哈 尔 滨 工 业 大 学

硕士学位论文开题报告

题 目：一类最优控制问题的稀疏谱方法

院　　（系）　数学学院

学　　　科　计算数学

导　　　师　刘文杰

研　究　生　段俊超

学　　　号　**22S012032**

开题报告日期　**2023 年 9 月 9 日**

刘文杰

研究生院制

目　录

1 课题来源及研究的背景和意义

1.1 课题的来源

最优控制（Optimal Control）问题可以追溯到1696年，瑞士数学家Bernoulli提出的“最速降线”问题：如何选择一条曲线，让一个小球从较高的一点无摩擦地沿这条曲线最快下滑到达同一垂直平面上较低的一点[1]。经过300多年在这一领域的研究，已经取得了许多重大进展，包括Euler-Lagrange于1733年开创的变分法，20世纪50年代Richard Bellman开创的动态规划，以及Lev Pontryagin同时期对最大值原理的发展，提供了一种确定约束问题最优控制的方法[2]。近几十年来最优控制一直是现代控制理论的重要研究方向之一。有限时域最优控制在科研、军事以及工业生产等领域具有广泛的应用，如火箭着陆最小燃料消耗[3,4]、飞行器轨迹优化[5,6]、露天矿规划[7]、流行病控制[8]等。

20世纪50年代，商用计算机的出现实现了高效的数值求解，目前用于求解最优控制问题的数值方法有很多[9-11]，但是各种方法的精度和收敛速度差异很大。本课题将针对一类最优控制问题提出稀疏谱方法，通过构造快速精确的数值算法，更好地解决有限时域的最优控制问题。

1.2 课题研究的背景和意义

近几十年来，随着科学技术的不断发展，越来越多的实际问题需要通过数学模型去解决，最优控制作为现代控制理论的重要研究方向之一，被科学家运用到了众多领域。在航空航天领域，需要对火箭运行的速度、姿态进行调整，使其消耗的燃料最少[3]66-79；在生产实践领域，需要确定露天矿的最佳剖面，以最大化提高矿山的开采能力[7]991-995；在医疗安全领域，需要对传染病感染人群进行控制，以最小化疫情高峰[8]等等。上述实际问题都可以抽象成如下的最优控制数学模型[12]：

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && C(\mathbf{x}(1)) \\ &\text{subject to} && \dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)),\quad \mathbf{u}(t)\in U,\quad t\in\Omega, \\ & && \mathbf{x}(-1)=\mathbf{x}_0,\quad (\mathbf{x},\mathbf{u})\in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\times C^0(\Omega;\mathbb{R}^m) \end{aligned} \tag{1-1}$$

其中$\Omega=[-1,1]$,控制约束集$U\subset\mathbb{R}^m$是闭凸的，且具有非空内部，状态$\mathbf{x}(t)\in\mathbb{R}^n$,$\dot{\mathbf{x}}$表示$\mathbf{x}$关于$t$的导数，$\mathbf{x}_0$是假设给定的初始条件，$\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$,$C:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,$C^l(\Omega;\mathbb{R}^n)$表示从$\Omega$到$\mathbb{R}^n$的$l$次连续可微函数构成的空间。假设$\mathbf{f}$和$C$至少是连续的。

最优控制理论历史悠久，求解最优控制问题的方法分为解析法和数值法[13]。解析法以变分法和最大值原理等理论为基础。最优控制理论是变分法的拓展，最优控制问题与经典变分问题重要的区别之一是状态方程的形式，最优控制的状态方程中包括并区分了控制变量$\mathbf{u}(t)$，然而，控制变量$\mathbf{u}(t)$必须为连续变量且不存在约束限制。而实际问题中

控制变量都存在于一定的闭型可行域中。1956 年至 1960 年之间，前苏联学者 Pontryagin 等发展了最大值原理，拓展了经典变分法，解除了对控制变量的限制；与此同时，美国数学家 Bellman 提出动态规划用以求解最优控制问题。针对离散系统，可以采用 Bellman 方程进行递推求解；针对连续系统，Hamilton-Jacobi-Bellman 方程（HJB）给出了最优解的充要条件。然而，随着研究问题复杂度的逐渐增大，解析法已经无法解决大型复杂的最优控制问题。

随着计算机的发展，高效的数值求解方法逐渐成为主流的最优控制问题求解方法。最优控制问题的数值解法主要分为两大类：间接法和直接法。

间接法基于变分法和 Pontryagin 最大值原理，从最优控制问题中导出一阶最优性必要条件，这些必要条件形成哈密顿边值问题（HBVP）[14]，然后对边值问题进行求解，而无需考虑原始问题的最优性，故称为间接法。直接法通过离散化手段将最优控制问题转化为非线性规划问题（NLP），而不需要替代的最优性条件，然后使用非线性规划的数值算法进行求解，这些算法的目的是最小化性能指标，同时满足与 NLP 相关的一组条件（KKT 条件），称之为直接法。

间接法的优势在于每次迭代的计算值都满足一阶最优性必要条件，因此相对于直接法具有更高的数值精度。但对于工程中实际的非线性最优控制问题，通常含有复杂的约束条件，导致其对应的必要条件也通常相当复杂，推导过程繁琐不适合计算机编程实现；其次在求解 HBVP 时，需要同时积分状态方程和协态方程，而协态方程没有实际物理意义，初值通常难以估计。直接法的缺点包括迭代求解过程中并不保证满足系统动力学约束、难以证明数值解满足最优性条件以及 NLP 运算量大等问题，但其优势在于具有较大的收敛半径，不需要很准确的初值猜测，相对于间接法更容易实现收敛，同时避免了人为推导最优性条件的过程，转化后的 NLP 已经有许多成熟的数值解法。因此，目前绝大多数最优控制问题的数值算法，均在直接法的框架下构造[15]。

目前，针对非线性最优控制问题，国外学者在直接法的框架下开发了一批优秀的数值求解软件[16-18]，其中，除少部分功能简单的软件包以开源的形式发布，大部分功能强大的软件包均采用商用软件的形式对外发布。由于最优控制的数值算法在航天等国防领域有重要应用，因此对于从实际问题中抽象出来的一类有限时域最优控制问题设计快速稳定的数值算法具有重要的战略意义。

Olver 等人 2013 年于 SIAM REVIEW 发表的论文[19]中提出了求解变系数常微分方程的快速谱方法，该方法利用 Ultraspherical 多项式（后面简称“超球多项式”）逼近未知变量，可以得到稀疏带状的线性系统，具有很好的数值精度、数值稳定性和收敛性，后被多名学者用于多种微分方程的求解且均有很好的效果。本课题对从实际问题中抽象出的有限时域最优控制问题进行优化，利用基于超球多项式的伪谱法将控制变量和状态变量离散化，将最优控制问题转化为非线性规划问题进行优化，对算法解进行最优性分析，对算法数值格式进行误差估计，最后利用实际工程中的最优控制问题对算法进行数值实验验证其精度和效率，提出一种快速精确的数值算法解决有限时域的最优控制问题。

2 国内外在该方向的研究现状及分析

2.1 国内外研究现状

求解最优控制问题的数值算法，分为间接法和直接法。由于直接法的种种优势，目前大多数最优控制问题都在直接法的框架下进行解决。

在求解非线性最优控制问题的直接法当中，通常采用离散或参数化的方式，将原来连续时间的最优控制问题转化为一个有限维的非线性规划（NonLinear Programming，NLP）问题，从而使用成熟的 NLP 数值算法进行求解，如罚函数法、序列二次规划法（Sequential Quadratic Programming，SQP）和内点法。求解非线性问题的软件包有以稀疏 SQP 算法为基础的 SNOPT（Sparse Nonlinear Optimizer）软件包、以内点法为基础的 IPOPT（Interior Point Optimizer）、以包括内点法和 SQP 方法为基础的 KNITRO（Nonlinear Interior Point Trust Region Optimization）等。

