

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/320466159>

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Book · October 2007

CITATIONS

0

READS

4,219

1 author:



Alexander Mazo

Kazan (Volga Region) Federal University

120 PUBLICATIONS 258 CITATIONS

SEE PROFILE

Some of the authors of this publication are also working on these related projects:



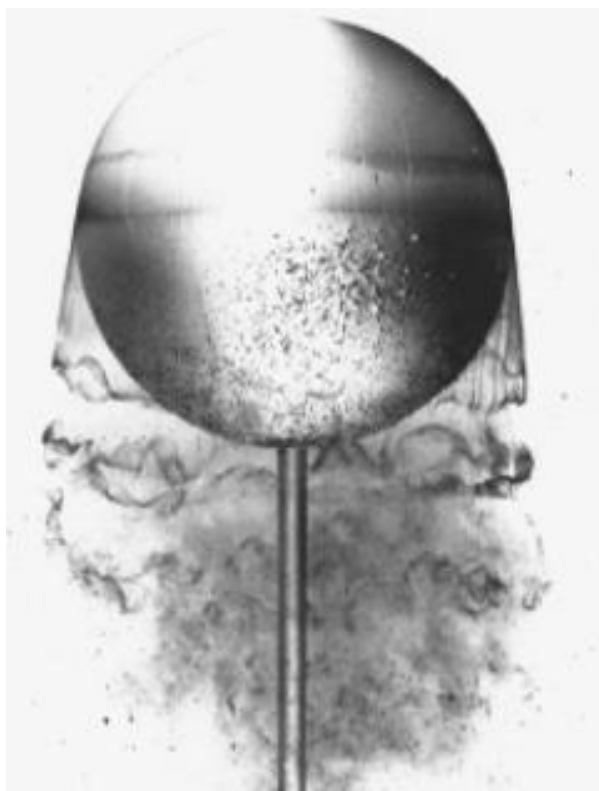
Simulation of oil reservoir [View project](#)



Glaciers [View project](#)

А.Б. Мазо

**МОДЕЛИРОВАНИЕ
ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**



Казань – 2007

Казанский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра аэрогидромеханики

А.Б. Мазо

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ
НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

Учебное пособие

Казань – 2007

УДК 532.517.4

Печатается по решению учебно-методической комиссии
механико-математического факультета
Казанского государственного университета
Протокол № 6 от 17 мая 2007 года

Рецензенты:

Член-корреспондент РАН А. В. Забродин, доцент В.А. Черкашин (МГУ),
профессор С.А. Исаев (Академия гражданской авиации, Санкт-Петербург)

Мазо А.Б. Моделирование турбулентных течений несжимаемой жидкости.
Учебное пособие. – Казань: КГУ, 2007. – 106 с.

Учебное пособие основано на специальном курсе лекций, читаемых автором студентам-механикам V курса механико-математического факультета. Теория турбулентности представлена в пособии кратким изложением гипотез А.Н. Колмогорова и их следствий. Основное внимание в структуре курса уделено методам замыкания уравнений Рейнольдса с помощью современных полуэмпирических моделей турбулентности. Излагается также метод крупных вихрей.

Освещены все основные модели турбулентности, входящие в каталоги современных CFD-пакетов, таких как FLUENT и STAR-CD.

Пособие может быть использовано также аспирантами, научными работниками и инженерами, специализирующимся в области моделирования и практических расчетов турбулентных течений и теплообмена.

© Казанский государственный университет. 2007

Введение

Наблюдения за течением жидкости в природе и технических устройствах в различных условиях позволяют выделить два режима течения: 1) *ламинарное* – слоистое, когда все жидкие частицы двигаются в доминирующем направлении, а поперечные движения отсутствуют, при этом перемешивания «слоев» жидкости не происходит; и 2) *турбулентное* – переплетающееся течение, характеристикой которого является интенсивное перемешивание жидкости в поперечном направлении. Изучению ламинарного течения уделяется большое внимание в традиционных курсах механики жидкости, тогда как знакомство с турбулентностью обычно ограничивается материалом и результатами, полученными еще в XIX веке. Вместе с тем, подавляющее большинство важных для человека течений в природе и технике являются турбулентными, и эта область гидродинамики бурно развивается в последнее время, особенно в связи с появлением быстродействующих компьютеров.

Хорошим началом для знакомства с турбулентными течениями может служить книга Ван Дайка «Альбом течений жидкости и газа», в котором собраны великолепные фотографии, дающие представление об экспериментальной, феноменологической стороне предмета данного учебного пособия. Ниже представлены визуализации ламинарных и турбулентных потоков жидкости или газа, которые можно классифицировать следующими типами.

1. *Пограничный слой*. Это течения около неподвижных стенок, например, при движении жидкости в канале или газа вблизи поверхности крыла самолета. Поскольку жидкость прилипает к стенке, течение в пограничном слое всегда носит вихревой характер и сильно отличается от течения в основном потоке. Рис. 0.1 – 0.3.

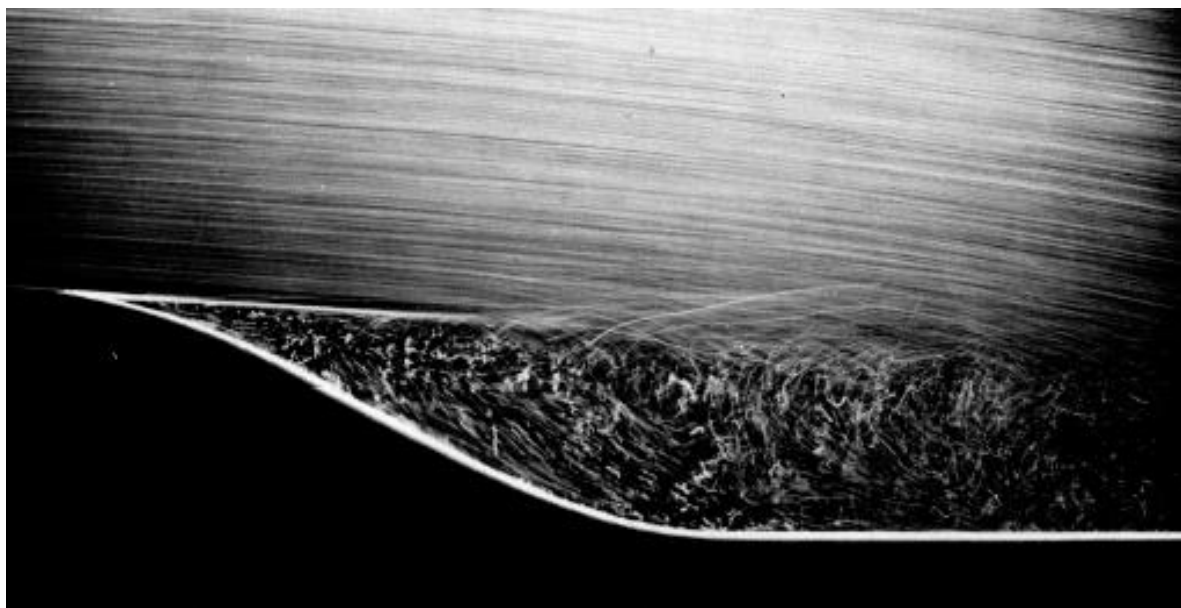


Рис. 0.1. Ламинарный отрыв потока на искривленной стенке при $Re=20\,000$. После отрыва пограничный слой становится неустойчивым и турбулизуется.

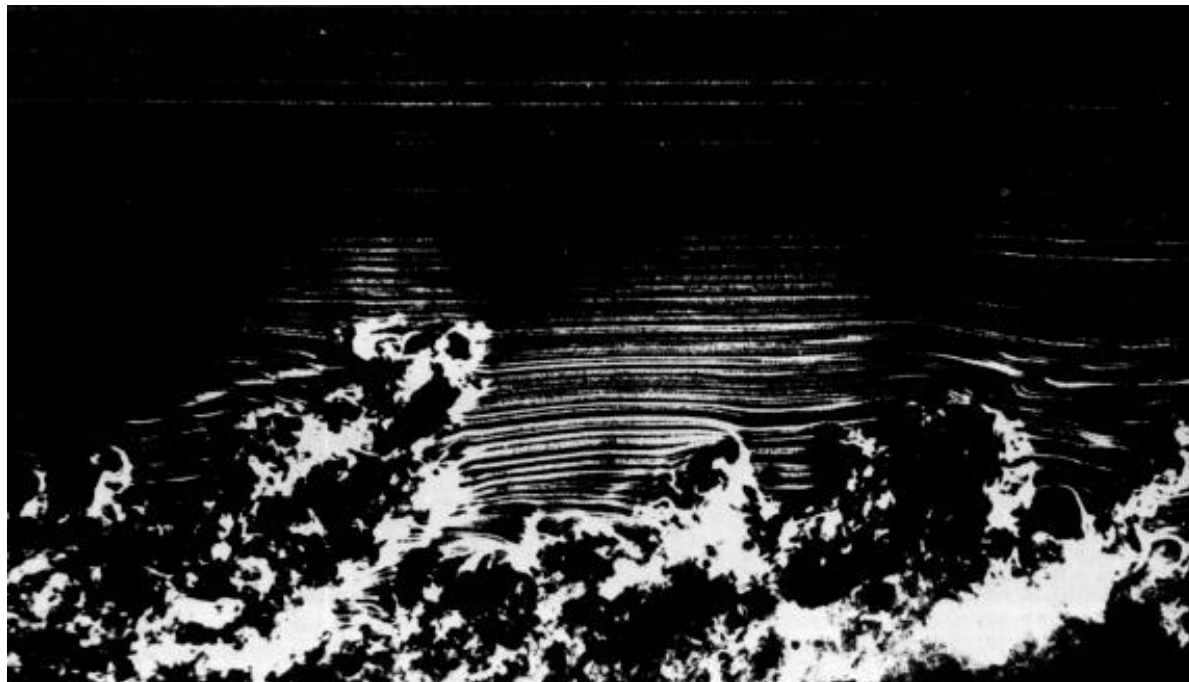


Рис. 0.2. Турбулентный пограничный слой, развивающийся на плоской пластинке длиной 3.3 м, подвешенной в аэродинамической трубе. $Re=3500$. Хорошо видна перемежающаяся структура внешней части погранслоя, где наблюдаются области турбулентного и ламинарного течения .

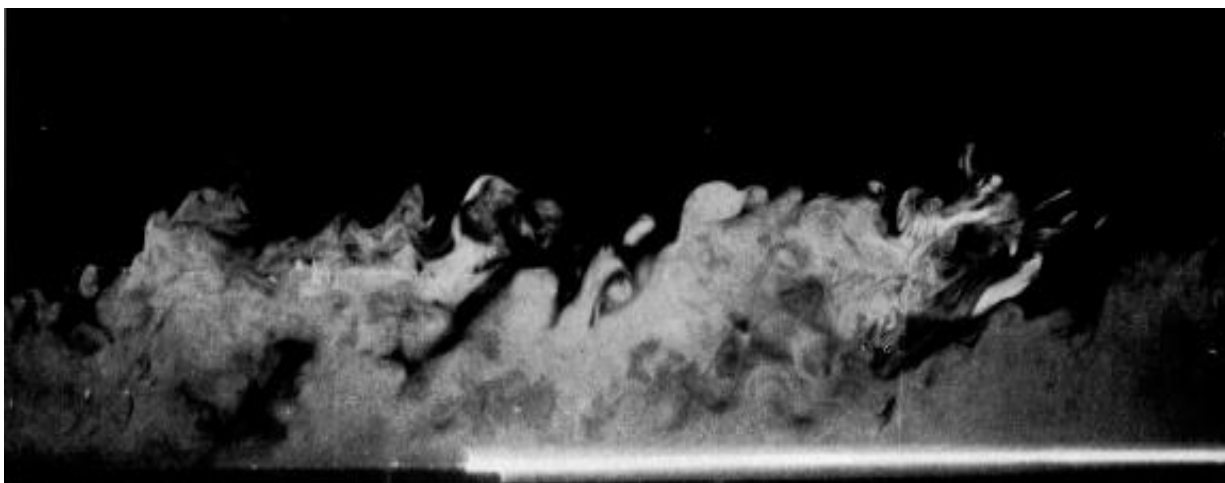


Рис. 0.3. Турбулентный пограничный слой на стенке аэродинамической трубы на расстоянии 5.8 м от места искусственной турбулизации потока. $Re=4000$.

2. *Внешнее обтекание тел.* Оно может проходить с отрывом потока или без отрыва. Даже если скорость набегающего потока не меняется во времени, в следе за телом картина течения может быть периодичной. Рис. 0.4 – 0.15

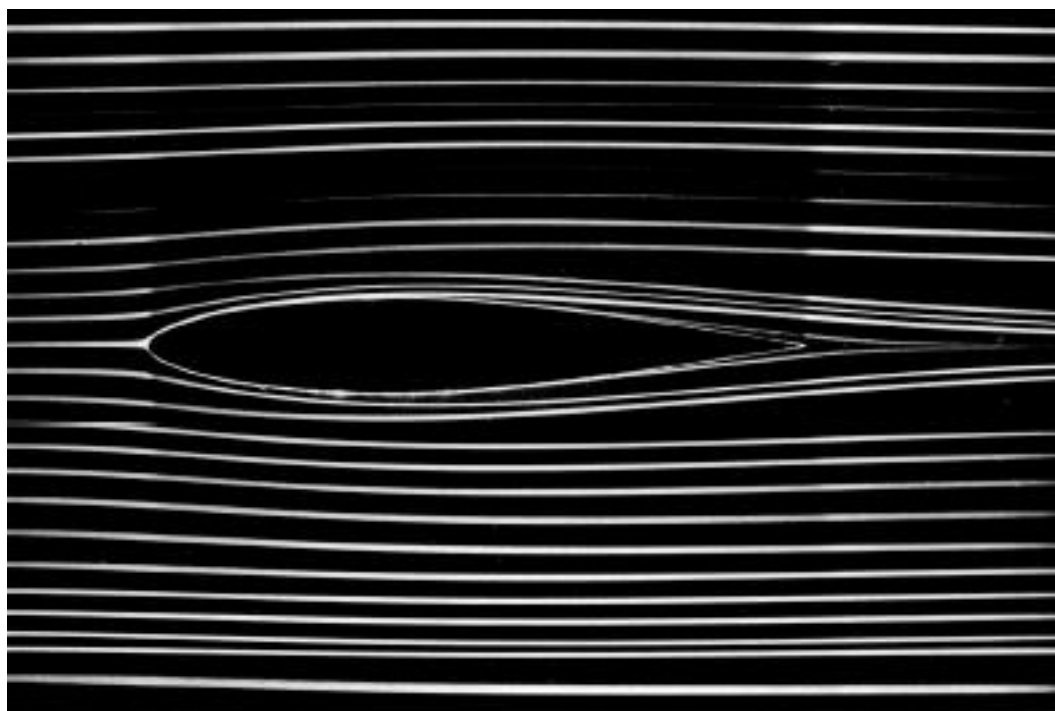


Рис. 0.4. Симметричное обтекание профиля плоским потоком. Профиль НАСА 64A015 помещен в гидродинамическую трубу при нулевом угле атаки. Течение ламинарное и безотрывное



Рис. 0.5. Вихревая дорожка Кармана при ламинарном обтекании кругового цилиндра. $Re=140$.

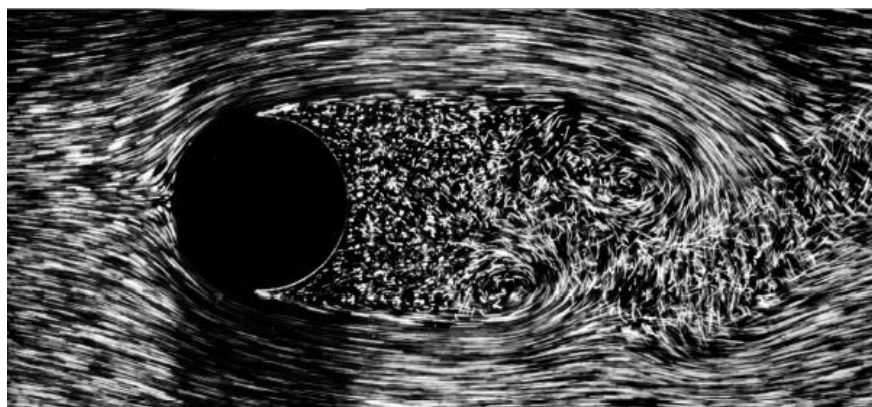


Рис. 0.6. Обтекание кругового цилиндра при $Re=2000$. Ламинарный погранслой отрывается и разрушается, превращаясь в турбулентный след.

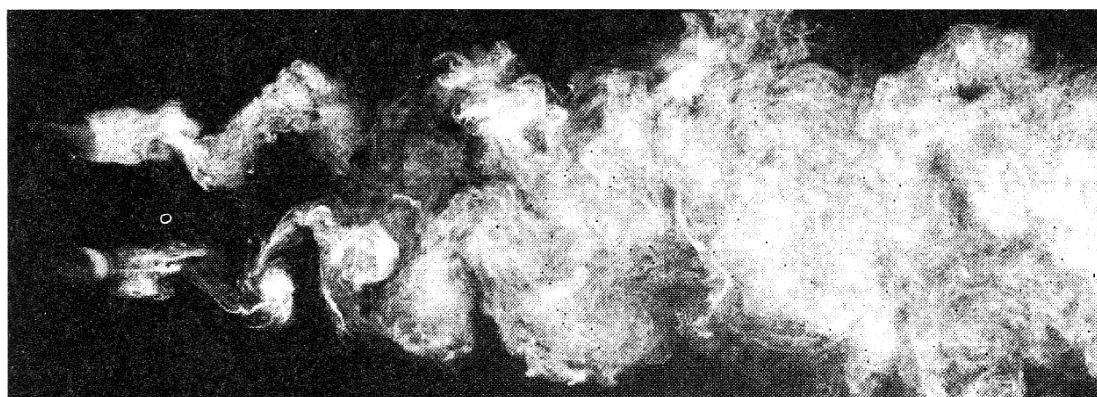


Рис. 0.7. Вихревая дорожка Кармана и турбулентный след при обтекании двух цилиндров. $Re=1800$.

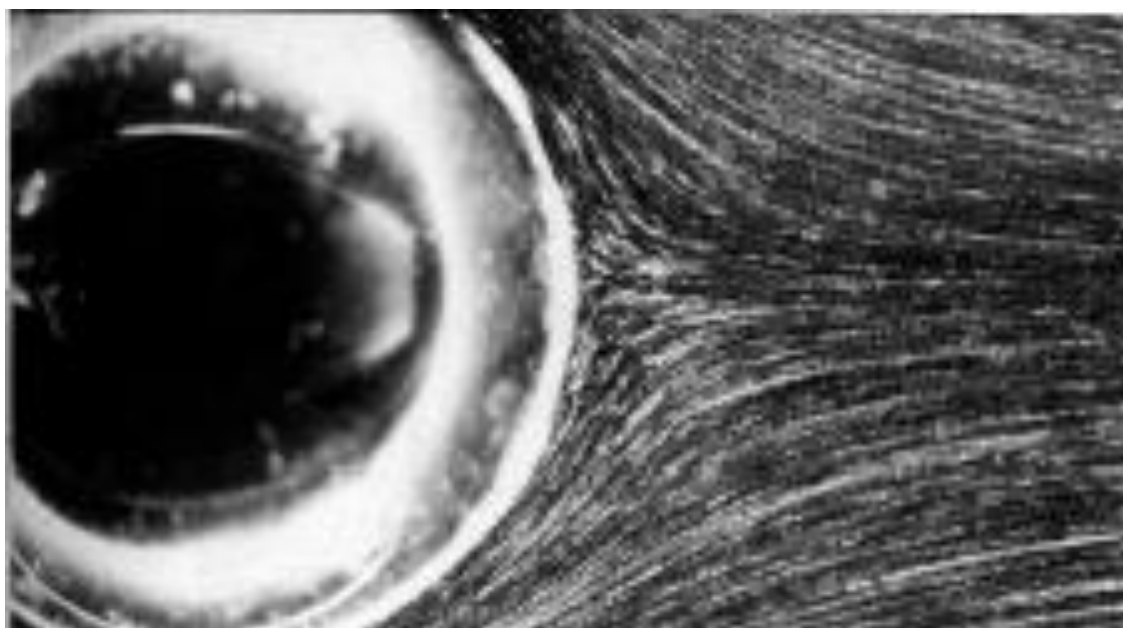


Рис. 0.8. Безотрывное стационарное ламинарное обтекание шара при $Re=8.15$.

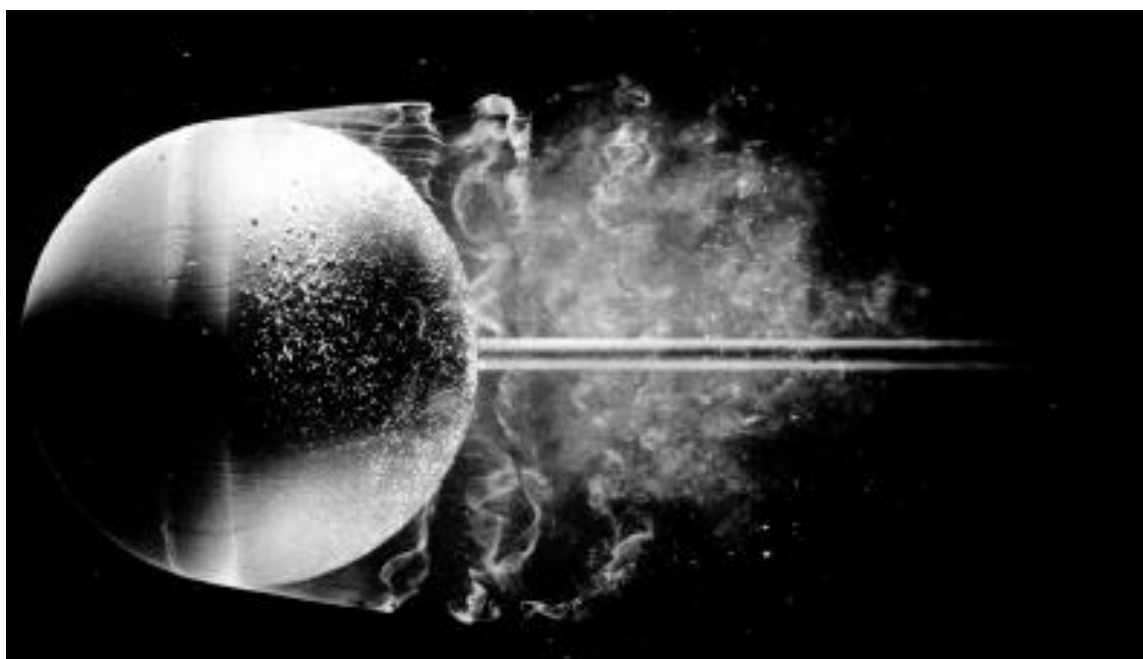


Рис. 0.9. Обтекание шара при $Re=15\,000$. Ламинарный пограничный слой отрывается перед экватором, но остается ламинарным на длине, почти равной радиусу. Затем становится неустойчивым и превращается в турбулентный.



Рис. 0.10. Турбулентный след за наклонной пластинкой при угле атаки 45° , $Re=4500$



Рис. 0.11. Турбулентный след сырой нефти за танкером, севшим на мель. Угол атаки 45° , $Re=10^7$. Дорожка Кармана вполне соответствует показанной на рис. 0.10, несмотря на разницу в масштабах течения.

3. *Затопленные струи.* Течение вызвано истечением струи жидкости в неподвижное пространство, заполненное той же или другой жидкостью.

Рис. 0.12 – 0.13

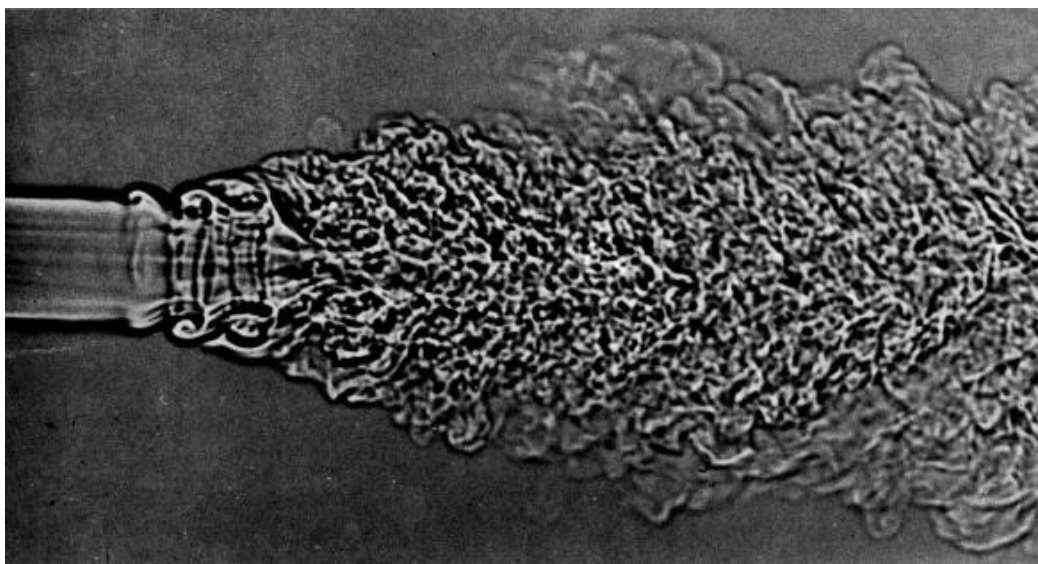


Рис. 0.12. Струя углекислого газа, вытекающая в воздух. На выходе из сопла число Рейнольдса равно 30 000, струя ламинарна. На расстоянии порядка диаметра она становится неустойчивой, происходит образование вихревых колец и переход к турбулентности.

