

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
Кафедра теоретической и прикладной механики**

Шевелёв Дмитрий Юрьевич

**ВЛИЯНИЕ ВИХРЕГЕНЕРАТОРОВ В ТУРБУЛЕНТНОМ  
ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА ЛОКАЛЬНОЕ ТРЕНИЕ И ПЕРЕНОС**

Дипломная работа

Научный руководитель:  
кандидат физ.-мат. наук,  
доцент А. Д. Чорный

Допущен к защите

«\_\_\_\_» 2023 г.

Зав. кафедрой теоретической и прикладной механики  
доктор физ.-мат. наук, профессор М. А. Журавков

Минск, 2023

# ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ .....</b>	<b>5</b>
<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>6</b>
<b>ГЛАВА 1 Теория пограничного слоя и его моделирование .....</b>	<b>7</b>
1.1 Понятие пограничного слоя .....	7
1.2 Турбулентное состояние пограничного слоя .....	9
1.3 Структура пограничного слоя .....	10
1.3.1 Внешняя область .....	11
1.3.2 Внутренняя область .....	11
1.3.3 Свойства пограничного слоя .....	12
1.3.4 Закон стенки .....	13
1.4 Методы моделирования .....	14
1.4.1 DNS .....	15
1.4.2 RANS .....	15
1.4.3 LES .....	17
1.4.4 DES .....	18
1.4.5 Оценка производительности .....	19
<b>ГЛАВА 2 Моделирование задачи .....</b>	<b>20</b>
2.1 Постановка задачи .....	20
2.2 Визуализация поставленной задачи .....	20
2.2.1 Геометрия канала .....	21
2.2.2 Построение сеточной модели .....	22
2.3 Расчёт задачи .....	24
<b>ГЛАВА 3 Анализ полученных данных .....</b>	<b>26</b>
3.1 Обработка данных .....	26
3.2 Влияние на локальное трение и перенос .....	27
3.2.1 Скорость .....	27
3.2.2 Коэффициент трения .....	30
3.2.3 Q критерий .....	31
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>33</b>
<b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ .....</b>	<b>34</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А .....</b>	<b>35</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ В .....</b>	<b>37</b>

## **РЕФЕРАТ**

**Отчёт по дипломной работе:** 38 с., 10 рис., 5 табл., 0 источников.

**Ключевые слова:** ВИХРЕГЕНЕРАТОР, ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ, ТУРБУЛЕНТНОСТЬ, МЕТОД МОДЕЛИРОВАНИЯ КРУПНЫХ ВИХРЕЙ, ЛОКАЛЬНОЕ ТРЕНИЕ И ПЕРЕНОС, СЕТОЧНАЯ МОДЕЛЬ, МОДЕЛИРОВАНИЕ, АНАЛИЗ.

**Объект исследования:** течение в канале с установленным вихрегенератором.

**Цель работы:** исследовать влияние вихрегенераторов на локальное трение и перенос.

**Методы исследования:** численное моделирование методом крупных вихрей.

**Результат:** оценка влияния вихрегенераторов на локальное трение и перенос.

**Область применения:** .

## **РЭФЕРАТ**

**Справа здача па дыпломнай працы:** 38 с., 10 малюнкаў, 5 табліц., 0 крыніц.  
**Ключавыя слова:** ВІХРЭГЕНЕРАТАР, ПАМЕЖНЫ ПЛАСТ, ТУРБУЛЕНТ-  
НАСЦЬ, МЕТАД МАДЭЛЯВАННЯ БУЙНЫХ ВІХУР, ЛАКАЛЬНАЕ ТРЭННЕ  
І ПЕРАНОС, СЕТКАВАЯ МАДЭЛЬ, МАДЭЛЯВАННЕ, АНАЛІЗ.

**Аб'ект даследавання:** плынь у канале з усталяваным віхрэгенератарам.

**Мэта працы:** даследаваць уплыву віхрэгенератараў на лакальнае трэнне і перанос.

**Метады даследавання:** лікавае мадэляванне метадам буйных віхур.

**Вынік:** ацэнка ўплыву віхрэгенератараў на лакальнае трэнне і перанос.

**Вобласць прымянеñня:** .

## ABSTRACT

**Diploma:** 38 p., 10 pictures, 5 tables, 0 references.

**Keywords:** VORTEX GENERATOR, LARGE EDDY SIMULATION, BOUNDARY LAYER, TURBULENCE, LOCAL FRICTION AND TRANSPORT, GRID MODEL, MODELING, ANALYSIS.

**Object of research:** flow in channel with vortex generator.

**Purpose of research:** to research influence of vortex generator on local friction and transport.

**Research methods:** large eddy simulation

**Result:** assessment of the impact on local friction and transport

**Scope:** .

## ПЕРЕЧЕНЬ УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

<b>DNS</b>	Direct Numerical Solution, прямое численное моделирование
<b>RANS</b>	Reynolds-Averaged Navier–Stokes, уравнения Навье–Стокса, осреднённые по Рейнольдсу
<b>LES</b>	Large Eddy Simulation, метод моделирования крупных вихрей
<b>SGS</b>	Sub Grid Scale, модели подсеточного масштаба
<b>DES</b>	Detached Eddy Simulation, метод моделирования отсоединённых вихрей
<b>WALE</b>	Wall-adapting local eddy-viscosity, адаптирующаяся к стене локальная турбулентная вязкость
$\delta^*$	толщина вытеснения
$\theta$	толщина потери импульса
$\tau_\omega$	напряжение трения на стенки
$C_F$	коэффициент трения
$u_\tau$	динамическая скорость
$\omega$	завихрённость
$U_0$	начальная скорость потока
$L$	характерный масштаб
$\eta_k$	колмогоровский масштаб
$Q$	критерий Q
$Re_{cr}$	критическое число Рейнольдса

## ВВЕДЕНИЕ

Многие тела и конструкции имеют турбулентные пограничные слои на своих поверхностях. Это относится к теплообменным устройствам, элементам воздушно-реактивных двигателей, планерам самолетов, корпусам кораблей и крупным строительным сооружениям. Такие слои влияют на сопротивление трения и передачу тепла. Вихревая структура этих слоев может быть изменена путем контроля процесса формирования вихрей.

Одним из способов управления и уменьшения потерь энергии в турбулентном пограничном слое является использование методов активного и пассивного контроля турбулентности, например, установка поперечных ребер (вихрегенераторов) на поверхности или введение потока тепла в стенки. Более глубокое понимание особенностей турбулентного пограничного слоя может помочь снизить энергетические затраты и повысить эффективность различных технологий.

Теоретические методы моделирования и исследования явлений переноса в пограничном слое условно можно классифицировать на точные, асимптотические, численные и приближенные. Для математического моделирования явлений переноса и определения эффективности проводимых процессов в промышленных аппаратах чаще используются приближенные и численные методы.

Современное развитие турбулентности как науки не представляется возможным без применения мощных компьютеров, реализующих различные модели и позволяющие выявить их сильные и слабые стороны. Именно вычислительный эксперимент сегодня является источником развития моделей турбулентности, которые, в свою очередь, являются основой для создания новых вычислительных средств.

Целью данной работы является исследования влияния вихрегенератора, установленного на всю длину канала, на локальное трение и перенос. Для проведения вычислений использовался пакет ANSYS Fluent и для постобработки полученных данных CFD Post. В качестве метода использовался метод моделирования крупных вихрей.

# ГЛАВА 1

## Теория пограничного слоя и его моделирование

### 1.1 Понятие пограничного слоя

Движение вязких сред связано с явлениями переноса в пограничном слое, где локализуются сопротивления трения, тепло- и массоотдачи. Понятие пограничного слоя впервые использовано Людвигом Прандтлем в статье, представленной 12 августа 1904 г., на третьем Международном конгрессе математиков в Гейдельберге, Германия. Пограничный слой – область течения вязкой жидкости с малой по сравнению с продольными размерами поперечной толщиной, образующаяся у поверхности обтекаемого твёрдого тела или на границе раздела двух потоков жидкости с различными скоростями или температурами. Пограничный слой характеризуется резким изменением в поперечном направлении скорости (динамический пограничный слой) или температуры (температурный пограничный слой).

Классическим примером пограничного слоя является пограничный слой, который образуется на плоской пластине при обтекании ее поверхности жидкостью и пограничный слой в круглых трубах. Более сложным для исследования и математического описания является пограничный слой на поверхностях с различной кривизной (обтекание цилиндра, сферы и др. тел). Такой пограничный слой характеризуется большим градиентом давления и точкой отрыва, за которой производная и скорость потока меняют знаки. Так же значительно сложны пограничные слои на поверхности раздела двухфазных и многофазных сред.

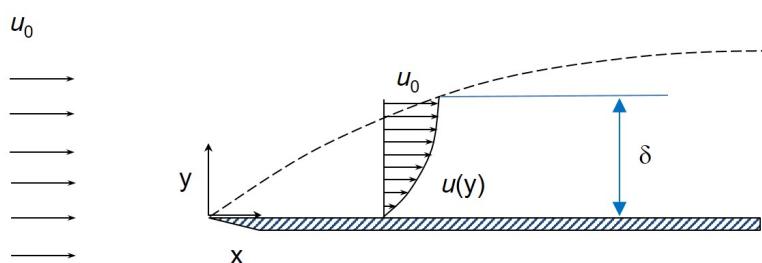


Рисунок 1.1: Пограничный слой

Чем меньше вязкость среды, тем тоньше гидродинамический пограничный слой и большее значение в этом слое имеет градиент скорости. Вне пограничного слоя градиент скорости невелик. Следовательно, силы трения здесь малы, и ими обычно пренебрегают. Между внешним потоком и пограничным слоем резкой границы нет, поскольку средняя скорость жидкости по сечению потока изменяется монотонно, без скачков. Обычно толщину пограничного слоя определяют условно, исходя из того, что на его внешней границе скорость со-

ставляет 99 % от скорости внешнего потока.

Значение пограничного слоя очень велико, так как он определяет гидродинамическое сопротивление при движении среды относительно твердого тела, а также сопротивление переносу массы и тепла. Введение этого понятия существенно упростило уравнения моделирования течение жидкости путём разделения потока на две области.

В общем случае неизотермическое движение вязкой сжимаемой жидкости описывается следующими уравнениями: уравнения Навье-Стокса, уравнение неразрывности, конвективной теплопроводности и состояния.

$$\begin{aligned}
 u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
 u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\
 u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\
 \rho c \left( \frac{\partial T}{\partial \tau} + \vec{v} \nabla T \right) &= \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(T)) + q_v + \mu \Phi - p \operatorname{div}(\vec{v}) \\
 f(p, \rho, T) &= 0
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Исходя из этого имеем 6 уравнений и 6 неизвестных ( $u, v, w, \rho, T, p$ ). Эта система чрезвычайно сложна и в общем виде с трудом поддается решению даже современными численными методами на мощных компьютерах. Поэтому часто рассматривают различные упрощения этой системы.

Существуют три вида течения в пограничном слое, каждое из которых имеет свои особенности и некоторые из них достаточны сложны для численного моделирования:

- ламинарное – движение жидкости упорядочено, слои не смешиваются, частицы врачаются в пределах одного и того же тонкого слоя;
- турбулентное – движение неупорядочено, происходит перемешивание частиц в поперечном направлении и весь пограничный слой беспорядочно завихрен;
- смешанное – переходное состояние от ламинарного к турбулентному режиму движения.

В данной работе изучается турбулентный режим течения. Он является более сложным для численного моделирования.

## 1.2 Турбулентное состояние пограничного слоя

Ламинарное течение устойчиво только при некоторых условиях, определяемых значением критического числа Рейнольдса  $Re_{cr}$ . Обычно переход от ламинарного к турбулентному режиму течения жидкости в трубах наблюдается при  $Re_{cr} \approx 2300$ . Турбулентное движение в пограничном слое возникает из-за нестабильности потока, которая проявляется в виде вихрей различных размеров и интенсивности. Эти вихри перемешивают слои жидкости, что приводит к увеличению переноса массы и энергии вдоль поверхности твердого тела. Турбулентное течение с большим числом Рейнольдса называют развитой турбулентностью.

