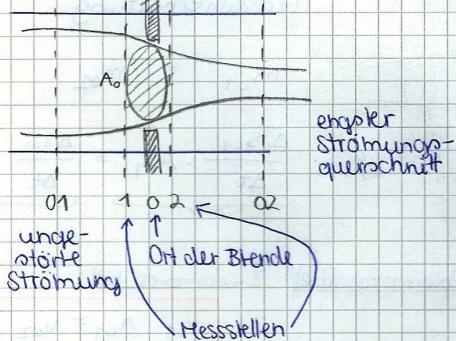
$$\dot{m} = \dot{g} \cdot A \cdot \frac{\Delta l}{\Delta t} = \dot{g} \cdot A \cdot V \quad (\text{Massenstrom } \dot{m} = \frac{dm}{dt} \text{ Strömungsgeschw. } v)$$



$\omega(t)$ = Torsionswinkel

C : Elastizitätskonstante

Anwendung: Wirkdurchflussverfahren



Satz von Bernoulli:

$$\frac{1}{\rho} (P_{01} - P_{02}) = \frac{1}{2} (v_{02}^2 - v_{01}^2) \quad (\text{A})$$

Kontinuitätsgleichung:

$$v_{01} = \frac{A_{02}}{A_{01}} \cdot v_{02} \quad (\text{B})$$

Parameter:

$$\frac{A_{02}}{A_0} = \mu = \text{Einschnürungszahl}$$

$$\frac{A_0}{A_{01}} = m = \text{Öffnungsverhältnis}$$

$$(\text{A}) \quad \frac{1}{\rho} (P_{01} - P_{02}) = \frac{1}{2} (v_{02}^2 - (\mu m v_{02})^2)$$

$$\frac{1}{\rho} (P_{01} - P_{02}) = \frac{1}{2} v_{02}^2 [1 - \mu^2 m^2]$$

$$\rightarrow v_{02} = \sqrt{\frac{2}{\rho} (P_{01} - P_{02}) \cdot \frac{1}{1 - \mu^2 m^2}}$$

$$\rightarrow v_{02} = x \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} \frac{(P_{01} - P_{02})}{\Delta P_H} \cdot \frac{1}{1 - \mu^2 m^2}}$$

$$\dot{V}_{02} = A_{02} \cdot v_{02} = \mu \cdot A_0 \cdot v_{02} = \frac{\mu \cdot A_0 \cdot x}{\sqrt{1 - \mu^2 m^2}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \Delta P_H} \quad \boxed{01.04.15}$$

$$\dot{V}_{02} = \underbrace{\frac{\mu \cdot x}{\sqrt{1 - \mu^2 m^2}}}_{\text{Durchfluszzahl } \alpha} \cdot A_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \Delta P_H}$$

Durchfluszzahl α

$$\rightarrow \dot{V}_{02} = \alpha \cdot \varepsilon \cdot A_0 \cdot \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \Delta P_H}$$

ε : Expansionszahl

$$\rightarrow m = g \cdot \dot{V}_{02} = \alpha \cdot \varepsilon \cdot A_0 \cdot \sqrt{g^2 \cdot \frac{2}{g} \cdot \Delta P_H} \quad T$$

$$\rightarrow m = \alpha \cdot \varepsilon \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta P_H}$$

Bsp.: Dampfmenge messung

$$\left. \begin{array}{l} d_0 \text{ (Blenden Durchmesser)} = 228,93 \text{ mm} \\ (d_{01} \text{ (Rohrinnendurchmesser)} = 282 \text{ mm}) \end{array} \right\} m = ?$$

$$\Delta P_H = \frac{2,25 \text{ bar} \cdot 10^5}{225 \cdot 10^3 \text{ Pa}} g (182 \text{ bar}, 534^\circ C) = 55,8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

$$\varepsilon = 0,9945, \quad \alpha = 0,77 \quad \text{mit } A_0 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi = \frac{\pi}{4} d_0^2$$

$$m = \alpha \cdot \varepsilon \cdot A_0 \cdot \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta P_H} = \alpha \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi \sqrt{2 \cdot g \cdot \Delta P_H}$$

$$m = 0,77 \cdot 0,9945 \cdot \left(\frac{228,93 \cdot 10^3 \text{ m}}{2}\right)^2 \pi \sqrt{2 \cdot 55,8 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 225 \cdot 10^3 \text{ Pa}}$$

$$m = 157,948 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$$

Zu 2.4 (3)

Pitot-Rohr: Abbremsen am „Stagnationspunkt“

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho_F}{2} \cdot v^2 \quad / \quad \rho_F = \text{Dichte d. strömenden Mediums}$$

v = mittl. Strömungsgeschw. im ungestörten Querschnitt

$p_2 - p_1$ = „Staudruck“ (Wirkdruck)

Zu 2.4. (4)

Turbinenradzähler mit axialer Anströmung

$$\tan \alpha = \frac{c_n}{v_m}, \quad c_n = \text{Umfangsgeschw.}$$

$$\rightarrow v_m = \frac{c_n}{\tan \alpha} = \cot \alpha \cdot c_n$$



$$\rightarrow \dot{v} = A \cdot v_m = A \cdot c_n \cdot \cot \alpha \\ = A \cdot r_T \cdot \omega \cdot \cot \alpha = A \cdot r_T \cdot 2\pi \cdot f \cdot \cot \alpha$$

Zu 2.5: Sensorprinzipien aus mechan. Schwingungen und Wellenausbreitung

Welle = Ausbreitung eines Schwingungszustands (Phase)

$$y(t, x) = y_0 \cdot \sin(\omega t - K \cdot x) \quad (\text{Gleich d. harmon. Welle})$$

$$K = \text{Wellenzahl} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$T = \text{Schwingungsperiode} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{1}{f}$$

Bsp.: Spannung

$$dm \cdot a = F_{\text{Rück}} = -(F_y(x) - F_y(x + dx)) = F \cdot \sin \alpha + F \cdot \frac{\sin(\alpha + dx)}{dx} \\ \sin \alpha = \frac{F_y(x)}{F}$$

$$\text{NR: } dx = \frac{dx}{dx} \cdot dx = \frac{1}{\frac{dx}{dx}} \cdot \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot dx \\ \approx -F \cdot (-\alpha + dx) + \alpha \\ \approx -F \cdot d \cdot \alpha$$

$$\alpha \approx \frac{dy}{dx}$$

$$d \cdot m \cdot a = +F \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot dx$$

$$d \cdot m \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = +F \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot dx$$

$$p \cdot A \cdot dx \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = F \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} \cdot dx \quad | : (p \cdot A)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F}{p \cdot A} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$| F = G \cdot A$$

$$\rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{G}{A} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

eindimensionale
Seilwellengleichung

Gleichung lösbar durch:

$$y(t, x) = y_0 \cdot \sin(\omega t - K \cdot x)$$

$$\rightarrow F = \frac{-\omega^2}{-K^2} \cdot G \cdot A$$

$$= \frac{(2\pi f)^2}{K^2} \cdot G \cdot A$$

$$= \underbrace{\left(\frac{2\pi}{K} \cdot f \right)^2}_{\lambda} \cdot G \cdot A \quad | \quad F = \lambda^2 \cdot f^2 \cdot G \cdot A \\ F = -\left(\frac{2\pi}{n} \right)^2 f^2 \cdot G \cdot A$$

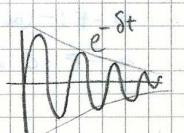
zu 2.5(5)

① freie gedämpfte Schwingung

Lösung d. Differentialgleichung: $y(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \cdot A \cdot e^{-\delta t}$

(φ_0 : Anfangsphase)

δ : Abklingkoeffizient, Dämpfungsconstante



$$\rightarrow \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \rightarrow \delta = \frac{b}{2m}$$

(b = Dämpfungsconstante der Reibungskraft)

$$[\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}] = \text{Kreisfrequenz der ungedämpften harm. Schwingung}$$

k = allg.: Richtgröße, Federkonstante

② erzwungene gedämpfte Schwingung

mit $x(t) = x_0 \cdot \sin(\omega_{\text{err}} \cdot t)$

Lösung: $y(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi_0)$

2.5(8)

Wellenausbreitung mit λ_Q (Punktquelle)

→ ausgedehnte Quelle mit Wellenfronten
(Phasenlinien für 2dim; „Phasenflächen“ für 3dim)

Anwendung Laufzeitmessung [TOF, time-of-flight measuring]

= Pulse-Echo-Verfahren

[speziell: SONAR = Sound Navigation and Ranging]

t_0 = Laufzeit

$s = 2 \cdot d$ = ges. Weg

Abhängigkeit der Phasengeschwindigkeit (Schallgesch.) vom Medium.

für

- f. Festkörper (Longitudinalwelle) $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

(E : Elastizitätsmodul, ρ = Dichte)

- für Flüssigkeiten $c = \sqrt{\frac{k}{\rho}}$

(k : Kompressionsmodul)

Beispiel

c für trockene Luft bei 0°C

$\lambda = ?$

$\Delta t + \Delta t_{\text{ans}} = 1,2 \text{ ms}$

$$s_{\text{min}} = c \cdot \frac{\Delta t + \Delta t_{\text{ans}}}{2} =$$

$$c = \sqrt{k \cdot \rho} \cdot T = \sqrt{1,40 \cdot 0,28704 \frac{\text{kg}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \cdot \frac{\text{T}}{\text{K}}} = \sqrt{\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} + 273,15$$

$$c = 331,31 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{ER: } [c] = \sqrt{\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} = \sqrt{\frac{\text{J}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{Nm}}{\text{kg}}} \\ = \sqrt{\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{m}}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}} = \sqrt{\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$s_{\text{min}} = c \cdot \frac{\Delta t + \Delta t_{\text{ans}}}{2} = 331,31 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1,2 \cdot 10^{-3}}{2}$$

$$s_{\text{min}} = 0,199 \text{ m}$$

$$c = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{c}{f} = \frac{331,31 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{50 \cdot 10^3 \text{ Hz}} = 6,63 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

zu 2.5(12)

Laufzeitdifferenzverfahren

v = mittl. Fließgeschwindigkeit des Mediums

c = Schallgeschwindigkeit im ruhenden Medium

$$\cos \varphi = \frac{v_{||}}{v} \rightarrow v_{||} = v \cdot \cos \varphi$$

$$\text{Situation 1: } c_1 = c + v_{||} = c + v \cdot \cos \varphi = \frac{l}{t_1}$$

$$\rightarrow t_1 = \frac{l}{c + v \cdot \cos \varphi}$$

$$\text{Situation 2: } c_2 = c - v_{\parallel} = c - v \cdot \cos \varphi = \frac{l}{t_2}$$

$$\rightarrow t_2 = \frac{l}{c - v \cdot \cos \varphi}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{l \cdot (c + v \cdot \cos \varphi) - l \cdot (c - v \cdot \cos \varphi)}{(c - v \cdot \cos \varphi) \cdot (c + v \cdot \cos \varphi)}$$

$$\Delta t = \frac{2 \cdot l \cdot v \cdot \cos \varphi}{c^2 - v^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

$$\rightarrow v^2 + \frac{2 \cdot l \cdot \cos \varphi}{\Delta t \cdot \cos^2 \varphi} \cdot v - \frac{c^2}{\cos^2 \varphi} = 0 \quad (\text{quadr. Gk})$$

