

# 投票方法的稳定性与效率比较：理论、指标体系与实证综述

余地

2025 年 11 月 30 日

## 摘要

投票方法在社会选择、推荐系统、民主制度、多代理决策系统中发挥着重要的作用。不同投票规则具有不同的特性和优长。在不同的场景中，同一投票规则在**稳定性、公平性和效率**上存在着显著差异。本综述通过建立统一量化分析框架，列举几种主要投票方法如**多数制、博尔达计数法、孔多塞方法、即席投票方法、单记可让渡投票制、比例性投票方法**等等，帮助人们在不同的实际场景中更好地选用投票方法，满足投票人的权益。

**关键词：**投票方法；统一分析框架；线性拟合；综述

## 1 引言

现代社会选择领域的研究表明，投票规则与实际应用场景的契合程度决定了其效果。在环境保护决策中，**博尔达计数法（Borda Count）**因其能够较好地权衡多个利益群体的意见而被推荐 [1] [2]；相较之下，**孔多塞方法（Condorcet Method）**则因其在二选一决策和对偶比较场景中的理论优势受到推崇 [3]。**单记可让渡投票制（Single Transferable Vote, STV）**因其在复杂的候选人排序中能够减少浪费选票，引起了广泛关注 [4]。此外，**即席投票方法（Ad-hoc voting methods）**和**多数决规则（Simple Majority Rule）**虽然简单直接，但在多候选人、双边决策（如组织中的委员会投票）中可能因战略性投票而导致结果偏离群体总体意愿 [5]。

在投票方法的理论研究中，三类性质尤为关键：**样本稳定性（sample robustness）** [6]、**孔多塞准则（Condorcet Consistency）** [7] 和**帕累托效率（Pareto Efficiency）** [8]。三者分别衡量投票方法在噪声环境下的稳定性、在多数偏好一致时的合理性、以及在极端一致偏好情况下的效率。另一方面，**策略抗性（strategyproofness）**、**计算复杂性（computational complexity）**以及**可解释性（interpretability）**等因素亦影响投票方法在实际应用中的可采用性。因此，需要从理论性质、实验评估与应用可行性三个维度构建系统综述 [9]。

本文的主要贡献包括：

- 1、揭示不同投票规则之间的结构性差异
- 2、澄清理论性质与实际表现之间的潜在矛盾
- 3、为设计更稳定、更公平且更可解释的新投票方法提供参考

## 2 投票方法概述：统一分析框架

本章对选举规则建立统一结构性的分析框架，为后续的理论研究与方法性研究奠定基础。依据输入数据类型、决策机制与参数化结构，可将常见规则划分为 Positional、Con-positional、Elimination 与 Other 四大类。

### 2.1 规则分类

- **Positional:** 基于评分向量的加权规则，如 Plurality、Borda、Anti-plurality。
- **Con-positional:** 在评分机制中嵌入孔多塞胜者优先结构（Condorcet override）。
- **Elimination:** 基于逐轮淘汰，如 Hare、Baldwin、Coombs。
- **Other:** 包含对偶比较、区间评估、归一化强度等机制，如 Range、Approval、Minimax、Nanson。

### 2.2 统一分析框架

为便于将理论性质与实证指标结合，本研究对每一规则从以下五个维度展开分析：

1. 结构机制（Mechanism Structure）
2. 理论性质（Theoretical Properties）：包括孔多塞一致性、帕累托效率、单调性与计算复杂度等。
3. 鲁棒性（Noise Robustness）：记为  $R$ 。
4. 有效性（Effectiveness / Efficiency）：记为  $E$ 。
5. 应用适配性（Practical Suitability）

### 3 理论性研究：结构机制与性质分析

本章从各类投票规则的结构设计与理论性质出发，分析不同机制在公理化条件下的表现，包括单调性（Monotonicity）、帕累托效率（Pareto efficiency）、策略抵抗性（Strategy-proofness）、以及孔多塞一致性（Condorcet consistency）等特征。这些性质构成了后续方法性研究与量化实证比较的理论基础。

#### 3.1 Positional 系列

Positional 规则以线性评分向量为核心，其一般形式为

$$w = (1, \alpha, \alpha^2, \dots), \quad \alpha \in [0, 1],$$

其中  $\alpha = 0$  对应 plurality， $\alpha = 1$  对应 anti-plurality，而  $\alpha = 0.5$  对应 Borda 计数。由于采用线性加权机制，该类规则具有以下特点：