На значение критического числа можно влиять. Если вход в трубу сделать плавным, то ламинарное движение в трубе может поддерживаться при больших числах Рейнольдса, например до 24000. Существенно влияют на  $Re_{cr}$  и такие факторы, как градиент давления, форма канала, шероховатость его стенок, вдув и откачка пограничного слоя. Возрастание давления в направлении движения приводит к неустойчивости течения в пограничном слое, отрыву и возникновению вихрей. Поэтому как для внутренних (в трубах и каналах), так и для внешних (обтекание тел потоком) течений критическое число Рейнольдса возрастает при уменьшении внешнего градиента давления (ускоряющиеся течения – по закону Бернулли).

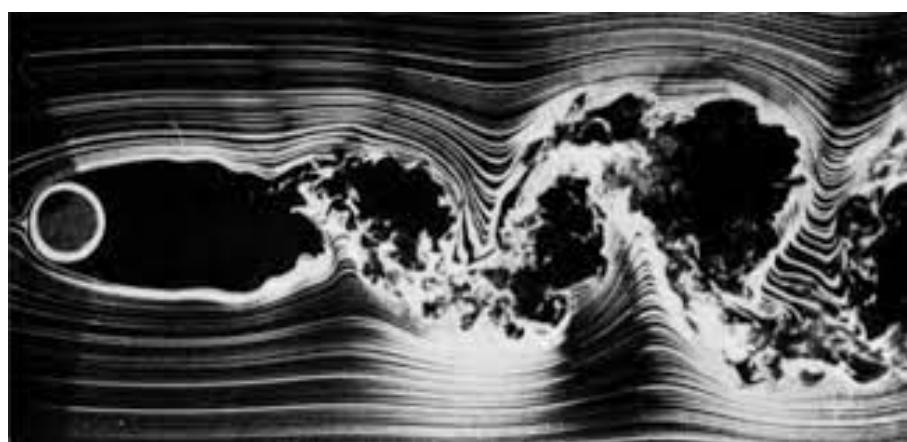


Рисунок 1.2: Пример турбулентности

Турбулентность можно определить как трехмерное нестационарное движение, в котором вследствие растяжения вихрей создается непрерывное распределение пульсаций скорости в интервале длин волн от минимальных, определяемых вязкими силами, до максимальных, определяемых граничным условиями течения. При математическом описании турбулентных течений удобно исходить из понимания турбулентности как иерархии вихрей различного масштаба, используя вихревую и волновую трактовку турбулентности[1]. Турбу-

лентные вихри непрерывны и постоянно соприкасаются друг с другом, причем крупные вихри, размеры которых определяются граничными условиями задачи, содержат в себе вихри меньших размеров.

Максимальный размер вихрей близок к характерному линейному масштабу задачи  $L$ . Часто движение наиболее крупных вихрей оказывается в значительной степени упорядоченным (например, течение за цилиндром). Такие структуры называют когерентными. Вихри минимального размера диссилируют непосредственно в тепло. Их размер характеризуется колмогоровским масштабом  $\eta_k = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$ . Наибольшее количество энергии при этом переносят вихри некоторого среднего размера.

Одной из важных характеристик описывающих турбулентное движение это завихрённость  $\omega$ :

$$\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v} \quad \omega_x = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \omega_y = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.2)$$

### 1.3 Структура пограничного слоя

Представления о структуре профиля скорости постепенно менялись и окончательно сформировались к концу 1950х годов. В турбулентном пограничном слое обычно выделяется две области: внешняя и внутренняя. Они отличаются друг от друга разными масштабами вихревых структур[2].

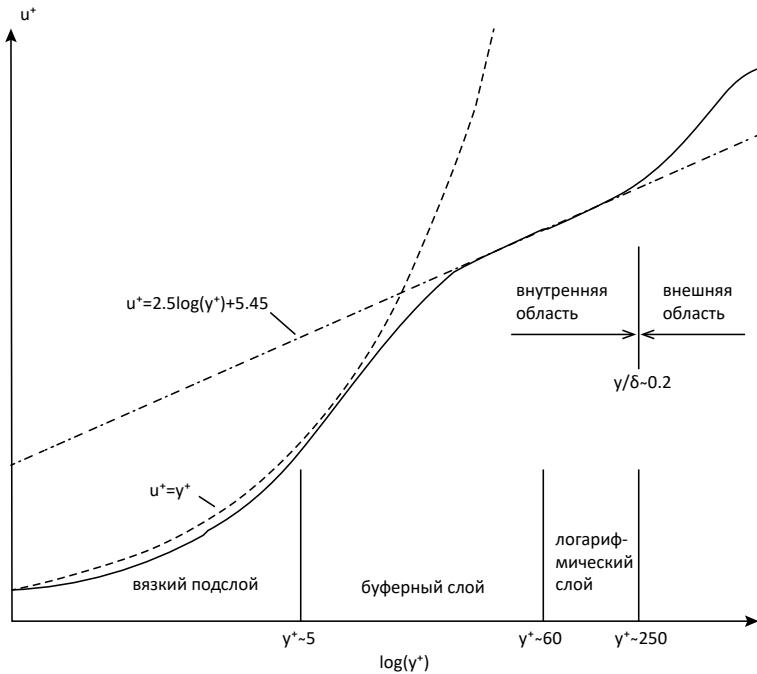


Рисунок 1.3: Схема слоя

Внутренняя область пограничного слоя занимает примерно 20% от тол-

щины всего слоя и в ней генерируется до 80% энергии турбулентности. На формирование течения в пограничном слое основное влияние оказывают вязкость, теплопроводность и диффузионная способность жидкости. Внутри динамического пограничного слоя происходит плавное изменение скорости от её значения во внешнем потоке до нуля на стенке вследствие прилипания вязкой жидкости к твёрдой поверхности. Аналогично внутри пограничного слоя плавно изменяется температура.

### 1.3.1 Внешняя область

Внешний слой является областью полностью развитого турбулентного течения, в котором распределение скорости описывается логарифмическим законом. Полное затухание возмущений во внешней области происходит на расстоянии, во много раз превышающем линейный масштаб турбулентности.

Чтобы определить поток во внешней зоне, применяют фильтрованные или осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье-Стокса. В то же время, профиль скорости во внутренней зоне сравнительно мало зависит от различных внешних условий, таких как числа Рейнольдса и градиент давления, что позволяет использовать универсальные соотношения (пристеночные функции) для связи параметров потока с расстоянием от стенки. Этот метод также базируется на гипотезе о локальном равновесии энергии турбулентных пульсаций и свойствах локальной изотропности диссилирующих вихрей[3].

### 1.3.2 Внутренняя область

Вязкий подслой, буферный и логарифмический слои составляют внутреннюю область пограничного слоя. Она характеризуется высокой скоростью переноса массы, импульса и тепла, что приводит к повышенной трению и потере энергии.

$$\begin{aligned} v \frac{\partial u}{\partial y} &\gg -\overline{u'v'} && \text{вязкий} \\ v \frac{\partial u}{\partial y} &\approx -\overline{u'v'} && \text{буферный} \\ v \frac{\partial u}{\partial y} &\ll -\overline{u'v'} && \text{логарифмический} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Существует два подхода к моделированию течения в пристеночной области. В первом подходе используются полуэмпирические формулы (пристеночные функции) для описания внутреннего слоя потока, в то время как во втором

подходе модели турбулентности модифицируются таким образом, чтобы разрешать всю пристеночную область потока, включая вязкий подслой, при условии обеспечения необходимого разрешения сетки в пограничном слое. Такие модели турбулентности могут быть использованы для расчета турбулентных течений во всей расчетной области (включая пристеночную область течения).

### 1.3.3 Свойства пограничного слоя

Толщина пограничного слоя трудно определима как в расчёте, так и в эксперименте. Для определения используются понятия: толщина вытеснения  $\delta^*$  и толщина потери импульса  $\theta$ .

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy \quad \theta = \delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U_0} \left(1 - \frac{u}{U_0}\right) dy \quad (1.4)$$

Кроме того используется безразмерный параметр  $H$ :

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (1.5)$$

Число Рейнольдса характеризуется двумя величинами ( $Re_x$  и  $Re_\theta$ ): расстоянием от нижней стенки  $x$  и толщиной  $\theta$ .

$$Re_x = \frac{xU_0}{\nu} \quad Re_\theta = \frac{\theta U_0}{\nu} \quad (1.6)$$

Используя напряжение трения на стенке  $\tau_w$  можем вычислить коэффициент трения  $C_F$  и динамическую скорость  $u_\tau$ :

$$\tau_w = \nu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_W \quad C_F = \frac{\tau_w}{0.5 \rho U_0^2} \quad u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (1.7)$$

Не менее важной характеристикой пограничных слоев является продольный градиент давления:

$$\frac{dp}{dx} = -\rho U_0 \frac{dU_0}{dx} \quad (1.8)$$

Часто на пограничные слои влияют такие факторы: кривизна поверхности  $\kappa$ , скорость закачки и откачки жидкости, шероховатость поверхности  $k_s^+$  (высота бугорков).

$$\kappa = \frac{\delta^*}{R} \quad \frac{V_W}{u_\tau}, \frac{V_W}{U_0} \quad k_s^+ = \frac{k_s u_\tau}{\nu} \quad (1.9)$$

Важным свойством пограничного слоя является выполнение интегрального уравнения импульсов. Верно и обратное: если уравнение импульсов не вы-

полняется, то уравнения плоского пограничного слоя также не верны для этого течения. Это может быть обусловлено разными причинами: трехмерность течения, его нестационарность, влияние вверх по потоку, изменение давления поперек пограничного слоя, влияние нормальных Рейнольдсовых напряжений и т.д.

$$\frac{d\theta}{dx} + \frac{dU_0}{dx} \cdot \frac{2+H}{U_0} \theta - \frac{C_f}{2} = 0 \quad (1.10)$$

### 1.3.4 Закон стенки

Для работы с пограничным слоем обычно используются безразмерные параметры  $u^+$  и  $y^+$ :

$$u^+ = \frac{u}{u_\tau} \quad y^+ = \frac{yu_\tau}{v} \quad (1.11)$$

В вязком подслое вязкие напряжения намного больше над рейнольдсовыми, а скорость линейно зависит от расстояния до стенки. В буферном слое напряжения имеют одинаковый порядок. В логарифмическом слое рейнольдсовые напряжения намного превышают вязкие напряжения, а профиль скорости описывается логарифмическим законом.

$u^+ = y^+$	$0 \leq y^+ < 5$	вязкий
$u^+ \neq y^+$	$5 \leq y^+ < 60$	буферный
$u^+ = \frac{1}{Ka} \ln E y^+$	$60 \leq y^+ < 0.2\delta$	логарифмический

(1.12)

В данном случае число Кармана  $Ka$  и параметр  $E$ , который зависит от шероховатости поверхности, определяются на основе экспериментальных данных.

$$Ka = \frac{1}{u} \sqrt{\frac{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}{3}} \quad (1.13)$$

Закон стенки можно рассматривать как решение уравнений движения в турбулентном пограничном слое, полученное при использовании модели путем смешения Прандтля. Обычно считается, что закон стенки выполняется при  $30 < y^+ < 200$ . Конкретная реализация подхода зависит от выбранной модели турбулентности и используемой разностной схемы. Функции, входящие в закон стенки, нуждаются в модификации для точного описания эффектов, связанных с возможной шероховатостью поверхности. Закон стенки трудно приспособить для расчета течений со сложной геометрией на неструктурированных сетках.