Lösung:

$$v = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2l}{\Delta t \cdot \cos \varphi} \pm \sqrt{\left(\frac{l}{\Delta t \cdot \cos \varphi}\right)^2 - \left(-\frac{c^2}{\cos^2 \varphi}\right)^2}$$

$$= \frac{-l}{\Delta t \cdot \cos \varphi} \pm \sqrt{\frac{l^2 + c^2 \cdot (\Delta t)^2}{(\Delta t)^2 \cdot \cos^2 \varphi}}$$

$$v = \frac{1}{\Delta t \cdot \cos \varphi} \left(-l \pm \sqrt{l^2 + c^2 \cdot (\Delta t)^2} \right)$$

$$v = \frac{1}{\Delta t \cdot \cos \varphi} \cdot l \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{c^2}{\left(\frac{l}{\Delta t}\right)^2}} \right)$$

$$\text{meint } c^2 \ll \left(\frac{l}{\Delta t}\right)^2 \rightarrow \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad (\text{Tayloreihe})$$

$$\rightarrow v = \frac{l}{\Delta t \cdot \cos \varphi} \cdot \left(-1 \pm \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{c^2}{\left(\frac{l}{\Delta t}\right)^2} \right) \right)$$

einzig Lösung:

$$v = -\frac{l}{\Delta t \cdot \cos \varphi} \cdot \frac{c^2}{2 \cdot \left(\frac{l}{\Delta t}\right)^2}$$

$$v = \frac{c^2 \cdot \Delta t}{2 \cdot l \cdot \cos \varphi}$$

$$\text{Näherung: } c^2 \approx c_1 \cdot c_2 = \frac{l^2}{t_1 \cdot t_2} \rightarrow v = \frac{l^2 \cdot (t_2 - t_1)}{t_1 \cdot t_2 \cdot l \cdot \cos \varphi}$$

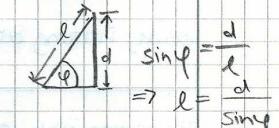
$$\Rightarrow v = \frac{l \cdot (t_2 - t_1)}{t_1 \cdot t_2 \cdot \cos \varphi}$$

Beispiel:

$$\text{geg.: } d = 100 \text{ mm} \quad \varphi = 45^\circ \quad c = \text{trockene Luft (Medium) bei } 20^\circ \text{C} + 273,15 \text{ K}$$

$$v = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{ges.: } l, t_1, t_2, \text{ Differenz: } t_2 - t_1 =$$



$$t_1 = \frac{l}{c + v \cdot \cos \varphi} = \frac{141 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{343,23 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 45^\circ} \Rightarrow l = \sin \varphi : d$$

$$l = \sin 45^\circ : 100 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$l = 0,741 \text{ m} \\ = 141 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$t_2 = \frac{l}{c - v \cdot \cos \varphi} = \frac{141 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{343,23 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \cos 45^\circ}$$

$$t_2 = 4,1165 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

$$c = \sqrt{12 \cdot R_i \cdot T} \\ = \sqrt{1,4 \cdot 0,28704 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}} \\ \cdot 293,15 \text{ K}$$

$$\Delta = t_2 - t_1 = 0,017 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

$$1,7 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

$$c = 343,23 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$1,7 \mu\text{s}$$

Vorteile:

- Keine Durchflussbehinderung
- keine Druckverluste
- geringer Wartungsaufwand

Nachteile:

- Staub/Verunreinigungen
- Abhängig vom Strömungsprofil
- Dämpfung bei hoher Zähigkeit
- Streuung an Gasblasen und Feststoffpartikeln

zu 2.5 (15 pp)

Doppler-Effekt

Position Sender / Quelle	Position Empfänger / Beobachter	f_B
fest	fest	f_Q
fest	Bewegung Richtung Quelle	$f_Q \cdot (1 + \frac{v_B}{c})$
fest	" von Quelle weg	$f_Q \cdot (1 - \frac{v_B}{c})$
Beweg. Richtung Beob.	fest	$\frac{f_Q}{1 - \frac{v_Q}{c}}$
Beweg. von Beob. weg	fest	$\frac{f_Q}{1 + \frac{v_Q}{c}}$

$$\begin{aligned} 1. \text{ Schritt: } f_{B1} &= f_Q \cdot \left(1 - \frac{v_B}{c}\right) \\ &= f_Q \cdot \left(1 - \frac{v \cdot \cos \alpha}{c}\right) \\ &= f_Q \cdot \left(1 - \frac{v \cdot \cos \alpha}{c}\right) \end{aligned}$$



$$2. \text{ Schritt: } f_{Q2} = f_{B1}$$

$$\begin{aligned} f_{B2} &= f_{Q2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{v_Q}{c}} \\ &= f_Q \cdot \frac{1 - \frac{v \cdot \cos \alpha}{c}}{1 + \frac{v \cdot \cos \alpha}{c}} \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{v \cdot \cos \alpha}{c}\right) \cdot f_{B2} = f_Q \cdot \left(1 - \frac{v \cdot \cos \alpha}{c}\right)$$

$$\rightarrow f_{B2} - f_Q = \frac{v \cdot \cos \alpha}{c} (-f_Q - f_{B2})$$

$$\rightarrow v = \frac{f_{B2} - f_Q}{f_{B2} + f_Q} \cdot \frac{c}{\cos \alpha} \cdot (-1)$$

$$= \frac{f_{B2} - f_Q}{f_{B2} + f_Q} \cdot \frac{c}{\cos \alpha} \cdot (-1) = - \frac{\Delta f}{\Delta f + 2f_Q}$$

$$\approx \frac{-\Delta f}{2f_Q} \cdot \frac{c}{\cos \alpha} = \frac{f_Q - f_{B2}}{2 \cdot f_Q} \cdot \frac{c}{\cos \alpha} = v$$

$$\rightarrow v_m = \frac{\Delta f}{2 \cdot f_Q} \cdot \frac{c}{\cos \alpha} \quad \text{mittlere Strömungsgeschw.}$$

3.1. Sensorprinzipien aus

Ausdehnung von Flüssigkeiten und festen Körpern

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \cdot \Delta T, \quad \alpha = (\text{mittl.}) \text{ Längenausdehnungskoeffizient}$$

$$\Delta l = l - l_0 = l_0 \cdot \alpha \cdot \Delta T$$

$$\rightarrow l(\Delta T) = l_0(1 + \alpha \cdot \Delta T)$$

l_0 : Anfangslänge

für Volumina:

$$\frac{\Delta V}{V_0} = \gamma \cdot \Delta T, \quad \gamma = \text{Raumausdehnungskoeffizient}$$

$$\rightarrow \Delta V = V - V_0 = V_0 \cdot \gamma \cdot \Delta T$$

$$\rightarrow V(\Delta T) = V_0(1 + \gamma \cdot \Delta T)$$

für Würfel:

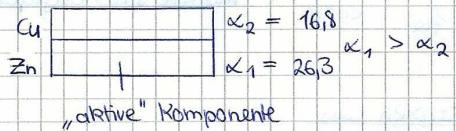
$$\begin{aligned} V(\Delta T) &= l^3 (\Delta T) \\ &= l_0^3 (1 + \alpha \cdot \Delta T)^3 \\ &= l_0^3 \cdot (1 + 3 \cdot \alpha \cdot \Delta T + 3 \cdot \cancel{\alpha^2} (\Delta T)^2 + \cancel{\alpha^3} (\Delta T)^3) \\ &= V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \gamma = 3 \cdot \alpha$$

für Gasel (ideale): $V(\Delta T) = V_0 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T)$

$$(\text{hier: } \gamma = \frac{1}{273,15 \text{ K}})$$

Bsp.: Bimetall

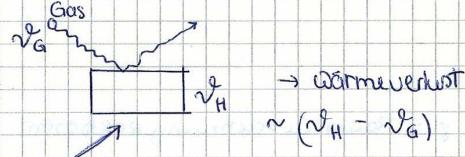


$$\rightarrow \frac{l_1 - l_2}{l_0} = \frac{l_0 \cdot (1 + \alpha_1 \cdot \Delta T) - l_0 \cdot (1 + \alpha_2 \cdot \Delta T)}{l_0}$$

$$\begin{aligned} \text{für } \Delta T = 1 \text{ K} \quad &= (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T = (26,3 - 16,8) \cdot 1 \text{ K} \\ &= 9,5 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

3.2. Sensorprinzipien

aus Wärmeverlust



Heizung mit I_H, R

Verlusteffekte: - freie Konvektion $\sim \Delta T$ - erhöhte Konvektion $\sim \Delta T$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{3 \text{ m}} = 1,67 \cdot 10^{-4} \%$$

$1 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ P}$
 1 MPa

$$\sigma_{\text{Alu}} = E \cdot \varepsilon = 7,1 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1,67 \cdot 10^{-4} = 11,86 \cdot (10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2})$$

$$\sigma_{\text{Cu}} = E \cdot \varepsilon = 12,3 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1,67 \cdot 10^{-4} = 20,54 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$\sigma_{\text{Stahl}} = E \cdot \varepsilon = 20,6 \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot 1,67 \cdot 10^{-4} = 34,40 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

$$G = \frac{F_N}{A} \Leftrightarrow F_N = G \cdot A = \sigma \cdot r^2 \pi \quad A = \frac{\pi}{4} \cdot d_0^2$$

$$\text{Alu: } F_N = 11,86 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (0,75 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \pi = 20,96 \text{ N}$$

$$\text{Cu: } F_N = 20,54 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (0,75 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \pi = 36,30 \text{ N}$$

$$\text{Stahl: } F_N = 34,40 \cdot 10^6 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot (0,75 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 \pi = 60,79 \text{ N}$$

zu 2.1.(2.)

Normalspannungen auf Membran:

$$1.) \text{ radial: } \sigma_r = c \cdot [3(m+1) \cdot \frac{r^2}{r_0^2} - (m+1)]$$

$$2.) \text{ tangential: } \sigma_t = c \cdot [(m+3) \cdot \frac{r^2}{r_0^2} - (m+1)]$$

$$r = \text{Radius; } r_0 = \text{max. Radius; } m = \frac{1}{\mu}; \quad c = \frac{3 \cdot (\Delta p) \cdot r_0^2}{8 \cdot \pi \cdot s^2} \quad \text{Druckdifferenz}$$

s = Membrandicke

Tutorium
Do, 15:00

15.04.15

zu 4.1. Resistive Sensorprinzipien

$$R = \frac{S \cdot l}{A}$$

l : Länge

A : Querschnittsfläche d. L

S : spezifischer elektr. Widerstand, Resistivität

$$\frac{1}{S} = k$$

= elektr. Leitfähigkeit, Konduktivität

Bsp.: Cermets, $\kappa = 2,7 \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2}$ $\rightarrow S = 3,704 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{cm}$ $1 \text{ft} = 30,48 \text{cm}$

Nickel-chrom $\frac{R}{l} = 12,5 \frac{\Omega}{\text{ft}}$ $\rightarrow S = 1,33 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{cm}$ $1 \text{in} = 2,54 \text{cm}$

Leiterdurchmesser $d = 0,008'' = [0,008 \text{ in}] = 0,02032 \text{ cm}$ $12,5 \frac{\Omega}{\text{ft}}$
 $A = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi$ $A = \frac{\pi}{4} d^2$ $\left[\frac{12,5}{30,48} \frac{\Omega}{\text{cm}}\right]$

$$R = \frac{S \cdot l}{A} \Leftrightarrow S = \frac{R \cdot A}{l} = \frac{R}{l} \cdot A = \frac{R}{l} \cdot \frac{\pi}{4} d^2$$

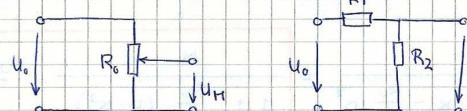
$$S = \frac{12,5}{30,48} \frac{\Omega}{\text{cm}} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot (0,02032 \text{ cm})^2 = 1,33 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{cm}$$

$$\frac{1}{S} = k \Leftrightarrow S = \frac{1}{k} = \frac{1}{2,7} \frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2} = \frac{10}{2,7}$$

$$S = 3,704 \cdot 10^{-4} \Omega \cdot \text{cm}$$

Potentiometrische Sensoren

a.) unbelasteter Spannungsteiler



$$R_0 = R_1 + R_2 = (R_0 - \Delta R) + \Delta R$$

$$I = \frac{U_0}{R_0}, \quad U_H = R_2 \cdot I \quad \rightarrow \quad U_H = R_2 \cdot \frac{U_0}{R_0} \Rightarrow U_H = U_0 \cdot \frac{\Delta R}{R_0}$$

