

Балтийский государственный технический университет «Военмех»

*К.Н. ВОЛКОВ, В.Н. ЕМЕЛЬЯНОВ*

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ В РАСЧЕТАХ  
ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Учебное пособие

Санкт-Петербург  
2005

"Chief outstanding difficulty  
of our subject."  
*H. Lamb, 1916*

"Turbulence is an invention of the Devil  
of the seventh day of creation."  
*P. Bradshaw, 1994*

"Big whirls make little whirls  
Which feed on their velocity,  
Little whirls have smaller ones  
And so on into viscosity."  
*L. Richardson, 1922*

"Большие вихри рождают малые завихрения,  
которые питаются их скоростью.  
Малые завихрения порождают еще меньшие,  
Пока все не погубит вязкость."

"В поток бурлящий бросив взгляд,  
Вихрей увидишь там каскад:  
Меньшой у большего энергию берет,  
Пока мельчайших вязкость не сотрет."  
*А.М. Обухов*

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Основные трудности при расчете турбулентных течений связаны с разработкой общей концепции построения конструктивных численных моделей турбулентности.

В реальных турбулентных потоках спектр изменения волновых чисел (диапазон изменения масштабов турбулентного движения) достигает нескольких порядков, в связи с чем построение общей модели турбулентности не представляется возможным. Один из подходов, позволяющих смягчить остроту этой проблемы, состоит в том, чтобы ограничиться прямым исследованием нестационарных трехмерных турбулентных течений только в масштабах, превышающих некоторый заданный размер. Масштабы вихрей, для которых прямое разрешение оказывается невозможным, моделируются как подсеточная турбулентность при помощи рациональных приближений процессов переноса. Такой подход, известный как моделирование крупных вихрей, представляет собой компромиссный вариант между прямым численным моделированием турбулентности, когда разрешаются все масштабы турбулентного движения, и решением осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса. Метод моделирования крупных вихрей, с одной стороны, позволяет получить более богатую информацию о характеристиках потока, чем решение уравнений Рейнольдса, а с другой, требует намного меньших вычислительных ресурсов, чем прямое численное моделирование турбулентности.

Рассматриваются предположения, лежащие в основе метода моделирования крупных вихрей, вопросы фильтрации уравнений Навье-Стокса, возможные подходы к моделированию слагаемых, связанных с подсеточным переносом импульса, тепла и массы, а также проблемы, возникающие при его численной реализации. Систематизация и обобщение имеющихся данных позволяет сформулировать ряд проблем, решение которых имеет важное значение для развития метода моделирования крупных вихрей, и выделить круг задач, для которых его применение представляется возможным и рациональным.

Электронные материалы являются пособием для курса "Динамика вязкой жидкости, газа и струйных течений".

# ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ

## 1.1. Статистический и феноменологический подходы

Несмотря на интенсивное развитие вычислительной техники и достигнутые успехи как в области построения эффективных численных методов, предназначенных для решения задач механики жидкости и газа тепломассообмена, так и в разработке соответствующего математического обеспечения (генераторы сеток, интерактивные системы ввода данных и системы визуализации результатов расчетов), проблема численного моделирования турбулентности остается одной из наиболее сложных проблем механики жидкости и газа.

Наиболее общим подходом к исследованию турбулентных течений является развиваемый в физике *статистический метод*. В нем применяется вероятностный подход к изучению протекающих процессов, и вводятся средние по большому числу реализаций характеристики. Статистические подходы, перспективные в общем плане для теории турбулентности, пока не привели к результатам, существенным для инженерных приложений. Их внедрение в практику численных расчетов ограничивается сложностью решения соответствующих уравнений [14, 15].

Другим общим подходом к исследованию турбулентных течений является построение *феноменологической макроскопической теории*, основанной на добытых из опыта закономерностях и гипотезах. Макроскопические теории представляют собой мощное средство решения важных практических задач, а полученные с их помощью данные согласуются с результатами измерений.

Для инженерной практики большое значение имеют также метод интегральных соотношений и корреляционные зависимости между интегральными характеристиками потока и критериями, составленными из характерных масштабов задачи. Интегральные уравнения выражают количественные соотношения между характеристиками материальных потоков, поступающих и покидающих систему, со средними параметрами потока. С одной стороны, интегральные соотношения являются следствием фундаментальных законов сохранения, а с другой, используются сравнительно простые математические средства. Основной недостаток *эмпирического подхода* состоит в узких границах применимости полученных корреляционных зависимостей, поскольку они справедливы только для того диапазона параметров, для которого проводились измерения или расчеты.

## 1.2. Вихревая и волновая трактовка турбулентности

При математическом описании турбулентных течений удобно исходить из понимания турбулентности как иерархии вихрей различного масштаба, используя вихревую и волновую трактовку турбулентности [14, 15]. При этом турбулентность можно определить как трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения.

### 1.2.1. Каскадный механизм переноса энергии

Турбулентные вихри (моли, сгустки завихренности) непрерывны и постоянно соприкасаются друг с другом, причем крупные вихри, размеры которых определяются граничными условиями задачи, содержат в себе вихри меньших размеров. Граничные условия потока не влияют непосредственно ни на какие детали поля скорости, за исключением тех, которые характеризуются теми же длинами, что и размеры границ. Крупномасштабные компоненты турбулентности образуются самим средним потоком благодаря работе по преодолению вязких или рейнольдсовых напряжений. Крупномасштабные пульсации по инерции вызывают пульсации более мелкого масштаба и так далее до тех пор, пока масштаб не сделается настолько малым, что вязкие напряжения становятся преобладающими.

Мелкомасштабная турбулентность имеет универсальные характеристики, которые однозначно определяются скоростью диссипации кинетической энергии на единицу массы и кинематической вязкостью (*1-я гипотеза подобия*). Структура мелкомасштабной турбулентности сравнительно слабо зависит от внешних условий. Распределение вероятности корреляций между точками в области течения зависит от скорости диссипации только до тех пор, пока расстояние между точками велико по сравнению с линейным масштабом  $l_k = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$  (*2-я гипотеза подобия*).

Пульсации скорости, соответствующие мелким вихрям, происходят гораздо чаще, чем пульсации, вызванные крупными вихрями, так что увеличение частоты соответствует уменьшению размеров вихрей при данной осредненной скорости.

Диапазон масштабов вихрей, представленных в турбулентном потоке, увеличивается с ростом числа Рейнольдса.

Для примера на рис. 1.1 приведена теневая фотография течения в слое смешения [81]. Пластина, находящаяся за левым краем рисунка, разделяет высокоскоростное течение (сверху) от низкоскоростного (снизу). В данном случае диссипация турбулентной энергии имеет место в диапазоне волновых чисел  $0.1 < \kappa/\kappa_k < 1$ , что соответствует интервалу масштабов длины  $6 < l_t/l_k < 60$  (здесь  $\kappa_k$  — волновое число, соответствующее колмогоровскому масштабу длины  $l_k$ ).

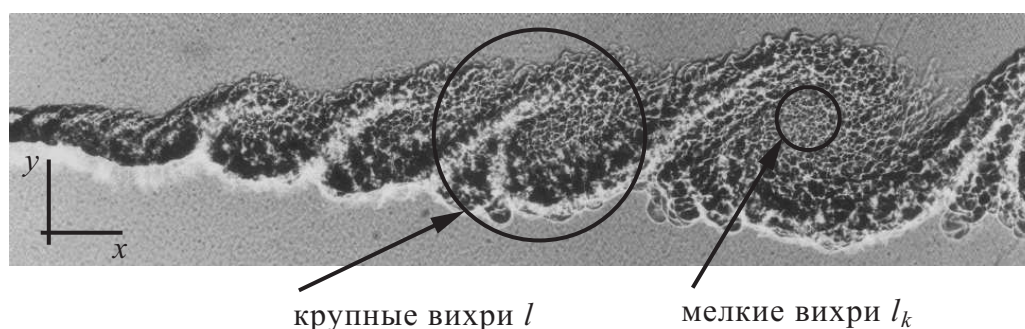


Рис. 1.1. Течение в слое смешения [31]

В ламинарном течении под действием напряжений, обусловленных молекулярной вязкостью, кинетическая энергия среднего течения непосредственно превращается во внутреннюю тепловую энергию.

В турбулентном потоке крупные вихри (размеры самых крупных вихрей сопоставимы с характерным масштабом задачи) отбирают энергию у среднего течения и сохраняют ее некоторое время, пока она не перейдет к мелким вихрям, рассеивающим кинетическую энергию в тепло. Потери и диссипация энергии имеется и в самых крупных масштабах.

Однако с уменьшением масштаба потери энергии увеличиваются, так что линейный параметр  $l_k$ , соответствующий наибольшей диссипации энергии, частично зависит от размеров границ.

Основной физический механизм, который отвечает за распределение энергии турбулентного потока по широкому диапазону масштабов (волновых чисел или длин волн), связан с растяжением вихрей. В процессе растяжения вихрей их кинетическая энергия вращения увеличивается, а масштаб уменьшается. Увеличение местных скоростей деформаций стимулирует растяжение других жидких элементов, запуская таким образом *каскадный процесс интенсификации движения* с постепенной редукцией масштабов вихрей, подвергнутых растяжению.

В турбулентном течении вихри отбирают энергию из среднего течения и сохраняют ее некоторое время, пока она не перейдет к мелким диссипативным вихрям. Кинетическая энергия турбулентности, приходящаяся на единицу объема, сосредоточена в вихрях, создающих напряжения Рейнольдса, и разделена прямо пропорционально создаваемыми ими напряжениями. Более мелкие вихри значительно слабее вихрей, создающих основную часть напряжений Рейнольдса. Размер диссипативных вихрей зависит от вязкости, а также скорости течения.

### 1.2.2. Растяжение вихрей и вихревые нити

Движение в турбулентных вихрях имеет как поступательную, так и вращательную составляющие. В дополнение к вращению вокруг оси  $z$  элемент жидкости растягивается в направлении оси  $z$  со скоростью линейной деформации  $\partial w / \partial z$ , поэтому он удлиняется в этом направлении, а его поперечное сечение уменьшается. В процессе растяжения кинетическая энергия вращения увеличивается, а масштаб движения в плоскости  $xy$  уменьшается. Растяжение в направлении оси  $z$  интенсифицирует движение в направлениях осей  $x$  и  $y$ , что, в свою очередь, вызывает растяжение меньшего масштаба вдоль осей  $x$  и  $y$  и интенсифицирует движение в направлениях осей  $y$ ,  $z$  и  $z$ ,  $x$  соответственно. После нескольких циклов имеется примерно одинаковое число растяжений в каждом из направлений.

Таким образом, мелкомасштабные вихри в процессе турбулентного движения не сохраняют ориентацию средней скорости деформации. Энергия турбулентного движения последовательно передается к пульсациям все меньшего и меньшего масштаба и, в конечном счете, рассеивается вязкостью во внутреннюю тепловую энергию. Однако вязкость не играет сколько-нибудь значительной роли в процессе растяжения вихрей.

Можно предположить, что любое завихренное течение состоит из большого числа бесконечно тонких *вихревых нитей*. Тогда турбулентность можно представить как переплетение вихревых нитей.

Турбулентное движение всегда имеет все три составляющие скорости, даже если у средней скорости потока имеется только одна или две составляющие. В противном случае, если пульсационная составляющая скорости в каком-либо координатном направлении всюду была бы равна нулю, то вихревые нити располагались бы только в этом направлении, и тогда не происходило бы растяжения вихрей, а энергия не передавалась бы пульсациям с меньшим масштабом. В турбулентном потоке размывание вихрей вследствие вязкости ничтожно, за исключением вихрей меньшего масштаба, в которых диссипирует энергия, переходящая от вихрей большего масштаба. Пульсации же давления в несжимаемой жидкости непосредственно не оказывают влияния на завихренность.

Вихревые нити движутся вместе с жидкостью. Их преимущественное растяжение в некотором направлении может создать поток завихренности или энергии турбулентности

относительно жидкости. Скорость, с которой энергия переносится относительно жидкости вследствие растяжения вихревых нитей, имеет порядок пульсаций скорости и в типичных турбулентных течениях составляет довольно малую долю от местной средней скорости.

### 1.2.3. Масштабы турбулентного движения

Линейный и временной масштабы энергосодержащих вихрей определяются локальными характеристиками турбулентного потока — пространственным и временным масштабами

$$l_t \sim \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}, \quad \tau_t \sim \frac{l_t}{u'} \sim \frac{l_t}{k^{1/2}}.$$

Здесь  $k$  и  $\varepsilon$  — кинетическая энергия турбулентных пульсаций и скорость ее диссипации соответственно.

Наименьшие масштабы турбулентного движения намного превышают среднюю длину молекулярного пробега и соответствуют колмогоровским масштабам длины, времени и скорости [14]

$$l_k = (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}, \quad \tau_k = (\nu/\varepsilon)^{1/2}, \quad v_k = (\nu\varepsilon)^{1/4}.$$

При этом  $\text{Re} = v_k l_k / \nu \sim 1$ , поэтому в мельчайших вихрях имеет место баланс инерционных и вязких эффектов.

Интегральный масштаб длины, соответствующий размеру энергосодержащих вихрей, связан с колмогоровским масштабом при помощи соотношения

$$\frac{l_t}{l_k} \sim \text{Re}_t^{3/4},$$

где  $\text{Re}_t = l_t k^{1/2} / \nu$ . Например, для турбулентного пограничного слоя  $\text{Re}_t > 10^4$  и  $l_t \sim 0.1\delta$ , поэтому вне вязкой пристеночной зоны  $l_k \sim 10^{-4}\delta$ .

В теории турбулентности широко используется также *тейлоровский микромасштаб* [14, 15]

$$\lambda = \frac{\langle u'^3 \rangle}{\langle (\partial u' / \partial x)^2 \rangle}.$$

Для локально изотропной турбулентности (турбулентности, в которой малые вихри статистически изотропны, даже если крупные вихри не являются таковыми), имеет место соотношение

$$\varepsilon = 15\nu \left\langle \left( \frac{\partial u'}{\partial x} \right)^2 \right\rangle = 15\nu \frac{\langle u'^2 \rangle}{\lambda^2}.$$

Предполагая, что  $k \sim \langle u'^2 \rangle$ , получим

$$\frac{l_t}{\lambda} \sim \text{Re}_t^{1/2}, \quad \lambda \sim (l_t l_k^2)^{1/3}.$$

При высоких числах Рейнольдса существует четкое разделение линейных масштабов

$$l_k \ll \lambda \ll l_t.$$

Тейлоровский микромасштаб представляет собой комбинированную характеристику, зависящую как от свойств крупномасштабных, так и мелкомасштабных вихрей. В отличие от  $l_k$  и  $l_t$ , масштаб  $\lambda$  не может быть идентифицирован любым значащим диапазоном

размеров вихрей. Несмотря на то, что  $\lambda$  не является очень значимым масштабом длины, результаты численного моделирования часто выражаются в терминах числа Рейнольдса, построенного с помощью тейлоровского микромасштаба

$$\text{Re}_\lambda = \frac{\lambda k^{1/2}}{\nu}.$$

Простая подстановка показывает, что

$$\text{Re}_\lambda = \left( \frac{l_\varepsilon k^{1/2}}{\nu} \right)^{1/2},$$

где  $l_\varepsilon = k^{3/2}/\varepsilon$ . При этом имеют место следующие соотношения

$$\text{Re}_\lambda \sim \text{Re}_t^{-1/2}, \quad l_t \sim l_\varepsilon, \quad \tau_t \sim \frac{l_\varepsilon}{k^{1/2}}.$$

Величина  $l_\varepsilon$  представляет собой масштаб длины диссипации (характерный масштаб длины сдвигодержавшего движения), который неявно используется во всех двухпараметрических моделях турбулентности.

#### 1.2.4. Корреляционные функции и спектр

Представим турбулентное поле скалярной величины  $f(\mathbf{r}, t)$  при помощи интеграла Фурье

$$f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\boldsymbol{\kappa}, t) \exp(i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}) d\boldsymbol{\kappa}.$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\hat{f}(\boldsymbol{\kappa}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{r}, t) \exp(-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$

Здесь  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор,  $\boldsymbol{\kappa}$  — волновой вектор.

Считая поле турбулентности стационарным, определим трехмерный энергетический спектр случайного поля

$$F(\boldsymbol{\kappa}) = \left\langle \left| \hat{f}(\boldsymbol{\kappa}) \right|^2 \right\rangle.$$

Пространственная корреляционная функция представляет собой корреляцию функции  $f$  для двух точек, смещенных относительно друг друга на расстояние  $\mathbf{r}$  и приблизительно равняется временной корреляции при задержке времени, равной  $\tau = r/\langle u \rangle$ . Пространственная корреляция имеет вид

$$R(\mathbf{r}) = \langle f(\mathbf{x}) f(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle$$

Трехмерный спектр связан с пространственной корреляционной функцией (*спектр по волновым числам*) при помощи теоремы Хинчина

$$F(\boldsymbol{\kappa}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\mathbf{r}) \exp(-i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}) d\mathbf{r}.$$



Обратное преобразование имеет вид

$$R(\mathbf{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\boldsymbol{\kappa}) \exp(i\boldsymbol{\kappa}\mathbf{r}) d\boldsymbol{\kappa}.$$

Практическое значение полученной связи состоит в том, что в экспериментальных или теоретических исследованиях можно изучать либо спектр, либо корреляцию, поскольку в них содержится одинаковая информация. На практике можно сравнительно легко измерить частотный спектр или временную корреляцию, но невозможно непосредственно измерить спектр по волновым числам, представляющий собой преобразование Фурье по  $r$  от пространственной корреляции.

Корреляция для точек, расстояние между которыми равняется  $r$ , представляет собой меру интенсивности вихрей, размер которых в направлении вектора  $\mathbf{r}$  больше его абсолютной величины (мелкие вихри не вносят вклада в корреляцию). Корреляция значений одной и той же пульсационной величины в два различных момента времени в одной и той же точке пространства, представляет интерес постольку, поскольку при малых величинах турбулентных пульсаций скорости по сравнению со средней скоростью потока  $u'/\langle u \rangle \ll 1$  форма вихрей существенно не изменяется после прохождения окрестности заданной точки. В этом случае временная корреляция, соответствующая задержке времени  $\tau$ , совпадает с пространственной корреляцией для рассматриваемой точки и точки, сдвинутой на расстояние  $\langle u \rangle \tau$  в направлении оси  $r$ . Временная корреляция всегда является четной функцией, если турбулентное течение статистически стационарно. Пространственная корреляция может быть несимметричной. Несимметрия корреляции означает, что турбулентность существенно изменяется на расстоянии.

При исследовании сноса вихрей осредненным потоком используются смешанные корреляции по пространству и времени. Метод исследования развития вихрей, переносимых средним течением, состоит в сравнении пространственно-временных корреляций, соответствующих запаздыванию во времени  $\tau$  и сдвигу по пространству  $\mathbf{r} + \mathbf{v}\tau$  в направлении средней скорости, с исходной пространственной корреляцией. В действительности пространственно-временная корреляция оказывается слабее пространственной, поскольку вихри изменяются непрерывно.

В теории турбулентности используется энергетический спектр  $E(\kappa)$ , который характеризует энергию всех гармоник с заданным модулем волнового вектора независимо от его направления

$$E(\kappa) = \int_{|\boldsymbol{\kappa}|} F(\boldsymbol{\kappa}) d\boldsymbol{\kappa}.$$

Используя сферическую систему координат, получим

$$E(\kappa) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\boldsymbol{\kappa}) \kappa^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Для изотропной турбулентности  $F(\boldsymbol{\kappa}) = F(\kappa)$ , поэтому

$$E(\kappa) = 4\pi\kappa^2 F(\kappa).$$

Если для однородного изотропного поля скалярной величины  $E(\kappa) \sim \kappa^a$ , то в трехмерном случае  $F(\kappa) \sim \kappa^{a-2}$ , а в одномерном  $F(\kappa) \sim \kappa^a$ .

Пусть  $E(\kappa)d\kappa$  представляет собой кинетическую энергию турбулентности, содержащуюся между волновыми числами  $\kappa$  и  $\kappa + d\kappa$ . Тогда спектральное представление кинетической энергии турбулентности имеет вид

$$k = \frac{1}{2} \langle v'_i v'_i \rangle = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa.$$

Здесь  $E(\kappa)$  — спектральная плотность.

### 1.2.5. Спектральное распределение турбулентной энергии

Спектральное представление свойств турбулентного потока рассматривается как разложение по волновым числам. Величину, обратную волновому числу, можно трактовать как размер турбулентного моля, причем малые волновые числа ассоциируются с размерами крупных вихрей, и наоборот.

При высоких числах Рейнольдса всю область турбулентных пульсаций принято разделять на три интервала (рис. 1.2), каждый из которых характеризуется некоторым размером турбулентных вихрей. Несмотря на то, что границы этих интервалов весьма условны, такое разделение спектра турбулентных пульсаций имеет физический смысл.

1. Область энергосодержащих вихрей (*область энергии*), размеры которых  $l_1$  соизмеримы с размерами течения в целом. В данной области сосредоточена основная доля (примерно 80–90%) полной энергии

$$k = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa = \int_0^{\kappa_m} E(\kappa) d\kappa.$$

Крупномасштабная турбулентность определяется, в основном, силами инерционной природы. Силы вязкости играют здесь второстепенную роль, и в ряде случаев ими можно пренебречь.

2. Область диссипативных вихрей, имеющих размер  $l_2$ , в которой осуществляется диссипация турбулентной энергии в тепло вследствие молекулярной вязкости (*область диссипации*). В данной области сосредоточена основная доля полной диссипации

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^\infty \kappa^2 E(\kappa) d\kappa = 2\nu \int_{\kappa_m}^\infty \kappa^2 E(\kappa) d\kappa.$$

Здесь  $\kappa_m$  — промежуточное значение волнового числа, лежащего за интервалом энергии и перед интервалом диссипации (в инерционном интервале).

3. При высоких числах Рейнольдса между областями 1 и 2 находится так называемая *промежуточная* или *инерционная область*, характеризуемая масштабом  $l_2 < l < l_1$ , в которой турбулентность, как правило, однородна и изотропна, а спектральная плотность турбулентной энергии связана с частотой пульсаций степенным законом Колмогорова-Обухова [15]

$$E(\kappa) = C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}.$$

Здесь  $C_K$  — константа Колмогорова.

Из анализа размерностей для несжимаемой жидкости следует, что

$$E(\kappa) = C \kappa^\beta \varepsilon^\alpha.$$

Поскольку  $\kappa = [L]^{-1}$ ,  $\varepsilon = [L]^2[T]^{-3}$ ,  $E(\kappa) = [L]^3[T]^{-2}$ , то

$$[L]^{2\alpha-\beta}[T]^{-3\alpha} = [L]^3[T]^{-2}.$$

Решение дает  $\alpha = 2/3$ ,  $\beta = -5/3$ .

Для сжимаемой жидкости  $E(\kappa) \sim \kappa^{-2}$ .

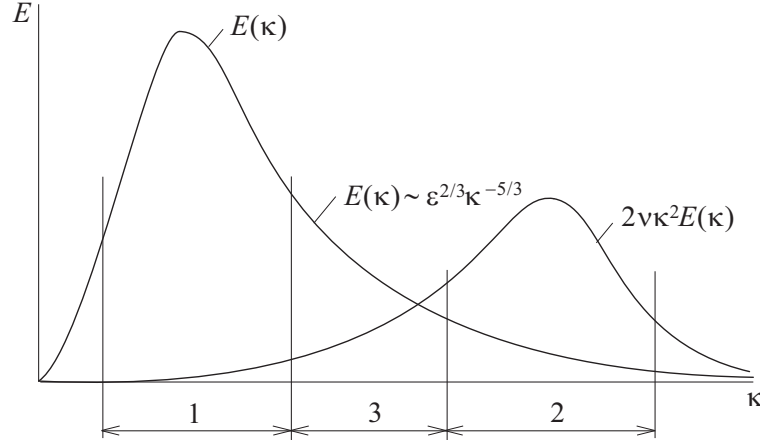


Рис. 1.2. Спектральное распределение кинетической энергии турбулентности (1 — интервал энергии, 2 — интервал диссипации, 3 — инерционный интервал)

В инерционной области энергия не продуцируется и не диссипирует, а только передается к бóльшим волновым числам.

В теоретических исследованиях для выражения спектральной плотности кинетической энергии турбулентности в явном виде используется соотношение Кармана

$$E(\kappa) = \frac{a\kappa^4}{(b + \kappa^2)^{17/6}},$$

где  $a = 2.682$ ,  $b = 0.417$ . Константы  $a$  и  $b$  выбираются таким образом, чтобы  $E(1) = 1$  (этого всегда можно добиться при помощи подходящего выбора масштабов длины и времени). При  $\kappa \rightarrow \infty$  соотношение Кармана сводится к закону Колмогорова  $E(\kappa) \sim \kappa^{-5/3}$ , а при  $\kappa \rightarrow 0$  оно приводит к закону  $E(\kappa) \sim \kappa^4$ .

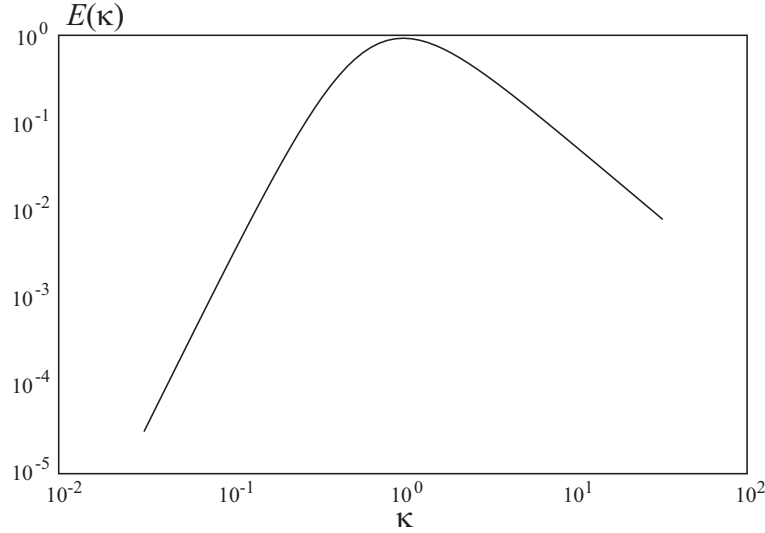


Рис. 1.3. Спектральная плотность кинетической энергии турбулентности

При больших волновых числах  $\kappa/\kappa_k > 10^{-2}$ , где  $\kappa_k = (\varepsilon/\nu^3)^{1/4}$  представляет собой волновое число, соответствующее колмогоровскому масштабу длины, структура мелкомасштабной составляющей турбулентности почти универсальна [3, 14]. Простая оценка размеров вихревых образований показывает, что  $l_2/l_1 \sim \text{Re}_t^{-3/4}$ .

Кинетическая энергия турбулентности черпается из крупномасштабного движения и постепенно передается во все меньшие масштабы, пока не рассеивается в тепло в вязком интервале. Определим порядок величины диссипации энергии при турбулентном движении

$$\varepsilon \sim \nu_t \left( \frac{\Delta u}{l_1} \right)^2, \quad \nu_t \sim l_1 \Delta u.$$

Здесь  $\Delta u$  — изменение средней скорости на протяжении характерного размера крупномасштабных вихрей  $l_1$ .

Спектральный интервал энергии и интервал диссипации сильно разнесены по частотам, что подтверждает приемлемость гипотезы о статистической независимости крупно- и мелкомасштабных вихревых структур [3]. Энергия длинноволновых возмущений (с малыми значениями  $\kappa$  или большими длинами волн  $\lambda = 2\pi/\kappa$ ) убывает под действием вязкости гораздо медленнее, чем энергия коротковолновых возмущений.

### 1.3. Характеристика феноменологического подхода

В отличие от ламинарных течений жидкости и газа, расчет которых благодаря достигнутым успехам, стал во многом рутинной процедурой, надежное предсказание характеристик сложных турбулентных течений по ряду причин (трехмерный характер течения, стохастическая природа и широкий пространственно-временной спектр турбулентности) остается скорее искусством, чем строгой наукой.

Исходная предпосылка математического моделирования турбулентных течений в рамках феноменологического подхода состоит в предположении о приемлемости уравнений Навье-Стокса для интерпретации турбулентных течений и предсказания их мгновенных характеристик.

Среди основных методов численного моделирования трехмерных турбулентных течений необходимо выделить прямое численное моделирование (Direct Numerical Simulation, DNS), моделирование крупных вихрей (Large Eddy Simulation, LES) и решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (Reynolds Averaged Navier-Stokes equations, RANS). Имеются также различные промежуточные подходы, сочетающие в себе те или иные черты RANS, LES и DNS, например, метод моделирования отсоединенных вихрей (Detached Eddy Simulation, DES), и ряд других, не имеющих должного физического обоснования и потому не получивших широкого распространения.

Схематически классификация методов моделирования турбулентных течений, основанных на использовании уравнений Навье-Стокса, приведена на рис. 1.4.

*Прямое численное моделирование* (DNS) предполагает численное решение полных нестационарных трехмерных уравнений Навье-Стокса. При таком подходе разрешаются все масштабы турбулентного движения. Для использования DNS требуются мощные вычислительные ресурсы, а возможности его применения ограничиваются расчетами течений с простой геометрией и малыми числами Рейнольдса.

Использование *осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса* (RANS) требует намного меньших вычислительных ресурсов. Данный подход успешно применяется в практических расчетах. Однако используемые для замыкания уравнений Рейнольдса модели турбулентности не обладают приемлемой универсальностью, а потому не могут применяться для решения широкого круга прикладных задач.

Метод *моделирования крупных вихрей* (LES) является компромиссным вариантом между DNS и решением RANS. Данный подход ограничивается исследованием течений только в масштабах, превышающих некоторую заданную величину. В методе LES осуществляется решение фильтрованных по пространству уравнений Навье-Стокса, и разрешается движение только крупных вихрей. Мелкие вихри имеют более универсальную структуру и моделируются при помощи *моделей подсеточного масштаба* (Subgrid Scale Model, SGS), построенных на основе концепции вихревой вязкости или других рациональных приближений процессов переноса.

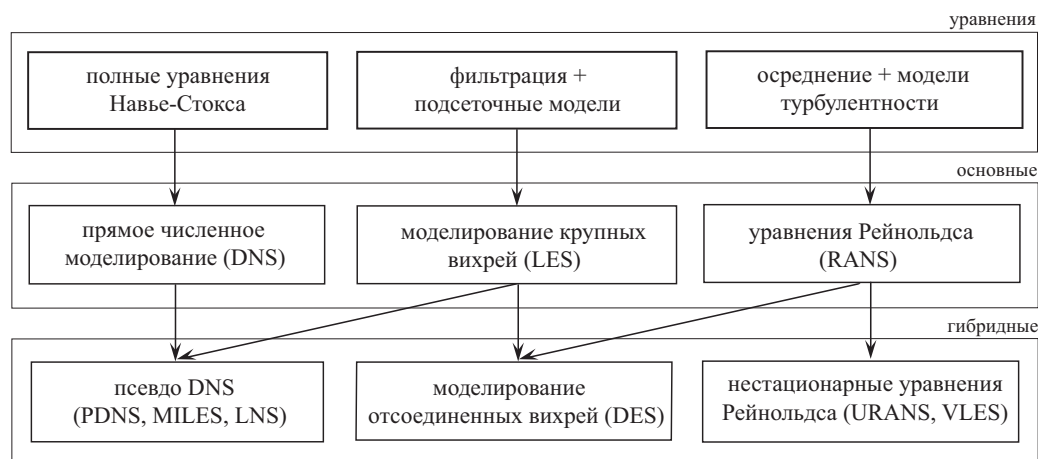


Рис. 1.4. Методы моделирования турбулентных течений, основанные на использовании уравнений Навье-Стокса

Метод *моделирования отсоединенных вихрей* (DES) представляет собой гибрид традиционных уравнений Рейнольдса, которые используются в пристеночной области (например, в области присоединенного пограничного слоя), и метода моделирования крупных вихрей, применяемого в отрывных зонах с характерными для них крупномасштабными вихревыми структурами.

Наряду с DNS и LES, находит применение метод *псевдо- или квазипрямого численного моделирования* (Pseudo или Quasi DNS, PDNS или QDNS, иногда используется название MILES — Monotonically Integrated LES), в котором подсеточные модели не используются, а диссипативные процессы вводятся при помощи специально сконструированных разностных схем.