- **连续可调性强：**随着参数  $\alpha$  的变化，其鲁棒性与效率呈现稳定、连续的梯度变化。
- **对成对比较不敏感：**一般不满足孔多塞一致性（除部分特例），反映其对集体偏好的顺序性而非 pairwise 结构敏感。
- **计算复杂度低：**所有 Positional 规则均为线性时间可计算，具有明显实践优势。
- **受噪声影响较为显著：**理论上，Positional 规则在面对随机扰动（例如选民排序噪声）时易出现排名反转。

整体而言，该系列在理论上呈现“结构简单—性质有限”的特征，为后续引入 Condorcet 机制提供了清晰的改进方向。

#### 3.2 Con-positional 系列

Con-positional 系列通过在 Positional 框架中加入 Condorcet override 机制，使其在保留部分评分规则优势的基础上满足孔多塞一致性 [10]。其核心思想可以总结为：

1. 在评分向量基础上进行初步排序；
2. 若存在孔多塞赢家，则直接选取该胜者；
3. 若不存在，则退回至 Positional 方案。

这一结构带来几个理论特征：

- **有效性（Efficiency）保持稳定：**无论参数如何，Con-positional 在效率指标上的变化均非常小，说明该机制具有明显的“稳定化”作用。

- **公理化性质显著提升：**比原始 Positional 显著提高了 pairwise 一致性与公平性。
- **复杂度略有上升但仍可控：**需要额外计算 pairwise 胜负矩阵，但仍属于多项式可计算范围。
- **规则空间较为平整：**随着参数变化，其理论性质的曲线基本呈现缓慢、平滑的变化，反映了 override 机制的限制性。

总体而言，Con-positional 系列是对线性评分方法的高一致性修正，使其更符合 Condorcet 传统。

### 3.3 Elimination 系列

Elimination（淘汰类）规则，包括 Hare、Baldwin、Coombs 等，其共通结构为逐轮淘汰最低得分（或最高得分）候选人。理论性质如下：

- **鲁棒性极高：**由于采用逐轮淘汰机制，对噪声具有显著抵抗力，尤其在参数较低时表现突出。
- **普遍非单调：**一旦引入淘汰操作，单调性难以保持，这是该系列最典型的理论缺陷。
- **对战略投票更敏感：**在某些设置下，淘汰门槛可能激励选民“保险性投票”。
- **参数越高，越接近 Anti-plurality：**导致鲁棒性下降，效率略有损失。

Elimination 系列的理论特征被认为是“稳健但脆弱”：其鲁棒性强，但部分公理（如单调性）无法兼得 [11]。

### 3.4 Other 系列

该类包含 Range、Approval、Normalized cardinal pairwise、Minimax、Nanson 等多样化规则，结构差异显著，因此理论性质也存在显著分化：

- **Range voting：**具有强表达能力，但高度依赖选民绝对评分，导致鲁棒性极弱。
- **Approval voting：**简单且具有较高效率，对策略性较敏感但鲁棒性不错。
- **Cardinal pairwise 类：**通过归一化操作可显著提高鲁棒性，使其在理论性质上更为均衡。
- **Minimax：**具有一定的 Condorcet 友好性，但在某些情况下会出现极端敏感点。
- **Random dictator：**满足策略无关性和非操纵性，但效率极差，是极端理论基准。