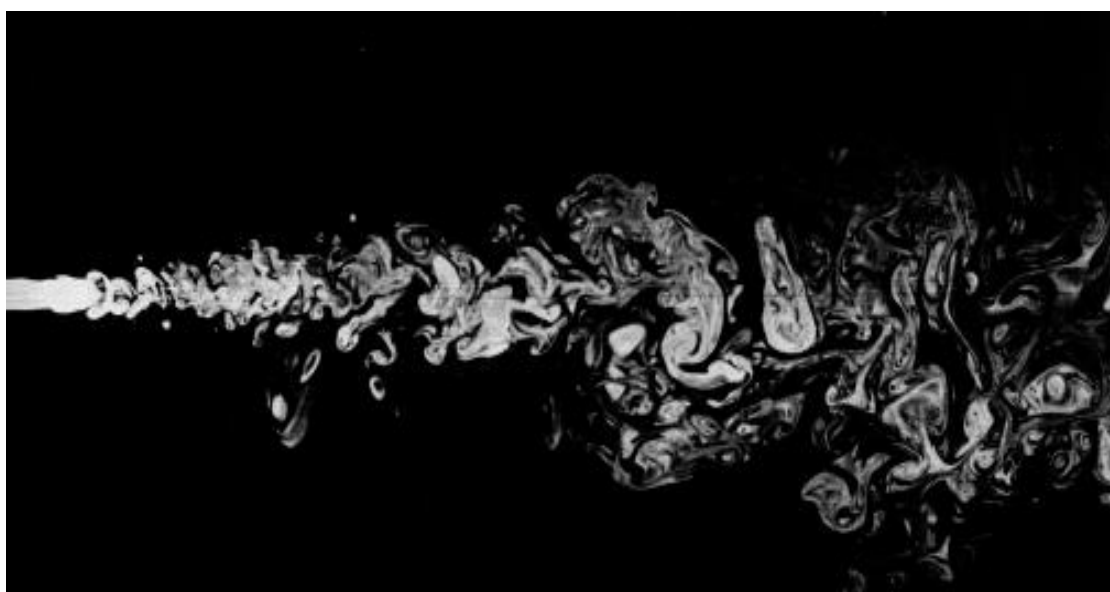


Рис. 0.13. Турбулентный след. Внедрение круглой струи воды в неподвижную воду. $Re=2300$

4. Течение сквозь решетки и в слоях смешения. Течение сопровождается смешением индивидуальных струй жидкости, которые затем образуют однородный поток. Рис. 0.14 – 0.15

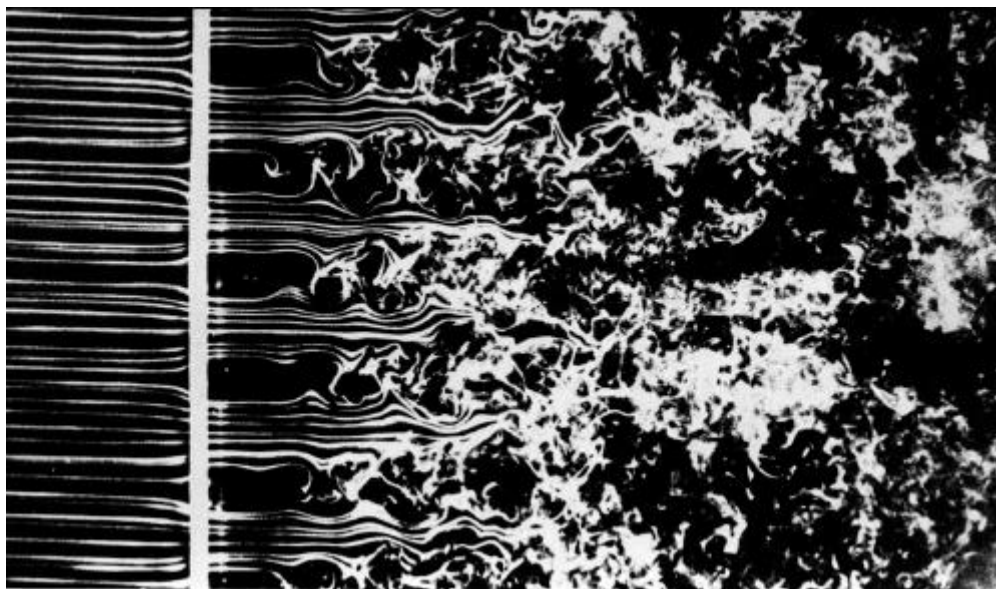


Рис. 0.14. Порождение турбулентности решеткой. Число Рейнольдса, вычисленное по шагу решетки равно 1500. Неустойчивость ламинарных сдвиговых слоёв приводит к турбулизации вниз по потоку

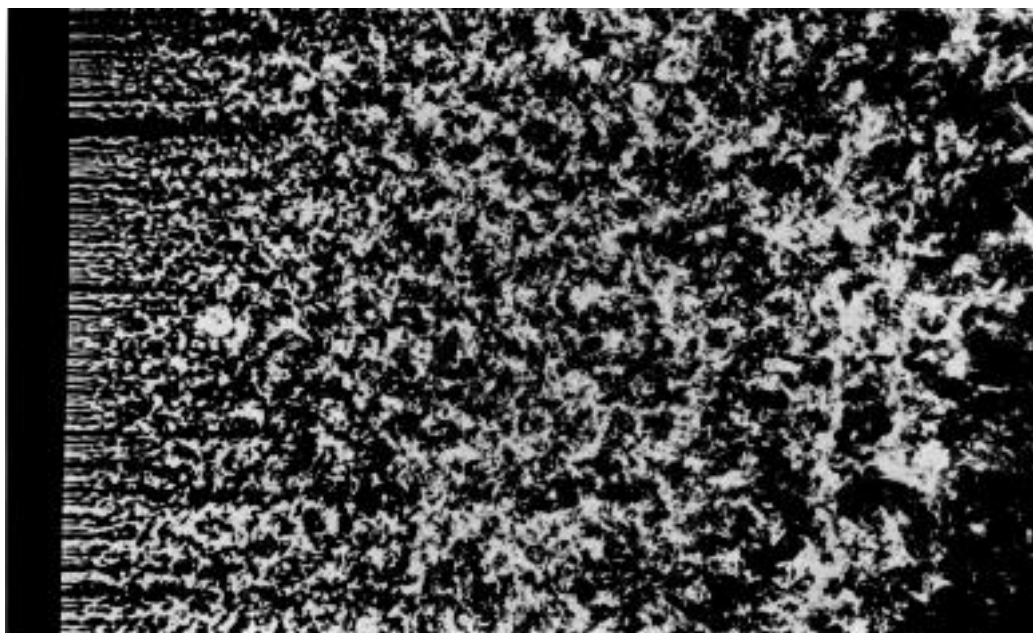


Рис. 0.15. Развитие однородной изотропной турбулентности в следе за частой решеткой.

Изложение математических основ описания турбулентности в настоящем учебном пособии ограничено рассмотрением течения несжимаемой жидкости с постоянными свойствами (плотность, вязкость, теплопроводность, теплоемкость). Это связано, во-первых, со стремлением максимально упростить громоздкие выкладки при выводе уравнений для турбулентных пульсаций и тем самым добиться лучшего понимания основных идей, на которых строятся модели турбулентности; во-вторых, сжимаемые течения традиционно изучаются в рамках курсов по газовой динамике.

Основное внимание в структуре курса уделено методам замыкания уравнений Рейнольдса с помощью наиболее популярных полуэмпирических моделей турбулентности, таких как $k - \varepsilon$ модели Лаундера, Сполдинга, $k - \omega$ модели Вилкокса, Ментера и однопараметрическая модель Спаларта-Аллараса. Собственно теория турбулентности представлена в пособии кратким изложением гипотез А.Н. Колмогорова и их следствий, которые выводятся на уровне теории размерности. В последней главе учебного пособия излагается метод крупных вихрей (LES), основанный на применении пространственных фильтров к уравнениям Навье-Стокса и определении подсеточных напряжений с помощью моделей Смагоринского-Лилли, Германо и других моделей.

Таким образом, в учебном пособии рассматриваются все основные модели турбулентности, входящие в каталоги современных CFD-пакетов, таких как FLUENT и STAR-CD. Это, по мнению автора, будет способствовать осознанному применению этих программных средств в вычислительной практике решения задач гидродинамики; с другой стороны, изложенный в пособии теоретический материал может служить основой для углубленного изучения турбулентности для тех студентов, чьи научные интересы будут связаны с численным моделированием турбулентных потоков.

Настоящее учебное пособие составлено по материалам курса лекций, читаемых автором на старших курсах механико-математического факультета Казанского государственного университета.

1. Ламинарные и турбулентные течения: описание феномена

1.1. Опыт Рейнольдса (1838)

Характерные особенности турбулентных течений демонстрирует исторический пример – установившееся течение жидкости с постоянной плотностью ρ и вязкостью μ в круглой трубе диаметром d со среднemasсовой скоростью U . Если выбрать участок трубы длиной L и замерить давления p_1 и p_2 , то сила давления будет равна $(p_1 - p_2)\pi d^2/4$; с другой стороны, если τ_w – касательное напряжение на стенке, то сила сопротивления равна $\tau_w \pi dL$. Условие равенства сил дает значение напряжения на стенках $\tau_w = (p_1 - p_2)d/(4L)$ и позволяет вычислить коэффициент сопротивления вязкого трения $c_f = \tau_w/(\rho U^2/2)$. Понятно, что результат эксперимента (в данном случае это градиент давления $dp/dx = -(p_1 - p_2)/L < 0$) будет зависеть от условий его проведения, т.е. параметров d, U, ρ, μ . Однако обработка результатов многочисленных экспериментов (разные трубы, разные жидкости, разные средние скорости) позволила сделать вывод о том, что все определяется единственным параметром задачи – числом Рейнольдса $Re_d = \rho U d / \mu \equiv U d / \nu$.

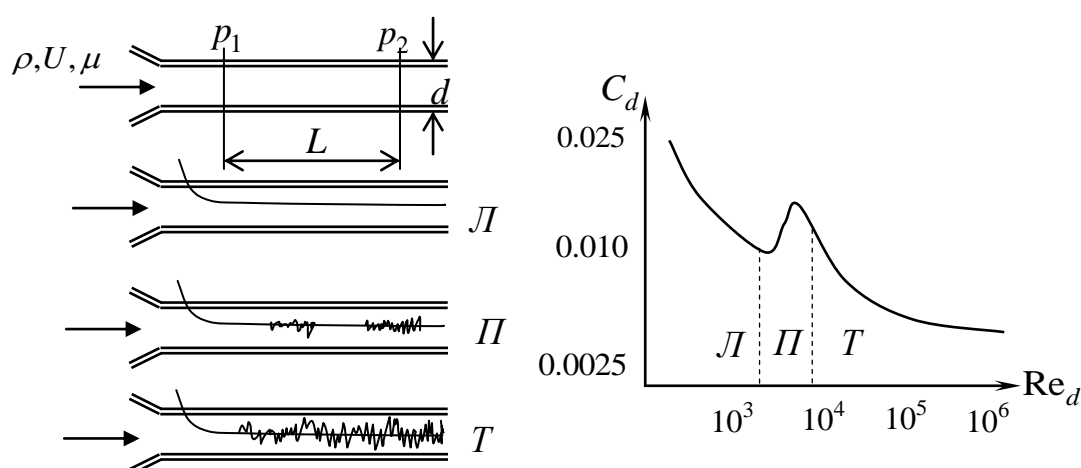


Рис. 1.1. Опыт О. Рейнольдса. L – ламинарный, II – переходный, T – турбулентный режим течения жидкости

Визуализация картины течения в трубе с помощью окрашенной струйки жидкости показывает, что при низких числах Рейнольдса (до 2000) течение имеет плавный характер, когда струйки тока распространяются на большие расстояния, не смешиваясь друг с другом (рис.1.1, *Л*). Такой режим течения называется ламинарным (слоистым). С ростом числа Re_d движение жидкости становится неустойчивым и струйки тока эпизодически размываются (рис.1.1, *П*). Такой режим определяется как переходный. И наконец, развивающийся по трубе поток характеризуется интенсивным перемешиванием, и струйка жидкости превращается в пятно, заполняющее все поперечное сечение (рис.1.1, *Т*). Это движение жидкости названо турбулентным (переплетающимся). Для него, как видно из графика зависимости $C_d(Re_d)$ на рис.1.1 справа, характерно увеличение коэффициента трения по сравнению с ламинарным режимом. Принципиально изменяется и эпюра скорости: для ламинарного режима это парабола, а для турбулентного характерны большие градиенты скорости вблизи стенок.

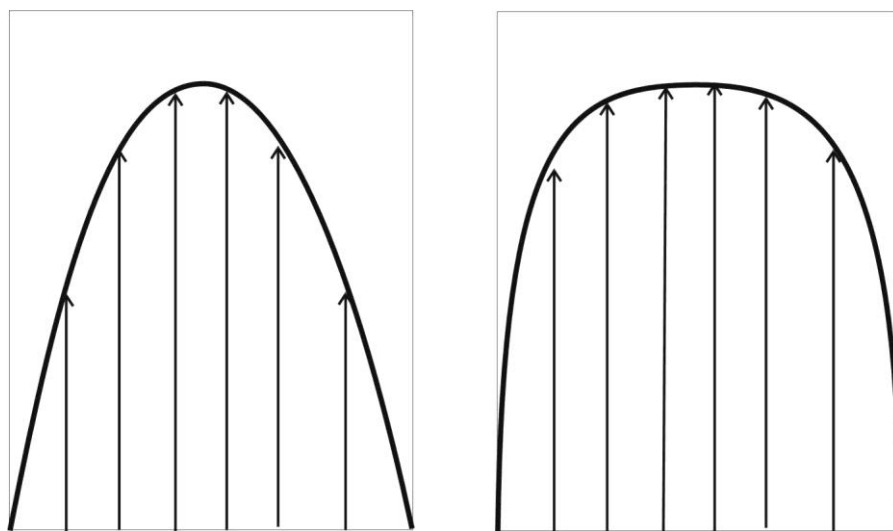


Рис. 1.2. Распределение скорости в трубе при ламинарном (а) и турбулентном (б) режиме

1.2. Решение Хагена- Пуазейля (1839-1840)

Рассмотрим задачу ламинарного течения в трубе теоретически. Предполагаем, что а) поперечные составляющие скорости отсутствуют;

б) градиент давления постоянный. В цилиндрической системе координат r, x, φ уравнение Навье-Стокса имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \mu \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{dp}{dx} = \text{const} < 0, \quad 0 < r < R = \frac{d}{2}. \quad (1.1)$$

На стенках ставим условие прилипания $u(R) = 0$.

Если градиент давления dp/dx считать заданным, то задача полностью определена, и средняя скорость U и напряжение сдвига вычисляются по формулам

$$U = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R u(r) r dr, \quad \tau_w = -\mu \frac{du}{dr}(R) \quad (1.2)$$

Если же задана скорость U , то правую часть (1.1) следует рассматривать как неизвестную константу, которая будет определяться с помощью первого из условий (1.2).

Перейдем к безразмерным переменным

$$y = \frac{r}{R}, \quad z = \frac{x}{R}, \quad v = \frac{u}{U}, \quad P = \frac{p}{\rho U^2}, \quad \sigma_w = \frac{\tau_w}{\rho U^2} = \frac{c_f}{2}, \quad \text{Re} = \frac{UR}{\nu}. \quad (1.3)$$

Вместо (1.1), (1.2) будем иметь

$$\frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \frac{dP}{dz} = \text{const} < 0, \quad 0 < y < 1; \quad v(1) = 0; \quad (1.4)$$

$$1 = 2 \int_0^1 v(y) y dy, \quad \sigma_w = -\frac{1}{\text{Re}} \frac{dv}{dy}(1) \quad (1.5)$$

Видим, что задача содержит единственный параметр – число Рейнольдса. Обозначим для удобства через $C > 0$ комплекс $-\text{Re} dP/dz$ и проинтегрируем уравнение (1.4), умноженное на y , от 0 до y :

$$y \frac{dv}{dy} = -\frac{Cy^2}{2}, \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dy} = -\frac{Cy}{2},$$

откуда после интегрирования в пределах от y до 1 получаем параболический профиль безразмерной скорости

$$v(y) = C(1 - y^2)/4. \quad (1.6)$$

Константу C найдем из первого условия (1.5):

$$1 = \frac{2C}{4} \int_0^1 (y - y^3) dy = \frac{C}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{C}{8},$$

откуда

$$C = 8, \quad v(y) = 2(1 - y^2) \quad (1.7)$$

Второе равенство (1.5) дает выражение для коэффициента сопротивления трубы, см. (1.3):

$$\frac{dv}{dy} = -4y, \quad \sigma_w = \frac{4}{\text{Re}}; \quad c_f(\text{Re}) = 2\sigma_w = \frac{8}{\text{Re}}. \quad (1.8)$$

Решение (1.7) – (1.8) – это точное решение задачи, выражающее в безразмерном виде закон сопротивления Хагена-Пуазейля для ламинарного течения в трубе. С помощью формул перехода (1.3) из (1.7) получаем классические формулы

$$\frac{p_1 - p_2}{L} = \frac{8\mu U}{R^2}, \quad u(r) = 2U \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] = \frac{p_1 - p_2}{4\mu L} (R^2 - r^2).$$

В чем же причина того, что при переходе к турбулентному течению этот закон не работает (см. рис. 1)? Очевидно, что появляются поперечные пульсации скорости и давления, а значит предположения об их отсутствии в постановке задачи не верны. Тем не менее, мы получили точное решение уравнений Навье-Стокса, которое удовлетворяет не только «усеченной» постановке (1.1), но и полной формулировке с конвективными слагаемыми (последние обращаются в ноль при подстановке а них полученного решения). Поскольку, как мы увидим позже, никаких особых «турбулентных уравнений» в природе не существует, остается предположить, что наряду с решением (1.6) существует по крайней мере еще одно решение полной задачи Навье-Стокса для течения в трубе, описывающее турбулентный режим, и при больших скоростях течения именно это решение является устойчивым, а при малых скоростях устойчивым оказывается полученное решение Пуазейля (1.8), описывающее ламинарное течение. Теоретически проблема потери устойчивости и перехода от ламинарного течения к турбулентному не решена.

1.3. Критическое число Рейнольдса

Из опыта известно, что обычно переход от ламинарного к турбулентному режиму течения жидкости в трубах наблюдается при т.н. критическом числе Рейнольдса $Re_* \approx 2300$. Однако этот переход зависит от устойчивости исходного ламинарного течения по отношению к внешним возмущениям. Если вход в трубу сделать плавным, то ламинарное движение в трубе может поддерживаться при существенно больших числах Рейнольдса, например до 24 000. Существенно влияют на Re_* и такие факторы, как градиент давления, форма канала, шероховатость его стенок, вдув и отсос пограничного слоя.

Градиент давления, по существу, определяет вторую производную профиля скорости, поскольку уравнение Навье-Стокса вблизи стенки имеет вид $u'' = Re dp/dx$. Поэтому от знака правой части принципиально зависит вид эпюры, см. рис. 1.3.

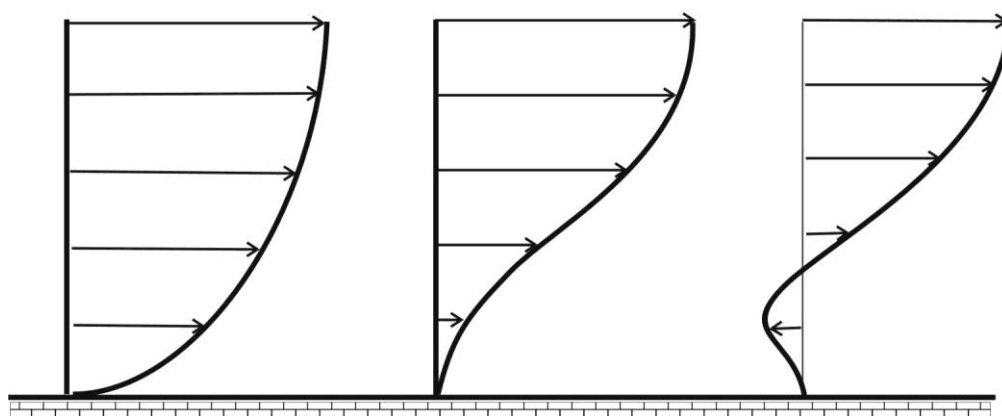


Рис. 1.3. Зависимость эпюры скорости от знака градиента давления

Видно, что возрастание давления в направлении движения приводит к неустойчивости течения в пограничном слое, отрыву и возникновению вихрей. Поэтому как для *внутренних* (в трубах и каналах), так и для *внешних* (обтекание тел потоком) течений критическое число Рейнольдса возрастает при уменьшении внешнего градиента давления (ускоряющиеся течения – по закону Бернулли). Для внутренних течений эта ситуация типична для течения в конфузорах, а для внешних достигается на т.н. ламинаризованных профилях, у

которых максимум толщины отодвинут вниз по потоку. Благодаря этому точку турбулентного перехода (потери устойчивости) удастся сместить на хвост профиля, и тем самым снизить сопротивление трения профиля в целом.

Представляется теоретически очевидным (и подтверждается экспериментально), что турбулентное перемешивание жидкости приводит не только к повышению сопротивления, но и интенсифицирует теплообмен. Поскольку абсолютное большинство встречающихся в природе и технике течений происходят в закритической области, изучение и расчет турбулентных течений имеет большое прикладное значение.

1.4. Современные представления о механизме турбулентного течения

Прогрессирующая неустойчивость ламинарного течения по отношению к малым возмущениям, которая является характерной для перехода от ламинарного течения к турбулентному, сопровождается усиливающимися пульсациями скорости относительно средней величины по пространству и по времени. По мере усиления пульсаций форма их постепенно изменяется от простых синусоидальных колебаний до беспорядочного завихренного движения с непрерывно меняющимся спектром длин волн и частот. При описании турбулентного течения как пространственного и нестационарного процесса многие исследователи интерпретируют его как локальное вихревое движение со значительной завихренностью. Турбулентные вихри различных масштабов вызывают энергичное смешение слоев жидкости, этот процесс сопровождается интенсивным обменом энергией между вихрями происходит при значительных турбулентных напряжениях, намного превышающих ламинарные.

Рассматривая течение около стенки, можно представить схему крупных вихрей в развитом турбулентном пограничном слое (рис. 1.4). Поток выше границы слоя имеет постоянную скорость U ; вихри двигаются в пределах слоя при беспорядочных колебаниях местной скорости порядка десятой части U .

Самый большой размер вихря l сопоставим с толщиной пограничного слоя δ . Размер турбулентных вихрей характеризует местный масштаб турбулентности.

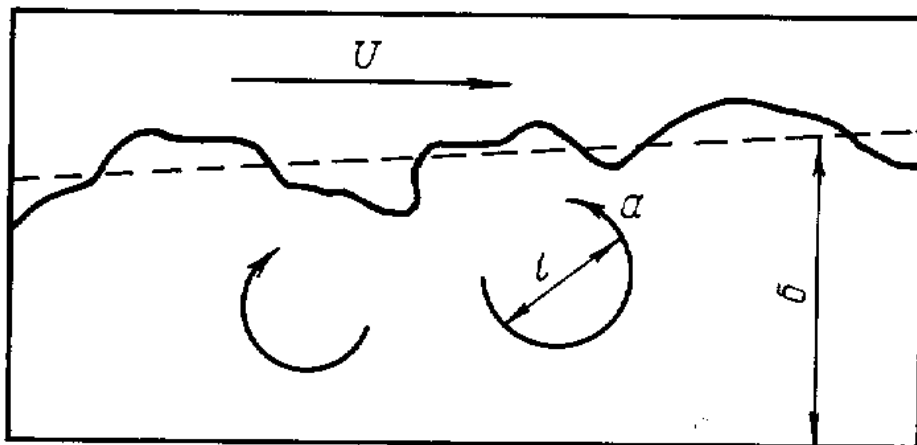


Рис. 1.4. Схема турбулентного потока в пограничном слое

Важно подчеркнуть, что турбулентные вихри заполняют собой всю область течения и постоянно соприкасаются друг с другом, причем большие вихри содержат в себе вихри меньших размеров. В результате турбулентность трактуется как каскадный процесс передачи энергии от больших вихрей к малым. В конечном счете, самые маленькие вихри рассеивают энергию в тепло посредством молекулярной вязкости.

Главный физический механизм, который отвечает за каскадное распространение энергии, это растяжение вихрей. В процессе растяжения вихрей их кинетическая энергия вращения увеличивается, а масштаб уменьшается. Увеличение местных скоростей стимулирует растяжение других жидких элементов, запуская таким образом каскадный процесс интенсификации движения с постепенной редукцией масштабов подвергнутых растяжению вихрей. При этом мелкомасштабные вихри не сохраняют ориентации средней скорости деформации (изотропная мелкомасштабная турбулентность при высоких числах Рейнольдса).

В ламинарном течении под действием вязких напряжений, обусловленных молекулярной вязкостью, кинетическая энергия среднего течения превращается

непосредственно во внутреннюю тепловую энергию (диссипация). В турбулентном течении крупные вихри отбирают энергию из среднего течения и сохраняют ее некоторое время, пока она не перейдет к мелким диссипативным вихрям. Средние вихри служат лишь проводниками энергии к самым мелким вихрям, в которых она диссипирует вследствие вязкости. В центральной части типичного турбулентного течения в трубе по крайней мере половина кинетической энергии турбулентности и большая часть турбулентных напряжений обусловлены вихрями, масштаб которых превышает радиус трубы. Размер диссипативных вихрей при этом зависит от вязкости; обычно их размер составляет меньше 1% радиуса трубы.

Таким образом, турбулентность – это трехмерное нестационарное движение, в котором создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничными условиями течения.

С теоретической точки зрения очень важно, что размер самых мелких диссипативных вихрей все же намного превосходит длину свободного пробега молекул, а значит для описания турбулентности в принципе можно использовать уравнения механики сплошной среды.

2. Уравнения термодинамики

2.1. Сведения из математики и механики

Не претендуя на полноту и строгость определений (они должны быть знакомы студентам из соответствующих курсов), приведем в данном разделе краткое описание основных объектов и операций над ними, которые будут активно использоваться в дальнейших выкладках.

Скалярная величина x может принимать вещественные значения.

Вектор $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots)$ – это объект, компоненты которого v_i суть скаляры, представляющие собой проекции вектора на координатные оси x_i . Помимо тривиальных операций сложения и умножения на скаляр, укажем *скалярное произведение* векторов, которое определяется как скаляр $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$ (здесь и далее мы используем нотацию Эйнштейна, предполагающую суммирование по повторяющимся индексам: в трехмерном пространстве $a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$).

Функция $y = f(x_1, \dots)$ принимает вещественное значение в зависимости от значений скалярных аргументов x_i .

Функционал $y = F(f)$ принимает вещественное значение, действуя на функцию. Например, $y = \max_{a < x < b} |f(x)|$.

Оператор может действовать на функцию или вектор, результатом может быть функция или вектор. Например, оператор дифференцирования $\partial / \partial x$, примененный к функции $f(x)$ дает новую функцию $g(x) = \partial f / \partial x$;

- оператор дивергенции

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \partial v_i / \partial x_i$$

применяется к вектору \vec{v} и в результате получается функция;

- оператор градиента

$$\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \right)$$

применяется к функции $f(x_i)$, в результате получается вектор с компонентами $\partial f / \partial x_i$; Оператор ∇ (набла) иногда называют оператором Гамильтона.

- если оператор A есть матрица элементами a_{ij} , то его действие на вектор \vec{v} порождает новый вектор

$$\vec{u} = A\vec{v}, \quad u_i = a_{ij}v_j.$$

Тензор в механике представляют как объект σ с элементами σ_{ij} , каждый из которых характеризует действие σ в направлении оси x_j на виртуальную площадку в жидкости, нормаль к которой параллельна оси x_i . Например, для тензора напряжений компонента σ_{xy} означает напряжение, приложенное к площадке, ортогональной оси x , в направлении оси y , т.е. касательное напряжение. С математической точки зрения тензор – это матрица.

Точки зрения Лагранжа и Эйлера на движение сплошной среды. У Эйлера наблюдатель (система координат) неподвижен и наблюдает, как меняется свойство $f(x, t)$ в фиксированной точке x среды. При выводе уравнений используется эйлеров неподвижный контрольный объем V_E , сквозь который протекает среда. У Лагранжа система координат заморожена в движущуюся среду, координаты материальных точек не меняются со временем, наблюдатель «едет» вместе с точкой и наблюдает, как меняется ее свойство $f(t)$. Если в начальный момент выделить контрольный объем V_L , то при $t > 0$ он будет деформироваться вместе со средой, хотя в лагранжевых координатах он останется неподвижен. Справедлива формула дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_L} f dV = \int_{V_E} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_S f v_n dS, \quad (2.1)$$

где S – поверхность, ограничивающая объем V_E , а v_n – нормальная к S компонента скорости среды.

Теорема Остроградского-Гаусса устанавливает связь между потоком вектора через замкнутую поверхность и его дивергенцией в объеме:

$$\int_S v_n dS = \int_V \operatorname{div} \vec{v} dV \equiv \int_V \nabla \cdot \vec{v} dV. \quad (2.2)$$

Уравнение неразрывности (сохранения массы) следует непосредственно из (2.1) и (2.2), если учесть, что

$$m = \int_{V_L} \rho dV, \quad \frac{\partial m}{\partial t} = 0 = \int_{V_E} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho v_n dS = \int_{V_E} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} \right) dV,$$

откуда в силу произвольности объема следует

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \vec{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_i)}{\partial x_i} = 0. \quad (2.3)$$

Для несжимаемой жидкости, когда $\rho = \text{const}$, из (2.3) следует

$$\operatorname{div} \vec{v} = \Delta \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.4)$$

Субстанциональная производная (полная производная) произвольной функции $f(x, t)$ определяется как

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) f \quad (2.5)$$

и учитывает изменение функции за счет конвекции.