Подход, в котором решаются нестационарные уравнения Рейнольдса (Unsteady RANS, URANS), может рассматриваться как обобщение метода RANS. Именно URANS или, что то же самое, упрощенный метод моделирования крупных вихрей (Very Large Eddy Simulation, VLES) заявляется во многих коммерческих вычислительных пакетах как LES.

Трактовку различных подходов к моделированию турбулентности удобно пояснить графически, используя условное распределение кинетической энергии турбулентности по волновым числам (рис. 1.5).

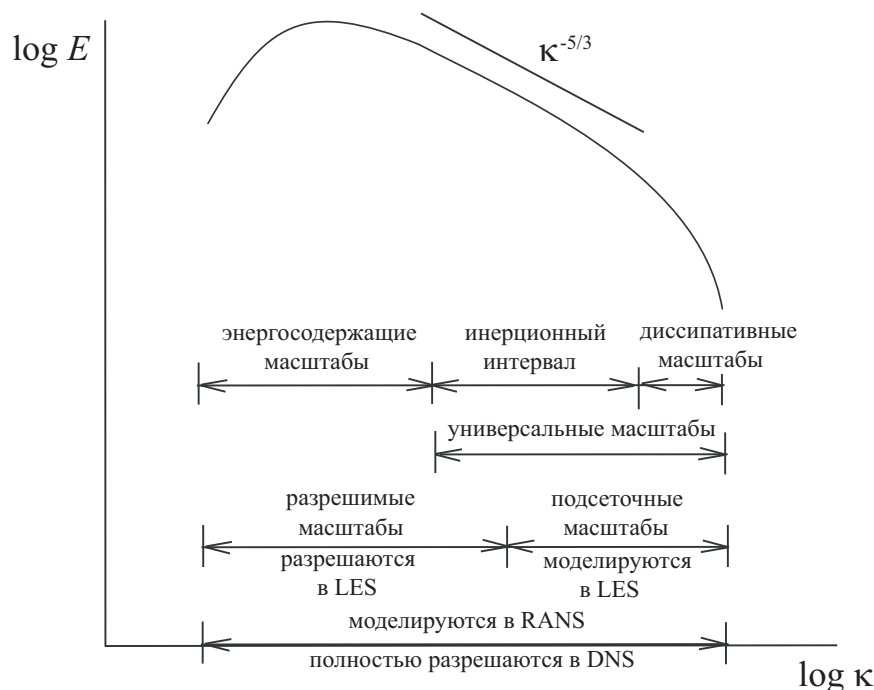


Рис. 1.5. Спектр кинетической энергии турбулентности и трактовка различных подходов к моделированию турбулентных течений

Области приложения перечисленных подходов вполне определились, а полученные результаты позволяют дать оценку границ применимости, возможностей и перспективности каждого из них, а также оценку вычислительных ресурсов, необходимых для реализации того или иного подхода.

## 1.4. Прямое численное моделирование

*Прямое численное моделирование* (DNS) предполагает решение полных нестационарных трехмерных уравнений Навье-Стокса, что при отсутствии численных и другого рода ошибок позволяет получить мгновенные характеристики турбулентного потока.

С практической точки зрения, статистика, полученная из результатов DNS, может быть использована для тестирования моделей замыкания инженерного уровня сложности, развития методов управления характеристиками турбулентных потоков, например,

методов снижения сопротивления [94], исследования ламинарно-турбулентного перехода, а также понимания структуры и процессов турбулентного переноса. Принимая во внимание ограниченные возможности измерительной техники, DNS часто рассматривается как дополнительный источник экспериментальных данных (например, таких характеристик течения как пульсации давления, завихренность и скорость диссипации турбулентной энергии) и применяется для визуализации мгновенной картины течения [74]. Перспективным направлением представляется применение DNS для исследования химически реагирующих течений высокотемпературных газовых смесей, что позволяет, в частности, рассчитать флуктуации температуры, которые оказывают существенное влияние на скорость образования оксидов азота  $NO_x$  в камерах сгорания.

Препятствия к широкому использованию DNS связаны с высокими требованиями к используемой разностной схеме, удовлетворением начальных и граничных условий, а также ограниченными ресурсами вычислительной техники. Расчетная область при этом должна быть достаточно протяженной, чтобы вместить наибольшие масштабы турбулентности, а шаг интегрирования по времени должен иметь порядок колмогоровского масштаба времени. Необходимо также использовать такую разностную сетку, которая позволит разрешить наименьшие вихри турбулентного потока, имеющие размеры порядка колмогоровского масштаба длины. Следует учитывать также другие характерные линейные масштабы задачи. В частности, для течения в канале характерным линейным размером служит величина  $\nu/u_\tau^2$ .

Приведем оценки для необходимого числа узлов разностной сетки и числа шагов по времени

$$N_{\Delta_i} = \frac{L_i}{\Delta x_i}, \quad N_T = \frac{T}{\Delta t}.$$

При этом пространственный шаг сетки и шаг интегрирования по времени должны удовлетворять следующим условиям

$$\Delta x_i \sim l_k, \quad \Delta t \sim \tau_k.$$

Здесь  $L$  — размер расчетной области,  $T$  — интервал интегрирования по времени. Можно считать, что  $L_i \sim l$  и  $T \sim \tau$ , где  $l_t$  и  $\tau_t$  — характерные масштабы энергосодержащих вихрей.

Учитывая соотношения между характерными масштабами энергосодержащих вихрей и характерными масштабами вихрей, рассеивающих кинетическую энергию, получим следующие оценки [2, 114]

$$N_{\Delta_i} \sim \frac{l_t}{l_k} \sim \text{Re}_t^{3/4}, \quad N_T \sim \frac{\tau_t}{\tau_k} \sim \text{Re}_t^{1/2}.$$

Предполагая, что затраты процессорного времени пропорциональны числу узлов сетки, общие затраты на реализацию вычислительной процедуры оцениваются как

$$(N_{\Delta_i})^3 \cdot N_T \sim \text{Re}_t^{11/4}.$$

Для пристеночных течений зависимость стоимости вычислительной процедуры от турбулентного числа Рейнольдса еще жестче. Во внутренней (вязкой) области пограничного слоя в качестве масштабов длины и времени используются величины

$$\Delta x_i = \Delta x_i^+ \frac{\nu}{u_\tau}, \quad \Delta t = \frac{\Delta x_i}{u_\tau}.$$



В пограничном слое или при течении в трубе

$$u_\tau = \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2} \sim U C_f^{1/2}, \quad C_f = \frac{2\tau_w}{\rho U^2}.$$

Здесь  $U$  — масштаб скорости (скорость на внешней границе пограничного слоя или скорость на оси симметрии трубы),  $C_f$  — коэффициент трения. Зависимость коэффициента трения от турбулентного числа Рейнольдса можно представить в виде

$$C_f \sim \text{Re}_t^{-\alpha},$$

причем  $\alpha = 0.2 \dots 0.25$ . Для оценки количества узлов сетки и числа шагов по времени имеем следующие оценки

$$N_{\Delta_i} \sim \frac{l_t}{\Delta x_i} \sim \text{Re}_t^{1-\alpha/2}, \quad N_T \sim \frac{l_t}{\Delta x_i} \frac{u_\tau}{U} \sim \text{Re}_t^{1-\alpha}.$$

Общие затраты на расчет характеристик течения в пристеночной области оцениваются как

$$(N_{\Delta_i})^3 \cdot N_T \sim \text{Re}_t^{3.5}.$$

В частности, для полностью развитого турбулентного течения в круглой трубе скорость диссипации кинетической энергии турбулентности достигает максимума на стенке и имеет порядок  $\varepsilon \sim 0.2 u_\tau^4 / \nu$ . Коэффициент сопротивления вычисляется по формуле [22]

$$\lambda = 0.3164 \text{Re}^{-1/4} = 8 \left( \frac{u_\tau}{u_m} \right)^2 = 8 \left( \frac{\text{Re}_\tau}{\text{Re}} \right)^2,$$

где  $u_m$  — средняя скорость в поперечном сечении. Предположим, что шаг разностной сетки по радиальной координате равняется

$$\Delta r = \frac{2\nu}{u_m}.$$

Тогда получим

$$\frac{R}{2\nu/u_\tau} = \frac{\text{Re}_\tau}{4} = 0.049718 \text{Re}^{7/8}.$$

Оценка числа узлов разностной сетки для расчета течения в круглой трубе радиусом  $R$  и длиной  $10R$  имеет вид

$$N = \frac{5\pi}{256} \text{Re}_\tau^3 = 0.0004826 \text{Re}^{21/8}.$$

При  $\text{Re}_\tau = 360$  получим, что  $N = 2.86 \cdot 10^6$ .

Во внешней области пограничного слоя турбулентные вихри имеют масштаб порядка толщины пограничного слоя  $\delta \sim \text{Re}^{-0.2}$ , где  $\text{Re} = V_\infty L / \nu$ . Тогда

$$N_{\Delta_i} \sim \frac{L_i}{\delta}.$$

В результате, имеет место следующая оценка

$$N_{\Delta_1} \sim N_{\Delta_2} \sim \text{Re}^{0.2}, \quad N_{\Delta_3} \sim \text{Re}^0.$$



На практике шаг интегрирования по времени выбирается не только из физических соображений, но также и из соображений устойчивости вычислительной процедуры

$$\Delta t = \min \{ \tau, \Delta t_v, \Delta t_c \}.$$

Здесь  $\tau$  — временной масштаб наименьших разрешимых вихрей турбулентного движения. Величины  $\Delta t_v$  и  $\Delta t_c$  выбираются исходя из оценки диффузионных и конвективных потоков

$$\Delta t_v = \frac{\sigma \Delta x^2}{\nu}, \quad \Delta t_c = \text{CFL} \frac{\Delta x}{u}.$$

Значение максимально возможного числа Куранта CFL и параметра  $\sigma$  зависят от разностной схемы.

Численные расчеты показывают, что необходимое пространственное разрешение (размеры разрешимых масштабов) зависит от энергетического спектра турбулентности и обычно превышает колмогоровский масштаб длины, например, для канала  $\Delta x \simeq 15l_k$  [74].

В качестве турбулентного числа Рейнольдса обычно берется величина  $\text{Re}_\lambda = u'\lambda/\nu$ , где  $\lambda$  — тейлоровский микромасштаб. Величина  $\text{Re}_\lambda$  может быть определена экспериментально, в частности, для крылового профиля  $\text{Re}_\lambda \sim 3000$  (J. Jimenez, 2000), а для атмосферного пограничного слоя  $\text{Re}_\lambda \sim 10000$ . Упрощенно можно считать, что  $\text{Re}_\lambda$  составляет приблизительно 0.01 от макроскопического числа Рейнольдса [88].

Для продвижения решения во времени и представления пространственных производных на мельчайших масштабах на практике используются конечно-разностные схемы высокого порядка (выше 2-го), а также спектральные и псевдоспектральные методы. В отличие от средней скорости, точность предсказания флуктуаций скорости сильно зависит от порядка разностной схемы [30]. Ограничения, накладываемые дискретизацией по времени, обусловлены, в основном, диссипативными масштабами, а не вихрями, содержащими энергию турбулентных пульсаций.

Вычислительная область размером  $0.1 \times 0.1 \text{ м}^2$  содержит вихри с размерами от 10 до 100 мкм, которые отвечают частотам порядка 10 кГц. Следовательно, временное разрешение вихрей указанного масштаба требует шага по времени порядка 100 мкс, а их пространственное разрешение — сетки, содержащей от  $10^9$  до  $10^{12}$  узлов. Для моделирования турбулентного течения при  $\text{Re} = 5 \cdot 10^5$  необходимо использовать компьютер, превосходящий по производительности в  $10^6$  раз имеющиеся суперкомпьютеры (табл. 1).

Таблица 1

Требования к вычислительным ресурсам при использовании DNS

Re	$6.6 \cdot 10^3$	$2.0 \cdot 10^4$	$1.0 \cdot 10^5$	$1.0 \cdot 10^6$
размер сетки	$2 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^8$	$1.5 \cdot 10^9$
время (150 MFlops)	37 ч	740 ч	6.5 лет	3000 лет
время (1 TFlops)	20 с	400 с	8.3 ч	4000 ч

Для достижения статистически стационарной картины течения требуются десятки и сотни часов процессорного времени (результаты осредняются по времени, пространству или ансамблю реализаций). Использование неструктурированных сеток также вносит существенный вклад в затраты компьютерной памяти и процессорного времени.

Перечисленные требования делают расчеты с использованием DNS трудно реализуемыми на практике (за исключением малых чисел Рейнольдса и геометрически простых течений).

## 1.5. Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса

В инженерных приложениях широко используются математические модели, основанные на численном решении *осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса* (RANS). При минимальной сложности RANS схватывает физическую сущность рассматриваемых процессов.

### 1.5.1. Классификация моделей турбулентности

При использовании уравнений Рейнольдса основной интерес проявляется к динамике крупномасштабных вихрей, ответственных за переносные свойства турбулентных течений. При замыкании уравнений Рейнольдса рассматриваются масштабы длины, типичные для энергосодержащих вихрей, в которых  $Re_t \gg 1$  (за исключением пристеночных областей). Для учета пристеночного влияния диссипирующих вихрей и энергосодержащих вихрей при  $Re_t \sim 1$  используются демпфирующие функции.

Функции, описывающие течение, раскладываются на среднюю и пульсационную составляющие (О. Reynolds, 1894). После подстановки в уравнения Навье-Стокса получается система уравнений, идентичная по форме исходной системе, за исключением членов конвективных напряжений, которые возникают из осредненных флуктуаций скорости. Для замыкания полученной системы уравнений необходимо получить соотношения между конвективными напряжениями и полем средней скорости.

Для замыкания уравнений Рейнольдса используется совокупность полуэмпирических соотношений, в том числе и дифференциальных уравнений, называемых *моделью турбулентности*.

Вопросы замыкания решаются на различном уровне сложности [2, 14, 114]. Модели турбулентности обычно классифицируются по числу дифференциальных уравнений, вводимых в дополнение к исходной системе уравнений движения и теплопереноса. Увеличение числа уравнений требует привлечения дополнительной информации полуэмпирического характера, что снижает универсальность модели. Классификацию моделей турбулентности поясняет рис. 1.6.

### 1.5.2. Концепция вихревой вязкости

Многие модели основаны на *концепции вихревой вязкости* (Eddy Viscosity Model, EVM). Согласно *гипотезе Буссинеска* (J. Boussinesq, 1877), турбулентные напряжения вычисляются как произведение турбулентной вязкости на компоненты тензора осредненных скоростей деформаций

$$-\langle v'_i v'_j \rangle = \nu_t \left( \frac{\partial \langle v_i \rangle}{\partial x_j} + \frac{\partial \langle v_j \rangle}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}.$$

Турбулентный тепловой поток записывается в форме закона Фурье

$$-\langle v'_i T' \rangle = \frac{\nu_t}{Pr_t} \frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_i}.$$

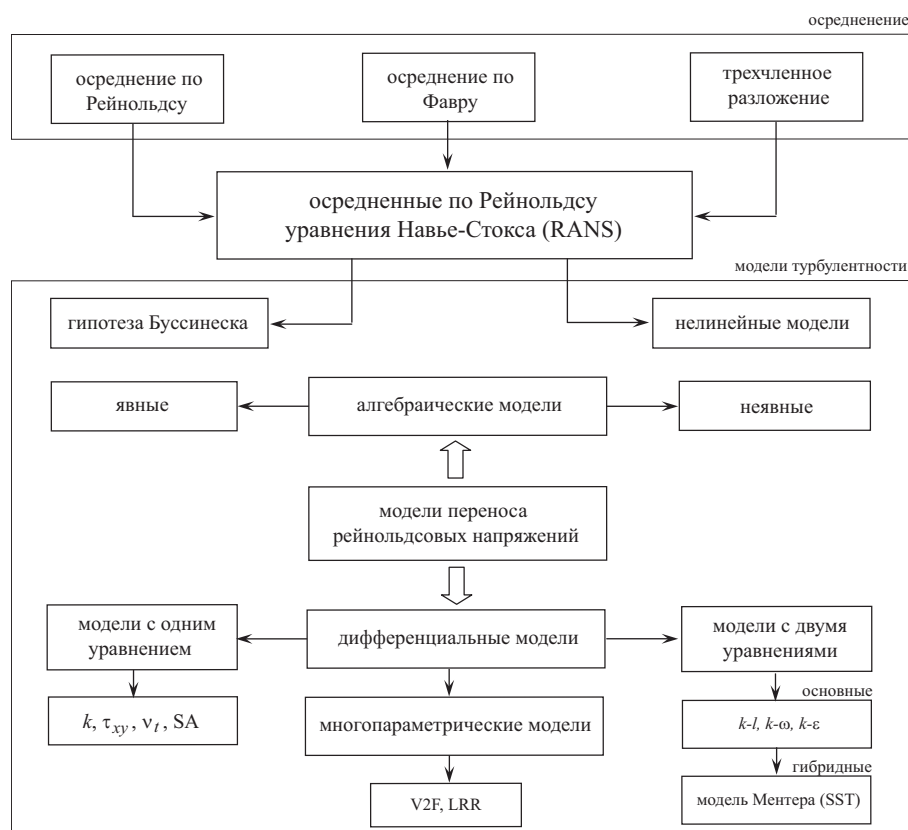


Рис. 1.6. Классификация полуэмпирических моделей турбулентности

Проблема замыкания сводится к определению одной скалярной величины — турбулентной вязкости  $\nu_t \sim vl$  (под  $v$  и  $l$  понимаются масштабы скорости и длины турбулентных вихрей), которая зависит от локальных характеристик турбулентности. Турбулентная теплопроводность выражается через турбулентную вязкость и турбулентное число Прандтля, которому обычно присваивается постоянное значение ( $Pr_t = 0.6 \dots 0.9$ ).

Несмотря на то, что гипотеза Буссинеска не выполняется даже во многих относительно простых течениях, например, в установившемся течении в круглой трубе, вращающейся вокруг своей оси, она получила широкое распространение в вычислительной практике.

### 1.5.3. Алгебраические модели

В *алгебраических моделях* турбулентности (модели нулевого порядка) связь между турбулентной вязкостью и параметрами осредненного течения задается алгебраическими соотношениями, а большинство из них используют двухслойную схему турбулентного пограничного слоя. Примерами таких моделей служат модель Прандтля (L. Prandtl, 1925, 1942) и модель Ван Дриста (Van Driest, 1956), используемые для расчета тонких вязких слоев и свободных слоев со сдвигом. Другие модели, например, модели Болдуина-Ломакса (W.S. Baldwin, H. Lomax, 1978) и Джонсона-Кинга (B.A. Johnson, L.S. King, 1985), используются для расчета погранслоевых течений с отрывом и присоединением потока. Алгебраические модели обладают вычислительной эффективностью и простотой модификации. В то же время, узкая специализация ограничивает их применение при расчете сложных турбулентных течений. Алгебраические модели мгновенно реагируют на изменения параметров потока и неприменимы в случаях с доминирующим влиянием конвективного и диффузионного переноса.

В модели Прандтля (L. Prandtl, 1925) турбулентная вязкость вычисляется по формуле

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right|.$$

Характерная длина является функцией толщины слоя с градиентом скорости  $\delta$ , которая вычисляется по эмпирическим формулам, зависящим от конкретной геометрии потока. Например,  $l = 0.115x$  для плоского слоя смешения и  $l = 0.085x$  для слоя смешения с осевой симметрией. Во внутренней области пограничного слоя  $l = \kappa y$  (при  $y \leq y_c$ ), а в его внешней области  $l = \alpha \delta$  (при  $y_c \leq y \leq \delta$ ). Коэффициенты  $\alpha$  и  $\kappa$ , а также толщина  $y_c$  внутренней области пограничного слоя определяются на основе данных измерений (обычно полагается,  $\alpha = 0.075$ ,  $\kappa = 0.42$ ,  $y_c = 0.1875\delta$ ).

В модели Кармана (Th. Karman, 1930) длина перемешивания вычисляется по формуле

$$l \sim \left| \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \right)^{-1} \right|.$$

Проблемы использования формулы Кармана связаны с сингулярностью формулы в точках максимальной крутизны (в точках перегиба) профиля скорости  $\bar{v}$ .

Массовые силы, возникающие вследствие влияния сил плавучести или кривизны линий тока, могут существенно изменить величину длины пути перемешивания. Подобный эффект учитывается при помощи эмпирических формул, параметрами которых являются турбулентные числа Рейнольдса и Ричардсона [2, 18].

#### 1.5.4. Дифференциальные модели

*Дифференциальные модели* турбулентности позволяют рассчитывать более широкий круг турбулентных течений, учитывая при этом конвективный и диффузионный перенос, а также предысторию течения.

##### 1.5.4.1. Однопараметрические модели

*Модели с одним уравнением* (однопараметрические модели или модели первого порядка) дают описание турбулентности с помощью одной переменной величины (например,  $k$  или  $\tau_{xy} \approx \beta k$ ), для которой строится уравнение переноса. Другие характеристики турбулентности связываются с ней при помощи алгебраических соотношений.

В однопараметрических моделях турбулентная вязкость вычисляется по формуле (L. Prandtl, 1945)

$$\nu_t = lk^{1/2}.$$

Длина перемешивания находится на основе алгебраических соотношений, как и в случае моделей нулевого порядка.

Наибольшее распространение среди моделей первого порядка получили модели, использующие уравнение переноса турбулентной вязкости, в частности, модель Секундова (А.Н. Секундов, 1971, 1992) и модель Спаларта-Аллмареса (P.R. Spalart, S. Allmaras, 1994). Модель Секундова используется для расчета струй, слоев смешения и пограничных слоев. Модель Спаларта-Аллмареса (SA-модель) была разработана для аэрокосмической промышленности и широко применяется для решения задач дозвуковой аэродинамики и турбомашиностроения при расчете пограничных слоев, подверженных неблагоприятным градиентам давления. Для расширения границ применимости SA-модели используются поправки на кривизну линий тока и вращение.

Несмотря на то, что SA-модель является достаточно простой, требуя решения всего одного дополнительного уравнения для турбулентной вязкости, она воплощает новый класс однопараметрических моделей, в которых нет необходимости вычислять длину пути смешения, связанной с локальной толщиной слоя, характеризуемого большими значениями касательных напряжений.

#### 1.5.4.2. Двухпараметрические модели

Наиболее представительную группу дифференциальных моделей турбулентности составляют *модели с двумя уравнениями* (двухпараметрические модели или модели второго порядка). Такие модели характеризуются комплексом  $Z = k^m l^n$ , дающим представление о том, относительно каких величин записываются уравнения переноса (например,  $\varepsilon = k^{3/2}/l$ ,  $\omega = k^{1/2}/l$ ). Турбулентная вязкость при этом вычисляется по формуле  $\nu_t = k/\omega = c_\mu k^2/\varepsilon$ .

В двухпараметрических моделях одно уравнение обычно записывается относительно кинетической энергии турбулентности, а другое — для переменной  $z = k^m l^n$ . Турбулентная вязкость вычисляется по формуле

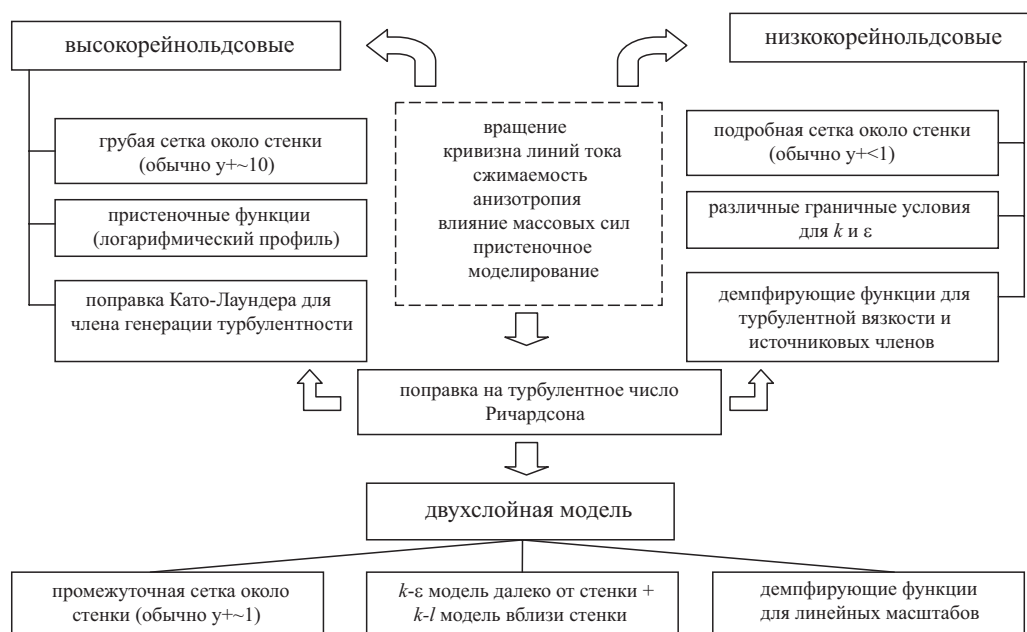
$$\nu_t \sim k^{1/2-m/n} z^{1/n}.$$

При этом  $m = 3/2$  и  $n = -1/2$  для модели  $k-\varepsilon$  (скорость диссипации  $\varepsilon = k^{3/2}/l$ ).

Для пристеночных течений хорошие результаты дает модель  $k-\omega$  (D.C. Wilcox, 1988), а для свободных сдвиговых слоев — модель  $k-\varepsilon$  (B.E. Launder, D.S. Spalding, 1972). Менее распространена модель  $k-l$  (J.C. Rotta, 1972). Применение модели  $k-\varepsilon$  сталкивается с трудностями при описании пограничных слоев с градиентом давления, сильно закрученных течений с большой кривизной линий тока, ламинарно-турбулентного перехода, а также при моделировании сжимаемых и отрывных течений ( $k-\varepsilon$  модель не дает удовлетворительного предсказания точки отрыва пограничного слоя). Во многих случаях она дает завышенные значения турбулентной энергии, например, в окрестности критической точки [99], но хорошо согласуется с данными измерений по скорости. Для учета влияния стенки (при  $Re_t \sim 1$ ) используются демпфирующие функции. Модель  $k-\omega$  не требует введения специальных пристеночных функций, но оказывается чувствительной к свободной турбулентности. Различные версии диссипативной модели отличаются друг от друга формой записи диссипативных слагаемых в уравнениях для кинетической энергии турбулентности и скорости ее диссипации. Как модель  $k-\varepsilon$ , так и модель  $k-\omega$ , показывают плохие результаты при расчете трехмерных течений с реламинаризацией пограничного слоя [83].

Несмотря на известные ограничения, распространение модели  $k-\varepsilon$  при решении практических задач объясняется довольно устойчивым итерационным процессом, устойчивостью к погрешностям задания входных данных и разумной точностью для широкого класса турбулентных течений. Имеются многочисленные расчеты турбулентных течений с использованием моделей  $k-\omega$  и  $k-\varepsilon$ , а сами модели включаются практически во все коммерческие вычислительные пакеты, предназначенные для решения широкого круга задач гидродинамики и теплообмена (например, Star-CD, CFX, FLUENT, Phoenix).

Разрабатываются низкорейнольдсовы версии  $k-\varepsilon$  модели, обеспечивающие описание пристенных течений вплоть до стенки, и высокорейнольдсовы версии с использованием различных пристеночных функций. Версии  $k-\varepsilon$  модели, разработанные на основе теории ренормализованных групп (Renormalization Group theory, RNG), а также Realizable  $k-\varepsilon$  модель, приспособлены для расчета течений как при высоких, так и при низких числах Рейнольдса, и устраняют недостатки исходной модели.

Рис. 1.7. Различные версии  $k$ - $\varepsilon$  модели турбулентности

В RNG  $k$ - $\varepsilon$  модели вводится дополнительное условие в уравнение для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности, которое улучшает точность решения для потоков с большими величинами касательных напряжений. При этом также учитывается эффект циркуляции турбулентности, что улучшает точность расчета высокоскоростных вращающихся и циркуляционных потоков. Вводится аналитическая зависимость для вычисления турбулентного числа Прандтля в процессе решения задачи (в стандартной  $k$ - $\varepsilon$  турбулентному числу Прандтля присваивается постоянное значение). Использование аналитической формулы для расчета турбулентной вязкости позволяет более качественно рассчитывать характеристики турбулентных течений при низких числах Рейнольдса (при хорошем сеточном разрешении в области пограничного слоя).

По сравнению со стандартной  $k$ - $\varepsilon$  моделью, в Realizable  $k$ - $\varepsilon$  модели вводится улучшенный способ расчета турбулентной вязкости, а уравнение для скорости диссипации кинетической энергии турбулентности выводится из точного уравнения переноса среднеквадратичного значения пульсационного вихря скорости. Преимущество данной модели состоит в том, что она более точно предсказывает распределение диссипации плоски и круглых струй, а также обеспечивает лучшее предсказание характеристик вращающихся потоков, пограничных слоев, подверженных сильным градиентам давления, отрывных течений, рециркуляционных течений и потоков, в которых существуют развитые вторичные течения. Недостаток модели заключается в том, что она завышает или занижает турбулентную вязкость потока, когда вычислительная область содержит одновременно вращающиеся и неподвижные области (при использовании множественных систем координат или скользящих сеток). Это объясняется тем, что модель использует эффект осредненного вращения при определении турбулентной вязкости.

Достоинства моделей  $k$ - $\omega$  и  $k$ - $\varepsilon$  объединяет модель Ментера (F.R. Menter, 1993). Модель Ментера (Shear Stress Transport model, SST), наряду с SA-моделью, предназначена для расчета сложных отрывных течений.

#### 1.5.4.3. Многопараметрические модели

*Модели рейнольдсовых напряжений* (многопараметрические модели) используются с



тех случаях, когда существенна разница в переносе отдельных компонент тензора напряжений Рейнольдса. Такой подход предполагает решение уравнений относительно всех компонент тензора напряжений Рейнольдса и позволяет без дополнительных эмпирических предположений учесть кривизну линий тока, влияние сил плавучести, закрутку потока.

Для уменьшения количества решаемых уравнений применяются упрощенные модели переноса рейнольдсовых напряжений. Среди них можно отметить четырехпараметрическую  $v^2-f$  модель, использующую уравнения для кинетической энергии турбулентности и нормальной к стенке компоненты тензора турбулентных напряжений. Имеются и другие модели такого рода, например, LRR-модель (B.E. Launder, G.J. Reece, W. Rodi, 1975).

Модель  $v^2-f$  включается уравнения  $k-\varepsilon$  модели, уравнение для нормальной к линии тока компоненте тензора напряжения Рейнольдса  $\langle v'^2 \rangle$ , а также релаксационное уравнение эллиптического типа для производства  $\langle v'^2 \rangle$  [43] (на стенке  $f = 0$  или  $\partial f / \partial n = 0$ ).

Широко используются *алгебраические модели*, основанные на некоторых дополнительных предположениях относительно конвективного и диффузионного переноса турбулентных напряжений (Algebraic Stress Model, ASM). Модели ASM можно разделить на явные и неявные.

В *неявных моделях* (Implicit ASM, IASM) в качестве основного предположения используется условие о пропорциональности конвективных и диффузионных членов уравнения переноса рейнольдсовых напряжений соответствующим членам переноса в уравнении для кинетической энергии турбулентности. Тензор рейнольдсовых напряжений выражается в виде

$$\langle v'_i v'_j \rangle = \sum_{i=1}^{10} \beta_i T_i,$$

где  $T_i$  представляет собой симметричный тензор, зависящий только от тензора скоростей деформаций и завихренности осредненного движения. Однако в силу существенной нелинейности модельных алгебраических соотношений, отсутствует гарантия единственности решения, а при некоторых условиях эти уравнения оказываются сингулярными.

В *явных моделях* (Explicit ASM, EASM) исходные уравнения, полученные в IASM, тем или иным приближенным методом разрешаются относительно рейнольдсовых напряжений, что снимает проблему неединственности решения.

Относительная простота, наглядность, вычислительная эффективность и приемлемость для широкого круга свободных и пристенных сдвиговых турбулентных течений, когда основное влияние на осредненное течение оказывает лишь одна из компонент тензора рейнольдсовых напряжений, обусловили широкое распространение моделей турбулентной вязкости.

Концепция турбулентной вязкости предполагает, что перенос количества движения происходит так же, как и перенос за счет молекулярного движения. Основной недостаток концепции Буссинеска состоит в предположении об изотропности коэффициента турбулентной вязкости. Такое допущение является сильным упрощением, имеющим ограниченную пригодность для интерпретации сложных течений. Кроме того, концепция Буссинеска неприемлема для расчета течений, в которых имеются зоны с отрицательной турбулентной вязкостью.