## 1.4 Методы моделирования

Несмотря на интенсивное развитие вычислительной техники и впечатляющие успехи, достигнутые в последние годы как в области построения эффективных численных алгоритмов, предназначенных для решения задач гидромеханики и тепломассопереноса, так и в разработке сопутствующего математического обеспечения (генераторы сеток, интерактивные системы ввода данных и систем визуализации результатов расчетов), проблема численного моделирования турбулентности, как и на протяжении многих предшествующих десятилетий, по-прежнему остается одной из наиболее сложных и актуальных проблем механики жидкостей. В отличие от ламинарных течений однофазной среды (жидкости), расчет которых, благодаря отмеченным выше достижениям, стал во многом рутинной процедурой, надежное предсказание характеристик сложных турбулентных течений, представляющих наибольший практический интерес все еще остается сложным.

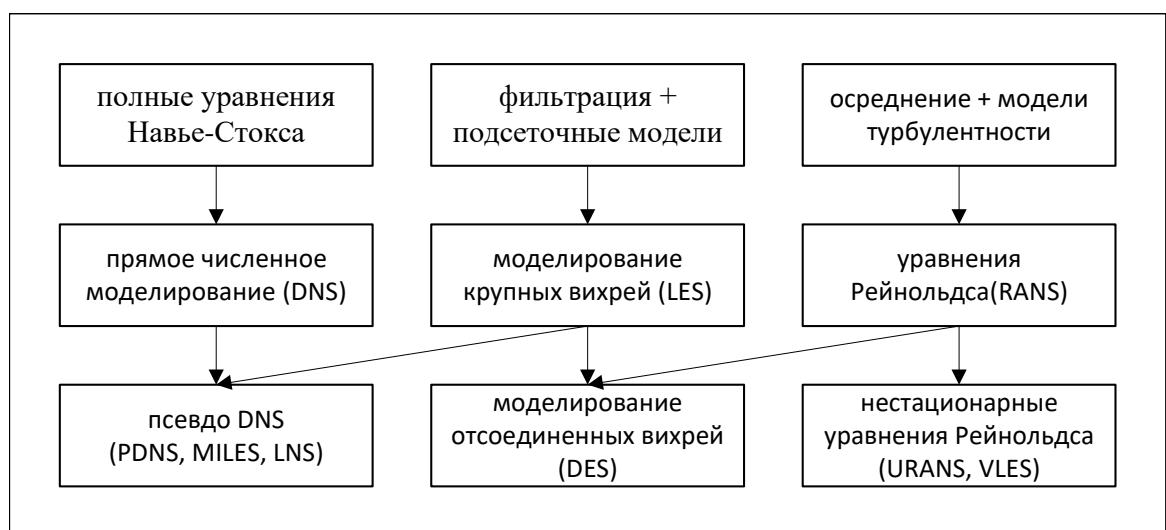


Рисунок 1.4: Виды методов по уравнениям

Среди основных методов численного моделирования трехмерных турбулентных течений можно выделить: прямое численное моделирование (DNS), моделирование крупных вихрей (LES) и решение осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS). Имеются также различные промежуточные подходы, сочетающие в себе те или иные черты RANS, LES и DNS, например, метод моделирования отсоединенных вихрей (DES), и ряд других, не имеющих должного физического обоснования и потому не получивших широкого распространения.

### 1.4.1 DNS

Прямое численное моделирование(DNS) предполагает решение полных нестационарных трехмерных уравнений Навье-Стокса, позволяющее получить мгновенные характеристики турбулентного потока. Проблемы с широким использованием DNS связаны с высокими требованиями к используемой разностной схеме, удовлетворением начальных и граничных условий, а также ограниченными ресурсами вычислительной техники. Расчетная область при этом должна быть достаточно протяженной, чтобы вместить наибольшие масштабы турбулентности, а шаг интегрирования по времени должен иметь порядок колмогоровского масштаба.

$Re$	$6.6 \times 10^3$	$2.0 \times 10^4$	$1.0 \times 10^5$	$1.0 \times 10^6$
Кол-во узлов сетки	$2 \times 10^6$	$4 \times 10^7$	$3 \times 10^8$	$1.5 \times 10^9$
150 MFlops	37 ч	740 ч	6.5 лет	3000 лет
1 TFlops	20 с	400 с	8.3 ч	4000 ч

Таблица 1.1: Затраты времени при различных параметрах

Эти жесткие требования отчасти смягчаются при использовании высокоточных спектральных методов численного интегрирования уравнений Навье-Стокса, которые часто используются для DNS. Однако эти методы неприменимы к расчету течений со сложной геометрией. Указанные обстоятельства приводят к тому, что на практике DNS применяется только для расчета простых турбулентных течений при низких числах Рейнольдса. При этом основной задачей расчета является не собственно получение данных о характеристиках осредненного течения (они, как правило, известны), а получение детальной информации о структуре турбулентности, а также вычисление отдельных членов, входящих в те или иные модели турбулентности.

### 1.4.2 RANS

В инженерных приложениях широко используются математические модели, основанные на численном решении осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса(RANS). При использовании уравнений Рейнольдса основной интерес проявляется к динамике крупномасштабных вихрей, ответственных за переносные свойства турбулентных течений. При замыкании уравнений Рейнольдса рассматриваются масштабы длины, типичные для энергосодержащих вихрей, в которых  $Re \gg 1$  (за исключением пристеночных областей). Для учета пристеночного влияния диссилирующих вихрей и энергосодержащих вихрей

при  $Re \sim 1$  используются демпфирующие функции. Применив к уравнениям осреднение Рейнольдса получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_i u'_j} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Эта система является незамкнутой, поскольку в нее входит неизвестный тензор так называемых рейнольдсовых напряжений  $\tau_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}$  (турбулентные напряжения). Для замыкания этой системы уравнений необходимо определить шесть различных компонент симметричного тензора турбулентных напряжений. Именно выражение этих компонент через параметры осредненного потока и называется моделью турбулентности. Ниже представлена таблица с основными этапами развития теории.

Год	Ученые	Что изучено
1877	Буссинеск Ж. В.	гипотеза Буссинеска
1895	Рейнольдс О.	осреднение по Рейнольдсу
1925	Прандтль Л.	теория пути смешивания Прандтля
1930	Карман Т.	формула Кармана
1942	Колмогоров А. Н.	формула Колмогорова, модель $k-\omega$
1951	Ротта	первая модель Рейнольдсовых напряжений
1956	Клаузер	формула Клаузера
1956	Ван-Дрист	демпфирующий множитель
1974	Лондер Б. и Сполдинг Д.	модель $k-\epsilon$

Таблица 1.2: Этапы развития теории

Появление огромного количества моделей привело к необходимости выбора. Для этого необходимо провести сравнительный анализ моделей. Однако при попытке тестирования естественным образом возникают определенные трудности. Во-первых, необходимо выбрать течения, для которых известен набор достоверных экспериментальных данных, свободных от погрешностей, а также выбрать критерии для сравнения моделей. Во-вторых, необходимо провести серийные расчеты этих течений с использованием разных моделей турбулентности и при этом быть уверенными в независимости результата от программной реализации задачи. Результатом такой работы должны явиться рекомендации по области применимости тех или иных моделей турбулентности.

### 1.4.3 LES

Метод моделирования крупных вихрей(LES) был предложен Иосифом Смагоринским в 1963 году. Он основан на двух предположениях. Первый предполагает, что течение можно разделить на движение крупных и мелких вихрей. Крупные вихри, находящиеся под прямым воздействием граничных условий и несущие в себе максимум рейнольдсовых напряжений, рассчитываются. Мелкомасштабная турбулентность считается изотропной и имеющей универсальные характеристики, а потому менее критичной и более поддающейся моделированию. Другой заключается в возможности аппроксимации нелинейных взаимодействий между крупными и мелкими вихрями только по крупным вихрям с использованием подсеточных моделей(SGS). Иначе говоря, принимается гипотеза о статистической независимости крупных и мелких вихрей.

Статистика крупных вихрей обычно не чувствительна к подсеточному моделированию за исключением пристеночной области. Имеющиеся подсеточные модели корректно предсказывают не только осредненные характеристики потока (первые и вторые моменты), но также и флюктуации интегральных характеристик, например, коэффициентов сопротивления и подъемной силы[4].

Мелкомасштабное движение исключается из уравнений Навье-Стокса при помощи применения операции фильтрации и моделируются с помощью подсеточных моделей. На рисунке 1.5 показан принцип работы фильтров, где  $g(x)$  - исходный вариант,  $f(x)$  - после фильтрации.

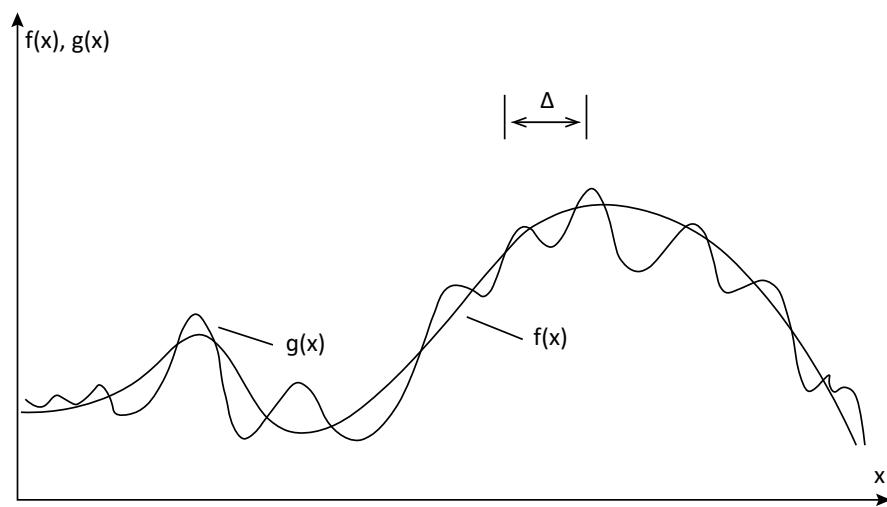


Рисунок 1.5: Исключение мелкомасштабных движений фильтрацией

Уравнение фильтра, применимое к пространственно временному полю

$\phi(x, t)$  представлено ниже:

$$\overline{\phi(x, t)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(r, t') G(x - r, t - t') dt' dr \quad (1.15)$$

В данном случае  $G$  - ядро, характерное для каждого типа фильтра.

Решение, полученное с помощью LES, содержит более богатую информацию по сравнению с решением на основе уравнений Рейнольдса, например, не только характеристики среднего течения (поля скорости, концентрации, температуры, давления) и распределения рейнольдсовых напряжений, но также и спектральные характеристики (спектры пульсаций скорости и давления), двухточечные моменты, временные и пространственные масштабы турбулентности.

#### 1.4.4 DES

Характерные для отрывных течений крупномасштабные нестационарные трехмерные вихревые структуры определяются конкретными граничными условиями и геометрическими характеристиками рассматриваемых течений и не могут быть описаны в рамках таких моделей. Это стимулируют поиск и разработку гибридных подходов, сочетающих в себе экономичность RANS и универсальность LES.

В методе моделирования отсоединенных вихрей (DES) в области присоединенного пограничного слоя метод функционирует в режиме уравнений Рейнольдса, а в области отрыва потока переходит в LES. При этом достигается сочетание лучших качеств обоих подходов – высокая точность и экономичность уравнений Рейнольдса в области присоединенного пограничного слоя и универсальность LES в отрывной области. Хотя DES, в отличие от RANS, является принципиально нестационарным трехмерным подходом, необходимые для его реализации сетки в пристеночной области совпадают с сетками, необходимыми для решения уравнений Рейнольдса, и являются на много порядков меньшими, чем сетки, требуемые для разрешения мелких пристенных вихрей в рамках LES. По мере измельчения сетки DES асимптотически приближается к LES и далее к DNS. Конкретные реализации DES основаны на использовании модели турбулентной вязкости Спаларта-Аллмараса и модели Ментера[5].