对于使用参数化方法转化 NLP 问题，主要存在函数展开[20]以及函数插值两类技术。在基于函数插值近似的算法中，状态变量和控制变量通过一组基函数进行插值近似，动力学方程以及约束条件在求解域内的一组配置点上强制满足，性能指标则转化为状态变量和控制变量在插值点上值的离散函数，将连续时间积分转化为离散点上的代数和，减小了数值积分时间的浪费，同时收敛速度快且收敛半径大，对初值依赖性不高，当下求解非线性最优控制问题最流行的伪谱方式是基于这样的方式构造的。

伪谱法在最优控制问题上的最早应用是 20 世纪 80 年代，由 Vlassenbroeck 和 Elnagar 引入[21]。随后，美国海军研究生院的学者 Fahroo 等人[22]对最优控制求解领域的伪谱方法进行了大量的研究和完善，表明其对于求解最优控制问题具有良好的收敛性和较低的初值敏感度。在经典的伪谱方法中，状态变量和控制变量通过 Legendre 多项式或 Chebyshev 多项式进行全局插值近似，状态方程和约束条件在基于 Gauss 积分点的正交配置点上强制满足，且插值点和配置点是重合的[23,24]。其中插值点选择为正交多项式或正交多项式及其导数线性组合的零点。

根据不同的离散配置网格点，研究人员发展了一批伪谱方法。Elnagar 等人[9,25]以 Legendre-Gauss-Lobatto（LGL）点为配置点，于 1995 年建立了 LGL 伪谱法求解最优控制问题；Fahroo 等人[22]针对 Bolza 最优控制问题，以 Chebyshev-Gauss-Lobatto（CGL）点为配置点，于 2002 年建立了 CGL 伪谱法求解最优控制问题，并证明了该方法对求解最优控制问题具有良好的收敛性和较低的初值敏感度；Benson 等人[27]以 Legendre-Gauss（LG）点作为配置点，于 2006 年建立了 LG 伪谱法求解最优控制问题，并证明了转化后得到的 NLP 问题的 Karush-Kuhn-Tucker（KKT）条件与最优控制问题的一阶最优性必要条件等价；Kameswaran 等人[28]以 Legendre-Gauss-Radau（LGR）点为配置点，于 2008 年构造了 LGR 伪谱法求解最优控制问题，该方法的精度仅次于 LG 方法，但同时具有更好的稳定性。Garg 等人[10]1843-1848 给出了 LG、LGR 以及 LGL 三种伪谱方法的统一框

架，并证明了三种伪谱方法的收敛速度与微分矩阵的性质。对于 N 阶的 xG、xGR 以及 xGL（“x”代表“C”或“L”，分别对应于 Chebyshev 类或者 Legendre 类）型伪谱近似方式，分别对于阶数不超过 $2N+1, 2N, 2N-1$ 次的多项式函数可实现精确近似[24]95-98。因此，相对于其他的插值方式，伪谱方法使用较少的插值点数即可获得精度较高的数值解。

伪谱方法对于无约束的光滑问题具有指数收敛的特性，然而对于有约束问题，这种优良的收敛特性丧失，只有当 N 足够大时才近似精确。部分学者考虑使用局部插值对此作为弥补，相应地产生了局部伪谱方法。在局部伪谱法（对应于有限元当中的 h 方法）中，将求解域分为若干个子区间，在每个子区间内采用较低阶数的伪谱近似对状态变量和控制变量进行近似，进而可以通过增加子区间数目的方式实现收敛；相反地，在传统的全局伪谱方法（对应于有限元当中的 p 方法）中，可以通过提高插值阶数实现收敛。但 h 方法和 p 方法均存在不足，在 h 方法中，可能产生数量众多的子区间；在 p 方法中，可能导致使用不合理的极高阶的插值函数。进而，部分学者考虑结合 h 方法和 p 方法各自的特点，构造了 hp 伪谱方法，其中子区间的数目以及每个子区间内采用的插值函数阶数均可以改变。不过人工实现网格加密过程通常是盲目的，为此，部分学者基于数值解的光滑度提出了一系列的自适应网格加密算法，Darby 等人[29]以 LG 点作为配置点，于 2011 年利用自适应 hp 方法求解最优控制问题，表明相比于全局配置法，可以用更少的计算量和内存获得更高精度的解决方案；Patterson 等人[30]于 2015 年以 LGR 点作为配置点，同样利用自适应 hp 方法得到了更高的计算效率；Pager[31]针对非光滑及不连续解的最优控制问题，于 2022 年提出了自适应的 LGR 配置法，该方法获得的解，与之前的网格细化方法求解的解为光滑解的最优控制问题获得的结果等价。综上，配置法与 hp 伪谱方法结合后使得其能合理、高效地对求解网格进行加密。

尽管在绝大多数的直接法中，数值解并不满足最优控制问题的一阶最优性必要条件。然而对于伪谱方法，Benson 证明了其转化后得到的 NLP 问题的 Karush-Kuhn-Tucker（KKT）条件与最优控制问题的一阶最优性必要条件等价[27]118-123，即伪谱法的协态映射定理[32]，从而可以借助伪谱方法的数值解得到协态变量的相关信息。这部分工作建立起了伪谱方法与间接法中哈密顿系统之间的桥梁。

上述提到的配置法大都通过构造节点基函数，利用拉格朗日插值来逼近状态变量和控制变量。然而，传统的基于节点基的伪谱配置方法，在逼近函数的导数时，需要对拉格朗日插值基函数进行求导，得到的系数矩阵是稠密的，计算量大且条件数差，因此在求解最优控制问题时存在很大的缺陷。在近十年间，针对条件数良好的谱配置方法提出了两个突破性的想法。第一个想法是 Wang[33]于 2014 年提出的基于 Birkhoff 插值的好条件数方法，该方法使得线性系统的条件数限制到了 $O(\sqrt{N})$，并且可以在数千个配置点上产生稳定的解决方案，该方法被用来求解 p 阶线性微分方程并获得了非常好的数值结果；Koeppen[34]基于 Birkhoff 插值多项式提出良态伪谱最优控制离散方法，通过 Birkhoff 插值多项式逼近状态变量和控制变量，构建了良态计算系统，提升了计算效率和精度。第

二个想法是 Olver[19]468-471 于 2013 年提出的基于超球多项式的快速好条件数方法，该方法利用超球多项式逼近函数，得到一个几乎带状的线性系统，可以高效、可靠地求解具有多达一百万个未知数的可变系数和一般边界条件的线性常微分方程。

针对第二种基于超球多项式的方法，近年来被多名学者改进用于高效求解各种偏微分方程并取得了非常好的效果。Townsend 等人[35]于 2015 年利用超球多项式求解矩形域上的变系数线性偏微分方程；Slevinsky 等人[36]于 2017 年利用超球多项式精确求解单变量奇异积分方程；Hale 等人[37]于 2018 年构造了求解有理阶分数方程的快速算法；Cullen 等人[38]于 2019 年将其用于求解非线性、变系数偏微分方程获得了精确的结果；Fortunato 等人[39]于 2021 年利用超球谱元法构造带状线性系统，并结合分层 Poincaré-Steklov 格式高效求解多边形域上的二阶变系数偏微分方程；Cheng 等人[40]于 2023 年将超球多项式用于求解瞬态偏微分方程，得到了与其它伪谱方法精度相当，但速度更快的离散化方法。上述的工作均以超球多项式为基函数逼近未知函数，并应用于不同形式的微分方程求解，且均得到了稀疏带状的系统，在计算精度和速度方面相比传统的伪谱方法更有优势，因此有推广到最优控制问题求解的可能。