Наряду с моделями турбулентности, основанными на концепции Буссинеска, находят применение нелинейные модели турбулентной вязкости, а также модели, в которых коэффициент турбулентной вязкости принимается различным по координатным направлениям. В этих моделях предполагается нелинейная связь между тензором рейнольдсовых напряжений и тензором скоростей деформаций. Их недостатки заключаются в недоста-

точной апробации и отсутствии соответствующей информационной поддержки.

#### 1.5.4.4. Вычислительные ресурсы при использовании различных моделей

С точки зрения вычислительных ресурсов, SA-модель представляется самой экономичной, поскольку она использует одно дополнительное уравнение переноса.

Стандартная  $k-\varepsilon$  модель требует несколько больших вычислительных ресурсов по сравнению с SA-моделью, требуя решения двух дополнительных уравнений переноса. Из-за дополнительных условий и функций в основных уравнениях, а также в связи с большей степенью нелинейности, Realizable  $k-\varepsilon$  модель требует больше ресурсов, чем стандартная  $k-\varepsilon$  модель. Подобно моделям  $k-\varepsilon$ , модель  $k-\omega$  также является двухпараметрической и требует некоторых вычислительных усилий.

По сравнению с моделями  $k-\varepsilon$  и  $k-\omega$ , модели RSM требуют дополнительной памяти и времени центрального процессора из-за увеличения числа уравнений переноса. В среднем, модели RSM требуют на 50–60% времени CPU больше, чем двухпараметрические модели турбулентности и на 15–20% больше оперативной памяти.

Помимо временных затрат на итерационный процесс, выбор модели турбулентности может повлиять на сходимость численного решения. Например, стандартная  $k-\varepsilon$  модель в некоторых случаях является сверхдиффузионной, в то время как RNG  $k-\varepsilon$  модель разработана таким образом, что турбулентная вязкость уменьшается при резких изменениях напряжений. Поскольку диффузия положительно влияет на сходимость численного решения, то, RNG  $k-\varepsilon$  модель более восприимчива к неустойчивости решения в стационарных задачах. Однако это не является недостатком RNG  $k-\varepsilon$  модели, так как данная характеристика делает ее более отзывчивой к важной физической неустойчивости, такой как зависящие от времени потери турбулентных вихрей.

Точно также и RSM модели требуют большего количества итераций по сравнению с двухпараметрическими моделями, поскольку в них заложена сильная взаимосвязь между рейнольдсовыми напряжениями и средним течением.

#### 1.5.4.5. Выбор модели турбулентности

Выбор модели турбулентности зависит от характера турбулентного потока, требуемой точности, доступных вычислительных ресурсов и временных затрат. Выбор подходящей модели турбулентности для решение конкретной задачи требует четких представлений свойств и ограничений каждой модели турбулентности.

Полуэмпирические модели турбулентности разработаны, в основном, для расчета стационарных и слабо нестационарных течений, а их калибровка (подбор эмпирических констант) осуществляется для достаточно тонких сдвиговых слоев в рамках уравнений пограничного слоя или уравнений Рейнольдса. Возможность применения разработанных моделей турбулентности для расчета нестационарных течений выглядит проблематичной.

Для моделирования нестационарных течений возможно использовать несколько принципиально различных вычислительных и физических подходов.

1. Использование моделей турбулентности, обеспечивающих достаточно точное предсказание измеряемых в эксперименте осредненных параметров потока в рамках стационарных уравнений Рейнольдса.

2. Использование нестационарных уравнений Рейнольдса в сочетании с условиями симметрии, что приводит к симметричным нестационарным решениям.

3. Использование нестационарных уравнений Рейнольдса в сочетании с традиционными полуэмпирическими моделями турбулентности без привлечения условий симметрии



Расчеты с использованием нестационарных уравнений Рейнольдса (Unsteady RANS, URANS) на довольно мелкой сетке позволяют разрешить крупномасштабные вихревые структуры и проследить их эволюцию во времени [4, 87, 104]. В некоторых источниках метод URANS интерпретируется как упрощенный метод моделирования крупных вихрей (Very Large Eddy Simulation, VLES). Однако трактовка URANS как одной из модификаций LES не соответствует физической сущности этого метода [104].

В отличие от RANS, в VLES используется трехчленное разложение мгновенных величин турбулентного потока. В вычислительной практике VLES используется для расчета течений с крупномасштабными когерентными вихревыми структурами, а также предсказания флуктуаций давления в закрученных потоках, например, газовых горелках и форсунках. Результаты расчетов достаточно хорошо согласуются с данными измерений и расчетами, выполненными с помощью других моделей турбулентности.

Наряду с традиционными исследованиями, направленными на усовершенствование и существующих и разработку новых моделей турбулентности, в последнее время большое внимание уделяется проблеме тестирования и определению границ применимости таких моделей. Имеются специальные международные программы, посвященные тестированию полуэмпирических моделей турбулентности, координируемые Стэнфордским университетом, Комиссией ЕС по развитию научных исследований и Европейским сообществом по течениям, турбулентности и горению (European Research Community on Flow, Turbulence and Combustion, ERCOFTAC). Значительный вклад в решение данной проблемы внесли Стэнфордские конференции (Stanford, USA, 1968, 1980, 1990), международные рабочие семинары ERCOFTAC (1997, 1998), а также Европейский проект по вычислительной гидродинамике (European Computational Aerodynamics research Project, ECARP) [44].

Отсутствие универсальной модели турбулентности, пригодной для расчета всех или, по крайней мере, большинства турбулентных течений, привело к смещению акцентов в исследованиях, связанных с моделированием турбулентности. Возросшие возможности вычислительной техники стимулировали поиск и применение более строгих и универсальных подходов к моделированию турбулентных течений.

## 1.6. Моделирование крупных вихрей

Метод *моделирования крупных вихрей* (LES) основан на двух предположениях. Одно из них состоит в возможности разделения поля течения на движение крупных и мелких вихрей. Крупные вихри, находящиеся под прямым воздействием граничных условий и несущие в себе максимум рейнольдсовых напряжений, рассчитываются. Мелкомасштабная турбулентность считается изотропной и имеющей универсальные характеристики, а потому менее критичной и более поддающейся моделированию. Другое предположение заключается в возможности аппроксимации нелинейных взаимодействий между крупными и мелкими вихрями только по крупным вихрям с использованием *подсеточных моделей* (SGS). Иначе говоря, принимается гипотеза о статистической независимости крупных и мелких вихрей [3].

Мелкомасштабное движение исключается из уравнений Навье-Стокса при помощи применения операции фильтрации (рис. 1.8) и моделируется с использованием подсеточных моделей. Среди наиболее популярных и часто используемых фильтрующих функций можно отметить фильтры Гаусса и Фурье, а также коробочный фильтр (box filter). При проведении расчетов на основе метода контрольного объема фильтрация осуществляется в результате интегрирования дифференциальных уравнений, представляющих законы

сохранения, по контрольным объемам разностной сетки. Классификация подсеточных моделей проводится по тем же признакам, что и в RANS (по числу соотношений, вводимых в дополнение к системе фильтрованных уравнений).

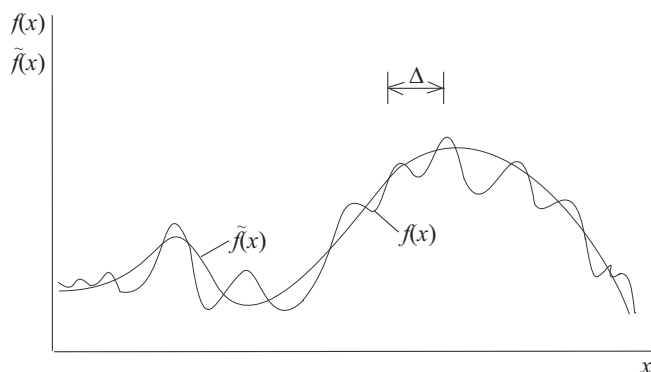


Рис. 1.8. Исключение мелкомасштабных пульсаций при помощи фильтрации

В то время как DNS отображает весь диапазон размеров вихрей, метод LES считает наиболее важными крупные вихри, соответствующие малым волновым числам. При этом подсеточные модели не оказывают критического влияния на результаты в целом [45, 82]. Статистика крупных вихрей обычно не чувствительна к подсеточному моделированию за исключением пристеночной области. Имеющиеся подсеточные модели корректно предсказывают не только осредненные характеристики потока (первые и вторые моменты), но также и флуктуации интегральных характеристик, например, коэффициентов сопротивления и подъемной силы [46]. Крупномасштабное движение рассчитывается путем решения фильтрованной системы уравнений Навье-Стокса, которую формально можно записать в таком же виде, что и систему уравнений Рейнольдса. Роль подсеточного моделирования возрастает при увеличении числа Рейнольдса (M. Breuer, 2000).

По сравнению с DNS, метод LES требует меньших вычислительных ресурсов. Поскольку LES исключает прямой расчет мелких вихрей, то разностные сетки и временные шаги могут быть намного больше (примерно на порядок), чем колмогоровские масштабы длины и времени. Имеющиеся оценки показывают, что количество узлов для LES составляет около 5% количества узлов, используемого в DNS [117]. При фиксированной расчетной памяти возможно достижение более высоких чисел Рейнольдса, чем в DNS. Тем не менее, основной проблемой в LES (как, впрочем, и в DNS), по-прежнему, остается определение производных для разрешения мельчайших масштабов.

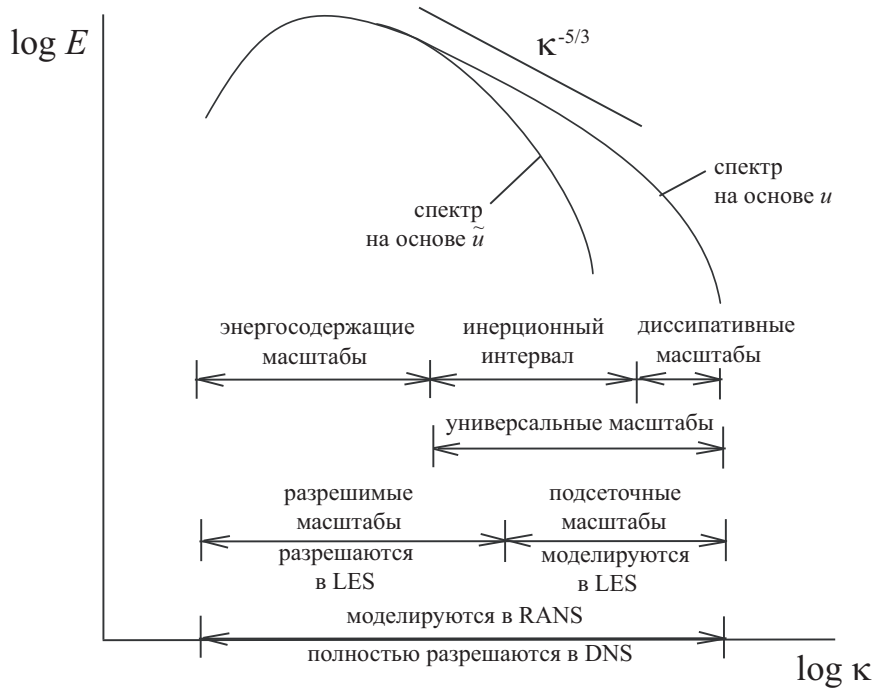


Рис. 1.9. Спектры кинетической энергии турбулентности, построенные на основе мгновенной и фильтрованной скорости

В том случае, когда предельное волновое число (волновое число отсечки) лежит в инерционной части спектра, разрешающие требования LES не зависят от турбулентного числа Рейнольдса [81]. Однако вблизи стенки все вихри малы настолько, что размеры энергосодержащих и диссипативных вихрей перекрываются. Размеры крупных вихрей в пристеночной области зависят от числа Рейнольдса, а сеточные и временные шаги, требуемые для LES, вблизи стенки постепенно падают до величин, характерных для DNS. Число узлов вблизи стенки пропорционально  $Re_\tau^2$ , где  $Re_\tau = lu_\tau/\nu$ .

Число узлов сетки, необходимых для разрешения внешней части пограничного слоя, пропорционально  $Re_t^{0.4}$ . Для разрешения вязкого подслоя, толщина которого составляет около 1% от толщины пограничного слоя, требуется  $N \sim Re_t^{1.8}$  узлов.

Решение, полученное с помощью LES, содержит более богатую информацию по сравнению с решением на основе уравнений Рейнольдса, например, не только характеристики среднего течения (поля скорости, концентрации, температуры, давления) и распределения рейнольдсовых напряжений, но также и спектральные характеристики (спектры пульсаций скорости и давления), двухточечные моменты (например, пространственные и пространственно-временные корреляции пульсаций скорости и давления), временные и пространственные масштабы турбулентности. Многие из этих характеристик имеют важное значение для инженерных приложений (например, пульсации давления и плотности — для акустики, пульсации температуры — для расчета химически реагирующих течений). Колебания давления во многих случаях являются причиной усталостных повреждений элементов конструкции. На основе LES представляется возможным рассчитать когерентные вихревые структуры, которые контролируют дисперсию примеси [31].

Подсеточные модели, используемые в LES, обычно обладают значительной диффузией и диссипацией, что позволяет преодолеть вычислительные проблемы, связанные с представлением очень мелких вихрей на выбранной сетке, и стабилизировать численные расчеты [3, 30].

Удовлетворительная точность схем замыкания для мелкомасштабной составляющей турбулентности достигается лишь тогда, когда разделение течения на мелкомасштабную и крупномасштабную составляющие не оказывает заметного влияния на движение крупномасштабных структур. Перекачка энергии мелкомасштабных возмущений в более крупные масштабы может привести к схемной нелинейной неустойчивости [57, 84]. Вопрос о том, с какой эффективностью достигается инвариантность относительного разделения масштабов, остается открытым [3]. Для предсказания процессов как прямого (forward-scatter, F-scatter), так и обратного переноса энергии (back-scatter, B-scatter) строятся специальные подсеточные модели, например, семейство динамических моделей [57].

Результаты расчетов, полученные при помощи LES, зависят от ширины фильтра  $\Delta$ , которая входит в оператор фильтрации и обычно связывается с размером шага разностной сетки, например, для канала  $\Delta \sim l_t/10$  (W. Rodi, 2000). Уменьшение ширины фильтра позволяет воспроизвести более широкий частотный диапазон флуктуаций решения (рис. 1.10). Увеличение  $\Delta$  способствует сглаживанию решения, а при  $\Delta \rightarrow 0$  метод LES переходит в DNS. В отличие от LES, при решении уравнений Рейнольдса используется тотальное сглаживание, а при уменьшении шага разностной сетки решение становится сеточно-независимым (при этом всегда имеется ненулевая турбулентная вязкость).

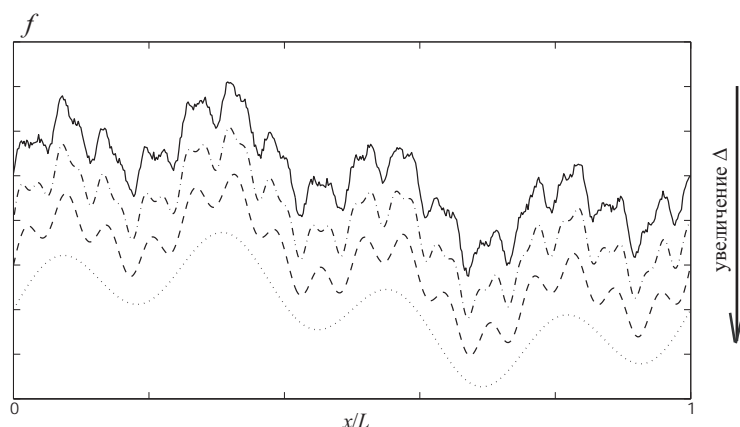


Рис. 1.10. Влияние ширины фильтра на размеры разрешимых масштабов турбулентных флуктуаций

Конечное требование сеточной сходимости в LES состоит в том, чтобы кинетическая энергия не скапливалась в самых мелких масштабах. Путем прямого расчета макроструктур до установления результатов на разных сетках и на большом интервале времени проводится набор интервала энергии, и удается определить эффективное значение такого диссипативного механизма исходя из принципа устойчивости решения при необходимом разрешении. При таком подходе удовлетворяется требование инвариантности разделения на крупные и мелкие масштабы, и решение выходит на установившейся режим [3].

В многочисленных расчетах опробовано большое количество подсеточных моделей, фильтров, граничных условий и конечно-разностных схем [82, 104]. Несмотря на это, не ясны ни оптимальный выбор подсеточной модели, ни обоснование выбора такого варианта [30, 117, 118]. Нет также универсальных пристеночных функций, обеспечивающих уменьшение количества узлов вблизи стенки, в связи с чем LES затруднительно использовать для расчета течений с малыми отрывными зонами и точками перехода, например, для обтекания профиля под углом атаки (для решения таких задач предпочтительнее использовать DES). Тем не менее, метод LES является перспективным направлением в развитии методов расчета турбулентных течений и представляется весомой альтернативой DNS и

RANS.

### 1.7. Квазипрямое численное моделирование

Наряду с LES, находят применение подходы, которые не используют подсеточные модели — *псевдо- или квазипрямое численное моделирование* (PDNS или QDNS, MILES). Применяемые в них разностные схемы высокого порядка уже имеют достаточную численную диффузию и диссипацию, которая подражает стабилизирующему действию подсеточных моделей. Диссипативный механизм (сглаживающий фильтр) содержится в операторе, дискретизирующем конвективные слагаемые, что обеспечивает устойчивость решения. Подсеточные модели вводятся неявным образом [45].

Сглаживание исключает все виды мелкомасштабного движения выше выбранного волнового числа, не изменяя мод в диапазоне волновых чисел, меньших этого предельного значения. Указанным свойством (гашение мелкомасштабных пульсаций и отсутствие влияния на крупномасштабные структуры) обладают диссипативные конечно-разностные схемы, основанные на ориентированных аппроксимациях [3]. Диссипативность достигается ориентированием разностей в соответствии с направлением потока без введения явных членов с искусственной вязкостью. При использовании симметричных схем диссипация отсутствует, а вместе с ней отсутствует и механизм ослабления вредных для описания крупных вихрей коротковолновых ошибок.

Диссипативно-устойчивые конечно-разностные схемы хорошо описывают крупные вихри и ослабляют или полностью гасят ненужные мелкомасштабные возмущения (малая диссипация в области крупных масштабов и большая в области мелких вихрей). Вместе с тем, возможна ситуация, когда для данного масштаба  $l$  крупного вихря диссипация так велика (отношение  $\Delta x/l$  недостаточно мало), что этот вихрь сам будет гаситься схемой. Поэтому схемы с большой диссипацией требуют аккуратного выбора сеток (отношения  $\Delta x/l$ ).

Следует отметить, что несмотря на вычислительную эффективность, подходы такого рода (QDNS или MILES) не имеют должного физического обоснования, а полученные с их помощью результаты нуждаются в тщательной проверке.

### 1.8. Моделирование отсоединенных вихрей

Применение DNS и LES для моделирования турбулентных течений требует огромных вычислительных ресурсов. Традиционный подход, основанный на использовании стационарных или нестационарных уравнений Рейнольдса, не в состоянии обеспечить приемлемую для практики точность предсказания характеристик многих течений в силу ограниченных возможностей полуэмпирических моделей турбулентности [87, 104]. Характерные для отрывных течений крупномасштабные нестационарные трехмерные вихревые структуры (следы, рециркуляционные зоны) определяются конкретными граничными условиями и геометрическими характеристиками рассматриваемых течений и не могут быть описаны в рамках таких моделей [106]. Указанные обстоятельства стимулируют поиск и разработку *гибридных подходов*, сочетающих в себе экономичность RANS и универсальность LES.

В методе *моделирования отсоединенных вихрей* (DES) уравнения Рейнольдса используются только в тех областях потока, где размер расчетной сетки  $\Delta$  недостаточно мал для разрешения турбулентных структур с линейными масштабами порядка макромасштаба

турбулентности  $l$ . Метод моделирования крупных вихрей применяется в остальной области потока, где  $\Delta < l$ .

Конкретные реализации DES основаны на использовании модели турбулентной вязкости Спаларта-Аллмареса и модели Ментера [106]. Расстояние до стенки  $y$  заменяется на величину, определяемую из соотношения

$$y_{\text{DES}} = \min\{y, C_{\text{DES}}\Delta\},$$

где  $C_{\text{DES}} = 0.65$  — постоянная модели. Размер сетки определяется как максимальный из шагов по разным пространственным направлениям в данной точке течения

$$\Delta = \max\{\Delta x, \Delta y, \Delta z\}.$$

Такой подход не учитывает форму ячеек расчетной сетки и дает постоянную ширину фильтра в LES-области. В другом подходе  $\Delta$  определяется следующим образом [83]

$$\Delta = (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)^{1/2}.$$

Применительно к пристеночным течениям такой подход в определении  $y_{\text{DES}}$  приводит к тому, что в населенной мелкими турбулентными вихрями области присоединенного пограничного слоя с характерной для нее сильно анизотропной сеткой выполняется неравенство  $y < C_{\text{DES}}\Delta$ . В качестве линейного масштаба турбулентности здесь используется истинное расстояние до стенки  $y$ . При этом реализуется стандартный подход, основанный на уравнениях Рейнольдса, замкнутых с помощью SA-модели или SST-модели. В остальной области потока, в частности, в отрывных зонах, населенных сравнительно крупномасштабными вихрями, имеет место обратная ситуация, когда  $y > C_{\text{DES}}\Delta$ . В результате, в качестве масштаба турбулентности используется зависящая от локального шага сетки величина  $C_{\text{DES}}\Delta$ . Модель переходит в дифференциальную подсеточную модель турбулентности.

Гибридный характер DES вытекает из его формулировки: в области присоединенного пограничного слоя метод функционирует в режиме уравнений Рейнольдса, а в области отрыва потока переходит в LES. При этом достигается сочетание лучших качеств обоих подходов — высокая точность и экономичность уравнений Рейнольдса в области присоединенного пограничного слоя и универсальность LES в отрывной области. Хотя DES, в отличие от RANS, является принципиально нестационарным трехмерным подходом, необходимые для его реализации сетки в пристеночной области совпадают с сетками, необходимыми для решения уравнений Рейнольдса, и являются на много порядков меньшими, чем сетки, требуемые для разрешения мелких пристенных вихрей в рамках LES. По мере измельчения сетки DES асимптотически приближается к LES и далее к DNS.

В методе DES применение низкодиссипативных центральных разностных схем невозможно из-за их неустойчивости при решении уравнений Рейнольдса. Вместе с тем, применительно к LES неявные противопоточные разностные схемы могут быть чрезмерно диссипативными. Поэтому в DES находит применение гибридная конечно-разностная схема, основанная на использовании неявной схемы 2-го порядка по времени, противопоточных схем 3-го или 5-го порядка для невязких потоков и центральной разностной схемы 2-го порядка для вязких потоков [106].

Метод DES требует на 20–35% меньше процессорного времени и на 30% меньше сеточных узлов, чем LES (St. Schmidt, F. Thiele, 2000). Для сравнения, стоимость RANS составляет около 6% от стоимости LES.



Метод DES позволяет с высокой точностью рассчитывать пульсационные и спектральные характеристики турбулентных течений, что важно, например, для исследования генерации шума струями ракетных двигателей, расчета высокотемпературных турбулентных потоков, локальных и интегральных характеристик отрывных течений. В химически реагирующих течениях, например, 5% флуктуации температуры могут приводить к 30% флуктуаций массовой концентрации компонентов смеси (M.P. Martin, G.V. Candler, 2001).

Несмотря на то, что примеры применения DES ограничиваются чисто аэродинамическими приложениями, полученные результаты свидетельствуют о широких возможностях этого подхода при расчете сложных турбулентных течений.

## 1.9. Метод ограниченных численных масштабов

К гибридным подходам моделирования турбулентных течения относится также *метод ограниченных численных масштабов* (Limited Numerical Scales, LNS). В методе LNS турбулентная вязкость вычисляется из соотношения [28]

$$\mu_t = \alpha c_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon},$$

в котором коэффициент  $\alpha$  выбирается из условия

$$\alpha = \frac{1}{LV_{\text{RANS}}} \max \{LV_{\text{LES}}, LV_{\text{RANS}}\},$$

где  $L$  и  $V$  представляют собой масштабы длины и скорости.

Значение  $\alpha < 1$  соответствует LES, а при  $\alpha = 1$  метод переходит в RANS. С физической точки зрения, величина  $\alpha$  соответствует неразрешимым подсеточным масштабам турбулентной энергии, а величина  $(1 - \alpha)$  разрешимым масштабам. Полагается, что

$$\alpha = \frac{\min \{C_S \Delta^2 S, c_\mu k^2 / \varepsilon + \delta\}}{c_\mu k^2 / \varepsilon + \delta}.$$

Здесь  $c_\mu = 0.09$ ,  $C_S = 0.05$ , а  $S$  представляет собой тензор скоростей деформаций. Малая величина  $\delta$  предотвращает неопределенность.

Ширина фильтра вычисляется следующим образом

$$\tilde{\Delta} = \max \{\Delta, 2q\Delta t\},$$

где  $q$  — величина скорости в локальной системе координат.

## КОНЦЕПЦИЯ ОСРЕДНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА И ФИЛЬТРАЦИЯ

Турбулентные потоки характеризуются флуктуациями скорости, которые приводят к флуктуациям скалярных параметров потока, таких как плотность, температура и состав смеси. Флуктуации скорости потока и его скалярных характеристик являются результатом вихревых движений потока, которые создаются за счет сдвиговых напряжений внутри потока.

Сглаживание (осреднение) и фильтрация позволяют упростить решение задачи за счет улучшения качества решения, снятия пульсаций, повышения устойчивости расчетов, а также построения более надежной вычислительной процедуры. Приведем основные соотношения, лежащие в основе концепции осреднения Рейнольдса и фильтрации уравнений Навье-Стокса.

### 2.1. Осреднение по Рейнольдсу

Характерной особенностью турбулентных течений является наличие беспорядочных флуктуаций гидродинамических характеристик потока. В результате, зависимость мгновенных значений гидродинамических полей от пространственных координат и временной ход этих значений приобретают сложный и запутанный характер, зависящий от неконтролируемых возмущений начальных и граничных условий, причем при многократном воспроизведении течения в одинаковых условиях точные значения всех полей каждый раз оказываются иными. В силу крайней неупорядоченности и резкой изменчивости во времени и в пространстве полей течения, при изучении турбулентности неизбежно приходится использовать некоторые *методы осреднения*, позволяющие перейти от исходных гидродинамических полей к регулярным средним значениям характеристик потока.

Согласно *подходу Рейнольдса* (О. Reynolds, 1883), любые мгновенные значения  $f$  параметров турбулентного потока, которые являются случайными функциями пространственных координат и времени, представляются в виде суммы осредненной во времени величины  $\bar{f}$  и ее пульсационной составляющей  $f'$ , а именно

$$f(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{x}, t) + f'(\mathbf{x}, t).$$

При этом очевидно, что среднее по времени значение пульсационной составляющей равно нулю  $\bar{f}' = 0$ . Фактически это означает, что операция осреднения функции  $f$  во времени дает ее математическое ожидание

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\mathbf{x}, \tau) d\tau.$$

С одной стороны, период осреднения  $T$  должен быть достаточно малым по сравнению с характерным временем изменения параметров течения, а с другой — он должен превышать характерный масштаб турбулентных пульсаций. В частности, если время осреднения велико  $T \rightarrow \infty$ , то среднее значение функции для всего процесса от времени не зависит

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\mathbf{x}, t) dt.$$



Из определения операции осреднения следует, что

$$\overline{f_1 f_2} = \overline{f_1} \overline{f_2} + \overline{f'_1 f'_2}, \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial t} = \overline{\frac{\partial f}{\partial t}}.$$

Вместо осреднения по времени рассматривается статистическое осреднение по ансамблю реализаций

$$f(\mathbf{x}, t) = \langle f(\mathbf{x}, t) \rangle + f'(\mathbf{x}, t).$$

Средняя величина находится из соотношения

$$\langle f(\mathbf{x}, t) \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f^n(\mathbf{x}, \tau) d\tau.$$

Индекс  $n$  относится к реализации случайного процесса.

Осреднение по Рейнольдсу используется, в основном, для несжимаемой жидкости. При выводе уравнений Рейнольдса используется тотальное сглаживание, одинаковое для всей области течения и для всех искомых функций. При сглаживании происходит потеря информации, приводящая к отказу от получения временных флуктуирующих параметров и изучению только их средних значений. Влияние турбулентных флуктуаций проявляется через напряжения Рейнольдса, которые моделируются при помощи той или иной модели турбулентности. С другой стороны, сглаживание уравнений Навье-Стокса является одним из методов регуляризации хаотических движений, приводящих к построению устойчивого вычислительного алгоритма.

Осреднение по времени получается в результате интегрирования по достаточно большому интервалу времени

$$\overline{f}(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} f(\mathbf{x}, t) dt.$$

Если средняя величина сама изменяется со временем, то в таких нестационарных системах вычисляются локальные средние по времени величины при условии, что флуктуации по времени происходят достаточно быстро по сравнению с изменением во времени самой средней величины. В этом случае результат осреднения по времени  $t_1 < t' < t_2$  представляется в виде

$$\overline{f}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(\mathbf{x}, t) dt.$$

Однако выбор интервала времени  $[t_1, t_2]$  оказывает сильное влияние на результаты.

При вычислении среднего значения функции  $f$  важным результатом является равенство нулю среднего по времени от ее флуктуационной части  $\overline{f'} = 0$ .

## 2.2. Вопросы, связанные с осреднением

В [15] показано, что временное или пространственное осреднение при любом выборе интервала осреднения приводит к нарушению одного из *условий Рейнольдса*, а именно  $\langle \langle f \rangle g \rangle = \langle f \rangle \langle g \rangle$ . В современной теории турбулентности вопрос о смысле операции осреднения решается иначе и притом так, что все условия Рейнольдса оказываются точно выполненными.

Будем использовать *теоретико-вероятностную трактовку* полей гидродинамических величин в турбулентном течении как случайных полей и перейдем рассмотрению статистической совокупности течений, задаваемых некоторой совокупностью фиксированных внешних условий.

В турбулентном течении каждому из случайных полей гидродинамических величин соответствует система многомерных плотностей распределения вероятности.

Например,  $N$ -мерная плотность распределения вероятности значений  $N$  случайных величин  $\varphi(M_1), \dots, \varphi(M_N)$  определяется соотношением

$$P\{\varphi_1 < \varphi(M_1) < \varphi_1 + d\varphi_1, \dots, \varphi_N < \varphi(M_N) < \varphi_N + d\varphi_N\} = \\ = p_{M_1 \dots M_N}(\varphi_1, \dots, \varphi_N) d\varphi_1 \dots d\varphi_N,$$

где  $M_i(\mathbf{x}_i, \tau_i)$  — произвольная точка пространства-времени,  $\varphi(M_i)$  — реализация или выборочное значение гидродинамической величины  $\varphi$ .

Для полного задания распределения вероятности случайного поля в функциональном пространстве всех его возможных значений необходимо задать все семейство функций  $p_{M_1 \dots M_N}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ , отвечающих всевозможным целым положительным  $N$  и всевозможным наборам  $N$  точек пространства-времени. Два турбулентных течения считаются одинаковыми, если им отвечают одинаковые плотности распределения вероятности.

Распределение  $P_\varphi$  случайного поля  $\varphi$  однозначно определяется конечномерными распределениями  $P_{M_1 \dots M_N}$  при всевозможных различных точках  $M_1, \dots, M_N \in X \times T$ , где  $X$  и  $T$  — области изменения пространственной и временной координат соответственно. Более того, распределение случайного поля  $\varphi(M)$  однозначно определяется значениями мер  $\mathcal{P}_{M_1 \dots M_M}$  на произведениях множеств из  $\mathcal{X}$ , т. е. с вероятностями  $P\{\varphi_{M_1} \in A_1, \dots, \varphi_{M_N} \in A_N\}$ , где  $A_i \in \mathcal{X}$  для  $\forall i = 1, \dots, N$ ,  $\mathcal{X}$  —  $\sigma$ -алгебра в пространстве значений случайного поля  $\varphi(M)$ . Свойства, которыми должна обладать система конечномерных распределений, даются *теоремой Колмогорова* [?, с.111].