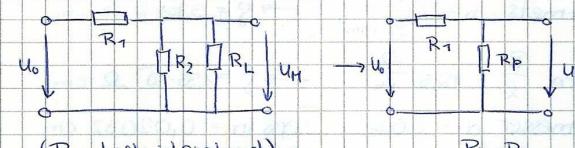
$$\frac{U_H}{U_0} = \frac{\Delta R}{R_0} = k = \text{Widerstandsverhältnis}$$

$$R_0 = \rho \cdot \frac{l_0}{A} \rightarrow \Delta R = \rho \cdot \frac{\Delta l}{A}$$

$$\Rightarrow U_H = \frac{\rho \cdot \frac{\Delta l}{A} \cdot U_0}{\rho \cdot \frac{l_0}{A}} = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot U_0$$

$$\Rightarrow \Delta l = \frac{U_H}{U_0} \cdot l_0$$

b.) belasteter Spannungsteiler



$$\frac{U_H}{U_0} = \frac{R_2}{R_2 + R_L} \cdot \frac{R_0}{R_1 + R_2} \cdot U_0 = \frac{R_2 \cdot R_L}{R_2 + R_L + R_1 + R_2} \cdot U_0$$

$$= \frac{R_2 \cdot U_0}{R_2 + \frac{R_1 \cdot R_2}{R_L} + R_1} / \frac{\Delta R \cdot U_0}{\Delta R + \frac{(R_0 - \Delta R) \cdot \Delta R}{R_L}} =$$

$$= \frac{\frac{U_H}{R_0}}{\frac{R_0 \cdot \Delta R}{R_L} - \frac{(\Delta R)^2}{R_L} + 1} = \frac{k}{\frac{\Delta R}{R_0} \cdot \frac{R_0}{R_L} - \frac{(\Delta R)^2}{R_0 \cdot R_L} + 1}$$

$$= \frac{\frac{U_H}{U_0}}{1 + \frac{R_0}{R_L} \cdot k - \frac{R_0}{R_L} \cdot k^2} = \frac{k}{1 + \frac{R_0}{R_L} \cdot (k - k^2)} = \frac{U_H(k)}{U_0}$$

$$\text{für } R_L \rightarrow \infty : \frac{U_H}{U_0} = k$$

Praxiswert:

$$\frac{R_L}{R_0} = 50 \quad k = 0,5$$

15.04.15

a) $\frac{U_H}{U_0} = k = 0,5$

b) $\frac{U_H}{U_0} = \frac{0,5}{1 + \frac{1}{50} \cdot (0,5 - (0,5)^2)} = 0,498$

$$\frac{U_H(k)}{U_0} = \frac{k}{1 + \frac{R_0}{R_L} \cdot k(1-k)} = \frac{\frac{\Delta l}{l_0}}{1 + \frac{R_0}{R_L} \cdot \frac{\Delta l}{l_0} \cdot \left(1 - \frac{\Delta l}{R_0}\right)}$$

$$R(s, l, A) = s \cdot \frac{l}{A}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{1}{s} \cdot \Delta s + \underbrace{\frac{1}{l} \cdot \Delta l}_{\text{Längsdehnung}} - \underbrace{\frac{2}{R} \cdot \Delta r}_{2 \cdot \varepsilon_g \leftarrow \text{querdehnung} \rightarrow -\mu \cdot \varepsilon}$$

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta s}{s} + \varepsilon - 2 \cdot \varepsilon_g$$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta R}{R} &= \varepsilon \cdot \left(\frac{\Delta s}{s \cdot \varepsilon} + 1 - 2 \cdot \frac{\varepsilon_g}{\varepsilon} \right) \\ &= \varepsilon \cdot \left(\frac{\Delta s}{s \cdot \varepsilon} + 1 + 2 \cdot \mu \right) \end{aligned}$$

\downarrow
k = k-Faktor, gauge/gage-Faktor

$$\frac{\Delta R}{R_0} = \varepsilon \cdot k$$

für Metalle $\rightarrow k \approx 2$

\rightarrow metallische Dehnungsmessstreifen = „DMS“

für Halbleiter $\rightarrow k \gg 2$

\rightarrow Halbleiter-DMS = „piezoresistive Sensoren“

zu 4.1. Sensitive Sensorprinzipien (?)

Temperaturerhöhung

\rightarrow kleinere Beweglichkeit u der Elektronen

$$\rightarrow \text{Leitfähigkeit } [k = e \cdot n \cdot \mu = \frac{1}{s}]$$

(e: Elementarladung)

(n: Konzentration der freien Elektronen)

\rightarrow Größerer Ohmscher Widerstand R

Sensoren Widerstandsthermometer (RTD, resistive temperature detector)

R_0 = „Nennwert“ $\rightarrow R(R_0)$

R_0 = Bezugstemperatur

A, B, ... = Temperaturkoeffizienten

Bsp.: Ni100, $C \approx 0 \approx D$

$$\frac{R(100^\circ\text{C}) - R(20^\circ\text{C})}{R(20^\circ\text{C})} = \dots \%$$

$$[R(\vartheta) = R_0 \cdot (1 + A\vartheta + B \cdot \vartheta^2 + C \cdot \vartheta^3 + D \cdot \vartheta^4)]$$

$$\Rightarrow R(100) = R_0 \cdot (1 + A\vartheta + B \cdot \vartheta^2)$$

$$= 100 \Omega (1 + 5,485 \cdot 10^3 \cdot 100^\circ\text{C} + 6,65 \cdot 10^{-6} \cdot (100^\circ\text{C})^2)$$

$$= 161,5 \Omega$$

$$R(20^\circ\text{C}) = 100 \Omega (1 + 5,485 \cdot 10^3 \cdot 20^\circ\text{C} + 6,65 \cdot 10^{-6} \cdot (20^\circ\text{C})^2)$$

$$= 111,236$$

$$\Rightarrow \frac{161,5 \Omega - 111,236}{111,236} = 45,187\%$$

lineare Näherung:

$$R(\vartheta) \approx R_0 \cdot (1 + A \cdot \vartheta)$$

$$\frac{R(\vartheta)}{R_0} = 1 + A \vartheta$$
$$\Rightarrow \vartheta = \frac{1}{A} \left(\frac{R(\vartheta)}{R_0} - 1 \right)$$

quadratische Näherung: $R(\vartheta) \approx R_0 \cdot (1 + A\vartheta + B\vartheta^2)$

$$\vartheta^2 + \frac{A}{B} \cdot \vartheta - \frac{1}{B} \cdot \left(\frac{R(\vartheta)}{R_0} - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \vartheta_{1/2} = -\frac{A}{2B} \pm \sqrt{\frac{A^2}{4B^2} + \frac{1}{B} \left(\frac{R(\vartheta)}{R_0} - 1 \right)}$$

Bsp: Pt 100 $R(\vartheta) = 138,506 \Omega$

$$\rightarrow \vartheta(\text{linear}) = \frac{1}{A} \left(\frac{R(\vartheta)}{R_0} - 1 \right) = \frac{1}{3,9083} \cdot 10^{-3} \left(\frac{138,506 \Omega}{100 \Omega} - 1 \right)$$

$$= \underline{\underline{98,524^\circ C}}$$

$$\rightarrow \vartheta(\text{quadrat.}) = -\frac{3,9083 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot (-0,5775 \cdot 10^6)} \pm \sqrt{\frac{(3,9083 \cdot 10^{-3})^2}{4 \cdot (-0,5775 \cdot 10^6)^2} +}$$

$$\frac{1}{(-0,5775 \cdot 10^6)} \cdot \left(\frac{138,506 \Omega}{100 \Omega} - 1 \right)$$

$$= 3383,8 \pm \sqrt{11450166,8 \Omega + (-666770,5628)}$$

$$\vartheta_1(\text{quad.}) = (6667,12^\circ C)$$

$$\vartheta_2(\text{quad.}) = \underline{\underline{99,49 \approx 100^\circ C}}$$

15.04.15

$$\text{für Heißleiter (NTC)}: R_T = R_N \cdot e^{B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_N} \right)}$$

$$R_N = R_T(T_N)$$

$$T_N: \text{Bezugstemperatur} \quad \ln \left(\frac{R_T}{R_N} \right) = B \cdot \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_N} \right)$$

T: Temp. (in K)

B: Parameter der Kennlinie

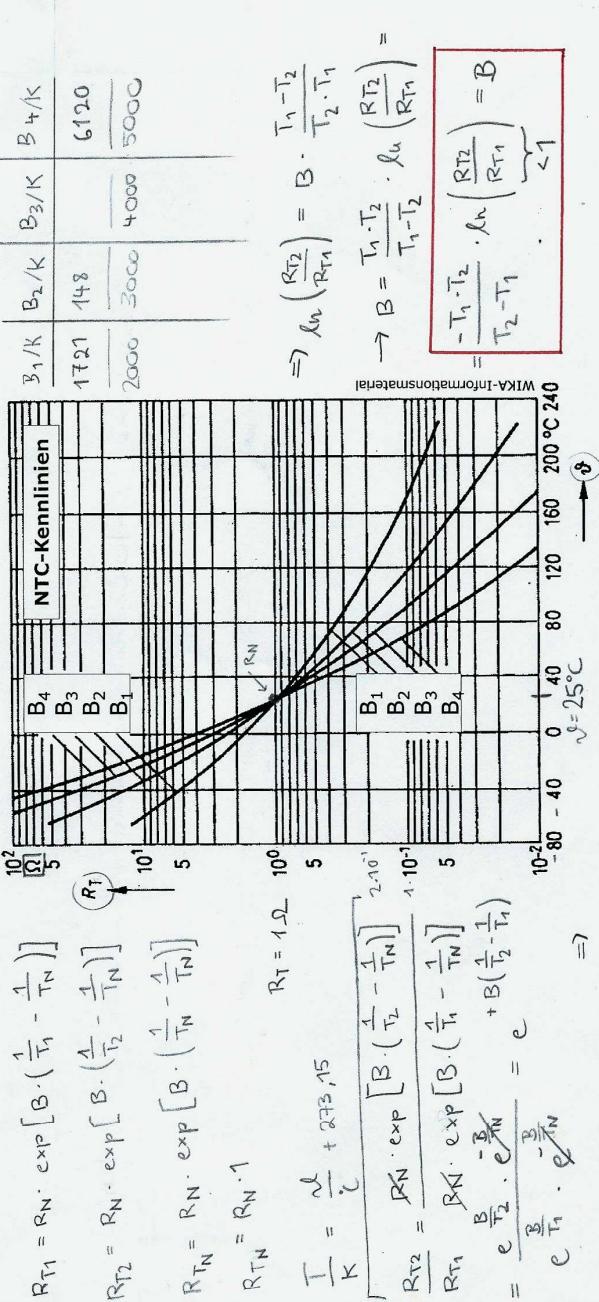
$$\ln \left(\frac{R_T}{R_N} \right) + \frac{B}{T_N} = \frac{B}{T} \quad / \cdot T \cdot B$$

$$T \left(\frac{1}{B} \cdot \ln \left(\frac{R_T}{R_N} \right) + \frac{1}{T_N} \right) = 1$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{\frac{1}{B} \cdot \ln \left(\frac{R_T}{R_N} \right) + \frac{1}{T_N}} \cdot \frac{B}{B}$$

4. Sensorprinzipien der Elektrostatik und -dynamik:

4.1 Resistive Sensorprinzipien (9a, Aufgabe)



Fakultät Elektro- und Medientechnik / Physikalische Grundlagen der Sensorik / Prof. Dr. Martin Joghwich

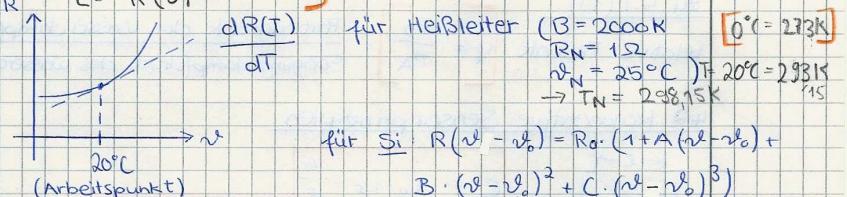
zu 4.1 (10)

Dipolmoment eines einzelnen Atoms $p = \epsilon_0 \cdot \alpha \cdot E_0$
 $(\alpha = \text{Polarisierbarkeit}, E_0 = \text{elekt. Feldstärke})$

Polarisation eines dichten Mediums $P = \epsilon_0 \cdot \chi \cdot E_0$
 $(\chi = \text{Suszeptibilität})$