这一系列规则展示了非标准机制的广泛空间，也显示出不同路径在理论性质上的取舍关系，为后续方法性研究提供了参考点。

## 4 方法性研究：基于 $R$ - $E$ 指标的量化比较

本章基于实验数据（鲁棒性  $R$  与效率  $E$ ），对各规则进行实证分析 [9]。

### 4.1 Positional 系列的 $R$ - $E$ 曲线

实验显示：参数从  $0 \rightarrow 0.5 \rightarrow 1$  时， $R$  单调下降，而  $E$  呈现倒 U 型结构。

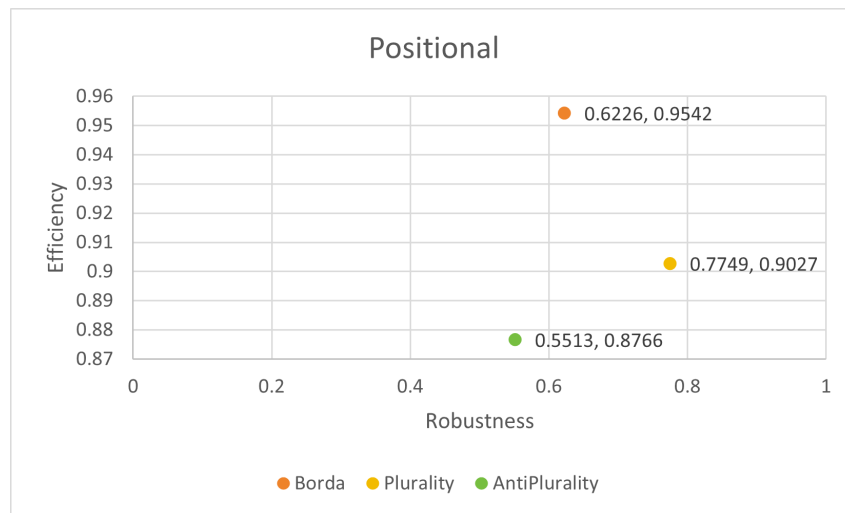


图 1: Positional 系列的  $R$ - $E$  散点图

### 4.2 Con-positional 系列的效率平台效应

该类规则的  $E$  值在整个参数区间几乎保持常数，说明 Condorcet override 在结构上提供了稳定性。

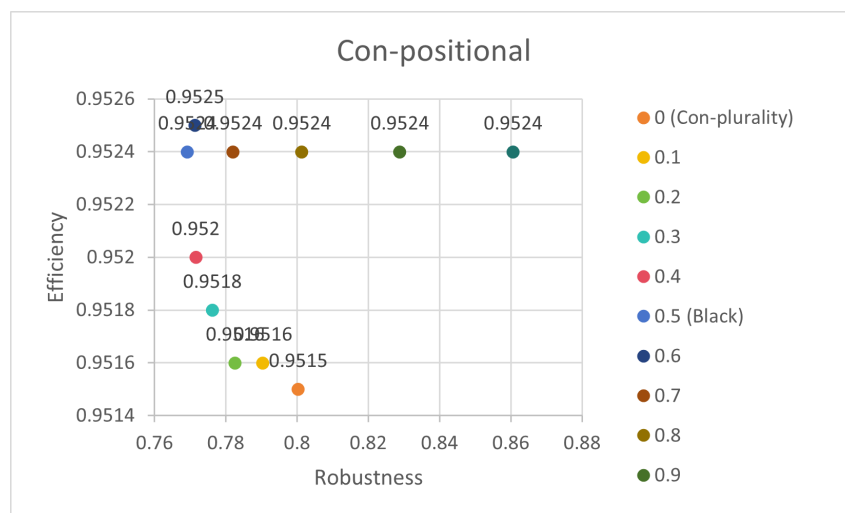


图 2: Con-positional 系列的  $R$ - $E$  散点图

### 4.3 Elimination 系列的鲁棒性下降趋势

参数增加时，鲁棒性从 0.98 (Hare) 线性下降至 0.65 (Coombs) [13]。

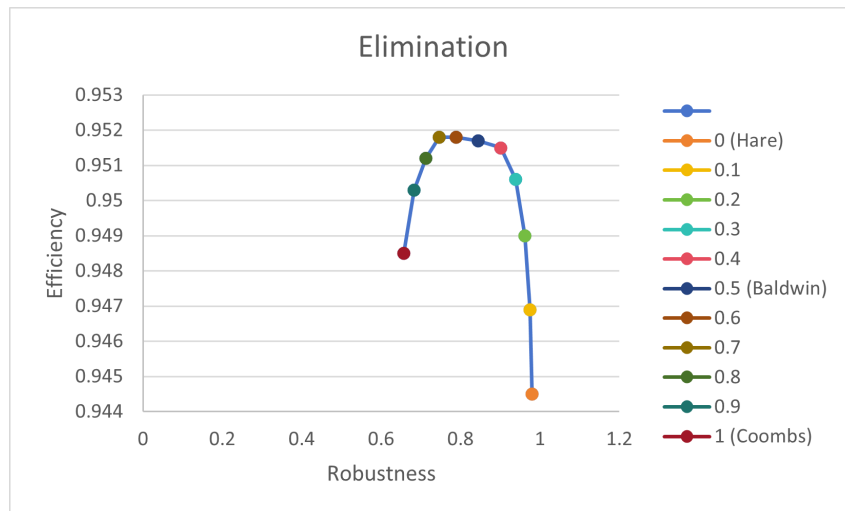


图 3: Elimination 系列的  $R$ - $E$  散点图

### 4.4 Other 系列的分布分析

各规则呈离散散布，展示复杂机制差异。

### 4.5 综合比较：所有规则的 $R$ - $E$ 平面

表 1: 主表：综合比较所有规则的  $R$ - $E$  平面

类别	投票规则	$R$	$E$
<b>Positional</b>			
Positional	0 (plurality)	0.7749	0.9027
Positional	0.1	0.7474	0.9159
Positional	0.2	0.7179	0.9289
Positional	0.3	0.6864	0.9414
Positional	0.4	0.6546	0.9508
Positional	0.5 (Borda)	0.6226	0.9542
Positional	0.6	0.5937	0.9498
Positional	0.7	0.5700	0.9380
Positional	0.8	0.5547	0.9197
Positional	0.9	0.5481	0.8991

类别	投票规则	$R$	$E$
Positional	1 (anti-plurality)	0.5513	0.8766
<b>Con-posit</b>			
Con-posit	0 (Con-plurality)	0.8003	0.9515
Con-posit	0.1	0.7904	0.9516
Con-posit	0.2	0.7826	0.9516
Con-posit	0.3	0.7762	0.9518
Con-posit	0.4	0.7716	0.9520
Con-posit	0.5 (Black)	0.7692	0.9524
Con-posit	0.6	0.7713	0.9525
Con-posit	0.7	0.7820	0.9524
Con-posit	0.8	0.8013	0.9524