2.2. Уравнения движения вязкой жидкости

Эти три уравнения являются конкретизацией 2-го закона Ньютона $\vec{a}m = \vec{F}$ для эйлерова контрольного объема $V = dxdydz$, в котором происходит изменение количества движения (удельного импульса $\rho \vec{v}$) за счет работы массовых $\rho \vec{g}$ и поверхностных \vec{P} сил. Структура поверхностных напряжений показана на рис. 2.1. Как известно, тензор напряжений симметричен, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Изменение x -составляющей импульса описывается балансовым уравнением

$$\int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) dV + \int_S \rho u v_n dS = \int_V \rho g_x dV + \int_S P_x dS, \quad (2.6)$$

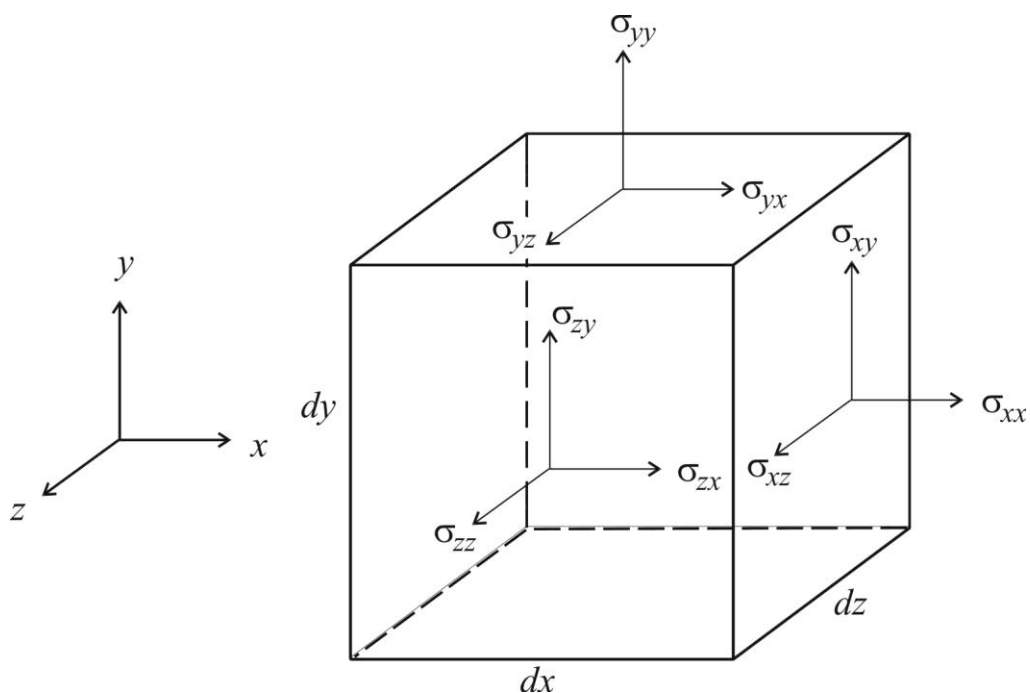


Рис. 2.1. Напряжения на поверхности контрольного объема

где P_x – это напряжения, включая давление, действующие на всех гранях S ; $\rho u v_n$ – плотность потока импульса через площадку с нормалью n . Структура P_x показана в следующей таблице

Площадка	Сила	Вид напряжений
x	$(p - \sigma_{xx})dydz$	Нормальные
$x + dx$	$(-p + \sigma_{xx})dydz$	Нормальные
y	$-\sigma_{yx}dxdz$	Касательные
$y + dy$	$\sigma_{yx}dxdz$	Касательные
z	$-\sigma_{zx}dxdy$	Касательные
$z + dz$	$\sigma_{zx}dxdy$	Касательные

Отметим, что давление p действует по нормали к площадке даже в покоящейся жидкости, тогда как напряжения σ возникают только при движении

из-за вязкости. Сложив все силы в таблице, получим следующее выражение для последнего интеграла в (2.6):

$$\frac{(-p + \sigma_{xx})|_{x+dx} - (-p + \sigma_{xx})|_{dx}}{dx} V + \frac{\sigma_{yx}|_{y+dy} - \sigma_{yx}|_y}{dy} V + \frac{\sigma_{zx}|_{z+dz} - \sigma_{zx}|_z}{dz} V$$

Используя теорему Остроградского-Гаусса для второго члена уравнения (2.6), можем записать первые 3 члена так:

$$\int_V \left\{ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \vec{v}) - \rho g_x \right\} dV \approx \left\{ \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \vec{v}) - \rho g_x \right\} V$$

Приравнявая два последних выражения, при $V \rightarrow 0, dx, dy, dz \rightarrow 0$ получим уравнение импульса в направлении x :

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u \vec{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho g_x. \quad (2.7)$$

Два уравнения для направлений y и z получаются точно так же. В индексной форме для направления i уравнение движения имеет вид

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

Трех уравнений (2.8) и уравнения неразрывности (2.3), разумеется, недостаточно для определения 11-и переменных $p, \rho, u_i, \sigma_{ij}$. Для замыкания используют закон трения Ньютона (или закон трения Стокса)

$$\sigma_{ij} = \mu e_{ij}, \quad e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad (2.9)$$

и уравнение состояния, которое для идеального газа имеет вид

$$p = \rho R T. \quad (2.10)$$

В уравнениях (2.9), (2.10) μ , Па·с – динамическая вязкость жидкости; e , с^{-1} – тензор скоростей деформаций; T , К – абсолютная температура; R , Па·м³/(кг·К) – газовая постоянная. Последнее замыкающее уравнение для температуры будет записано позже. А пока представим альтернативные формы записи уравнений движения. Левая часть (2.8) с учетом уравнения

неразрывности (2.3) и определения субстанциональной производной (2.5) преобразуется к виду

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial(\rho u_j)}{\partial x_j} + u_j \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \rho \frac{du_i}{dt}.$$

Градиенты напряжений в правой части после подстановки (2.9) для жидкости с постоянными свойствами (плотностью и вязкостью) можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \mu \Delta u_i$$

Принимая эти результаты, из (2.8) после деления на ρ получим уравнение Навье-Стокса (1827 год) для несжимаемой жидкости

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i + g_i; \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.11)$$

Здесь

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2 = \text{div grad} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

– оператор Лапласа.

2.3. Уравнение энергии (теплопроводности, энтальпии)

Ограничимся рассмотрением простейшего случая, когда диссипация из-за внутреннего трения отсутствует, а работа сил давления не учитывается. Пусть, кроме того, удельная энтальпия (теплосодержание) h , Дж/кг определяется как cT , где c , Дж/(кг·К) – теплоемкость. Выделим, как и раньше, контрольный объем V и рассмотрим закон изменения его полной энтальпии

$$H = \int_V \rho h dV = \int_V \rho c T dV, \text{ Дж}$$

под действием поверхностных тепловых воздействий и внутренних источников тепла. Если \vec{q} , Вт/м² – плотность теплового потока, а f , Вт/м³ – удельная мощность внутренних источников тепла, то баланс энергии выразится уравнением

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \int_V \frac{\partial(\rho h)}{\partial t} dV + \int_S \rho h v_n dS = - \int_S q_n dS + \int_V f dV.$$

Знак минус в правой части появился потому, что положительным, т.е. направленным на повышение энергии объема, считается поток тепла внутрь, т.е. противоположно внешней нормали n . Используя теорему Остроградского-Гаусса (2.2), преобразуем поверхностные интегралы в объемные,

$$\int_S \rho h v_n dS = \int_V \nabla \cdot (\rho h \vec{v}) dV; \quad \int_S q_n dS = \int_V \nabla \cdot \vec{q} dV$$

и, учитывая произвольность контрольного объема V , запишем уравнение энтальпии

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho h \vec{v}) = -\nabla \cdot \vec{q} + f, \quad h = cT. \quad (2.12)$$

Для определения потока \vec{q} привлечем линейный закон теплопроводности Фурье

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad } T = -\lambda \nabla T, \quad (2.13)$$

в котором λ , Вт/(м·К) – коэффициент теплопроводности среды. Как и для уравнения импульсов, уравнение неразрывности (2.3) позволяет записать левую часть (2.12) в виде субстанциональной производной (2.5) удельной энтальпии h :

$$\rho \left\{ \frac{\partial(cT)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) cT \right\} = \text{div}(\lambda \text{grad } T) + f \quad (2.14)$$

Если теплофизические свойства среды постоянны ($\rho, c, \lambda = \text{const}$), то из (2.14) получаем уравнение конвективной теплопроводности

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = a \Delta T + \phi \quad (2.15)$$

где $a = \lambda / (c\rho)$, м²/с – коэффициент температуропроводности, $\phi = f / \rho$.

Уравнение (2.15) вместе с тремя уравнениями Навье-Стокса (2.11) и уравнением неразрывности (2.3) образуют замкнутую систему уравнений для математического описания нестационарных трехмерных течений и тепловых полей вязкой жидкости с постоянными свойствами. Эта система получена с использованием двух упрощенных линейных законов: вязкого трения Стокса

(2.9) и молекулярной теплопроводности Фурье (2.13). История математического моделирования показывает, что эти законы имеют достаточно широкую область применения в практически важных задачах. Поэтому адекватность данной модели ограничивается лишь масштабами, сопоставимыми с длиной свободного пробега молекул. Как было отмечено выше, турбулентные течения имеют неоднородности значительно более крупного масштаба, так что наша система теоретически вполне годится для описания самых сложных процессов турбулентной термодинамики. К сожалению, численная реализация данной модели порождает принципиальные технические трудности.

Несмотря на значительный прогресс в подходах, основанных на решении указанной системы уравнений в рамках прямого численного моделирования (DNS – Direct Numerical Simulation) или моделирования крупных вихрей (LES – Large Eddy Simulation), прежде всего обусловленный развитием суперкомпьютеров, пока еще нельзя использовать их для решения задач инженерной практики. Обоснованием этого служит оценка, согласно которой для воспроизводимого спектра турбулентных вихрей отношение характерных размеров крупных и мелких вихрей имеет порядок $Re^{3/4}$. Это означает, что при $Re \sim 10^6$ сетка должна содержать несколько миллионов узлов по каждой координате. Даже на ближайшие несколько десятилетий расчеты на таких масштабах для достаточно высоких чисел Рейнольдса останутся неразрешимой проблемой.

2.4. Динамический пограничный слой

При обтекании тел потоком вязкой жидкости происходит ее торможение на твердых стенках (прилипание), и благодаря вязкости это торможение, ослабевая, распространяется от стенки вглубь потока на некоторое расстояние δ , за пределами которого жидкость движется без значительных деформаций, и вязкие силы там не играют значительной роли. Таким образом, эффект вязкости проявляется в сравнительно тонком слое, который называется пограничным

слоем. Для простоты рассмотрим продольное обтекание плоской стенки (рис. 2.2) однородным потоком со скоростью u_e (e – external – внешний).

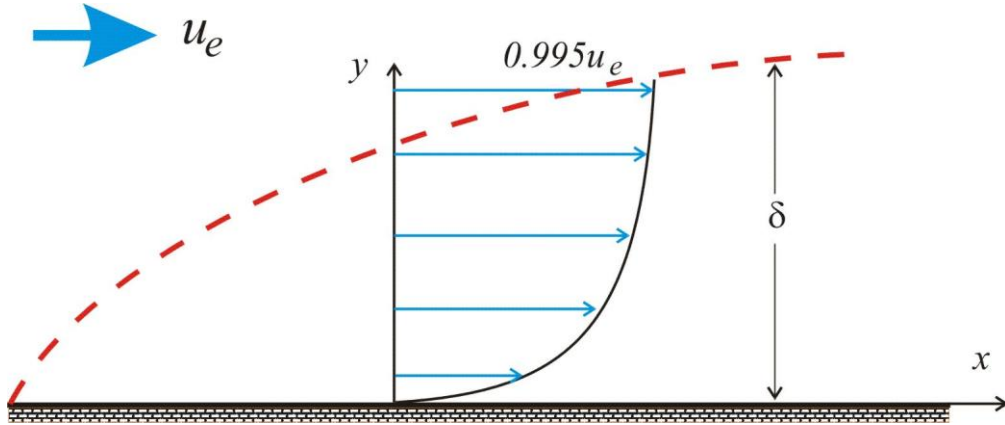


Рис. 2.2. Ламинарный пограничный слой при продольном обтекании плоской пластины

Выведем уравнения пограничного слоя из двумерных уравнений Навье-Стокса (2.11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial u}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right); \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Введем масштабы: длины l – в продольном направлении, δ – в поперечном; продольной скорости – u_0 , поперечной скорости – v_0 ; давления – p_0 ; времени – t_0 . Среди этих масштабов u_0 выбираем как среднюю скорость внешнего течения $u_0 = \langle u_e \rangle$, l ассоциируем с продольной координатой x , а значения δ , v_0 , p_0 , t_0 пока не известны. Перепишем систему (2.16) в безразмерных переменных

$$X = \frac{x}{l}, Y = \frac{y}{\delta}, U = \frac{u}{u_0}, V = \frac{v}{v_0}, P = \frac{p}{p_0}, \tau = \frac{t}{t_0}. \quad (2.17)$$

Из уравнения неразрывности получаем

$$\frac{u_0}{l} \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{v_0}{\delta} \frac{\partial V}{\partial Y} = 0,$$

откуда находим масштаб поперечной скорости

$$v_0 = \varepsilon u_0, \quad \varepsilon = \delta / l. \quad (2.18)$$

С учетом этого соотношения преобразуем уравнение импульса в направлении x .

$$\begin{aligned} \frac{u_0}{t_0} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{u_0^2}{l} U \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\varepsilon u_0^2}{\delta} v \frac{\partial u}{\partial y} = \\ = -\frac{p_0}{\rho l} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\nu u_0}{l^2} \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\nu u_0}{\delta^2} \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}. \end{aligned}$$

Разделим это уравнение на u_0^2 / l и обозначим через Re безразмерный комплекс $u_0 l / \nu$. Будем иметь

$$\frac{l/u_e}{t_0} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + v \frac{\partial U}{\partial Y} = -\frac{p_0}{\rho u_e^2} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re} \varepsilon^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} \right). \quad (2.19)$$

Выбор масштабов времени $t_0 = l / u_0$ и давления $p_0 = \rho u_0^2$ теперь очевиден, причем последний вполне согласуется с давлением вне пограничного слоя, где течение происходит по уравнению Бернулли

$$p + \rho u_e^2 / 2 = \text{const}, \quad -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = u_e \frac{du_e}{dx}. \quad (2.20)$$

Сущность пограничного слоя заключается в том, что в нем инерция потока компенсируется сдвиговыми вязкими напряжениями. Это означает, что в уравнении (2.19) необходимо положить коэффициент при $\partial^2 U / \partial Y^2$ равным единице:

$$\frac{1}{\text{Re} \varepsilon^2} = 1, \quad \text{или } \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}, \quad \text{или } \delta(l) = \frac{l}{\sqrt{\text{Re}}} = \sqrt{\frac{\nu l}{u_e}} \quad (2.21)$$

Соотношение (2.21) показывает, что при больших числах Рейнольдса пограничный слой является тонким, $\varepsilon \ll 1$, причем его толщина растет как квадратный корень от расстояния в продольном направлении (масштаб l можно заменить на x), и тем больше, чем выше вязкость жидкости и ниже ее скорость.

Итак, с точностью до слагаемых $O(\varepsilon^2)$ x -уравнение движения в пограничном слое получается из (2.19), (2.21) в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}. \quad (2.21)$$

Преобразуем теперь второе уравнение импульсов.

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon u_e}{l/u_e} \frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon u_e^2}{l} U \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\varepsilon^2 u_e^2}{\delta} v \frac{\partial V}{\partial Y} = \\ = -\frac{u_e^2}{\delta} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\nu \varepsilon u_e}{l^2} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\nu \varepsilon u_e}{\delta^2} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2}. \end{aligned}$$

Поделим это уравнение на u_e^2 / δ :

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \frac{\partial V}{\partial \tau} + \varepsilon^2 U \frac{\partial V}{\partial X} + \varepsilon^2 V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{\varepsilon^2}{\text{Re}} \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = \\ = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \frac{1}{\text{Re} \varepsilon^2} \left(\varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \varepsilon^4 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right) = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, из второго уравнения движения следует, что с точностью до величин порядка $O(\varepsilon^2)$ давление поперек пограничного слоя не меняется,

$$\partial P / \partial Y = 0 \quad (2.22)$$

и равно давлению во внешнем потоке, где работает уравнение Бернулли (2.20).

Это позволяет исключить давление из рассмотрения и записать уравнения плоского пограничного слоя

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = U_e \frac{\partial U_e}{\partial X} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

в которых только две неизвестных: компоненты скорости U и V , а скорость внешнего потока $U_e(x) \sim 1$ задана.

2.5. Тепловой пограничный слой

Уравнение теплового пограничного слоя получается из уравнения энергии (2.15)

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (2.23)$$

аналогично тому, как это было сделано для первого уравнения импульсов. Вместо толщины динамического пограничного слоя δ мы определяем толщину теплового погранслоя δ_T . Будем изучать то же обтекание пластины, но добавим условие, что внешний поток имеет температуру T_e , а стенка – температуру $T_w < T_e$. Безразмерные пространственные координаты вводятся так же, как в (2.17), а безразмерная температура определяется следующим образом:

$$\theta = \frac{T - T_w}{T_e - T_w}.$$

Уравнение (2.23) преобразуется к виду

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{1}{\varepsilon_T^2 \text{Pe}} \left(\varepsilon_T^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right), \quad (2.24)$$

откуда по аналогии с (2.21) получаем

$$\frac{1}{\text{Pe} \varepsilon_T^2} = 1, \quad \text{или } \varepsilon_T = \frac{1}{\sqrt{\text{Pe}}}, \quad \text{или } \delta_T(l) = \frac{l}{\sqrt{\text{Pe}}} = \sqrt{\frac{al}{u_0}} \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + U \frac{\partial \theta}{\partial X} + V \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2}. \quad (2.26)$$

Здесь $\varepsilon_T = \delta_T / l$, число Пекле $\text{Pe} = u_0 l / a$. Сравнивая формулы (2.25) и (2.21), легко сопоставить толщины динамического и теплового пограничного слоев:

$$\frac{\delta}{\delta_T} = \sqrt{\frac{\nu}{a}} = \sqrt{\text{Pr}}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a}.$$

Число Прандтля является теплофизическим свойством жидкости; в общем случае Pr зависит от температуры. Понятно, что при $\text{Pr} = 1$ и отсутствии градиента давления безразмерные уравнения для продольной скорости и температуры совпадают, а значит совпадают и их графики.

При решении задач теплообмена, в том числе и на основе уравнений пограничного слоя, главную роль играют граничные условия на стенке. Мы рассмотрим три варианта.

1) *Задана температура стенки.* $y = 0, T = T_w$. В безразмерном виде это эквивалентно условию $Y = 0, \theta = 0$.

2) *Задана плотность теплового потока.* $y = 0, \lambda \partial T / \partial y = q$. В безразмерном виде это условие имеет вид

$$y = 0, \quad \frac{\lambda(T_e - T_w)}{\delta_T} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = q, \text{ или } \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \frac{q \delta_T}{\lambda(T_e - T_w)} = \text{St Pe},$$

где число Стантона определяется формулой

$$\text{St} = \frac{q}{u_0 c \rho (T_e - T_w)}.$$

3) *Задан теплообмен* между стенкой и потоком по закону Ньютона. $y = 0, \lambda \partial T / \partial y = \alpha(T - T_w)$. Здесь $\alpha, \text{Вт/м}^2\text{К}$ – коэффициент теплообмена, который может зависеть от температуры, а также чисел Рейнольдса и Прандтля. В безразмерном виде это условие имеет вид

$$y = 0, \quad \frac{\lambda(T_e - T_w)}{\delta_T} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \alpha(T - T_w), \text{ или } \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \text{Nu } \theta,$$

где число Нуссельта определяется формулой

$$\text{Nu} = \frac{\alpha \delta_T}{\lambda}.$$

Необходимо подчеркнуть, что коэффициент α концентрирует в себе информацию о теплообменных процессах в пограничном слое, поэтому при использовании данного граничного условия решение задачи не должно равняться нулю на стенке (в размерном виде это означает $T(0) \neq T_w$).

3. Математическое описание турбулентных течений

3.1. Уравнения Рейнольдса

Замеры реального поведения характеристик турбулентного потока дают следующую картину, рис. 3.1, которая позволила О. Рейнольдсу представить мгновенную характеристику как сумму среднего \bar{u} и пульсации u' , т.е.

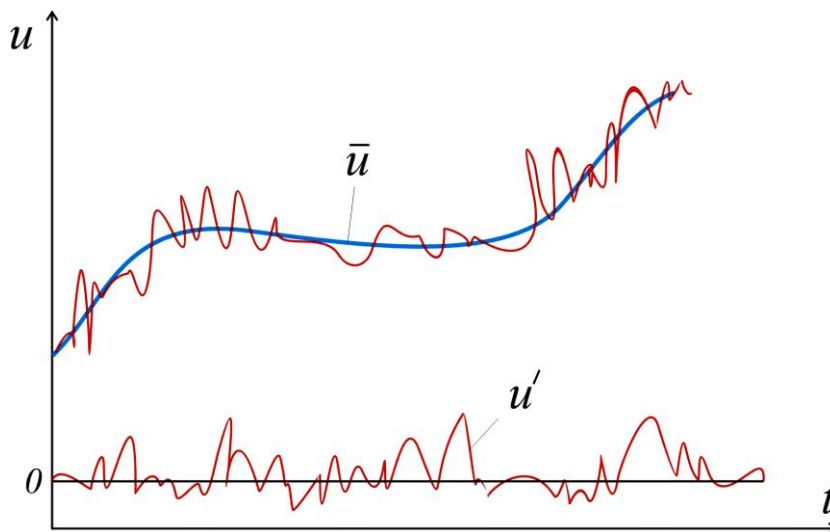


Рис. 3.1. Среднее и пульсация

Представление вида $u = \bar{u} + u'$ тем более продуктивно, что в инженерных приложениях интерес представляют именно средние поля. Подчеркнем, что ни в коем случае не предполагается, что $|u'| \ll |\bar{u}|$. Под средним значением f в каждый момент времени t понимаем величину

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(\tau) d\tau \quad (3.1)$$

где период осреднения должен быть достаточно велик по сравнению с периодом пульсаций, чтобы среднее значение случайной пульсации было равно нулю, но и не столь большим, чтобы не сглаживались глобальные изменения средних во времени. В дальнейшем предполагается, что операция осреднения удовлетворяет следующим требованиям:

$$\begin{aligned}\overline{f'} &= 0; \quad \overline{\bar{f}} = \bar{f}; \quad \overline{\bar{f}g} = \overline{\bar{f}\bar{g}} + \overline{\bar{f}g'} = \bar{f}\bar{g}; \\ \overline{fg} &= \overline{(\bar{f} + f')(\bar{g} + g')} = \overline{\bar{f}\bar{g}} + \overline{\bar{f}g'} + \overline{g'f'} + \overline{f'g'} = \bar{f}\bar{g} + \overline{f'g'}; \\ \frac{\partial \bar{f}}{\partial s} &= \frac{\partial \bar{f}}{\partial s}; \quad \int \bar{f} ds = \int \bar{f} ds, \quad s \in \{x, t\}\end{aligned}\quad (3.2)$$

Проведем осреднение по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i; \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0.$$

Подставим в него разложение $u_i = \bar{u}_i + u'_i$, $p = \bar{p} + p'$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + (\bar{u}_j + u'_j) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \Delta \bar{u}_i + \nu \Delta u'_i \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} &= 0.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Применим к (3.3) оператор осреднения. Из-за первого и третьего свойств осреднения (3.2) все линейные вхождения пульсаций после осреднения пропадут. Останется

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \Delta \bar{u}_i; \\ \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} &= 0; \quad \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Используя последнее уравнение (3.4), можем записать

$$\overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j}.$$

Произведение пульсаций называют их корреляцией второго порядка, а величины $\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ называются *турбулентными напряжениями* или тензором напряжений Рейнольдса. Уравнения (3.4), переписанные в виде (черта над средними опущена)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \nu \Delta u_i + g; \\ \tau_{ij} &= -\rho \overline{u'_i u'_j}; \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

– уравнениями Рейнольдса. Сравнивая (3.5) с исходной системой уравнений Навье-Стокса, легко заметить, что в осредненных уравнениях появились дополнительные градиенты напряжений. Очевидно, модель (3.5) теперь не замкнута, и требуется дополнительно 6 уравнений для компонент симметричного тензора турбулентных напряжений. Простейший способ замыкания уравнений Рейнольдса состоит в том, чтобы выразить τ_{ij} через характеристики осредненного течения, например

$$\tau_{ij} = \mu_T e_{ij} = \mu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.6)$$

Здесь коэффициент μ_T называется турбулентной вязкостью, однако даже простейшие сдвиговые течения показывают, что его нельзя считать постоянным, или вообще придавать ему какой либо физический смысл. Поэтому обычно рассматривают более сложные модели замыкания уравнений турбулентности, чем (3.6).

3.2. Осредненное уравнение конвективной теплопроводности

Температурное поле в турбулентном потоке тоже испытывает пульсации: $T = \bar{T} + T'$. Если подставить это разложение в линейное уравнение теплопроводности (2.15), получим

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial T'}{\partial t} + (\bar{u}_i + u'_i) \frac{\partial}{\partial x_i} (\bar{T} + T') = a \Delta T + a \Delta T' + \phi. \quad (3.7)$$

Раскроем скобки в конвективном члене:

$$\bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + \bar{u}_i \frac{\partial T'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial T'}{\partial x_i}$$

При осреднении (3.2) уравнения (3.7) слагаемые с линейными вхождениями пульсаций, как и при выводе уравнений Рейнольдса, обратятся в ноль. В результате получим

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} = a \Delta \bar{T} - \overline{u'_i \frac{\partial T'}{\partial x_i}} + \phi. \quad (3.8)$$

Используя уравнение неразрывности для пульсаций скорости, можем представить нелинейный член справа в виде дивергенции турбулентного потока тепла $\overline{\partial(u'_i T') / \partial x_i}$. В отличие от молекулярного потока Фурье $q_i = -\lambda \partial T / \partial x_i$ этот поток имеет конвективную природу: пульсация температуры T' переносится пульсацией скорости u'_i .

Если умножить уравнение (3.8) на $c\rho$ и вернуться от оператора Лапласа к дивергенции \vec{q} , получим осредненное уравнение конвективной теплопроводности в турбулентном потоке

$$c\rho \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - c\rho \overline{u'_i T'} \right) + f. \quad (3.9)$$

По аналогии с тем, как был введен коэффициент турбулентной вязкости в уравнениях Рейнольдса, можно ввести коэффициент турбулентной теплопроводности λ_T выразив пульсационный поток $q_i^T = -c\rho \overline{u'_i T'}$ через градиент среднего температурного поля:

$$c\rho \overline{u'_i T'} = -\lambda_T \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} \quad (3.10)$$

Подставив (3.10) в (3.9), опуская черту над средними и вновь деля на $c\rho$, получим

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[(a + a_T) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] + \phi. \quad (3.11)$$

Здесь a_T – турбулентная температуропроводность. Все замечания, высказанные выше по поводу ν_T , разумеется справедливы и в отношении коэффициентов λ_T и a_T , поэтому коэффициент турбулентной температуропроводности, вообще

говоря, не имеет какого либо физического смысла. Однако эксперименты и опыт инженерных расчетов показывают, что во многих течениях удобно использовать турбулентное число Прандля

$$\text{Pr}_T = \frac{\nu_T}{a_T} \quad (3.12)$$

которое выражает известную для ламинарных течений аналогию процессов вязкости и теплопроводности. В простейших сдвиговых течениях значение Pr_T близко к единице ($0.5 \div 0.9$), в сложных течениях его значение зависит от геометрии; на практике для турбулентного числа Прандля применяют эмпирические соотношения. В любом случае, подстановка (3.12) в уравнение (3.11) несколько упрощает задачу: неизвестной остается лишь кинематическая турбулентная вязкость ν_T , которая по определению (3.6) выражается через пульсации скорости и скорости деформаций среднего течения.

3.3. Физический смысл напряжений Рейнольдса. Замеры пульсаций скорости

Как и вязкие напряжения σ_{ij} , турбулентные напряжения $\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$ являются поверхностными напряжениями, действующими на площадку с нормалью i в направлении j . Из определения следует симметрия $\tau_{ij} = \tau_{ji}$. Однако действует не молекулярный механизм, а очевидный конвективный обмен импульсом. На рис. 3.2 показан этот обмен в сдвиговом течении, когда $\bar{u} = \bar{u}(y)$, $v = 0$, $d\bar{u}/dy > 0$. Возможны две ситуации:

а) $v' > 0$. Тогда частицы с меньшим импульсом (внизу) попадают в средний слой и тормозят находящиеся там жидкие частицы, т.е. вызывают пульсацию $u' < 0$. Очевидно, $u'v' < 0$, $\tau_{xy} = -\rho u'v' > 0$.