Wechsel bei Curie-Temperatur T_c $n < n_c$: Dipolmoment, geringer Widerstand $n > n_c$: Kein Dipolmoment, großer Widerstand

Empfindlichkeit: $\frac{dR(n)}{dn}$ für Pt 100, Si (Bsp.)



für Heißleiter:
 $R(T) = R_N \cdot e^{\frac{B}{T} + \frac{B}{T^2}}$

Pt 100: $R'(n) = R_0 \cdot (A + 2Bn)$
 $= 100 \Omega \left(3,9083 \cdot 10^3 \frac{1}{\text{C}} + 2 \cdot (-0,5775 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{C}^2}) \cdot 20^\circ\text{C} \right)$
 $= 0,38852 \frac{1}{\text{C}}$

für Si: $R'(n - n_0) = R_0 \cdot (A + 2B(n - n_0) + 3C(n - n_0)^2)$
 $= 2 \cdot 10^3 \Omega \cdot \left(7,93 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{C}} + 2 \cdot 1,93 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{C}^2} (20^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C}) + 3 \cdot -4,82 \cdot 10^{-8} \frac{1}{\text{C}^3} (20^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C})^2 \right) = 15,47 \frac{\Omega}{\text{C}}$

für Heißleiter: $R(T) = R_N \cdot e^{\frac{B}{T} - \frac{B}{T^2}}$
 $R'(T) = R_N \cdot e^{\frac{B}{T} \cdot B \cdot \left(-\frac{1}{T^2} \right)} \cdot e^{-\frac{B}{T^2}} = 1 \Omega \cdot e^{\frac{2000 \text{ K}}{293,15 \text{ K}}} \cdot \left(-\frac{1}{(293,15 \text{ K})^2} \right)$

22.04.15

zu 4.1 (16)

Toleranzen

$\vartheta / ^\circ C$	A	B
20	± 0.19	± 0.4
500	± 1.15	± 2.8

$(20 \pm 0.19)^\circ C$ für Klasse A

zu 4.1 (17)

relative Feuchte $\psi = \frac{P_d}{P_A} = \frac{\text{Partialdruck des Wasserdampfs}}{\text{Sättigungsdampfdruck des Wasserdampfs}}$

4.2. Kapazitive Sensorprinzipien

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{l}$$

Arbeitspektrum: $C_0 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{l_0}$ A = Fläche

Aenderung $dl \rightarrow dC = ?$

$$\hookrightarrow dC = \frac{dC}{dl} \Big|_{l=l_0} \cdot dl \quad (\text{partielle Ableitung})$$

$$dC = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{-A}{l_0^2} \cdot dl$$

$$= \underbrace{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{l_0}}_{C_0} \cdot \frac{-1}{l_0^2} \cdot l_0 \cdot dl$$

$$\rightarrow dC = -C_0 \cdot \frac{dl}{l_0}$$

$$\rightarrow \frac{dC}{C_0} = -\frac{dl}{l_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\Delta C}{C_0} = -\frac{\Delta l}{l_0}} \quad \rightarrow \Delta l = -l_0 \cdot \frac{\Delta C}{C_0} = l - l_0$$

Bsp:



$$c_1 = c_3 = \epsilon_0 \cdot 1 \cdot \frac{A}{\frac{l_0+h}{2}}$$

$$c_2 = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{h}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_3} = \frac{1}{c_2} + 2 \cdot \frac{1}{c_1}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{h}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A} + 2 \cdot \frac{(l_0-h) \cdot \frac{1}{2}}{\epsilon_0 \cdot A} = \frac{h + (l_0-h) \cdot \epsilon_r}{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}$$

$$\text{Bezug: } C_0 = \epsilon_0 \cdot \frac{A}{l_0}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{l_0}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot \left(\frac{h}{l_0 \cdot \epsilon_r} + 1 - \frac{h}{l_0} \right) = \frac{l_0}{\epsilon_0 \cdot A} \cdot \left(1 - \frac{h}{l_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \right)$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0} \cdot \left(1 - \frac{h}{l_0} \cdot \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \right)$$

$$\rightarrow h = l_0 \cdot \frac{C - C_0}{C} \cdot \frac{\epsilon_r}{\epsilon_r - 1} \quad \rightarrow \text{Bestimmung der Dicke des Dielektrikums}$$

Arbeitspunkt: $h = h_0$

$$\rightarrow C = C_0 \cdot \left(1 - \frac{h}{l_0} \cdot \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \right)^{-1}$$

$$dC = \frac{dC}{dh} \Big|_{h=h_0} \cdot dh = \frac{C_0}{\left(1 - \frac{h_0}{l_0} \cdot \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \right)} \cdot \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r \cdot (l_0 - h_0) + h_0} \cdot dh$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{C} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r \cdot (l_0 - h_0) + h_0} \cdot dh$$

$$\boxed{\frac{\Delta C}{C} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r \cdot (l_0 - h_0) + h_0} \cdot \Delta h}$$

22.04.15

Zahlenbeispiel:

$$l_0 = 1 \text{ mm} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad \epsilon_r = 2,3 \text{ (PE)} \quad h_0 = 50 \mu\text{m} = 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

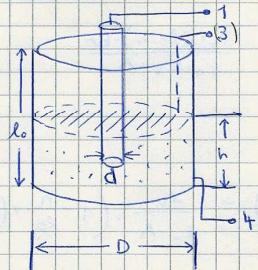
$$\Delta h = 5 \mu\text{m} = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Δh = Dickeintoleranz

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{2,3 - 1}{2,3 \cdot (1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}) + 50 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \cdot 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\frac{\Delta C}{C} = \frac{2,3 - 1}{2,3 \cdot 10^{-3}} = 0,29\%$$

zu 4.2 (8)



$$\epsilon_1 = \boxed{\begin{array}{c} 1 \\ \parallel \\ 2 \end{array}} \quad \epsilon_2 \text{ (gefüllt)}$$

$$C = C_1 + C_2$$

$$C = \frac{2\pi \epsilon_0 \cdot (l_0 - h)}{\ln(\frac{D}{a})} = \underbrace{\frac{2\pi}{\ln(\frac{D}{a})}}_{K_C \text{ Konstante der Sensorform}} \cdot \epsilon_0 \cdot (l_0 - h)$$

$$C = K_C \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot h$$

$$C = C_1 + C_2 = K_C \cdot \epsilon_0 \cdot (l_0 + h \cdot (\epsilon_r - 1))$$

$$\frac{C}{K_C \cdot \epsilon_0} = l_0 + h \cdot (\epsilon_r - 1)$$

$$\left(\frac{C \cdot l_0}{K_C \cdot \epsilon_0 \cdot l_0} - l_0 \right) \cdot \frac{1}{\epsilon_r - 1} = h \quad \text{mit leerem Kondensator}$$

$$C_0 = K_C \cdot \epsilon_0 \cdot \epsilon_f \cdot l_0$$

$$l_0 \cdot \left(\frac{C}{C_0} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\epsilon_r - 1} = h$$

$$\rightarrow h = l_0 \cdot \left(\frac{C - C_0}{C_0} \right) \cdot \frac{1}{\epsilon_r - 1}$$

$$\text{Änderung} = \frac{dc}{dh} \Big|_{h=h_0} = k_C \cdot \epsilon_0 \cdot (\epsilon_r - 1) \cdot dh = dC \quad 22.04.15$$

$$\frac{C_0}{l_0}$$

$$\rightarrow \frac{\Delta C}{C_0} = \frac{\epsilon_r - 1}{l_0} \cdot \Delta h$$

Zahlenbeispiel: Zucker

$$l_0 = 10 \text{ m}$$

$$\Delta h = 5 \text{ cm} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$\frac{\Delta C}{C_0} = \frac{3 - 1}{10 \text{ m}} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = \frac{1}{100} \cdot 5 \cdot 10^{-2} \text{ m} = 1\%$$

4.2. (10)

Kapazitive Feuchtemessung

$$C(\varphi) = C_0 \cdot (1 + K \cdot \left(\frac{\varphi}{100\%} \right)^n)$$

Vergleich resistive Feuchtemessung

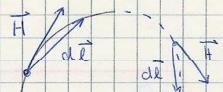
$$R(\varphi) = R_0 \cdot \exp \left(- \frac{\varphi}{C \cdot 100\%} \right)$$

zu 4.3. Induktive Sensorprinzipien

29.04.15

ϕ : magnetischer Fluss, $[\phi] = V \cdot S = Wb$ (Weber)

H: magnetische Feldstärke, $[H] = \frac{A}{m}$ $[B] = \frac{Vs}{m^2} = T$ (Tesla) $= 10^5 G$ (Gauss)



Materie im Magnetfeld:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

B: magnetische Flussdichte (magnet. Induktion)

$$U_m = \int \vec{H} \cdot d\vec{l} = \text{magnetische Spannung}$$

$$R_m = \text{magnetischer Widerstand} \quad [R_m] = \frac{A}{Vs}$$

μ_0 = Induktionskonstante (magnet. Feldkonstante)

$$[\mu_0] = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$$

μ_r = relative Permeabilität (Permeabilitätszahl)

Durchflutungsgesetz:

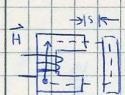
$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = N \cdot I$$

N: Anzahl der Leiter = Windungszahl der Spule
I: Stromstärke (Amplitudenwert)

Induktivität einer Spule:

$$L = N \cdot \frac{d\Phi}{di}$$

i: Stromstärke (z.B. $I_0 \cdot \sin(\omega t)$)



$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{Fe} \cdot l_k + H_{Fe} \cdot l_A (l_k = \text{Weg im Eisenkernmaterial}) + H_L \cdot 2s \quad (l_A = \text{Weg im Eisenkernmaterial})$$

$$R_m = \frac{\int \vec{H} \cdot d\vec{l}}{\Phi}$$

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

z.B. Spule mit Eisenkern

2s = Luftspalt

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H$$

$$R_m = \frac{H_{Fe} \cdot l_{Fe}}{B_{Fe} \cdot A} = \frac{H_{Fe} \cdot l_{Fe}}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot H_{Fe} \cdot A} = \frac{l_{Fe}}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A} \quad A: \text{Querschnittsfläche}$$

$$[R_m] = \frac{\mu_0 \cdot A \cdot vs}{vs \cdot \mu_0^2} = \frac{A}{\mu_0^2}$$

für Queranker aufnehmer

$$R_m = \frac{l_{Fe}}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_k} + \frac{2s}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_k} \quad A_k: \text{Querschnittsfläche von Kern und Anker}$$

$$R_m = \frac{l_{Fe} + 2s \cdot \mu_r}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_k}$$

$$L = N \cdot \frac{\Phi}{I} = N \cdot \frac{1}{N} \oint H \cdot dl = \frac{N^2 \cdot \Phi}{R_m} = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_k}{l_{Fe} + 2s \cdot \mu_r} = L$$

⇒ Abstandsbestimmung:

$$s = \left(\frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_k}{L} - l_{Fe} \right) \cdot \frac{1}{2\mu_r} \quad (\text{exakt})$$

für $s \ll l_{Fe}$, $\mu_r \gg 1$

$$\rightarrow R_m = \frac{l_{Fe}}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_k} + \frac{2s \cdot \mu_r}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_k} \rightarrow L \approx \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_k}{2s \cdot \mu_r} \approx \frac{1}{s}$$

$$s = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot A_k \cdot \mu_r}{L \cdot 2 \cdot \mu_r} \quad (\text{Näherung})$$

