분석적 사고

전종준
서울시립대학교 통계학과

October 1, 2018

Abstract

키워드: 선형대수, 미적분학, 회귀분석, 탐색적 자료분석

1 자료와 집합

2 벡터와 벡터공간

3 행렬과 데이터

4 선형변환과 이차형식

숙제1/숙제2: 이차형식

5 미분과 적분

5.1 변화율과 변화율의 극한

어떤 함수 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$을 생각한다.

- 어떤 점 $x \in \mathbb{R}$가 주어졌을 때, f의 값(image)는 $f(x)$로 표시한다.
- 어떤 점 $x + h \in \mathbb{R}$ $(h > 0)$ 에 대해서 f의 값은 $f(x + h)$로 표시한다.
- 정의역에 속한 x, $x + h$ 값을 입력값, 그리고 함수의 image인 $f(x)$, $f(x + h)$의 값을 출력값이라고 하자. 입력값이 x에서 $x + h$로 변화하였을때 출력값의 변화율은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

만약에 매우 작은 $h > 0$에 대해 변화율을 알고 싶다면 다음과 같은 값을 계산하면 될 것이다.

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$h < 0$ 인 경우에도 동일하게 써볼 수 있다.

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

실제로 다음 예제에서 수치적으로 위 두 극한 변화율을 계산해 볼 수 있을 것이다.

1. $f(x) = x^2$
2. $f(x) = x^3 - 2x^2$

R을 이용하여 두 극한 변화율을 근사적으로 계산해보자.

미분의 경우 미분의 형태가 많은 경우 잘 알려져 있고, 미분 연산에 대한 법칙들이 잘 알려져 있다.

<u>참고</u>

– 어떤 함수 $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$이 있을 때, $f(x)$와 f의 차이점이 무엇인가?

    * 고정된 x에 대해서 $f(x)$는 함수의 값을 의미한다.
    * f는 함수의 정의역에서 치역으로 함수값이 대응되는 모든 규칙을 의미한다. f의 정의역을 $\mathcal{D}$라고 표현하면 함수는 다음과 같이 표현할 수 있을 것이다.

$$\{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}\}$$

    * $f(x)$에 이미 정의역에서 어떤 원소가 대응되어 있는지 표시되어 있으므로, 흔히 $f(x)$를 함수라고 표시한다. 여기서 x는 모든 $x \in \mathcal{D}$를 의미한다.
- 두 함수 $f = g$라는 의미는 무엇인가?
    * 함수의 정의역이 우선 같아야 할 것이다.
    * 정의역에 있는 모든 대응관계가 같아야 할 것이다. 즉, $f(x) = g(x)$ for all $x \in \mathcal{D}$.
- 결과적으로 함수는 정의역에서 대응시키는 이미지에 의해서 결정된다. 어떤 함수인지 이야기 할 때 그 함수의 이미지 $f(x)$를 정의하는 것으로 충분하다. (다만 특정한 x가 아니라 정의역에 있는 모든 x에 대해서) 이런 이유로 함수를 f라고 표시하기도 하고 그것의 이미지인 $f(x)$로 표현하기도 한다.

<u>새로운 함수 정하기</u>

- 함수 f가 있을 때, 어떤 $a \in \mathbb{R}$에 대해서 $(af)(x)$와 $a \times f(x)$의 차이점은 무엇인가?
    * (af)라는 기호만으로는 이것이 무엇인지 알 수 없다.
    * $a \times f$라고 하면 f의 이미지에 스칼라 a를 곱한 값이라고 볼 수 있다.
    * 만약 (af)를 다음과 같이 정의할 수는 있다. $(af) : \mathcal{D} \mapsto \mathbb{R}$로서, $(af)(x) = af(x)$.
- $(f + g)(x)$와 $f(x) + g(x)$의 비교
- $(fg)(x)$와 $f(x)g(x)$의 비교

<u>미분 법칙</u>

- 선형성 1: $a \in \mathbb{R}$에 대해서 (af) 함수를 생각해보자.

$$(af)(x + h) - (af)(x) = af(x + h) - af(x) = a(f(x + h) - f(x))$$

– 선형성 2:

$$(f+g)(x+h)-(f+g)(x)=f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)$$

– 곱에 대한 미분

$$\begin{aligned}(fg)(x+h)-(fg)(x) &= f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)\\ &= f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)\\ &= f(x+h)(g(x+h)-g(x))+g(x)(f(x+h)-f(x))\end{aligned}$$