б) $v' < 0$. Тогда частицы с большим импульсом (сверху) попадают в средний слой и ускоряют его частицы, т.е. вызывают пульсацию $u' > 0$. Очевидно, и в этом случае $u'v' < 0$, $\tau_{xy} = -\rho u'v' > 0$.

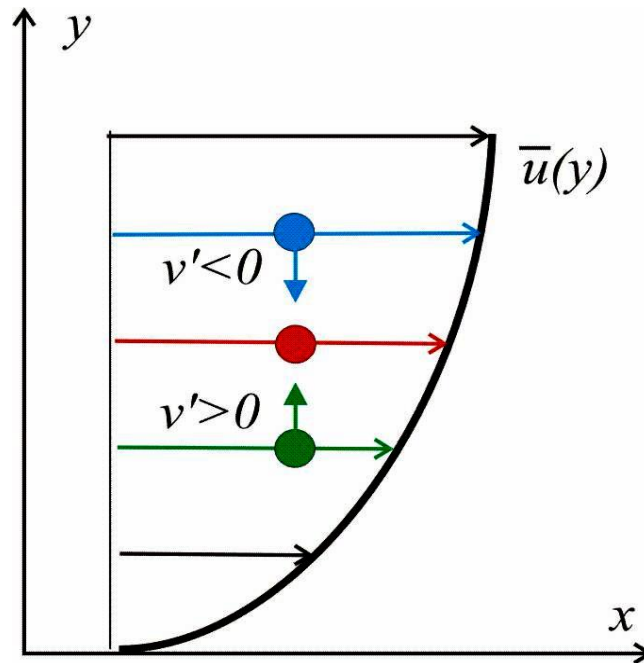


Рис. 3.2. Обмен импульсом в сдвиговом течении

Таким образом, турбулентное напряжение имеет тот же знак, что и вязкое $\sigma_{xy} = \mu du/dy > 0$, а значит действуют на течение сходным образом. Иногда говорят о тензоре полных напряжений $p_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} + \tau_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Вот пример в 2-мерном случае.

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \rho \overline{u'^2}; p_{xy} = \mu \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \right) - \rho \overline{u'v'}; p_{yy} = -p + 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \rho \overline{v'^2}.$$

Приведем *результаты замеров* пульсаций скорости и турбулентных напряжений (Рейхардт, 1938). Изучалось движение воздуха со скоростью 1 м/с в канале прямоугольного сечения 1 м × 0.25 м. Число Рейнольдса порядка в данном эксперименте равно 105. Графики средних скоростей и их пульсаций, а также распределение ламинарных и турбулентных напряжений в поперечном сечении канала приведены на рис. 3.3; их качественные и количественные характеристики сформулированы ниже в пунктах 1 – 5.

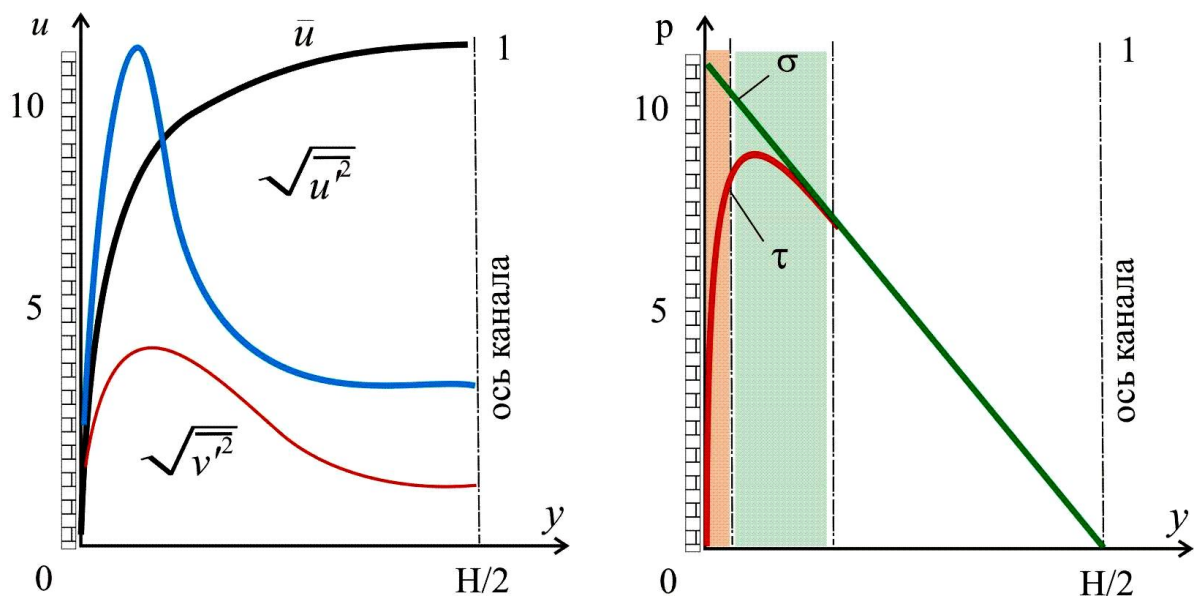


Рис. 3.3. Турбулентные пульсации (слева) и напряжения по результатам измерений

1. Величина пульсаций на порядок (>10 раз) больше средней скорости
2. На стенке из-за прилипания пульсаций нет
3. Полное напряжение линейно падает от максимума на стенке до нуля на оси
4. В основной области течения напряжение целиком определяется турбулентностью, $p_{xy} \approx \tau_{xy} = -\rho u'v'$, однако вблизи стенки пульсации падают, там начинает работать молекулярная вязкость
5. Турбулентный пограничный слой имеет составную структуру: а) турбулентный слой ($\tau \gg \sigma$), б) переходная зона ($\tau \sim \sigma$) и в) вязкий подслой ($\tau \ll \sigma$).

Заметим, что непосредственно на стенку действует трение вязкого подслоя, однако энергия потока тратится и внутри благодаря турбулентному обмену импульсом.

3.4. Статистические характеристики пульсаций

Пульсации носят случайный характер, в *теории* турбулентности активно используются методы теории вероятности и математической статистики. В частности, вместо осреднения по времени используют осреднение по ансамблю реализаций случайных полей (согласно т.н. эргодической гипотезе эти осреднения эквивалентны). Произведения пульсаций вида $\overline{u'v'}$ называются корреляциями 2-го порядка или *моментами* 2-го порядка. Заметим, что момент $\overline{u'v'} = \tau_{xy} / \rho$ будет тем дальше от нуля, чем более одновременно продольная и поперечная пульсации отличны от нуля. Вводят коэффициент корреляции пульсаций

$$\psi = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}} \sqrt{\overline{v'^2}}}, \quad 0 < \psi < 1$$

В эксперименте Рейхардта $\psi = \psi(y)$, $\max \psi = 0.45$ и достигается в точке максимума турбулентных напряжений τ_{xy} ; на оси канала коэффициент корреляции убывает до нуля.

Для понимания процесса турбулентности важно, на каких частотах ω происходят пульсации, а также то, как связана частота с энергией пульсаций $\overline{u'^2}$, которая характеризует перенос кинетической энергии между вихрями и от основного потока к вихрям. Если провести много испытаний – замеров энергии пульсаций $\overline{u'^2}$ и частот ω , то можно построить функцию $\overline{u'^2}(\omega)$. Если ее нормировать, т.е. разделить на сумму всех $\overline{u'^2}$, то получим функцию $E(\omega)$ – плотность распределения вероятности, которая показывает, на каких частотах какая наиболее вероятная энергии пульсаций. График этой функции для примера Рейхардта показан на рис. 3.4

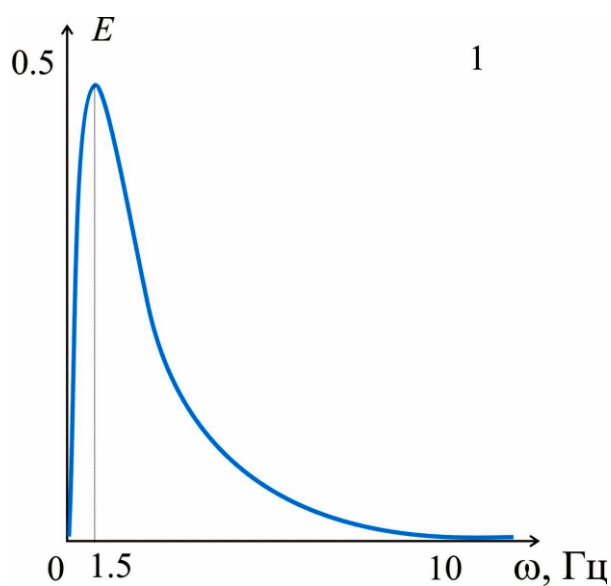


Рис. 3.4. Распределение энергии пульсаций по частотам

Интересно, что спектральное распределение энергии оказалось практически одинаковым в разных точках потока.

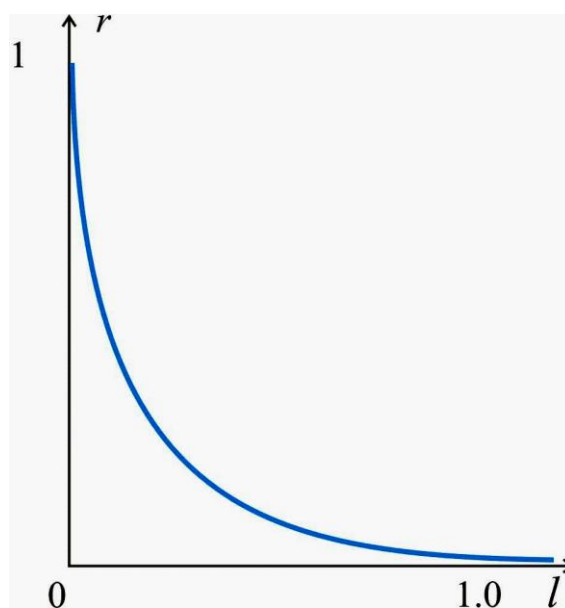


Рис. 3.5. Зависимость двухточечной корреляции от расстояния

Другой важной статистической характеристикой является коэффициент корреляции продольных пульсаций в двух разных точках, разнесенных на расстояние l в поперечном направлении:

$$r(l) = \frac{\overline{u'(y)u'(y+l)}}{\sqrt{\overline{u'(y)^2}} \sqrt{\overline{u'(y+l)^2}}}.$$

То расстояние, на котором корреляция еще чувствуется, можно связать с масштабом турбулентности или с размером вихря. Как видно из рис. 3.5, эта корреляция быстро падает с ростом l .

Масштаб вихря определяется формулой

$$L = \int_0^{\infty} r(l) dl.$$

3.5. Теория А.Н. Колмогорова (1941)

Это статистическая теория изотропной ($\overline{u'^2} = \overline{v'^2} = \overline{w'^2}$, средние пульсации не зависят от направления), однородной (параметры турбулентности не зависят от места течения, т.е. вдали от границ) турбулентности при высоких числах Рейнольдса, когда в течении присутствует весь спектр масштабов вихрей: от внешнего L , определяемого граничными условиями, до микромасштаба λ , на котором происходит диссипация кинетической энергии в тепло. В известной степени она (теория) развивает и существенно продвигает представление Л. Ричардсона (1922) о каскадной передаче энергии от внешнего течения по цепочке убывающих в размерах вихрей.

Фактически изучается распределение удельной (на единицу массы) энергии пульсаций по масштабам l, m (по частотам n, c^{-1} , по волновым числам $k = 2\pi/l, m^{-1}$). Заметим, что размерность удельной энергии – $(м/с)^2$.

Математический аппарат существенно использует преобразование Фурье, который традиционно применяется физиками для анализа случайных сигналов.

Если $v(\vec{x}), м/с$ – скорость (или ее пульсация), которая может быть представлена в виде суперпозиции бесконечного числа гармоник (т.е. компонент с разными частотами или волновыми числами k), то её Фурье-образ представим интегралом

$$\hat{v}(\vec{k}) = \int_{-\infty}^{\infty} v(\vec{x}) \exp[-i\vec{k}\vec{x}] d\vec{x}, \quad \text{м}^2/\text{с} \quad (3.13)$$

Энергетическим спектром называют функцию

$$E(k) = \int_{|\vec{k}|=k} |\hat{v}|^2 dk, \quad \text{м}^3/\text{с}^2 \quad (3.14)$$

которая показывает, какова кинетическая энергия (в пространстве Фурье) у вихрей с волновыми векторами \vec{k} , модуль которых (независимо от направления) равен k .

Колмогоров с помощью преобразования (3.13) перевел уравнения Навье-Стокса в пространство Фурье и там получил эволюционное уравнение для энергетического спектра (3.14). Качественный анализ этого уравнения позволил автору сформулировать основные положения теории турбулентности в виде гипотез, соотношений порядка, полученных на основе теории размерности, и ряда строгих математических результатов.

3.5.1. Интервалы масштабов турбулентности

Согласно теории Колмогорова, механизмы превращения энергии существенно различаются в зависимости от значения волнового числа k (или масштаба l). Выделяются три интервала изменения k :

- *Энергосодержащий интервал*, в котором происходит генерация энергии турбулентности за счет крупномасштабных сдвиговых течений. Масштаб турбулентности определяется граничными условиями и имеет порядок L .
- *Инерционный интервал*, в котором наблюдается каскадный (от крупных вихрей к более мелким) перенос энергии. Масштаб вихрей меняется в диапазоне $\lambda < l < L$.
- *Диссипативный интервал*, где происходит вязкая диссипация вихревой энергии в тепло. Микромасштаб этого интервала λ называют также масштабом Колмогорова.

Схематично механизмы баланса энергии по масштабам представлены на рис. 3.6.

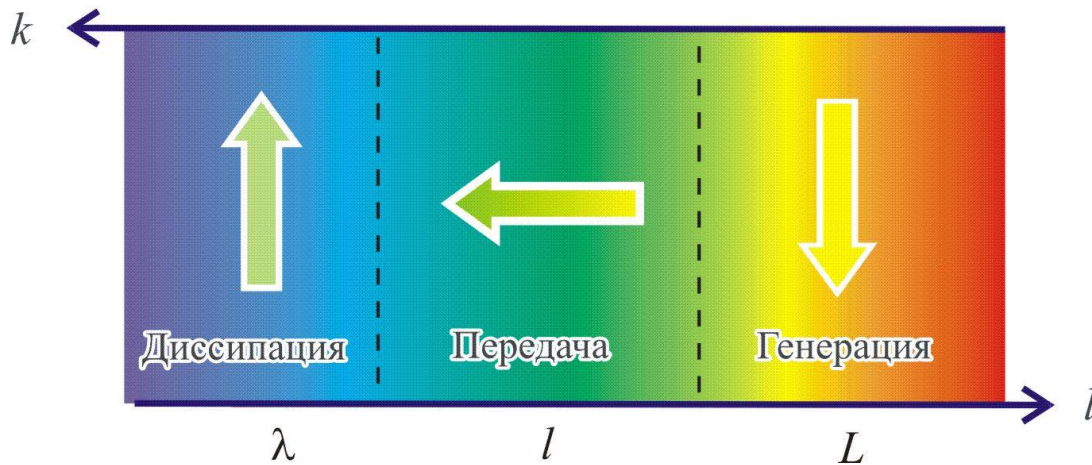


Рис. 3.6. Декомпозиция спектра на три интервала: энергосодержащий, инерционный и диссипативный (справа-налево).

3.5.2. Гипотезы Колмогорова и их следствия

1) *Гипотеза локальной изотропии турбулентного течения.* При достаточно высоких числах Рейнольдса мелкомасштабные турбулентные течения с характерным размером $l \ll L$ являются статистически изотропными.

В изотропном течении теряется информация об ориентации вихрей. Все направления становятся равновероятными. На уровне мелкомасштабных вихрей происходит потеря информации о геометрии больших вихрей, определяемой средним течением и граничными условиями. В результате этого статистические характеристики мелкомасштабного движения являются универсальными. Важнейшими процессами, которые характеризуют состояние мелкомасштабной турбулентности являются процессы переноса энергии от больших масштабов к малым и диссипация энергии в вихрях наименьшего масштаба.

2) *Гипотеза диссипативного интервала.* В диссипативном интервале мелкомасштабной турбулентности ($l \sim \lambda$) все параметры определяются скоростью диссипации ε и кинематической молекулярной вязкостью ν .

Заметим, что удельная энергия турбулентных пульсаций имеет размерность $(\text{м/с})^2$, поэтому скорость ее генерации G и диссипации ε

измеряется в $\text{м}^2/\text{с}^3$; размерность кинематической вязкости – $\text{м}^2/\text{с}$. Пользуясь соображениями размерности и данной гипотезой, определим все остальные параметры турбулентности.

Колмогоровский масштаб ищем в виде

$$\lambda \sim \varepsilon^a \nu^b, \quad \text{м} = \left(\frac{\text{м}^2}{\text{с}^3} \right)^a \left(\frac{\text{м}^2}{\text{с}} \right)^b, \quad \begin{cases} 1 = 2a + 2b, \\ 0 = 3a + b. \end{cases} \quad a = -\frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}.$$

Отсюда следует порядок размера диссипативных вихрей

$$\lambda \sim (\nu^3 / \varepsilon)^{1/4}. \quad (3.15)$$

Легко оценить это значение в квазистационарных процессах, когда диссипация равна генерации турбулентности. Генерация происходит на макромасштабах L, U из которых можно составить комбинацию

$$\varepsilon = G \sim U^3 / L \quad (3.16)$$

размерностью $\text{м}^2/\text{с}^3$. Формулу (3.16) можно получить и из более содержательных механических соображений, вспоминая, что генерация турбулентности происходит из-за работы вязких сил на макроскопических деформациях сдвига, причем в этом процессе работает турбулентная вязкость. Можно записать

$$G \sim \tau e = \nu_T \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial U}{\partial y} \sim \nu_T \frac{U^2}{L^2}. \quad (3.16a)$$

Величину турбулентной вязкости ν_T можно оценить, приравняв кинетическую энергию потока ρU^2 к «вязкой диссипации» $\rho \nu_T \partial U / \partial y$. Но $U \sim L \partial U / \partial y$, поэтому, разделив на ρ , получаем

$$U^2 \sim L^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 = \nu_T \frac{\partial U}{\partial y},$$

откуда следует оценка $\nu_T \sim L^2 \frac{\partial U}{\partial y} \sim LU$. После подстановки этого значения в

(3.16a) получаем (3.16). Итак, пусть $\varepsilon \sim G$. Подставим (3.16) в (3.15). С учетом определения числа Рейнольдса $\text{Re} = UL / \nu$ получим

$$\lambda \sim \left(\frac{\nu^3}{G} \right)^{1/4} = \left(\frac{\nu^3 L}{U^3} \right)^{1/4} = \frac{L}{\text{Re}^{3/4}}, \quad \text{или} \quad \frac{\lambda}{L} = \text{Re}^{-3/4}. \quad (3.17)$$

Наличие линейного масштаба облегчает определение характерной скорости пульсаций в диссипативном интервале:

$$u \sim \frac{\nu}{\lambda} = \frac{\nu \text{Re}^{3/4}}{L} = \frac{\nu U \text{Re}^{3/4}}{UL} = U \text{Re}^{-1/4}, \quad \text{или} \quad \frac{u}{U} = \text{Re}^{-1/4}. \quad (3.18)$$

Наконец, масштаб времени есть $t_0 = \lambda / u$, тогда как в энергетическом интервале он равен $T_0 = L / U$. Получаем

$$\frac{t_0}{T_0} = \frac{\lambda}{L} \frac{U}{u} = \text{Re}^{-3/4} \text{Re}^{1/4} = \text{Re}^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{\text{Re}}}. \quad (3.19)$$

Формулы (3.17), (3.19) позволяют оценить вычислительные ресурсы, которые требуются для прямого численного моделирования (DNS) мелкомасштабной турбулентности. Пусть для расчета достаточно 10 узлов сетки на вихрь Колмогоровского масштаба λ . Тогда, очевидно, количество узлов по каждой координате в области размером $L \times L \times L$ будет равно $N = 10L / \lambda = 10 \text{Re}^{3/4}$, а общее количество узлов следует оценить как

$$N^3 = 10^3 \text{Re}^{2.25}.$$

Понятно, что при больших числах Рейнольдса это очень много. Столь же неутешительная оценка получается и для количества шагов по времени.

2) *Гипотеза инерционного интервала.* В инерционном интервале мелкомасштабной турбулентности ($\lambda < l < L$) все параметры определяются скоростью диссипации ε и масштабом вихрей l (волновым числом k) и не зависят от кинематической вязкости ν . При этом скорость диссипации энергии ε является константой для заданного течения. То есть в любой момент времени и в любой точке пространства она постоянна и определяется энергией, вводимой в поток и прокачиваемой вдоль всего инерционного интервала до диссипативных масштабов.

Первым следствием этой гипотезы является оценка энергии $E(k)$, определенной формулой (3.14). Из теории размерности получаем

$$E \sim \varepsilon^a k^b, \frac{M^3}{c^2} = \left(\frac{M^2}{c^3} \right)^a \left(\frac{1}{M} \right)^b. \quad \begin{cases} 3 = 2a - b, \\ 2 = 3a. \end{cases} \quad a = \frac{2}{3}, b = -\frac{5}{3}.$$

Таким образом, получен основной Закон Колмогорова (закон пяти третьих)

$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}, \quad (3.20)$$

где $C \approx 1.5$ – константа Колмогорова.

Вторым следствием гипотезы инерционного интервала является оценка скорости пульсации, которую также получаем из анализа размерности:

$$u' \sim (\varepsilon l)^{1/3}. \quad (3.21)$$

Это соотношение называется Законом Обухова - Колмогорова.

Проверке закона (3.20) было посвящено множество экспериментальных работ, результаты которых наносились на график функции $E(k)$ в логарифмических координатах. Результаты вполне удовлетворительные. Согласно закону Колмогорова наклон графика (тангенс угла наклона) в инерционном интервале должен быть равен $-5/3$ (см. рис. 3.7).

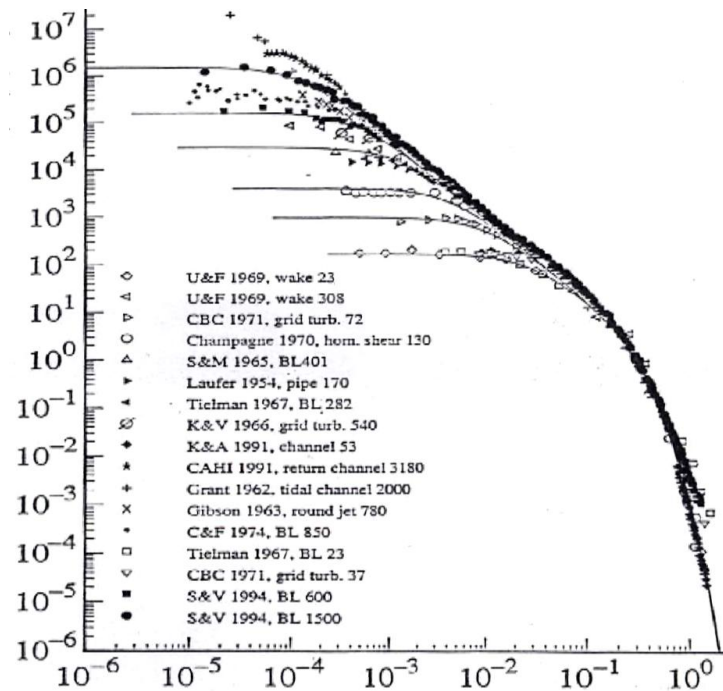


Рис. 3.7. Некоторые результаты экспериментальной проверки закона Колмогорова.

Еще один важнейший результат теории Колмогорова был получен при рассмотрении т.н. структурных функций, представляющих собой статистические моменты различного порядка продольных пульсаций скорости:

$$S_n(l) = \langle (u')^n \rangle, \quad u' = u(x+l) - u(x). \quad (3.22)$$

Согласно (3.21), имеет место оценка

$$S_n(l) \sim (\varepsilon l)^{n/3} \quad (3.23)$$

Для $n=3$ Колмогоров получил математически строгий (на основе формальных преобразований уравнений Навье-Стокса в пространстве Фурье) результат, известный как «закон 4/5»:

$$S_3(l) = -\frac{4}{5} \varepsilon l,$$

который является конкретизацией оценки (3.23).

Однако тщательные эксперименты и теоретические исследования показали, что это равенство не выполняется при $n \neq 3$. Тем самым подтвердилось историческое *возражение Л.Д. Ландау* (1942) о том, что ε не может быть константой, а как случайная величина должна зависеть от k (или l). В этом случае формулу (3.23) следует понимать как $S_n = \langle \varepsilon l \rangle^{n/3}$. В то же время из определения (3.22) структурной функции n -го порядка и оценки Обухова (3.21) следует

$$S_n(l) \sim \langle (u')^n \rangle \sim \left\langle \left((\varepsilon l)^{1/3} \right)^n \right\rangle = \langle (\varepsilon l)^{n/3} \rangle \neq \langle \varepsilon l \rangle^{n/3}.$$

Тот же недостаток проявился и в законе Колмогорова (3.20), когда экспериментально было зафиксировано небольшое отклонение наклона кривой в инерционном интервале от «пяти третей». Это означает, что глобальная однородность турбулентности, постулируемая А.Н. Колмогоровым, нарушается в реальных течениях. Этот эффект получил название *перемежаемости*, который проявляется в том, что даже при очень больших Re активные зоны турбулентности соседствуют в потоке с пассивными «квазиламинарными» областями (см. рис. 3.8, а также рис. 0.2 во Введении).

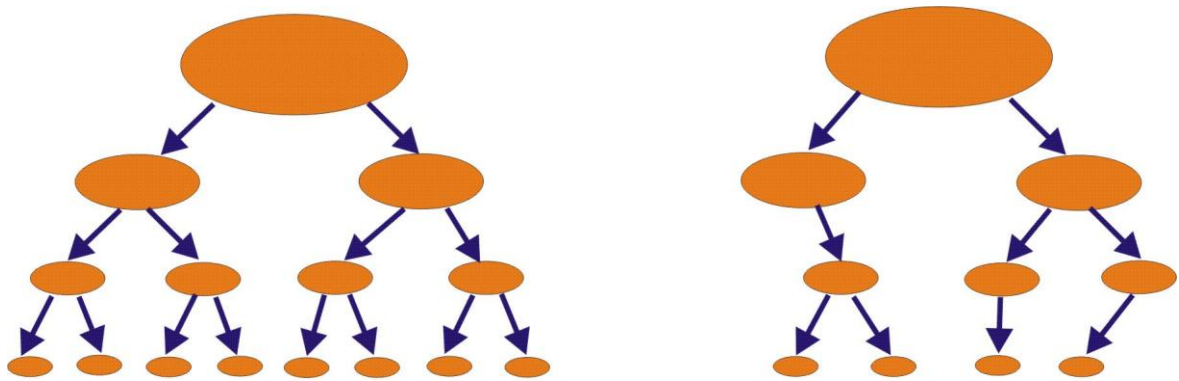


Рис. 3.8. Каскадная передача энергии при однородной турбулентности (слева) и с перемежаемостью (справа).

Первую попытку скорректировать закон (3.20) путем учета статистических свойств поля диссипации сделал сам Колмогоров в 1962 г. (т.н. локально-однородная модель, в которой величина ε уже рассматривается как случайная, но распределенная не по нормальному закону, а по т.н. логнормальному закону). Однако эта модель была вскоре опровергнута и теоретически и экспериментально.

Современные модели турбулентности, наряду с идеями А.Н. Колмогорова, активно используют *фракталы*, позволяющие описать многомасштабные структуры активных и пассивных областей, а также сосуществование в развитых турбулентных полях подмножеств с различными законами масштабного подобия (*скейлинг*).

4. Дифференциальные уравнения турбулентных пульсаций

4.1. Цепочка уравнений Фридмана - Келлера

В уравнениях Рейнольдса (3.5) появился новый объект – тензор турбулентных напряжений $\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$, который с точностью до множителя совпадает с корреляционным тензором пульсаций $\overline{u'_i u'_j} = -\tau_{ij} / \rho$. Напишем эволюционное уравнение для последнего. Заметим, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{u'_i u'_j} = \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial t}} + \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial t}}, \quad (4.1)$$

поэтому вначале выведем уравнение для пульсаций u' .