(Bsp.) $N=200$ $L=0,18 \text{ m} \cdot H = 0,18 \cdot 10^{-3} \text{ H}$ $1H = \frac{Vs}{A}$

$$\begin{aligned} & l_{Fe} = 20 \text{ mm}^2 \quad l_{Fe} = 90 \text{ mm} = 90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \\ & \mu_r = 800 \quad A_{Fe} = 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \\ & \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} = 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \\ & = 10^2 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

$$\rightarrow s = (\text{exakt}) = \left(\frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_{Fe}}{L} - l_{Fe} \right) \cdot \frac{1}{2\mu_r}$$

$$= \left(\frac{(200)^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot 800 \cdot 20 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2}{0,18 \cdot 10^{-3} \text{ H}} - 90 \cdot 10^{-3} \text{ m} \right)$$

$$\cdot \frac{1}{2 \cdot 800} = 9,9 \cdot 10^{-4} \text{ m} \approx 1 \text{ mm}$$

$$\rightarrow s(\text{Näherung}) = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot A_{Fe}}{L \cdot 2} = \frac{(200)^2 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am} \cdot 20 \cdot 10^3 \text{m}^2}{0,48 \cdot 10^3 \text{H} \cdot 2}$$

$$= 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ m} \approx 1 \text{ mm}$$

für Arbeitspunkt: $s = s_0 \rightarrow L_0 = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A_k}{l_{Fe} + 2 \cdot s_0 \cdot \mu_r}$

Induktivität einer Drosselspule mit Tauchanker: $L = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot A}{s}$

\Rightarrow Wegmessung: $s = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot A}{L}$ ↓ Tauchankergeber

$$R_m = \frac{l_{Fe}}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot A} + \frac{s}{\mu_0 \cdot A}$$



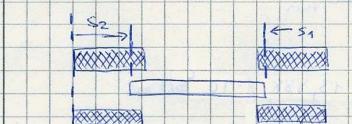
$$L = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot A_k}{s}$$

Arbeitspunkt: $s = l_0 \rightarrow L_0 = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot A_k}{l_0}$

relativer Wert $\frac{L}{L_0} = \frac{l_0}{s}$

Differenzial-Tauchankergeber: \Rightarrow Wegmessung $\Delta s = -s_0 \cdot \frac{L_2 - L_1}{L_2 + L_1}$

Differenzialanordnung:



$$s_1 = s_0 - \Delta s$$

$$x = w \cdot L \quad (\text{Bindwiderstand})$$

$$L_1 = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot A_k}{s_1} ; L_2 = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot A_k}{s_2}$$

$$\frac{L_2 - L_1}{L_2 + L_1} = \frac{\frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1}}{\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_1}} = \frac{\frac{s_1 - s_2}{s_1 \cdot s_2}}{\frac{s_1 + s_2}{s_1 \cdot s_2}} = \frac{s_1 - s_2}{s_1 + s_2} = \frac{-\Delta s}{s_0 + s_1}$$

$$\Rightarrow \frac{L_2 - L_1}{L_2 + L_1} = -\frac{\Delta s}{s_0} \Rightarrow \Delta s = -s_0 \cdot \frac{L_2 - L_1}{L_2 + L_1}$$

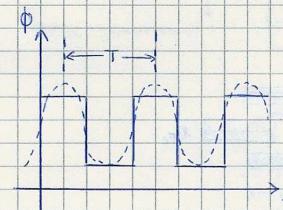
$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H}$$

$$\Phi = \int \vec{B} d\vec{A}$$

Änderung der Spulenfüllung"

$$\frac{d\vec{B}}{dt} \neq 0 \rightarrow \frac{d\Phi}{dt} \neq 0 \rightarrow U_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} \neq 0$$

für Drehzahlmessung:



$$\Phi = \Phi_0 + \cos(\omega t)$$

n Zähne

φ Drehwinkel

$$\rightarrow \text{Drehzahl } f_0 = \frac{1}{T_0}$$

$$\rightarrow \text{Winkelfrequenz } \omega_0 = 2\pi f = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$T_0 = n \cdot T \rightarrow T = \frac{T_0}{n} = \frac{1}{f_0 \cdot n}$$

Bsp. $n = 60$ $f_0 = 20 \dots 7000 \frac{1}{\text{min}}$

$$T = \frac{1}{f_0 \cdot n} = \frac{1}{20 \cdot 60 \frac{1}{\text{s}}} = 0,05 \text{ s} = 50 \text{ ms}$$

$$T = \frac{1}{7000 \cdot 60 \frac{1}{\text{s}}} = 0,1429 \cdot 10^{-3} \text{ s} = 143 \mu\text{s}$$

$$\Phi = \Phi_0 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t\right) = \Phi_0 + \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot n \cdot t\right)$$

$$U_{ind} = -\sin(\omega_0 \cdot n \cdot t) \cdot \omega_0 \cdot n$$

$$= U_m \cdot \sin(\omega_0 \cdot n \cdot t)$$

Linearer Differenzial-Transformator

29.04.15

LVDT = Linearer veränderbarer Differenzial-Transformator

zu 4.4. Weitere magnetische Sensorprinzipien

MID (Magnetisch Induktiver Durchflussmesser) - Verfahren:

$$\vec{F}_L + \vec{F}_C = 0$$

$$\vec{F}_L: \text{Lorentzkraft} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\vec{F}_C: \text{Coulombkraft} = q \cdot \vec{E}$$



→ bei Gleichgewicht der Kräften: $\vec{E} = -(\vec{v} \times \vec{B})$

$$\text{Messung von } U_E = \int_{-D/2}^{D/2} \vec{E} \cdot d\vec{s} \quad (D: \text{Rohrdurchmesser})$$

$$= - \int_{-D/2}^{D/2} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} \approx -v \cdot B \left[\frac{D}{2} - \left(-\frac{D}{2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow U_E = -v \cdot B \cdot D \Rightarrow U_E = v \cdot B \cdot D$$

$$\text{Volumenstrom: } \dot{V} = v \cdot A = v \cdot \frac{\pi}{4} D^2$$

$$\rightarrow \dot{V} = \frac{U_{21}}{B \cdot D} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D^2 = \frac{U_{21}}{B} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D$$

$$\text{Massenstrom: } \dot{m} = \rho \cdot \dot{V} \quad (\rho: \text{Dichte})$$

$$\rightarrow \dot{m} = \rho \cdot \frac{U_{21}}{B} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D$$

$$[B] = T = \frac{Vs}{m^2}$$

Bsp. $D = 10 \text{ cm} = 10 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ $B = 0,2 \text{ T}$

$$H_2O, \rho = 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

(1) Empfindlichkeit E bei \dot{V} -Bestimmung: $\frac{dU_{21}}{d\dot{V}} = \dots \frac{\text{mV}}{\text{m}^3/\text{s}}$

(2) Empfindlichkeit E bei v -Bestimmung: $\frac{dU_{21}}{dv} = \dots \frac{\text{mV}}{\text{m/s}}$

(3) Empfindlichkeit E bei \dot{m} -Bestimmung: $\frac{dU_{21}}{dm} = \dots \frac{\text{mV}}{\text{kg/h}}$

$$\textcircled{1} \quad \frac{dU_{21}}{d\dot{V}}$$

$$\dot{V} = \frac{U_{21}}{B} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D \quad | \cdot B \cdot 4$$

$$\dot{V} \cdot B \cdot 4 = U_{21} \cdot \pi \cdot D \quad | : \pi \cdot D$$

$$U_{21} = \frac{\dot{V} \cdot B \cdot 4}{\pi \cdot D}$$

$$U_{21}' = \frac{B \cdot 4}{\pi \cdot D} = \frac{0,2 \text{ T} \cdot 4}{\pi \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 2,546 \frac{\text{mV}}{\text{m}^3/\text{s}}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{dU_{21}}{dv}$$

$$U_{21} = v \cdot B \cdot D$$

$$x = 1$$

$$U_{21} = B \cdot D = 0,2 \text{ T} \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ m} \\ = 0,02 \frac{\text{mV}}{\text{m/s}}$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{dU_{21}}{dm}$$

$$m = \dot{V} \cdot \frac{U_{21}}{B} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot D \quad | \cdot B \cdot 4$$

$$m \cdot B \cdot 4 = \dot{V} \cdot U_{21} \cdot \pi \cdot D \quad | : \dot{V} : \pi \cdot D$$

$$U_{21} = \frac{m \cdot B \cdot 4}{\dot{V} \cdot \pi \cdot D}$$

$$U_{21}'(m) = \frac{B \cdot 4}{\dot{V} \cdot \pi \cdot D} = \frac{0,2 \text{ T} \cdot 4}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \pi \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 2,546 \cdot 10^3 \frac{\text{mV}}{\text{kg/s}}$$

Grenzen: (Probleme)

- Mindestleitfähigkeit: $5 \cdot 10^{-6} \frac{\text{S}}{\text{cm}}$

- Veränderung des durchströmten Querschnitts A,
(Gasblasen, unvollständige Füllung, Ablagerung an Wänden, Wandabtrag)

- Ablagerung auf Elektroden, Abtrag von Elektrodenmaterial

4.4 (2) Hall-Effekt

Gleichgewicht von Lorentzkraft und Coulombkraft

$$v_x \cdot B_2 = E_y$$

$$F_L = F_C$$

$$\rightarrow E_y \cdot b = U_H = v_x \cdot B_2 \cdot b \quad (\text{Hallspannung})$$

$$\text{Stromdichte } j_x = \frac{I_x}{A} = \frac{I_x}{b \cdot d} \rightarrow \text{ges. Strom } I_x = j_x \cdot b \cdot d$$

$$n: \text{Dichte der Ladungsträger} = n \cdot e \cdot v_x \cdot b \cdot d$$

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ As} = \text{Elementarladung}$$

$$[I_x] = \frac{1}{m^2} \cdot A \cdot s = \frac{A}{s} \cdot m^2 = A \quad R_H = \text{Hallwiderstand}$$

$$v_x = \frac{I_x}{n \cdot e \cdot b \cdot d} \rightarrow U_H = \frac{1}{d} \cdot \frac{B_2}{n \cdot e} \cdot I_x \quad \text{Hallspannung}$$

$\text{A}_H = \text{Hall-Koeffizient, Hall-Konstante}$

$$\text{Praktisformel: } U_H = k_o \cdot I_x \cdot B_2 = \frac{A_H}{d} \cdot I_x \cdot B_2$$

$k_o = \text{Leerlaufempfindlichkeit}$

$$\text{Bsp: GaAs} \quad n = n_e = 7 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3} = \frac{1}{m^3}$$

$$d = 0,5 \mu\text{m} = 0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad I_x = 5 \text{ mA} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ A}$$

$$\rightarrow A_H = ? \quad B_2 = 0,1 \text{ T} \rightarrow U_H = ?$$

$$A_H = \frac{1}{n \cdot e} = \frac{1}{7 \cdot 10^{22} \frac{1}{m^3} \cdot 1,602 \cdot 10^{19} \text{ As}} = 8,917 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{C}}$$

$$[A_H] = \frac{1}{\frac{1}{m^3} \cdot \text{A} \cdot \text{s}} = \frac{m^3}{\text{A} \cdot \text{s}} = \frac{m^3}{\text{C}} \quad [B] = \text{T} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

$$U_H = 8,917 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^3}{\text{As}} \cdot \frac{0,1 \text{ T}}{0,5 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ A} = 89,77 \cdot 10^{-3} \text{ V}$$

$$[U_H] = \frac{\text{m}^3}{\text{A} \cdot \text{s}} \cdot \frac{\text{T}}{\text{m}} \cdot \text{A} = \frac{\text{m}^3}{\text{A} \cdot \text{s}} \cdot \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \cdot \text{A} = \frac{\text{Vs}^2 \cdot \text{V} \cdot \text{s} \cdot \text{A}}{\text{A} \cdot \text{s} \cdot \text{Vs}^2 \cdot \text{m}^2} = \text{V}$$

06.05.15

$$B_2(z) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_{\text{Spule}} \cdot A}{z^3} \quad m = \text{magnetisches Moment}$$

Spule

$$U_H = k_o \cdot I_x \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_{\text{Spule}} \cdot A}{z^3}$$

$$\rightarrow z \left(k_o \cdot I_x \cdot \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_{\text{Spule}} \cdot A}{U_H} \right)^{\frac{1}{3}} \approx \frac{1}{U_H^{\frac{1}{3}}}$$

zu 4.4 (6)

Magnetoresistiver Effekt (Gauß-Effekt)