2.2 国内外文献综述的简析

综合上述文献，关于求解最优控制问题的伪谱方法，国内外目前主要还集中在构造节点基函数，无论是最初的 LGL、CGL 配置点，还是后来的 LG、LGR 配置点，以及后续基于节点基函数的 *hp* 方法，其基本思想都是利用拉格朗日插值离散状态变量和控制变量，再将其转化为非线性规划问题进行求解。由于协态映射定理的发展，伪谱法相比其他直接法更满足一阶最优性必要条件，从而获得精确数值解，因此在过去的十几年，这些方法在理论上已经取得了很大的成绩且被应用于航空航天等多个领域，同时也有一系列优秀的基于伪谱法的最优控制优化软件被开发。然而由于拉格朗日插值在求导时产生的稠密矩阵，以及节点基本身存在的效率低的问题，基于节点基的伪谱法在求解最优控制问题的计算精度和计算效率方面都存在着很大的改进空间。

模态基具有正交性质，易于计算和解析处理，且可以生成稀疏的微分矩阵，用于快速求解。近些年来发展的基于超球多项式逼近函数的方法就属于基于模态基的伪谱方法，且近年来已被运用到具有可变系数及多种边界条件的多种形式的微分方程的数值求解中，该方法可以得到一个几乎带状的线性系统。由于其得到的微分矩阵是稀疏带状的，且具有良好的条件数，在进行方程求解时更加稳定快速，是之前基于节点基的伪谱方法所无法比拟的。然而目前该方法仅仅用在了微分方程问题的求解上，在最优控制问题求解的应用还很少。因此开发一种基于超球多项式的稀疏谱方法求解最优控制问题有一定的应用价值和研究意义。

3 主要研究内容及研究方案

3.1 主要研究内容

由于传统的基于节点基函数的谱方法，在近似导数时系数矩阵为稠密的，条件数差，因此在求解最优控制问题时存在计算量大、精度低等缺点，不利于对现实问题的快速准确求解。因此本研究针对一类最优控制问题，提出了基于模态基函数的快速稀疏伪谱方法。利用超球伪谱法将最优控制问题转化为非线性规划问题，得到稀疏带状条件良好的线性系统，从而快速准确地求解一类有限时域的最优控制问题。该算法的核心是利用第一类 Chebyshev 多项式逼近控制变量与状态变量，再利用第一类 Chebyshev 多项式与第二类 Chebyshev 多项式（一阶超球多项式）之间的关系得到稀疏矩阵，从而得到条件良好的非线性规划问题。随后对算法解的最优性进行分析，对算法数值格式进行误差估计，再利用 SQP 算法对非线性规划问题数值求解，通过数值实验与最新的伪谱方法进行比较，证明所提出的算法的快速精确性。主要研究内容可分为如下四个部分。

3.1.1 格式构造

本课题针对航空航天等领域中遇到的轨迹优化、最小燃料消耗等问题，抽象出如下有限时域的最优控制问题数学模型：

$$
\begin{aligned}
&\text{minimize} && C(\mathbf{x}(1)) \\
&\text{subject to} && \dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)),\quad \mathbf{u}(t)\in U,\quad t\in\Omega, \\
& && \mathbf{x}(-1)=\mathbf{x}_0,\quad (\mathbf{x},\mathbf{u})\in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\times C^0(\Omega;\mathbb{R}^m)
\end{aligned}
\tag{3-1}
$$

其中$\Omega=[-1,1]$,控制约束集$U\subset\mathbb{R}^m$是闭凸的，且具有非空内部，状态$\mathbf{x}(t)\in\mathbb{R}^n$,$\dot{\mathbf{x}}$表示$\mathbf{x}$关于$t$的导数，$\mathbf{x}_0$是假设给定的初始条件，$\mathbf{f}:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$,$C:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$,$C^l(\Omega;\mathbb{R}^n)$表示从$\Omega$到$\mathbb{R}^n$的$l$次连续可微函数构成的空间。假设$\mathbf{f}$ 和C至少是连续的。

对于上述最优控制问题，研究其对应的非线性规划问题的伪谱构造格式，使用超球多项式离散状态变量及控制变量，以及有限维逼近等方式，构造出稀疏带状的非线性规划问题。主要分为以下两个步骤：

（1）**函数展开**　针对上述从实际应用中抽象出的最优控制问题，利用基于超球多项式的模态基方法进行函数展开。首先需要利用第一类 Chebyshev 多项式逼近状态变量$\mathbf{x}(t)$与控制变量$\mathbf{u}(t)$，再利用第一类 Chebyshev 多项式与第二类 Chebyshev 多项式（一阶超球多项式）的转换关系对状态变量求导，将原始与状态函数导数相关等式约束，转化为多项式逼近系数之间的等式约束。

（2）**有限维逼近**　利用投影算子对状态函数进行有限维逼近，并将初值条件利用边界控制法[39]插入到线性系统中，得到带有初值条件的稀疏带状的线性系统，将最优控制问题转化为良好条件的非线性规划问题，从而进行后续快速稳定的数值求解。

3.1.2 理论分析

（1）**最优性分析**　　对本课题基于超球多项式的伪谱构造格式所得的解进行最优性分析。基于协态映射定理，根据第一步得到的非线性规划问题构造拉格朗日函数，推导出相应的 KKT 条件；再根据目标函数和约束条件构造哈密顿函数，引入协态变量，利用哈密顿函数求出最优控制问题的一阶最优性必要性条件，最后证明推导出的 KKT 条件与一阶最优性必要性条件等价，即可证明所求解的最优性。

（2）**误差估计**　　在完成上述工作后，选取合适的投影空间，采用合适的投影法对真解投影，建立数值解-投影、投影-真解之间的误差估计，最后得到数值解-真解的误差估计，从而保证该方法在理论上的准确性，使得接下来的数值求解有意义。

3.1.3 数值求解

寻找航天等领域常用的经典数值算例，将其利用第一步的方法转化为非线性规划问题，采用合适的数值求解方法如 SQP 算法进行求解，并将数值解与真解进行比较，分析误差与理论误差是否一致，同时记录整个算法的运行时间总结算法的计算速度，用于检验算法本身的性能。

3.1.4 对比实验

将提出的基于超球多项式的伪谱方法与最新改进的基于节点基的伪谱方法（如 CGL、LGL、LG、LGR）应用到同一最优控制问题，并在同一条件下进行大量的对比实验，观察不同方法的计算精度与计算效率，以证明新提出的方法比原有方法更加快速精确。

3.2 研究方案

本课题研究的主要内容是对实际问题中抽象出的一类有限时域的最优控制问题提出一种稀疏谱方法，从而快速精确地求解最优控制问题。首先利用超球多项式构造数值格式，将最优控制问题转化为非线性规划问题，再利用协态映射定理证明解的最优性，接着利用投影法对算法建立相应格式的误差估计，用 SQP 等方法求解非线性规划问题，最后通过多种算例进行数值实验，并与最新方法进行比较，证明本课题所提方法的快速精确性。本课题的研究方案主要包括以下几个方面：

