분석적 사고

전종준
서울시립대학교 통계학과

October 1, 2018

Abstract

키워드: 선형대수, 미적분학, 회귀분석, 탐색적 자료분석

1 자료와 집합

2 벡터와 벡터공간

3 행렬과 데이터

4 선형변환과 이차형식

5 미분과 적분

6 벡터미분

6.1 벡터미분과 표기법

입력값이 다차원인 함수의 최대값을 찾거나 최소값을 찾는 문제에서 편미분은 중요한 역할을 한다. 이 최대화/최소화 문제는 다차원 함수의 편미분값이 0(벡터)가 되는 입력값을 찾는 문제에서 출발한다. (일차원 문제의 최대,최소화 문제 생각)

다변량 함수의 편미분을 동시에 표현하는 방법에 대해서 알아보자.

어떤 함수 $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$을 생각해보자. f는 두 개방향의 편미분값을 가진다. 이 편미분값을 벡터를 이용해 표시하면 다음과 같다.

$$(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2})^T$$

우리가 어떤 편미분 벡터를 한번에 다루어야 하는 경우 다음과 같은 표현이 유용할 것이다.

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

(연습) $f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$인 함수에 대해서 편미분벡터를 표시해보아라.

선형함수에 대한 벡터 미분의 연습

- $a = (a_1, \cdots, a_p)^T$ 이고 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_p)^T$ 일 때, $f(\mathbf{x}) = a^T\mathbf{x}$라고 하자.

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_p} \end{pmatrix}$$

- $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T a$라고 하자. 다음 함수에 대한 벡터 미분을 구해보자.

다변량 함수의 이계 도함수: $f(x_1, x_2)$를 생각해보자.

$$\frac{\partial}{\partial x_2}(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}) = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_2 \partial x_1}$$

다변량 함수 $f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$의 이계도함수를 생각해보자.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x})$$

를 i행 j열의 값으로 가지는 $p \times p$ 행렬을 생각해보자.

<u>(연습)</u>

- $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$
- $f(x_1, x_2) = \exp(x_1 - 2x_2)$

헤시안 행렬에 대한 표현을 다음과 같이 한다.

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}^T} f(\mathbf{x})$$

이차형식의 편미분

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\mathbf{x}^T A \mathbf{x}) = (A + A^T)\mathbf{x}$$

다음 이차형식의 함수의 $\mathbf{x}$에 대한 편미분 함수를 구하여라.

$$f(\mathbf{x}) = \|b - A\mathbf{x}\|_2^2$$

- 이차형식 확인

$$f(\mathbf{x}) =$$

- 변수와 상수의 구분
- 벡터 미분의 적용

6.2 로그함수와 지수함수

적분을 통한 (자연)로그함수의 정의

$$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

for $x > 0$.

그림

로그함수를 통한 지수함수의 정의

$$g(x) := \exp(x) = f^{-1}(x)$$

그림

자연대수 $e \in \mathbb{R}$의 정의

$$e = \exp(1) = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

지수함수의 미분

- $\exp(x)' = \exp(x)$
- $\log(x)' = 1/x$

(연습) 다음함수의 편미분을 구하여라.

- $f(x) = \log(1 + 2x)$
- $f(x) = \log(1 + 2\exp(x))$
- $f(x) = \log(1 + 2\exp(3x))$
- $f(x_1, x_2) = \exp(a_1 x_1 + a_2 x_2)$
- $f(\mathbf{x}) = \exp(a^T \mathbf{x})$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p)$
- $f(\mathbf{x}) = \log(1 + \exp(a_1 x_1 + a_2 x_2))$
- $f(\mathbf{x}) = \log(1 + \exp(a^T \mathbf{x}))$ $(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^p)$

(과제1) 이차형식의 최소화 문제를 푸는 방법에 대해 기술하여라. (hist: 벡터 미분, 연립방정식, 역행렬)

(과제2) 기초통계학 교재에서 확률, 확률변수, 결합확률, 기대값에 대한 조사