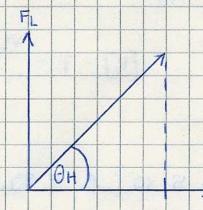
$$\cdot \text{ ohne Magnetfeld} \quad R_o = \frac{\rho \cdot l_o}{A_o} = \frac{\rho \cdot l_o}{b_o \cdot d}$$

$$\cdot \text{ mit Magnetfeld} \quad R(B_2) = \frac{\rho \cdot l_B}{b_B \cdot d}$$

$$\cos \Theta_H = \frac{l_B}{l_B} \rightarrow l_B = \frac{l_o}{\cos \Theta_H} \quad \text{mit } \Theta_H = \text{Hallwinkel}$$

$$\cos \Theta_H = \frac{b_B}{b_B} \rightarrow b_B = b_o \cdot \cos \Theta_H$$

$$\rightarrow R(B_2) = \frac{\rho \cdot l_o}{\cos \Theta_H \cdot (b_o \cdot \cos \Theta_H \cdot d)} = \frac{R_o}{\cos^2 \Theta_H} = (1 + \tan^2 \Theta_H) \cdot R_o$$



$$\tan \Theta_H = \frac{F_L}{F_C} \cdot K_G \quad \text{mit } K_G = \text{Gerätekonstante}$$

$$\tan \Theta_H = \frac{v \cdot B}{E} \cdot K_G \quad \text{mit } v = \mu \cdot E$$

$$\tan \Theta_H = \frac{\mu \cdot E \cdot B}{E} \cdot K_G \quad \mu = \text{Beweglichkeit der Ladungsträger}$$

$$\rightarrow R(B_2) = (1 + \mu^2 \cdot B^2 \cdot K_G^2) \cdot R_o$$

$$\frac{R(B_2)}{R_o} = 1 + \mu^2 \cdot B^2 \cdot K_G^2$$

$$\Rightarrow B = \sqrt{\frac{R(B_2)}{R_o} - 1} \cdot \frac{1}{\mu \cdot K_G}$$

Bsp) InSb $\mu = 7,7 \frac{m^2}{Vs}$ $B_2 = 0,2T$ $k_G = 1$ - 06.05.15

$$\rightarrow \Theta_H = ? \quad \tan \Theta_H = \mu \cdot B \cdot k_G \Rightarrow \Theta_H = 57^\circ$$

$$\Theta_H = \arctan(\mu \cdot B \cdot k_G) = \arctan\left(7,7 \frac{m^2}{Vs} \cdot 0,2T \cdot 1\right)$$

$$\frac{R(B_2)}{R_0} = 1 + \mu^2 \cdot B^2 \cdot k_G^2 = 1 + \left(7,7 \frac{m^2}{Vs}\right)^2 \cdot (0,2T)^2 \cdot 1^2$$

$$= 3,3716$$

$$\frac{l_B}{l_0} = \frac{1}{\cos \Theta_H} \quad (\cos \Theta_H = \frac{l_0}{l_B}) = 1,836$$

$$\frac{bB}{b_0} = \cos \Theta_H = \cos(57^\circ) = 0,5446$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{A \cdot \text{Ispace}}{z^3}$$

$$\sqrt{\frac{R(B_2)}{R_0} - 1} \cdot \frac{1}{\mu \cdot k_G} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{m}{z^3}$$

$$\rightarrow z^3 = \frac{\mu_0 \cdot m}{2\pi} \cdot \frac{\mu \cdot k_G}{\left(\frac{R(B_2)}{R_0} - 1\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\rightarrow z = \left(\frac{\mu_0 \cdot m \cdot \mu \cdot k_G}{2\pi} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{R(B_2)}{R_0} - 1 \right)^{-\frac{1}{6}}$$

Abstandsmessung:
vom Plättchen
zum Magneten

zu 4.4 (7) Anisotroper Magnetischer Effekt (AMR-Effekt)

bei magnetisiertem Material: Remanenzflussdichte B_R

zur Entmagnetisierung: Koerzitivfeldstärke H_C

4.4 (8) Weisssche Bezirke:



Bezirke

→ Blochwandverschiebung
durch äußere (pulsförmige)
Magnetisierung

→ Längenänderung (Magnetostraktion, Längenänderung)

speziell: Torsion, Ausbreitungsgeschwindigkeit der
Torsionswelle

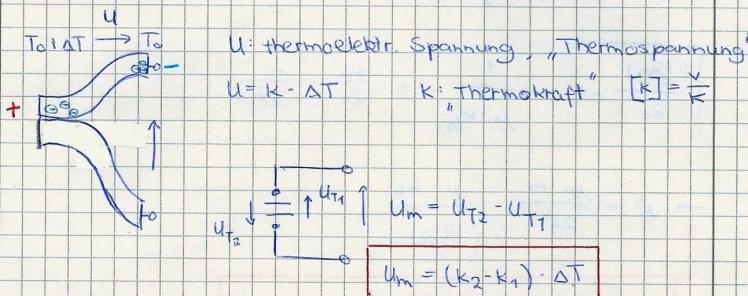
→ Verformung → Verringerung der magnetischen
Permeabilität
→ Zeitliche Änderung vom Magnetfelds $B \rightarrow U$ und

Vergleiche:

Erdmagnetfeld (Europa) $\sim 50 \mu T$

Empfindlichkeit (Sensorbsp.) $30 \text{ mV}/\mu T$

zu 4.5 Piezoelektrische und weitere elektr. Sensorprinzipien



Bsp) NiCr / Ni

$$\rightarrow (2,55 - (-1,15)) \text{ mV} = 4,1 \text{ mV} \quad \text{bei } T_0 = 0^\circ C = r^0$$

$$\Delta T = 100^\circ C = \Delta r^0$$

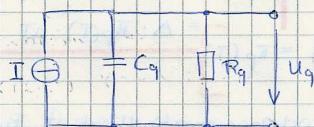
Bsp) $20^\circ C \dots 500^\circ C$, geringstmögliche Toleranz

Typ: R, S ($\rightarrow R$, wegen größerer Empfindlichkeit)

Klasse: 1 ($\pm 1^\circ C$)

zu 4.5 (5)

Piezoelement / Ersatzschaltbild



$$C_q = \frac{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot A}{d}$$

$$U_q = \frac{Q}{C_q}$$

$$R_q = \sigma \cdot \frac{l}{A} = S \cdot \frac{d}{A}$$



$$Q = k_p \cdot F$$

Bsp. SiC₂ A = 10 cm² = 10 · 10⁻⁴ m² d = 1 mm = 1 · 10⁻³ m

$$\rho = 10^{14} \Omega \cdot \text{cm} = 10^{14} \cdot 10^{-2} \Omega \cdot \text{m}$$

$$\epsilon_0 = 8,85419 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \quad \epsilon_f = 4,5 \quad F = 10^3 \text{ N}$$

ges. R_q, C_q

$$R_q = \rho \cdot \frac{d}{A} = 10^{14} \cdot 10^{-2} \Omega \cdot \text{m} \cdot \frac{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} = 1 \cdot 10^{12} \Omega$$

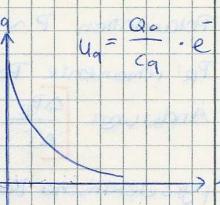
$$C_q = \frac{8,85419 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}} \cdot 4,5 \cdot 10 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 3,984 \cdot 10^{-11} \text{ F}$$

$$R_q \cdot C_q = 1 \cdot 10^{12} \Omega \cdot 3,984 \cdot 10^{-11} \text{ F} = 39,84355 \text{ s}$$

$$\frac{Q_0}{C_q} = \frac{k_p \cdot F}{C_q} \quad \text{mit } Q_0 = k_p \cdot F \\ = \frac{2,3 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{N}} \cdot 10^3 \text{ N}}{3,984 \cdot 10^{-11} \text{ F}} = 57,731 \text{ V}$$

$$\left[\frac{Q_0}{C_q} \right] = \frac{\frac{\text{As}}{\text{N}} \cdot \text{N}}{\text{F}} = \frac{\text{As}}{\text{F}} = \frac{\text{As}}{\text{AS}} = \text{V}$$

06.05.15



$$U_q = \frac{Q_0}{C_q} \cdot e^{-\frac{t}{R_q \cdot C_q}}$$

18.05.15

zu 4.5 (7)

Polarisation P ~ E

P_r: remanente Polarisation

$$\text{Änderung: } \frac{\Delta P_p}{\Delta T} = k_p(T) = \pi_p(T) = A \cdot \pi_p(T) \cdot \Delta T$$

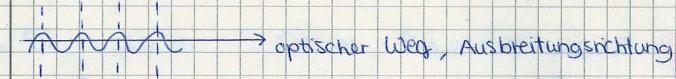
pyroelektrischer Koeffizient (Ladungsempfindlichkeit, Pyrokoeffizient)

A: Sensorquerschnittsfläche

5. Sensorprinzipien der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen und Optik

5.1. Sensorprinzipien der geometrischen Optik

Terahertzwellen: 10 µm - 1 mm



Snelliusches Brechungsgesetz: zu 5.1 (2)

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{n'}{n} = \frac{\text{Brechungsindex von unterem Medium}}{\text{Brechungsindex von oberem Medium}}$$

Bsp. Winkelspiegel

$$\triangle ABC: (90^\circ - \alpha) + \gamma + (90^\circ - \beta) = 180^\circ$$

$$\rightarrow \gamma = \alpha + \beta$$

$$2\gamma = 2(\alpha + \beta)$$

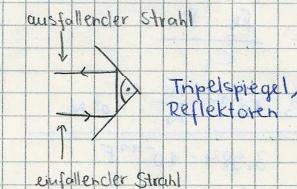
$$\triangle ABD: 2\alpha + 2\beta + (180^\circ - \delta) = 180^\circ$$

$$\rightarrow \delta = 2(\alpha + \beta)$$

$$\delta = 2\gamma$$

Spezialfall: $\gamma = 90^\circ$

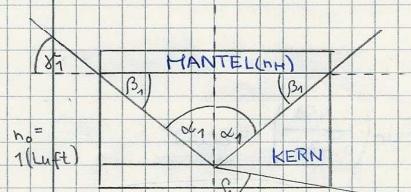
$$\delta = 2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$$



13.05.15

Spezialfall $\varepsilon \rightarrow 90^\circ$:

$$\frac{\sin \varepsilon}{1} = \frac{n'}{n} \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_{\text{Grenz}} = \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right)$$

Keine Brechung \rightarrow Totalreflexion

$$\frac{\sin \gamma_1}{\sin \beta_1} = \frac{n_k}{n_h} = n_k$$

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \beta_1} = \frac{n_h}{n_k}$$

$$\rightarrow \alpha_{1\text{Gr}} = \arcsin\left(\frac{n_h}{n_k}\right)$$

$$\beta_1 = \frac{\pi}{2} - \alpha_{1\text{Gr}}$$

$$\rightarrow \frac{\sin \gamma_1}{\sin \beta_1} = \frac{\sin \gamma_1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{1\text{Gr}}\right)} = n_k$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sin \gamma_1 &= n_k \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{1\text{Gr}}\right) \\ &= n_k \cdot \left[\sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos \alpha_{1\text{Gr}} - \cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin \alpha_{1\text{Gr}} \right] \end{aligned}$$

$$\rightarrow \sin \gamma_1 = n_k \cdot \cos \alpha_{1\text{Gr}}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \sin \gamma_1 &= n_k \cdot \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_{1\text{Gr}}} \\ &\quad \left(\frac{n_h}{n_k} \right)^2 \\ \sin \gamma_1 &= n_k \cdot \sqrt{\frac{n_k^2 - n_h^2}{n_k^2}} \end{aligned}$$

$$\sin \gamma_1 = \sqrt{n_k^2 - n_h^2}$$

numerische Apertur

 $\gamma^* = \text{maximaler Einkoppelwinkel}$ (Bsp.) $n_k = 1,474$

$$n_H = 1,453$$

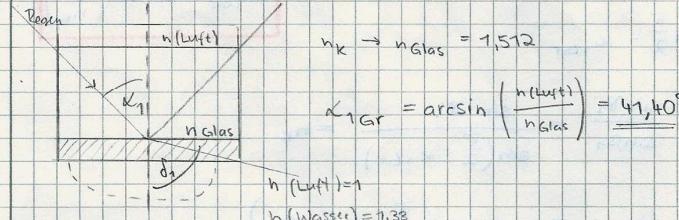
ges.: γ_1 , $\sin \gamma_1$, $\alpha_{1\text{Gr}}$

$$\begin{aligned} \sin \gamma_1 &= \sqrt{n_k^2 - n_H^2} = \sqrt{(1,474)^2 - (1,453)^2} \\ &= 0,2479 \end{aligned}$$

$$\gamma_1 = 14,35^\circ$$

$$\alpha_{1\text{Gr}} = \arcsin\left(\frac{n_H}{n_k}\right) = \arcsin\left(\frac{1,453}{1,474}\right) = 80,32^\circ$$