После подстановки разложений $u_i = \bar{u}_i + u'_i$, $p = \bar{p} + p'$ в уравнения Навье-Стокса получалось уравнение (3.3)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \bar{u}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \\ = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \Delta \bar{u}_i + \nu \Delta u'_i + g. \end{aligned} \quad (4.2)$$

А после осреднения получалось уравнение (3.5)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \nu \Delta \bar{u}_i - \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_j} + g.$$

Вычитая это уравнение из (4.2), получим уравнение для пульсации u'_i (индекс суммирования заменен на k):

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{\partial (\overline{u'_i u'_k})}{\partial x_k} + \nu \Delta u'_i. \quad (4.3)$$

Аналогичное уравнение получим для пульсации u'_j

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + u'_k \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \frac{\partial (\overline{u'_j u'_k})}{\partial x_k} + \nu \Delta u'_j. \quad (4.4)$$

Теперь можно записать уравнение для $\overline{u'_i u'_j}$. Умножим (4.3) на u'_j , (4.4) на u'_i и сложим, учитывая (4.1). Будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u'_i u'_j)}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial(u'_i u'_j)}{\partial x_k} + (u'_j u'_k) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + (u'_i u'_k) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} + (u'_j u'_k) \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + (u'_i u'_k) \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} = \\ - \frac{1}{\rho} \left(u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j} \right) + u'_j \frac{\partial(\overline{u'_i u'_k})}{\partial x_k} + u'_i \frac{\partial(\overline{u'_j u'_k})}{\partial x_k} + \nu (u'_j \Delta u'_i + u'_i \Delta u'_j). \end{aligned} \quad (4.5)$$

После осреднения этого уравнения, как всегда, останутся только члены с нелинейными моментами пульсаций

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} = \nu (\overline{u'_j \Delta u'_i} + \overline{u'_i \Delta u'_j}) - (\overline{u'_j u'_k}) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - (\overline{u'_i u'_k}) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k} - \\ - \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j u'_k})}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Видим, что в правой части уравнения (4.6) появился новый корреляционный тензор третьего ранга $\overline{u'_i u'_j u'_k}$, а также новые моменты второго порядка, описывающие корреляции пульсаций скорости с $\nabla p'$ и с $\Delta u'$. Для новых моментов тоже можно писать эволюционные уравнения вида (4.6), но тогда обязательно появятся новые моменты 3-го порядка и один момент 4-го порядка.

Система уравнений для моментов всё возрастающего порядка называется цепочкой уравнений Фридмана-Келлера и является незамкнутой в принципе. Центральная проблема построения замкнутых моделей турбулентности – это обрыв цепочки уравнений Фридмана-Келлера и определение высших моментов через низшие и средние. При таком обрыве возникают т.н. полуэмпирические модели турбулентности. Например, модель турбулентности 2-го порядка – это уравнение (4.6), в котором $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ выражен через $\overline{u'_i u'_j}$ и \bar{u} . Для этого неизбежно используются гипотезы и эмпирические формулы, содержащие набор констант; последние определяются из опыта.

4.2. Физическая интерпретация уравнений эволюции турбулентности

Хотя уравнение (4.6) само по себе не решает проблему замыкания уравнений Рейнольдса, оно несет в себе ценную информацию об эволюции энергии турбулентных пульсаций. Чтобы дать физическую интерпретацию этого уравнения, потребуются преобразования его членов.

Прежде всего отметим, что левая часть уравнения представляет собой субстанциональную (полную) производную тензора пульсаций $d(\overline{u'_i u'_j})/dt$.

Второй и третий члены в правой части (4.6) представляют *генерацию* или *производство турбулентности*

$$G_{ij} = -(\overline{u'_j u'_k}) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - (\overline{u'_i u'_k}) \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_k}. \quad (4.7)$$

которая является произведением рейнольдсовых напряжений и средних градиентов скорости и характеризует перенос энергии от осредненного течения к пульсационному. Как было показано ранее в п. 3.3, в простом сдвиговом течении $u'v' < 0$, $du/dy > 0$, поэтому член генерации положителен.

Преобразуем первое слагаемое справа. Под знаком осреднения имеем

$$u'_j \Delta u'_i + u'_i \Delta u'_j = u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) + u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right).$$

Но

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial (u'_i u'_j)}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right) = u'_j \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \right) + u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \right) + 2 \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k},$$

поэтому

$$\nu (\overline{u'_j \Delta u'_i + u'_i \Delta u'_j}) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} \right) - 2\nu \overline{\frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}} \quad (4.8)$$

Первое слагаемое в (4.8) представляет *вязкую молекулярную диффузию* энергии турбулентных пульсаций, причем в скобки заключен диффузионный поток турбулентности

$$D_{ijk}^v = \nu \frac{\partial (\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k}, \quad (4.9)$$

который обеспечивает рассеивание энергии пульсаций в потоке за счет молекулярной вязкости.

Второе слагаемое в (4.8) называется *вязкой диссипацией* турбулентности

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \quad (4.10)$$

и описывает переход кинетической энергии пульсаций в тепло за счет работы вязких напряжений $2\nu \partial u'_j / \partial x_k$ на деформациях $\partial u'_i / \partial x_k$.

Для преобразования последнего члена в правой части (4.6) используем представление

$$u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \frac{\partial (u'_j p')}{\partial x_i} - p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} = \delta_{ki} \frac{\partial (u'_j p')}{\partial x_k} - p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_i},$$

где δ_{ik} – символ Кронекера. Будем иметь

$$\begin{aligned} \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}} + \overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} &= \overline{\delta_{ki} \frac{\partial (u'_j p')}{\partial x_k} - p' \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}} + \overline{\delta_{kj} \frac{\partial (u'_i p')}{\partial x_k} - p' \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\overline{p' (\delta_{ki} u'_j + \delta_{kj} u'_i)} \right] - p' \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right). \end{aligned}$$

Стоящий под знаком производной член трактуют как часть диффузионного потока, обусловленного взаимодействием пульсаций скорости и давления,

$$D_{ijk}^p = \frac{1}{\rho} \overline{p' (\delta_{ki} u'_j + \delta_{kj} u'_i)} \quad (4.11)$$

а второе слагаемое называют *перераспределением*, описывающим обмен энергией между отдельными составляющими пульсаций вследствие корреляции пульсаций давления и напряжения трения:

$$R_{ij} = \frac{p'}{\rho} \left(\frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right). \quad (4.12)$$

Наконец, тройную корреляцию

$$D_{ijk}^3 = \overline{u'_i u'_j u'_k} = \overline{(u'_i u'_j) u'_k} \quad (4.13)$$

также интерпретируют как часть потока турбулентной диффузии, связанного с турбулентным перемешиванием жидкости.

Объединяя все составляющие диффузионного потока: молекулярного (4.9), связанного с пульсацией давления (4.11) и турбулентным перемешиванием (4.13),

$$D_{ijk} = D_{ijk}^v + D_{ijk}^p + D_{ijk}^3,$$

а также подставляя члены генерации (4.7), диссипации (4.10) и перераспределения (4.12) в уравнение (4.6), окончательно получим эволюционное уравнение

$$\frac{d(\overline{u'_i u'_j})}{dt} = \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial(\overline{u'_i u'_j})}{\partial x_k} = \frac{\partial D_{ijk}}{\partial x_k} + G_{ij} + R_{ij} - \varepsilon_{ij} \quad (4.14)$$

Полученное уравнение не является замкнутым, так как неизвестны величины D_{ijk}^3 , D_{ijk}^p , R_{ij} , ε_{ij} . Для замыкания (4.14) требуется указанные члены соответствующим образом моделировать, используя эмпирические данные и/или некоторые упрощающие предположения.

В заключение заметим, что вместо уравнений (4.14) иногда рассматривают *уравнения для турбулентных напряжений*. В самом деле, простой заменой корреляции пульсаций на τ_{ij} / ρ и умножением на плотность, приходим к уравнениям для компонент тензора τ_{ij} .

4.3. Уравнения кинетической энергии турбулентных пульсаций и ее изотропной диссипации

Как мы увидим в следующих разделах, во многих моделях турбулентности вместо шести моментов $u'_i u'_j$ используется *кинетическая энергия турбулентных пульсаций*

$$k = \overline{u'_i u'_i} / 2. \quad (4.15)$$

Если положить в (4.14) $i = j$ и иметь ввиду соглашение о суммировании по повторяющимся индексам, получим уравнение для k

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial D_k}{\partial x_k} + G - \varepsilon_s, \quad (4.16)$$

в котором член перераспределения R отсутствует из-за неразрывности пульсаций скорости, см. (4.12) при $i = j$. Поток диффузии, генерация турбулентности и ее диссипация принимают вид

$$D_k = D_k^v + D_k^p + D_k^3; \quad D_k^v = \nu \frac{\partial k}{\partial x_k}, \quad D_k^p = \frac{1}{\rho} \overline{p' u'_k}, \quad D_k^3 = \overline{k' u'_k};$$

$$k' = \frac{u'_i u'_i}{2}; \quad G = -\left(\overline{u'_i u'_k}\right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}; \quad \varepsilon_s = \nu \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k}. \quad (4.17)$$

Уравнение (4.16) - (4.17) значительно проще, чем (4.14), однако вновь содержит неизвестные моменты $D_k^p, D_k^3, \varepsilon_s$, которые необходимо либо вычислять (т.е. выводить для них уравнения), либо моделировать. В частности, продифференцировав уравнение (4.3) для пульсации u'_i по x_k и умножив результат на $\nu \partial u'_i / \partial x_k$, после осреднения во времени получим эволюционное уравнение для изотропной диссипации

$$\frac{\partial \varepsilon_s}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial \varepsilon_s}{\partial x_k} = \frac{\partial D_\varepsilon}{\partial x_k} + G_\varepsilon - \varepsilon_\varepsilon. \quad (4.18)$$

Не выписывая громоздких выражений для диффузии, генерации и диссипации ε_s , укажем их физический смысл. Диффузионный поток D_ε включает в себя молекулярную диффузию диссипации, диффузию диссипации из-за турбулентного перемешивания посредством корреляций $\overline{u'_i \varepsilon'_s}$ и диффузию диссипации, обусловленную пульсациями давления. Член G_ε определяет генерацию диссипации из-за турбулентного перемешивания в осредненном и пульсационном движении. Член ε_ε называется диссипацией диссипации турбулентности.

Все члены в правой части уравнения (4.18) требуют специального моделирования, ибо оно не является замкнутым в любом сочетании с ранее записанными уравнениями для характеристик турбулентности. В дальнейшем мы рассмотрим популярные замкнутые полуэмпирические модели изотропной турбулентности, использующие энергию k и скорость диссипации ε .

4.4. Уравнения для пульсаций турбулентного потока тепла

В линейном уравнении турбулентного теплопереноса (3.9)

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} - \overline{u'_i T'} \right) + f. \quad (4.19)$$

появилась турбулентная составляющая $\overline{u'_i T'}$ теплового потока, обусловленная корреляцией пульсаций скорости и температуры. Выведем уравнение для ее определения.

По аналогии с тем, как это делалось при выводе уравнения для корреляционного тензора $\overline{u'_i u'_j}$, выпишем вначале уравнение для пульсации температуры T' . Для этого подставим в исходное уравнение энергии (2.15) разложения $u_i = \bar{u}_i + u'_i$, $T = \bar{T} + T'$ и представим уравнение (3.7) в виде

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + \frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial T'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial T'}{\partial x_i} = a \Delta \bar{T} + a \Delta T' + f.$$

Вычтем из него (4.19) и получим уравнение (индекс суммирования заменен на k)

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial T'}{\partial x_k} = -u'_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} - u'_k \frac{\partial T'}{\partial x_k} + \frac{\partial (\overline{u'_k T'})}{\partial x_k} + a \Delta T', \quad (4.20)$$

аналогичное выведенному ранее уравнению (4.3) для пульсации скорости

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} - u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} - u'_k \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial (\overline{u'_i u'_k})}{\partial x_k} + \nu \Delta u'_i. \quad (4.21)$$

Умножим (4.20) на u'_i , (4.21) на T' и сложим. В левой части будем иметь

$$\frac{\partial(u'_i T')}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial(u'_i T')}{\partial x_k} = \frac{d(u'_i T')}{dt}$$

Два последних слагаемых в правой части в предположении, что молекулярное число Прандтля $Pr = a/\nu$ близко к единице, т.е. $a \sim \nu$, дают

$$a \left\{ T' \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right\}. \quad (4.22)$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial(T' u'_i)}{\partial x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} T' \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k} = \\ &= T' \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + \frac{\partial T'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k} + \frac{\partial T'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} = \\ &= T' \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} + u'_i \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k} + 2 \frac{\partial T'}{\partial x_k} \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \end{aligned}$$

поэтому выражение (4.22) равно

$$\frac{\partial}{\partial x_k} a \frac{\partial(u'_i T')}{\partial x_k} - 2a \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial T'}{\partial x_k} \quad (4.23)$$

Член с градиентом давления в (4.21) представляется в виде

$$\frac{T'}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p' T')}{\partial x_k} \delta_{ik} - \frac{p'}{\rho} \frac{\partial T'}{\partial x_i}, \quad (4.24)$$

а четыре конвективных слагаемых приводят к членам генерации и тройной корреляции

$$u'_i u'_k \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} + T' u'_k \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial(u'_i u'_k T')}{\partial x_k}. \quad (4.25)$$

Если теперь осреднить полученные результаты, то члены с линейным вхождением пульсаций (это предпоследние члены уравнений, умноженные на пульсации) пропадут, и в результате будем иметь эволюционное уравнение стандартного вида

$$\frac{d(\overline{u'_i T'})}{dt} = \frac{\partial(\overline{u'_i T'})}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial(\overline{u'_i T'})}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} D_{ik} + G_i + R_i - \varepsilon_i \quad (4.26)$$

где

$$D_{ik} = a \frac{\partial (\overline{u'_i T'})}{\partial x_k} - \overline{u'_i u'_k T'} - \delta_{ik} \frac{\overline{p' T'}}{\rho}$$

– диффузионный поток тепла, обусловленный молекулярной теплопроводностью, турбулентным перемешиванием, а также пульсациями скорости и давления;

$$G_i = -\overline{u'_i u'_k} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_k} - \overline{T' u'_k} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_k}$$

– член генерации корреляции $\overline{u'_i T'}$, выражающий совместные действия градиентов средней скорости и средней температуры и пульсаций; при этом первый член генерирует пульсации скорости, а второй – пульсации температуры;

$$R_i = \frac{\overline{p' \partial T'}}{\rho \partial x_i}$$

– член перераспределения, отражающий совместные пульсации давления и градиента температуры;

$$\varepsilon_i = 2a \frac{\overline{\partial T' \partial u'_i}}{\partial x_k \partial x_k}$$

– диссипативный член, равный нулю в случае изотропной турбулентности (часто принимается пренебрежимо малым и для неізотропной турбулентности).

Если пренебречь диссипацией, то подлежащие моделированию моменты содержатся в диффузионном потоке D и члене перераспределения R .

5. Дифференциальные модели замыкания уравнений Рейнольдса

5.1. Модель Колмогорова – Прандтля

Эта модель даёт описание турбулентности с помощью одной переменной величины – удельной энергии турбулентных пульсаций $k = \overline{u'_i u'_i} / 2$, для определения которой используется дифференциальное уравнение переноса (4.16). Другие турбулентные характеристики связываются с ней с помощью алгебраических или операторных соотношений, содержащих эмпирические константы.

Осредненное поле скоростей описывается уравнениями Рейнольдса (3.5) с турбулентной (вихревой) вязкостью (3.6), которые мы перепишем в виде (черта над средними опущена)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + g; \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0; \\ -\overline{u'_i u'_j} &= \frac{\tau_{ij}}{\rho} = \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \end{aligned} \quad (5.1)$$

Кинематическая турбулентная вязкость определяется соотношением Колмогорова-Прандтля

$$\nu_T = c_\mu \sqrt{k} L. \quad (5.2)$$

Здесь L – линейный размер, который называется масштабом турбулентности и задается в модели в зависимости от граничных условий и типа течения (например, это радиус трубы во внутреннем течении или диаметр шара при внешнем обтекании); в качестве характерной скорости выбрана величина \sqrt{k} (ср. (5.2) с формулой (3.16a) при $U = \sqrt{k}$). Значение эмпирической константы выбрано равным $c_\mu = 0.09$.

Кинетическая энергия турбулентных пульсаций определяется уравнением (4.16), (4.17)

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial D_k}{\partial x_k} + G - \varepsilon_s, \quad (5.3)$$

в котором для замыкания обычно вводят следующие соотношения для диффузионного потока

$$D_k^p + D_k^3 = \frac{1}{\rho} \overline{p'u'_k} + \overline{k'u'_k} = \nu_T \frac{\partial k}{\partial x_k}, \quad D_k = (\nu + \nu_T) \frac{\partial k}{\partial x_k} \quad (5.4)$$

и скорости диссипации (по закону Обухова-Колмогорова (3.21))

$$\varepsilon_s = k^{3/2} / L. \quad (5.5)$$

Генерация G с учетом третьего уравнения (5.1) принимает вид

$$G = -\left(\overline{u'_i u'_k}\right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k}; \quad (5.6)$$

Подставив выражения (5.4) – (5.6) в (5.3), окончательно получим уравнение для k в виде уравнения конвективной диффузии

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[(\nu + \nu_T) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + \nu_T \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{k^{3/2}}{L}. \quad (5.7)$$

В частном случае, когда $G = \varepsilon$, т.е. генерация кинетической энергии компенсируется её диссипацией, говорят о *локальном равновесии* турбулентности, и два последних члена в (5.7) пропадают.

Это одна из форм записи уравнения переноса турбулентной энергии, соответствующая большим числам Рейнольдса (изотропная развитая турбулентность).

В случае умеренных чисел Re и вблизи стенок, где наблюдается анизотропия вихревого течения, модель Колмогорова-Прандтля (5.1), (5.2), (5.7) теряет адекватность, и поэтому требует модификации в части определения турбулентной вязкости, которую домножают на дополнительную демпфирующую функцию $f_\mu(Re_T)$

$$\nu_T = f_\mu c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon},$$

и скорости диссипации, которая также домножается на демпфирующую функцию от местного турбулентного числа Рейнольдса. Кроме того, фиксированный масштаб турбулентности L заменяется на местный переменный размер l . Наиболее популярные модификации представлены в таблице 5.1. Во всех формулах y – ближайшее расстояние до стенки, $\kappa = 0.41$ – константа Прандтля, $c_\mu = 0.09$.

Таблица 5.1. Усовершенствованные модели Колмогорова-Прандтля

Авторы модели	Скорость диссипации турбулентности	Демпфирующая функция	Константы
Норрис, Рейнольдс	$\varepsilon = \frac{k^{1.5}}{l} \left(1 + \frac{C_\varepsilon}{\text{Re}_y} \right)$	$f_\mu = 1 - \exp(-\text{Re}_y / A_\mu)$ $\text{Re}_y = \frac{\sqrt{k} y}{\nu}$ $l = \kappa C_\mu^{0.75} y$	$A_\mu = 50.5$ $C_\varepsilon = 5.3$
Вольфштейн	$\varepsilon = \frac{k^{1.5}}{l} \frac{1}{1 - \exp(-\text{Re}_y / A_\varepsilon)}$	$f_\mu = 1 - \exp(-\text{Re}_y / A_\mu)$ $\text{Re}_y = \frac{\sqrt{k} y}{\nu}$ $l = \kappa C_\mu^{0.75} y$	$A_\mu = 70.0$ $A_\varepsilon = 2\kappa C_\mu^{-0.75} = 5.1$
Хассид, Порех	$\varepsilon = \frac{k^{1.5}}{l} \left(C_{D1} f_\mu + \frac{C_{D2}}{\text{Re}_l} \right)$	$f_\mu = 1 - \exp(-\text{Re}_l / A_\mu)$ $\text{Re}_l = \frac{\sqrt{k} l}{\nu}$ $l = \kappa y$	$A_\mu = 34.48$ $C_{D1} = C_\mu^{0.75} = 0.164$ $C_{D2} = 0.336$

Уравнение теплопроводности в модели Колмогорова-Прандтля, как и в других моделях с турбулентной вязкостью, используют в форме (3.11) – (3.12), выражая турбулентную температуропроводность a_T через турбулентную вязкость ν_T с помощью турбулентного числа Прандтля, который остается параметром модели.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(a + \frac{\nu_T}{\text{Pr}_T} \right) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right] + \phi. \quad (5.8)$$

Известно, что Pr_T принимает значения порядка единицы (в пакете FLUENT по умолчанию задано $Pr_T = 0.85$).

5.2. Семейство $k - \varepsilon$ моделей

В этом разделе мы рассмотрим наиболее популярные дифференциальные модели турбулентности второго порядка, в которых в качестве искомых функций выступают удельная энергия турбулентных пульсаций k и скорость ее диссипации ε . Это:

1. Стандартная $k - \varepsilon$ модель;
2. RNG (полученная с использованием техники ренормализованных групп) модель;
3. realizable (реализуемая) $k - \varepsilon$ модель.

Все три модели имеют одинаковую форму, но различаются в следующем:

- методом вычисления турбулентной вязкости;
- способом задания т.н. турбулентных чисел Прандтля в диффузионных потоках k и ε ;
- членами генерации и диссипации.

Историческая справка. Первые усилия по разработке $k - \varepsilon$ модели были предприняты Чоу (1945), Давыдовым (1961), Харлоу и Накаямой (1968). Однако центральной работой в этом направлении была статья Лаундера – Джонса (1972), получившая дальнейшее развитие и обобщение в исследованиях Лаундера-Сполдинга и Лаундера-Шармы (1972,1974). Сформировалось понятие стандартной $k - \varepsilon$ модели как модели, построенной в предположении о реализации полностью развитых турбулентных течений при больших турбулентных числах Рейнольдса $Re_T = \sqrt{k}L/\nu \rightarrow \infty$.

В 70-х - 80-х годах появилось целое семейство $k - \varepsilon$ - моделей (Лаундер-Приддин-Шарма (1977), Лэм-Бремхерст (1981), Чен (1982) и др.). В результате достигнут существенный прогресс в расчетах различных типов течений, в том числе сдвиговых турбулентных. Это послужило основанием для включения

моделей типа $k - \varepsilon$ во все вычислительные программы, а также в коммерческие пакеты, предназначенные для решения широкого круга задач прикладной аэродинамики и теплообмена (PHOENICS, FIRE, FLUENT, FLOW3D, STAR CD и ряд других).

5.2.1. Стандартная $k - \varepsilon$ модель.

Уравнение переноса для энергии турбулентных пульсаций берется в форме, сходной с моделью Колмогорова-Прандтля (5.7), но теперь член диссипации не моделируется, а генерация k задается с помощью второго инварианта тензора скоростей деформаций среднего течения

$$G_k = \nu_T e^2, \quad e = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}}, \quad e_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}. \quad (5.9)$$

В результате имеем

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + G_k - \varepsilon. \quad (5.10)$$

Уравнение переноса для скорости диссипации турбулентной энергии (4.18) принимается в виде

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (5.11)$$

Заметим, что дробь k / ε , входящая в члены генерации и диссипации (5.11) имеет размерность времени и указывает на масштаб времени этих процессов.

Турбулентная вязкость вычисляется по формуле

$$\nu_T = c_\mu k^2 / \varepsilon, \quad (5.12)$$

а эмпирические константы для стандартной $k - \varepsilon$ модели равны

$$c_\mu = 0.09, \quad c_{1\varepsilon} = 1.44, \quad c_{2\varepsilon} = 1.92, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3. \quad (5.13)$$

Параметры $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ называют числами Прандтля; выписанные значения параметров (2.20) выбраны на основе многовариантных расчетов эталонных турбулентных течений.

5.2.2. RNG $k - \varepsilon$ модель.

Эта модель турбулентности выводится из уравнений Навье-Стокса с использованием математической техники т.н. ренормализационных групп. Аналитический вывод приводит к модели $k - \varepsilon$ с набором констант, отличающихся от констант стандартной модели 5.2.1 и содержащей некоторые дополнительные члены и функции в уравнениях переноса k и ε .

Уравнение для турбулентной энергии пульсаций имеет вид

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\nu_{eff}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + G_k - \varepsilon, \quad (5.14)$$

где эффективная вязкость ν_{eff} вычисляется как решение дифференциального уравнения и зависит через $k, \varepsilon, \rho, \mu$ от локального масштаба вихрей; в пределе при очень больших числах Рейнольдса значение ν_{eff} переходит в ν_T , определенное формулой (5.12), но с константой $c_\mu = 0.085$, которое близко к 0.09 в стандартной модели.

Уравнение для диссипации энергии записывается так

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\nu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] + c_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} G - c_{2\varepsilon}^* \frac{\varepsilon^2}{k}. \quad (5.15)$$

Турбулентные числа Прандтля $\sigma_k, \sigma_\varepsilon$ теперь не константы, а величины, равные $1/\alpha$, а обратное число Прандтля α находится из уравнения

$$\left| \frac{\alpha - 1.3929}{1 - 1.3929} \right|^{0.6321} \left| \frac{\alpha + 2.3929}{1 + 2.3929} \right|^{0.3679} = \frac{\nu}{\nu_{eff}}.$$

Для высокорейнольдсовых течений, когда $\nu / \nu_{eff} \ll 1$, получается

$$\sigma_k = \sigma_\varepsilon = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha = 1.393.$$

Однако главное отличие RNG от стандартной $k - \varepsilon$ модели состоит в том, что коэффициент в диссипативном члене уравнения (5.15) не константа, а функция

$$c_{2\varepsilon}^* = c_{2\varepsilon} + \frac{c_\mu \eta^3 (1 - \eta/\eta_0)}{1 + \beta \eta^3}, \quad \eta = \frac{ek}{\varepsilon},$$

где $\eta_0 = 4.38$, $\beta = 0.012$. Безразмерный параметр η прямо пропорционален скорости деформации среднего движения и кинетической энергии турбулентных пульсаций и обратно пропорционален скорости диссипации. В областях, где $\eta < \eta_0$ (вдали от стенок), дополнительный член дает положительный вклад, и $c_{2\varepsilon}^*$ становится больше, чем $c_{2\varepsilon}$. Например, оценки показывают, что в пограничном слое с логарифмическим профилем скорости $\eta \approx 3$, и $c_{2\varepsilon}^* \approx 2$, что близко к значению $c_{2\varepsilon}$ в стандартной $k - \varepsilon$ модели. Поэтому для течений с умеренными скоростями сдвига RNG модель дает результаты, хорошо согласующиеся со стандартной $k - \varepsilon$ моделью. Однако в областях высоких скоростей деформаций ($\eta > \eta_0$) $c_{2\varepsilon}^*$ становится меньше $c_{2\varepsilon}$, поэтому диссипация ε больше, чем в стандартной модели, значит энергия k меньше, и согласно формуле (5.12) турбулентная (эффективная) вязкость тоже меньше, чем в $k - \varepsilon$ стандартной модели. Такое поведение больше соответствует реальному поведению потоков с большими скоростями сдвига и/или течениям с большой кривизной линий тока. Поэтому RNG модель имеет предпочтение для отмеченных классов течений.

В заключение приведем набор констант этой модели

$$c_\mu = 0.085, c_{1\varepsilon} = 1.42, c_{2\varepsilon} = 1.68, \sigma_k = \sigma_\varepsilon = 0.72, \beta = 0.012, \eta_0 = 4.38.$$

5.2.3. Realizable $k - \varepsilon$ модель

Эта модель имеет два главных отличия от стандартной и RNG моделей:

- новая формулировка выражения для турбулентной вязкости;
- новое уравнение переноса для скорости диссипации энергии турбулентных пульсаций, выведенное из уравнения переноса пульсаций завихренности.

Термин “realizable” – «реализуемая» означает, что модель удовлетворяет некоторым математическим ограничениям на напряжения Рейнольдса, присущим реальным турбулентным течениям, чего нет в двух других $k - \varepsilon$ моделях.