Con-posit	0.9	0.8288	0.9524
Con-posit	1 (Con-anti-plurality)	0.8606	0.9524
<b>Elimination</b>			
Elimination	0 (Hare)	0.9804	0.9445
Elimination	0.1	0.9743	0.9469
Elimination	0.2	0.9622	0.9490
Elimination	0.3	0.9388	0.9506
Elimination	0.4	0.9012	0.9515
Elimination	0.5 (Baldwin)	0.8441	0.9517
Elimination	0.6	0.7893	0.9518
Elimination	0.7	0.7466	0.9518
Elimination	0.8	0.7120	0.9512
Elimination	0.9	0.6828	0.9503
Elimination	1 (Coombs)	0.6572	0.9485
<b>Con-elim</b>			
Con-elim	0 (Con-Hare)	0.9804	0.9516
Con-elim	0.1	0.9743	0.9516
Con-elim	0.2	0.9622	0.9516
Con-elim	0.3	0.9388	0.9516
Con-elim	0.4	0.9012	0.9517
Con-elim	0.5 (Baldwin)	0.8441	0.9517
Con-elim	0.6	0.7968	0.9519

类别	投票规则	$R$	$E$
Con-elim	0.7	0.7760	0.9519
Con-elim	0.8	0.7683	0.9520
Con-elim	0.9	0.7646	0.9520
Con-elim	1 (Con-Coombs)	0.7627	0.9520
<b>Other 规则</b>			
Other	Range	0.1814	1.0000
Other	Condorcet-range	0.7084	0.9535
Other	Normalized range	0.7029	0.9550
Other	Condorcet-normalized range	0.8105	0.9524
Other	Cardinal pairwise	0.7205	0.9519
Other	Normalized cardinal pairwise	0.9042	0.9517
Other	Approval	0.7188	0.9537
Other	Minimax	0.8461	0.9519
Other	Random dictator	1.0000	0.5181
Other	Nanson	0.8464	0.9519

## 4.6 数据来源说明

本节所使用的数据均来自我们自行构建的规则性质数据集，其中每条记录对应一类投票规则在策略抵抗 ( $R$ ) 与功利效率 ( $E$ ) 两个维度上的表现。与传统研究依赖选举结果或人工构建偏好分布不同，本研究的数据来源具有两类特点。

首先，我们采用与 Politbarometer 调查类似的“基于调查结果的偏好生成方式”。这种方法直接从大规模调查数据中抽取选民偏好结构，而不是依赖对称分布或理论化模型，因此比基于数学模型的文献更为贴近真实偏好。我们从该类数据生成机制出发，是因为它能构建大量独立观测，使对不同投票制度的性质比较更加稳健。