В пространстве функций от четырех переменных  $\varphi(M) = \varphi(\mathbf{x}, \tau)$  (трех пространственных и одной временной) *теоретико-вероятностное среднее значение*  $\langle \Phi \rangle$  произвольной функции  $\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  от значений  $\varphi_i = \varphi(M_i)$  для  $i = 1, \dots, N$  при этом определяется как интеграл от произведения этой функции на плотность распределения вероятности всех ее аргументов, распространенный по всей области изменения аргументов

$$\langle \Phi \rangle = \int \dots \int \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_N) p_{M_1 \dots M_N}(\varphi_1, \dots, \varphi_N) d\varphi_1 \dots d\varphi_N, \quad (2.1)$$

где  $p_{M_1 \dots M_N}(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  — соответствующая плотность распределения вероятности (??).

Используя *подход Рейнольдса* [?, с.167], представим актуальное значение  $\varphi(M)$  некоторой гидродинамической переменной, имеющей смысл скорости или температуры несущего потока, в виде осредненной и пульсационной составляющих

$$\varphi(M) = \Phi(M) + \varphi'(M), \quad \text{где } \Phi = \langle \varphi \rangle, \quad \langle \varphi' \rangle = 0. \quad (2.2)$$

Вероятностное среднее значение  $\Phi$  переменной  $\varphi$  определяется соотношением (2.1).

При таком подходе к операции осреднения полей гидродинамических характеристик условия Рейнольдса описывают известные свойства теоретико-вероятностных средних значений, доказательство которых приводится в курсе теории вероятности [?, с.200], и не требует специального обоснования.

Реальная интерпретация выводов формальной теории и сопоставление теоретических результатов с данными непосредственных измерений или численных расчетов требует использования некоторых предположений об *эргодичности*.

Определение временных средних предполагает, что интервал усреднения много больше всех характерных времен рассматриваемой системы, в частности времени релаксационных процессов, приводящих к установлению равновесного состояния. Фазовые средние, вычисляемые с помощью функции распределения микросостояний системы, могут быть определены как для равновесных, так и неравновесных состояний [?]. Функция распределения при этом характеризует степень неполноты задания микросостояний систем ансамбля.

В теории турбулентности вводится предположение о сходимости временных средних значений при неограниченном увеличении интервала осреднения к соответствующим вероятностным средним значениям. Справедливость *эргодической гипотезы* в некоторых специальных случаях может быть строго доказана на основе теорем современной эргодической теории [?], например эргодической *теоремы Биркгофа-Хинчина* для стационарных случайных процессов [?], а в остальных случаях она принимается в качестве дополнительного допущения.

Рассмотрим вопрос о том, при каких условиях временные средние значения случайного поля  $u(\mathbf{x}, \tau)$  при неограниченном увеличении промежутка осреднения сходятся к соответствующим теоретико-вероятностным средним значениям (аргумент  $\mathbf{x}$  опустим)

$$U^T(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(\tau + s) ds \longrightarrow \langle u(\tau) \rangle \equiv U \quad \text{при} \quad T \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Сходимость случайной величины  $U^T(\tau)$ , задаваемая равенством (2.3), при  $T \rightarrow \infty$  к  $U = \langle u \rangle$  понимается в среднем квадратичном смысле

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \overline{|U^T - U|^2} = 0. \quad (2.4)$$

Согласно эргодической *теореме Слуцкого* [?, с.203] для стационарных случайных процессов<sup>1</sup>, для того, чтобы случайный процесс  $u(\tau)$  удовлетворял предельному соотношению (2.4), необходимо и достаточно, чтобы для корреляционной функции  $b_{uu}(\tau)$  выполнялось условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T b_{uu}(s) ds = 0. \quad (2.5)$$

Условие (2.5) выполнено, если  $b_{uu}(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ .

Корреляционные функции пульсаций гидродинамических полей стационарного турбулентного течения  $b_{uu}(\tau'' - \tau')$  практически всегда можно считать стремящимися к нулю при  $|\tau'' - \tau'| \rightarrow \infty$ . Следовательно, в установившихся турбулентных течениях теоретико-вероятностное среднее значение (2.1) любого гидродинамического поля может быть определено с помощью осреднения по достаточно большому интервалу времени.

Одним из основных параметров, характеризующим стационарные случайные процессы, является *время корреляции*  $\tau_{cor}$ , определяющее по порядку величины временной интервал  $\tau = \tau'' - \tau'$ , на котором корреляции отличны от нуля. Количественно время корреляции поля  $u(\tau)$  определяется выражением

$$\tau_{cor} = \frac{1}{b_{uu}(0)} \int_0^\infty |b_{uu}(\tau)| d\tau.$$

<sup>1</sup>E.E.Slutsky, 1938

Очевидно, что при конечном значении  $b_{uu}(0)$  время корреляции конечно, если скорость убывания  $b_{uu}(\tau)$  при увеличении  $\tau$  такова, что сходится интеграл

$$\int_0^{\infty} |b_{uu}(\tau)| d\tau < \infty.$$

Можно показать [?, с.140], что

$$\overline{|U^T - U|^2} < \frac{\tau_{cor}}{T} \overline{(u - \langle u \rangle)^2} \equiv \frac{\tau_{cor}}{T} b_{uu}(0).$$

Следовательно, при  $\tau_{cor} \ll T$  отклонение величины  $U^T$ , осредненной по достаточно большому интервалу времени  $T$ , от среднего фазового значения  $U$  много меньше дисперсии  $b_{uu}(0)$ .

При наличии двух временных параметров  $\tau_{cor}$  и  $\tau_{rel}$ , характеризующих время протекания быстрых процессов и время установления равновесного состояния соответственно, период осреднения  $T$  выбирается, исходя из неравенства  $\tau_{cor} \ll T \ll \tau_{rel}$ .

Для описания турбулентных течений используются методы теории вероятности.

Вероятность того, что поток в точке пространства  $\mathbf{r}$  имеет плотность в интервале от  $\rho$  до  $\rho + d\rho$ , скорость в направлении оси  $x$  в интервале от  $v_x$  до  $v_x + dv_x$ , скорость в направлении оси  $y$  в интервале от  $v_y$  до  $v_y + dv_y$ , скорость в направлении оси  $z$  в интервале от  $v_z$  до  $v_z + dv_z$ , температуру в интервале от  $T$  до  $T + dT$ , а локальный состав, соответствующий массовым долям в интервале от  $w_i$  до  $dw_i$ , записывается в виде

$$P(\rho, v_x, v_y, v_z, w_1, \dots, w_{S-1, T, \mathbf{r}}) d\rho dv_x dv_y dv_z dw_1 \dots dw_{S-1} dT,$$

где  $P$  представляет собой функцию плотности вероятности. Величина

$$w_S = 1 - \sum_{i=1}^S w_i$$

является известной.

Поскольку полная вероятность для системы находиться в какой-либо точке пространства с координатами  $\rho, v_x, v_y, v_z, w_1, \dots, w_{S-1}, T$  равняется единице, то выполняется условие нормировки

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P(\rho, v_x, v_y, v_z, w_1, \dots, w_{S-1, T, \mathbf{r}}) d\rho dv_x dv_y dv_z dw_1 \dots dw_{S-1} dT = 1.$$

При известной функции плотности вероятности  $P(\mathbf{r})$  в некоторой точке  $\mathbf{r}$  средние значения локальных свойств вычисляются при помощи осреднения по ансамблю реализаций. Для средней плотности и средней плотности импульса в направлении  $i$  имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \bar{\rho}(\mathbf{r}) &= \int \rho P(\rho, \dots, T, \mathbf{r}) d\rho \dots dT; \\ \overline{\rho v_i}(\mathbf{r}) &= \int \rho v_i P(\rho, \dots, T, \mathbf{r}) d\rho \dots dT. \end{aligned}$$

### 2.3. Трехчленное разложение

В некоторых течениях могут возникать так называемые *когерентные структуры*, представляющие собой вихревые образования (сгустки завихренности, локализованные в пространстве), развивающиеся и взаимодействующие друг с другом на фоне мелко-масштабной турбулентности [4]. Когерентные структуры имеют размеры, соизмеримые с поперечным размером слоя смешения и характеризуются достаточно большим временем существования. Наличие сравнительно долгоживущих взаимодействующих друг с другом вихревых образований вносит в хаотическую турбулентность детерминистические аспекты. Образование, взаимодействие и разрушение когерентных структур играет, в частности, важную роль в процессе генерации шума на начальном участке струи. Например, в момент слияния двух крупномасштабных вихревых структур фиксируется мгновенный максимум пульсаций давления в ближнем поле струи.

Для расчета движения когерентных структур в некоторых подходах (например, в VLES) используется *трехчленное разложение* [4, 113], согласно которому мгновенное значение переменной  $f$  представляется в виде суммы осредненной по времени величины  $\bar{f}$ , не зависящей от времени, случайной пульсационной (некогерентной) составляющей  $f'$ , описывающей мелкомасштабное движение, и периодической (когерентной) составляющей  $f''$ , соответствующей крупным вихрям, а именно

$$f(\mathbf{x}, t) = \bar{f}(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x}, t) + f''(\mathbf{x}, t).$$

При таком представлении предполагается, что когерентная и некогерентная составляющие некоррелированы.

Система уравнений, описывающая поведение каждой из составляющей, получается из уравнений Навье-Стокса и уравнения неразрывности после подстановки входящих в них мгновенных величин в виде трехчленного разложения и применения соответствующих операторов осреднения: осреднения по времени и фазового осреднения, используемого для выделения периодической когерентной составляющей. Периодическая составляющая вычисляется следующим образом

$$f''(\mathbf{x}, t) = \langle f(\mathbf{x}, t) \rangle - \bar{f}(\mathbf{x}).$$

Угловые скобки обозначают фазовое осреднение.

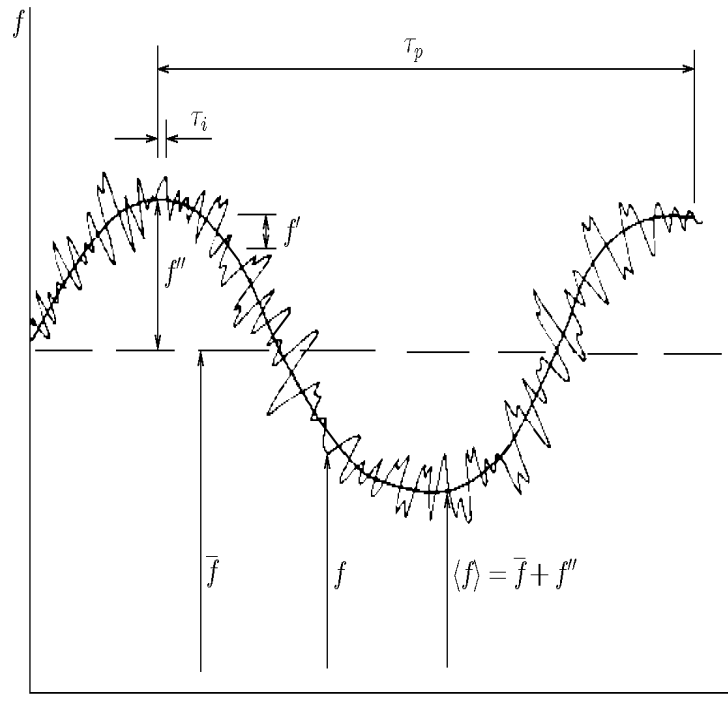


Рис. 2.1. Трехчленное разложение мгновенных значений параметров турбулентного потока

В результате получается система уравнений для осредненного, периодического и случайного движения, в которой наряду с рейнольдсовыми напряжениями  $\overline{v'_i v'_j}$ , вызванными мелкомасштабным турбулентным движением, входят дополнительные напряжения  $\overline{v''_i v''_j}$ , обусловленные периодическими когерентными структурами. Кроме того, в этих уравнениях содержатся члены, учитывающие взаимодействие периодического и случайного движения, а также каждого из них с осредненным движением. Членами, содержащими перекрестные напряжения (вторые моменты периодической и случайной составляющих), обычно пренебрегается.

Рейнольдсовы напряжения находятся при помощи одной из моделей турбулентности [2]. Для нахождения периодической составляющей обычно используется линейная теория устойчивости в невязком приближении [13]. Наличие нелинейных волновых процессов учитывается при помощи энергетического интегрального метода. Вместо дифференциальных уравнений переноса кинетической энергии среднего течения, периодического крупномасштабного и случайного мелкомасштабного движений, обычно рассматривается интегральное соотношение, полученное при помощи интегрирования поперек слоя смешения исходных дифференциальных уравнений [4].

## 2.4. Осреднение по Фавру

Наряду с временным осреднением, существуют и другие подходы, например, подход Фавра, который связан с введением средневзвешенных параметров. Применительно к турбулентным течениям с переменной плотностью он позволяет упростить систему уравнений, записанную относительно средних параметров потока. Согласно *подходу Фавра* (А.

Favre, 1965), вводится следующее представление

$$f(\mathbf{x}, t) = \tilde{f}(\mathbf{x}, t) + f''(\mathbf{x}, t).$$

Средневзвешенные параметры течения определяются таким образом, чтобы уравнение неразрывности имело точно такой же вид, как и для мгновенных величин

$$\tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho}.$$

Прямая черта сверху обозначает временное осреднение. Для плотности и давления сохраняется обычное представление. Очевидно, что для несжимаемой жидкости  $\tilde{f} \equiv \bar{f}$ .

Можно показать, что  $\overline{\rho f''} = 0$ , в то время как средние значения пульсационных величин, обозначенные двумя штрихами, не равны нулю  $\bar{f''} \neq 0$ .

Осреднение Фавра использует средневзвешенные по плотности величины. Произвольная функция  $f$  представляется в виде суммы ее средней по времени величины и флуктуационной части

$$f(\mathbf{x}, t) = \tilde{f}(\mathbf{x}, t) + f''(\mathbf{x}, t).$$

Тогда флуктуация Фавра, обозначенная двумя штрихами, выражается соотношением

$$\overline{\rho f''} = 0.$$

Использование средневзвешенных по плотности величин позволяет получить более компактные формулы с меньшим числом неизвестных корреляций.

## 2.5. Оператор фильтрации

Для получения фильтрованных уравнений Навье-Стокса используются подходы с явным и неявным введением оператора фильтрации [53].

### 2.5.1. Неявная фильтрация

Значения параметров потока в дискретных точках при численном моделировании представляют собой осредненные величины (по объему ячейки разностной сетки). Центральноразностная дискретизация первой производной непрерывной функции  $f(x)$  на равномерной сетке, имеющей шаг  $h$ , записывается в виде

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{d}{dx} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(\xi) d\xi.$$

Центральноразностная дискретизация может рассматриваться в качестве оператора, фильтрующего масштабы, меньшие, чем шаг сетки. Кроме того, такое представление дает значение производной осредненной величины.

При дискретизации уравнений Навье-Стокса на основе метода контрольного объема фильтрация осуществляется неявным образом

$$f(x) = \frac{1}{V} \int_V f(\xi) d\xi.$$

Здесь  $V$  — контрольный объем.

Недостатки неявной фильтрации связаны с трудностями сравнения полученных результатов с результатами DNS и экспериментальными данными. Кроме того, неявная фильтрация не позволяет контролировать высокочастотную часть спектра, что может приводить к численным ошибкам.



### 2.5.2. Явная фильтрация

Введем *обобщенный фильтр* (А. Leonard, 1974), дающий формальное определение операции осреднения и позволяющий исключить из рассмотрения масштабы, меньшие некоторой наперед заданной величины  $\Delta$ , называемой *шириной фильтра* (filter length). Вихри, размер которых меньше, чем ширина фильтра, не разрешаются. Обобщенный фильтр определяется следующим образом

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \int_D f(\boldsymbol{\xi}, t) g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}, \Delta) d\boldsymbol{\xi}.$$

В том случае, когда функция  $g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  зависит только от разности  $\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}$ , операции дифференцирования и фильтрации коммутируют. Тогда обобщенный фильтр вводится как интеграл свертки

$$\bar{f}(\mathbf{x}, t) = \int_D f(\boldsymbol{\xi}, t) g(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \Delta) d\boldsymbol{\xi} = f(\mathbf{x}, t) * g(\mathbf{x}, \Delta).$$

Предполагается, что *фильтрующая функция*  $g(\mathbf{x})$  (filtering function), называемая также *ядром фильтра* (filter kernel), является четной и бесконечно дифференцируемой в ограниченной области  $D$ , имеет компактный носитель и удовлетворяет условию нормировки

$$g(\mathbf{x}) = g(-\mathbf{x}), \quad \int_D g(\boldsymbol{\xi}, \Delta) d\boldsymbol{\xi} = 1.$$

В предельном случае имеют место соотношения

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_D f(\boldsymbol{\xi}, t) g(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}, \Delta) d\boldsymbol{\xi} = f(\mathbf{x}, t), \quad \lim_{\Delta \rightarrow 0} g(\mathbf{x}, \Delta) = \delta(\mathbf{x}).$$

Интегрирование проводится по всей области течения  $D$ . Фильтрующая функция определяет структуру и размер мелкомасштабных турбулентных вихрей, разрешаемых системой осредненных уравнений. Пример фильтрующей функции приведен на рис. 2.2.

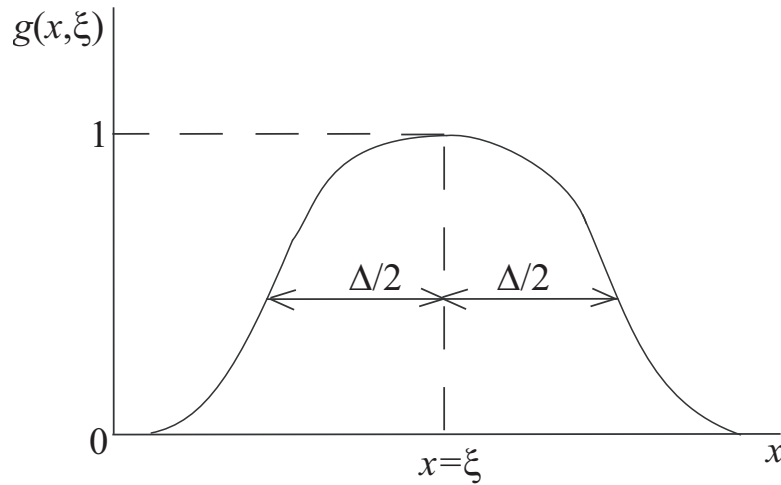


Рис. 2.2. Фильтрующая функция



Согласно теореме Бореля о свертке, преобразование Фурье свертки равняется произведению преобразований Фурье

$$\mathcal{F}[f(\mathbf{x}, t) * g(\mathbf{x})] = \mathcal{F}[f(\mathbf{x}, t)]\mathcal{F}[g(\mathbf{x})].$$

Преобразованием Фурье функции  $f(\mathbf{x})$ , абсолютная величина  $|f(\mathbf{x})|$  которой интегрируема на интервале  $-\infty < \mathbf{x} < +\infty$ , называется функция  $c(\mathbf{k}) = \mathcal{F}[f(\mathbf{x})]$ , где

$$c(\mathbf{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\mathbf{x}) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

Формула обращения имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{x}) d\mathbf{k}.$$

### 2.5.3. Виды фильтров

Существуют различные виды фильтров, используемые в численных расчетах. Приведем примеры некоторых из них [2, 45, 82].

1. Коробочный фильтр (J.W. Deardorff, 1970)

$$g(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} 1/\Delta^3, & |\mathbf{x}_i - \xi_i| \leq \Delta x_i/2 \\ 0, & |\mathbf{x}_i - \xi_i| > \Delta x_i/2 \end{cases}.$$

2. Фильтр Гаусса (J.H. Ferziger, 1976)

$$g(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \left( \frac{6}{\pi\Delta^2} \right)^{3/2} \exp[-6|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^2/\Delta^2].$$

3. Фильтр Фурье

$$g(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{\Delta^3} \prod_i \frac{\sin 2\delta_i}{\delta_i}, \quad \text{где} \quad \delta_i = \pi \frac{x_i - \xi_i}{\Delta}.$$

Для одномерного случая в табл. 2 приведены примеры фильтрующих функций  $g(r)$  и соответствующие им преобразования Фурье  $c(k)$ , причем  $\delta_r = 2\pi r/\Delta$ ,  $\delta_k = k\Delta/2$ .

Таблица 2

Фильтрующие функции и соответствующие им преобразования Фурье

фильтр	$g(r)$	$c(k)$
коробочный фильтр	$\begin{matrix} 1/\Delta, &  r  \leq \Delta/2 \\ 0, &  r  > \Delta/2 \end{matrix}$	$\begin{matrix} \sin \delta_k/\delta_k, &  k  \leq 1/\Delta \\ 0, &  k  > 1/\Delta \end{matrix}$
фильтр Гаусса	$\left( \frac{6}{\pi\Delta^2} \right)^{1/2} \exp(-6r^2/\Delta^2)$	$\exp(-k^2\Delta^2/24)$
фильтр Фурье	$\frac{2}{\Delta} \frac{\sin \delta_r}{\delta_r}$	$\begin{matrix} 1, &  k  \leq 1/\Delta \\ 0, &  k  > 1/\Delta \end{matrix}$

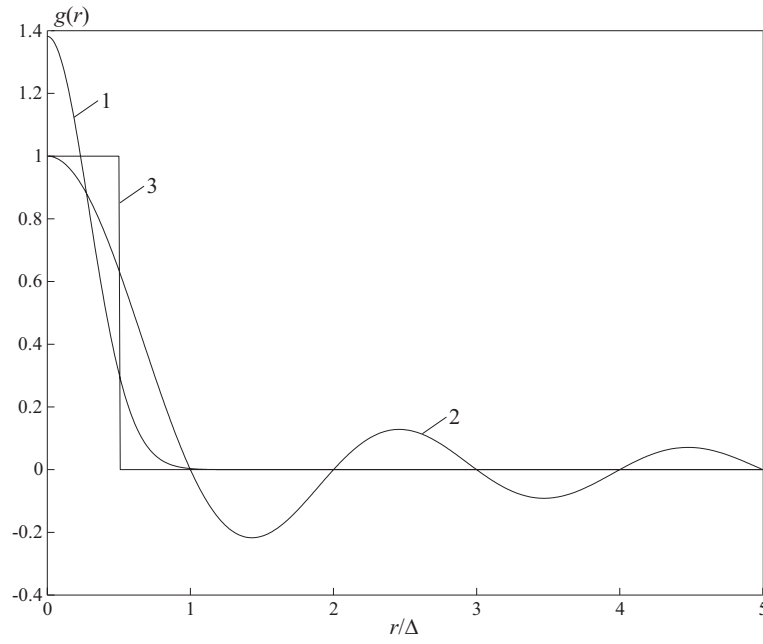


Рис. 2.3. Фильтрующие функции и соответствующие им преобразования Фурье (1 — коробочный фильтр, 2 — фильтр Гаусса, 3 — фильтр Фурье)

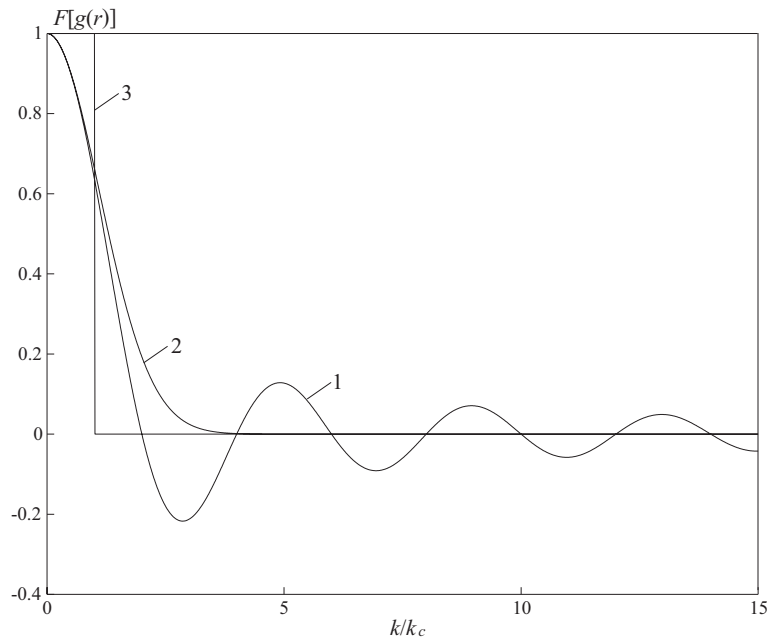


Рис. 2.4. Преобразования Фурье, соответствующие различным фильтрующим функциям (1 — коробочный фильтр, 2 — фильтр Гаусса, 3 — фильтр Фурье)

За исключением Фурье-фильтра (sharp Fourier cutoff filter), фильтрация отличается от стандартной операции осреднения во времени тем, что

$$\overline{\overline{f}} \neq \overline{f}.$$

### 2.5.4. Ширина фильтра

Для представления наименьших разрешимых масштабов необходимо, чтобы ширина фильтра не превосходила шага разностной сетки. Обычно различие между этими двумя величинами игнорируется, и ширина фильтра полагается равной

$$\Delta = V^{1/3} = (\Delta x \Delta y \Delta z)^{1/3},$$

где  $V$  — объем ячейки разностной сетки;  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  — шаги сетки в координатных направлениях  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответственно. Поскольку ширина фильтра зависит от разностной сетки, то фильтрующую функцию часто называют *сеточным фильтром* (grid filter).

Для расчета пограничных слоев предлагается заменить шаг сетки в нормальном к стенке направлении  $\Delta y$  на величину  $\hat{\Delta y}$  и находить ширину фильтра, используя соотношение

$$\Delta = (\Delta x \hat{\Delta y} \Delta z)^{1/3}.$$

Причем  $\hat{\Delta y} = \Delta y$  вблизи стенки и  $\hat{\Delta y} = \bar{\Delta y}$  вдали от стенки. Для промежуточных значений  $y$  используется плавный переход между указанными предельными значениями. Величина  $\bar{\Delta y}$  представляет собой среднее значение  $\Delta y$  в пристеночной области, а величина  $\hat{\Delta y}$  рассчитывается по формуле

$$\hat{\Delta y} = \left[ \left( \frac{1}{\Delta y} \right)^\omega + \left( \frac{1}{\bar{\Delta y}} \right)^\omega \right]^{-1/\omega},$$

где  $\omega = 3$ .

Имеются также и другие определения ширины фильтра [45]

$$\Delta = \beta^N \left( \prod_{i=1}^N \Delta x_i \right)^{1/2};$$

$$\Delta = \beta \left( \sum_{i=1}^N \Delta x_i^2 \right)^{1/2};$$

$$\Delta = \beta \min_{i=1, \dots, N} \Delta x_i;$$

$$\Delta = \beta \max_{i=1, \dots, N} \Delta x_i.$$

Здесь  $N$  — размерность задачи,  $\beta$  — коэффициент пропорциональности.

При использовании неструктурированной сетки ширина фильтра находится из соотношения [28]

$$\Delta = 4 \max |\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_m^k|,$$

где  $\mathbf{r}_c$  — радиус-вектор центра ячейки,  $\mathbf{r}_m^k$  — радиус вектор середины стороны ячейки с номером  $k$ . Для структурированной сетки получается соотношение

$$\Delta = 2 \max \{ \Delta x, \Delta y, \Delta z \}.$$

Используется и другое определение ширины фильтра на неструктурированной сетке [34]

$$\Delta = \max \{ \Delta_i^k \},$$

где  $\Delta_i^k$  — длина  $i$ -й стороны  $k$ -го контрольного объема.

### 2.5.5. Проблемы, связанные с фильтрацией

Оператор фильтрации является коммутативным только тогда, когда сетка является однородной (при  $\Delta = \text{const}$ ).

В общем случае ширина фильтра различается по разным координатным направлениям. Ограничиваясь рассмотрением одномерного случая, применим оператор фильтрации к производной  $\partial f / \partial x$ . Тогда

$$\overline{\frac{\partial f(x)}{\partial x}} = \int_D \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi} g[x - \xi, \Delta(x)] d\xi.$$

Интегрируя по частям, получим

$$\overline{\frac{\partial f(x)}{\partial x}} = f(\xi)g[x - \xi, \Delta(x)] \Big|_D - \int_D f(\xi) \frac{\partial g[x - \xi, \Delta(x)]}{\partial \xi} d\xi.$$

Первое слагаемое обращается в ноль, поскольку на границах вычислительной области  $f(\xi)g[x - \xi, \Delta(x)] = 0$ . Для производной от фильтрующей функции можно записать следующее соотношение

$$\frac{\partial g[x - \xi, \Delta(x)]}{\partial \xi} = \frac{\partial g[x - \xi, \Delta(x)]}{\partial \Delta} \frac{d\Delta(x)}{dx} - \frac{\partial g[x - \xi, \Delta(x)]}{\partial x}.$$

Выполняя преобразования, получим

$$\overline{\frac{\partial f(x)}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} \int_D f(\xi)g[x - \xi, \Delta(x)] d\xi - \int_D f(\xi) \frac{\partial g[x - \xi, \Delta(x)]}{\partial \Delta} \frac{d\Delta(x)}{dx} d\xi.$$

В результате, имеет место соотношение

$$\overline{\frac{\partial f(x)}{\partial x}} = \frac{\partial \bar{f}(x)}{\partial x} - \frac{\partial \bar{f}(x)}{\partial \Delta} \frac{d\Delta(x)}{dx}.$$

Изменение ширины фильтра в пространстве приводит к появлению дополнительного слагаемого

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] = \overline{\frac{\partial f(x)}{\partial x}} - \frac{\partial \bar{f}(x)}{\partial x} = - \frac{\partial \bar{f}}{\partial \Delta} \frac{d\Delta}{dx},$$

которое имеет такой же порядок малости, что и производные по пространственной координате, и дает ошибку порядка  $O(\Delta^2)$ , а в ряде случаев вызывает неустойчивость численной процедуры. Слагаемые, связанные с подсеточным переносом массы, импульса и энергии, имеют порядок  $O(\Delta^n)$ , где  $4/3 < n < 2$  [46]. Во многих расчетах дополнительными слагаемыми, возникающими вследствие изменения ширины фильтра в пространстве, пренебрегается [82].

Такой же результат имеет место и в многомерном пространстве [70]

$$(\nabla \cdot g*) f = \nabla (f * g) - \left( \frac{\partial g}{\partial \Delta} * f \right) \text{grad } \Delta.$$

Для уменьшения вычислительной ошибки при использовании схем высокого порядка точности необходимо вводить специальные корректирующие поправки. Иногда оператор фильтрации определяется таким образом, чтобы физическое пространство с  $\Delta = \text{var}$

отображалось на вычислительное пространство, где  $\Delta = \text{const}$ . При этом в физическом пространстве  $g[x - \xi, \Delta(x, \xi)]$ . В некоторых случаях используются фильтры специального вида [115].

Для неструктурированных сеток применяются дискретные фильтры. Оператор фильтрации определяется следующим образом [71]

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\Delta(x)} \int_d f(\xi) g[(x - \xi)/\Delta(x), x] d\xi.$$

При фильтрации уравнений Навье-Стокса фильтрующая функция выбирается таким образом, чтобы выполнялось условие

$$(g*, \nabla) \mathbf{v} = 0.$$

Форма записи уравнений, используемых в LES, не зависит от того или иного выбора фильтрующей функции  $g(\mathbf{x})$ . Конкретный вид фильтра играет роль только при статистической обработке и сравнении результатов численного моделирования с экспериментальными данными или результатами, полученными при помощи DNS. В то же время, результаты численных расчетов, в частности, размеры разрешимых масштабов турбулентности зависят от выбора ширины фильтра [30, 117]. Приемлемая ширина фильтра выбирается, как правило, методом проб и ошибок. При  $\Delta \rightarrow 0$  метод LES переходит в DNS.

### 2.5.6. Переход к средним параметрам

Пренебрегая для сжимаемого течения подсеточными флуктуациями плотности, переход к средним по времени параметрам осуществляется следующим образом

$$\langle f(\mathbf{x}) \rangle = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^N f(\mathbf{x}, t_n) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N f(\mathbf{x}, t_n).$$

Среднеквадратическое значение флуктуации вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \langle f'^2(\mathbf{x}) \rangle &= \left\{ \frac{1}{T} \sum_{n=0}^N [f(\mathbf{x}, t_n) - \langle f(\mathbf{x}) \rangle]^2 \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [f(\mathbf{x}, t_n) - \langle f(\mathbf{x}) \rangle]^2 \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Флуктуация около среднего значения находится из соотношения

$$f'(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x}, t) - \langle f(\mathbf{x}) \rangle = \left[ \langle f'^2(\mathbf{x}) \rangle \right]^{1/2}.$$

Корреляционные моменты вычисляются по формуле

$$\begin{aligned} \langle f'(\mathbf{x}) g'(\mathbf{x}) \rangle &= \left\{ \frac{1}{T} \sum_{n=0}^N [f(\mathbf{x}, t_n) - \langle f(\mathbf{x}) \rangle] [g(\mathbf{x}, t_n) - \langle g(\mathbf{x}) \rangle] \right\}^{1/2} = \\ &= \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N [f(\mathbf{x}, t_n) - \langle f(\mathbf{x}) \rangle] [g(\mathbf{x}, t_n) - \langle g(\mathbf{x}) \rangle] \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Здесь  $n$  — номер шага по времени,  $N$  — общее число временных выборок (число шагов по времени),  $T$  — временной интервал. Угловые скобки обозначают фазовое осреднение и осреднение по времени.