Эта модель создана и калибрована (т.е. подобраны ее константы) для течений в турбулентных струях; расчеты показали, что она имеет преимущество при моделировании отрывных и сложных вторичных течений, а также течений в пограничных слоях с обратным градиентом давления.

Ограничения на знак нормальных турбулентных напряжений можно пояснить на следующем примере. Согласно гипотезе Буссинеска вихревая вязкость связана с напряжениями Рейнольдса формулой

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}, \quad k = \frac{\overline{u'_i u'_i}}{2},$$

откуда для нормального напряжения τ_{ii} в следует формула (индекс i опущен)

$$-\overline{u'^2} = 2\nu_T \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \frac{2}{3} k < 0. \quad (5.16)$$

Если подставить сюда выражение (5.12), принятое для $\nu_T = c_\mu k^2 / \varepsilon$ в предыдущих моделях, получим ограничение

$$\frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} < \frac{2}{3c_\mu} \sim 3.7,$$

которое, очевидно, может нарушаться при больших скоростях деформаций, и тогда модель будет предсказывать нефизичное поведение жидкости. Это было обнаружено и в экспериментах: значение $c_\mu = 0.09$ приемлемо для пограничного слоя, однако в однородном сдвиговом течении $c_\mu = 0.05$. Это значит, что необходимо модифицировать формулу для турбулентной вязкости.

Обнаружились и другие недостатки традиционных $k - \varepsilon$ моделей, связанные с моделированием диссипации. В частности, эти модели предсказывают недостаточное в сравнении с экспериментом расширение осесимметричной турбулентной струи.

Уравнение для k в реализуемой модели по форме то же, что и в стандартной:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_k \frac{\partial k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_k} \right] + G_k - \varepsilon, \quad G_k = \nu_T e^2. \quad (5.17)$$

а уравнение для ε записывается иначе:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} \right] + c_{1\varepsilon} e \varepsilon - c_{2\varepsilon} \frac{\varepsilon^2}{k + \sqrt{\nu \varepsilon}}. \quad (5.18)$$

Отличие этого уравнения от (5.11) в том, что член генерации диссипации не содержит G_k , как в традиционных $k - \varepsilon$ моделях, а пропорционален интенсивности скоростей сдвига $e = \sqrt{2e_{ij}e_{ji}}$ осредненного течения. Другой особенностью является член диссипации диссипации, который теперь не имеет особенности при $k \rightarrow 0$.

Наконец, вихревая вязкость в данной модели вычисляется по формулам

$$\nu_T = \frac{c_\mu k^2}{\varepsilon}, \quad c_\mu = \frac{1}{A_0 + A_1 \frac{kU_*}{\varepsilon}}, \quad (5.19)$$

где

$$U_* = \sqrt{e_{ij}e_{ij} + \Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

а набор констант следующий:

$$A_0 = 4.04, \quad A_1 \approx \sqrt{6}, \quad c_{1\varepsilon} = 1.44, \quad c_{2\varepsilon} = 1.9, \quad \sigma_k = 1, \quad \sigma_\varepsilon = 1.2.$$

5.3. Семейство $k - \omega$ моделей

Историческая справка. Первую двухпараметрическую дифференциальную модель турбулентности предложил Колмогоров в 1942 г., выбрав в качестве первого параметра кинетическую энергию турбулентных пульсаций $k, m^2 / c^2$, а вторым – скорость диссипации на единицу турбулентной энергии $\omega \sim \sqrt{k} / l$ (l – внешний масштаб турбулентности), которая имела

размерность $1/s$ и называлась также средней частотой, на которой происходит диссипация энергии. Хотя реальный процесс диссипации происходит в мельчайших вихрях, скорость диссипации по Колмогорову постоянна и определяется свойствами крупных вихрей, подводящих эту энергию. Таким образом, определенная через масштабы k и l частота ω косвенно ассоциируется с диссипативными процессами (частотная характеристика самопроизвольного процесса турбулентного распада).

Для ω , также как и для k было выписано эволюционное уравнение общего вида, которое однако не содержало члена генерации. Это согласуется с представлением Колмогорова, что диссипация турбулентности происходит на мельчайших вихрях и напрямую не взаимодействует с осредненным движением. В диффузионном потоке отсутствовала молекулярная вязкость, так что модель в принципе годилась лишь для высокорейнольдсовых квазиоднородных течений.

Не зная о работе Колмогорова, Саффмен (1970) сформулировал $k - \omega$ -модель, которая в дальнейшем была развита и апробирована такими учеными как Сполдинг (1972), Вилкоккс, Саффмен, Рубезин и др.(1972-1988). В последнее время Спезайл, Менгер и др. (1990-1997) изобрели несколько новых усовершенствованных моделей турбулентности рассматриваемого типа, сочетающие в себе преимущества традиционных $k - \omega$ и $k - \varepsilon$ моделей.

В данном разделе мы представим их наиболее популярные современные версии: стандартную $k - \omega$ -модель Вилкоккса (1995) и модель переноса сдвиговых напряжений (SST – Shear Stress Transport) Ментера (1994). В обеих моделях частота диссипации понимается как $\omega = \varepsilon / k$.

5.3.1. Стандартная $k - \omega$ - модель Вилкоккса

Уравнения переноса для искомых величин записываются в стандартной форме

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + G_k - \varepsilon_k, \quad G_k = \nu_T e^2. \quad (5.20)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + G_\omega - \varepsilon_\omega, \quad (5.21)$$

где σ_k , σ_ω – соответствующие числа Прандтля, в данной модели $\sigma_k = \sigma_\omega = 2$; G_k, ε_k и $G_\omega, \varepsilon_\omega$ – члены генерации и диссипации.

Турбулентная кинематическая вязкость определяется как

$$\nu_T = \alpha^* \frac{k}{\omega} \quad (5.22)$$

где α^* – коэффициент, демпфирующий турбулентную вязкость в низкорейнольдсовых течениях:

$$\alpha^* = \alpha_\infty^* \left[\frac{\alpha_0^* + \text{Re}_T / R_k}{1 + \text{Re}_T / R_k} \right], \quad \text{Re}_T = \frac{k}{\nu \omega}, \quad (5.23)$$

$R_k = 6$, $\alpha_\infty^* = 1$, $\alpha_0^* = 0.09$. Заметим, что при $\text{Re}_T \rightarrow \infty$ из формулы (5.23) следует, что демпфирующий коэффициент равен единице.

Член генерации в уравнении для k (5.20) тот же, что и в $k - \varepsilon$ модели, а генерация G_ω строится по G_k , как и в стандартной так же $k - \varepsilon$ модели, но с демпфирующим множителем:

$$G_\omega = \alpha G_k \frac{\omega}{k}, \quad \alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \left[\frac{\alpha_0 + \text{Re}_T / R_\omega}{1 + \text{Re}_T / R_\omega} \right], \quad (5.24)$$

где $R_\omega = 2.95$, $\alpha_0 = 1/9$, $\alpha_\infty = 0.52$. Для высокорейнольдсовых течений $\alpha \rightarrow 1$.

Диссипация кинетической энергии турбулентности описывается следующим набором формул

$$\varepsilon_\omega = \beta^* f_\beta^* k \omega, \quad \beta^* = \beta_\infty^* \left[\frac{4/15 + (\text{Re}_T / R_\beta)^4}{1 + (\text{Re}_T / R_\beta)^4} \right], \quad f_\beta^* = \begin{cases} 1, & \chi_k \leq 0, \\ \frac{1 + 680 \chi_k^2}{1 + 400 \chi_k^2}, & \chi_k > 0. \end{cases} \quad (5.25)$$

Здесь

$$\chi_k \equiv \frac{1}{\omega^3} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}, \quad (5.26)$$

а набор эмпирических констант следующий: $\beta_\infty^* = 0.09$, $R_\beta = 8$.

Наконец, диссипация частоты диссипации моделируется следующим образом.

$$\varepsilon_k = \beta^* f_\beta \omega^2, \quad f_\beta = \frac{1 + 70\chi_\omega}{1 + 80\chi_\omega}, \quad \chi_\omega = \left| \frac{\Omega_{ij}\Omega_{jk}e_{ki}}{(\beta_\infty^*\omega)^3} \right| \quad (5.27)$$

Зависимость диссипативных коэффициентов от сложных комплексов χ появилась в последней версии модели Вилкокса и имеет существенное влияние для моделирования круглых и радиальных струй. Поскольку т.н. *перекрестные диффузионные члены* $\chi \sim 1/\omega^3$ малы в пограничном слое вблизи стенки, где ω велико, то их введение не ухудшает известных свойств предыдущей модели Вилкокса (1988), которая хорошо прогнозировала именно характеристики пограничных слоев. Зато в свободных сдвиговых течениях, струях и дальних вихревых следах эти параметры существенны и увеличивают диссипацию турбулентности при должном выборе коэффициентов. Таким образом, рассмотренная выше новая модель Вилкокса (1998) представляется более точной для расчета сложных типов течений.

5.3.2. SST $k - \omega$ модель Ментера

Название происходит из того, что в ней определение турбулентной вязкости модифицируется в каждой точке так, чтобы корректно описывался перенос сдвиговых напряжений τ_{ij} . Был введен специальный ограничитель, обеспечивающий в пограничном слое переход к известной формуле Брэдли, согласно которой турбулентное напряжение трения пропорционально кинетической энергии турбулентности $-\overline{u'_i u'_j} = 0.31k$, а вихревая вязкость равна $\nu_T = 0.31k/\Omega$. Этот прием, получивший название SST (*shear stress transport*), в дальнейшем с успехом применялся и в других моделях турбулентности с двумя уравнениями, например, в модели Чена (1997). В связи с тем, что модель

автоматически видоизменяется в разных областях течения, ее еще называют *зональной* моделью Ментера.

Эта модель устроена так, что является комбинацией $k - \varepsilon$ и стандартной $k - \omega$ модели и поэтому использует их самые сильные стороны: $k - \varepsilon$ -модель лучше описывает течения вдали от стенок, а стандартная $k - \omega$ модель имеет преимущество в пограничных турбулентных слоях. Придумана специальная функция F , обеспечивающая символическую комбинацию моделей вида « $SST = F(k - \varepsilon) + (1 - F)(k - \omega)$ ».

Уравнения переноса для k записывается в стандартной форме

$$\frac{\partial k}{\partial t} + u_i \frac{\partial k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_i} \right] + G_k - \varepsilon_k, \quad G_k = \nu_T e^2. \quad (5.28)$$

а эволюционное уравнение для ω содержит дополнительный член D_ω с перекрестной диффузией:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(\nu + \frac{\nu_T}{\sigma_\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right] + G_\omega - \varepsilon_\omega + D_\omega. \quad (5.29)$$

Турбулентная кинематическая вязкость ν_T и числа Прандтля σ_k, σ_ω в уравнениях (5.28), (5.29) определяются с помощью формул

$$\nu_T = \frac{1}{\max \left[\frac{1}{\alpha^*}, \frac{\Omega F_2}{0.31\omega} \right]} \frac{k}{\omega}; \quad (5.30)$$

$$\sigma_k = \frac{1}{F_1 / \sigma_{k1} + (1 - F_1) / \sigma_{k2}}, \quad \sigma_\omega = \frac{1}{F_1 / \sigma_{\omega1} + (1 - F_1) / \sigma_{\omega2}};$$

в которых $\sigma_{k1} = 1.176, \sigma_{k1} = 1.0, \sigma_{\omega1} = 2.0, \sigma_{\omega2} = 1.168; \alpha^*$ вычисляется по (5.23), $\Omega = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ji}}$ – интенсивность завихренности среднего течения (тензор Ω_{ji} определен в конце п. 5.2.3).

Комментарий к формуле вихревой вязкости (5.30). Пусть $F_2 = 1, \alpha^* = 1$. В областях интенсивной завихренности, где $\Omega > 0.31\omega$, например в пограничных слоях, приходим к формуле Брэдшоу $\nu_T = 0.31k/\Omega$. Вдали от стенок, где

завихренность может становиться малой, применение этой формулы привело бы к бесконечным значениям вихревой вязкости, но формула сконструирована так, что в основном потоке работает соотношение $\nu_T = \alpha^* k / \omega$, принятое в стандартной $k - \omega$ модели (5.22). Функция F_2 делает этот переход плавным.

Стыковочные функции F_1, F_2 определяются как гиперболический тангенс

$$\begin{aligned} F_1 &= \text{th } \Phi_1^4, \quad F_2 = \text{th } \Phi_2^2, \\ \Phi_1 &= \min \left[\max \left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\nu}{\omega y^2} \right), \frac{4k}{\sigma_{\omega 2} D_{\omega}^+ y^2} \right], \\ \Phi_2 &= \max \left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega y}, \frac{500\nu}{\omega y^2} \right), \\ D_{\omega}^+ &= \max \left(\frac{2}{\sigma_{\omega 2} \omega} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial k}{\partial x_i}, 10^{-20} \right), \end{aligned} \quad (5.31)$$

где y – расстояние до ближайшей стенки.

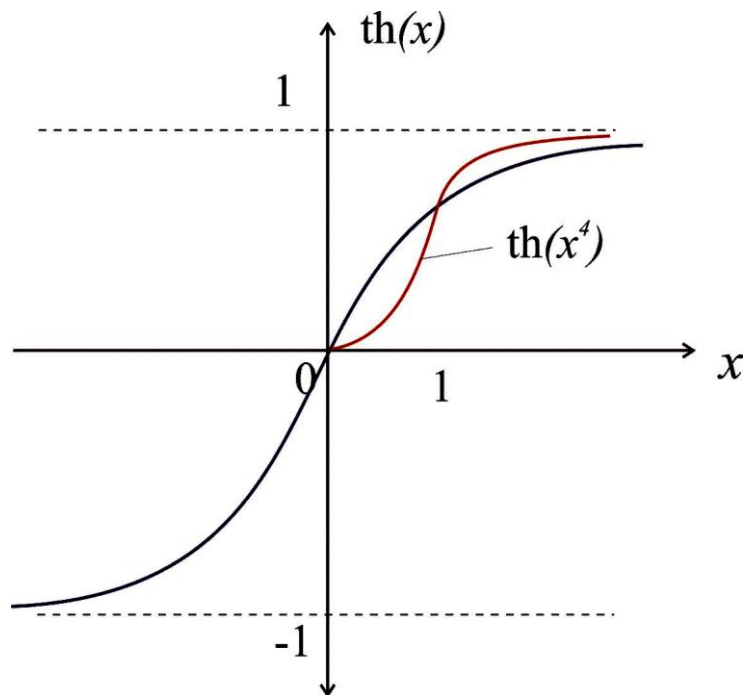


Рис. 5.1. Гиперболический тангенс

Вспоминая определение Колмогорова $\omega \sim \sqrt{k}/l$, легко видеть, что аргументы Φ_1, Φ_2 стремятся к нулю по мере удаления от твердой стенки.

Рассмотрим вначале Φ_2 , который управляет вихревой вязкостью (5.30). Внутри пограничного слоя первый член под знаком \max превращается в l/y и представляет отношение масштаба турбулентности к расстоянию от стенки; он равен ~ 2.5 в зоне логарифмического профиля скорости и исчезает при приближении к границе слоя. Второй член становится доминирующим в вязком подслое и исключает там использование двухпараметрической диссипативной модели турбулентности (при этом ω ведет себя как $1/y^2$ около стенки и пропорционально $1/y$ в логарифмической зоне, так что комплекс $1/(\omega y^2)$ является константой вблизи стенки и стремится к нулю в логарифмической зоне. Итак, функция $F_2(\Phi_2)$ сконструирована так, что определение вихревой вязкости плавно меняется от вязкого ламинарного подслоя к турбулентному пограничному слою и далее в область свободной турбулентности.

Аргумент Φ_1 (и функция F_1) устроены так, чтобы вдали от стенок на внешней границе пограничного слоя, где первый член под знаком \min исчезает, так же как и Φ_2 , использовалась стандартная высокорейнольдсовая диссипативная двухпараметрическая $k - \varepsilon$ модель.

Член генерации диссипации в уравнении (5.29) задается формулой

$$G_\omega = \frac{\alpha}{\nu_T} G_k, \quad \alpha = \frac{\alpha_\infty}{\alpha^*} \left[\frac{\alpha_0 + \text{Re}_T / R_\omega}{1 + \text{Re}_T / R_\omega} \right], \quad (5.32)$$

причем параметр α_∞ в модели SST, в отличие от стандартной $k - \omega$ модели, не константа $= 0.52$, а взвешенная величина

$$\alpha_\infty = F_1 \alpha_{\infty 1} + (1 - F_1) \alpha_{\infty 2},$$

где

$$\alpha_{\infty 1} = \frac{\beta_{i1}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega 1} \sqrt{\beta_\infty^*}}, \quad \alpha_{\infty 2} = \frac{\beta_{i2}}{\beta_\infty^*} - \frac{\kappa^2}{\sigma_{\omega 2} \sqrt{\beta_\infty^*}},$$

$\kappa = 0.41$ – постоянная Кармана в формуле пути смешения, $\beta_{i1} = 0.075$, $\beta_{i2} = 0.0828$.

Член диссипации k в уравнении (5.28) задается формулой, отличной от формулы (5.25) стандартной модели:

$$\varepsilon_k = \beta^* k \omega, \quad \beta^* = \beta_\infty^* \left[\frac{4/15 + (\text{Re}_T / R_\beta)^4}{1 + (\text{Re}_T / R_\beta)^4} \right], \quad (5.33)$$

хотя константы те же.

Член диссипации ω в уравнении (5.29) имеет вид

$$\varepsilon_\omega = \beta \omega^2, \quad \beta = F_1 \beta_{i1} + (1 - F_1) \beta_{i2}. \quad (5.34)$$

Наконец, член *поперечной диффузии* в уравнении (5.29) задается в модели SST формулой

$$D_\omega = \frac{2(1 - F_1)}{\omega} \sigma_{\omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \frac{\partial k}{\partial x_i}. \quad (5.35)$$

Этот член поперечной диффузии появился для того, чтобы состыковать стандартные $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ в единую модель переноса сдвиговых напряжений SST Ментера.

6. Модели турбулентной вязкости

В разделах 4, 5 мы рассмотрели способы замыкания уравнений Рейнольдса с помощью дифференциальных уравнений для турбулентных пульсаций. При этом во всех случаях тем или иным способом вводилась турбулентная (или вихревая) вязкость, которая зависела от решения этих уравнений. Однако уравнения для турбулентных пульсаций (и в частности, уравнения для кинетической энергии пульсаций и ее диссипации) – не единственная основа, используемая в вычислительной практике моделирования турбулентности. В данном разделе мы рассмотрим некоторые альтернативные подходы определения вихревой вязкости.

6.1. Простейшая модель с постоянной вихревой вязкостью

Простейший и самый грубый подход к моделированию турбулентных течений состоит в том, чтобы выразить турбулентные напряжения через скорости деформаций осредненного течения по формуле (3.6), либо, в более общем случае, с помощью формулы Буссинеска

$$\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (6.1)$$

введенной по аналогии с выражением для вязких напряжений, принятом для несжимаемой жидкости. Если коэффициенты μ_T (турбулентная вязкость) и $k = \overline{u'_i u'_i} / 2$ (кинетическая энергия турбулентных пульсаций) принять *постоянными*, то после подстановки (6.1) уравнения Рейнольдса (3.5) получаем 3 простейших уравнения для средних скоростей турбулентного течения (черта над средними опущена)

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\nu + \nu_T) \Delta u_i + g_i. \quad (6.2)$$

Коэффициент кинематической турбулентной вязкости $\nu_T \equiv \mu_T / \rho$ обычно значительно больше, чем молекулярная кинематическая вязкость ν , поэтому

последним коэффициентом в (6.2) можно пренебречь. Так, например, для задач описания крупномасштабных течений в атмосфере принимают значения турбулентной вязкости в диапазоне $10^2 \div 10^4 \text{ м}^2/\text{с}$, в то время как молекулярная кинематическая вязкость воздуха равна $2 \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, т.е. различие составляет 7–9 порядков!

Несмотря на чрезвычайную грубость предположения $\nu_T = \text{const}$, уравнение (6.2) в некоторых случаях правдоподобно описывать крупномасштабную структуру турбулентного течения. Полученное решение представляет в этом случае «ламинарный аналог» реального течения, так как получаемые профили скорости соответствуют ламинарным, а не турбулентным режимам течения.

6.2. Модель пути смешения Прандтля. Логарифмический профиль скорости

Многие простые схемы замыкания опираются на идею Прандтля (1825) о длине пути смешения – характеристике потока, под которой понимают расстояние, проходимое жидкой частицей поперек потока, прежде чем происходит ее смешение (т.е. выравнивание скорости) с окружающей жидкостью. Понятие пути смешения исходит из аналогии между турбулентным перемешиванием и молекулярным переносом (броуновским движением), когда характеристики молекул остаются постоянными в промежутках между соударениями (т.н. длина свободного пробега). В турбулентном течении роль молекул играют «жидкие комки», т.е. вихри.

Модель Прандтля применяется обычно применяется к простым потокам, когда средняя скорость имеет одну компоненту (пограничные слои, трубы, каналы). Пусть это скорость \bar{u} в направлении x , а поперечная координата y отсчитывается от стенки. Примем два следующих предположения.

1. Логично предположить, что пульсации скорости пропорциональны градиенту средней скорости, т.е.

$$u' \sim l |\partial \bar{u} / \partial y|. \quad (6.3)$$

Коэффициент пропорциональности l из соображений размерности должен измеряться в метрах.

2. Турбулентная вязкость тем больше, чем больше уровень пульсаций:

$\nu_T \sim l |u'|$, причем коэффициент пропорциональности опять выбран из соображений размерности.

Суммируя предположения 1 и 2, получаем формулу Прандтля

$$\nu_T \sim l^2 |\partial \bar{u} / \partial y|, \quad (6.4)$$

в которой l – длина пути смешения. Вообще-то, можно было бы ограничиться первым предположением, поскольку по определению $\tau / \rho \sim u'^2 \sim \nu_T \partial \bar{u} / \partial y$, то из (6.3) сразу получаем (6.4).

Длина пути смешения l в разных течениях задается по-разному. Например, в свободном сдвиговом слое шириной d полагают $l = Cd$, $C \approx 0.1$. Для течения жидкости в канале или трубе $l = Cy\sqrt{1 - y/d}$ (d – глубина открытого канала, полуширина закрытого канала или радиус трубы).

Для турбулентного пограничного слоя (ТПС) экспериментально найдена зависимость $l = \kappa y$, $\kappa \approx 0.41$ – постоянная Прандтля. Более точные результаты получаются при введении демпфирующего коэффициента Ван-Дриста $l = \kappa y [1 - \exp(-y/A)]$.

Универсальный профиль скорости в ТПС получается из уравнения с нулевым градиентом давления. Мы учитываем, что пограничный слой имеет составную структуру: тонкий ламинарный подслой $0 < y < \delta_l$ и собственно турбулентный слой. Уравнение импульса в ТПС имеет вид

$$\frac{d}{dy} \left(\frac{\tau}{\rho} \right) = \frac{d}{dy} \left(\nu_T \frac{d\bar{u}}{dy} \right) = 0. \quad (6.5)$$

Интегрируя это уравнение по y от δ_l до y и обозначая через $\tau_w = \tau(\delta_l)$ напряжение сдвига на границе вязкого подслоя, имеем

$$\nu_T \frac{d\bar{u}}{dy} = \frac{\tau_w}{\rho} \quad (6.6)$$

Если подставить сюда выражение (6.4) при $l = \kappa y$, получим

$$\kappa^2 y^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dy} \right)^2 = \frac{\tau_w}{\rho}, \quad \frac{d\bar{u}}{dy} = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \frac{1}{\kappa y}. \quad (6.7)$$

Величина $u_\tau = \sqrt{\tau_w / \rho}$ называется *динамической скоростью*. Обозначим через y_0 характерный линейный размер и введем безразмерные переменные $u^+ = \bar{u} / u_\tau$, $y^+ = y / y_0$ и перепишем (6.7) в этих переменных. Будем иметь $du^+ / dy^+ = 1 / (\kappa y^+)$, откуда следует т.н. логарифмический профиль скорости в ТПС

$$u^+(y^+) = u_0 + \frac{1}{\kappa} \ln y^+. \quad (6.8)$$

Константа интегрирования u_0 , согласно экспериментальным данным, равна $5.0 \div 5.2$. Чтобы придать безразмерной координате y^+ реальный смысл, надо определить масштаб y_0 . Это можно сделать, рассмотрев течение в вязком ламинарном подслое и приняв, что касательное напряжение в нем постоянно и равно τ_w , а скорость на границе имеет порядок u_τ . Тогда из равенства $\nu du / dy \sim \nu u_\tau / y_0 = \tau_w / \rho$, в которое входит молекулярная кинематическая вязкость ν , находим

$$y_0 = \frac{\rho \nu u_\tau}{\tau_w} = \frac{\nu}{\sqrt{\tau_w / \rho}} = \frac{\nu}{u_\tau} \quad (6.9)$$

Из определения следует, что y_0 имеет порядок толщины ламинарного подслоя δ_l . Понятно, что в действительности переход от вязкого подслоя к ТПС происходит плавно, и полученные результаты верны на некотором удалении от переходной зоны. Экспериментально установлено, что логарифмический

профиль скорости наблюдается в пределах $50 < y^+ < 0.2\delta$, где δ – толщина ТПС.

Для внешней области (т.н. слой следа) $0.2\delta < y^+ < \delta$ характерно гораздо более медленное изменение гидродинамических параметров. В качестве масштаба скорости в этой области принято использовать скорость на внешней границе пограничного слоя u_e , а в качестве линейного масштаба – толщину δ (радиус трубы). В ряде моделей турбулентная вязкость во внешней области ТПС предполагается постоянной величиной. Клаузер (1956) предложил для течений в следе формулу $\nu_T = \alpha u_e \delta$, где $\alpha = 0.0168$ – эмпирический коэффициент.

На рис.6.2.1 показан типичный профиль скорости в ТПС, развивающемся на плоской пластине без градиента давления.