3.2.1 格式构造

针对本课题最重要的格式构造部分，首先阅读伪谱方法相关的文献及经典书籍。通过查阅相关的文献理清国内外研究现状，掌握伪谱方法求解最优控制问题的基本原理，对传统的基于节点基的离散方法进行学习推导，掌握离散过程的具体步骤，学习基于超球多项式的函数逼近方法，并深入研究基于超球多项式求解微分方程相关的论文，将其推广到最优控制问题领域。

具体来说，首先学习总结本课题所需的预备知识，其中关于 Chebyshev 多项式及超球多项式相关的知识将在已完成工作中罗列用于推导，其余相关知识有：

（1）**矩阵条件数**　　矩阵的条件数是用来衡量矩阵在求解线性方程组时的稳定性和误差传播程度的指标。当条件数较大时，矩阵的求解过程可能会更加敏感，小的扰动

可能会导致较大的误差。相反，当条件数较小时，矩阵的求解过程相对稳定，误差传播较小。

条件数定义为：矩阵的范数，乘以矩阵的逆矩阵的范数。即：

$$\kappa(A)=\|A\|\|A^{-1}\| \tag{3-2}$$

其中，$\|A\|$为矩阵 A 的矩阵范数，依据不同的矩阵范数有不同的条件数。

显然，$\kappa(A)=\|A\|\|A^{-1}\|\geq\|AA^{-1}\|=\|I\|=1$.

（2）**Legendre-Gauss 型正交节点**　令$\{x_j,\omega_j\}_{j=0}^{N}$是 Legendre-Gauss 型节点和权重的集合，$L_N(x)$为 Legendre 多项式。

对于 Legendre-Gauss(LG)正交，$\{x_j\}_{j=0}^{N}$是$L_{N+1}(x)$的零点，对应的权重为：

$$\omega_j=\frac{2}{(1-x_j^2)[L'_{N+1}(x_j)]^2},\quad 0\leq j\leq N \tag{3-3}$$

对于 Legendre-Gauss-Radau(LGR)正交，$\{x_j\}_{j=0}^{N}$是$L_N(x)+L_{N+1}(x)$的零点，对应的权重为：

$$\omega_j=\frac{1}{(N+1)^2}\frac{1-x_j}{[L_N(x_j)]^2},\quad 0\leq j\leq N \tag{3-4}$$

对于 Legendre-Gauss-Lobatto(LGL)正交，$\{x_j\}_{j=0}^{N}$是$(1-x^2)L'_N(x)$的零点，对应的权重为：

$$\omega_j=\frac{2}{N(N+1)}\frac{1}{[L_N(x_j)]^2},\quad 0\leq j\leq N \tag{3-5}$$

则对应的 Legendre-Gauss 型求积公式为：

$$\int_{-1}^{1}p(x)dx=\sum_{j=0}^{N}p(x_j)\omega_j,\quad \forall p\in P_{2N+\delta} \tag{3-6}$$

其中$\delta=1,0,-1$分别对应于 LG，LGR 和 LGL。

（3）**节点基和模态基**　节点基：在节点基中，函数或解表示为在特定节点处为零的基函数的线性组合。如$u(x,t)=\sum_{i=1}^{N}u_i(x,t)l_i(x)$,其中$l_i(x)$为拉格朗日插值多项式，选择的节点为特定正交多项式的根，如 Legendre 多项式或 Chebyshev 多项式，这样做的优点是允许通过使用节点值进行插值来轻松评估域内任何点的函数或解。

模态基：在模态基中，函数或解表示为称为模态函数的正交基函数的线性组合。如$u(x,t)=\sum_{i=1}^{N}u_i(t)\phi_i(x)$,其中$\phi_i(x)$通常是正交多项式，如 Legendre 多项式或 Chebyshev 多项式。模态基的好处是生成的微分矩阵稀疏，可以快速求解。

针对基于模态基的伪谱方法求解最优控制问题，本课题首先尝试了基于超球多项式的伪谱方法进行函数逼近，首先将状态变量与控制变量用第一类 Chebyshev 多项式逼近，再利用第一类 Chebyshev 多项式与超球多项式之间的转换关系，将与状态变量导数相关

的等式变为与其 Chebyshev 系数相关的等式，再利用投影算子对函数进行有限维逼近，将初值条件加入到线性系统中，得到稀疏带状的线性系统，从而将最优控制问题利用基于超球多项式的伪谱方法转化为非线性规划问题。

本人在开题前期已对超球多项式进行函数逼近的方法进行了深入学习，并总结了该方法的优点以及迁移到最优控制问题的可行性，并且完成了此部分的推导工作。若此方法后续的实验效果不尽如人意，仍有多种基于模态基的伪谱配置法作为替代方法，且均可以得到稀疏的线性系统，此处列举两种经典的模态基函数：

第一种方法称为 Petrov-Galerkin 方法[24]213-216，该方法用于近似奇数阶偏微分方程，对应的基函数为：

$$\begin{cases} \phi_i(t) \in V_N, V_N = \ \ x \in P_N : x(-1) = 0 \\ \tilde{\phi}_i(t) \in V_N^*, V_N^* = \ \ x \in P_N : x(1) = 0 \end{cases} \tag{3-7}$$

第二种方法[41]使用的模态基函数由跨越 P 阶多项式空间的修正雅可比多项式 $\mathbb{P}_{p-1}^{\alpha,\beta}(\xi)$ 组成，并且令 $\alpha = 1, \beta = 1$，其基函数为：

$$\phi_p(\xi) = \psi_p(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1-\xi}{2} & p = 0 \\ \dfrac{1-\xi}{2}\dfrac{1+\xi}{2}\mathbb{P}_{p-1}^{1,1}(\xi) & 0 < p < P \\ \dfrac{1+\xi}{2} & p = P \end{cases} \tag{3-8}$$

3.2.2 理论分析

下面的理论分析中涉及的空间均为 Sobolev 空间，下面给出该空间的定义。

定义 3.1[42]：

设 k 为非负整数，$p \geq 1, \Omega$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集。称集合

$$u \in W^k(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega),\text{对满足}|\alpha| \leqslant k\text{的任意}\alpha \tag{3-9}$$

赋以范数

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{|\alpha| \leqslant k} \left| D^\alpha u \right|^p dx \right)^{1/p} \tag{3-10}$$

后得到的线性赋范空间为 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$.