### 2.5.7. Спектр пульсаций

Энергетический спектр пульсаций течения находится на основе рассчитанной зависимости составляющих скорости от времени (составляющие скорости вычисляются в ряде точек расчетной области с некоторым шагом по времени).

Представляя составляющие скорости в некотором координатном направлении в виде суммы среднего значения и пульсационной составляющей  $u = \bar{u} + u'$ , и применяя к  $u'$  дискретное преобразование Фурье, пульсационную составляющую скорости можно представить в следующем виде

$$u' = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N/2} \left( a_{k+1} \cos \frac{2\pi kl}{N} + b_{k+1} \sin \frac{2\pi kl}{N} \right).$$

Коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$a_{k+1} = 2 \sum_{l=0}^{N-1} u^{l+1} \cos \frac{2\pi kl}{N}, \quad b_{k+1} = 2 \sum_{l=0}^{N-1} u^{l+1} \sin \frac{2\pi kl}{N}.$$

Здесь  $u^{l+1}$  — значение составляющей скорости в точке  $(i, j)$  в момент времени  $l\Delta t$ ;  $N$  — число учитываемых записей по времени ( $k = 1, \dots, N/2$ ). На основе вычисленных значений коэффициентов Фурье строится энергетический спектр турбулентных пульсаций скорости

$$E(k) = a_k^2 + b_k^2.$$

Максимальное значение  $k = N/2$  соответствует колебаниям с периодом  $\Delta t$ . Более высокочастотные колебания при выбранной частоте записей не разрешаются. Численные оценки показывают, что для удовлетворительного разрешения колебания требуется около 4–5 расчетных точек на период, поэтому полученный спектр можно считать достоверным при  $k \leq N/8$ .

## 2.6. Уравнения, описывающие течения высокотемпературных газовых смесей

Система уравнений, описывающая течение многокомпонентной реагирующей смеси газов, включает в себя уравнения неразрывности, изменения количества движения и энергии для смеси, уравнения неразрывности для каждого из компонент  $\alpha = 1, \dots, M$  и уравнение состояния. В дифференциальной форме уравнения сохранения имеют следующий вид [8, 16]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0; \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \rho Y_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho Y_\alpha \mathbf{v} + \mathbf{J}_\alpha) = S_\alpha; \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v} - \mathbf{\Pi}) = \rho \sum_{\alpha} Y_\alpha \mathbf{F}_\alpha; \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \mathbf{v} - \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} + \mathbf{q}^r) = \rho \sum_{\alpha} Y_\alpha \mathbf{F}_\alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}_\alpha). \quad (2.9)$$

Здесь  $\mathbf{v}$  — среднемассовая скорость смеси,  $\mathbf{w}_\alpha$  — скорость диффузии компонента  $\alpha$ ,  $\mathbf{q}$  — тепловой поток за счет теплопроводности,  $\mathbf{q}^r$  — радиационный тепловой поток,  $S_\alpha$  — массовая скорость образования компонента  $\alpha$  в химических реакциях.

Уравнение состояния смеси записывается в виде

$$p = \rho \frac{R}{M} T. \quad (2.10)$$

Здесь  $R$  — универсальная газовая постоянная.

Молярная масса смеси  $M$  рассчитывается через молярные массы своих компонент  $M_\alpha$  по формуле

$$\frac{1}{M} = \sum_{\alpha} \frac{Y_{\alpha}}{M_{\alpha}}.$$

Массовая концентрация компонента  $\alpha$  равна  $Y_{\alpha} = \rho_{\alpha}/\rho$ , причем

$$\sum_{\alpha} Y_{\alpha} = 1.$$

Тензор напряжений  $\mathbf{\Pi}$  связан с давлением  $p$  и тензором вязких напряжений  $\mathbf{T}$  при помощи соотношения

$$\mathbf{\Pi} = -p \mathbf{I} + \mathbf{T}.$$

Тензор вязких напряжений связан с тензором скоростей деформаций  $\mathbf{E}$  при помощи соотношения, выражающего обобщенный закон Ньютона

$$\mathbf{T} = 2\mu \mathbf{S} - \frac{2}{3} \mu \nabla \mathbf{v} \mathbf{I},$$

где

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{v}) + (\nabla \mathbf{v})^*].$$

Здесь  $\mathbf{I}$  — единичный тензор. Звездочка обозначает сопряженный тензор.

Вектор плотности теплового потока в многокомпонентной смеси реагирующих газов записывается в виде обобщенного закона Фурье

$$\mathbf{q} = -\lambda \nabla T + \sum_{\alpha} h_{\alpha} \mathbf{J}_{\alpha}.$$

Вкладом термодиффузии в перенос энергии пренебрегается. Вычисление плотности теплового потока за счет излучения требует построения специальной математической модели.

Удельная энтальпия компонента  $\alpha$  вычисляется по формуле

$$h_{\alpha} = h_{\alpha}^{\circ}(T_0) + \int_{T_0}^T c_{p\alpha}(T) dT.$$

Приведенное соотношение учитывает энергию образования компонента  $h_{\alpha}^{\circ}$  при температуре  $T_0$ . Зависимость удельной теплоемкости компонента  $c_{p\alpha}$  от температуры (до  $T \sim 2500$  К) аппроксимируется полиномиальной зависимостью

$$c_{p\alpha} = \sum_i c_{p\alpha}^{(i)} (T - T_0)^i.$$



Здесь  $T_0 = 298.15$  К.

Удельная энтальпия  $h$  и удельная теплоемкость смеси  $c_p$  вычисляются путем суммирования по всем компонентам смеси

$$h = \sum_{\alpha} h_{\alpha} Y_{\alpha}, \quad c_p = \sum_{\alpha} c_{p\alpha} Y_{\alpha}.$$

Полная удельная энергия смеси  $e$  связана с удельной внутренней энергией  $u$  посредством соотношения

$$e = u + \frac{v_k v_k}{2}, \quad u = h - \frac{p}{\rho}.$$

Для вычисления векторов плотности массовых диффузионных потоков компонент  $\mathbf{J}_{\alpha} = \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha}$  и коэффициентов переноса многокомпонентной смеси (коэффициентов вязкости  $\mu$ , теплопроводности  $\lambda$  и диффузии  $D_{\alpha}$ ) необходимо использовать результаты кинетической теории газов [8, 16]. Однако получение явных выражений для диффузионных потоков требует обращения матрицы размерности  $(M-1) \times (M-1)$ . При большом числе компонент такой подход приводит к существенным вычислительным затратам. Поэтому на практике обычно применяют приближенные способы описания многокомпонентной диффузии.

При незначительном различии молярных масс и коэффициентов диффузии компонент диффузионный поток для компонента  $\alpha$  записывается в виде закона Фика

$$\mathbf{J}_{\alpha} = -\rho D_{\alpha} \nabla Y_{\alpha}.$$

Поскольку суммарный поток массы, возникающий из-за взаимной диффузии компонентов отсутствует, то диффузионные скорости удовлетворяют условию

$$\sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} = 0.$$

Коэффициент диффузии  $D_{\alpha}$ , как правило, считается одинаковым для всех компонент.

Для вычисления коэффициентов вязкости и теплопроводности многокомпонентной газовой смеси используются приближенные формулы. Поскольку характерное время реакций обычно много больше среднего времени свободного пробега молекул, то влиянием химических реакций на коэффициенты переноса пренебрегается.

Вектор  $\mathbf{F}_{\alpha}$  представляет собой вектор плотности внешних массовых сил, приходящихся на компонент  $\alpha$  (в общем случае они могут быть различными для разных компонент). При учете действия только силы тяжести можно положить  $\mathbf{F}_{\alpha} = \mathbf{g}$  для  $\forall \alpha = 1, \dots, M$ , где  $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести. Во многих случаях слагаемыми, связанными с внешними массовыми силами, в уравнении энергии можно пренебречь [16].

Проецируя уравнения (2.6)–(2.9) на оси прямоугольной декартовой системы координат и учитывая вышеприведенные соотношения и предположения, получим

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_j = 0; \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \rho Y_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho Y_{\alpha} v_j = -\frac{\partial J_{\alpha j}}{\partial x_j} + m_{\alpha}; \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho v_i v_j = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i; \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \rho e v_j = -\frac{\partial p v_j}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} - \frac{\partial q_j^r}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij} v_j}{\partial x_j}. \quad (2.14)$$

Компоненты тензора вязких напряжений, компоненты тензора скоростей деформаций и составляющие вектора теплового потока вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \mu \left( 2s_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} s_{kk} \right); \\ s_{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right); \\ q_i &= -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}.\end{aligned}$$

Зависимость коэффициентов переноса от температуры учитывается на основе кинетической теории газов и экспериментальных данных [8].

## 2.7. Фильтрованные по пространству уравнения сохранения

В соответствии с определением операции фильтрации, имеет место следующее соотношение

$$\bar{\rho} \tilde{f} = \overline{\rho f} = \int_D \rho f(\boldsymbol{\xi}, t) g(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}.$$

Применяя оператор фильтрации к уравнениям, представляющим законы сохранения, получим следующую систему уравнений

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j) = 0; \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{Y}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{Y}_\alpha \tilde{v}_j) = -\frac{\partial \bar{J}_{\alpha j}}{\partial x_j} + \bar{m}_\alpha - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} (\widetilde{Y_\alpha v_j} - \tilde{Y}_\alpha \tilde{v}_j)]}_I; \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j) &= -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \bar{\rho} g_i - \\ &\quad - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} (\widetilde{v_i v_j} - \tilde{v}_i \tilde{v}_j)]}_II + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \tilde{\tau}_{ij})}_III;\end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{e}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{e} \tilde{v}_j) &= -\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{p} \tilde{v}_j) - \frac{\partial \tilde{q}_j}{\partial x_j} - \frac{\partial \bar{q}_j^r}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{\tau}_{ij} \tilde{v}_j}{\partial x_j} - \\ &\quad - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{\rho} (\widetilde{e v_j} - \tilde{e} \tilde{v}_j)]}_IV - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{q}_j - \tilde{q}_j)}_V - \\ &\quad - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{p} \tilde{v}_j - \bar{p} \tilde{v}_j)}_VI + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} \tilde{v}_j - \tilde{\tau}_{ij} \tilde{v}_j)}_VII.\end{aligned} \quad (2.18)$$

Уравнение состояния имеет вид

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T} \sum_{\alpha} \frac{\tilde{Y}_\alpha}{M_\alpha}. \quad (2.19)$$

Компоненты тензора вязких напряжений, составляющие вектора теплового потока и диффузионного потока массы записываются в виде

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_{ij} &= 2\tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}_{ij} - \frac{2}{3}\tilde{\mu}\delta_{ij}\tilde{\varepsilon}_{kk}, \quad \text{где} \quad \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\tilde{v}_j}{\partial x_i}\right); \\ \tilde{q}_i &= -\tilde{\lambda}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial x_i}; \\ \tilde{J}_{\alpha j} &= -\tilde{\rho}\tilde{D}_\alpha\frac{\partial\tilde{Y}_\alpha}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

Коэффициенты вязкости, теплопроводности и диффузии вычисляются по средней температуре потока

$$\tilde{\mu} = \mu(\tilde{T}), \quad \tilde{\lambda} = \lambda(\tilde{T}), \quad \tilde{D}_\alpha = D_\alpha(\tilde{T}).$$

Система уравнений (2.15)–(2.19) не является замкнутой. Она содержит следующие неизвестные величины, требующие моделирования.

1. Подсеточный диффузионный поток массы

$$J_{\alpha j} = \bar{\rho}(\widetilde{Y_\alpha v_j} - \tilde{Y}_\alpha \tilde{v}_j).$$

2. Тензор подсеточных напряжений

$$\tau_{ij} = \bar{\rho}(\widetilde{v_i v_j} - \tilde{v}_i \tilde{v}_j).$$

В дальнейшем удобно пользоваться обозначением

$$\tau_{ij}^* = \tau_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\tau_{kk}.$$

Используя представление скорости в виде суммы осредненной и пульсационной составляющей, можно записать [47]

$$\tau_{ij} = \bar{\rho}\left(\underbrace{\widetilde{v'_i v'_j}}_{R_{ij}} + \underbrace{\widetilde{\tilde{v}_i \tilde{v}_j} - \tilde{v}_i \tilde{v}_j}_{L_{ij}} + \underbrace{\widetilde{\tilde{v}_i v'_j} + \widetilde{v'_i \tilde{v}_j}}_{C_{ij}}\right).$$

Здесь  $R_{ij}$  — рейнольдсовы напряжения,  $L_{ij}$  — леонардовы напряжения,  $C_{ij}$  — перекрестные напряжения.

Тензор подсеточных напряжений является симметричным, положительно определенным тензором, инвариантным относительно изменения системы координат (изотропная функция своих аргументов).

Для вычисления компонент тензора подсеточных напряжений имеется набор математических моделей различной степени сложности [2, 82]. Во многих подсеточных моделях (например, в моделях вихревой вязкости) перекрестными и леонардовыми напряжениями пренебрегается, а сами подсеточные модели не удовлетворяют условию инвариантности [46]. Тем не менее, такие модели успешно применяются для расчета различных турбулентных потоков.

Учет сжимаемости в подсеточных моделях достаточно сложен, в частности, из-за отсутствия соответствующей информационной базы, и требует введения дополнительных эмпирических коэффициентов [81].

3. Слагаемым III в уравнении изменения количества движения, которое появляется из-за нелинейности конвективных членов, пренебрегается

$$\bar{\tau}_{ij} - \tilde{\tau}_{ij} \simeq 0.$$

4. Подсеточный поток энергии

$$e_j = \bar{\rho} (\widetilde{ev_j} - \tilde{e} \tilde{v}_j).$$

Учитывая представление полной энергии через внутреннюю и кинетическую энергию

$$\tilde{e} = \tilde{u} + \frac{\widetilde{v_k v_k}}{2},$$

слагаемое IV в уравнении изменения энергии можно записать в следующем виде

$$e_j = \bar{\rho} (\widetilde{uv_j} - \tilde{u} \tilde{v}_j) + \frac{\bar{\rho}}{2} (\widetilde{v_j v_k v_k} - \tilde{v}_j \widetilde{v_k v_k}) = \frac{Q_j}{\gamma} + \bar{\rho} D_j.$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой подсеточный тепловой поток

$$\frac{Q_j}{\gamma} = \bar{\rho} (\widetilde{uv_j} - \tilde{u} \tilde{v}_j).$$

Второе слагаемое в правой части представляет собой подсеточную турбулентную диффузию, которая моделируется при помощи следующего соотношения

$$D_j = \frac{1}{2} (\widetilde{v_j v_k v_k} - \tilde{v}_j \widetilde{v_k v_k}) = \frac{1}{2} (\widetilde{v_j v_k v_k} - \tilde{v}_j \tilde{v}_k \tilde{v}_k - \tilde{v}_j \tau_{kk}) \simeq \tau_{jk} \tilde{v}_k.$$

Подсеточный тепловой поток рассчитывается либо на основе специальных моделей, либо связывается с подсеточной турбулентной вязкостью при помощи турбулентного числа Прандтля.

5. Слагаемое V в уравнении изменения полной энергии обычно считается пренебрежимо малым

$$\bar{q}_i - \tilde{q}_i \simeq 0.$$

Такое же предположение делается и относительного плотности теплового потока за счет излучения ( $\bar{q}^r \simeq \tilde{q}^r$ ), а также скорости химической реакции ( $\bar{m}_\alpha \simeq \tilde{m}_\alpha$ ).

6. Слагаемое, связанное с подсеточной работой сил давления. С учетом уравнения состояния слагаемое VI можно записать в следующем виде

$$\overline{pv_j} - \bar{p} \tilde{v}_j = \bar{\rho} \frac{R}{M} (\widetilde{T v_j} - \tilde{T} \tilde{v}_j) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} Q_j.$$

В некоторых расчетах данным слагаемым пренебрегается.

7. Слагаемым VII, представляющим собой подсеточную вязкую диссипацию, обычно пренебрегается

$$\overline{\tau_{ij} v_j} - \widetilde{\tau_{ij} v_j} \simeq 0.$$

На основе сопоставления результатов расчетов течений в слоях смешения с данными прямого численного моделирования при  $M = 0.2 \dots 0.6$  показано, что пренебрежение

слагаемыми III и V вполне допустимо. В то же время, слагаемые VI и VII, связанные с подсчетной работой сил давления и подсчетной вязкой диссипацией, имеют тот же порядок, что и подсчетный тепловой поток  $Q_j$  [82]. Учет подсчетной вязкой диссипации, описываемой слагаемым VII, приводит к результатам, лучше согласующимся с данными прямого численного моделирования (особенно при средних и высоких числах Маха, а также высоких температурах).

Вместо уравнения для полной энергии (2.18) можно использовать уравнение для внутренней энергии или уравнение для энтальпии. Отличие заключается лишь в записи слагаемых, требующих моделирования [81, 82]. Например, при записи уравнения для внутренней энергии вместо  $D_j$  требуется моделирование слагаемого, связанного с расширением трубки тока  $\widetilde{p\varepsilon_{kk}} - \bar{p}\widetilde{\varepsilon_{kk}}$ . Во многих случаях этим слагаемым можно пренебречь.

## 2.8. Учет сжимаемости

В сжимаемом газе формулировка подсчетных моделей усложняется. Для удобства вводится макротемпература

$$\vartheta = \widetilde{T} - \frac{\widetilde{\tau_{kk}}}{2c_v\bar{\rho}},$$

где  $\widetilde{\tau_{kk}}$  представляет собой след тензора подсчетных напряжений.

Макротемпература связывается с макродавлением при помощи соотношения

$$\omega = \bar{p}R\vartheta + \frac{1}{6}(3\gamma - 5)\widetilde{\tau_{kk}},$$

заменяющим уравнение состояния. Последнее слагаемое в приведенном соотношении является малым даже при больших числах Маха, поэтому им пренебрегается, а для связи между  $\bar{\rho}$ ,  $\vartheta$  и  $\omega$  используются законы идеального газа. В этом случае для расчета параметров потока  $\bar{\rho}$ ,  $\widetilde{v}_i$ ,  $\omega$ ,  $\vartheta$  или  $\widetilde{\varepsilon}$  можно получить систему уравнений, эквивалентную уравнениям Навье-Стокса для сжимаемого газа. Коэффициенты переноса вычисляются по тем же самым соотношениям, что и в случае несжимаемой жидкости.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛАГАЕМЫХ, СВЯЗАННЫХ С ПОДСЕТОЧНЫМ ПЕРЕНОСОМ

Приведем основные модели, используемые для вычисления слагаемых, связанных с подсеточным переносом импульса, тепла и массы.

### 3.1. Тензор подсеточных напряжений

Наибольшее распространение среди подсеточных моделей имеют *модели вихревой вязкости* (Eddy Viscosity Model, EVM). Классификацию моделей турбулентности подсеточного масштаба поясняет рис. 3.1, на котором представлены основные группы SGS моделей.



Рис. 3.1. Классификация моделей турбулентности подсеточного масштаба

#### 3.1.1. Модели вихревой вязкости

В моделях вихревой вязкости компоненты тензора подсеточных напряжений находятся из следующего соотношения

$$\tau_{ij} = -2\mu_t \left( \tilde{s}_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \tilde{s}_{kk} \right). \quad (3.1)$$

Соотношение (3.1) можно переписать в другом виде

$$\tau_{ij}^* = -2\mu_t \tilde{s}_{ij} = -\mu_t (\tilde{v}_{i,j} + \tilde{v}_{j,i}).$$

В большинстве моделей для вычисления турбулентной вязкости используются алгебраические соотношения. Из теории размерностей следует, что

$$\nu_t \sim l k_{\text{sgs}}, \quad k_{\text{sgs}} \sim l |\tilde{s}|, \quad l \sim \Delta.$$

Здесь  $k_{\text{sgs}}$  — подсеточная кинетическая энергия турбулентности.

### Модель Смагоринского

В модели Смагоринского турбулентная вязкость вычисляется по формуле [101]

$$\mu_t = \bar{\rho} (C_S \Delta)^2 |\tilde{s}|, \quad (3.2)$$

где

$$|\tilde{s}| = (2\tilde{s}_{ij}\tilde{s}_{ij})^{1/2}.$$

Здесь  $C_S$  — константа Смагоринского,  $\Delta$  — ширина фильтра.

Для оценки параметра Смагоринского можно воспользоваться законом Колмогорова-Обухова. Используя диссипативный участок спектра кинетической энергии турбулентности, получим

$$|\tilde{s}|^2 = 2 \int_0^{\pi/\Delta} \kappa^2 E(\kappa) d\kappa = 2C_K \varepsilon^{2/3} \int_0^{\pi/\Delta} \kappa^{1/3} d\kappa = \frac{2}{3} C_K \varepsilon^{2/3} \left(\frac{\pi}{\Delta}\right)^{4/3}.$$

В результате получим следующую оценку

$$C_S = \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{3C_K}\right)^{3/4},$$

где  $C_K$  — постоянная Колмогорова ( $C_K = 1.4 \dots 1.5$ ).

Обычно считается, что значение параметра Смагоринского находится в интервале  $C_S = 0.10 \dots 0.24$ , в частности,  $C_S = 0.1, 0.15$  и  $0.20$  для течения в канале, слое смешения и однородной затухающей турбулентности за аэродинамической решеткой соответственно [76]. Однако во многих случаях параметр  $C_S$  является функцией пространственных координат и времени, а также зависит от условий и геометрии течения. Например, при расчете пристеночных течений необходимо учитывать зависимость  $C_S$  от расстояния до стенки [82]. Сдвиг уменьшает значение  $C_S$ . Для неизотермических течений значение параметра Смагоринского обычно меньше, чем для изотермических [30].

Соотношение (3.2) удобно переписать в виде

$$\mu_t = \bar{\rho} L^2 |\tilde{s}|.$$

Величина  $L = C_S \Delta$  представляет собой аналог длины перемешивания Прандтля.

В модифицированной модели Смагоринского длина перемешивания выбирается исходя из условия

$$L = \min \{C_S \Delta, \kappa y\}.$$

Здесь  $y$  — расстояние, отсчитываемое по нормали к стенке;  $\kappa$  — постоянная Кармана (обычно  $\kappa = 0.4$ ).



В модели Ван Дрифта влияние стенки на длину перемешивания учитывается при помощи демпфирующей функции

$$L = C_S f_\mu \Delta, \quad \text{где} \quad f_\mu = [1 - \exp(-y^+/A)]^{1/2}.$$

Здесь  $y^+ = y u_\tau / \nu$ ,  $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \bar{\rho}}$ ,  $A = 25$ .

В модели Ван Дрифта используется зависимость демпфирующей функции от локальных характеристик потока. Используется также демпфирующая функция, зависящая от подсеточного числа Рейнольдса

$$\text{Re}_{\text{sgs}} = \frac{|\tilde{s}| \Delta^2}{\nu}.$$

Несмотря на улучшение предсказания характеристик потока по сравнению с моделью Смагоринского, модель Ван Дрифта не имеет должного физического обоснования.

Модель Смагоринского приводит к неудовлетворительным результатам при расчете стратифицированных течений и течений с закруткой. Для моделирования потоков с большой кривизной линий тока турбулентная вязкость, вычисленная по формуле (3.2), умножается на демпфирующую функцию, зависящую от турбулентного числа Ричардсона [98]

$$f(\text{Ri}_t) = (1 - \beta \text{Ri}_t)^{1/2}.$$

Число Ричардсона вычисляется по формуле

$$\text{Ri}_t = \frac{|\tilde{\omega}|^2}{|\tilde{s}|^2} + \frac{|\tilde{\omega}|}{|\tilde{s}|},$$

где

$$\tilde{\omega} = (2\tilde{\omega}_{ij}\tilde{\omega}_{ij})^{1/2}.$$

При увеличении числа Ричардсона турбулентная вязкость уменьшается.

Модель вихревой вязкости Смагоринского использует предположение о локальном равновесии генерации и вязкой диссипации турбулентности

$$\varepsilon_v = -\tilde{\tau}_{ij}\tilde{s}_{ij}.$$

Имеются модификации модели Смагоринского, свободные от этого допущения [35]. Они разработаны для расчета стратифицированных и сдвиговых течений (для течения с однородным сдвигом  $C_S = 0.08 \dots 0.12$ ).

Используя модель Смагоринского, вычислим подсеточную диссипацию турбулентной энергии

$$\varepsilon_{\text{sgs}} = -(C_S \Delta)^2 |\tilde{s}|^3 \leq 0.$$

При вещественном значении  $C_S$  модель Смагоринского является диссипативной и эффектов отрицательной вязкости воспроизводить не может.

Модель Смагоринского обладает значительной диффузией и диссипацией, что позволяет стабилизировать численные расчеты, и успешно применяется для моделирования турбулентных течений. Вместе с тем, результаты DNS показывают, что в некоторых ситуациях (например, в полностью развитом турбулентном течении в канале около стенки) возможна обратная передача энергии — от мелких вихрей к крупным (reverse transition, back-scatter). С математической точки зрения, это означает, что  $\mu_t < 0$  и, следовательно,  $C_S < 0$ . Эффекты отрицательной вязкости не могут быть учтены при помощи модели

Смагоринского. От подобных недостатков свободны модели, использующие динамическую процедуру для определения величины  $C_S$  [48, 118].

В теории ренормализованных групп (Renormalization Group, RNG) расчет подсеточной турбулентной вязкости сводится к решению нелинейного алгебраического уравнения 3-го порядка

$$\mu_t = \mu \left[ 1 + H(X - C) \right]^{1/3}, \quad X = 2A \left( \frac{\Delta}{2\pi} \right)^4 \frac{\mu_t}{\mu^3} \tilde{s}_{ij}^2. \quad (3.3)$$

Здесь  $H(X)$  — функция Хевисайда,  $A = 0.12$ ,  $C = 75$ . При  $X \gg C$  получим формулу Смагоринского

$$C_S = (2\pi)^2 \sqrt{\frac{A}{2}} = 0.0062. \quad (3.4)$$

Полученное значение согласуется с другими данными, а сама модель находит применение для моделирования течений с учетом влияния сил плавучести.

В *пристенной локальной модели вихревой вязкости* (Wall-Adopted Local Eddy Viscosity Model, WALE) подсеточная турбулентная вязкость находится из соотношения, удовлетворяющего поведению характеристик турбулентности в пограничном слое, где  $\nu_t \sim y^{+3}$ . Формула для расчета подсеточной вязкости имеет вид [42]

$$\nu_t = C_W \Delta^2 \frac{(\tilde{s}_{ij}^d \tilde{s}_{ij}^d)^{3/2}}{(\tilde{s}_{ij} \tilde{s}_{ij})^{5/2} + (\tilde{s}_{ij}^d \tilde{s}_{ij}^d)^{5/4}}.$$

Здесь

$$\tilde{s}_{ij}^d = \frac{1}{2} (\tilde{g}_{ij}^2 + \tilde{g}_{ji}^2) - \frac{1}{3} \frac{\delta_{ij}}{\tilde{g}_{kk}^2}, \quad \tilde{g}_{ij}^2 = \tilde{g}_{ik} \tilde{g}_{kj}, \quad \tilde{g}_{ij} = \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j}.$$

Постоянной модели присваивается значение  $C_W = 0.1$ .

В *модели структурной функции* (Structure Function Model) турбулентная вязкость вычисляется по формуле [68]

$$\mu_t = 0.063 \bar{\rho} \Delta \left[ \tilde{F}(\mathbf{x}, \Delta) \right]^{1/2}.$$

Здесь

$$\tilde{F}_2(\mathbf{x}, \Delta) = \langle [\tilde{v}_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \tilde{v}_i(\mathbf{x})] [\tilde{v}_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \tilde{v}_i(\mathbf{x})] \rangle.$$

Угловые скобки обозначают осреднение по точкам, для которых  $|\mathbf{r}| = \Delta$ .

Для сетки с равноотстоящими узлами структурную функцию можно представить в следующем виде

$$\bar{F}_2 \simeq 2\Delta^2 \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} = \Delta^2 (|\tilde{s}|^2 + |\tilde{\omega}|^2).$$

Для расчета турбулентной вязкости получается соотношение

$$\mu_t = 0.063 \bar{\rho} \Delta^2 (|\tilde{s}|^2 + |\tilde{\omega}|^2)^{1/2}.$$

Приведенное соотношение показывает, что модель структурной функции представляет собой модификацию модели Смагоринского [101]. Расчеты свидетельствуют о том, что модель дает реалистичные результаты для течений, близких к изотропным. Для сдвиговых течений такая модель приводит к большим диссипативным эффектам [82].

### Динамическая модель

В *динамической модели* (Dynamic Model, DM) для оценки параметров подсеточной модели (параметра Смагоринского) используется информация, содержащаяся в разрешимых масштабах [48].

Формулировка динамической модели начинается с приближения вихревой вязкости Смагоринского. Для оценки параметра Смагоринского используются два фильтра. Вводится так называемый *пробный* или *тестовый фильтр* (test filter), полоса пропускания которого  $\hat{\Delta}$  превышает ширину исходного фильтра  $\Delta$ , используемого для фильтрации уравнений Навье-Стокса (обычно полагается  $\hat{\Delta} = 2\Delta$ ). Фильтр  $\Delta$  соответствует точному решению фильтрованных уравнений Навье-Стокса при  $\kappa = \kappa_{\max}$ . Фильтр  $\hat{\Delta}$  соответствует гипотетическому решению, имеющему большие разрешимые масштабы и более низкие волновые числа  $\kappa = \kappa_{\max}/2$  (рис. 3.2).

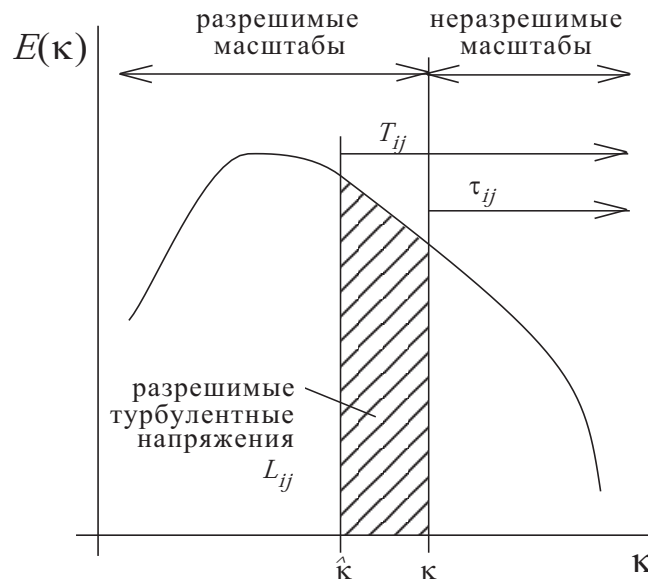


Рис. 3.2. Сеточный и тестовый фильтры в динамической модели

Спектры кинетической энергии турбулентности, построенные на основе мгновенной скорости  $u$ , фильтрованной скорости  $\tilde{u}$  и дважды фильтрованной скорости  $\hat{\hat{u}}$  показаны на рис. 3.3.