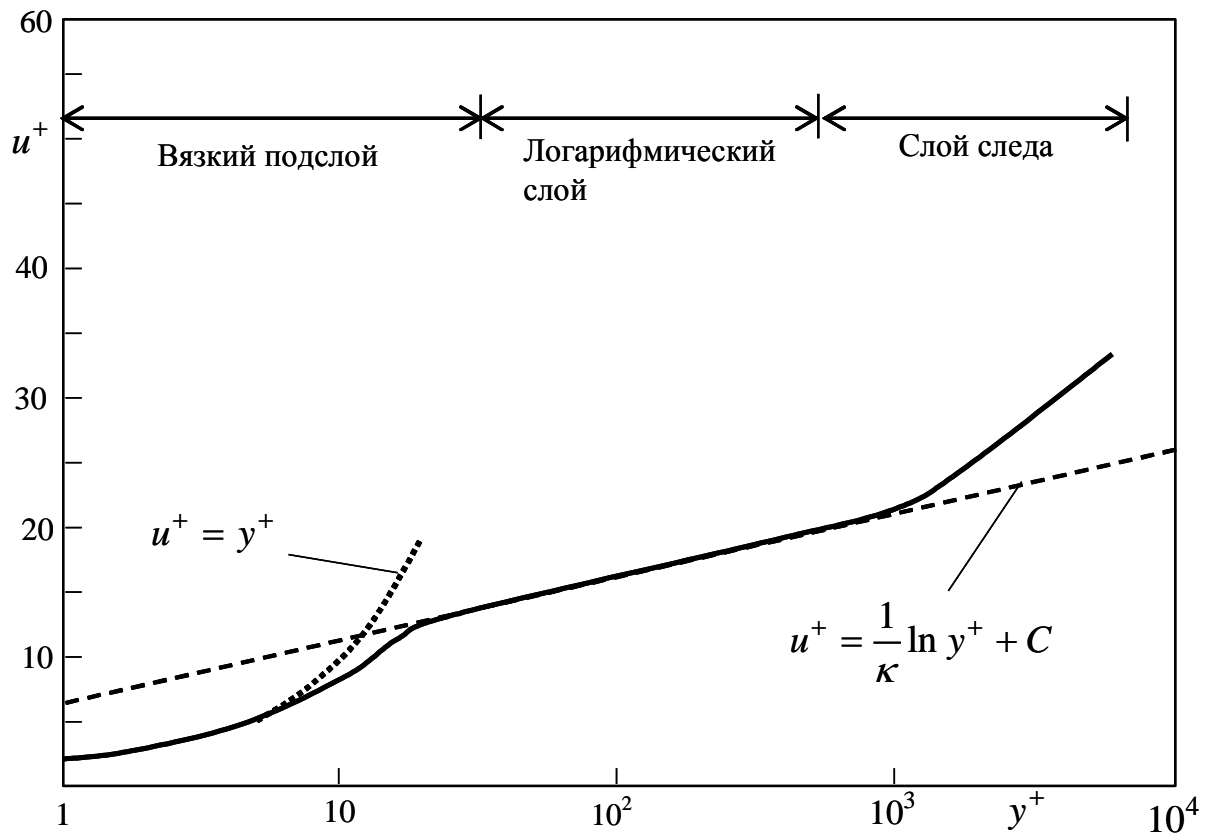


Рис. 6.2.1. Три участка разбиения профиля: вязкий подслой, логарифмический слой и внешний слой (слой следа)

Пример расчета. Объединим полученные результаты для внутренней части слоя (ТПС + ламинарный подслой) и в предположении (подтверждаемом практикой), что суммарное касательное напряжение постоянно поперек слоя и равно $\tau_w = \rho u_\tau^2$. Получим уравнение с граничным условием прилипания на стенке

$$(\nu + \nu_T) \frac{du}{dy} = \nu \frac{du}{dy} + (\kappa y)^2 \left(\frac{du}{dy} \right)^2 = u_\tau^2, \quad y > 0; \quad u(0) = 0.$$

Перейдем к безразмерным величинам $y^+ = u_\tau y / \nu$, $u^+ = u / u_\tau$ и получим квадратное уравнение относительно производной $z = du^+ / dy^+$:

$z + (\kappa y^+)^2 z^2 = 1$, решение которого имеет вид

$z = \left(-1 + \sqrt{1 + 4(\kappa y^+)^2} \right) / \left(2(\kappa y^+)^2 \right)$. Умножив числитель и знаменатель на $1 + \sqrt{1 + 4(\kappa y^+)^2}$, получим

$$\frac{du^+}{dy^+} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4(\kappa y^+)^2}}, \quad u(0) = 0. \quad (6.10)$$

Эту задачу будем интегрировать численно на отрезке $[0, Y]$, $Y = 1000$. Поскольку в большей части слоя мы ожидаем логарифмический профиль скорости, удобно перейти к логарифмической координате

$$x = \lg y^+, \quad y^+ = 10^x, \quad dy = 10^x \ln 10 dx.$$

Задача (6.2.8) принимает вид

$$\frac{du}{dx} = f(x) \equiv \frac{2 \cdot 10^x \ln 10}{1 + \sqrt{1 + 4(\kappa \cdot 10^x)^2}}, \quad x \in (0, X = 3]; \quad u(0) = 0. \quad (6.11)$$

Разностная схема 2-го порядка аппроксимации имеет вид

$$u_0 = 0; \quad u_i = u_{i-1} + hf(x_i - h/2), \quad i = 0..N, \quad h = 3/N.$$

Решение задачи показано на рисунке 6.4. Представлены два случая: решение уравнения (6.11), в котором длина пути смещения определена согласно формуле Кармана $l = \kappa y$, и решение аналогичной задачи с демпфирующим

коэффициентом Ван-Дрифта $l = \kappa y(1 - \exp(-y/A))$. Заметно существенное отличие профилей скорости.

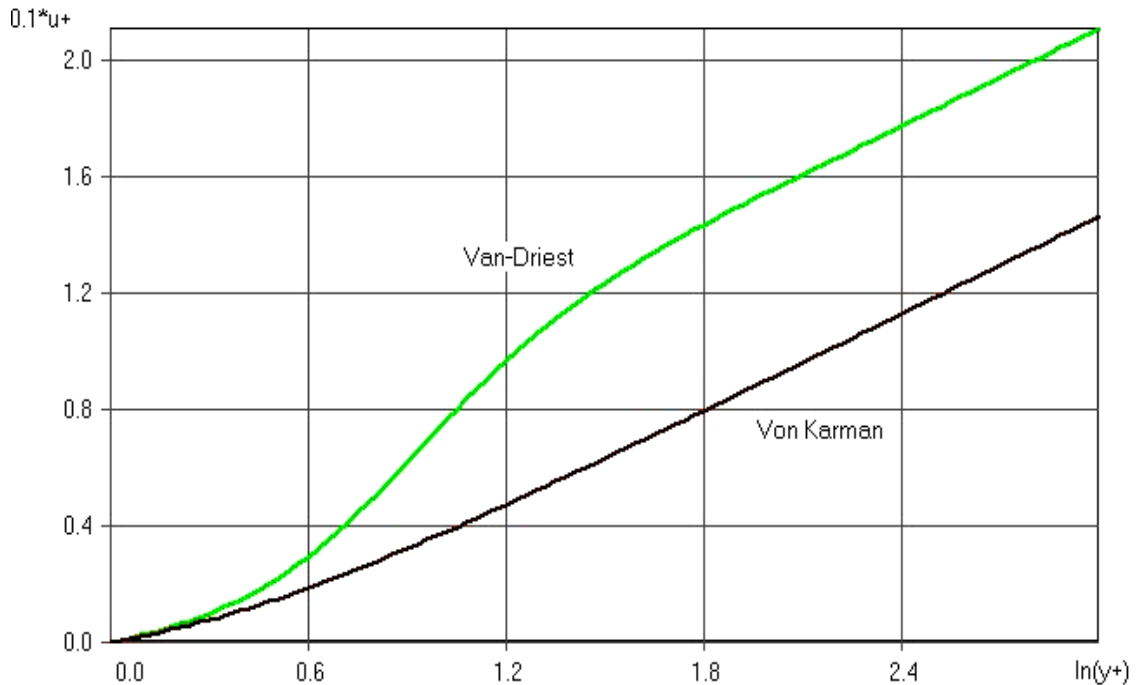


Рис. 6.2.2. Универсальный профиль средней скорости во внутренней части турбулентного пограничного слоя при определении длины пути смешения по Прандтлю и Ван-Дристу

6.3. Модель переноса вихревой вязкости Ни – Коважного

Эта модель (1969) основана на эволюционном уравнении общего вида для турбулентной вязкости

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_T}{\partial t} + u \frac{\partial v_T}{\partial x} + v \frac{\partial v_T}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} D_v + G_v - \varepsilon_v; \\ D_v &= (\nu + v_T) \frac{\partial v_T}{\partial y}; \quad G_v = A v_T \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|; \quad \varepsilon_v = B \frac{v_T (\nu + v_T)}{l^2} \end{aligned} \quad (6.12)$$

и применима к течениям в плоском (x, y) пограничном слое (именно поэтому в уравнении отсутствует диффузия в направлении течения x). Диффузионный поток вихревой вязкости D записан в предположении, что коэффициент диффузии пропорционален полной вязкости (такое поведение называется

самодиффузией). Член генерации G_v описывает увеличение турбулентной вязкости за счет макроскопических сдвиговых деформаций (эмпирический коэффициент $A \sim 1$), а скорость диссипации (деструкция) этой величины также пропорциональна полной вязкости и обратно пропорциональна линейному размеру l , который можно трактовать как масштаб турбулентности.

Секундов (1971) развил подобную модель, которая в версии 1992 г. известна как модель Гуляева – Козлова – Секундова или модель « $\nu_T - 92$ ». Эта модель обеспечивает вполне удовлетворительное описание не только большинства канонических сдвиговых течений (плоская и осесимметричная струя, слои смешения в несжимаемой и сжимаемой жидкости, пограничный слой на плоской пластине при отсутствии и при наличии шероховатости поверхности и др.), но и ряда более сложных течений, представляющих практический интерес.

Применительно к стационарному турбулентному пограничному слою (ТПС) модифицированная модель переноса вихревой вязкости записывается в следующем виде:

$$u \frac{\partial \nu_T}{\partial x} + v \frac{\partial \nu_T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} D_v + G_v - \varepsilon_v;$$

$$D_v = (\nu + 2\nu_T) \frac{\partial \nu_T}{\partial y}; \quad G_v = A \nu_T \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right|; \quad \varepsilon_v = B \frac{\nu_T (\nu + 0.06 \nu_T)}{l^2}; \quad (6.13)$$

$$A = 0.2 \frac{\nu_T^2 + 11\nu_T + 13\nu^2}{\nu_T^2 - 11\nu_T + 65\nu^2}, \quad B = 50, \quad l^2 = d^2 + 0.4dh + 0.004h^2.$$

здесь d – расстояние до стенки, h – масштаб шероховатости обтекаемой поверхности.

6.4. Однопараметрическая модель Спаларта-Аллмараса

Это современная (1996), но сравнительно простая однопараметрическая модель турбулентности, содержащее уравнение переноса модифицированной вихревой вязкости. В этой модели не требуется задавать масштаб

турбулентности. Модель Спаларта – Аллмараса (SA) была сконструирована специально для аэрокосмических приложений, включая течения, ограниченные твердыми стенками, и показала хорошие результаты для пограничных слоев с положительным градиентом давления. Очень хорошее совпадение с экспериментом получено на этой модели для обтекания крыловых профилей и в отрывных течениях. Она также хорошо зарекомендовала себя при расчетах турбомашин.

В начальной формулировке (1992) модель SA была предназначена для расчета низкорейнольдсовых течений и требовала, чтобы расчетная сетка была достаточно мелкой, чтобы описать процессы в пограничных слоях. Однако в современном виде она использует для этих целей т.н. пристеночные функции, поэтому требования к разрешению сетки в окрестности стенки значительно ослаблены. Более того, градиенты искомой функции в данной модели значительно меньше, чем в $k-\varepsilon$ и $k-\omega$ моделях, что делает ее более устойчивой к ошибкам, возникающим при расчетах на неструктурированных сетках.

Эволюционное уравнение записывается относительно величины $\tilde{\nu}$, которая всюду, за исключением пристеночных областей, в которых существенны силы молекулярной вязкости, идентична турбулентной кинематической вязкости.

$$\frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial t} + u_i \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\nu + \tilde{\nu}}{\sigma_\nu} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \right) + C_{b2} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} \frac{\partial \tilde{\nu}}{\partial x_i} + G_{\tilde{\nu}} - \varepsilon_{\tilde{\nu}} \quad (6.14)$$

Кинематическая вихревая вязкость связана с $\tilde{\nu}$ с помощью демпфирующей функции $f_{v1}(\chi)$:

$$\nu_T = f_{v1} \tilde{\nu}, \quad f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad \chi = \frac{\tilde{\nu}}{\nu}. \quad (6.15)$$

Член генерации определяется следующим образом:

$$G_{\tilde{v}} = C_{b1} \tilde{S} \tilde{v}, \quad \tilde{S} = S + \frac{\nu}{\kappa^2 d^2} f_{v2}(\chi), \quad f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}; \quad (6.16)$$

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial u_j} - \frac{\partial u_j}{\partial u_i} \right).$$

Здесь d – расстояние до стенки, $\kappa = 0.42$ – константа Кармана, S – интенсивность завихренности (инвариант тензора вращения), C_{b1}, C_{b2}, C_{v1} – константы модели SA.

Скорость диссипации величины \tilde{v} задается формулами

$$\varepsilon_{\tilde{v}} = C_{w1} f_{w1}(g) \left(\frac{\tilde{v}}{d} \right)^2, \quad f_{w1} = g \left(\frac{1 + C_{w3}^6}{g + C_{w3}^6} \right)^{1/6}, \quad (6.17)$$

$$g = r + C_{w2} (r^6 - r), \quad r = \frac{\tilde{v}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}.$$

где константы имеют следующие значения:

$$C_{b1} = 0.1335, C_{b2} = 0.622, \sigma_{\tilde{v}} = 2/3, C_{v1} = 7.1, \quad (6.18)$$

$$C_{w1} = \frac{C_{b1}}{\kappa^2} + \frac{1 + C_{b2}}{\sigma_{\tilde{v}}}, \quad C_{w2} = 0.3, \quad C_{w3} = 2.0.$$

В заключение приведем ряд примеров по тестированию модели SA.

1) *Течения в канале с градиентом давления.* В табл. 6.1 сведены результаты отклонений рассчитанных с помощью SA и измеренных коэффициентов трения в эталонных градиентных течениях.

Таблица 6.1

Градиент давления	Течения	Спаларт-Аллмарас
Отрицательный	1400, 1300, 2700, 6300	1.4%
Малый положительный	1100, 2100, 2500, 4800	9.9%
Умеренный положительный	2400, 2600, 3300, 4500	11.0%
Сильный положительный	0141, 1200, 4400	7.2%
В целом	-	7.4%

2) *Обтекании обращенной назад ступеньки.* На рис. 6.1 показана схема одного из экспериментов, выполненных Драйвером и Сигмюллером (1985). На рис. 6.2 сравниваются расчетные и измеренные коэффициенты трения вдоль нижней стенки канала при нулевом отклонении верхней стенки от направления

потока. Модель SA предсказывает длину отрывной зоны, измеренную в долях высоты ступеньки, равной 6.1. Он лишь на 2% отличается от экспериментальной величины $6.2H$. При угле отклонения 6° модель предсказывает длину циркуляционной зоны в $8.6H$, что на 6% отличается от измеренной величины $8.1H$.

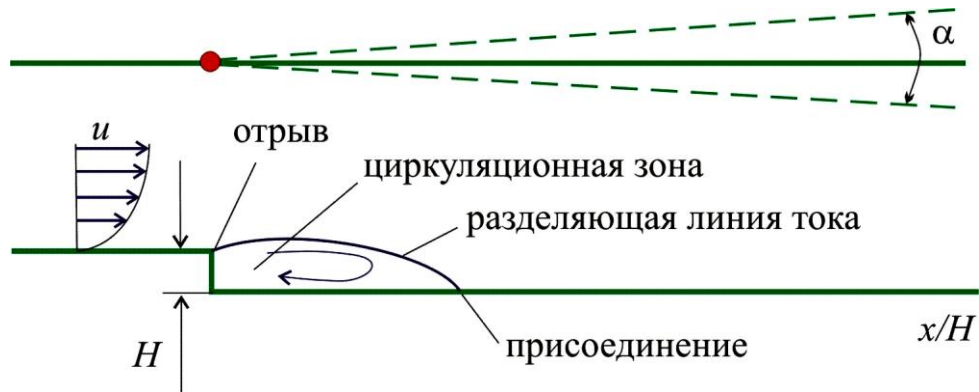


Рис. 6.1. Схема эталонного течения обтекания обратного уступа

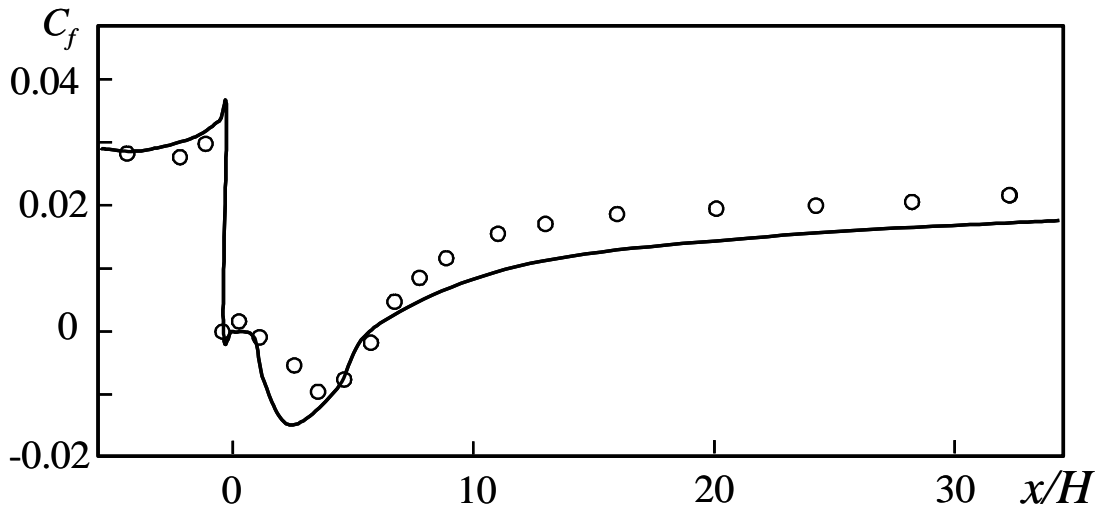


Рис. 6.2. Коэффициент трения при обтекании обратного уступа

Таким образом, модель SA является удовлетворительной для многих инженерных приложений. В особенности она применима для расчета обтекания профилей и крыльев, для которых она была калибрована. В то же время, результаты ее применения для струйных задач менее точны. В частности, прогнозы коэффициента расширения осесимметричной затопленной струи по указанной модели вдвое отличаются от данных измерений.

7. Моделирование крупных вихрей (LES)

Теоретические методы моделирования турбулентных потоков, применяемые для расчета сложных течений, можно разделить на три категории.

1) Наиболее общим и концептуально наиболее простым методом является метод прямого численного моделирования турбулентности (DNS – Direct Numerical Simulation). В методе считается, и это подтверждено многочисленными расчетами, что уравнение Навье—Стокса является универсальным уравнением, способным описать состояние жидкости как в ламинарном, так и в турбулентном режимах движения. На начальном этапе решения задачи генерируются малые начальные возмущения, которые быстро растут, и в численном решении, как и в эксперименте, наблюдается переход от слоистого к сложному интенсивно перемешивающемуся течению. Таким образом, наблюдаемое в природе и кажущееся нам хаотическим турбулентное движение жидкости моделируется детерминированными методами, позволяющими, в принципе, описать весь процесс сложного взаимодействия турбулентных вихрей. Серьезным ограничением метода является его трудоемкость. Разрешение применяемых в численном методе сеток должно быть настолько высоким, чтобы учесть весь спектр турбулентных вихрей, начиная от крупных, размеры которых сравнимы с макроразмерами течения, и заканчивая микровихрями, в которых происходит диссипация турбулентной энергии. Чем больше число Рейнольдса, тем шире спектр вихрей, подлежащих разрешению. Поэтому возможности метода прямого численного моделирования ограничиваются сегодня расчетом на суперкомпьютерах течений с числом Рейнольдса порядка 10^4 . В ближайшие десятилетия сфера применения метода DNS будет ограничена задачами исследования природы и структуры турбулентных течений, механизма генерации и диссипации турбулентности и вряд ли станет рабочим инструментом в инженерных приложениях.

2) В последнее время в практике инженерных расчетов все чаще используется метод крупных вихрей (LES). Основная идея LES (Large Eddy Simulation) состоит в частичном осреднении (фильтрации) уравнений Навье-Стокса так, что крупные энергосодержащие вихри с размерами, начиная от макроразмеров потока до вихрей, соответствующих инерционному интервалу рассчитываются как в методе DNS, а влияние мелких диссипативных вихрей учитывается в уравнениях движения вязкой жидкости дополнительными напряжениями. Эти напряжения рассчитываются по простым зависимостям, полученным из теории локально изотропной турбулентности. В рамках LES уже «не видны» мелкие вихри, но крупные, наиболее важные с энергетической точки зрения вихри получаются прямым расчетом. Хотя в методе LES, по сравнению с DNS, уже нет необходимости рассчитывать все вихри, расчеты с помощью LES в настоящее время все еще остаются очень трудоемкими и дорогостоящими. Широкое практическое внедрение метода можно ожидать в ближайшее десятилетие, хотя уже сегодня LES включен, например, в пакет FLUENT и может быть использован для решения простых инженерных задач. В целях снижения трудоемкости расчетов разрабатываются различные упрощенные варианты метода LES, наиболее перспективным из которых является метод отсоединенных вихрей DES (Detached Eddy Simulation), предназначенный для расчета отрывных течений. Основная идея метода состоит в разделении потока на две зоны: пристенную область и зону отрывного течения. В пристенной области применяется подход Рейнольдса, а в отрывной зоне используется метод LES. Для перехода от одной расчетной модели к другой созданы эффективные процедуры автоматического переключения метода расчета турбулентных напряжений и изменения разностных схем.

3) Осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса (RANSE – Reynolds Averaged Navier-Stokes Equations) и их замыкания с помощью полуэмпирических моделей турбулентности являются в настоящее время наиболее распространенным методом моделирования турбулентных течений. По

сравнению с методом LES Рейнольдсов подход отличается более высокой степенью огрубления решения. В нем рассчитываются турбулентные вихри сравнимые по размерам с макроразмерами течения, а вклад мелких вихрей учитывается с помощью полуэмпирических моделей, привлекаемых для моделирования турбулентных напряжений.

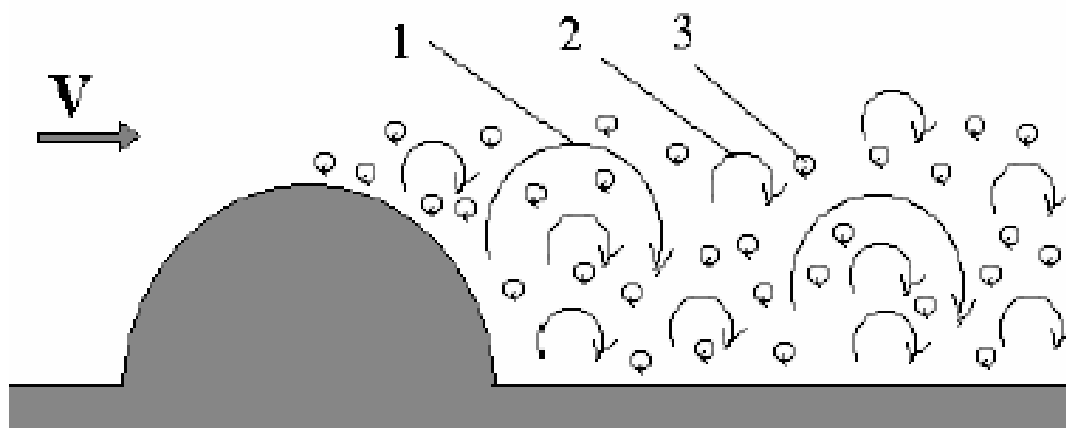


Рис. 7.1 Схематическое представление турбулентных вихрей, моделируемых различными способами: 1- Вихри, моделируемые всеми методами, 2 - крупные вихри, моделируемые только в LES и DNS, 3 - мельчайшие вихри, моделируемые только в рамках DNS метода.

На рис. 7.1 схематически представлены вихревые структуры, получающиеся в результате моделирования турбулентного течения различными методами. Если вычислять скорость за плохообтекаемым телом указанными выше тремя методами, то кривая, соответствующая DNS методу, содержит турбулентные пульсации, соответствующие прохождению через точку пространства последовательности вихрей различного масштаба (рис. 7.2). Поскольку в методе LES учитываются только крупные вихри, то кривая становится более гладкой. Для Рейнольдсова подхода, в котором моделируются только средние поля скорости, характерна плавная сглаженная кривая.

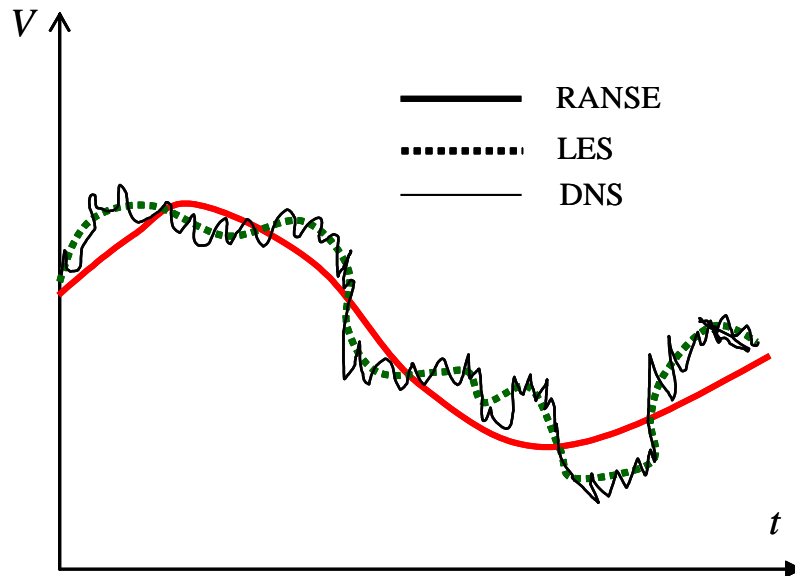


Рис. 7.2. Зависимость скорости от времени, рассчитанная тремя различными способами

7.1. Пространственные фильтры и их свойства

Любая физическая величина u в методе LES представляется в виде суммы двух слагаемых: среднего, соответствующего вкладу крупных вихрей, разрешаемых на сетке с пространственным шагом h , и малого, соответствующего вихрям с масштабами $l < h$:

$$u = \tilde{u} + u' \quad (7.1)$$

Разделение движения на крупномасштабное и мелкомасштабное достигается в методе крупных вихрей посредством пространственного осреднения вида

$$\tilde{u}(x) = \int_{|\xi| < h} u(x + \xi) F_h(\xi) d\xi \quad (7.2)$$

Функция $F_h(\xi)$ называется *фильтром*, причем индекс h указывает максимальный масштаб пульсаций, которые этот фильтр пропускает. Простейшим примером такого фильтра в одномерном случае может служить ступенчатая функция

$$F_h(x) = \frac{1}{2h} \begin{cases} 1, & |x| < h; \\ 0, & |x| \geq h \end{cases} \quad (7.3)$$

Множитель $1/2h$ обеспечивает нормировку фильтрующей функции

$$\int_{-h}^h F_h(x) dx = 1, \quad (7.4)$$

которая обеспечивает очевидное равенство $\tilde{c} = c$ при $c = const$.

На рис. 7.3 показан пример фильтрации «пульсирующей» функции

$$u = \ln(1 + 3x) + a_1 \sin(2\pi\omega_1 x) + a_2 \cos(2\pi\omega_2 x) + a_3 \sin(2\pi\omega_3 x),$$

$$a_1 = 0.3, \omega_1 = 2; \quad a_2 = 0.1, \omega_2 = 10; \quad a_3 = 0.05, \omega_3 = 30$$

фильтром (7.3) с различными масштабами h .

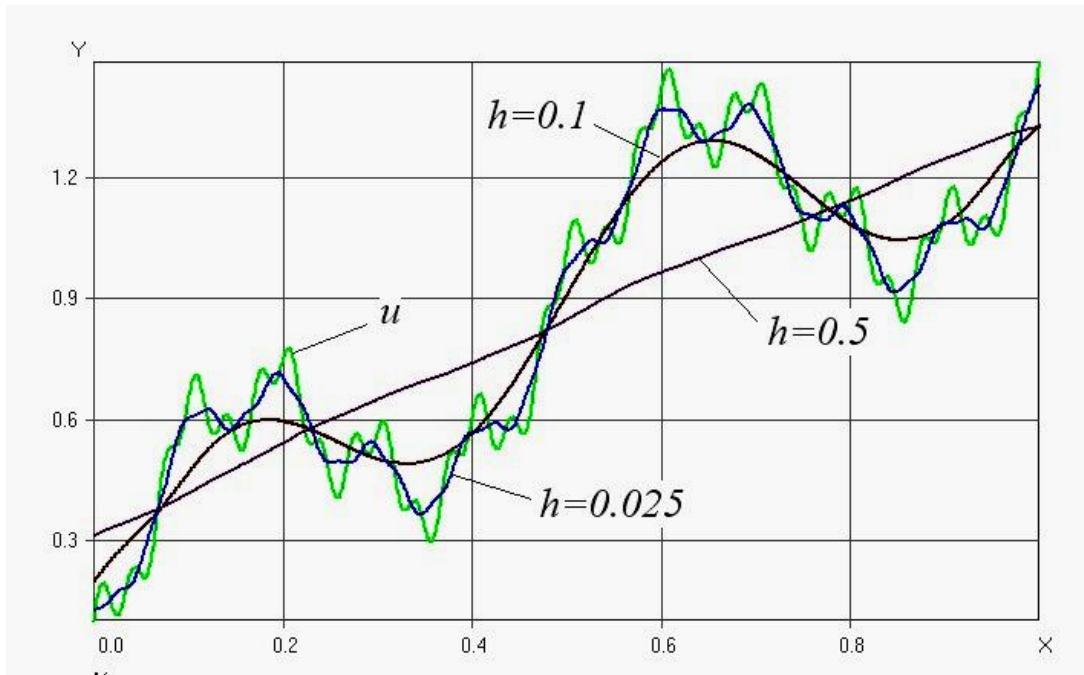


Рис. 7.3. Фильтрация «случайной» функции $u(x)$ с различными масштабами осреднения.