（1）**最优性分析**　　对基于超球伪谱法得到的数值解的最优性进行理论分析。在基于直接法的最优控制问题求解方法中，都是利用协态映射定理进行最优性分析的。此定理可以用于各种类型的最优控制问题，例如线性和非线性、确定性和随机的最优控制问题。

首先阅读协态映射定理相关的论文，学习并理解协态映射定理，总结协态映射定理的基础知识。基本流程如下：

首先根据非线性规划问题构造拉格朗日函数，推导出非线性规划问题的 KKT 条件；

再利用目标函数及约束条件构造出哈密顿函数，引入协态变量，推导出最优控制问题的一阶最优性必要条件；

最后证明推导出的 KKT 条件与一阶最优性必要条件等价，即可检验问题解的最优性。

对于本课题提出方法得到的解的最优性证明，可以由基于节点基的伪谱配置法得到的解的最优性证明推广而来，本人之前已深入学习了该理论的原理，并对基于节点基的方法进行了最优性分析，详细推导在下一章中介绍。

（2）误差估计 对于本课题提出的算法格式，利用投影法建立相应的误差估计。误差估计是指在一定的正则性假设下，数值解与真解在一定范数下的误差界。由于数值解和真解的误差通常难以直接估计，因此需要采用合适的投影算子将真解投影到有限维空间，再对数值解-投影、投影-真解建立误差估计，最后得到数值解-真解的误差估计。利用投影法进行误差估计主要采用以下步骤：

步骤一：选取合适的正交投影函数对真解进行正交投影，常用的正交投影算子有 Legendre 多项式、Chebyshev 多项式等，将其作为正交基函数，对真解进行正交投影。在投影时，通过将真解函数与正交基函数进行内积运算，得到投影系数，从而得到投影后的近似解；

步骤二：对解进行正则性假设，假设解的 n 次导数在 Sobolev 空间下有界；

步骤三：通过标准的逼近理论得到投影-真解的误差估计；

步骤四：利用投影-真解的误差控制数值解-投影的误差；

步骤五：数值解-真解的误差由数值解-投影的误差和投影-真解的误差合并得到。

通过对数值格式的误差估计，保证其理论的快速准确性，使数值求解有意义。

3.2.3 数值求解

采用 SQP 算法求解第一步得到的非线性规划问题，该方法将非线性规划问题转化为一系列二次规划子问题进行求解。通过查阅 SQP 算法相关的资料和文献，总结求解法，将其应用到第一步得到的非线性规划问题中，进而求解最优控制问题的最优控制变量与最优状态变量的多项式系数，得到最优控制变量与最优状态变量的数值解。

一般的非线性规划问题可以表示为如下形式：

$$\begin{cases} \text{minimize} & f(x) \\ \text{subject to} & C_E(x) = 0 \end{cases} \tag{3-11}$$

该非线性规划问题对应的拉格朗日函数为 $L(x,\lambda) = f(x) - \lambda^T C_E(x).$

SQP 算法求解上述非线性规划问题的基本流程见表 3-1：

表 3-1　SQP 算法流程

算法：SQP 算法
输入：初始点 $z^0=(x^0,\lambda^0)$，精度要求 tol，迭代次数 $k=0.$
输出：最优解 x^*, 最优值 $f(x^*).$
1:　选择初始点 $z^0=(x^0,\lambda^0).$
2:　计算 x^k 处的目标函数的梯度 g^k，约束函数 $C_E(x^k).$
3:　计算约束函数的 Jacobi 矩阵 $J_E(x^k)=\nabla C_E(x^k).$
4:　计算拉格朗日函数的 Hessian 阵 $W(x^k,\lambda^k)=H(x^k)-\sum_{i\in E}\lambda_i^k C_i(x^k).$
5:　求解二次规划子问题式：$\begin{cases}\text{minimize} & \frac{1}{2}\delta_x^T W(x^k,\lambda^k)\delta_x+\delta_x^T g^k \\ \text{subject to} & J_E(x^k)\delta_x=-C_E(x^k)\end{cases}$，获得牛顿迭代方向 δ_x^k 以及对应下一个迭代点 x^{k+1} 的拉格朗日乘子向量 $\lambda^{k+1}.$
6:　令 $x^{k+1}=x^k+\delta_x^k$ 并计算 $f(x^{k+1})$, 若有 $\left\Vert\delta_x^k\right\Vert<tol$, 终止迭代，输出 $x^*=x^{k+1}, f(x^*)=f(x^{k+1}).$ 否则，$k=k+1$, 转第 2 步。

除 SQP 法之外，还有罚函数法、内点法等方法均可用于求解非线性规划问题，在后续的数值实验中将会对比不同方法的优缺点并寻找最合适的方法求解非线性规划问题。

由于 C++是面向对象编程的语言，可以使程序结构更加清晰、模块化，且具有丰富的标准库，可以实现高性能计算，因此本课题拟采用 C++实现数值求解。

3.2.4 对比实验

在以往的经典论文中，有许多常用的从实际应用中抽象出的最优控制问题，本课题将从中选取多个合适的算例进行数值求解，同时在同一设备下针对同一问题，将本课题提出的方法与最新改进的基于节点基的伪谱方法（如 LCL、LG、LGR 等）进行对比，观察不同方法的计算精度与计算效率，以证明新提出的方法比原有的方法更加精确高效。

4 预期达到的目标

在理论研究方面，针对实际问题中抽象出来的最优控制问题，建立基于超球多项式的快速伪谱方法，对最优控制问题得到一个良好条件的线性系统，并对解的最优性进行证明，同时对算法建立相应格式的误差估计。

在数值实验方面，熟悉和掌握各种计算软件，学习编程技巧，确保得到的数值解符合理论的精度要求。

最终通过本课题将完成一篇带有数学推导、理论证明、数值实验的硕士学位论文。

5 已完成的研究工作与进度安排

5.1 已完成的研究工作和取得的研究成果

5.1.1 前期学习

前期相关领域的论文调研及参考教材搜集整理已经完成，包括基于节点基的伪谱方法相关的论文 10 篇，*hp* 法求解最优控制问题相关的论文 8 篇，协态映射定理相关的论文 6 篇，超球多项式相关的论文 12 篇，谱方法误差估计相关的论文 5 篇，以及谱方法相关的书籍 12 本，以及非线性规划问题求解方法相关的资料。

针对格式构造，本人深入学习了最优控制相关的理论知识，阅读了大量关于谱方法的经典论文，重点精读了经典的基于节点基求解最优控制问题的伪谱方法[9-12,25-28]、基于 Birkhoff 插值求解具有边值问题的一阶微分方程的方法[33]、以及基于超球多项式求解微分方程的伪谱方法[19,39]。掌握了最优控制相关的基本理论，掌握了 LG、LGR、LGL 等配置点法离散化最优控制问题的方法，对伪谱方法求解最优控制问题的流程进行了深入了解，对利用超球多项式离散化最优控制问题进行了详细的推导，并将其转化为了非线性规划问题，具体推导过程见下一条。

针对理论分析，本人已经调研并阅读了利用协态映射定理证明最优性相关的论文，并针对传统基于节点基的伪谱方法所得解的最优性进行了证明，后续工作将会推导到本课题基于模态基的伪谱方法中。此外，本人学习了误差估计的基本理论知识，理解了投影法对数值格式进行误差估计的方法。

针对数值求解，本人已深入学习了 SQP 算法求解非线性规划问题的基本原理，学习了 C++相关的编程知识，同时利用 SQP 算法对简单的非线性规划问题进行了求解，掌握了求解思路。

针对对比实验，本人已经阅读了经典的节点基方法相关的论文，并对其数值格式进行了推导，涉及到部分论文中的代码、以及常见的软件包的代码已进行了整理，用于后续学习。

5.1.2 格式构造

对于如下有限时域最优控制问题，基于超球多项式的伪谱方法构造出了对应的非线性规划问题：

$$\begin{aligned}
&\text{minimize} \quad C(\mathbf{x}(1)) \\
&\text{subject to} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)), \quad \mathbf{u}(t)\in U, \quad t\in\Omega, \\
&\qquad \mathbf{x}(-1) = \mathbf{x}_0, \quad (\mathbf{x},\mathbf{u})\in C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)\times C^0(\Omega;\mathbb{R}^m)
\end{aligned} \tag{5-1}$$

（1）预备知识 首先给出 Chebyshev 多项式与超球多项式的定义及两者间的转换关系：

Chebyshev 多项式是与余弦和正弦函数相关的两个多项式序列，表示为 $T_n(x)$ 和

$U_n(x)$.第一类 Chebyshev 多项式T_n定义为：

$$T_n(x)=\cos(n\arccos(x)) \tag{5-2}$$

第二类 Chebyshev 多项式U_n定义为：

$$U_n(\cos(\theta))=\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \tag{5-3}$$