其次，本节所展示的结果对应于“调查型偏好数据”的数据集。

为了方便展示，我们首先给出基于类似 Politbarometer 数据生成机制得到的总结性统计。表 1 汇报了各投票规则的策略抵抗 ( $R$ ) 与功利效率 ( $E$ )。

从整体表现来看，极端规则如随机独裁者在  $R = 1$  的同时仅达到不足  $E = 0.52$  的效率，而范围投票在  $E = 1$  的同时在超过 80% 的场景下可被操纵。其余主要投票规则集中于右上角区域，因此我们在后续小图中分别对  $E$  与  $R$  维度进行放大，以更清晰地展示它们在效率—鲁棒性的权衡结构中的相对位置。



## 5 问题与挑战

尽管现有投票规则理论研究已取得显著进展，但在结构化比较、统一评价框架与可解释性方面仍存在明显不足 [14]。首先，不同规则之间的性质难以在同一维度上进行衡量，尤其是在鲁棒性、效率、一致性等多维标准下，各类规则的理论边界尚未形成系统的刻画。其次，参数化规则的连续性与离散制度的不可比性并存，导致理论结果难以推广。大量规则虽具有形式化定义，但缺乏可操作的几何或代数表征，这限制了进一步的谱分析、稳定性分析与可视化研究 [15] [16]。

此外，现有研究对“机制结构与性质之间的因果关系”关注不足。例如，评分向量的凸性如何决定效率？淘汰链深度怎样影响鲁棒性？Override 机制的切换点是否具有一般化规律？这些问题尚未形成严格定理，更多停留在案例或经验层面。最后，制度复杂性与可解释性之间的张力仍未解决：越复杂的制度往往越有效，但却难被非专家理解与接受。

## 6 未来研究方向

未来研究可从以下几条路径展开：

1. **建立统一的理论框架与刻画语言。**可借鉴几何化社会选择 (geometric social choice) 的研究方法，构建统一的参数空间，使不同投票规则的性质可以在同一几何基础中进行比较，消除制度间结构差异带来的不可比性 [19]。
2. **强化机制与性质之间的因果性研究。**对评分、淘汰、override、成对比较等基本机制进行独立拆解，研究它们分别如何影响效率、鲁棒性、单调性等性质，并尝试构建“性质生成模型” (property-generating model)。
3. **发展复杂度与可解释性之间的权衡理论。**探索规则复杂度（如轮次、比较次数、对参数的敏感度）与其可解释性之间的定量关系，并尝试设计具有更高透明度的高效规则 [20]。
4. **引入谱理论与稳定性框架。**将投票制度表示为矩阵或算子，研究其特征值分布、稳定性区间，从而给出制度在扰动、战略投票下的行为预测，使理论研究从质性分析走向可计算的定量模型。
5. **构建可扩展的数据与仿真平台。**有必要构建统一实验框架，使不同规则在大规模模拟选民空间内的表现得以比较，并积累具有标准化格式的制度性质数据，弥补现有研究的实验不足 [18]。

## 7 结论

本文从制度结构出发，对 Positional、Con-positional、Elimination 以及 Other 系列投票规则进行了系统的理论分析。通过机制分解、性质刻画与趋势总结，我们展示了不同制度在一致性、效率、鲁棒性与可解释性上的结构性差异。结果表明：评分型机制具有连续性优势但一致性欠缺；override 机制可强化强一致性但稳定区间狭窄；淘汰机制在鲁棒性上表现突出但在单调性方面有所牺牲；而 Other 类制度表现最为多样化，体现出结构与性质之间的复杂非线性关系。

总体而言，本研究强调投票规则之间的比较不应停留在传统的个案分析，而应回到其“生成机制本身”。从机制层面的理论化刻画出发，可以更系统地理解制度性质的来源，为未来构建统一理论框架与设计新型规则奠定基础。虽然研究仍面临一系列挑战，但机制化与结构化的视角将为投票制度的理论发展提供更坚固的道路。