– 합성함수의 미분

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x+h)-(f\circ g)(x) &= f(g(x+h))-f(g(x))\\ &= \frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}(g(x+h)-g(x))\end{aligned}$$

Chain Rule

함수 $f\circ g\circ h$ 의 미분, 모든 함수는 실수위에서 정의된 함수

- $f\circ g\circ h(x)=f(g(h(x)))$
- x 를 조금 변화시켰을때 $f(g(h(x)))$함수의 변화는 다음과 같이 일어난다.
  - x변화는 x위에서 함수 h 값의 변화를 일으킨다.
  - $h(x)$의 값 변화는 $h(x)$ 위에서 g의 값의 변화를 일으킨다
  - $g(h(x))$의 값 변화는 $g(h(x))$ 위에서 $f(g(h(x)))$의 값의 변화를 일으킨다.
- 위에서 일어난 일을 차례대로 기술해보자.
  - $h'(x)$
  - $g'(h(x))$
  - $f'(g(h(x)))$
- 전체의 변화율은 세 변화율의 곱으로 표시되므로 x를 변화시켰을때 함수 $f(g(h(x)))$ 의 변화율은

$$f'(g(h(x)))g'(h(x))h'(x)$$

  로 주어진다.

chain rule 연습

-
-
-

5.2 다변수 함수의 미분

어떤 함수 $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$을 생각해보자. $f(x, y)$가 있을 때 이 함수의 변화율에 대해 생각해보자.

- 정의역에서 값의 변화를 어떻게 정의하나?
- 편미분: 어떤 점 (x_0, y_0)에서 x축 방향으로 변화율을 생각해보자.

$$f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)$$

  y축 방향으로 변화율은

$$f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)$$

  로 표현할 수 있다. 위 변화율의 극한을 다음과 같이 표현한다.

$$\left.\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0}, \left.\frac{\partial f(x_0, y)}{\partial y}\right|_{y=y_0}$$

이미지가 다차원인 함수

다변수 함수의 chain rule

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- $g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 다음과 같이 표시한다.
  - $h(x_1, x_2) = (h_1(x_1, x_2), h_2(x_1, x_2))$

5.3 적분

- 구분구적법과 적분 기호

$$\int_{x\in C} f(x)dx$$

  - Summation $\sum$
  - 높이와 밑변의 길이

- 적분의 존재성
  - 유한값을 가지는가?
  - 적분의 정의되는가?

<u>다차원 함수의 적분</u>

$f(x_1, x_2)$ 함수를 C영역에서 적분값을 정의해보자.

- 높이
- 아래 면의 넓이: (x_1, x_2), (x_1+h_1, x_2+h_2)를 대각선 꼭지점으로 갖는 사각형의 면적은?

$$\int_C \underbrace{f(x_1, x_2)}_{\text{height}} \underbrace{dx_1 dx_2}_{dx_1 \times dx_2}$$

$\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_p)^T \in \mathbb{R}^p$라 하고 $f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$인 함수를 생각한다. 여기서

$$f(\mathbf{x}) = \int_C f(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

의 의미를 살펴보자.

5.4 테일러 전개

우리가 잘 풀 수 있는 수치 문제들

- 일원 일차 방정식
- 다원 일차 방정식 (역행렬 구하기)
- 일원 이차함수의 최소/최대값 찾기 $\to$ 일원 일차 방정식

- 이차형식으로 표현된 최소/최대값 찾기 → 다원 일차 방정식

일반적인 함수를 어떤 점 근방에서 우리가 다루기 쉬운 형태로 근사시킬 수 있다. (우리가 잘 풀 수 있는 함수의 형태로 문제를 변형하는 과정임)

<u>테일러 전개</u> 일차원 함수:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + ...$$

<u>테일러 전개의 예</u>

- $f(x) = 1 + 2x$를 $x = 0$ 에서 테일러 전개: (1차, 2차, 3차...)
- $f(x) = 1 + 2x$를 $x = 1$ 에서 테일러 전개:
- $f(x) = 1 + 2x + x^2$을 $x = 1$ 에서 테일러 전개:
- $f(x) = \sin(x)$을 $x = 0$에서 테일러 전개
- $f(x) = \log x$를 $x = 1$에서 테일러 전개
- $f(x) = \exp(x) + 1/x$를 $x = 1$에서 테일러 전개