超球多项式是定义在区间$[-1,1]$上，权函数为$(1-x^2)^{\alpha-1/2}$的正交多项式。超球多项式满足递推关系：

$$\begin{aligned}
&C_0^{\alpha}(x)=1\\
&C_1^{\alpha}(x)=2\alpha x\\
&C_n^{\alpha}(x)=\frac{1}{n}\left[2x(n+\alpha-1)C_{n-1}^{\alpha}(x)-(n+2\alpha-2)C_{n-2}^{\alpha}(x)\right]
\end{aligned} \tag{5-4}$$

$\alpha=1$时，超球多项式与第二类 Chebyshev 多项式等价，即：

$$C_n^{(1)}(x)=U_n(x) \tag{5-5}$$

第一类 Chebyshev 多项式与第二类 Chebyshev 多项式、超球多项式之间有如下的转换关系：

$$\begin{aligned}
T_n(x)&=\begin{cases}\frac{1}{2}(U_n(x)-U_{n-2}(x)), & n\geq 2\\ \frac{1}{2}U_1(x), & n=1\\ U_0(x), & n=0\end{cases}\\
&=\begin{cases}\frac{1}{2}(C_n^{(1)}(x)-C_{n-2}^{(1)}(x)), & n\geq 2\\ \frac{1}{2}C_1^{(1)}(x), & n=1\\ C_0^{(1)}(x), & n=0\end{cases}
\end{aligned} \tag{5-6}$$

有如下的求导关系：

$$\begin{aligned}
\frac{dT_n}{dx}&=\begin{cases}nU_{n-1}(x), & n\geq 1\\ 0, & n=0\end{cases}\\
&=\begin{cases}nC_{n-1}^{(1)}(x), & n\geq 1\\ 0, & n=0\end{cases}
\end{aligned} \tag{5-7}$$

（2）**函数展开**　　将状态变量与控制变量以 Chebyshev 展开的形式写成：

$$\begin{cases} \mathbf{x}_N = \sum_{i=0}^{\infty} X_i T_i(\tau) \\ \mathbf{u}_N = \sum_{i=0}^{N-1} U_i T_i(\tau) \end{cases} \qquad \tau \in [-1,1] \tag{5-8}$$

其中，$T_i(\tau) = \cos(i \arccos(\tau))$ 为第一类 i 阶 Chebyshev 多项式。

对(5-8)中的 $T_i(\tau)$ 求导可得：

$$\frac{dT_i}{d\tau} = \begin{cases} iC_{i-1}^{(1)}, & i \geq 1 \\ 0, & i = 0 \end{cases} \tag{5-9}$$

其中 $C^{(1)}$ 为一阶超球多项式，因此可得：

$$\mathbf{x}_N'(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} iX_i C_{i-1}^{(1)}(\tau) = C^{(1)} D_1 X \tag{5-10}$$

对应的系数矩阵 D_1 为：

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{5-11}$$

换句话说，$C^{(1)}$ 级数中导数的系数向量由 $D_1 X$ 给出，其中 D_1 是微分算子，X 是 Chebyshev 系数的无限维向量。

由公式(5-6)和(5-8)，可将状态变量 $\mathbf{x}(\tau)$ 表示为：

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} X_k T_k(\tau) \\ &= X_0 C_0^{(1)}(\tau) + \frac{1}{2} X_1 C_1^{(1)}(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{\infty} X_k (C_k^{(1)}(\tau) - C_{k-2}^{(1)}(\tau)) \\ &= (X_0 - \frac{1}{2} X_2) C_0^{(1)}(\tau) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} (X_k - X_{k+2}) C_k^{(1)}(\tau) \end{aligned} \tag{5-12}$$

因此，$\mathbf{x}(\tau)$ 的 $C^{(1)}$ 系数为 $S_0 X$,其中 S_0 为转换算子：

$$S_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{2} & 0 & \ddots \\ & & & \frac{1}{2} & \ddots \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{5-13}$$

X 为 $\mathbf{x}(\tau)$ 的 Chebyshev 系数向量，可见此转换算子的任何截断都是稀疏带状的。

微分算子 D_1 将 Chebyshev 级数中的系数转换为 $C^{(1)}$ 级数中的系数。因此，右侧的 $f(\mathbf{x}_N,\mathbf{u}_N)$ 必须用 $C^{(1)}$ 级数中的系数来表示，即：

$$f(\mathbf{x}_N,\mathbf{u}_N)=\sum_{i=0}^{\infty}F_iT_i(\tau)=TF=C^{(1)}S_0F \tag{5-14}$$

而 $\mathbf{x}_N'$ 与 $f(\mathbf{x}_N,\mathbf{u}_N)$ 具有如下约束条件：

$$\mathbf{x}_N'=f(\mathbf{x}_N,\mathbf{u}_N) \tag{5-15}$$

故由(5-10)和(5-14)可得：$C^{(1)}D_1X=C^{(1)}S_0F$,即 $D_1X=S_0F$,其中 X,F 为 Chebyshev 系数向量。

（3）**有限维逼近**　　为了使变量可以用有限维来近似，并且施加初值条件，用投影算子 $P_N=(I_N,\mathbf{0})$ 进行截断，有：

$$P_{N-1}D_1P_N^T=\begin{bmatrix}0 & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & N-1\end{bmatrix} \tag{5-16}$$

则有 $\mathbf{x}_N(\tau)=\sum_{i=0}^{N-1}X_iT_i(\tau)$.

初值条件为：$\mathbf{x}(-1)=\mathbf{x}_0=\sum_{i=0}^{N-1}X_iT_i(-1)$,其中 $T_i(-1)=(-1)^i,i=0,\ldots,N-1$.

终点处的值为：$\mathbf{x}(1)=\mathbf{x}_N(1)=\sum_{i=0}^{N-1}X_iT_i(1)=\sum_{i=0}^{N-1}X_i$.

对应的导数值为：$\mathbf{x}_N'=\sum_{i=0}^{N-1}iX_iC_{i-1}^{(1)}(\tau)=C^{(1)}P_{N-1}D_1P_N^TX$.

于是将初值条件加入后可得：

$$A_NX=\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0\\ (P_{N-1}S_0P_N^T)(P_NF)\end{bmatrix}=b \tag{5-17}$$

其中 $A_N=\begin{bmatrix}T_0(-1) & T_1(-1) & \cdots & T_{N-2}(-1) & T_{N-1}(-1)\\ & & P_{N-1}D_1P_N^T & & \end{bmatrix}$.

同时控制变量具有约束条件 $\mathbf{u}(t)\in U$ ，由于全局约束条件通常难以满足，因此约束条件可改为离散化后在配置点上满足约束条件。在上述提到的配置点中，由于 Legendre-Gauss-Lobatto 节点定义在 $[-1,1]$ 上，因此要求约束条件在 LGL 点上满足，即：

$$\mathbf{u}(\tau_j)=\mathbf{u}_N(\tau_j)=\sum_{i=0}^{N-1}U_iT_i(\tau_j) \tag{5-18}$$

（4）**非线性规划问题**　　通过上述推导，可得到最优控制问题对应的非线性规划问题：

$$X \in \mathbb{R}^n, U \in \mathbb{R}^n, F \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{cases} \text{minimize} & C(\mathbf{x}_N(1)) \\ \text{subject to} & AX = b \\ & \mathbf{u}_N(\tau_j) \in U,\ j = 1, 2, \cdots, N \end{cases} \tag{5-19}$$

其中 $A = \begin{bmatrix} T_0(-1) & T_1(-1) & \cdots & T_{N-2}(-1) & T_{N-1}(-1) \\ & & P_{N-1} D_1 P_N^T & & \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ (P_{N-1} S_0 P_N^T)(P_N F) \end{bmatrix}$.