Как следует из названия метода DES, он создавался для расчета отрывных течений. Такие течения лучше подходят для этого метода. Во-первых, наличие массированного отрыва в большинстве случаев приводит к его пульсациям, как следствие этого, к возникновению автоколебательного течения с крупными ко-герентными структурами. Во-вторых, наличие отрывной зоны позволяет обойти проблему создания турбулентных пульсаций на входе в LES области.

#### 1.4.5 Оценка производительности

Оценка количества узлов сетки и временных шагов, необходимых для реализации DNS и LES, показывает сложность проблемы с вычислительной точки зрения.

Метод	Число узлов сетки	Число шагов по времени	Готовность
RANS	$10^7$	$10^3$	1985
DES	$10^8$	$10^4$	2000
LES	$10^{11.5}$	$10^{6.7}$	2045
DNS	$10^{16}$	$10^{7.7}$	2080

Таблица 1.3: Перспектива применения методов

Готовность означает практическое применение метода с затратой времени не более суток. Для оценки необходимых вычислительных ресурсов (например, быстродействия и объема оперативной памяти) возьмем расчетную сетку  $100 \times 100 \times 100$  узлов ( $10^6$  точек). В каждом узле необходимо вычислить около 10 функций (составляющие скорости, плотность, давление, температуру, характеристики турбулентности, концентрации компонентов смеси). Значения неизвестных функций находятся в результате решения системы нелинейных уравнений, что требует от 200 до 1000 арифметических операций. За один шаг по времени необходимо выполнить  $10^{10}$  операций с плавающей точкой. Для исследования развития процесса во времени требуется до 1000 временных шагов. В результате, выполнение одного расчета требует  $10^{13}$  операций с плавающей точкой. Для проведения одного расчетного варианта компьютер с производительностью 100 МФлопс ( $10^8$  операций с плавающей точкой в секунду) затратит  $10^7$  секунд. Для проведения расчета за 100 минут потребуется компьютер с производительностью 0.1 ТФлопс.

# ГЛАВА 2

## Моделирование задачи

### 2.1 Постановка задачи

Начальная скорость на входе в канал  $U_0 = 0.29$  м/с. Интенсивность турбулентности 5%. На выходе из канала выставлено условие равенства нулю производной по нормали к границе. Граничные условия непротекания и прилипания устанавливаются для стенки. Это выражено равенством нулю нормальной и тангенциальной составляющих скорости.

$$v \cdot n = 0 \quad v \cdot \tau = 0 \quad (2.1)$$

Здесь  $n$  и  $\tau$  представляют собой единичные векторы нормали и касательной к поверхности канала. Граничные условия для давления выставляются при помощи дискретизации уравнения изменения количества движения в проекции на нормаль к стенке.

Стенка сдерживает рост мелких вихрей и изменяет механизм обмена энергией между разрешимыми и неразрешимыми масштабами турбулентности. При этом число сеточных узлов, необходимых для расчета течения в пограничном слое, возрастает до величины, характерной для DNS. С целью уменьшения потребления вычислительных ресурсов и учета влияния различных факторов, например, шероховатости поверхности, используются метод пристеночных функций и различные модели турбулентного пограничного слоя[6].

Для нестационарных расчетов применяется условие конвективного переноса (неотражающие граничные условия). Поток массы на входе равняется потоку массы на выходе из расчетной области.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + U_0 \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \quad (2.2)$$

### 2.2 Визуализация поставленной задачи

Для построения геометрии канала и создания сеточной модели использовались встроенные средства программного обеспечения Ansys. Он предоставляет универсальное, высокопроизводительное, автоматизированное, интеллектуальное решение для построения сеточной модели, которое создает наиболее подходящую модель для точных и эффективных физических решений – от простого автоматического построения сетки до сложной, более гибридной и детальной сетки.

### 2.2.1 Геометрия канала

Объектом исследования является турбулентный пограничный слой в канале. Канал разбит на две части. Первая часть представляет собой сужение от  $369.5 \times 149.8$  мм в начале до размеров  $124 \times 50$  мм. Длина этого участка 396 мм. Он позволяет значительно увеличить скорость потока жидкости. Вторая часть – прямолинейная, длиною в 1100 мм.

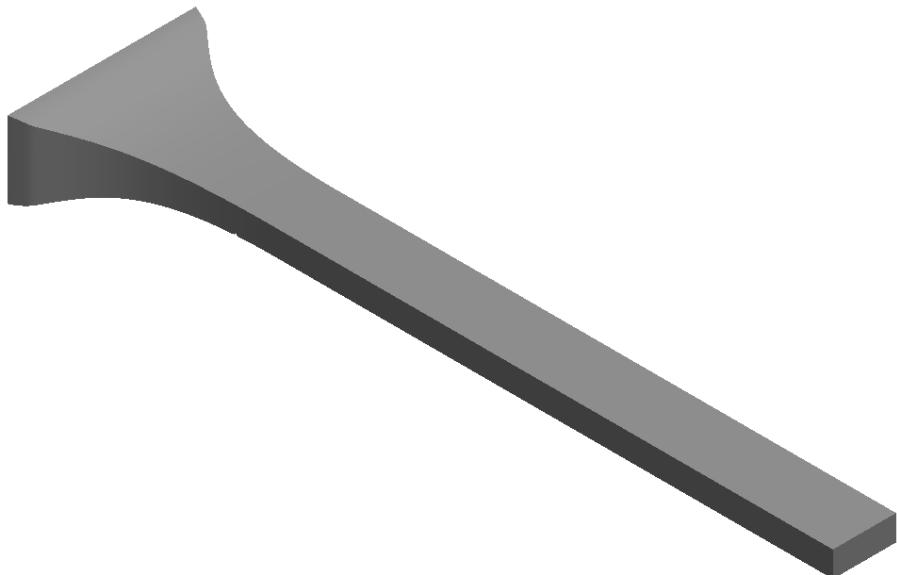


Рисунок 2.1: Общий вид канала

На расстоянии 323.9 мм от входа в канал, у основания расположен вырез представляющий проволоку радиусом 2.1 мм и высотой 1.98 мм. Это препятствие и создаёт турбулентное состояние.



Рисунок 2.2: Вид препятствия в канале

## 2.2.2 Построение сеточной модели

Наиболее важной частью любого численного моделирования – это создание достаточно подробной сеточной модели. От ее качества зависит точность полученных результатов. Кроме того она требует более мелкого разбиения для пограничного слоя, нежели чем основная часть канала, т. к. основные процессы образования вихрей происходит именно там.

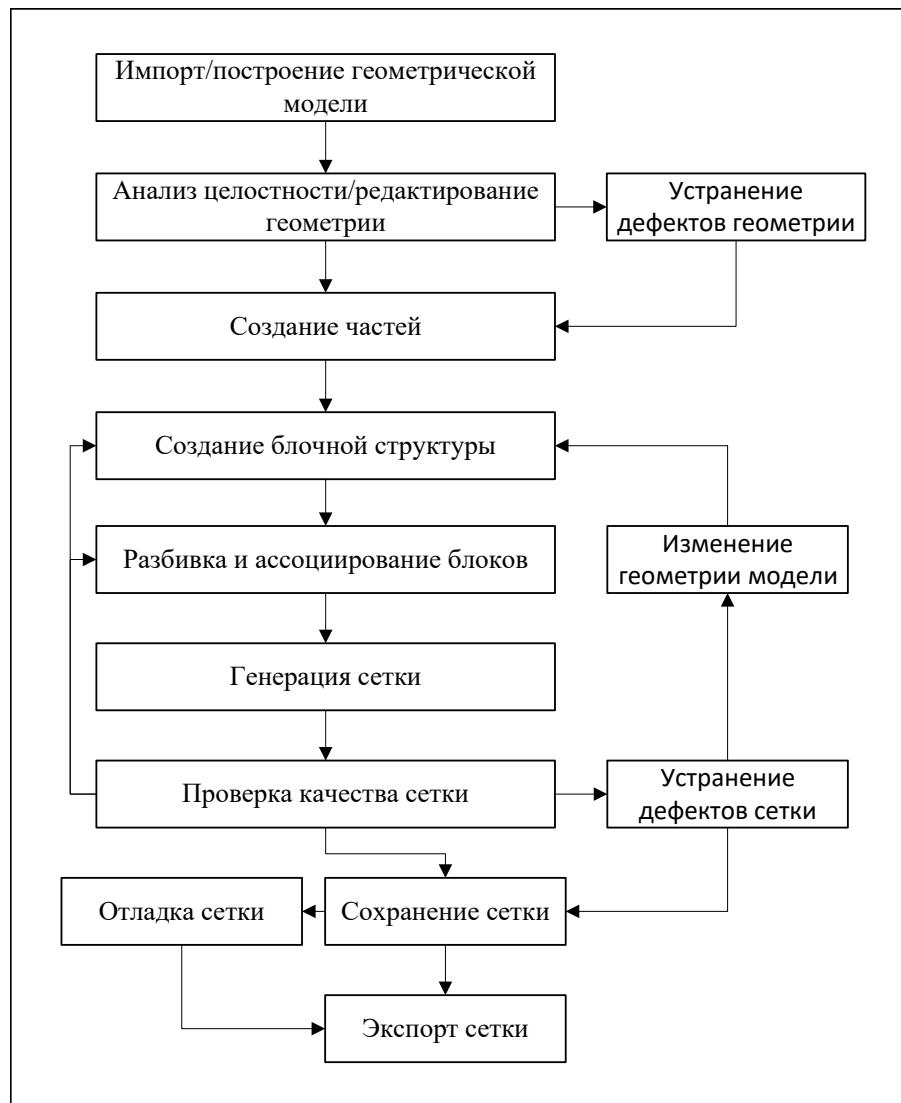


Рисунок 2.3: Схема работы над сеточной моделью

На рисунке 2.3 представлен схематический план генерации сетки. Этот способ наиболее оптимальный для построения достаточно качественной сеточной модели. Разбиение геометрии на части позволяет ускорить построение, путём параллельного распределения вычислений(на каждую часть выделяется одно ядро). Кроме того, выключения режима многопоточности(одно физическое ядро делится на два виртуальных) для процессора увеличивает производительность, т. к. используется вся мощность ядра, а не его половина.

Существует несколько методов моделирования сеточных моделей в Ansys, которые можно использовать в зависимости от типа и размера модели.

Первый – это метод пространственного разбиения, который часто используется для моделирования твердых тел. Этот метод заключается в разбиении объекта на более мелкие элементы, называемые конечными элементами. Затем каждый конечный элемент аппроксимируется более простыми формами, такими как треугольники или прямоугольники, чтобы создать сетку.

Второй – это метод генерации сетки на основе узлов. В этом методе модель представляется в виде набора узлов, соединенных линиями или поверхностями. Затем сетка строится на основе этой структуры.

Третий – это метод многократного разделения. Этот метод часто используется для моделирования пространственных объектов, таких как воздушные суда или автомобили. Он заключается в разбиении объекта на более мелкие блоки и последующем разделении каждого блока на еще более мелкие блоки. Затем каждый блок аппроксимируется более простыми формами для создания сетки.