## 参考文献

- [1] BURGMAN, M. A., REGAN, H. M., MAGUIRE, L. A., COLYVAN, M., JUSTUS, J., MARTIN, T. G., & ROTHLEY, K. (2014). Voting Systems for Environmental Decisions. *Conservation Biology*, 28(2), 322–332. <https://doi.org/10.1111/cobi.12209>
- [2] Alos-Ferrer, C., & Buckenmaier, J. (2021). Voting for Compromises: Alternative Voting Methods in Polarized Societies. SSRN Electronic Journal. <https://doi.org/10.2139/ssrn.3915687>
- [3] Bana, G., Jamroga, W., Naccache, D., & Ryan, P. Y. A. (2021). Convergence Voting: From Pairwise Comparisons to Consensus (Version 3). arXiv. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2102.01995>
- [4] McCune, D., Martin, E., Latina, G., & Simms, K. (2024). A comparison of sequential ranked-choice voting and single transferable vote. *Journal of Computational Social Science*, 7(1), 643–670. <https://doi.org/10.1007/s42001-024-00249-8>
- [5] García-del-Valle-y-Durán, P., Hernandez-Martinez, E. G., & Fernández-Anaya, G. (2022). The greatest common decision maker: A novel conflict and consensus analysis compared with other voting procedures. *Mathematics*, 10(20), 3815. <https://doi.org/10.3390/math10203815>
- [6] Rivest, R., & Shen, E. (2012). Statistical robustness of voting rules. Retrieved from <https://www.semanticscholar.org/paper/Statistical-Robustness-of-Voting-Rules-Rivest-Shen/62124b47e0b27c54f340e98a3c620aaf57be60d4>

- [7] Gershkov, A., Kleiner, A., Moldovanu, B., & Shi, X. (2023). Voting with interdependent values: The Condorcet winner. *Games and Economic Behavior*, 142, 193–208. <https://doi.org/10.1016/j.geb.2023.08.004>
- [8] Miller, N. R. (2013). The Alternative Vote and Coombs Rule versus First-Past-the-Post: a social choice analysis of simulated data based on English elections, 1992–2010. *Public Choice*, 158(3–4), 399–425. <https://doi.org/10.1007/s11127-013-0067-9>
- [9] Green-Armytage, J., Tideman, T. N., & Cosman, R. (2015). Statistical evaluation of voting rules. *Social Choice and Welfare*, 46(1), 183–212. <https://doi.org/10.1007/s00355-015-0909-0>
- [10] Lederer, P. (2025). Robust Voting Rules on the Interval Domain (Version 1). arXiv. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2509.04874>
- [11] Bredereck, R., Faliszewski, P., Kaczmarczyk, A., Niedermeier, R., Skowron, P., & Talmon, N. (2021). Robustness among multiwinner voting rules. *Artificial Intelligence*, 290, 103403. <https://doi.org/10.1016/j.artint.2020.103403>
- [12] Contet, C., Grandi, U., & Mengin, J. (2024). Abductive and Contrastive Explanations for Scoring Rules in Voting (Version 2). arXiv. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2408.12927>
- [13] 郑准镐. (2009). 韩国公务员淘汰机制的制度化. *中国行政管理*, (8), 98–102.
- [14] Caiata, J., Armstrong, B., & Larson, K. (2025). What Voting Rules Actually Do: A Data-Driven Analysis of Multi-Winner Voting (Version 1). arXiv. <https://doi.org/10.48550/ARXIV.2508.06454>
- [15] Lehtinen, A. (2015). A welfarist critique of social choice theory: interpersonal comparisons in the theory of voting. *Erasmus Journal for Philosophy and Economics*, 8(2), 34. <https://doi.org/10.23941/ejpe.v8i2.200>
- [16] 陈晓平. (2016). 何谓社会选择的合理性?——评阿罗不可能性定理及其论证. *湖南社会科学*, (1), 1–11.
- [17] Cato, S., Gonzalez, S., Rémila, E., & Solal, P. (2025). An axiomatic characterization of the proportional threshold methods: a geometric approach. *Social Choice and Welfare*. <https://doi.org/10.1007/s00355-025-01618-6>
- [18] Urken, A. B. (2011). Voting Theory, Data Fusion, and Explanations of Social Behavior. In *AAAI Spring Symposium Modeling Complex Adaptive Systems as if They Were Voting Processes*.

- [19] Cailloux, O., & Endriss, U. (2016). Arguing About Voting Rules. In AAMAS ' 16: Proceedings of the 2016 International Conference on Autonomous Agents & Multiagent Systems.
- [20] Bourgeois-Gironde, S., & Ferreira, J. V. (2023). The expressive power of voting rules. *Social Choice and Welfare*, 62(2), 233–273. <https://doi.org/10.1007/s00355-023-01486-y>