5.1.3 最优性分析

本人在开题前完成了基于节点基的伪谱法求解最优控制问题时，所得数值解的最优性分析，后续将推广到本课题所用的超球多项式中。对于最优控制问题(3-1)利用基于节点基的伪谱配置法可得到如下的非线性规划问题：

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && C(\mathbf{X}_{N+1}) \\ &\text{subject to} && \sum_{j=0}^{N} D_{ij} \mathbf{X}_j = \mathbf{f}(\mathbf{X}_i, \mathbf{U}_i), \quad \mathbf{U}_i \in \mathcal{U}, \quad 1 \le i \le N \\ & && \mathbf{X}_0 = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{X}_{N+1} = \mathbf{X}_0 + \sum_{j=1}^{N} \omega_j \mathbf{f}(\mathbf{X}_j, \mathbf{U}_j) \end{aligned} \tag{5-20}$$

针对该非线性规划问题，首先构造对应的拉格朗日函数见式(5-21)：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = C(\mathbf{X}_{N+1}) &+ \sum_{i=1}^{N} \left\langle \boldsymbol{\mu}_i, \mathbf{f}(\mathbf{X}_i, \mathbf{U}_i) - \sum_{j=0}^{N} D_{ij} \mathbf{X}_j \right\rangle + \left\langle \boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{x}_0 - \mathbf{X}_0 \right\rangle \\ &+ \left\langle \boldsymbol{\mu}_{N+1}, \mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_{N+1} + \sum_{i=1}^{N} \omega_i \mathbf{f}(\mathbf{X}_i, \mathbf{U}_i) \right\rangle \end{aligned} \tag{5-21}$$

于是该非线性规划问题对应的 KKT 条件为：

$$\begin{cases} \mathbf{X}_0 \Rightarrow \boldsymbol{\mu}_{N+1} = \boldsymbol{\mu}_0 + \sum_{i=1}^{N} D_{i0} \boldsymbol{\mu}_i \\ \mathbf{X}_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} D_{ij} \boldsymbol{\mu}_i = \nabla_x H(\mathbf{X}_j, \mathbf{U}_j, \boldsymbol{\mu}_j + \omega_j \boldsymbol{\mu}_{N+1}), \quad 1 \le j \le N \\ \mathbf{X}_{N+1} \Rightarrow \boldsymbol{\mu}_{N+1} = \nabla C(\mathbf{X}_{N+1}) \\ \mathbf{U}_i \Rightarrow -\nabla_u H(\mathbf{X}_i, \mathbf{U}_i, \boldsymbol{\mu}_i + \omega_i \boldsymbol{\mu}_{N+1}) \in N_{\mathcal{U}}(\mathbf{U}_i), \quad 1 \le i \le N \end{cases} \tag{5-22}$$

最优控制问题对应的哈密顿函数为：

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \tag{5-23}$$

则最优控制问题对应的一阶最优性必要条件为：

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{\lambda}}(\tau_i) = -\nabla_x H(\mathbf{x}(\tau_i), \mathbf{u}_i, \boldsymbol{\lambda}(\tau_i)), 1 \le i \le N \\
\boldsymbol{\lambda}(1) = \nabla C(\mathbf{x}(1)) \\
N_{\mathcal{U}}(\mathbf{u}_i) \ni -\nabla_u H(\mathbf{x}(\tau_i), \mathbf{u}_i, \boldsymbol{\lambda}(\tau_i)), 1 \le i \le N
\end{cases} \tag{5-24}
$$

得到上述 KKT 条件与一阶最优性必要条件后，通过对协态变量进行离散化，再利用状态微分矩阵与协态微分矩阵之间的关系即可证明两个条件的等价性，于是便证明了该方法求得的解为最优解。

5.2 进度安排

2023 年 6 月-2023 年 9 月：查阅最优控制问题相关的文献。了解最优控制问题的应用背景及研究意义，总结求解最优控制问题的方法及发展现状，学习伪谱法求解最优控制问题的数值方法，利用超球多项式推导最优控制问题对应的非线性规划问题，确定论文题目，完成了开题报告的撰写。

2023 年 9 月-2023 年 12 月：查阅资料，利用协态映射定理，引入协态变量，对提出的算法所得解的最优性进行证明。

2023 年 12 月-2024 年 3 月：学习误差估计相关的理论知识，对算法建立相应格式的误差估计。

2024 年 3 月-2024 年 6 月：对得到的非线性规划问题进行数值求解，并利用大量算例验证其计算效率与精度，与最新改进的伪谱方法进行比较，同时准备中期答辩材料。

2024 年 6 月-2024 年 9 月：总结之前的工作，整理论文框架，完成论文理论部分的撰写。

2024 年 9 月-2024 年 12 月：对理论部分的结果与数值实验的结果进行分析和修改，在老师的指导下，进一步完善论文剩余的内容。

2024 年 12 月-2025 年 6 月：完成论文初稿，交由导师审阅，并针对导师对论文初稿提出的问题与建议进行修改，再次交由导师审阅，再次修改，打印，准备答辩。

6 为完成课题已具备和所需的条件和经费

为完成本课题，我们需要本课题相关的经典书籍和一些参考文献。学校图书馆拥有传统型馆藏及电子图书几百万册，引进国内外大型文献数据库 70 余种，推荐免费电子资源 30 余种，包括各种知名的大型综合性数据库、各类权威的专业学会出版物全文数据库。在课题研究初期，本人已与导师搜集了许多谱方法与最优控制相关的书籍和文献，了解各种数据库的检索方式，因此能够较好地利用各种资源进行学习研究。

此外，本人导师与国内外知名的谱方法专家有深入的交流，为科研课题的完成奠定了良好的基础。同时，完成课题所需要的软件及编程语言本人已较为熟练地掌握，本人所在的实验室配有多台高性能计算机，能够满足该课题的实验需求。

7 预计研究过程中可能遇到的困难和问题，以及解决的措施

7.1 可能遇到的困难和问题

第一，本课题所研究的超球多项式几乎没有用到最优控制问题的先例，因此在构建协态映射定理及算法的误差估计方面可能难以寻找相关的文献，在推导方面会花费较长的时间。第二，在进行数值实验过程中由于需要在同一条件下进行多组算法的对比，编写程序的过程可能会花费较长的时间。

7.2 解决措施

针对理论方面存在的问题，可以首先参考基于节点基的伪谱方法如何进行相关的理论分析，总结相关的方法，同时积极向指导老师请教，与同学进行交流，多注重理论推导的细节部分，寻找合适的证明方法。针对数值实验部分存在的问题，不断提高自身的编程能力，同时积极查找之前论文相关的代码，学习其中代码框架的搭建思路，从而更高效地进行数值实验，得到符合预期的实验结果。

8 主要参考文献

[1] Sussmann H J, Willems J C. 300 Years of Optimal Control: from the Brachystochrone to the Maximum Principle[J]. IEEE Control Systems Magazine, 1997, 17(3):32-44.

[2] Pontryagin L S. The Mathematical Theory of Optimal Processes[M]. New Jersey:John Wiley & Sons,Inc,1962:1-125.