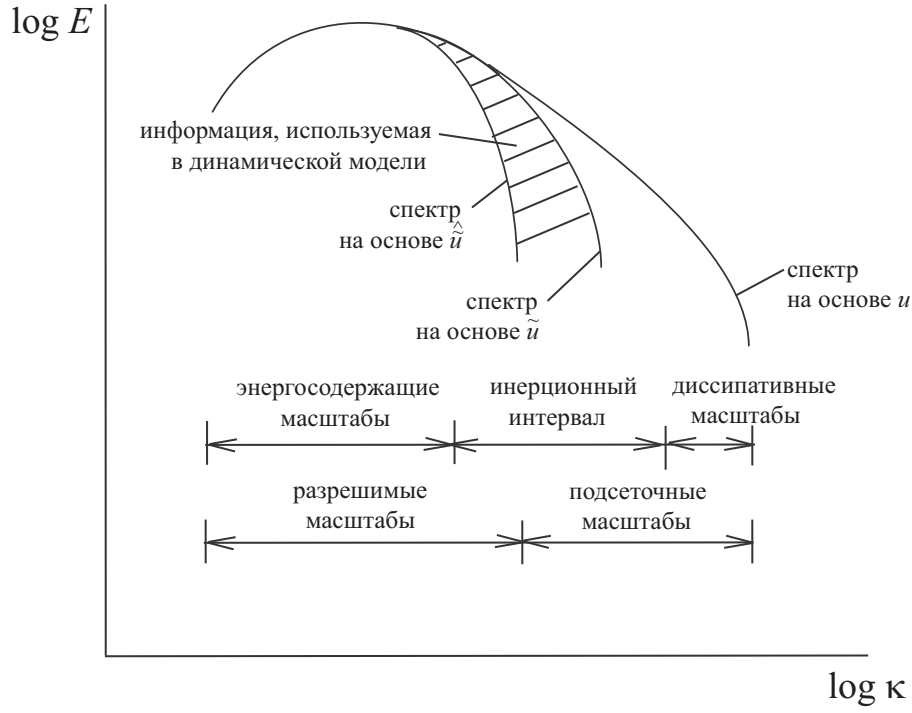


Рис. 3.3. Спектры кинетической энергии турбулентности, построенные на основе мгновенной, фильтрованной и дважды фильтрованной скорости

Поля скорости, отвечающие исходному и тестовому фильтрам, обозначим через  $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$  и  $\widehat{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t)$ . Компоненты тензоров напряжений  $\tau_{ij}^*$  и  $T_{ij}^*$ , соответствующие этим полям скорости, имеют вид

$$\begin{aligned}\tau_{ij}^* &= \bar{\rho} (\widetilde{v_i v_j} - \tilde{v}_i \tilde{v}_j) = -2C\alpha_{ij}; \\ T_{ij}^* &= \bar{\rho} (\widehat{\widetilde{v_i v_j}} - \widehat{\tilde{v}_i \tilde{v}_j}) - 2C\beta_{ij}.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}\tilde{v}_i(\mathbf{x}, t) &= v_i(\mathbf{x}, t) * g(\mathbf{x}); \\ \widehat{\tilde{v}_i}(\mathbf{x}, t) &= \tilde{v}_i(\mathbf{x}, t) * \widehat{g}(\mathbf{x}) = v_i(\mathbf{x}, t) * g(\mathbf{x}) * \widehat{g}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Через  $T_{ij}^*$  обозначены компоненты тензора подсеточных напряжений, появляющиеся в результате применения фильтра с полосой пропускания  $\widehat{\Delta}$ .

Для вычисления компонент тензоров  $\tau_{ij}^*$  и  $T_{ij}^*$  используется модель Смагоринского. Считается, что плотность является функцией только времени, но не пространственных координат. Предполагая, что при вторичной фильтрации значение параметра  $C_S$  не изменяется, в соответствии с формулой (3.1) можно записать

$$\begin{aligned}\tau_{ij}^* &= -2\bar{\rho}(C_S\Delta)^2|\tilde{s}|\tilde{s}_{ij}; \\ T_{ij}^* &= -2\bar{\rho}(C_S\widehat{\Delta})^2|\widehat{\tilde{s}}|\widehat{\tilde{s}}_{ij}.\end{aligned}$$

Применяя пробный фильтр к компонентам тензора  $\tau_{ij}^*$ , получим

$$\widehat{\tau}_{ij}^* = \bar{\rho} (\widehat{\widetilde{v_i v_j}} - \widehat{\tilde{v}_i \tilde{v}_j}).$$

Введем тензор второго порядка  $L_{ij}$  (так называемый тензор *напряжений Леонарда*), компоненты которого равняются разности компонент тензоров подсеточных напряжений  $T_{ij}$  и  $\tilde{\tau}_{ij}$ , а именно

$$L_{ij}^* = L_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}L_{kk} = \frac{1}{\rho}(T_{ij} - \hat{\tau}_{ij}) = \widehat{\tilde{v}_i\tilde{v}_j} - \hat{\tilde{v}_i}\hat{\tilde{v}_j} = -2C_S\hat{\Delta}^2 M_{ij}.$$

Здесь

$$M_{ij} = \left(\frac{\hat{\Delta}}{\Delta}\right)^2 |\hat{s}| \hat{s}_{ij} - |\tilde{s}| \tilde{s}_{ij} = \beta_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}.$$

Величина  $L_{ij}$  представляет собой вклад в напряжения Рейнольдса вихрей, размеры которых изменяются от  $\Delta$  до  $\hat{\Delta}$ .

Значение параметра  $C_S\Delta$  выбирается исходя из минимизации ошибки, которую дает величина

$$Q = E_{ij}E_{ij},$$

где

$$E_{ij} = L_{ij}^* - T_{ij} + \hat{\tau}_{ij} = L_{ij}^* + 2C_E M_{ij}, \quad C_E = (C_S\Delta)^2.$$

Используя метод наименьших квадратов и проводя осреднение по координатным направлениям (по объему), можно записать

$$\frac{\partial E^2}{\partial C_E} = \frac{\partial \langle E_{ij}E_{ij} \rangle}{\partial C_E} = 2 \left\langle E_{ij} \frac{\partial E_{ij}}{\partial C_E} \right\rangle = 0.$$

Учитывая, что  $\partial E_{ij}/\partial C_E = 2M_{ij}$ , получим

$$\langle (L_{ij} + 2C_E M_{ij}) M_{ij} \rangle = 0.$$

Отсюда имеем

$$C_E = -\frac{1}{2} \frac{\langle L_{ij}M_{ij} \rangle}{\langle M_{kl}M_{kl} \rangle} = f(\tilde{v}, \hat{g}, \hat{\Delta}/\Delta).$$

Использование осреднения при вычислении  $C_S$  позволяет сгладить флуктуации коэффициентов, которые приводят к неустойчивости вычислительной процедуры.

При использовании неструктурированной сетки динамическая процедура применяется в параметру  $(C_S\Delta)^2$ , а не к постоянной Смагоринского, как на структурированной сетке [34]. При этом отношение ширины тестового фильтра к ширине исходного фильтра полагается равной

$$\frac{\hat{\Delta}}{\Delta} = N^{1/3},$$

где  $N$  — число ячеек сетки, имеющих данный узел в качестве вершины.

Для турбулентных струй можно положить [39]

$$\tau_{ij}^* = -eL_{ij},$$

где  $e = 0.6 \dots 0.8$ . В общем случае величина  $e$  определяется по конкретной величине скорости подсеточной диссипации и зависит от отношения  $\hat{\Delta}/\Delta$ , турбулентного числа

Рейнольдса и степени разрешения крупных вихрей  $L/\Delta$ , где  $L$  — интегральный масштаб турбулентности. Для турбулентных струй  $4 < L/\Delta < 70$ .

В принципе, для расчета  $\tau_{ij}^*$  и  $T_{ij}^*$  могут использоваться различные подсеточные модели [37]. Динамическая процедура используется также и для оценки турбулентного числа Прандтля. Строятся модели, учитывающие члены более высокого порядка и позволяющие учесть кривизну линий тока и вращение потока [56]. Имеется также сжимаемая версия динамической модели [41].

Динамическая модель позволяет учесть ламинарно-турбулентный переход, но дает неточные результаты в ламинарной области пограничного слоя [61]. Применение динамической модели требует вычисления компонент двух тензоров второго порядка в каждой точке, что приводит к увеличению времени счета на каждом временном шаге приблизительно на 20% по сравнению с расчетами без использования каких-либо подсеточных моделей [117].

С учетом разложения на симметричную и антисимметричную составляющие, можно записать

$$\tilde{v}_{i,j} = \frac{1}{2} (\tilde{v}_{i,j} + \tilde{v}_{j,i}) + \frac{1}{2} (\tilde{v}_{i,j} - \tilde{v}_{j,i}) = \tilde{s}_{ij} + \tilde{\omega}_{ij}.$$

В теории пути смешения используется два выражения для расчета вихревой вязкости

$$\begin{aligned} \nu_t &= l^2 |\tilde{s}|, \quad |\tilde{s}| = (2\tilde{s}_{ij}\tilde{s}_{ij})^{1/2}; \\ \nu_t &= l^2 |\tilde{\omega}|, \quad |\tilde{\omega}| = (2\tilde{\omega}_{ij}\tilde{\omega}_{ij})^{1/2}. \end{aligned}$$

При расчете характеристик потока на основе уравнений Рейнольдса приведенные соотношения для вихревой вязкости являются эквивалентными для параллельных сдвиговых течений, когда

$$|\tilde{s}| = |\tilde{\omega}| = |\tilde{u}_{1,2}|.$$

В случае LES приведенные выражения эквивалентными не являются.

В модифицированной динамической модели (Modified Dynamic Model, MDM) подсеточные напряжения представляются в следующем виде (D.J. Bergstrom, B.-C. Wang, 2002)

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^* &= -2\bar{\rho}(C_S\Delta)^2 |\tilde{\omega}| \tilde{s}_{ij}; \\ T_{ij}^* &= -2\bar{\rho}(C_S\hat{\Delta})^2 |\hat{\tilde{\omega}}| \hat{\tilde{s}}_{ij}. \end{aligned}$$

Выражение для компонент тензора леонардовых напряжений имеет такой же вид как и в исходной версии динамической модели. В тоже время

$$M_{ij} = \left( \frac{\hat{\Delta}}{\Delta} \right)^2 |\hat{\tilde{\omega}}| \hat{\tilde{s}}_{ij} - |\tilde{\omega}| \tilde{s}_{ij} = \beta_{ij} - \hat{\alpha}_{ij}.$$

Соотношения для коэффициентов  $\alpha_{ij}$  и  $\beta_{ij}$  отличаются от тех, которые получены в модели [48]. Модифицированная динамическая модель лучше предсказывает характеристики сдвиговых течений (в частности, течения Куэтта), чем исходная модель.

В модели смешанных масштабов (Mixed Scale Model, MSM) турбулентная вязкость вычисляется как взвешенное среднее подсеточной турбулентной вязкости для крупных вихрей  $\nu_t = (C_S\Delta)^2 |\tilde{s}|$  и вязкости для мелких вихрей  $\nu_t = C_k \Delta k_{sgs}^{1/2}$ , где  $k_{sgs}$  — подсеточная

кинетическая энергия турбулентности. Формула для расчета турбулентной вязкости имеет вид [27]

$$\mu_t = f(\theta) \underbrace{(\bar{\rho} C_\omega \Delta^2 |\tilde{s}|)^{1/2}}_{\mu_\omega} \underbrace{(\bar{\rho} C_k \Delta k^{1/2})^{1/2}}_{\mu_k}.$$

В результате, формула для расчета подсеточной вязкости приобретает вид [91]

$$\mu_t = C f(\theta) \bar{\rho} |\tilde{s}|^{1/2} k^{1/4} \Delta^{3/2}.$$

Здесь  $C_\omega = 0.01$ ,  $C_k = 0.126$ ,  $C = C_\omega^{1/2} C_k^{1/2} = 0.04$ . Для расчета  $\mu_\omega$  используется модель вихревой вязкости, а  $\mu_k$  рассчитывается из распределения подсеточной кинетической энергии (Turbulence Kinetic Energy, TKE)

$$k = \frac{1}{2} \tilde{u}'_k \tilde{u}'_k, \quad \tilde{u}'_k = \tilde{u}'_k.$$

Подсеточная кинетическая энергия находится гипотезы подобных масштабов [27]

$$\tilde{u}'_k = \tilde{u}_k - \hat{\tilde{u}}_k,$$

где  $\tilde{u}_k$  — скорость, соответствующая сеточному фильтру,  $\hat{\tilde{u}}_k$  — скорость, соответствующая фильтру с полосой пропускания  $2\Delta$ . В случае дискретного фильтра

$$\hat{\tilde{u}}_k = \frac{1}{4} \tilde{u}_{k-1} + \frac{1}{2} \tilde{u}_k + \frac{1}{4} \tilde{u}_{k+1}.$$

Функция  $f(\theta)$  играет роль переключателя, а под  $\theta$  понимается угол между локальной завихренностью и локальной средней завихренностью.

Для учета анизотропности потока вводится тензор

$$\Gamma_{ij} = \frac{3 \left( \tilde{u}_i - \hat{\tilde{u}}_i \right) \left( \tilde{u}_j - \hat{\tilde{u}}_j \right)}{\sum_{l=1}^3 \left( \tilde{u}_l - \hat{\tilde{u}}_l \right)^2}.$$

Для расчета турбулентной вязкости предлагается формула

$$\mu_t = C f(\theta) \bar{\rho} |\tilde{s}|^{1/2} k_{ij}^{1/4} \Delta^{3/2}, \quad k_{ij} = k \Gamma_{ij}$$

или

$$\mu_t = C f(\theta) \bar{\rho} |\tilde{s}|^{1/2} k^{1/4} \Delta^{3/2} \Gamma_{ij}.$$

В модели 1 поправка на анизотропность имеет порядок  $\Gamma^{1/4}$ , в модели 2 —  $\Gamma$ . Поскольку  $0 \leq |\Gamma_{ij}| \leq 1$  для  $\forall i, j$ , то в модели 2 поправка оказывается более важной.

В модели смешанных масштабов учитываются как крупные, так и мелкие масштабы скорости (крупные масштабы учитываются через модель вихревой вязкости, а мелкие — через подсеточную кинетическую энергию). Данная модель позволяет учесть перемежаемость крупных вихрей.



Модель применяется в тех областях, где  $\theta > 20^\circ$ , что соответствует максимуму функции плотности распределения вероятности флуктуаций локальной завихренности потока в случае изотропной однородной турбулентности. Функция перехода имеет вид

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{при } \theta \geq \theta_0 \\ 0, & \text{при } \theta < \theta_0 \end{cases},$$

где  $\theta = 20^\circ \dots 40^\circ$ . Данный переключатель имеет разрыв, поэтому используется непрерывная функция

$$f(\theta) = \begin{cases} 1, & \text{при } \theta \geq \theta_0 \\ r(\theta)^n, & \text{при } \theta < \theta_0 \end{cases},$$

где

$$r(\theta) = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta/2)}{\operatorname{tg}^2(\theta_0/2)}, \quad n = 2, \quad \theta_0 = 20^\circ.$$

Применяется также иная формулировка модели смешанных масштабов [90]

$$\nu_t = C_M \Delta^{1+\alpha} (|\tilde{s}|)^\alpha k_{\text{sgs}}^{1-\alpha},$$

где  $C_M = 0.1$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$  (обычно  $\alpha = 0.5$ ). Подсеточная кинетическая энергия турбулентности вычисляется при помощи тестового фильтра

$$k_{\text{sgs}} = \frac{1}{2} \tilde{v}'_i \tilde{v}'_i, \quad \tilde{v}'_i = \tilde{v}_i - \hat{\tilde{v}}_i.$$

Для вычисления компонент тензоров  $\tau_{ij}^*$  и  $T_{ij}^*$  используется одно и то же значения параметра  $C_S$ . Концепция пробного фильтра теоретически обоснована только в том случае, если имеет место локальное подобие структуры сеточной и подсеточной турбулентности (self-similarity assumption). Такое допущение не выполняется при малых значениях локального турбулентного числа Рейнольдса, например, вблизи стенки [118].

Предположение о локальном подобии приводит к следующему соотношению между сеточным и тестовым фильтром

$$g(\mathbf{x}) = \delta^{-n} \hat{g}(\mathbf{x}/\delta),$$

где  $\delta = \hat{\Delta}/\Delta$ . Иными словами, сеточный и тестовый фильтры должны иметь одну и ту же форму и могут различаться лишь полосой пропускания. Вместе с тем, имеются формулировки динамической модели, не зависящие от вида тестового фильтра [37]. Однако их применение на практике связано с вычислением многократных интегралов, что существенно увеличивает процессорное время.

Например, в *лагранжевой динамической модели* (Lagrangian Dynamic Model, LDM) численная минимизация ошибки, которую дает соотношение для  $Q$ , проводится вдоль траектории движения жидкой частицы. Такой подход приводит к необходимости решения системы из двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, но позволяет учесть влияние предыстории течения на значение параметра Смагоринского.

В *локальной динамической модели* (Dynamic Localization Model, DLM) для расчета параметра  $C_S$  используется интегральное уравнение и накладывается ограничение  $C_S \geq 0$  [51]. Такая модель является довольно дорогой с вычислительной точки зрения.

Имеются и другие версии динамической модели. В исходной интерпретации динамической модели конвективный член записывается в следующем виде

$$\frac{\partial \widetilde{v_i v_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \widetilde{v_i} \widetilde{v_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j},$$

где

$$\tau_{ij} = \widetilde{v_i v_j} - \widetilde{v_i} \widetilde{v_j}.$$

При этом дискретизация каждого слагаемого в правой части вносит численную ошибку, которые в дальнейшем суммируются (ошибка присутствует даже в том случае, когда известно точное выражение для подсеточных напряжений). Для уменьшения ошибки дискретизации необходимо использовать схемы высокого порядка точности.

В *векторной динамической модели* (Vector Dynamic Model, VDM) конвективное слагаемое записывается в виде [75]

$$\frac{\partial \widetilde{v_i v_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial \widetilde{v_i} \widetilde{v_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}.$$

Ошибка, возникающая при дискретизации, трактуется как часть подсеточных напряжений. Используя пробный фильтр, можно записать

$$\frac{\partial \widehat{\widetilde{v_i v_j}}}{\partial x_j} = \frac{\partial \widehat{\widetilde{v_i} \widetilde{v_j}}}{\partial x_j} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}.$$

После подстановки соотношений для  $\tau_{ij}$  и  $T_{ij}$  динамическая процедура приводит к минимизации выражения

$$E_i = \left( C_i - \frac{1}{3} \delta_{ij} C_{kk}^j \right) + 2M_i (C_S \Delta)^2 + 2M_{ij} \frac{\partial (C_S \Delta)^2}{\partial x_j}.$$

Здесь

$$M_i = \frac{\partial M_{ij}}{\partial x_j}, \quad C_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad C_i^k = \frac{\partial \widehat{\widetilde{v_i v_j}}}{\partial x_k} - \frac{\partial \widehat{\widetilde{v_i} \widetilde{v_j}}}{\partial x_k}.$$

Для нахождения параметров подсеточной модели необходимо решить дифференциальное уравнение.

Расчеты, выполненные с использованием векторной динамической модели и схем различного порядка (2-го, 4-го, 8-го и 12-го), практически совпадают [75]. В турбулентном течении в канале вблизи стенки имеется область, в которой  $C_S < 0$  ( $C_S \sim -0.005$ ).

Значение параметра  $C_S$ , рассчитанное с помощью динамической процедуры, сильно колеблется в пространстве и времени. Специфическая трудность, являющаяся результатом таких колебаний, состоит в том, что вихревая вязкость может стать отрицательной (при  $C_S < 0$ ). Такое обстоятельство означает перенос энергии от подсеточных вихрей к разрешимым масштабам [57]. В принципе, в нестационарном потоке такой процесс может иметь место, приводя обычно к вычислительной неустойчивости. Для предотвращения неустойчивости численной процедуры используется осреднение  $C_S$  по однородным направлениям, при котором демпфируются высокочастотные гармоники. На временном шаге  $n + 1$  применяется нижняя релаксация, подавляющая высокочастотные осцилляции

$$C_S^{n+1} = (1 - \omega) C_S^n + \omega C_S^{*n}.$$

Здесь  $\omega$  — коэффициент нижней релаксации (на практике  $\omega \sim 10^{-3}$ ).

В неоднородных турбулентных потоках следует использовать лагранжеву модификацию динамической модели или модели подобных масштабов [57]. Однако привлечение LDM приводит к увеличению вычислительных расходов почти на 70% по сравнению с исходной версией динамической модели [117].

### Спектральные модели

Для удобства применения спектральных методов имеются подсеточные модели, сформулированные в волновом пространстве. *Спектральные подсеточные модели* (Spectral Dynamic Model, SDM) позволяют учесть влияние стенки без введения каких-либо дополнительных поправок [100].

Предполагая турбулентность статистически изотропной, введем Фурье-преобразование  $\widehat{f}(\boldsymbol{\kappa}, t)$  функции  $f(\mathbf{x}, t)$ . Используя фильтр Фурье (sharp filter), получим

$$\widetilde{\widehat{f}} = \begin{cases} \widehat{f}, & \text{если } \kappa < \kappa_c \\ 0, & \text{если } \kappa > \kappa_c \end{cases}.$$

Здесь  $\kappa = |\boldsymbol{\kappa}|$ ,  $\kappa_c = \pi/\Delta x$ .

В Фурье-пространстве диссипативный член в уравнениях Навье-Стокса имеет вид

$$-\nu \kappa^2 \widehat{v}_i(\boldsymbol{\kappa}, t).$$

Подсеточное слагаемое, соответствующее диссипативному слагаемому в фильтрованных уравнениях переноса, в волновом пространстве моделируется следующим образом

$$-\nu_t(\kappa|\kappa_c) \kappa^2 \widehat{v}_i(\boldsymbol{\kappa}, t).$$

Подсеточная вязкость вычисляется по формуле

$$\nu_t(\kappa|\kappa_c) = 0.44 C_K^{-3/2} \left[ \frac{E(\kappa_c)}{\kappa_c} \right]^{1/2} X(\kappa/\kappa_c),$$

в которой  $X(\kappa/\kappa_c) = 1$  при  $\kappa/\kappa_c < 1/3$  и возрастает при других значениях  $\kappa/\kappa_c$ . Волновое число  $\kappa_c$  соответствует спектру Колмогорова-Обухова

$$E(\kappa) = C_K \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}.$$

В физическом пространстве соотношение для расчета подсеточной турбулентной вязкости принимает вид

$$\nu_t(\mathbf{x}, \Delta x) = \frac{2}{3} C_K^{-3/2} \left[ \frac{E_{\mathbf{x}}(\kappa_c)}{\kappa_c} \right]^{1/2},$$

где  $E_{\mathbf{x}}(\kappa_c)$  представляет собой локальный спектр кинетической энергии турбулентности, рассчитанный при помощи модели структурной функции.

Спектральные позволяют получить более точные результаты, чем модель Смагоринского (M.R. Lesieur, 2004), однако применимы для достаточно простых геометрий (пограничные слои, свободная турбулентность в несжимаемой и сжимаемой жидкости).

## Дифференциальные модели

Турбулентную вязкость можно выразить через подсеточную кинетическую энергию турбулентности

$$\mu_t = \bar{\rho} (C_S \Delta) k_{\text{sgs}}^{1/2}.$$

Кинетическая энергия турбулентности удовлетворяет следующему уравнению, записанному для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial k_{\text{sgs}}}{\partial t} + \frac{\partial k_{\text{sgs}} \tilde{v}_j}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k_{\text{sgs}}}{\partial x_j} \right] - C_\varepsilon \frac{k_{\text{sgs}}^{3/2}}{\Delta} - \tau_{ij} \tilde{\varepsilon}_{ij}.$$

Здесь  $C_\varepsilon = 0.845$ ,  $\sigma_k = 0.7$ . Величина  $\varepsilon_{\text{sgs}} = k_{\text{sgs}}^{3/2}/\Delta$  представляет собой скорость подсеточной диссипации турбулентной энергии. Подсеточное число Рейнольдса определяется как  $\text{Re}_\Delta = \Delta k_{\text{sgs}}^{1/2}/\nu$ .

Имеются и другие определения подсеточной кинетической энергии, например [111]

$$k_{\text{sgs}} = \frac{C_e \mu_{\text{sgs}} (\mu + \mu_{\text{sgs}})}{\bar{\rho} (C_S \Delta)^2},$$

где  $\mu_{\text{sgs}}$  рассчитывается по формуле Смагоринского и  $C_e \sim 3.5$ .

Дифференциальные модели позволяют учесть обратный переход кинетической энергии от подсеточных к разрешимым масштабам в буферном слое. Иногда для преодоления вычислительной неустойчивости уравнение для кинетической энергии используется для отключения вихревой вязкости, когда подсеточная энергия падает до нуля. В дифференциальной модели также возможна адаптация параметра  $C_S$  к локальной структуре турбулентного потока с помощью динамической процедуры [62]. Однако привлечение дополнительного дифференциального уравнения не приводит к более точным результатам по сравнению с алгебраическими моделями [82], в связи с чем широкого распространения на практике дифференциальные модели не получили.

## Другие модели

Разрабатываются модели, учитывающие анизотропию вихревой вязкости [24, 36], а также дифференциальные модели с двумя уравнениями.

### 3.1.2. Модели подобных масштабов

Существенной стороной моделей вихревой вязкости является их способность диссипировать кинетическую энергию каскадным образом. При этом модели вихревой вязкости предполагают отсутствие передачи энергии от малых вихрей к разрешимым масштабам. *Модели подобных масштабов* (Scale Similarity Model, SSM) не используют концепцию вихревой вязкости, не требуют предположения об однородности течения и учитывают возможность обратной передачи энергии от малых масштабов к большим, но не обладают свойством сеточной диссипации [27, 57, 96]. Модели этого типа используют предположение о том, что малые разрешимые масштабы и крупные подсеточные вихри обладают свойством подобия.

В модели SSM компоненты тензора рейнольдсовых и перекрестных напряжений представляются в следующем виде [27, 57]

$$R_{ij} = C_B \bar{\rho} (\tilde{v}_i - \tilde{\tilde{v}}_i) (\tilde{v}_j - \tilde{\tilde{v}}_j);$$

$$C_{ij} = \bar{\rho} \tilde{v}_i (\tilde{v}_j - \tilde{v}_j) + \bar{\rho} \tilde{v}_j (\tilde{v}_i - \tilde{v}_i).$$

Здесь  $C_B = 2 \dots 9$ .

В ряде случаев для моделирования компонент тензора подсеточных напряжений используется концепция тестового фильтра с полосой пропускания  $\hat{\Delta} = 2\Delta$

$$\tau_{ij} = C_L \bar{\rho} (\widehat{\tilde{v}_i \tilde{v}_j} - \hat{v}_i \hat{v}_j).$$

Здесь  $C_L$  — постоянная модели.

По сравнению с моделями вихревой вязкости, модель SSM учитывает в представлении подсеточных напряжений слагаемые более высокого порядка малости. Модели подобных масштабов лучше предсказывают обратный переход энергии, чем модели вихревой вязкости [84], однако являются недостаточно диссипативными. В ряду случаев в фильтрованные уравнения переноса вводится дополнительное слагаемое с вихревой вязкостью  $-2\nu_t \tilde{s}_{ij}$  [27]. В *динамической смешанной модели* (Dynamic Mixed Model, DMM) для расчета постоянной, входящей в выражение для подсеточной вихревой вязкости, используется динамическая процедура [121].

### 3.1.3. Модели, использующие обращение свертки

*Модель с обращением свертки* (Deconvolution Model) позволяет вычислить величину  $v_i$  по известному значению  $\tilde{v}_i$ . В частности, если фильтрующая функция  $g$  является обратимой, то обращение свертки тривиально

$$v_i = g^{-1}(\tilde{v}_i).$$

Основная трудность состоит в том, что фильтры с компактным носителем в Фурье-пространстве являются необратимыми (применение фильтра приводит к потере информации). На практике используются приближенные методы обращения свертки. Величина  $v_i$  аппроксимируется величиной  $v_i^*$ , которая строится из  $\tilde{v}_i$ .

В модели, использующей обращение свертки, подсеточные напряжения записываются в следующем виде [96]

$$\tau_{ij} = \bar{\rho} (\widehat{v_i^* v_j^*} - \tilde{v}_i \tilde{v}_j) \quad \text{или} \quad \tau_{ij} = \bar{\rho} (\widehat{v_i^* v_j^*} - \hat{v}_i \hat{v}_j).$$

В том случае, когда  $v_i^* = \tilde{v}_i$ , получается модель подобных масштабов.

Функцию, обратную свертке, можно получить в виде разложения в ряд Тейлора функции  $\tilde{v}_i$  [96]. Неявные соотношения для определения  $v_i^*$  имеют вид

$$\begin{aligned} L(v_i^*) &= \hat{v}_i, \quad L = L_x L_y L_z, \quad L_i = 1 + c_1^*(\Delta_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + c_2^*(\Delta_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}; \\ M(v_i^*) &= \hat{v}_i^*, \quad M = M_x M_y M_z, \quad M_i = 1 + \hat{c}_1(\Delta_i) \frac{\partial}{\partial x_i} + \hat{c}_2(\Delta_i) \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}. \end{aligned}$$

Здесь  $c_1^*$ ,  $c_2^*$ ,  $\hat{c}_1$ ,  $\hat{c}_2$  представляют собой функции, зависящие от локальной ширины фильтра.

Для расчета  $v_i^*$  необходимо решить обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\tilde{v}_i = v_i^* + c_1^*(\Delta_i) \frac{dv_i^*}{dx_i} + c_2^*(\Delta_i) \frac{d^2 v_i^*}{dx_i^2}.$$

В других моделях обращение свертки вычисляется при помощи введения следующего оператора

$$Q_N = \sum_{n=1}^N (E - g)^n \simeq g^{-1},$$

где  $E$  — единичная матрица. В развернутом виде имеем

$$v_i^* = \tilde{v}_i + (E - g) * \tilde{v}_i + (E - g) * [(E - g) * \tilde{v}_i] + \dots$$

С вычислительной точки зрения, использование обращения свертки оказывается менее дорогостоящим, чем динамическая оценка параметра Смагоринского [81].

### 3.1.4. Смешанные модели

*Смешанные модели* (Mixed Model, ММ) объединяют возможности моделей вихревой вязкости и моделей подобных масштабов. Для представления тензора подсеточных рейнольдсовых напряжений  $R_{ij}$  используется модель Смагоринского, а тензор перекрестных напряжений выражается через тензор леонардовых напряжений.

Предполагается, что подсеточная вязкость является функцией скорости переноса кинетической энергии турбулентности  $\varepsilon$ , кинетической энергии мелких масштабов  $E(k_c)$  и волнового числа отсечки  $k_c$  [90]. Из анализа размерностей следует, что подсеточная вязкость представляется в виде

$$\nu_t = C |\tilde{\omega}_{ij}|^\alpha |\tilde{\varepsilon}_{ij}|^{1-\alpha} \Delta^{1+\alpha}$$

Тензор подсеточных напряжений вычисляется при помощи концепции тестового фильтра. Пульсация скорости записывается в виде

$$v'_i = \tilde{v}_i - \widehat{\tilde{v}}_i.$$

На практике  $\widehat{\Delta} = 2\Delta$ .

В результате, получим [27]

$$\nu_t = (C_S^2 \Delta^2 |\tilde{\omega}_{ij}|)^\alpha (C_B \Delta |\tilde{\varepsilon}_{ij}|)^{1-\alpha},$$

где  $C_S = 0.1 \dots 0.12$ . При этом  $\alpha = 1$  для вихревой модели и  $\alpha = 0$  для модели [27]. Обычно полагается, что  $\alpha = 1/2$ . Коэффициент модели  $C_M = C_S^{2\alpha} C_B^{1-\alpha}$ .

В одной из таких моделей (Dynamic Two-parameter Mixed Model, DTMM) подсеточные напряжения представляются в виде [93]

$$\tau_{ij} = C_L \bar{\rho} \left( \widetilde{\tilde{v}_i \tilde{v}_j} - \tilde{\tilde{v}}_i \tilde{\tilde{v}}_j \right) - 2\mu_t \tilde{s}_{ij}.$$

Формула для вычисления турбулентной вязкости имеет вид

$$\mu_t = (C_S \Delta)^2 \bar{\rho} \frac{\left( \tilde{v}_i - \tilde{\tilde{v}}_i \right) \left( \tilde{v}_j - \tilde{\tilde{v}}_j \right)}{\left( \tilde{v}_i - \tilde{\tilde{v}}_i \right)^2} \left( \frac{1}{2} \tilde{s}_{ij} \tilde{\tilde{s}}_{ij} \right)^{1/2}.$$

Параметры модели  $C_S$  и  $C_L$  вычисляются при помощи динамической процедуры [48]. В другой версии модели (revised dynamic two-parameter mixed model) параметры  $C_S$  и  $C_L$  оцениваются последовательно [75].