(Bsp.) Regensor



$$n_k \rightarrow n_{\text{Glas}} = 1,512$$

$$\alpha_{1\text{Gr}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{Luft}}}{n_{\text{Glas}}}\right) = 41,10^\circ$$

$$n_{\text{Luft}} = 1$$

$$n_{\text{Wasser}} = 1,33$$

$$\text{Dämpfung: } l \cdot \kappa = 10 \cdot \log\left(\frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}}\right)$$

↑ ↑

einhäkoppelte Leistung ausökoppelte Leistung

Länge Dämpfungskonstante

$$\frac{l \cdot \kappa}{10} = \log\left(\frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}}\right)$$

$$10^{\frac{l \cdot \kappa}{10}} = \frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}} \iff \left[\frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} \right]^{-\frac{l \cdot \kappa}{10}} = 10^{\frac{l \cdot \kappa}{10}}$$

$$(Bsp.) \text{ geg.: } \kappa = 0,03 \text{ m} \quad l_1 = 2 \text{ m} \quad l_2 = 10 \text{ m}$$

ges.: Verlust 1, Verlust 2

$$V_2: 10^{\frac{-l \cdot \kappa}{10}} = \frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}} = 10^{\frac{-10 \cdot 0,03 \text{ m}}{10}} = 10^{-0,3} = 93,33\%$$

$$V_1: 10^{\frac{-l \cdot \kappa}{10}} = \frac{P_{\text{in}}}{P_{\text{out}}} = 10^{\frac{-2 \cdot 0,03 \text{ m}}{10}} = 10^{-0,06} = 98,63\%$$

zu 5.1(8)

13.05.15

Parameter der optischen Linsenabbildung

f: Brennweite g: Gegenstandsweite (Arbeitsabstand)

b: Bildweite G: Gegenstandsgröße (Objektgröße)

B: Bildgröße

Abbildungsgleichung dünner Linsen:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

$$= \frac{g+b}{b \cdot g}$$

$$\text{Abbildungsmäßigstab: } \beta = \frac{b}{G} = \frac{b}{g}$$

$$\rightarrow b = g \cdot \beta$$

$$\rightarrow g = \frac{b}{\beta}$$

$$f = \frac{b \cdot g}{b+g}$$

$$f = \frac{g \cdot \beta \cdot g}{g \cdot \beta + g} = \frac{g \cdot \beta}{\beta + 1}$$

$$f = \frac{g \cdot \beta}{\beta + 1}$$

$$\rightarrow g = f \cdot \frac{\beta + 1}{\beta} = g(f, \beta)$$

außerdem:

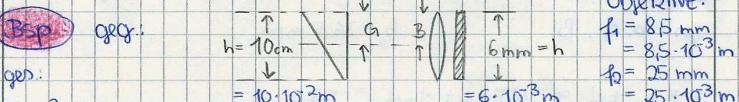
$$b(f, \beta) = f \cdot (\beta + 1)$$

$$q(f, 0) = \frac{f \cdot b}{b-f}$$

$$\beta(b, f) = \frac{b}{f} - 1$$

$$b(f, g) = \frac{f \cdot g}{g-f}$$

(Bsp.) gege:



ges:

$\beta = ?$

$f = ?$

Welche Objektive sind geeignet?

$f [\text{mm}]$	β	$g [\text{mm}]$	$b [\text{mm}]$	$\beta = \frac{b}{g} = \frac{3 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{5 \cdot 10^{-2} \text{ m}} = 0,06$
8,5	0,06	150	9	$f = \frac{g \cdot \beta}{\beta + 1} \Leftrightarrow g = f \cdot \frac{\beta + 1}{\beta}$
X 25	0,06	442	26,5	$g_1 = 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \frac{0,06 + 1}{0,06} = 150 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
50	0,06	883	53	

Objektive:

- $f_1 = 8,5 \text{ mm}$
 $= 8,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- $f_2 = 25 \text{ mm}$
 $= 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
- $f_3 = 50 \text{ mm}$
 $= 50 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

$$g_2 = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \frac{0,06 + 1}{0,06} = 442 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$g_3 = 50 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \frac{0,06 + 1}{0,06} = 883 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$g_{\max} \geq g(f, \beta)$$

$$g_{\max} \geq f \cdot \frac{\beta + 1}{\beta}$$

$$f \leq \frac{f}{\beta + 1} \cdot g_{\max} \Rightarrow f \leq 28,3 \text{ mm}$$

\Rightarrow Alle Objektive mit einer Brennweite unter 28,3 mm können verwendet werden.

Parameter ohne Zwischenring: f_0, g_0, b_0

Parameter mit Zwischenring: $R = [b_0 + d]$ (d = Dicke des Zwischenringes)

$$g = \frac{f \cdot b}{b-f} = \frac{f \cdot (b_0 + d)}{(b_0 + d) - f}$$

$$\beta = \frac{b_0 + d}{g} = \frac{b_0 + d \cdot ((b_0 + d) - f)}{f \cdot (b_0 + d)} = \frac{b_0 + d}{f} - 1$$

$$\text{Vergleich: } \beta_0 = \frac{b_0}{g_0} = \frac{b_0}{f} = \frac{b_0 - f}{f} = \frac{b_0}{f} - 1$$

$\beta_0 > \beta$ Vergrößerung des Maßstabes bei Einfügen des Zwischenringes

Bsp. gege: $d = 1 \text{ mm}$ $f = 25 \text{ mm}$ $g_0 = 442 \text{ mm}$

ges: b_0, g_0, β

$$b_0 = 26,5 \text{ mm}$$

$$b = b_0 + d = 26,5 \text{ mm} + 1 \text{ mm} = 27,5 \text{ mm}$$

$$g = \frac{f \cdot (b_0 + d)}{(b_0 + d) - f} = \frac{25 \text{ mm} \cdot 27,5 \text{ mm}}{27,5 \text{ mm} - 25 \text{ mm}} = 275 \text{ mm}$$

$$\beta = \frac{b_0 + d}{f} - 1 = \frac{27,5 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} - 1 = 0,1$$

Δg = Schärfentiefebereich

= Ausdehnung, in der die Abbildungs-schärfe (Abbildung eines Punktes auf Kreisfläche mit Durchmesser u) innerhalb einer gegebenen Grenze bleibt.

$$g_{v,h} = \frac{g_0 \cdot f^2}{f^2 + u \cdot \frac{f}{D} (f - g_0)}$$

v : „vor“ → Punkt näher am Objektiv/Linse

h : „hinter“ → Punkt weiter entfernt vom Objektiv

$$\Delta g = g_h - g_v$$

$$\frac{f}{D} = 8 \text{ („Blende 8“)}, u = 11 \mu\text{m}$$

Bsp.: $f = 25 \text{ mm}$ $g_0 = 442$

ges.: g_h , g_v

$$g_v = \frac{442 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot (25 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2}{(25 \cdot 10^{-3} \text{ m})^2 + 11 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 8 - (25 \cdot 10^{-3} \text{ m} - 442 \cdot 10^{-3} \text{ m})}$$

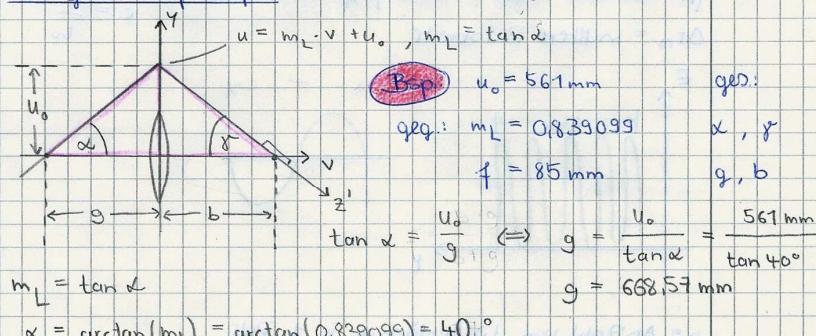
$$g_v = 417 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$g_h = 469 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\Delta g = g_h - g_v = 469 \cdot 10^{-3} \text{ m} - 417 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 52 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 52 \text{ mm}$$

zu 5.1(10)

Trigonometrisches Prinzip



13.05.15



$$\tan \gamma = \frac{u_0}{b} \Leftrightarrow b = \frac{u_0}{\tan \gamma} \rightarrow \gamma = \arctan \frac{u_0}{b} = 80,15^\circ$$

$$b = \frac{f \cdot g}{g-f} = 97,38 \text{ mm}$$

20.05.15 zu 5.1 (16)

Kernfehler: 1) Sphärische Aberration (Öffnungsfehler)

Abhilfe: - Ausblenden der Randstrahlen
- Korrekturlinsen

2) Chromatische Aberration (Farbstreuungsfehler)

Abhilfe: - monochromatische Beleuchtung
- Korrekturlinsen

3) Astigmatismus (Stabsichtigkeit)

Abhilfe: - Korrekturlinsen

zu 5.2 Sensorprinzipien der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen

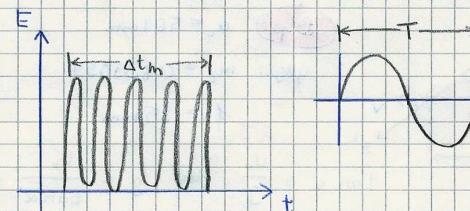
Phasengeschw. im Medium

$$c = \frac{c_0}{n} = \frac{1}{n \cdot \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0}}$$

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = f \cdot \lambda$$

c = Wellenausbreitungsgeschwindigkeit
 f_m = durchschnittliche Wellenfrequenz

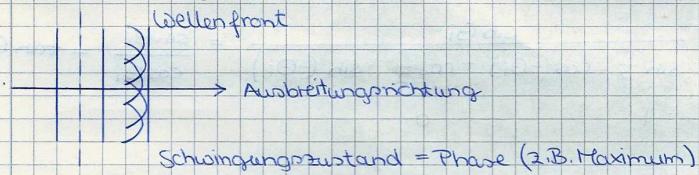
Δt_m = mittlere Pulsdauer



Ausbreitung einer Wellenfront

$$c = \frac{s}{t_0}$$

n = Anzahl von Wellenlängen in 1 Puls



27.05.15

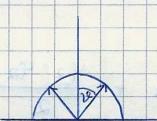
Längitudinalwelle: Ausbreitung I zur Schwingung

Transversalwelle: Ausbreitung II zur Schwingung

$$\begin{array}{c} \text{Energie-} \\ \text{niveaus} \\ \Delta E \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \quad \rightsquigarrow f, \lambda \quad \Delta E = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

Fluoreszenz - Strahlungsleistung \sim Konzentration der fluoreszierenden Substanz

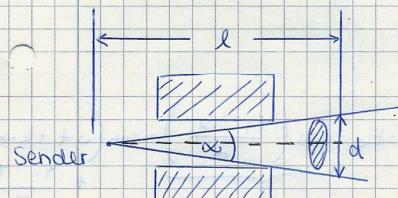
Streuung an Oberfläche



$I_e(\vartheta)$: Leuchtstärke, Lichtstärke

$L_e(\vartheta)$: Leuchtdichte

Strahl wird kollimiert (=parallel)



$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(\frac{d}{\frac{l}{2}}\right) =$$

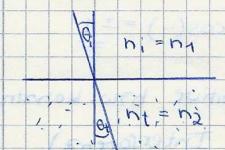
$$= \tan\left(\frac{d}{l}\right)$$

$$\Rightarrow d = \arctan\left(\frac{d}{l}\right)$$

$$d = \arctan\left(\frac{2.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{2 \cdot 5 \text{ m}}\right)$$

$$d = 0.5 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0.5 \text{ mrad}$$