[3] Liu X. Fuel-optimal Rocket Landing with Aerodynamic Controls[J]. Journal of Guidance Control & Dynamics, 2019, 42(1):65-77.

[4] Wang J, Cui N, Wei C. Optimal Rocket Landing Guidance Using Convex Optimization and Model Predictive Control[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2019, 42(5):1078-1092.

[5] Song Y, Gong S. Solar Sail Trajectory Optimization of Multi-asteroid Rendezvous Mission[J]. Acta Astronaut, 2019, 157:111–122.

[6] Ge J, Liu L, Dong X, et al. A Trajectory Optimization Method for Reducing Magnetic Disturbance of an Internal Combustion Engine Powered Unmanned Aerial Vehicle[J]. Aerospace Science and Technology, 2021, 116:106885.

[7] Amaya J, Hermosilla C, Molina E. Optimality Conditions for the Continuous Model of the Final Open Pit Problem[J]. Optimization Letters, 2021, 15(3):991-1007.

[8] Molina E, Rapaport A. An Optimal Feedback Control that Minimizes the Epidemic Peak in the SIR Model under a Budget Constraint[J]. Automatica, 2022, 146:110596.
[9] Elnagar G, Kazemi M A, Razzaghi M. The Pseudospectral Legendre Method for Discretizing Optimal Control Problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1995, 40(10):1793-1796.
[10] Garg D, Patterson M A, Hager W W, et al. A Unified Framework for the Numerical Solution of Optimal Control Problems Using Pseudospectral Methods[J]. Automatica, 2010, 46(11):1843-1851.
[11] Garg D, Hager W W, Rao A V. Pseudospectral Methods for Solving Infinite-horizon Optimal Control Problems[J]. Automatica, 2011, 47(4):829–837.
[12] Hager W W, Liu J, Mohapatra S, et al. Convergence Rate for a Gauss Collocation Method Applied to Constrained Optimal Control[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2018, 56(2):1386-1411.
[13] 王镕海. 基于多重打靶法的路径约束最优控制问题求解方法研究[D]. 武汉：华中科技大学机械工程学科硕士学位论文，2021：1-2.
[14] Huntington G T. Advancement and Analysis of Gauss Pseudospectral Transcription for Optimal Control Problems[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology Dissertation for PhD of Philosophy, 2007:51-76.
[15] 王昕炜. 非线性最优控制问题的保辛伪谱方法及其应用[D]. 大连：大连理工大学计算力学学科博士学位论文，2019：2-6.
[16] Rao A V, Benson D A, Darby C L, et al. Algorithm 902: GPOPS, A MATLAB Software for Solving Multiple-phase Optimal Control Problems Using the Gauss Pseudospectral Method[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 2010, 37(2):22.
[17] Patterson M A, Rao A V. GPOPS-II: A MATLAB Software for Solving Multiple-phase Optimal Control Problems Using *hp*-adaptive Gaussian Quadrature Collocation Methods and Sparse Nonlinear Programming[J]. ACM Transactions on Mathematical Software, 2010, 41(1):1-37.
[18] Becerra V M． Solving Complex Optimal Control Problems at no Cost with PSOPT[C]//IEEE International Symposium on Computer-aided Control System Design. Piscataway, N.J.: Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2010: 1391-1396.
[19] Olver S, Townsend A. A Fast and Well-conditioned Spectral Method[J]. SIAM Review, 2013, 55(3):462-489.
[20] Marzban H R, Razzaghi M. Rationalized Haar Approach for Nonlinear Constrained

Optimal Control Problems[J]. Applied Mathematical Modelling, 2010, 34(1):174-183.

[21] Vlassenbroeck J, Dooren R V. A Chebyshev Technique for Solving Nonlinear Optimal Control Problems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1988, 33(4):333-340.

[22] Fahroo F, Ross I M. Direct Trajectory Optimization by a Chebyshev Pseudospectral Method[J]. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(1):160-166.

[23] Hesthaven J S, Gottlieb S, Gottlieb D. Spectral Methods for Time-dependent Problems[M]. Cambridge:Cambridge University Press, 2007:66-108.

[24] Shen J, Tang T, Wang L L. Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications[M]. New York:Springer-Verlag, 2011:95-98.

[25] Elnagar G N, Kazemi M A. Pseudospectral Legendre-based Optimal Computation of Nonlinear Constrained Variational Problems[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 1998, 88(2):363-375.

[26] Ross I M, Fahroo F. Pseudospectral Methods for Optimal Motion Planning of Differentially Flat Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(8):1135-1140.

[27] Benson D. A Gauss Pseudospectral Transcription for Optimal Control[D]. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology Dissertation for PhD of Philosophy in Aeronautics and Astronautics, 2005:61-109.

[28] Kameswaran S, Biegler L T. Convergence Rates for Direct Transcription of Optimal Control Problems Using Collocation at Radau Points[J]. Computational Optimization & Applications, 2008, 41(1):81-126.

[29] Darby C L, Hager W W, Rao A V. An *hp*-adaptive Pseudospectral Method for Solving Optimal Control Problems[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2011, 32:476-502.

[30] Patterson M A, Hager W W, Rao A V. A *ph* Mesh Refinement Method for Optimal Control[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2015, 36(4):398-421.

[31] Pager E R, Rao A V. Method for Solving Bang-bang and Singular Optimal Control Problems Using Adaptive Radau Collocation[J]. Computational Optimization and Applications, 2022, 81(3):857-887.

[32] Garg D, Patterson M A, Francolin C, et al. Direct Trajectory Optimization and Costate Estimation Offinite-horizon and Infinite-horizon Optimal Control Problems Using a Radau Pseudospectral Method[J]. Computational Optimization and Applications, 2011, 49(2):335-358.

[33] Wang L L, Samson M D, Zhao X. A Well-conditioned Collocation Method Using Pseudospectral Integration Matrix[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2014, 36(3):A907-A929.
[34] Koeppen N R. Well-conditioned Pseudospectral Optimal Control Methods and Their Applications[D]. Monterey: Naval Postgraduate School Dissertation for PhD of Applied Mathematics, 2018:64-68.
[35] Townsend A, Olver S. The Automatic Solution of Partial Differential Equations Using a Global Spectral Method[J]. Journal of Computational Physics, 2015(299):106-123.
[36] Slevinsky R M, Olver S. A Fast and Well-conditioned Spectral Method for Singular Integral Equations[J]. Journal of Computational Physics, 2017(332):290-315.
[37] Hale N, Olver S. A Fast and Spectrally Convergent Algorithm for Rational-order Fractional Integral and Differential Equations[J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2018, 40(4):A2456-A2491.
[38] Cullen A C, Clarke S R. A Fast, Spectrally Accurate Homotopy Based Numerical Method for Solving Nonlinear Differential Equations[J]. Journal of Computational Physics, 2019(385):106-118.
[39] Fortunato D, Hale N, Townsend A. The Ultraspherical Spectral Element Method[J]. Journal of Computational Physics, 2021(436):110087.
[40] Cheng L, Xu K. Solving Time-dependent PDEs with the Ultraspherical Spectral Method[J]. Journal of Scientific Computing, 2023, 96(70).
[41] Bolis A. Fourier Spectral/*hp* Element Method: Investigation of Time-stepping and Parallelisation Strategies[D]. London: Imperial College London for PhD of Aeronautics, 2014:51-53.
[42] 伍卓群. 椭圆与抛物型方程引论[M]. 北京：科学出版社，2003：6-7.