Для оценки параметров смешанной модели также используется динамическая процедура. Для компонент тензора подсеточных напряжений имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned}\tau_{ij}^* &= -2C_S \Delta^2 |\tilde{s}| \tilde{s}_{ij} + L_{ij}^m - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk}^m; \\ T_{ij}^* &= -2C_S \widehat{\Delta}^2 |\widehat{s}| \widehat{s}_{ij} + L_{ij}^M - \frac{1}{3} \delta_{ij} L_{kk}^M.\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}L_{ij}^m &= \widetilde{\widetilde{v_i v_j}} - \widetilde{\widetilde{v_i}} \widetilde{\widetilde{v_j}}; \\ L_{ij}^M &= \widehat{\widehat{\widetilde{v_i v_j}}} - \widehat{\widehat{\widetilde{v_i}}} \widehat{\widehat{\widetilde{v_j}}}.\end{aligned}$$

Нахождение параметра Смагоринского сводится к минимизации следующей квадратичной формы

$$Q = \left( L_{ij} - H_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} I_{kk} - 2C M_{ij} \right)^2,$$

где

$$\begin{aligned}H_{ij} &= \widetilde{\widetilde{\widetilde{v_i v_j}}} - \widehat{\widehat{\widetilde{v_i}}} \widehat{\widehat{\widetilde{v_j}}}; \\ M_{ij} &= -\widehat{\Delta}^2 \left| \widehat{s} \right| \widehat{s}_{ij} + -\Delta^2 \left| \widetilde{s} \right| \widetilde{s}_{ij}; \\ I_{kk} &= L_{kk} + \widehat{L_{kk}^m} - L_{kk}^M.\end{aligned}$$

Подстановка приводит к следующему выражению

$$C = \frac{(L_{ij} - H_{ij}) M_{ij}}{M_{kl} M_{kl}}.$$

### 3.1.5. Другие модели

В [95] используется *фрактальная модель* подсеточной турбулентности. Результаты расчетов сравниваются с данными, полученными на основе модели Смагоринского и динамической модели.

## 3.2. Подсеточный тепловой поток

Выражение для подсеточного теплового потока записывается в форме закона Фурье

$$\frac{Q_j}{\gamma} = -\lambda_t \frac{\partial \widetilde{T}}{\partial x_j}. \quad (3.5)$$

Турбулентная теплопроводность выражается через подсеточное турбулентное число Прандтля  $\text{Pr}_t = c_p \mu_t / \lambda_t$ , которому присваивается, как правило, постоянное значение  $\text{Pr}_t = 0.4 \dots 0.6$ . Для вычисления турбулентного числа Прандтля также можно использовать динамическую процедуру.

При помощи спектральных подсеточных моделей показано, что  $\text{Pr}_t = 0.18(5 - m)$ . Через  $m$  обозначен показатель степени в спектре кинетической энергии турбулентности

$$E(\kappa) \sim \kappa^{-m},$$



где  $0 < m < 3$ .

При расчете неизотермических течений, особенно с влиянием сил плавучести, находят применение нелинейные модели [80]. В них предполагается, что подсеточная вязкость и подсеточная теплопроводность зависят только от крупномасштабного тензора скоростей деформаций и градиента температуры

$$\mu_t = C_S \bar{\rho} \Delta^2 \tilde{\omega},$$

где

$$\tilde{\omega} = \left( |\tilde{s}|^2 - \frac{g\beta}{\text{Pr}_t} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \delta_{1j} \right)^{1/2}.$$

В изотермических условиях приведенная модель сводится к модели Смагоринского.

Наряду с алгебраическими моделями, для вычисления подсеточного теплового потока имеются и дифференциальные модели первого и второго порядка [82].

### 3.3. Диффузионный поток массы

Составляющие вектора диффузионного потока массы компонента  $\alpha$  находятся из соотношения, записанного в форме закона Фика

$$J_{\alpha j} = -\bar{\rho} D_t \frac{\partial \tilde{Y}_\alpha}{\partial x_j}. \quad (3.6)$$

Коэффициент турбулентной диффузии выражается через турбулентную вязкость и турбулентное число Шмидта, а именно  $D_t = \nu_t / \text{Sc}_t$ . Для вычисления турбулентной вязкости  $\nu_t$  используется формула Смагоринского (3.2). Турбулентному числу Шмидта присваивается, как правило, постоянное значение ( $\text{Sc}_t \sim 0.7$ ), что подразумевает подобие между подсеточным переносом количества движения и массы.

Для учета зависимости турбулентного числа Шмидта от локальных характеристик потока используется динамическая процедура [48].

### 3.4. Оценки порядков величин

Используя закон Колмогорова-Обухова, произведем оценку порядков некоторых величин, связав их с полосой пропускания фильтра.

— кинетическая энергия турбулентности

$$k = \int_0^\infty E(\kappa) d\kappa \sim \int_{\kappa_m}^\infty E(\kappa) d\kappa \sim \int_{\kappa_m}^\infty \kappa^{-5/3} d\kappa \sim \kappa_m^{-5/3} \sim \Delta^{2/3};$$

— пульсационная составляющая скорости

$$u' \sim k^{1/2} \sim \kappa_m^{-1/3} \sim \Delta^{1/3};$$

— турбулентная вязкость

$$\nu_t \sim u' l \sim \Delta \Delta^{1/3} = \Delta^{4/3};$$

— турбулентные напряжения

$$|\tilde{\tau}_{ij}| \sim \nu_t |\tilde{\varepsilon}| \sim \Delta^{4/3} \Delta^{-2/3} \sim \Delta^{2/3}.$$

Здесь  $\kappa_m = \pi/\Delta$ .

### 3.5. Фильтрованные уравнения сохранения

С учетом соотношений, моделирующих подсеточный перенос массы, количества движения и энергии, фильтрованную по пространству систему уравнений, представляющих законы сохранения, можно записать в следующем виде

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_j) = 0; \quad (3.7a)$$

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{Y}_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{Y}_\alpha \tilde{v}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho} \left( \tilde{D}_\alpha + D_t \right) \frac{\partial \tilde{Y}_\alpha}{\partial x_j} \right] + \tilde{m}_\alpha; \quad (3.7б)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j) = & -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\tilde{\mu} + \mu_t) \left( \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \right) \right] + \bar{\rho} g_i; \end{aligned} \quad (3.7в)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{e}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\rho} \tilde{e} \tilde{v}_j) = & -\frac{\partial \bar{p} \tilde{v}_j}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\tilde{\lambda} + \lambda_t) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial \tilde{q}_j^r}{\partial x_j} + \\ & + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (\tilde{\mu} + \mu_t) \left( \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \right) \tilde{v}_j \right]. \end{aligned} \quad (3.7г)$$

Уравнение состояния имеет вид

$$\bar{p} = \bar{\rho} R \tilde{T} \sum_{\alpha} \frac{\tilde{Y}_\alpha}{M_\alpha}. \quad (3.7д)$$

Система фильтрованных уравнений (3.7), используемая в методе LES, по форме совпадает с уравнениями Рейнольдса. При этом численные прогнозы выделяются как полезный сигнал из фоновой расчетной информации.

## ЧИСЛЕННАЯ И ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДА КРУПНЫХ ВИХРЕЙ

### 4.1. Постановка начальных и граничных условий

Для расчета пространственно неоднородных течений требуется постановка начальных и граничных условий.

#### 4.1.1. Входная граница

На границе, через которую жидкость поступает в расчетную область, обычно задается распределение скорости, удовлетворяющее уравнению неразрывности, направление потока, а также распределения давления и температуры.

В том случае, когда граничные условия на входе зависят от времени, на распределения средних параметров потока накладываются случайные возмущения [81]. При этом амплитуда возмущений выбирается так, чтобы удовлетворить энергетическому спектру турбулентности, а фаза — случайным образом. Такой подход успешно применяется для моделирования турбулентности за решеткой и расчета пограничных слоев.

#### 4.1.2. Выходная граница

При расчете стационарных течений на выходной границе, через которую жидкость покидает расчетную область, обычно выставляются мягкие граничные условия, выражающие собой условие о равенстве нулю производной по нормали к границе  $\partial/\partial n = 0$ .

При моделировании нестационарных дозвуковых течений возникает проблема постановки граничных условий для выходящего потока газа, содержащего интенсивные вихревые структуры. Возможные нефизические эффекты генерации и отражения звуковых волн на выходной границе искажают реальную картину потока. Имеются вычислительные алгоритмы, обеспечивающие эффективное поглощение продольных квазиплоских звуковых волн, приходящих ко входной границе из внутренней области, а также компенсирующие эффекты генерации звуковых волн на выходной границе при пересечении ее вихрями.

Для нестационарных расчетов широкое применение находит условие конвективного переноса (неотражающие граничные условия)

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U \frac{\partial f}{\partial n} = 0,$$

где  $U$  — скорость, не зависящая от расположения выходной границе, которая выбирается исходя из условия сохранения массы (поток массы на входе равняется потоку массы на выходе из расчетной области). Это позволяет избежать проблем, связанных с отражением волн давления от выходной границы.

#### 4.1.3. Твердая граница

На стенке для составляющих скорости ставятся граничные условия непротекания и прилипания, выражающие собой равенство нулю нормальной и тангенциальной составляющих скорости

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0,$$

где  $\mathbf{n}$  и  $\boldsymbol{\tau}$  представляют собой единичные векторы нормали и касательной к поверхности преграды. Граничные условия для давления выставляются при помощи дискретизации уравнения изменения количества движения в проекции на нормаль к стенке.

Присутствие стенки сдерживает рост мелких вихрей и изменяет механизм обмена энергией между разрешимыми и неразрешимыми масштабами турбулентности. При этом число сеточных узлов, необходимых для расчета течения в пограничном слое, возрастает до величины, характерной для DNS. Для смягчения требований, предъявляемых к вычислительным ресурсам, и учета влияния различных факторов, например, шероховатости поверхности, используются метод пристеночных функций и различные модели турбулентного пограничного слоя [33].

## 4.2. Структура пограничного слоя

В турбулентном пограничном слое обычно выделяется несколько подобластей (рис. 4.1), которые отличаются друг от друга разномасштабностью вихревых структур [2, 18].

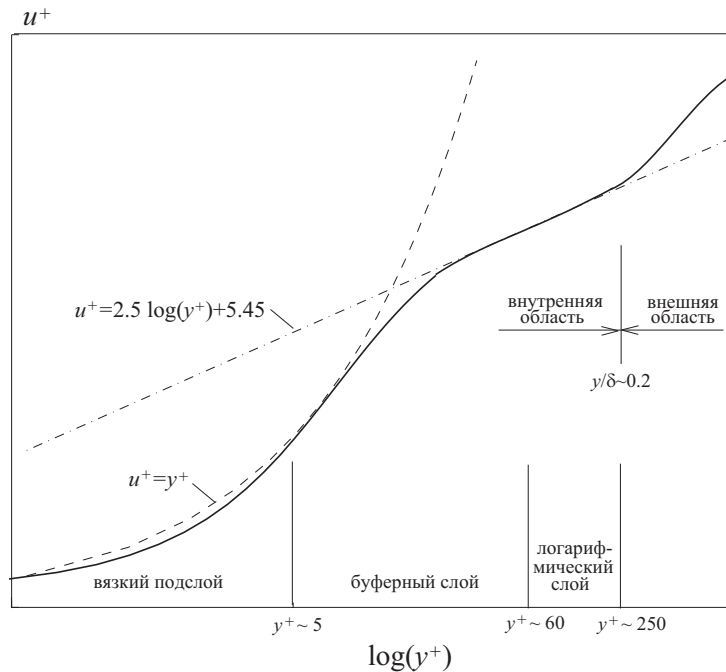


Рис. 4.1. Структура пристеночной области потока

### 4.2.1. Внешняя и внутренняя области пограничного слоя

Пристеночная область потока обычно разделяется на внешнюю и внутреннюю области.

Вязкий подслой, переходная область и область логарифмического профиля скорости составляют *внутреннюю область* пограничного слоя или *область закона стенки*. Внутренняя область пограничного слоя на плоской пластине занимает примерно 20% от толщины всего слоя и в ней генерируется до 80% энергии турбулентности. В вязком подслое поток является практически ламинарным, и вязкие напряжения доминируют над турбулентными. В переходном слое вязкие и турбулентные напряжения ведут себя практически равномерно.

Область закона следа и область перемежаемости обычно объединяются во *внешнюю область* турбулентного пограничного слоя, которая занимает порядка 80% от толщины всего слоя. Внешний слой является областью полностью развитого турбулентного течения, в котором распределение скорости описывается логарифмическим законом. Полное затухание возмущений во внешней области происходит на расстоянии, во много раз превышающем линейный масштаб турбулентности. Свойства течения во внешней области существенно зависят от предыстории потока.

Для расчета течения во внешней области используются фильтрованные или осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса. Во внутренней области профиль скорости сравнительно слабо зависит от числа Рейнольдса, продольного градиента давления и других внешних условий, что служит основой для построения универсальных соотношений (*пристеночных функций*), связывающих параметры течения с расстоянием от стенки. Наряду с универсальностью профиля скорости во внутренней области, метод пристеночных функций опирается на использование гипотезы о локальном равновесии энергии турбулентных пульсаций, а также свойства локальной изотропности диссипирующих вихрей.

Традиционно применяется два подхода к моделированию течения в пристеночной области. Один из подходов заключается в том, что внутренний слой (вязкий подслой и переходная область) не разрешается, а описывается полуэмпирическими формулами (пристеночными функциями). Использование пристеночных функций освобождает от необходимости модификации моделей турбулентности для расчета характеристик течения в пристеночной области. В другом подходе модели турбулентности модифицируются таким образом, чтобы разрешать всю пристеночную область потока, включая вязкий подслой, при условии обеспечения необходимого разрешения сетки в пограничном слое. Такие модели турбулентности справедливы для расчета турбулентных течений во всей расчетной области (область течения, удаленная от твердых границ, и пристеночная область течения).

#### 4.2.2. Закон стенки

Пристеночные функции представляют собой набор полуэмпирических формул и функций, которые связывают искомые функции в пристеночных ячейках расчетной сетки с соответствующими величинами на стенке.

В пограничном слое обычно используются расстояние от стенки и скорость потока в пристеночных единицах

$$y^+ = \frac{yu_\tau}{\nu}, \quad u^+ = \frac{\tilde{u}}{u_\tau},$$

где  $u_\tau = (\tau_w/\bar{\rho})^{1/2}$  представляет собой *динамическую скорость*, а  $\tilde{u}$  — составляющую скорости в параллельном стенке направлении.

В вязком подслое вязкие напряжения доминируют над рейнольдсовыми, и имеет место линейная зависимость скорости от расстояния до стенки

$$u^+ = y^+$$

при  $0 \leq y^+ < 11$ .

В логарифмическом слое рейнольдсовы напряжения намного превышают вязкие напряжения, а профиль скорости описывается логарифмическим законом

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln Ey^+$$

при  $11 \leq y^+ < 0.1\delta$ . Постоянная Кармана  $\kappa$  и параметр  $E$ , зависящий от шероховатости поверхности, определяются на основе экспериментальных данных (обычно  $\kappa = 0.41$ , для

гладкой стенки  $E = 9.8$ ). Под  $\delta$  понимается толщина пограничного слоя, которая зависит от числа Рейнольдса.

В буферном слое вязкие и рейнольдсовы напряжения имеют одинаковый порядок. Сшивая профили скорости в вязком подслое и логарифмическом слое, получим

$$u^+ = A \ln y^+ + B,$$

где  $A = 4.94$ ,  $B = -2.96$ . Как правило, считается, что буферная область находится в диапазоне  $5 < y^+ < 30$ . Во многих случаях буферной зоной пренебрегают.

При моделировании неравновесных пограничных слоев вместо величин  $y^+$  и  $u^+$  используются их модифицированные значения

$$y^* = \frac{c_\mu^{1/4} k^{1/2} y}{\nu}, \quad u^* = \frac{c_\mu^{1/2} k^{1/2}}{\tau_w / \rho}.$$

Параметры  $y^+$  и  $y^*$  являются практически равнозначными для равновесных турбулентных пограничных слоев.

Закон стенки можно рассматривать как решение уравнений движения в турбулентном пограничном слое, полученное при использовании модели пути смешения Прандтля в предположении, что конвективные члены и градиент давления пренебрежимо малы. Во многих случаях наблюдается также почти универсальный характер распределения температуры, и закон стенки используется для задания граничных условий на внутренней границе при решении уравнения энергии.

Обычно считается, что закон стенки выполняется при  $30 < y^+ < 200$ , и первый от стенки расчетный узел располагается в этом интервале. Конкретная реализация подхода зависит от выбранной модели турбулентности и используемой разностной схемы. Функции, входящие в закон стенки, нуждаются в модификации для точного описания эффектов, связанных с возможной шероховатостью поверхности. Закон стенки трудно приспособить для расчета течений со сложной геометрией на неструктурированных сетках.

Стандартные пристеночные функции надежно себя зарекомендовали при расчете пограничных слоев, близких к равновесным. для моделирования пограничных слоев, подверженных влиянию больших градиентов давления, используются неравновесные пристеночные функции. Логарифмический закон распределения средней скорости с учетом градиента давления имеет вид

$$\frac{\tilde{u} c_\mu^{1/4} k^{1/2}}{\tau_w / \rho} = \frac{1}{\varkappa} \ln (E c_\mu^{1/4} k^{1/2} y),$$

где

$$\tilde{u} = u - \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} \left[ \frac{y_v}{\rho k^{3/2}} \ln \left( \frac{y}{y_v} \right) + \frac{y - y_v}{\rho k^{3/2}} + \frac{y_v^2}{\mu} \right].$$

Толщина вязкого подслоя полагается равной  $y_v = 11.225$ .

Использование неравновесных пристеночных функций приводит к более точным результатам при расчете касательных напряжений на стенках и теплопроводности.

Прямое численное моделирование турбулентного пограничного слоя требует, чтобы  $y_P^+ < 1$ ,  $\Delta x^+ = 15$ ,  $\Delta z^+ = 5$ . Для реализации LES необходимо, чтобы  $\Delta x^+ = 50 \dots 150$ ,  $\Delta z^+ = 15 \dots 40$  [81]. Применение метода пристеночных функций позволяет уменьшить количество узлов сетки вблизи стенки, при этом  $y_P^+ < 30 \dots 150$ ,  $\Delta x^+ = 100 \dots 600$ ,

$\Delta z^+ = 100 \dots 300$  (здесь предполагается, что направление оси  $x$  совпадает с направлением течения, а ось  $y$  направлена по нормали к обтекаемой поверхности).

Реализация метода пристеночных функций требует итерационной процедуры для нахождения пристеночных сдвиговых напряжений. Вблизи стенки используется закон  $1/7$  вне вязкого подслоя и линейный профиль в вязком подслое

$$u^+ = \begin{cases} y^+, & \text{если } y^+ \leq 11.8 \\ 8.3(y^+)^{1/7}, & \text{если } y^+ > 11.8 \end{cases}.$$

#### 4.2.3. Уравнения пограничного слоя

В [40] вместо метода пристеночных функций решаются уравнения турбулентного пограничного слоя

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \left[ (\mu + \mu_t) \frac{du}{dy} \right] - \frac{d}{dy} (\rho v u) &= \left[ -\frac{d}{dx} (\rho u u) - \frac{dp}{dx} \right]_P; \\ \frac{d}{dy} \left[ \left( \frac{\mu}{Pr} + \frac{\mu_t}{Pr_t} \right) \frac{dT}{dy} \right] - \frac{d}{dy} (\rho v T) &= \left[ -\frac{d}{dx} (\rho u T) \right]_P. \end{aligned}$$

Граничные условия имеют вид

$$u = 0, \quad T = T_w \quad \text{при } y = 0; \quad u = \frac{1}{2} (u_P + u_N), \quad T = \frac{1}{2} (T_P + T_N) \quad \text{при } y = y_n.$$

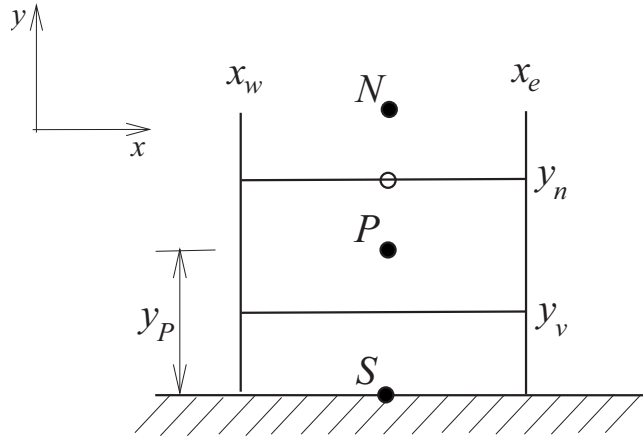


Рис. 4.2. Пристеночный контрольный объем

Уравнение интегрируются аналитически или численно для каждого пристеночного контрольного объема в направлении, параллельном стенке. В каждом пристеночном контрольном объеме строится подробная сетка. Левая часть дискретизируется на подробной сетке с использованием подсеточных узловых значений. Правая часть полагается постоянной в пределах контрольного объема и рассчитывается в узлах основной сетки (в узле  $P$ ). Турбулентная вязкость в подсеточных узлах определяется на основе LRN модели.

Для их интегрирования используется основная сетка и дополнительная сетка

#### 4.2.4. Двухслойные модели

Другая возможность расчета течения во внутренней области состоит в решении уравнений турбулентного пограничного слоя в совокупности с некоторой простой моделью



турбулентности [109]. Однако использование дополнительных дифференциальных уравнений увеличивает расчетное время приблизительно на 30%, хотя и позволяет получить более точные результаты. Наиболее перспективным направлением представляется использование метода DES, в котором переход от внутренней области к внешней осуществляется при помощи переключения моделей турбулентности.

### 4.3. Особенности численной реализации

В методе LES, как, впрочем, и в DNS, необходимо точное представление производных, особенно на мельчайших масштабах (для наивысших волновых чисел).

Предположим, что в задаче требуется пространственное разрешение волн, имеющих волновые числа порядка  $3l_K$ , с точностью 5%. Можно показать, что шаг вычислительной сетки для конечно-разностных схем 2-го порядка составит  $0.26l_K$ , схем 4-го порядка —  $0.55l_K$ , схем 6-го порядка —  $0.95l_K$ , а спектральных методов —  $1.5l_K$  [74].

Исследование свойств конечно-разностных схем при помощи метода Фурье показывает, что погрешность дискретизации, вносимую центрированными разностными схемами, можно представить в следующем виде [50]

$$\delta = \kappa_m^{3/4} \begin{cases} 1.03 & \text{для схемы CDS-2} \\ 0.82 & \text{для схемы CDS-4} \\ 0.70 & \text{для схемы CDS-6} \\ 0.50 & \text{для схемы CDS-8} \end{cases}.$$

Через  $\kappa_m$  обозначено предельное волновое число ( $\kappa_m = \pi/\Delta$ ). Для спектральных методов  $\delta = 0$ .

Для точного расчета производных для наивысших волновых чисел используются спектральные методы (ряды Фурье в пространственных направлениях). Однако применение спектральных методов затруднительно в областях сложной геометрии и на неравномерных сетках. В связи с этим, существует тенденция к применению конечно-разностных и конечно-объемных методов более высокого порядка, чем те, которые используются при решении уравнений Рейнольдса [30, 82].

Конечно-разностные методы обычно не недооценивают производные поля скорости, приводя к неточностям в мельчайших диссипирующих масштабах. Диссипация устанавливается скоростью переноса энергии от крупных вихрей, так что недооцененные производные компенсируются с помощью избыточной спектральной плотности при наибольших волновых числах, чтобы достигнуть правильной величины диссипации (*численная диссипация*). Для проверки сеточной сходимости необходимо верифицировать энергетический спектр турбулентной энергии, показывая быстрый распад вихрей вблизи колмогоровского масштаба длины.

Нелинейные взаимодействия среди разрешимых масштабов и соответствующих им волновых чисел продуцируют волны с волновыми числами, большими  $\kappa_m$ , которые могут интерпретироваться численно. Это явление называют *совмещенностью*. Если не принять специальных мер предосторожности при численной реализации LES, такой эффект может интерпретироваться как ложный перенос энергии к малым волновым числам [3] (явление отрицательной турбулентной вязкости).

Использование центрально-разностных схем для дискретизации конвективных слагаемых при высоких числах Рейнольдса приводит к вычислительной неустойчивости и нефизическим осцилляциям решения. Поэтому дискретизация конвективных потоков проводится при помощи конечных разностей, использующих квадратичную или кубическую

интерполяцию против потока (схемы QUICK, CUDS), а также комбинированных конечно-разностных схем (схемы HPLA, SMART и другие).

#### 4.4. Оценка вычислительных ресурсов

Оценка количества узлов сетки и временных шагов, необходимых для реализации DNS и LES, показывает сложность проблемы с вычислительной точки зрения.

Сравним вычислительные ресурсы, необходимые для реализации каждого из методов моделирования турбулентных течений.

В качестве примера рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в канале высотой  $h$ . В канале вихри удлинены в направлении, параллельном стенкам канала, а их размер составляет  $l \sim 2h$ . В каждом пространственном направлении требуется, по крайней мере, 4 узла сетки для отображения вихря, поскольку необходимо адекватное разрешение производных. При использовании неравномерной сетки количество узлов сетки  $N_\Delta \sim (3\text{Re}_\tau)^{9/4}$ , а оценка размера шага интегрирования по времени, полученная на основе экспериментальных данных, имеет вид [2]

$$\Delta t \simeq 0.003 \frac{h}{u_\tau \text{Re}_\tau^{1/2}}.$$

Соответствующие оценки числа узлов сетки и шага интегрирования по времени приведены в табл. 3. При этом предполагается, что время, необходимое для получения статистически стационарного состояния, составляет величину  $t_s = 100h/u_m \simeq 5h/u_\tau$  (здесь  $u_m$  — средняя скорость в поперечном сечении канала).

Для расчета статистически стационарной картины течения при  $\text{Re}_h = 6000$  ( $\text{Re}_\tau = 180$ ) на сетке с  $4 \cdot 10^6$  узлов на компьютере Cray X/MP требуется около 250 процессорного времени (около 40 с на один шаг по времени).

Таблица 3

Оценки количества узлов сетки и размера шага интегрирования по времени для течения в канале [2]

$\text{Re}_h$	$\text{Re}_\tau$	$N_\Delta$ (DNS)	$N_T$ (DNS)	$N_\Delta$ (LES)
12300	360	$6.7 \cdot 10^6$	32000	$6.1 \cdot 10^5$
30800	800	$4.0 \cdot 10^7$	47000	$3.0 \cdot 10^6$
61600	1450	$1.5 \cdot 10^8$	63000	$1.0 \cdot 10^7$
230000	4650	$2.1 \cdot 10^9$	114000	$1.0 \cdot 10^8$

Рост мощности и снижение стоимости вычислительной техники позволяет проводить расчеты на более подробных сетках. В табл. 4 приведены различные модели подсеточной вихревой вязкости, используемые для моделирования крупных вихрей полностью развитого турбулентного течения в канале с квадратной формой поперечного сечения в плане. Число Рейнольдса вычисляется по средней скорости  $\text{Re} = \rho u_m h / \mu$ .

Таблица 4

Подсеточные модели, используемые для моделирования течения в канале

год	подсеточная модель	Re	сетка	ссылка
1991	смешанная модель	5810	$32 \times 65 \times 65$	[69]
1991	модель Смагоринского и демпфирующие функции	6200	$64 \times 50 \times 50$	[73]
1994	спектральный метод	49000	$256 \times 64 \times 64$	[107]
1996	динамическая модель и двухслойная модель пограничного слоя	42000	$82 \times 34 \times$	[26]
1997	динамическая модель	15000	$128 \times 64 \times 64$	[25]
2000	модель Смагоринского и демпфирующие функции	4800	$257 \times 100 \times 100$	[32]
2001	динамическая модель	10320	$128 \times 101 \times 101$	[78]
2002	модель структурной функции	6000	$120 \times 60 \times 60$	[92]

Таблица 5

Summary results for HP turbine NGV

method	Re	method				cost			comp	re
		M	T	D	C	N	T	$\Delta t$		
LES	$3.9 \cdot 10^3$	FVM	RK-3	CDS-2	UDS-5	$401 \times 120 \times 48$	200h		Cray C90	[7]
LES	$10^5$	FDM	AB	CN	CDS-2	$99 \times 63 \times 10$	$5 \cdot 10^5$ s	0.0002		[7]
LES	$2.4 \cdot 10^4$	FVM SIMPLER	CN	CDS-4	HLPA	$180 \times 80 \times 120$				[7]
LES	$2.2 \cdot 10^4$	FVM MAC			QUICK	$82 \times 63 \times 16$	11 s/s	0.02 s	Cray C90	[7]
LES	$1.0 \cdot 10^2$ $3.0 \cdot 10^3$ $2.0 \cdot 10^4$ $1.4 \cdot 10^6$	FDM	AB	CN	AB	$180 \times 128 \times 16$	10 m/s	0.002	Cray C90	[7]
LES	$10^5$	FVM MAC			QUICK	$250 \times 130 \times 12$	80h	0.0125	IBM SP2	[7]
LES	$3.9 \cdot 10^3$ $1.4 \cdot 10^5$	FVM SIMPLE	RK-3	CDS-2	UDS-1 CDS-2 QUICK HLPA	$165 \times 165 \times 64$		0.0002	NEC SX-4 Fujitsu VPP 700	[3]
LES DNS DNS	$10^5$ $10^5$ $10^6$	FVM FVM FVM				$10^6$ $10^9$ $10^{12}$	10h 5000h		IBM SP2	[8]
DES	$10^5$	FDM	I	CDS-2	UDS-5	$142 \times 61 \times 26$	1100s		Pentium II 266 MHz	[10]
LES	$3.9 \cdot 10^3$ $2.2 \cdot 10^4$ $1.4 \cdot 10^5$	FVM SIMPLE	I	CDS-2	UDS-3 CDS-4		90000 225000 2600000	4h 66h	Cray T3E 900	[7]
LES DES	$2.2 \cdot 10^4$	FVM SIMPLE	I	CDS-2	UDS-2	32000	66h 41h		Cray T3E 900	[7]
LES duct	$3.8 \cdot 10^4$	FVM	RK3	CN		$64 \times 80 \times 80$				[9]
LES duct	$4.8 \cdot 10^3$	FVM	MC			$257 \times 100 \times 100$	150h	$10^{-7}$ s	Cray T3D	[3]
LES duct	$2.0 \cdot 10^3$					$97 \times 85 \times 193$	180h 30h		PC Cray T90	[7]
LES profile	$2.1 \cdot 10^6$	FVM SIMPLE	I	CDS-2 CDS-4	UDS-3	$720 \times 65 \times 33$	180h		IBM SP2	[7]
LES plume	1273	Chorin low-Mach	AB	CDS-2		$256 \times 128 \times 128$	4000h	$10^{-4}$	Cray T3E/64	[7]

Требования, предъявляемые к различными методами моделирования турбулентных течений с учетом прогнозов развития вычислительной техники, приведены в табл. 6, взятой из [104]. Методы моделирования турбулентных течений располагаются в порядке возрастания вычислительных затрат, связанных с их применением (в качестве примера рассматриваются внешние задачи дозвуковой аэродинамики). В колонке 1 приведено назва-

ние численного метода. Колонка 2 показывает степень зависимости результатов численного моделирования от разрешения разностной сетки (физическая/численная/гибридная). В колонке 3 приведена зависимость характеристик течения от времени (нет/да). Колонка 4 указывает на возрастание числа узлов вычислительной сетки при увеличении числа Рейнольдса (слабая/сильная). Колонка 5 указывает на возможность использования трехмерных уравнений в случае расчетной области с осевой симметрией (нет/да). В колонке 6 показана степень эмпиризма, количество предположений, необходимых для получения расчетных соотношений (слабая/сильная). В колонке 7 приведено количество узлов вычислительной сетки (в том числе учитываются узлы, необходимые для разрешения турбулентного пограничного слоя). В колонке 8 приведено число шагов по времени (предполагается, что число Куранта равно единице для нестационарного течения), а в колонке 9 — степень готовности метода и возможность его использования для решения инженерных задач (учитываются возможности вычислительной техники); считается, что для решения задачи требуется компьютер, выполняющий около 1015 операций с плавающей точкой в секунду.

Таблица 6

Расположение методов моделирования турбулентных течений в порядке возрастания вычислительных затрат и перспективы их применения для решения внешних задач дозвуковой аэродинамики

метод	2	3	4	5	6	7	8	9
URANS 2D	численная	+	↓	—	↑	$10^5$	$10^{3.5}$	1980
RANS 3D	численная	—	↓	—	↑	$10^7$	$10^3$	1985
URANS 3D	численная	+	↓	—	↑	$10^7$	$10^{3.5}$	1995
DES	гибридная	+	↓	+	↑	$10^8$	$10^4$	2000
LES	гибридная	+	↓	+	↓	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
QDNS	физическая	+	↑	+	↓	$10^{15}$	$10^{7.3}$	2070
DNS	численная	+	↑	+	—	$10^{16}$	$10^{7.7}$	2080

В табл. ?? приведены детали реализации LES для задачи расчета течения несжимаемой жидкости около круглого цилиндра.