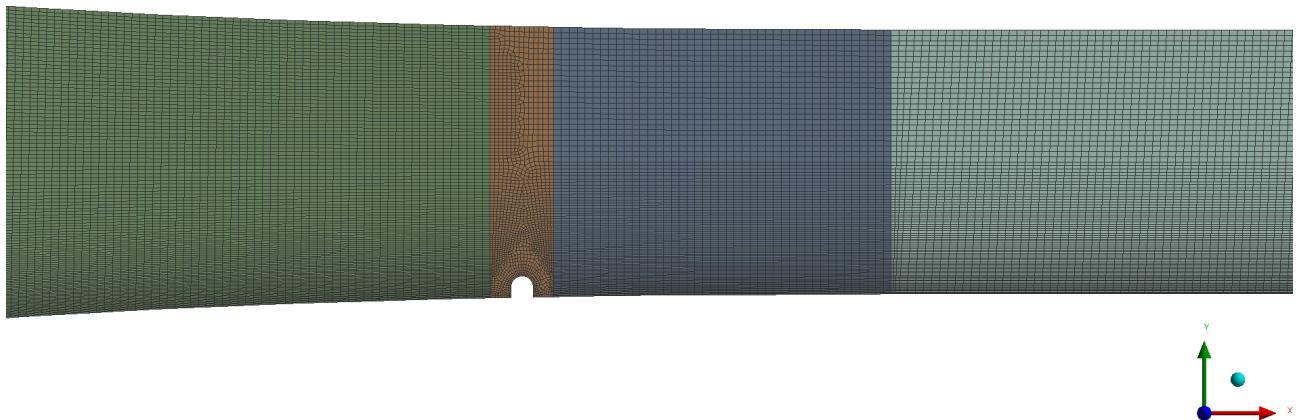


Рисунок 2.4: Сеточная модель

Используя упомянутые выше план и способы построения, была построена сеточная модель. С этой сеткой удалось добиться оптимального результата для вычислений. Канал был поделён на 4 части. Первая часть – вход в канал, вторая – участок с препятствием, третья – до конца сужения, четвёртая – прямой участок канала. Сеточная модель состоит из 51397337 узлов и 12665608 элементов.

## 2.3 Расчёт задачи

Ansys Fluent – это программное обеспечение для численного моделирования физических процессов в жидкостях, газах и теплообменных устройствах. С помощью Ansys Fluent можно проводить расчеты течения жидкости или газа, теплопередачи, химических реакций и других важных явлений. Программа поддерживает широкий спектр физических моделей и методов решения, что позволяет ее применять для самых разнообразных задач. Ansys Fluent имеет удобный пользовательский интерфейс, который позволяет легко создавать, настраивать и запускать вычислительные модели. Также программа предоставляет мощные инструменты для анализа результатов и визуализации данных. В целом, Ansys Fluent является одной из самых популярных и мощных программ для численного моделирования в области тепло- и массопереноса, гидродинамики и других областей физики.

Перейдём к подготовке к вычислениям. В качестве жидкости использовалась вода с характеристиками:  $\rho = 998.2 \text{ kg/m}^3$  и  $\nu = 0.001003 \text{ kg/m} \cdot \text{s}$ . Для подсеточной модели метода LES использовалась модель WALE с коэффициентом  $C_w = 0.325$ . Основные преимущества данной модели:

- пространственный оператор содержит как локальные деформации, так и скорости вращения. Таким образом, все структуры турбулентности, имеющие отношение к диссиpации кинетической энергии, вычисляются этой моделью;
- турбулентная вязкость стремится к нулю вблизи стенки, так что ни постоянная(динамическая) регулировка, ни функция демпфирования не требуются для расчета течений, ограниченных стенкой;
- модель дает нулевую турбулентную вязкость при чистом сдвиге. Таким образом, он может воспроизвести процесс перехода от ламинарного к турбулентному потоку за счет роста линейных неустойчивых режимов.

Кроме того, модель WALE инвариантна к любому перемещению или вращению координат, и требуется только локальная информация (отсутствие операции проверки-фильтрации и сведений о ближайших точках в сетке), так что она хорошо подходит для LES в сложных геометриях[7].

В качестве расчётной схемы использовался алгоритм SIMPLEC. Он представляет из себя полу-неявный метод для согласованных уравнений, связанных с давлением. Эта схема является модифицированной формой SIMPLE метода. Его алгоритм был разработан Ван Дормалом и Райти в 1984 году. В нём за счет изменения определения коэффициентов уравнения поправки на давление

частично компенсируются эффекты отбрасывания соседних сеточных поправок на скорость (второе приближение в алгоритме SIMPLE)[8].

Некоторые другие параметры, связанные с расчётом уравнений:

Параметр	Метод
Градиент	Least squares cell based
Давление	Second order
Импульс	Bounded central differencing
Время	Bounded second order implicit

Таблица 2.1: Перечень параметров решателя

С описанными настройками и параметрами выше, был запущен расчёт в ANSYS FLUENT. Размер временного шага  $\Delta t = 0.001s$ , их количество  $s_t = 10000$ . На каждый шаг рассчитывалось  $s_i = 50$  итераций. Это составляет 10 с реального времени.

# ГЛАВА 3

## Анализ полученных данных

### 3.1 Обработка данных

В результате вычислений, которые заняли примерно месяц, были полученные *.dat* файлы. Каждый из этих массивов данных соответствует определённому временному шагу. Для последующей обработки и на их основе построение графиков использовалось встроенное средство ANSYS CFD-Post. Для анализа влияния вихрегенераторов на локальное трение и перенос использовались различные сечения в разных частях канала. Некоторые из них представлены на рисунке 3.1.

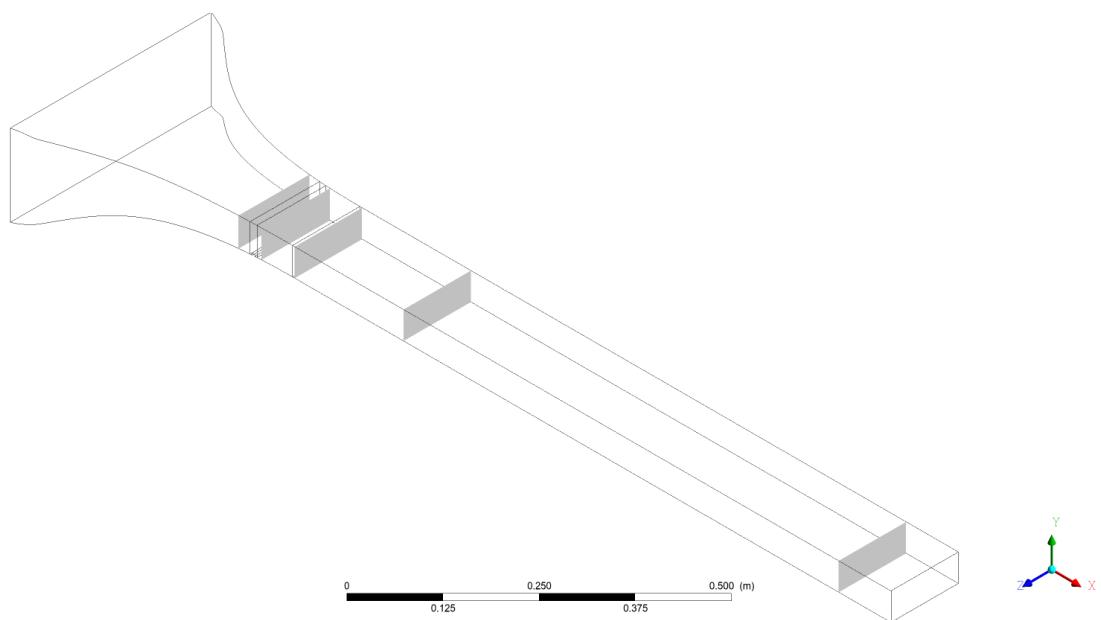


Рисунок 3.1: Сечения для анализа

Начало координатных осей модели расположено в центре входа канала. Рассматривались сечения на разных высотах вдоль и различных расстояниях от входа в канал. На таблице ниже представлен перечень сечений, расположение и их описание. Изображения в приложениях имеют названия исходя из таблицы.

Подпись	Плоскость	Расположение	Описание
PlaneXY	XY	Z = 0	вдоль всего канала
PlaneYZ300	YZ	X = 300	перед препятствием
PlaneYZ340	YZ	X = 340	за проволокой
PlaneYZ400	YZ	X = 400	на входе в прямой участок
PlaneYZ600	YZ	X = 600	далее по каналу
PlaneYZ1400	YZ	X = 1400	на выходе из канала
PlaneXZ0	XZ	Y = 0	над пограничным слоем
PlaneXZ20M	XZ	Y = -20	над препятствием
PlaneXZ23M	XZ	Y = -23	на уровне проволоки

Таблица 3.1: Перечень сечений

После окончания вычислений был автоматически сгенерирован график, благодаря которому можно оценить точность полученных результатов на данной сеточной модели. Она достигла значения в  $10^{-3}$ .

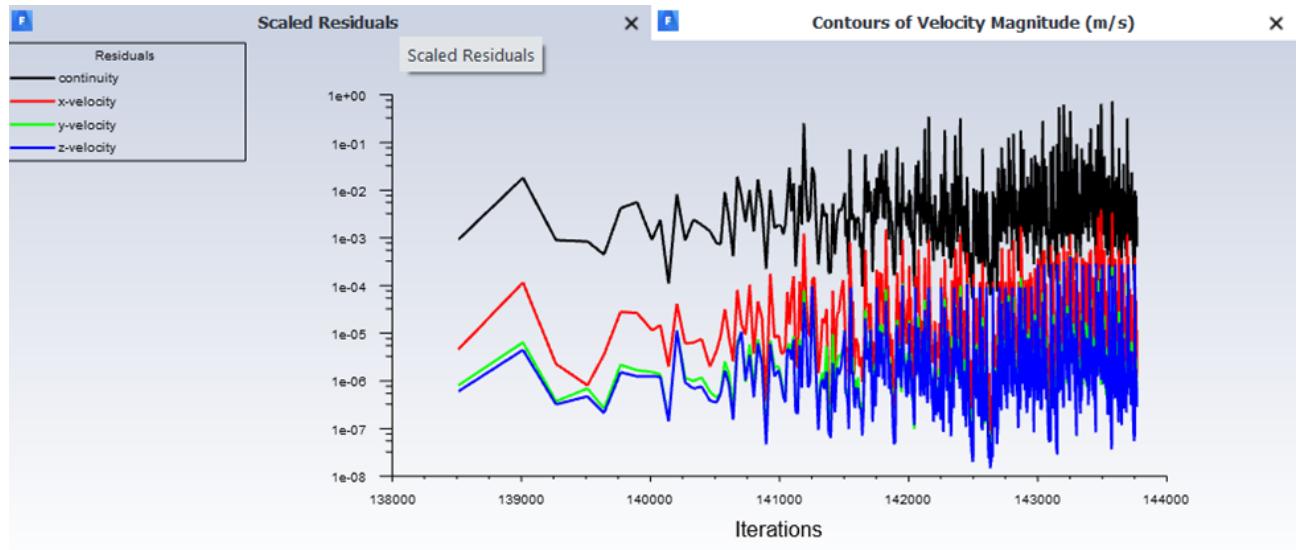


Рисунок 3.2: Scaled residuals

## 3.2 Влияние на локальное трение и перенос

Далее для удобства описания результатов и их оценки, представлено несколько пунктов по различным параметрам.

### 3.2.1 Скорость

Начнём анализ со скорости. По полученным сечениям были построены контуры средних скоростей для различных временных отрезках.

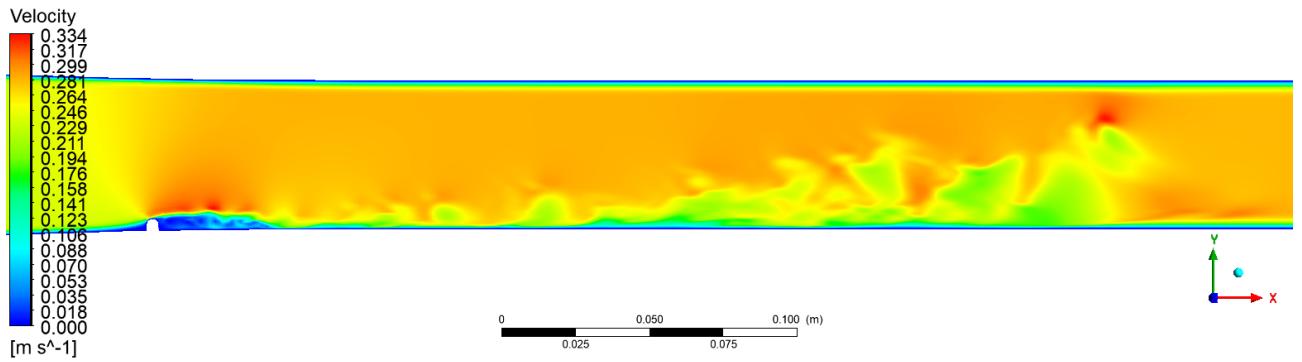


Рисунок 3.3: Скорость в продольном сечении XY,  $t = 1.6$  с

Как видно из рисунка вдоль канала, скорость сразу за препятствием и на его уровне приблизилась к нулю. А над проволокой значительно увеличилась. Из-за таких резких изменений скорости происходит образование вихревых структур, скорость которых хорошо заметна на этих изображениях.