Наряду со ступенчатым в LES, используются и другие фильтры, например гауссовский фильтр $F(x) = a \exp(-kx^2)$.

Отметим свойства оператора фильтрации.

$$\begin{aligned} f &= \tilde{f} + f'; \quad f + g = \tilde{f} + \tilde{g}; \quad af = a\tilde{f}, a = const; \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t}; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x} \text{ для ступенчатого фильтра;} \\ fg &= (\tilde{f} + f')(\tilde{g} + g') = \tilde{f}\tilde{g} + f'\tilde{g} + \tilde{f}g' + f'g'; \\ \tilde{f} &\neq \tilde{\tilde{f}}, \quad f' = f - \tilde{f} = \tilde{f} - \tilde{\tilde{f}} \neq 0. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Последние два свойства принципиально отличают пространственную фильтрацию от осреднения по времени (3.2), которое было использовано при выводе уравнений Рейнольдса.

7.2. Фильтрованные уравнения Навье-Стокса

Применение операции фильтрации (7.5) к уравнениям Навье-Стокса для несжимаемой жидкости

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + g, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

дает результат

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} \right) + g, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (7.6)$$

где среднее от произведения скоростей *определяют* как

$$u_i u_j = \tilde{u}_i \tilde{u}_j + \tau_{ij}^{SGS} / \rho. \quad (7.7)$$

Здесь τ_{ij}^{SGS} – тензор подсеточных напряжений (SubGrid Scale), порождаемых вихревыми структурами, масштаб которых настолько мал, что не может быть вычислен (говорят: разрешён) на используемой в расчетах пространственной сетке. В результате уравнение (7.6) принимает вид, по форме очень похожий на уравнения Рейнольдса:

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\tau_{ij}^{SGS}}{\rho} \right) + g, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (7.8)$$

Однако сходство это чисто внешнее. Рейнольдсовы напряжения описывают вклад крупных энергосодержащих вихрей, тогда как подсеточные напряжения учитывают влияние мелких вихрей (мелкомасштабных движений) с характерными размерами, меньшими ширины фильтра h .

Крупные энергосодержащие вихри являются анизотропными структурами, движение которых не подчиняется универсальным законам, поэтому проблема замыкания является чрезвычайно сложной (цепочка уравнений Фридмана-Келлера), и рейнольдсовы напряжения находятся на основе полуэмпирических

теорий. Мелкие вихри, движение которых приводит к появлению подсеточных напряжений, являются изотропными структурами, для которых оказалось возможным получение замкнутых универсальных формул. В этом смысле теория турбулентности, основанная на методе крупных вихрей, является замкнутой.

Требование изотропности выполняется в турбулентных движениях с волновыми числами, лежащими в области инерционного интервала (см. п. 3.5). Поэтому для получения замкнутых LES моделей размер ширины фильтра должен соответствовать размерам вихрей инерционного интервала. Отсюда следует определение крупного вихря как вихря, масштаб которого больше характерных размеров вихрей в инерционном интервале.

На практике минимальный размер крупных вихрей, движение которых рассчитывается методом LES, примерно на порядок больше колмогоровского масштаба λ . Размер сетки должен при этом выбираться приблизительно равным ширине фильтра. В этом случае мелкие вихри с размерами, меньшими размера сетки, отфильтровываются. Их движение называется подсеточным и оно моделируется с помощью некоторых простых формул, следующих из теорий турбулентности (например, теории Колмогорова). Движение крупных вихрей с размерами, большими размеров сетки, рассчитывается непосредственным интегрированием уравнений (7.7).

7.3. Модель Смагоринского-Лилли для подсеточных напряжений

Первая модель подсеточных напряжений была предложена в 1963 г. Смагоринским. Отправной точкой явилась гипотеза вихревой вязкости Буссинеска, согласно которой тензор дополнительных напряжений пропорционален тензору скоростей деформаций среднего движения некоторым коэффициентом μ_T , называемым коэффициентом турбулентной вязкости. В методе LES для несжимаемой жидкости это соотношение имеет вид

$$\tau_{ij}^{SGS} = \mu_T e_{ij} = \mu_T \left(\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (7.9)$$

Здесь коэффициент пропорциональности μ_T называют *коэффициентом подсеточной турбулентности*. По аналогии с теорией пути смешения Прандтля, коэффициент μ_T пропорционален модулю тензора скоростей деформаций $|e|$ и квадрату некоторой длины l_s :

$$\mu_T = \rho \nu_T = \rho l_s^2 \sqrt{2e_{ij}e_{ij}} \quad (7.10)$$

В свою очередь, предполагается, что эта длина (длина пути смешения) пропорциональна ширине фильтра h :

$$l_s = C_s h, \quad (7.11)$$

где C_s – константа Смагоринского. В отличие от полуэмпирических теорий турбулентности, также содержащих многочисленные константы, константа Смагоринского может быть определена теоретически без привлечения эмпирических данных. Применяя теорию инерционного интервала А.Н. Колмогорова, Лилли получил формулу

$$C_s = \frac{1}{(7C)^{3/4}} \approx 0.17, \quad (7.12)$$

где $C \approx 1.5$ – константа Колмогорова.

В пакете FLUENT по умолчанию приняты несколько отличающиеся значения для длины l_s и константы Смагоринского:

$$C_s = 0.1; \quad l_s = \min\{\kappa y, C_s V_{cell}^{1/3}\}, \quad (7.13)$$

где V_{cell} – объем ячейки сетки; $\kappa \sim 0.41$ – константа Кармана, y – расстояние до ближайшей стенки. Формула (7.13) адаптирует модель (7.10) к пристеночным течениям.

Очень важным свойством подсеточных напряжений является их пропорциональность ширине фильтра h . Как уже отмечалось, размеру ячейки сетки численного метода также пропорциональна h . Таким образом, при сгущении сетки ($h \rightarrow 0$) дополнительные подсеточные напряжения τ^{SGS} также стремятся к нулю. В этом случае метод LES переходит автоматически в метод DNS, что подчеркивает его логическую непротиворечивость. Заметим, что

методы RANSE не имеют сходимости к DNS, так как рейнольдсовы напряжения, определяемые по полуэмпирическим моделям, не исчезают при измельчении сетки. Это означает, что при увеличении разрешения в методах RANSE до разрешения метода DNS произойдет двойной учет турбулентности: один раз за счет ее учета с помощью присутствующих в RANSE полуэмпирических моделей, а второй раз – за счет непосредственного разрешения турбулентных вихрей на мелкой сетке.

Ранее было сказано, что теория LES на базе модели Смагоринского представляет собой замкнутую математическую модель. Тем не менее при выводе основополагающих уравнений были использованы некоторые гипотезы и нестрогие оценки, например, при нахождении константы Смагоринского. Все это дает о себе знать, если течение является более сложным, чем течения для которых были получены основополагающие соотношения обсуждаемой теории. Это побудило исследователей к созданию новых, более совершенных теорий, изложенных в следующих параграфах.

7.4. Динамическая модель Германо (1993)

Основная идея модели Германо состоит в динамическом определении «константы» Смагоринского, которая меняется в пространстве и времени.

Для этого наряду с исходным фильтром h вводится вспомогательный *тестовый фильтр* \hat{h} , который в α раз шире исходного; на практике обычно используют $\alpha = 1.4 \div 2.0$. Операцию осреднения произвольной функции f с использованием тестового фильтра обозначим как \hat{f} . Имея два фильтра, можно ввести операцию *двойной фильтрации* $\hat{u} = \tilde{u}$.

По определению

$$\tau_{ij}^{SGS} = \rho(u_i u_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j). \quad (7.14)$$

По аналогии для повторной фильтрации запишем

$$\tau_{ij}^{test} = \rho(u_j u_j - \hat{u}_j \hat{u}_j) \equiv \rho(u_j u_j - \tilde{u}_j \tilde{u}_j). \quad (7.15)$$

Применим теперь осреднение \hat{h} к (7.14):

$$\hat{\tau}_{ij}^{SGS} = \rho \left(u_j u_j - \tilde{u}_j \tilde{u}_j \right)$$

и вычтем полученное выражение из (7.15). Будем иметь

$$\tau_{ij}^{test} - \hat{\tau}_{ij}^{SGS} = \rho \left(\tilde{u}_j \tilde{u}_j - \tilde{u}_j \tilde{u}_j \right) - \rho \left(u_j u_j - \tilde{u}_j \tilde{u}_j \right) = \rho \left(\tilde{u}_j \tilde{u}_j - \tilde{u}_j \tilde{u}_j \right).$$

Это равенство называется *тождеством Германо*, которое можно записать и так:

$$\tau_{ij}^{test} - \hat{\tau}_{ij}^{SGS} = \rho L_{ij}, \quad L_{ij} \equiv \left(\tilde{u}_j \tilde{u}_j - \tilde{u}_j \tilde{u}_j \right). \quad (7.16)$$

С другой стороны, напряжения τ_{ij}^{test} , $\hat{\tau}_{ij}^{SGS}$ можно вычислить с помощью закона Смагоринского (7.9), (7.10), (7.11):

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{SGS} &= \mu_T \tilde{e}_{ij} = \rho C_S^2 h^2 |\tilde{e}_{ij}| \tilde{e}_{ij}, \quad \hat{\tau}_{ij}^{SGS} = \rho C_S^2 h^2 |\tilde{e}_{ij}| \tilde{e}_{ij}; \\ \tau_{ij}^{test} &= \mu_T \hat{e}_{ij} = \rho C_S^2 \hat{h}^2 |\hat{e}_{ij}| \hat{e}_{ij}. \end{aligned}$$

Введем обозначения $m_{ij}^{SGS} = h^2 |\tilde{e}_{ij}| \tilde{e}_{ij}$, $m_{ij}^{test} = \hat{h}^2 |\hat{e}_{ij}| \hat{e}_{ij}$, тогда

$$\tau_{ij}^{test} - \hat{\tau}_{ij}^{SGS} = 2C_S^2 \rho \left(\hat{m}_{ij}^{SGS} - m_{ij}^{test} \right) \equiv 2C_S^2 \rho M_{ij}$$

Сравнивая это выражение с тождеством Германо (7.16), находим выражение для «константы» Смагоринского $C_S^2 = L_{ij} / 2M_{ij}$. На практике от тензорного определения переходят к скалярному, домножая числитель и знаменатель последней формулы на M_{ij} , в итоге получается динамическая модель Германо для метода LES в виде

$$C_S = \sqrt{\frac{L_{ij} M_{ij}}{2M_{ij} M_{ij}}}, \quad \nu_T = C_S^2 h^2 |\tilde{e}|. \quad (7.17)$$

Заметим что тензоры L и M получаются с помощью повторной фильтрации скорости фильтрованного течения.

Динамическая модель Germano устраняет многие недостатки модели Смагоринского и является в настоящее время наиболее широко используемой. Особенно явно имеют место эти преимущества в случае сеток с существенно неравномерными ячейками.

7.5. О других моделях подсеточных напряжений

В универсальных пакетах FLUENT и STAR-CD по умолчанию для метода LES приняты модели Смагоринского-Лилли с вычислением «константы» в формуле вихревой вязкости при помощи модели Германо. Однако развитие метода LES продолжается, и в заключение приведем краткие сведения об альтернативных подходах к моделированию подсеточных напряжений.

Дифференциальные модели τ^{SGS} строились по аналогии с изученными ранее моделями турбулентных пульсаций в методе RANSE. Эволюционное уравнение для подсеточных напряжений имеет стандартный вид с диффузией, генерацией и диссипацией; при этом в уравнении присутствуют пульсации скорости и давления и их моменты, которые необходимо моделировать. Рассматривается и однородная изотропная версия, когда можно вывести уравнения для кинетической энергии пульсаций.

Преимущества, достигаемые с помощью дифференциальных моделей незначительны, в то время как требуемые расчетные затраты непомерно велики. Поэтому дифференциальные модели внутрисеточных напряжений практически не используются.

Модели подобия масштабов основаны на декомпозиции спектра вихрей и вызываемых ими движений на три группы: 1) мелкие подсеточные вихри, 2) более крупные подсеточные вихри и 3) наименьшие из крупных вихрей. Последние две группы вихрей называют *разрешаемыми* (resolved), т.е. они могут быть рассчитаны на сетке с данным разрешением (размером ячеек). Подсеточные напряжения рассчитываются путем экстраполяции напряжений, найденных для наименьших из разрешаемых вихрей. При этом наименьшие из разрешаемых вихрей выделяются из крупных вихрей посредством повторной фильтрации поля скорости.

Модель подобия предполагает, чтобы наименьшие из разрешаемых вихрей лежали в инерционном интервале (закон «-5/3»: $E(k) = C\varepsilon^{2/3}k^{-5/3}$, $\varepsilon = const$). В этом случае фильтрация скорости \tilde{u} отделяет пульсацию $u' = u - \tilde{u}$, а повторная

фильтрация скорости \hat{u} отделяет пульсацию $\tilde{u}' = \tilde{u} - \hat{u}$. Таким образом, обусловленное этой пульсацией подсеточное напряжение определяется формулой

$$\tau_{ij}^{SGS} = \rho (\tilde{u}_j \tilde{u}_j - \tilde{u}_j \tilde{u}_j),$$

в которой участвуют только искомые средние поля и их вторая фильтрация. Эта формула отличается от формулы (7.15) $\tau_{ij}^{test} = \rho (u_j u_j - \tilde{u}_j \tilde{u}_j)$, которая дает напряжение от пульсации $u - \hat{u}$ и требует вычисления истинных скоростей и их двойной фильтрации.

Смешанные модели для напряжений подсеточного движения основаны на законах подобия в комбинации с моделью Смагоринского. Они рассматриваются в настоящее время как наиболее перспективные.

Первую группу этих моделей можно выразить формулой

$$\tau_{ij}^{SGS} = \rho \left\{ c_1 (\tilde{u}_j \tilde{u}_j - \tilde{u}_j \tilde{u}_j) - c_2 C_s^2 h^2 |\tilde{e}_{ij}| \tilde{e}_{ij} \right\}, \quad c_1 \sim c_2 \sim 1,$$

где «константа» Смагоринского C_s вычисляется по динамической процедуре типа Германо-Лилли.

Другая группа смешанных моделей основана на декомпозиции тензора подсеточных напряжений (7.14)

$$\begin{aligned} \tau_{ij}^{SGS} / \rho &= u_i u_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j = (\tilde{u}_i + u'_i)(\tilde{u}_j + u'_j) - \tilde{u}_i \tilde{u}_j = \\ &= \tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j + u'_i u'_j + \tilde{u}_i u'_j + \tilde{u}_j u'_i \equiv L_{ij} + R_{ij} + C_{ij}. \end{aligned}$$

Здесь $L_{ij} = \tilde{u}_i \tilde{u}_j - \tilde{u}_i \tilde{u}_j$ называются напряжениями Леонарда и представляют по существу макроскопическое движение; $R_{ij} = u'_i u'_j$ – напряжения Рейнольдса (названы по аналогии с турбулентными напряжениями пульсаций), а $C_{ij} = \tilde{u}_i u'_j + \tilde{u}_j u'_i$ – перекрестные напряжения. В смешанных моделях напряжения Леонарда выделяются из тензора τ_{ij}^{SGS} и рассчитываются непосредственно, а

оставшиеся подсеточные напряжения $R_{ij} + C_{ij}$ моделируются по методу Смагоринского-Лилли-Германо.

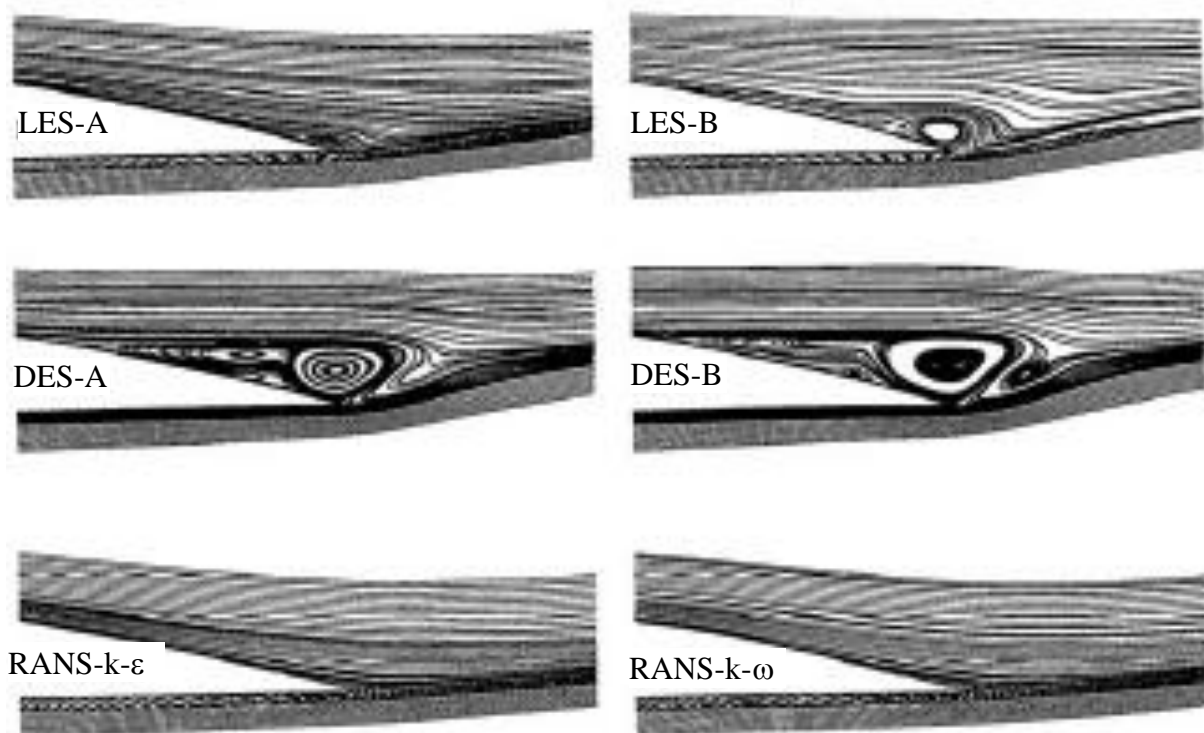


Рис. 7.4. Осредненные по времени линии тока в окрестности задней кромки профиля NACA 4412 при угле атаки 12° , $Re = 1.64 \cdot 10^6$.

В заключение описания метода LES приведем некоторые результаты вычислений, свидетельствующих о его преимуществе перед изучавшимися ранее методами RANSE.

Это наблюдалось, например, при исследовании обтекания крыльев самолета A300 при больших углах атаки. Характерный пример дан на рис.7.4. Верхние четыре рисунка соответствуют методам LES-DES, а два нижних течения были получены с помощью $k-\epsilon$ и $k-\omega$ моделей RANSE. Как видно, все методы LES-DES, за исключением LES-A, соответствующего грубой сетке, регистрируют наличие в области задней кромки отрыв течения. Напротив, методы RANSE прогнозируют в этой зоне безотрывное течение, что не соответствует наблюдениям в эксперименте.

Заключение

Наука о турбулентных течениях сравнительно молода и находится в стадии интенсивного развития, которое стимулируется, с одной стороны, все возрастающими запросами проектирования и производства, а с другой – бурным развитием средств вычислительной техники. Может создаться впечатление, что на сегодняшний день данная область аэрогидромеханики состоит из многочисленных частных моделей, использующих эмпирические данные, откалиброванных для простейших случаев и теряющих адекватность при небольшом усложнении течения. В значительной мере это так, однако уже выработаны некоторые универсальные подходы к построению моделей турбулентности.

Нет сомнений, в основе любых математических моделей турбулентности должны лежать уравнения Навье-Стокса с линейным законом трения.

Полуэмпирические модели описывают турбулентные характеристики как сумму среднего и пульсаций, вызывающих дополнительные напряжения в жидкости. Это отражается в осредненных уравнениях Навье-Стокса (RANSE). Определение турбулентных напряжений с помощью дифференциальных уравнений для пульсаций всегда приводит к незамкнутой системе уравнений, поэтому в любом случае входящие в эти уравнения корреляционные тензоры должны моделироваться (выражаться через средние либо моменты низших порядков), что в принципе невозможно без упрощающих гипотез (базирующихся, например на результатах статистической теории турбулентности) и эмпирических данных. Другим недостатком моделей RANSE является ограничение снизу на шаг h расчетной сетки: при $h \rightarrow 0$ уравнения Рейнольдса не переходят в уравнения Навье-Стокса, поэтому в этом случае (реально при h порядка колмогоровского масштаба вихрей) турбулентные напряжения как бы будут учитываться дважды: один раз за счет ее учета с помощью присутствующих в RANSE полуэмпирических моделей, а второй раз –

за счет непосредственного разрешения турбулентных вихрей на мелкой сетке. Из сказанного следует, что несмотря на то, что сегодня модели RANSE являются основным инструментом расчета турбулентных течений, в исторической перспективе они будут вытеснены более универсальными моделями.

К таким моделям, известным в настоящее время, относится модель крупных вихрей LES, в которой все вихри, вплоть до масштабов инерционного интервала, рассчитываются непосредственно, а более мелкие (колмогоровского масштаба) отсекаются пространственным фильтром и порождают дополнительные т.н. подсеточные напряжения, которые моделируются. При этом при $h \rightarrow 0$ эти напряжения исчезают, поскольку ширина фильтра согласована с шагом сетки. Перспективным компромиссом представляется метод отсоединенных вихрей DES, предназначенный для расчета отрывных течений. Поток делится на две зоны: пристенную область и зону отрывного течения. В пристенной области применяется RANSE, а в отрывной зоне используется LES.

Наиболее общим является метод прямого численного моделирования DNS, который непосредственно интегрирует полную систему уравнений Навье-Стокса и энергии и не использует физически не обоснованных эмпирических данных. Прогресс в этом способе моделирования турбулентности напрямую связан с ростом производительности суперкомпьютеров и развитием техники параллельных вычислений. Кроме того, в последнее время появились результаты успешного применения сеточных схем высокого порядка точности (до 10-го по пространственным переменным и до 4-го по времени) для моделирования сложных турбулентных течений.

Представленный в учебном пособии материал представляет собой, по существу, введение в проблему моделирования турбулентных потоков. За пределами курса остались многие важные аспекты, о которых составитель считает необходимым упомянуть.

Это такие теоретические вопросы, как постановка граничных условий и применение пристенных функций для модификации моделей изотропной турбулентности в применении к моделированию течений в пограничных слоях и неоднородных низкорейнольдсовых течений.

Современное развитие турбулентности как науки не представляется возможным без применения мощных компьютеров, реализующих различные модели и позволяющие выявить их сильные и слабые стороны. Именно вычислительный эксперимент сегодня является источником развития моделей турбулентности, которые, в свою очередь, являются основой для создания новых вычислительных средств. Поэтому для более полного понимания проблемы моделирования турбулентных потоков необходимо получить представление о численных методах решения соответствующих математических задач. Численное моделирование турбулентных течений сегодня бурно развивается и охватывает широкий спектр чрезвычайно сложных вопросов построения и верификации эффективных сеточных схем и алгоритмов, включая методы генерации сеток.

Литература

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Издательство иностранной литературы. 1956. 528 с.
2. Себиси Т., Брэдишоу П. Конвективный теплообмен. М.: Мир. 1987. 592 с.
3. Ван-Дайк М. Альбом течений жидкости и газа. М.: Мир. 1986. 182 с.
4. Чжен П. Отрывные течения. Т. 1. М.: Мир. 1972. 300 с.
5. Фриш У. Турбулентность. Наследие А.Н. Колмогорова. М.: Фазис. 1998. 346 с.
6. Фрик П.Г. Турбулентность: подходы и модели. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2003. 292 с.
7. Липанов А.М., Кисаров Ю.Ф., Ключников И.Г. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. Екатеринбург. 2001. 162 с.
8. Белов И.А., Исаев С.А. Моделирование турбулентных течений. Учебное пособие. СПб.: Балтийский государственный технический университет. 2001. 108 с.
9. Корнев Н.Н., Бесядовский А.Р. Введение в метод крупных вихрей. Учебное пособие. СПб: С.-Петербургский государственный морской технический университет. 2005. 136 с.

Дополнительная литература

10. Menter F.R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. AIAA-Journal, 32(8), pp. 269-289, 1994.
11. Menter F.R. Zonal two-equation $k-\omega$ turbulence model for aerodynamic flows. AIAA-Paper 1993-2906, 1993.
12. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD. DCW Industries, Inc., La Canada, CA, 1993. 477 p.
13. Strelets M. Detached eddy simulation of massively separated flows. AIAA-Paper 2001 - 0879, 2001.
14. Spalart P., Allmaras S. A one-equation model for aerodynamic flows. AIAA Technical Report 92-0439. American Institute of Aeronautics and Astronautics. 1992

Оглавление

Введение	5
1. Ламинарные и турбулентные течения: описание феномена	14
1.1. Опыт Рейнольдса	14
1.2. Решение Хагена- Пуазейля	15
1.3. Критическое число Рейнольдса	15
1.4. Современные представления о механизме турбулентного течения	19
2. Уравнения термогидродинамики	22
2.1. Сведения из математики и механики	22
2.2. Уравнения движения вязкой жидкости	24
2.3. Уравнение энергии (теплопроводности, энтальпии)	27
2.4. Динамический пограничный слой	29
2.5. Тепловой пограничный слой	32
3. Математическое описание турбулентных течений	35
3.1. Уравнения Рейнольдса	35
3.2. Осредненное уравнение конвективной теплопроводности	37
3.3. Физический смысл напряжений Рейнольдса. Замеры пульсаций скорости	39
3.4. Статистические характеристики пульсаций	42
3.5. Теория А.Н. Колмогорова	44
3.5.1. Интервалы масштабов турбулентности	45
3.5.2. Гипотезы Колмогорова и их следствия	46
4. Дифференциальные уравнения турбулентных пульсаций	52
4.1. Цепочка уравнений Фридмана – Келлера	52
4.2. Физическая интерпретация уравнений эволюции турбулентности	54
4.3. Уравнения кинетической энергии турбулентных пульсаций и ее изотропной диссипации	56
4.4. Уравнения для пульсаций турбулентного потока тепла	58
5. Дифференциальные модели замыкания уравнений Рейнольдса	61
5.1. Модель Колмогорова – Прандтля	61
5.2. Семейство $k - \varepsilon$ моделей	64
5.2.1. Стандартная модель	65
5.2.2. RNG модель	66
5.2.3. Realizable модель	67
5.3. Семейство $k - \omega$ моделей	69
5.3.1. Стандартная модель Вилкокса	70
5.3.2. SST модель Ментера	72
6. Модели турбулентной вязкости	77
6.1. Простейшая модель с постоянной вихревой вязкостью	77

6.2. Модель пути смешения Прандтля	78
6.3. Модель переноса вихревой вязкости Ни – Коважного	83
6.4. Однопараметрическая модель Спаларта-Аллмараса	84
7. Моделирование крупных вихрей (LES)	88
7.1. Пространственные фильтры и их свойства	91
7.2. Фильтрованные уравнения Навье-Стокса	93
7.3. Модель Смагоринского-Лилли для подсеточных напряжений	94
7.4. Динамическая модель Германо	96
7.5. О других моделях подсеточных напряжений	98
Заключение	101
Литература	104

Учебное издание

Мазо Александр Бенцианович

Моделирование турбулентных течений несжимаемой жидкости

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии Издательского центра
Казанского государственного университета им. В.И. Ульянова-Ленина

Подписано в печать 25.07.07.

Бумага офсетная. Печать ризографическая. Формат 60х84 1/16. Гарнитура «Таймс».
Усл. печ. л. 6,6. Уч.-изд. л. 6.1. Тираж 100. Заказ 28/7.

Издательство

«Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина»

420008, Казань, ул. Профессора Нужи́на, 1/37

тел. 231-53-59, 292-65-60