Polarisation bei Brewster-Winkel $\Theta_B = \Theta_i = \arctan\left(\frac{n_t}{n_i}\right)$



$$\frac{\sin \Theta_i}{\sin \Theta_t} = \frac{n_t}{n_i} = \frac{\sin \Theta_i}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \Theta_i\right)}$$

$$= \frac{\sin \Theta_i}{\frac{\sin \frac{\pi}{2} \cdot \cos(-\Theta_i) + \cos \frac{\pi}{2} \cdot \sin(-\Theta_i)}{1}} = \frac{\sin \Theta_i}{\sin \Theta_i} = \frac{\sin \Theta_i}{\cos \Theta_i} = \tan \Theta_i$$

Bsp.: ges. $n_i = n_1 = \text{Luft} = 1$

$n_t = n_2 = 1.52$ (Glas)

ges. Θ_B

$$\Theta_B = \arctan\left(\frac{n_t}{n_i}\right) = \arctan\left(\frac{1.52}{1}\right) = 56.55^\circ$$

Interferenz von 2. Wellen

$$E_1(t) = E_0 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + k_1 \cdot x + \varphi_1)$$

$$E_2(t) = E_0 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + k_2 \cdot x + \varphi_2)$$

$$E_1(t) = E_2(t)$$

$$= 2 \cdot A \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \cdot t + \frac{k_1 - k_2}{2} \cdot x + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \cdot t + \frac{k_1 + k_2}{2} \cdot x + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

Speziell:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \omega_2 = \omega \\ k_1 &= k_2 = k \\ \varphi_1 &\neq \varphi_2 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} E_1(t) + E_2(t) &= 2 \cdot E_0 \cdot \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega t + kx + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \\ &\quad + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \end{aligned} \right\} \text{t-unabhängig}$$

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$\rightarrow \Delta \varphi = (2n+1) \cdot \pi$$

$$\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = n \cdot \pi \rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 =$$

$$\Delta \varphi = 2n \cdot \pi$$

$\rightarrow \cos(\dots) = 0$ (negative bzw.

destructive

Interferenz)

(positive bzw. konstruktive

Interferenz)

$$\rightarrow \cos(\dots) = \pm 1$$

$$\Delta\psi = [k \cdot \Delta x] \rightarrow \Delta x: \text{Gangunterschied}$$

$$\Delta\psi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x$$

$$a.) n \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x \rightarrow \boxed{\Delta x = n \cdot \lambda} \rightarrow \text{konstr. Interf.}$$

$$b.) (2n+1)\pi = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \Delta x \Rightarrow \boxed{\Delta x = \frac{2n+1}{2} \cdot \lambda = 2n\lambda + \lambda}$$

$n \in \mathbb{Z}$ Interferenzordnung

(Bsp.) $\text{geg.: } \lambda = 633 \text{ nm}$

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{633 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 0,993 \cdot 10^7 \frac{1}{\text{m}}$$

$$\text{ges.: } f, K \quad f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{633 \cdot 10^{-9} \text{ m}} = 4,7393 \cdot 10^{14} \frac{1}{\text{s}}$$

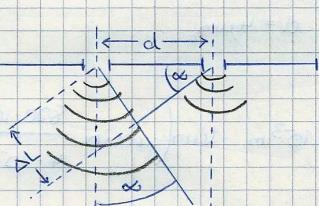
$$\Delta x = n \cdot \lambda = n \cdot 633 \text{ nm} \quad (\text{konstr. Interf.}) \quad \begin{cases} n=0 \rightarrow \Delta x = 0 \text{ nm} \\ n=1 \rightarrow \Delta x = 633 \text{ nm} \end{cases}$$

$$\Delta x = (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (\text{negative Interf.}) \quad \begin{cases} n=0 \rightarrow \Delta x \approx 316 \text{ nm} \\ n=1 \rightarrow \Delta x \approx 950 \text{ nm} \end{cases}$$

zu 5.2.

29.05.15

Beugung (Diffraction)



$d = \text{Spaltabstand, 'Gitterkonstante'}$

Gangunterschied

$$\Delta L = d \cdot \sin \alpha$$

$\alpha = \text{Beobachtungswinkel}$
(„Beugungswinkel“)

Beugungs-

minima

$$\Delta L = d \cdot \sin \alpha$$

$$= \left(h \pm \frac{1}{N} \right) \cdot \lambda_0$$

$$h \in \mathbb{Z}$$

Konstruktive Interferenz:

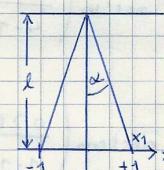
$$\Delta L = d \cdot \sin \alpha = n \cdot \lambda_0, n \in \mathbb{Z}$$

n-te Interferenzordnung

$$n = \pm 1$$

$$n = \pm 2 \dots$$

$$x_n = l \cdot \tan(\arcsin \frac{n \cdot \lambda_0}{d})$$



$$d$$

$$l$$

$$\alpha$$

$$x_1$$

$$d \cdot \sin \alpha = \lambda_0$$

$$\sin \alpha = \frac{\lambda_0}{d}$$

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{\lambda_0}{d} \right)$$

$$\tan \alpha = \frac{x_1}{l}$$

$$\rightarrow x_1 = l \cdot \tan \alpha$$

1. Interferenzordnung

$$x_1 = l \cdot \tan \left(\arcsin \frac{\lambda_0}{d} \right)$$

(Bsp.) $\text{geg.: } l = 138 \text{ m} \quad x_1 = 2 \text{ cm} \quad \lambda_0 = 660 \text{ nm}$

ges.: d

$$x_1 = l \cdot \tan \left(\arcsin \frac{\lambda_0}{d} \right)$$

$$\frac{x_1}{l} = \tan \left(\arcsin \frac{\lambda_0}{d} \right)$$

$$\arctan \left(\frac{x_1}{l} \right) = \arcsin \left(\frac{\lambda_0}{d} \right)$$

$$\sin \left(\arctan \frac{x_1}{l} \right) = \frac{\lambda_0}{d}$$

$$\Rightarrow d = \frac{\lambda_0}{\sin \left(\arctan \frac{x_1}{l} \right)}$$

$$d = \frac{660 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{\sin \left(\arctan \frac{2 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{138 \text{ m}} \right)}$$

$$d = 45,5 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 45,5 \mu\text{m} \quad (\text{nominal: } 50 \mu\text{m})$$

(Bsp.) für interferentielle Messsystem:

geg.: $l = 1 \text{ mm} \quad \lambda_0 = 820 \text{ nm} \quad d = 4 \mu\text{m}$

ges.: α_1, x_1

$$x_1 = l \cdot \tan \left(\arcsin \frac{\lambda_0}{d} \right) = 1 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \tan \left(\arcsin \frac{820 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{4 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \right)$$

$$x_1 = 0,21 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$\sin \alpha = \frac{\lambda_0}{d} \Leftrightarrow \alpha = \arcsin \left(\frac{\lambda_0}{d} \right) = \arcsin \left(\frac{820 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{4 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \right)$$

$$\alpha = 11,82^\circ$$

$$\tan \alpha = \frac{x_1}{l} \Leftrightarrow \alpha = \arctan \left(\frac{x_1}{l} \right) = \arctan \left(\frac{0,21 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{1 \cdot 10^{-3} \text{ m}} \right)$$

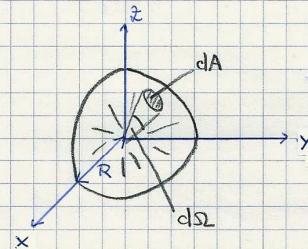
$$\alpha = 11,86^\circ$$

26.5.3

Wichtige radiometrische und photometrische Größen

29.05.15

Sensorprinzipien der Umwandlung elektromagnetischer Strahlung



$$\Omega = \text{Raumwinkel}$$

$$\Omega = \frac{A}{R^2}, \quad d\Omega = \frac{dA}{R^2}$$

speziell: Vollkugel:

$$\Omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi \text{ (sr)}$$

steradiant

Halbkugel:

$$\Omega = 2\pi \text{ (sr)}$$

E1.) Strahlungsenergie

$$Q_e = n \cdot h \cdot f$$

n = Photonenanzahl
 h = Planck'sches Wirkungsquantum
 f = Frequenz

E2.) Strahlungsleistung

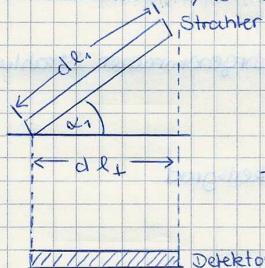
$$\Phi_e = \frac{dQ_e}{dt} = \frac{dn}{dt} \cdot h \cdot \frac{c}{\lambda}$$

E3.) Strahlungsstärke

$$I_e = \frac{d\Phi_e}{d\Omega}$$

E4a) Strahldichte L_e

= Strahlstärke / vom Detektor gesehene Strahlerfläche



$$dL_1 = dL_1 \cdot \cos \alpha_1$$

$$dA_1 = dA_1 \cdot \cos \alpha_1$$

$$\rightarrow L_e = \frac{dI_e}{dA_1} = \frac{dI_e}{dA_1 \cdot \cos \alpha_1}$$

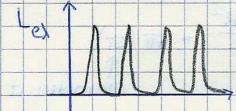
$$L_e = \frac{d^2 \cdot \Phi_e}{d\Omega \cdot dA_1 \cdot \cos \alpha_1}$$

29.05.15

E4b) speziell: spektrale Strahldichte

$$L_{ex} = \frac{dI_e}{d\lambda} \rightarrow dI_e = L_{ex} \cdot d\lambda$$

$$\rightarrow \int_{(1)}^{(2)} dI_e = \int_{(1)}^{(2)} L_{ex} \cdot d\lambda = L_e$$

E5.) Strahlungsleichte N_e = Strahlungsfluss eines Flächenelements pro Fläche

$$N_e = \frac{d\Phi_e}{dA_1}$$

E6.) Bestrahlungsstärke E_e = von Detektor aufgenommener Strahlungsfluss / Fläche

$$E_e = \frac{d\Phi_e \cdot \cos \alpha_1}{dA_2}$$

V1.) Lichtmenge

$$Q_v = \int \Phi_v \cdot dt$$

V2.) Lichtstrom Φ_v = vom Auge wahrgenommener Strahlungsfluss

$$Q_v = k_{max} \cdot v(x) \cdot \Phi_e$$

↑
 photometrischer
 Strahlungsaquivalent

$$683 \frac{\text{lm}}{\text{W}} \text{ (Tagsicht)}$$

$$1699 \frac{\text{lm}}{\text{W}} \text{ (Nachsicht)}$$

↑
 Hellempfindlichkeitsgrad

$$\rightarrow \Phi_V = k_{\max} \cdot \int_{380 \text{ nm}}^{780 \text{ nm}} V(\lambda) \cdot \Phi_{ex} \cdot d\lambda = \boxed{k_{\max} \cdot \Phi_{ex} \cdot V(\lambda_0) = \Phi_V}$$

für schmalbandige Quelle

29.05.15

(Bsp.:) vgl.: LED $\lambda_0 = 660 \text{ nm}$ $\Phi_{ex} = 46 \mu\text{W}$

$$V(\lambda_0) = 0,06 \text{ (Tagsicht)}$$

$$V(\lambda_0) = 0,0003 \text{ (Nachtsicht)}$$

ges.: Φ_V (Tagsicht), Φ_V (Nachtsicht)

$$\begin{aligned}\Phi_V (\text{Tagsicht}) &= k_{\max} \cdot \Phi_{ex} \cdot V(\lambda_0) = 0,06 \cdot 46 \cdot 10^{-6} \text{ W} \cdot 663 \frac{\text{lm}}{\text{W}} \\ &= 1,885 \cdot 10^{-3} \text{ lm} = 1,9 \text{ mldm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_V (\text{Nachtsicht}) &= 1699 \frac{\text{lm}}{\text{W}} \cdot 46 \cdot 10^{-6} \text{ W} \cdot 0,0003 \\ &= 2,345 \cdot 10^{-5} \text{ lm}\end{aligned}$$