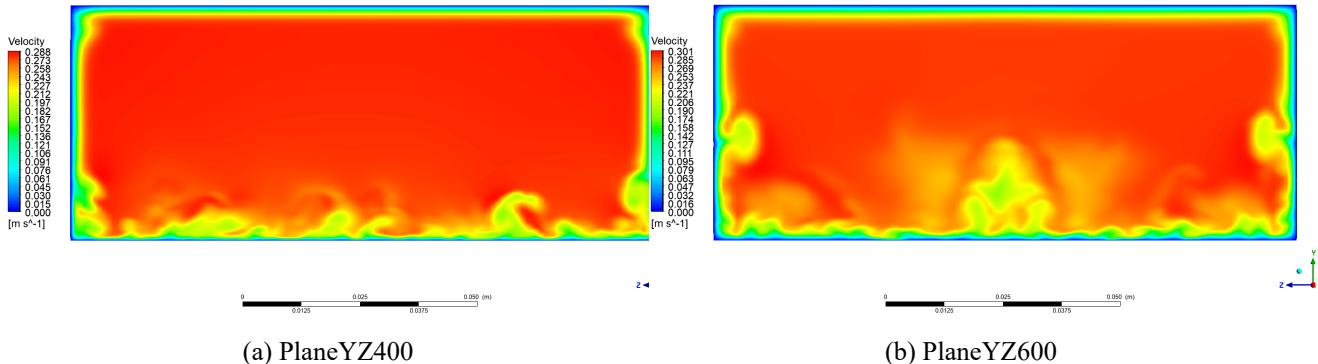


Рисунок 3.4: Скорость в поперечных сечениях при  $t = 1.6$  с

Эти вихревые образования можно заметить и на рисунке 3.4.

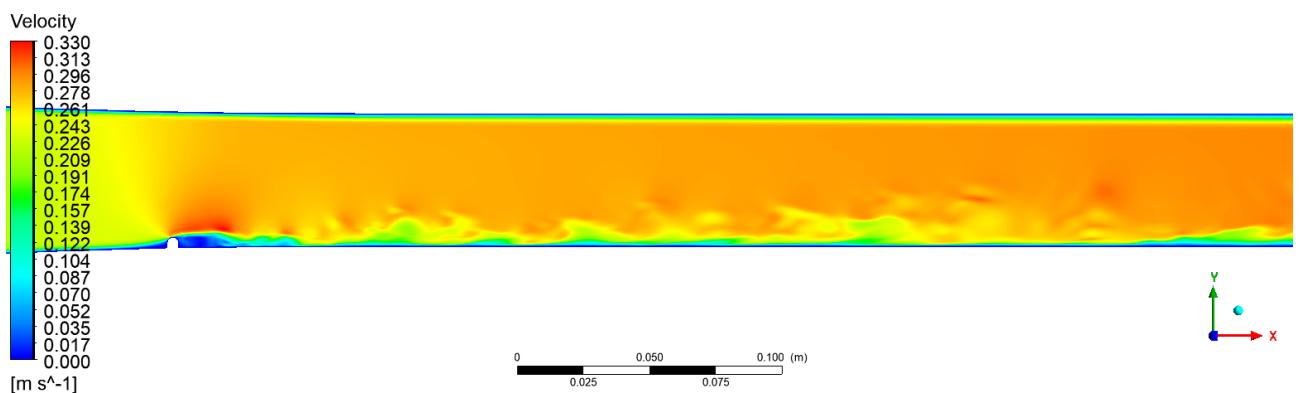


Рисунок 3.5: Скорость в продольном сечении XY,  $t = 9.6$  с

К моменту времени  $t = 9.6$  с вихревая структура канала стала менее выраженной и крупные вихри преобразовались в мелкие. Рассмотрим подробнее скорость в поперечных сечениях в момент времени  $t = 9.6$  с.

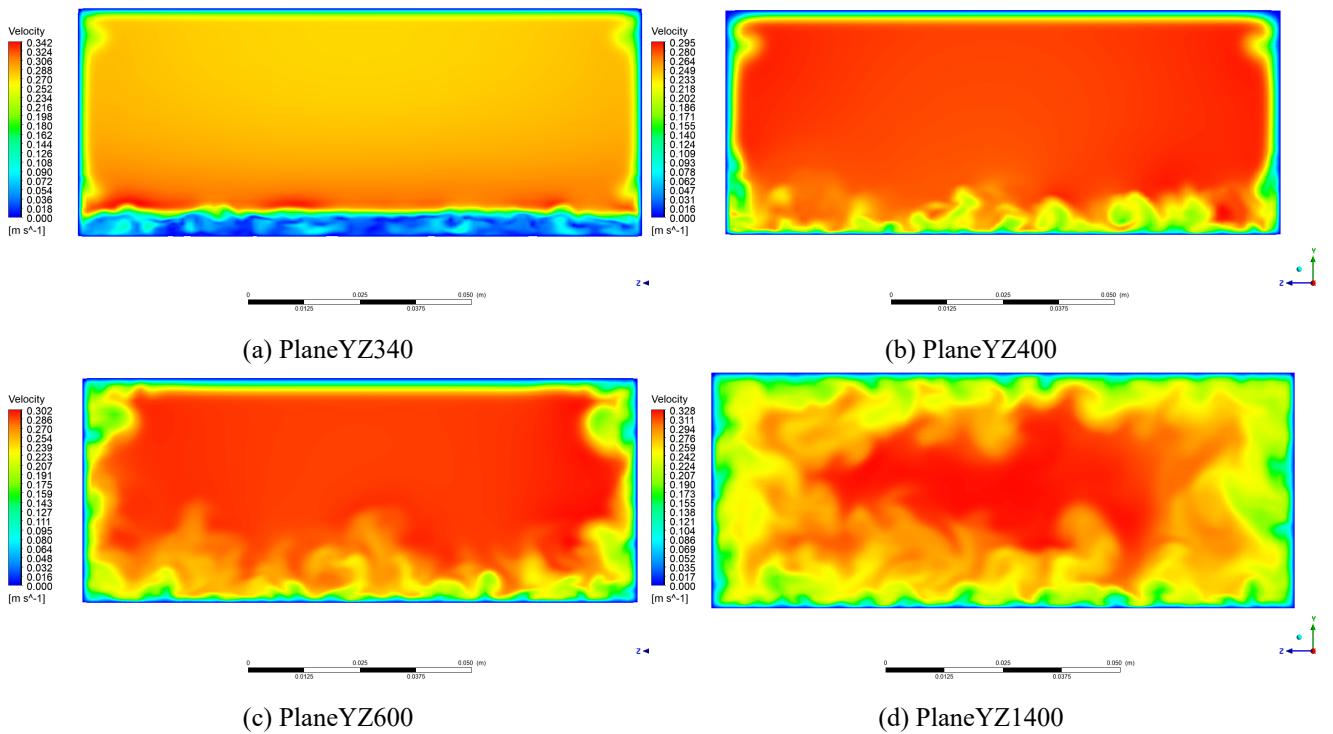


Рисунок 3.6: Скорость в поперечных сечениях при  $t = 9.6$  с

Как видно на рисунке 3.6 образованные вихри постепенно распадаются до вихрей колмогоровского масштаба и диссирируют в энергию.

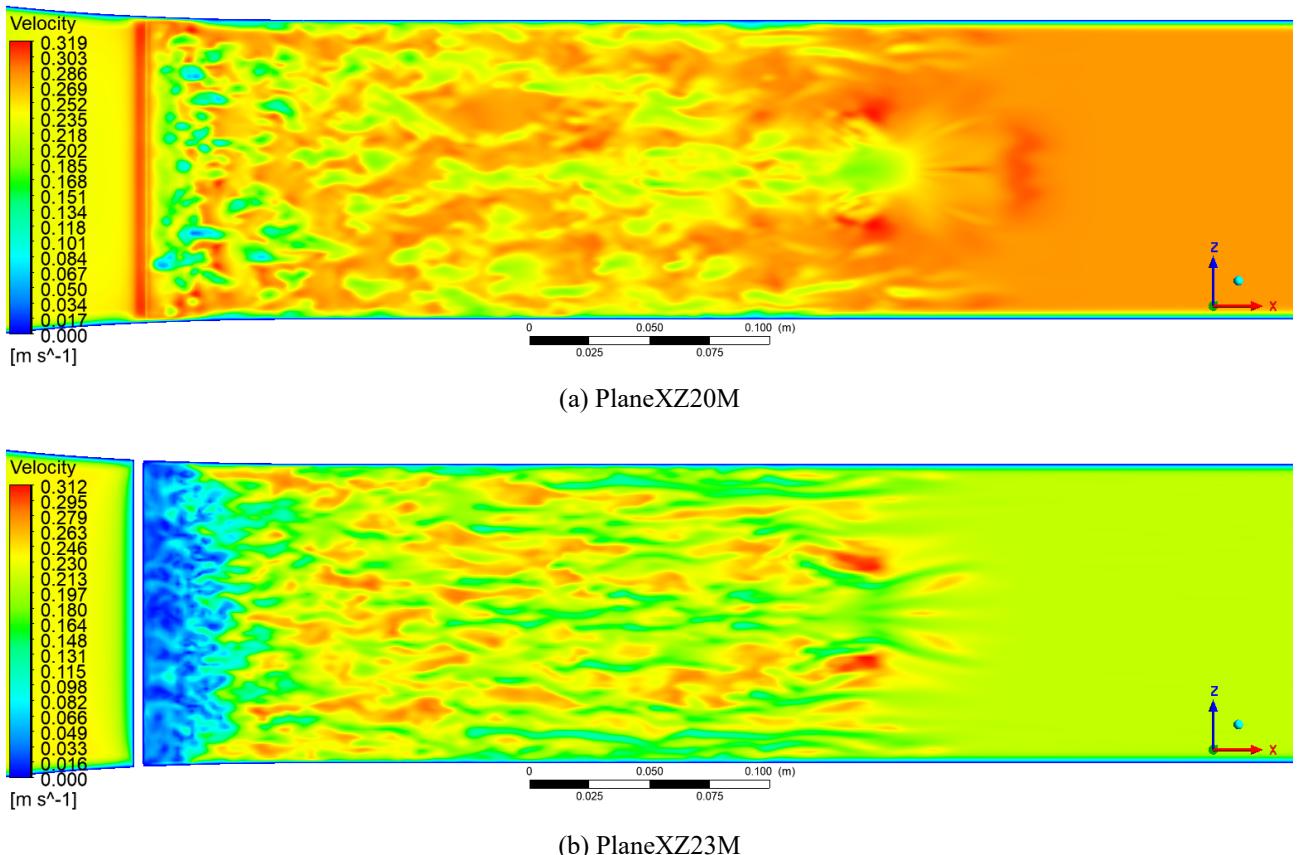


Рисунок 3.7: Скорость в продольных сечениях XZ при  $t = 1.6$  с

### 3.2.2 Коэффициент трения

Чтобы получить данные коэффициентов трения для построения графиков, в Ansys Fluent были построены необходимые сечения. Они делят канал вдоль на 3 части( $z_1 = -31, z_2 = 0, z_3 = 31$ ). После этого встроенными средствами экспортировались данные в файлы формата *.csv*. Далее при помощи MS Excel были выделены данные касающиеся пограничного слоя. И в конце сгенерированы графики в gnuplot. Оценивались 4 временных отрезка. На графиках отражена зависимость  $C_f$  от координаты  $x$ . При достижении потоком жидкости препятствия происходит резкое изменение  $C_f$ . Коэффициент вырос в 2.6 раза. По мере продвижения по длине канала коэффициент уменьшался и стабилизировался. Это обусловлено уменьшением влияния вихревых структур на пограничный слой.