Таблица 7

Детали реализации метода моделирования крупных вихрей для расчета течения около круглого цилиндра

метод	Re	численный метод				стоимость			компьютер	ссылка
		метод	T	D	C	N	T	dt		
LES 3D	$3.9 \cdot 10^4$ $1.4 \cdot 10^5$	FVM+SIMPLE	RK3	CDS-2	UDS-1 CDS-2 QUICK HLLA	$165 \cdot 165 \cdot 64$		0.0002	NEC SX-4 Fujitsu VPP 700	M. Breuer, 1998, 2000
LES DFS	$2.2 \cdot 10^4$	FVM+SIMPLE	неявная	CDS-2	UDS-2	32000	66 41		CRAY T3E-900	St. Schmidt, S. Thiele, 2002
LES 2D IFS 3D RANS	$10^5$	FDM	AB	CN	CDS-2	$99 \cdot 63$ $99 \cdot 63 \cdot 10$ $70 \cdot 64$	$5 \cdot 10^5$ шагов	0.0002		S. Murakami, A. Mochida, 1995
DES	$10^5$	FDM	неявные	CDS-2	UDS-5	$142 \cdot 61 \cdot 26$	1100		Pentium II 266 MHz	M. Sarpkaya, 2001
LES	$3.9 \cdot 10^3$ $2.2 \cdot 10^4$ $1.4 \cdot 10^5$	FVM+SIMPLE	неявные	CDS-2 CDS-4	UDS-3	900000 $125 \cdot 70 \cdot 30$ 2600000	4 66		Cray T3E 900	H. Lubcke, St. Schmidt, T. Rung, S. Thiele, 2001
LES	$1.0 \cdot 10^2$ $3.0 \cdot 10^3$ $2.0 \cdot 10^4$ $1.4 \cdot 10^6$	метод дробных шагов	AB	CN	AB	$180 \cdot 128 \cdot 16$	10 мин. на шаг	0.002	Cray C90	X. Lu, A. Dalton, J. Zhang, 1997
IFS	$2.4 \cdot 10^4$	FVM+SIMPLER	CN	CDS-4	HLLA	$180 \cdot 80 \cdot 120$				C. Fureby, 1996, 2000
LES	$3.9 \cdot 10^3$	FVM	RK3	CDS-2	CN UDS-5	$401 \cdot 120 \cdot 48$	200 h		CRAY C90	R. Mittal, 1995, 1996
LES	$2.2 \cdot 10^4$	FVM+MAC			QUICK	$82 \cdot 63 \cdot 16$	11 с на шаг	0.02 с	CRAY C90	T. Kagaki, T. Kobayashi, N. N. Taniguchi, 1997
DNS LES	$1.0 \cdot 10^5$ $1.0 \cdot 10^6$ $1.0 \cdot 10^5$					$10^8$ $10^8$ $1728000$	10 5000		IBM SP2	W. Rodi, 2000
LES	$1.0 \cdot 10^5$	FVM+MAC			QUICK	$250 \cdot 130 \cdot 12$	80	0.0125	IBM SP2	D. Yu, D.A. Korem, 1997
LES (канал)	$4.8 \cdot 10^3$	FVM	Mac Compact			$257 \cdot 100 \cdot 100$	150	$10^{-7}$ с	Cray T3D	T.T. Bai, 2000
LES (канал)	$3.8 \cdot 10^4$	FVM	RK3	CN		$64 \cdot 80 \cdot 80$				K.B. Shah, J.H. Fozzard, 1995
IFS (канал)	$2.0 \cdot 10^3$					$97 \cdot 85 \cdot 193$	180 30		PC Cray T90	R. Verzicco, J. Mohd-Yusof, P. Orlandi, D. Haworth, 2000
LES (шум)	1273	low-Mach projection method	AB	CDS-2		$256 \cdot 128 \cdot 128$	4000	$10^{-4}$	Cray T3E (64 proc)	X. Zhou, K.H. Luo, J. Williams, 2002
LES (профиль)	$2.1 \cdot 10^6$	FVM+SIMPLE	неявная	CDS-2 CDS-4	UDS-3	$720 \cdot 65 \cdot 33$	180		IBM SP	L. Davidson, 2000

FVM – метод контрольного объема  
RK3 – схема Рунге-Кутты 3-го порядка  
CN – схема Кранка-Николсона

FDM – метод конечных разностей  
AB – схема Адамса-Бэшворта

Для оценки необходимых вычислительных ресурсов (например, быстродействия и объема оперативной памяти) возьмем расчетную сетку  $100 \times 100 \times 100$  узлов ( $10^6$  точек).

В каждом узле необходимо вычислить около 10 функций (составляющие скорости, плотность, давление, температуру, характеристики турбулентности, концентрации компонентов смеси). Значения неизвестных функций находятся в результате решения системы нелинейных уравнений, что требует от 200 до 1000 арифметических операций. За один шаг по времени необходимо выполнить  $10^{10}$  операций с плавающей точкой. Для исследования развития процесса во времени требуется до 1000 временных шагов. В результате, выполнение одного расчета требует  $10^{13}$  операций с плавающей точкой.

Для проведения одного расчетного варианта компьютер с производительностью 100 МФлопс ( $10^8$  операций с плавающей точкой в секунду) затратит  $10^7$  секунд или свыше

100 дней. Для проведения расчета за 100 минут потребуется компьютер с производительностью 0.1 ТФлопс. Такие ресурсы лежат за пределами возможностей современных персональных компьютеров, что требует привлечения специальной вычислительной техники, оснащенной средствами параллельной обработки данных.

Параллельные вычисления на различных платформах (в частности, Unix и Win32) поддерживают многие коммерческие пакеты (STAR-CD HPC, CFX, FLUENT). Имеются также различные специализированные средства разработки параллельных программ (например, MPI, PVM), позволяющие использовать для написания программы традиционные языки программирования (Fortran, C/C++). Однако использование всех мощностей многопроцессорной системы для эффективного решения той или иной задачи в параллельном режиме вычислений требует правильного выбора модели распараллеливания программного кода, тесно связанной с аппаратными и системными средствами параллельной обработки данных.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Развитие высокопроизводительных вычислительных систем и разработка эффективных численных методов решения нелинейных задач механики жидкости и газа создает необходимые предпосылки для реализации метода моделирования крупных вихрей. При этом успешное применение данного подхода для моделирования задач, имеющих важное практическое значение, требует решения следующих вопросов.

1. Создание методической и информационной базы метода моделирования крупных вихрей.

1.1. Разработка критерия сходимости. Иными словами, каким образом результаты численного моделирования зависят от выбора ширины фильтра. Обоснование такого выбора при решении конкретных задач.

1.2. Исследование влияния изменения ширины фильтра в пространстве (например, при использовании сеток с переменным шагом) на устойчивость вычислительной процедуры.

1.3. Исследование влияния выбора ядра фильтра на обработку результатов расчетов.

1.4. Сравнение различных разностных схем (явные/неявные схемы, порядок аппроксимации по времени и по пространству, различные схемы расчета конвективных и диффузионных потоков).

1.5. Создание базы данных результатов численного решения ряда тестовых задач, для которых имеются надежные экспериментальные и численные результаты (например, тестовой задачи конвекции, моделирования обтекания обратной ступеньки, расчета течения в канале со вдувом и течения в прямоугольной каверне, моделирования обтекания цилиндра).

1.6. Построение моделей, учитывающих влияние дисперсной фазы на структуру подсеточных масштабов.

1.7. Включение моделей физико-химических процессов.

2. Поиск рациональных приближений процессов подсеточного переноса массы, импульса и энергии. Разработка семейства подсеточных моделей, учитывающих сжимаемость потока, наличие физико-химических процессов и присутствие дисперсной фазы. Развитие динамических моделей вихревой вязкости, моделей подобных масштабов и смешанных моделей.

3. Пристеночное моделирование, включающее поиск и разработку подходов, позволяющих уменьшить количество узлов вычислительной сетки вблизи границ потока. Развитие метода моделирования отсоединенных вихрей, как одного из приемлемых вариантов.

4. Реализация подхода на основе структурированных и неструктурированных сеточных структур.

5. Создание и исследование эффективности параллельных и векторизованных численных алгоритмов для вычислительных систем с общей и распределенной памятью.

Учитывая изложенные обстоятельства, представляется целесообразным применение метода моделирования крупных вихрей для решения прикладных задач в таких областях как аэродинамика отрывных течений, механика газодисперсных и газок капельных потоков, акустика, физика горения и взрыва. В перечисленных областях важную роль играют пульсации параметров (например, пульсации скорости при расчете рециркуляционных зон и двухфазных течений, пульсации давления в акустических приложениях, пульсации температуры при моделировании химически реагирующих потоков), которые могут быть рассчитаны на основе метода моделирования крупных вихрей. Пульсации локальных параметров потока приводят к флуктуациям интегральных характеристик течения, например,

коэффициентов сопротивления и подъемной силы.

Основные цели исследования должны заключаться не в применении LES для решения отдельных частных задач, а в создании методической базы и разработке общей концепции численной реализации метода моделирования крупных вихрей применительно к задачам механики жидкости и газа.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. М.: Мир, 1990. 726 с.
2. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. СПб: Изд-во БГТУ, 2001. 108 с.
3. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. М.: Физматлит, 1994. 444 с.
4. Белоцерковский С.М., Гиневский А.С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей. М.: Физматлит, 1995. 368 с.
5. Белоцерковский О.М., Опарин А.М., Четкин В.М. Турбулентность: новые подходы. М.: Наука, 2002. 286 с.
6. Варнатц Ю., Маас У., Диббл Р. Горение. Физические и химические аспекты, моделирование, эксперименты, образование загрязняющих веществ. М.: Физматлит, 2003. 352 с.
7. Вишик М.И., Фурсиков А.В. Математические задачи статистической гидромеханики. М.: Наука, 1980. 440 с.
8. Головачев Ю.П. Численное моделирование течений вязкого газа в ударном слое. М.: Наука, 1996. 376 с.
9. Зайчик Л.И. Об уравнении для функции плотности вероятности скоростей частиц в неоднородном турбулентном потоке // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 2. С. 117–124.
10. Иевлев В.М. Турбулентное движение высокотемпературных сплошных сред. М.: Наука, 1975. 256 с.
11. Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. М.: Наука, 1982. 608 с.
12. Кузнецов В.Р., Сабельников В.А. Турбулентность и горение. М.: Наука, 1986. 288 с.
13. Ландау Л.Д., Лифшиц В.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1988. 736 с.
14. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Теория турбулентности. Т. 1. СПб: Гидрометеиздат, 1992. 696 с.
15. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Т. 2. СПб: Гидрометеиздат, 1996. 744 с.
16. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990. 664 с.
17. Таунсенд А.А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М.: ИЛ, 1959. 400 с.
18. Управление обтеканием тел с вихревыми ячейками в приложении к летательным аппаратам интегральной компоновки (численное и физическое моделирование) / Под ред. А.В. Еремшина и С.А. Исаева. М., СПб, 2001. 360 с.
19. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 1. М.: Мир, 1991. 552 с.
20. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Т. 2. М.: Мир, 1991. 552 с.
21. Хинце И.О. Турбулентность: ее механизм и теория. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
22. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 711 с.
23. Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П. Турбулентные течения газовзвеси. Киев: Наукова думка, 1987. 238 с.
24. Abba A., Cercignani C., Valdetaro L., Zanini P. LES of thermal convection and investigation in soft/hard turbulent regimes Computational Fluid Dynamics. 1996. P. 878–883.
25. Abdel Gawad A.F., Ragab S.A., Luton A., Abdel Latif O.E. Large eddy simulation for fully developed flow in a square duct // Proceedings of ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting (22–26 June 1997, Vancouver, Canada). 1997. Paper No. 97-3161.
26. Balaras E., Benocci C., Piomelli U. Two-layer approximate boundary conditions for large-eddy simulations // AIAA Journal. 1996. Vol. 34. No. 6. P. 1111–1119.
27. Bardina J., Ferziger J.H., Reynolds W.C. Improved subgrid scale models for large eddy simulation // AIAA Paper. 1980. No. 80-1357. 16 p.
28. Batten P., Goldberg U., Chakravarthy S. LNS – an approach towards embedded LES // AIAA Paper. 2002. No. 2002-0427. 10 p.
29. Branley N., Jones W.P. Large scale simulation of a turbulent non-premixed flame // Combustion and Flame. 2001. No. 127. P. 1914–1934.
30. Breuer M. Large eddy simulation of the subcritical flow past a circular cylinder: numerical and modeling aspects // International Journal for Numerical Methods in Fluids. 1998. Vol. 28. P. 1281–1302.
31. Brown G.L., Roshko A. On density effects and large structures in turbulent mixing layers // Journal of Fluid Mechanics. 1974. Vol. 64. No. 4. P. 775–816.
32. Bui T.T A parallel, finite-volume algorithm for large-eddy simulation of turbulent flows // Computers and Fluids. 2002. Vol. 29. No. 8. P. 877–915.
33. Cabot W. Large-eddy simulation with wall models // Center for Turbulence Research. 2000. P. 241–250.
34. Camarri S., Salvetti M., Koobus B., Dervieux A. A low-diffusion MUSCL scheme for LES on

- unstructured grids // *Computers and Fluids*. 2004. Vol. 33. No. 9. P. 1101–1129.
35. Canuto V.M., Cheng Y. Determination of the Smagorinsky-Lilly constant  $C_S$  // *Physics of Fluids*. 1997. Vol. 9. No. 5. P. 1368–1378.
36. Carati D. Perspectives for ensemble average LES // *Center for Turbulence Research*. 1997. P. 107–112.
37. Carati D., Eijnden E.V. On the self-similarity assumption in dynamic models for large eddy simulation // *Physics of Fluids*. 1997. Vol. 9. No. 7. P. 2165–2167.
38. Cha C.M., Pitsch H. Higher-order singly-conditional moment-closure modeling approaches to turbulent combustion // *Center for Turbulence Research*. 2001. P. 87–95.
39. Cook A.W. Determination of the constant coefficient in scale similarity models of turbulence // *Physics of Fluids*. 1997. Vol. 9. No. 5. P. 1485–1487.
40. Craft T.J., Gant S.E., Iacovides H., Launder B.E. A new wall function strategy for complex turbulent flows // *Numerical Heat Transfer. Part B*. 2005. Vol. 45. P. 301–318.
41. DesJardin P.E., Frankel S.H. Two-dimensional large eddy simulation of soot formation in the near-field of a strongly radiating nonpremixed acetylene-air turbulent jet flame // *Combustion and Flame*. 1999. Vol. 119. P. 121–132.
42. Ducros F., Nicoud F., Poinsot T. Wall-adopting local eddy viscosity models for simulations in complex geometries // *Proceedings of the 6th ICFD Conference on Numerical Methods for Fluid Dynamics*. 1998. P. 293–299.
43. Durbin P.A. Near-wall turbulence closure modeling without "damping functions" // *Theoretical Computational Fluid Dynamics*. 1991. Vol. 3. P. 1–13.
44. ECARP — European computational aerodynamics research project: validation of CFD codes and assessment of turbulence models / Haase W., Chaupt E., Elsholz E., Leschziner M.A., Muller U.R. // *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. Vieweg Verlag, 1997. Vol. 58.
45. Fureby C. On subgrid scale modeling in large eddy simulation of compressible fluid flow // *Physics of Fluids*. 1995. Vol. 8. No. 5. P. 1301–1311.
46. Fureby C., Tabor G., Weller H.G., Gosman A.D. Large eddy simulation of the flow around a square prism // *AIAA Journal*. 2000. Vol. 38. No. 3. P. 442–452.
47. Germano M. A proposal for a redefinition of the turbulent stresses in the filtered Navier-Stokes equations // *Physics of Fluids*. 1986. Vol. 29. No. 7. P. 2323–2324.
48. Germano M., Piomelli U., Moin P., Cabot W.H. A dynamic subgrid scale eddy viscosity model // *Physics of Fluids*. 1991. Vol. 3. No. 7. P. 1760–1765.
49. Germano M. Turbulence: the filtering approach // *Journal of Fluid Mechanics*. 1992. Vol. 238. P. 325–336.
50. Ghosal S. Analysis of discretization errors in LES // *Center for Turbulence Research*. 1995. P. 3–24.
51. Ghosal S., Rogers M.M. A numerical study of self-similarity in a turbulent plane wake using large-eddy simulation // *Center for Turbulence Research*. 1996. P. 257–279.
52. Gonzalez M., Araujo M., Rodriguez A. Flow equations on a fractal structure // *Physica A*. 2001. Vol. 298. P. 297–314.
53. Gullbrand J. Grid-independent large-eddy simulation in turbulent channel flow using three-dimensional explicit filtering // *Center for Turbulence Research*. 2003. P. 331–342.
54. Hassan Y.A., Barsamian H.R. New-wall modeling for complex flows using the large eddy simulation technique in curvilinear coordinates // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2001. Vol. 44. P. 4009–4026.
55. Hawkes E.R., Cant R.S. Implications of a flame surface density approach to large eddy simulation of premixed turbulent combustion // *Combustion and Flame*. 2001. No. 126. P. 1617–1629.
56. Hongrui G., Shiyi C., Gouwei H., Nianzhen C. A second-order dynamic subgrid-scale stress model // *Applied Mathematics and Mechanics*. 2000. Vol. 21. No. 2. P. 165–172.
57. Horiuti K. Backward scatter of subgrid-scale energy in wall-bounded and free shear turbulence // *Journal of Physical Society of Japan*. 1997. Vol. 66. No. 1. P. 91–107.
58. Im H.G. Study of turbulent premixed flame propagation using a laminar flamelet model // *Center for Turbulence Research*. 1995. P. 347–361.
59. Im H.G., Lund T.S., Ferziger J.H. Dynamic models for LES of turbulent front propagation with a spectral method // *Center for Turbulence Research*. 1996. P. 101–112.
60. James S., Jaber F.A. Large scale simulations of two-dimensional nonpremixed methane jet flames // *Combustion and Flame*. 2000. No. 123. P. 465–487.
61. Kaltenbach H.-J., Choi H. Large-eddy simulation of flow around an airfoil on a structured mesh // *Center for Turbulence Research*. 1995. P. 51–60.
62. Kim W.-W., Menon S. A new dynamic one-equation subgrid scale model for large eddy simulation // *AIAA Paper*. 1995. No. 95-0356. 9 p.
63. Kurose R., Makino H. Large eddy simulation of a solid-fuel jet flame // *Combustion and Flame*. 2003. Vol. 135. P. 1–16.

64. Kurose R., Makino H., Michioka T., Komori S. Large eddy simulation of a non-premixed turbulent reacting mixing layer: effects of heat release and spanwise fluid shear // *Combustion and Flame*. 2001. Vol. 127. P. 2157–2163.
65. Kyle D.S., Eaton J.K. Lagrangian and Eulerian statistics obtained from direct numerical simulation of homogeneous turbulence // *Physics of Fluids*. 1991. Vol. 3. No. 1. P. 130–143.
66. Launder B.E., Spalding P.E. The numerical computation of turbulent flows // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1974. Vol. 3. P. 269–289.
67. Lei K., Taniguchi N., Kobayashi T. A new dynamic SGS model for large eddy simulation of particle-laden flows // 3rd AFOSR International Conference on Direct Numerical Simulation and Large Eddy Simulation (5–9 August 2001, Arlington, USA). 2001. 5 p.
68. Lesieur M., Metais O. New trends in large-eddy simulations of turbulence // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1996. Vol. 28. P. 45–82.
69. Madabhushi R.K., Vanka S.P. Large eddy simulation of turbulent-driven secondary flow in a square duct // *Physics of Fluids. Part A*. 1991. Vol 3. No. 11. P. 2734–2745.
70. Marsden A.L., Vasilyev O.V. Commutative filters for LES on unstructured meshes // *Center for Turbulence Research*. 1999. P. 389–402.
71. Marsden A.L., Vasilyev O.V., Moin P. Construction of commutative filters for LES on unstructured meshes // *Center for Turbulence Research*. 2000. P. 179–192.
72. Milelli M., Smith B.L., Lakehal D. Large-eddy simulation of turbulent shear flows laden with bubbles // *Workshop on Direct and Large-Eddy Simulation-IV* (18–20 July 2001, Enschede, Netherlands). 2001. 10 p.
73. Miyake Y., Kajishima T. Explanation of the origin of the secondary flow in a straight square duct on the basis of LES // *Separated Flows and Jets*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1991. P. 149–152.
74. Moin P., Mahesh K. Direct numerical simulation. A tool in turbulence research // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 1998. Vol. 30. P. 539–578.
75. Morinishi Y., Vasilyev O.V. Subgrid scale modeling taking the numerical error into consideration // *Center for Turbulence Research*. 1998. P. 237–253.
76. Murray J.A., Piomelli U., Wallace J.M. Spatial and temporal filtering of experimental data for a priori studies of subgrid-scale stresses // *Physics of Fluids*. 1996. Vol. 8. No. 7. P. 1978–1980.
77. Novozhilov V. Computational fluid dynamics modeling of compartment fire // *Progress in Energy and Combustion Science*. 2001. Vol. 27. P. 611–666.
78. O’Sullivan P.L., Biringen S., Huser A. A priori evaluation of dynamic subgrid models of turbulence in square duct flow // *Journal of Engineering Mathematics*. 2001. Vol. 40. No. 1. P. 91–108.
79. Pandya R.V.R., Mshayek F. Two-fluid large-eddy simulation approach for particle-laden turbulent flows // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2002. Vol. 45. P. 4753–4759.
80. Peng S.-H., Davidson L. On a subgrid-scale heat flux model for large eddy simulation of turbulent thermal flow // *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2002. Vol. 45. P. 1396–1405.
81. Piomelli U. Large-eddy and direct simulation of turbulent flows // *Invited short course delivered at 9th Annual Conference of the CFD Society of Canada* (Kitchener, May 2001). 2001. 70 p.
82. Piomelli U. Large-eddy simulation: achievements and challenges // *Progress in Aerospace Sciences*. 1999. Vol. 35. P. 335–362.
83. Piomelli U., Balaras E., Pasinato H., Squires K.D., Spalart P.R. The inner-outer layer interface in large-eddy simulations with wall-layer models // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2003. Vol. 24. P. 538–550.
84. Piomelli U., Yu Y., Adrian R.J. Subgrid-scale energy transfer and near wall turbulence structure // *Physics of Fluids*. 1996. Vol. 8. No. 1. P. 215–224.
85. Pope S.B. PDF methods for turbulent reactive flows // *Progress in Energy Combustion Science*. 1986. P. 11–119.
86. Reeks M.W. On a kinetic equation for the transport of particles in turbulent flows // *Physics of Fluids*. 1991. Vol. 3. No. 3. P. 446–456.
87. Rodi W. Simulation of turbulence in practical flow calculations // *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS-2000* (Barcelona, 11–14 September 2000). 2000. 22 p.
88. Rodi W., Ferziger J.H., Breuer M., Pourquie M. Status of large eddy simulation: results of a workshop. Workshop on LES of Flows Past Bluff Bodies (Tegernsee, Germany, June 26–28 1995) // *Journal of Fluids Engineering*. 1995. Vol. 118. P. 248–262.
89. Ruetsch G.R., Broadwell J.E. Effects of confinement on partially premixed flames // *Center for Turbulence Research*. 1995. P. 323–332.
90. Sagaut P. Simulations of separated flows with subgrid model // *La Recherche Aerospaciale*. 1996. Vol. 1. P. 51–63.
91. Sagaut P., Troff B., Le T.H., Ta P.L. Large eddy simulation of turbulent flow past a backward facing step with a new mixed scale SGS model // *Notes on Numerical FluidMechanics*. 1996. Vol.



53. P. 271–278.
92. Salinas-Vazquez M., Metais M. Large-eddy simulation of the turbulent flow through a heated square duct // *Journal of Fluid Mechanics*. 2002. Vol. 453. P. 201–238.
93. Salvetti M.V., Banerjee S. A priori tests of a new dynamic subgrid-scale model for finite-difference large eddy simulation // *Physics of Fluids*. 1995. Vol. 11. P. 2831–2837.
94. Schoppa W., Hussain F. Effective drag reduction by large-scale manipulation of streamwise vortices in near-wall turbulence // *AIAA Paper*. No. 97-1794. 9 p.
95. Scotti A., Meneveau C. A fractal model for large eddy simulation of turbulent flow // *Physica D*. 1999. Vol. 127. P. 198–232.
96. Shah K.B., Ferziger J.H. A new non-eddy viscosity subgrid-scale model and its application to channel flow // *Center for Turbulence Research*. 1995. P. 73–90.
97. Shankar P.N., Deshpande M.D. Fluid mechanics in the driven cavity // *Annual Review of Fluid Mechanics*. 2000. Vol. 32. P. 93–136.
98. Shen S., Ding F., Han J., Lin Y.-L., Arya S.P., Proctor F.H. Numerical modeling studies of wake vortices: real case simulation // *AIAA Paper*. 1999. No. 99-0755. 16 p.
99. Shtrale W.C., Sigman R.K., Maeder W.L. Stagnating turbulent flows // *AIAA Journal*. 1987. Vol. 25. No. 8. P. 1071–1077.
100. Silvestrini J.H., Lamballais E., Lesieur M. Spectral-dynamic model for LES of free and wall shear flows // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 1998. Vol. 19. P. 492–504.
101. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations // *Monthly Weather Review*. 1963. Vol. 91. No. 3. P. 99–165.
102. Smith N.S.A. Modeling complex chemical effects in turbulent non-premixed combustion // *Center for Turbulence Research*. 1995. P. 301–321.
103. Snyder W.H., Lumley J.L. Some measurements of particle velocity autocorrelation functions in a turbulent flow // *Journal of Fluid Mechanics*. 1971. Vol. 48. Pt. 1. P. 41–71.
104. Spalart P.R. Strategies for turbulence modelling and simulations // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2000. No. 21. P. 252–263.
105. Spalart P.R., Jou W.H., Strelets M., Allmaras S.R. Comments on the feasibility of LES for wings, and on a hybrid RANS/LES approach // *Advances in DNS/LES*. Greyden Press, Columbus, 1997. P. 137–148.
106. Strelets M. Detached eddy simulation of massively separated flows // *AIAA Paper*. No. 2001-0879. 18 p.
107. Su M.D., Friedrich R. Investigation of fully developed turbulent flow in a straight duct with large eddy simulation // *Journal of Fluids Engineering*. 1994. Vol. 116. P. 677–684.
108. Tanakai T., Yamamoto Y., Potthoff M., Tsuji Y. LES of gas-particle turbulent channel flow // *ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting FEDSM-97* (22–26 June 1997, Vancouver, Canada). 5 p.
109. Temmerman L., Leschziner M.A., Mellen C.P., Frohlich J. Investigation of wall-function approximations and subgrid-scale models in large eddy simulation of separated flow in a channel with streamwise periodic constrictions // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2003. Vol. 24. P. 157–180.
110. Thibaut D., Candel S. Numerical study of unsteady turbulent premixed combustion: application to flashback simulation // *Combustion and Flame*. 1998. Vol. 113. P. 53–65.
111. Thomas T.G., Williams J.J.R. Development of a parallel code to simulate skewed flow over a bluff body // *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*. 1997. Vol. 67/68. P. 155–167.
112. Tucker P.G. Novel MILES computations for jet flows and noise // *International Journal of Heat and Fluid Flow*. 2004. Vol. 25. P. 625–635.
113. Tucker P.G., Pan Z. URANS computations for a complex internal isothermal flow // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2001. Vol. 190. P. 2893–2907.
114. *Turbulent reacting flows* / P.A. Libby, F.A. Williams. Academic Press, 1994. 648 p.
115. Vasilyev O.V., Lund T.S. A general theory of discrete filtering for LES in complex geometry // *Center for Turbulence Research*. 1997. P. 67–82.
116. Veynante D., Poinot T. Large eddy simulation of combustion instabilities in turbulent premixed burners // *Center for Turbulence Research*. 1997. P. 253–274.
117. Wu X., Squires K.D. Large Eddy Simulation of an Equilibrium Three-Dimensional Boundary Layer // *AIAA Journal*. 1997. Vol. 35. No. 1. P. 67–74.
118. Wu X., Squires K.D. Numerical Investigation of the turbulent boundary layer over a bump // *Journal of Fluid Mechanics*. 1998. Vol. 362. P. 229–271.
119. Yu D., Mei R., Luo L.-S., Shyy W. Viscous flow computations with the method of lattice Boltzmann equation // *Progress in Aerospace Sciences*. 2003. Vol. 39. P. 329–367.
120. Yuu S., Ueno T., Umekage T. Numerical simulation of the high reynolds number slit nozzle gas-particle jet using subgrid-scale coupling large eddy simulation // *Chemical Engineering Science*. 2001. Vol. 56. P. 4293–4307.

- 
121. Zang Y., Street R.L., Koseff J.R. A dynamic mixed subgrid-scale model and its application to turbulent recirculating flows // *Physics Fluids*. 1993. Vol. 5. No. 12. P. 3186–3196.
  122. Zhou G., Davidson L., Olsson E. Transonic inviscid/turbulent airfoil flow simulations using a pressure based method with high order schemes // *Lecture Notes in Physics*. 1995. No. 453. P. 372–377.



# СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b>	<b>3</b>
<b>1. Подходы к моделированию турбулентных течений</b>	<b>4</b>
1.1. Статистический и феноменологический подходы	4
1.2. Вихревая и волновая трактовка турбулентности	4
1.2.1. Каскадный механизм переноса энергии	5
1.2.2. Растяжение вихрей и вихревые нити	6
1.2.3. Масштабы турбулентного движения	7
1.2.4. Корреляционные функции и спектр	8
1.2.5. Спектральное распределение турбулентной энергии	10
1.3. Характеристика феноменологического подхода	12
1.4. Прямое численное моделирование	14
1.5. Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса	18
1.5.1. Классификация моделей турбулентности	18
1.5.2. Концепция вихревой вязкости	18
1.5.3. Алгебраические модели	19
1.5.4. Дифференциальные модели	20
1.5.4.1. Однопараметрические модели	20
1.5.4.2. Двухпараметрические модели	21
1.5.4.3. Многопараметрические модели	22
1.5.4.4. Вычислительные ресурсы при использовании различных моделей	24
1.5.4.5. Выбор модели турбулентности	24
1.6. Моделирование крупных вихрей	25
1.7. Квазипрямое численное моделирование	29
1.8. Моделирование отсоединенных вихрей	29
1.9. Метод ограниченных численных масштабов	31
<b>2. Концепция осреднения Рейнольдса и фильтрация</b>	<b>32</b>
2.1. Осреднение по Рейнольдсу	32
2.2. Вопросы, связанные с осреднением	33
2.3. Трехчленное разложение	37
2.4. Осреднение по Фавру	38
2.5. Оператор фильтрации	39
2.5.1. Неявная фильтрация	39
2.5.2. Явная фильтрация	40
2.5.3. Виды фильтров	41
2.5.4. Ширина фильтра	43
2.5.5. Проблемы, связанные с фильтрацией	44
2.5.6. Переход к средним параметрам	45
2.5.7. Спектр пульсаций	46
2.6. Уравнения, описывающие течения высокотемпературных газовых смесей	46
2.7. Фильтрованные по пространству уравнения сохранения	49
2.8. Учет сжимаемости	52
<b>3. Моделирование слагаемых, связанных с подсеточным переносом</b>	<b>53</b>
3.1. Тензор подсеточных напряжений	53
3.1.1. Модели вихревой вязкости	53
3.1.2. Модели подобных масштабов	65
3.1.3. Модели, использующие обращение свертки	66
3.1.4. Смешанные модели	67
3.1.5. Другие модели	68
3.2. Подсеточный тепловой поток	68
3.3. Диффузионный поток массы	69
3.4. Оценки порядков величин	69
3.5. Фильтрованные уравнения сохранения	70
<b>4. Численная и программная реализация метода крупных вихрей</b>	<b>71</b>
4.1. Постановка начальных и граничных условий	71
4.1.1. Входная граница	71
4.1.2. Выходная граница	71
4.1.3. Твердая граница	71
4.2. Структура пограничного слоя	72

---

4.2.1. Внешняя и внутренняя области пограничного слоя . . . . .	72
4.2.2. Закон стенки . . . . .	73
4.2.3. Уравнения пограничного слоя . . . . .	75
4.2.4. Двухслойные модели . . . . .	75
4.3. Особенности численной реализации . . . . .	76
4.4. Оценка вычислительных ресурсов . . . . .	77
<b>Заключение</b>	<b>83</b>
<b>Литература</b>	<b>85</b>