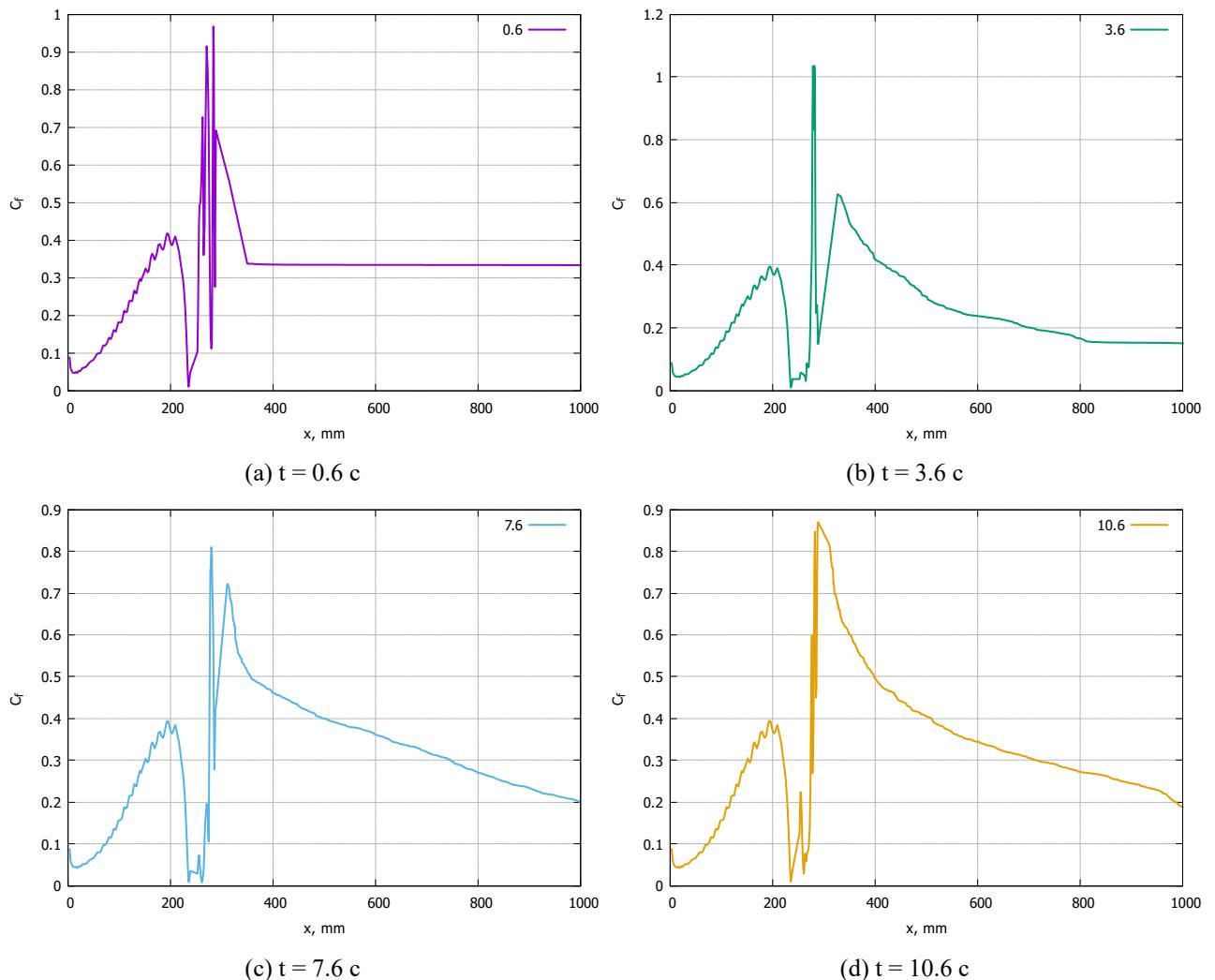


Рисунок 3.8: Изменение коэффициента трения по длине канала,  $z = 0$

### 3.2.3 Q критерий

Существуют различные подходы к визуализации вихревых течений, использующие то или иное определение вихря и критерии его идентификации. Классификация методов визуализации вихревых течений проводится в зависимости от того, каким способом определяется вихрь (в области или на линии), является ли метод инвариантным по отношению к преобразованию системы координат, носит подход локальный или глобальный характер[9]. Одним из таких является  $Q$  критерий( $Q - criterion$ ). Он определяется по двум компонентам: тензор скоростей деформаций  $S$  и тензор вращения  $\Omega$ .

$$S = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \Omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.1)$$

Критерий  $Q$  определяется как второй инвариант тензора градиента скорости[10].

$$Q = \frac{1}{2} (||\Omega||^2 - ||S||^2) \quad (3.2)$$

Из этого мы можем видеть, что положительные значения  $Q$  указывают на области в поле течения, где преобладает завихренность, а отрицательные значения  $Q$  указывают на области, в которых преобладают скорость деформации или вязкое напряжение. Кроме того, существуют различные варианты  $Q$  критерия в модифицированных выражениях, которые используются для описания различных областей течения[11, 12].

Различные области вихревых образований представлено ниже. На рисунке 3.9 можно заметить явно выраженную структуру образовавшегося вихря.

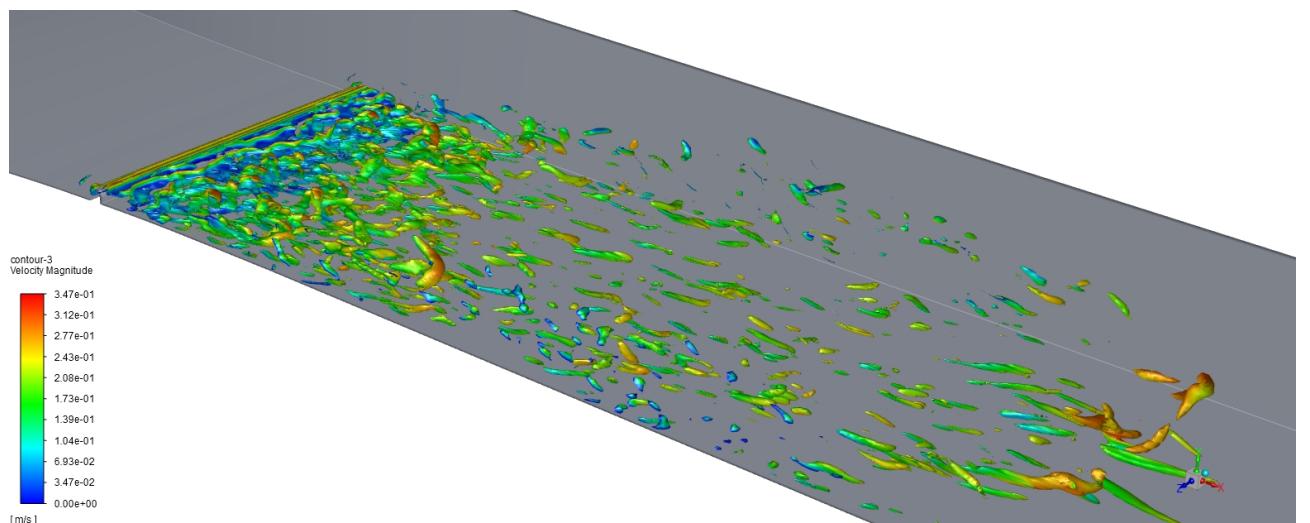


Рисунок 3.9: Вихревая структура при  $Q = 860$  и  $t = 1.6$  с

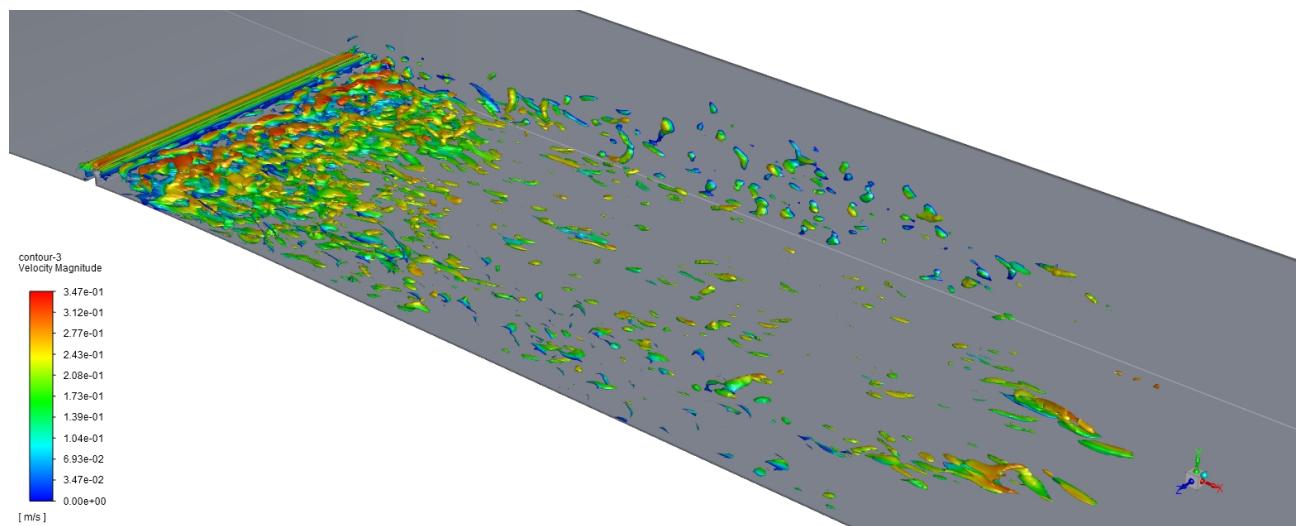


Рисунок 3.10: Вихревая структура при  $Q = -850$  и  $t = 1.6$  с

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В данной работе изучены различные методы моделирования турбулентных течений, их преимущества и недостатки, а также оценена производительность. Помимо этого изучены способы построения сеточной модели и создана оптимальная схема по работе над ней.

В результате проведённого моделирования канала в Ansys Fluent методом моделирования крупных вихрей было оценено влияние на граничный слой. Благодаря размещению вихрегенератора поперёк образовался турбулентный режим движения. Эти вихревые структуры значительно повлияли на локальное трение и перенос.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] А. С. Монин и А. М. Яглом. *Статистическая гидромеханика. Теория турбулентности*. СПб:Гидрометеоиздат, 1992.
- [2] И. А. Белов и С. А. Исаев. *Моделирование турбулентных течений*. СПб: Изд-во БГТУ, 2001.
- [3] К. Н. Волков и В. Н. Емельянов. *Моделирование крупных вихрей в расчётах турбулентных течений*. Военмех, Спб, 2005.
- [4] C. Fureby и др. *Large eddy simulation of the flow around a square prism*. AIAA Journal, 2000.
- [5] M. Strelets. *Detached eddy simulation of massively separated flows*. AIAA Journal, 2001.
- [6] W. Cabot. *Large-eddy simulation with wall models*. Annual research briefs Center for Turbulence Research, 2000.
- [7] F. Nicoud и F. Ducros. “Subgrid-Scale Stress Modelling Based on the Square of the Velocity Gradient Tensor”. B: *Flow, Turbulence and Combustion* (1999).
- [8] Dong-Liang Sun и др. “Performance analysis of IDEAL algorithm for three-dimensional incompressible fluid flow problems”. B: *International journal for numerical methods in fluids* (2008).
- [9] J. Hunt, A. Wray и P. Moin. “Eddies, stream, and convergence zones in turbulent flows”. B: *Center for Turbulent Research* (1988).
- [10] A. Wiebel и др. “Generalized streak lines: analysis and visualization of boundary induced vortices”. B: *IEEE Transact. Visualizat. Comput. Graphics.* (2007).
- [11] C. H. Berdahl и D. S. Thompson. “Eduction of swirling structure using the velocity gradient tensor”. B: *AIAA Journal* (1993).
- [12] M. S. Chong, A. E. Perry и B. J. Cantwell. “A general classification of three-dimensional flow field”. B: *Phys. Fluids*. (1990).

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

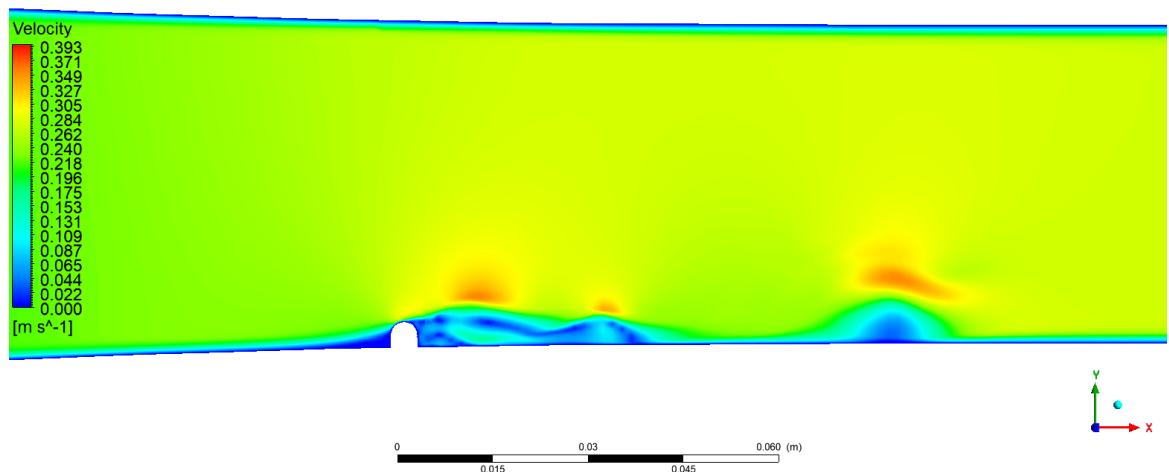
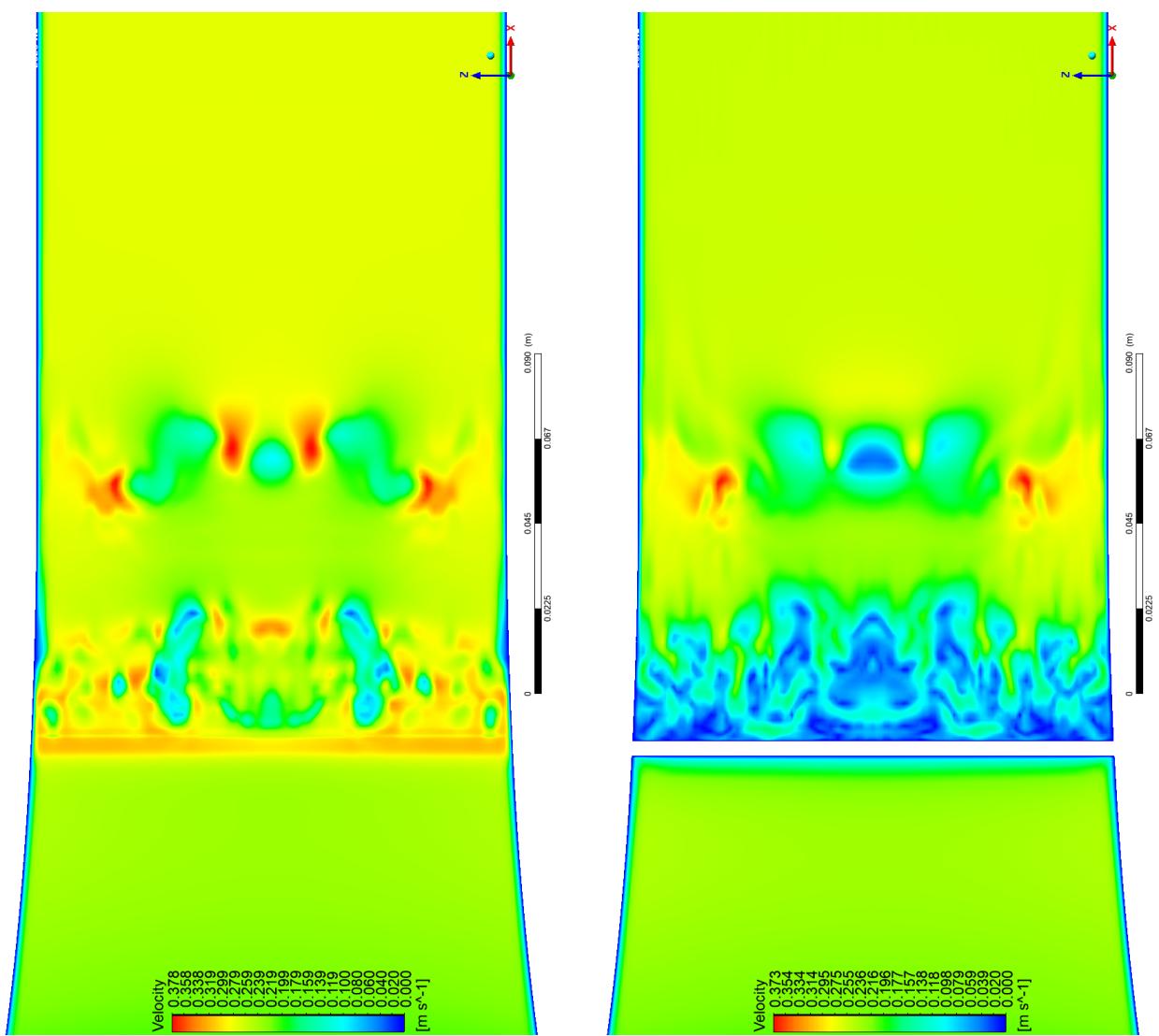


Рисунок 1: PlaneXY,  $t = 0.6$  с



(a) PlaneXZ20M

(b) PlaneXZ23M

Рисунок 2: PlaneXZ,  $t = 0.6$  с

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

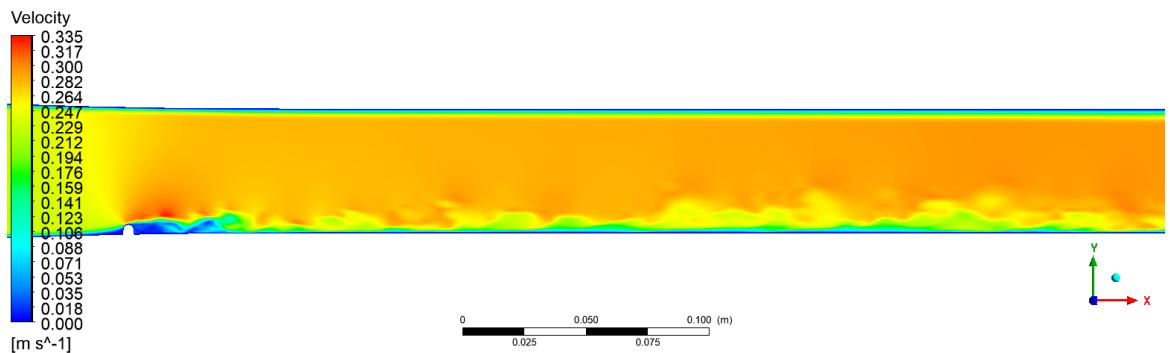


Рисунок 3: PlaneXY,  $t = 10.6$  с

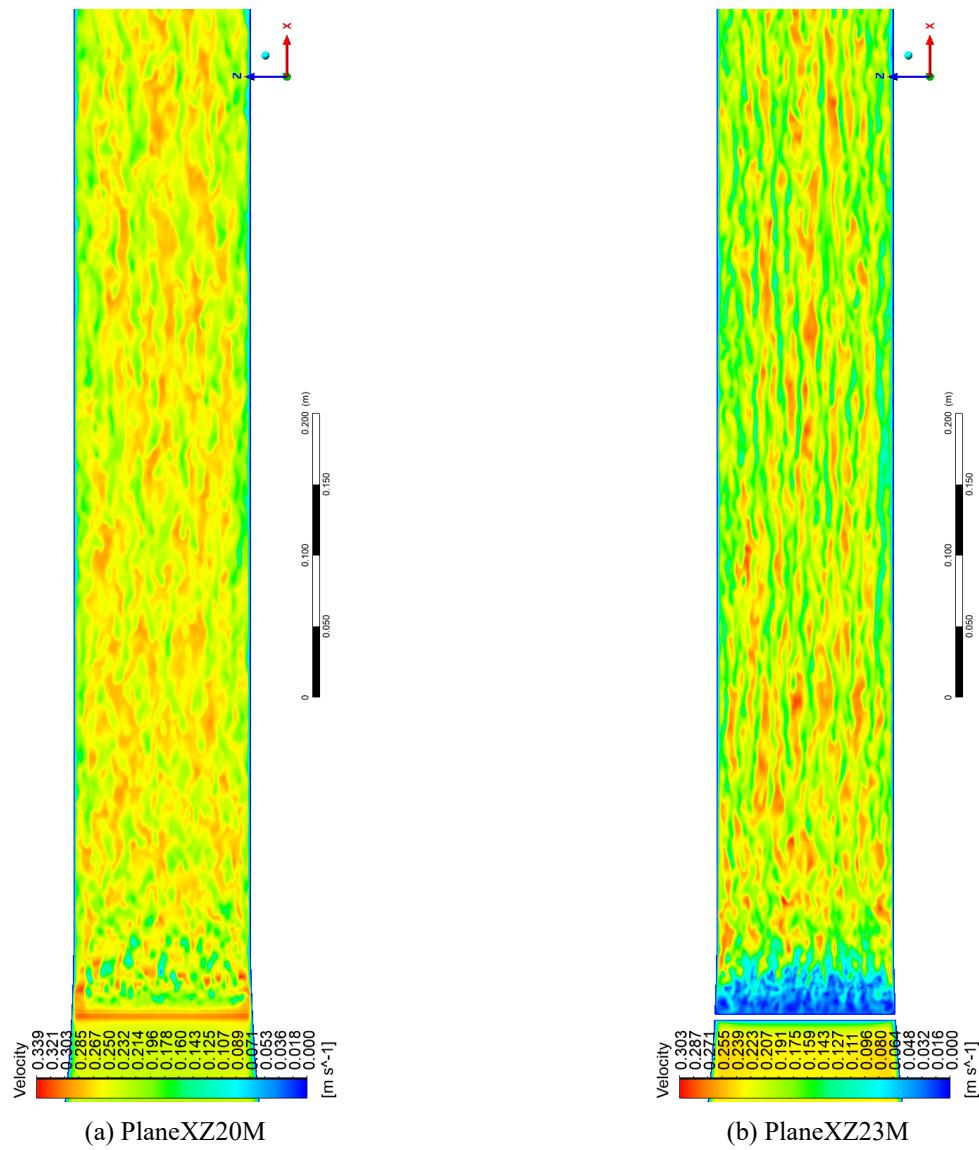


Рисунок 4: PlaneXZ,  $t = 10.6$  с

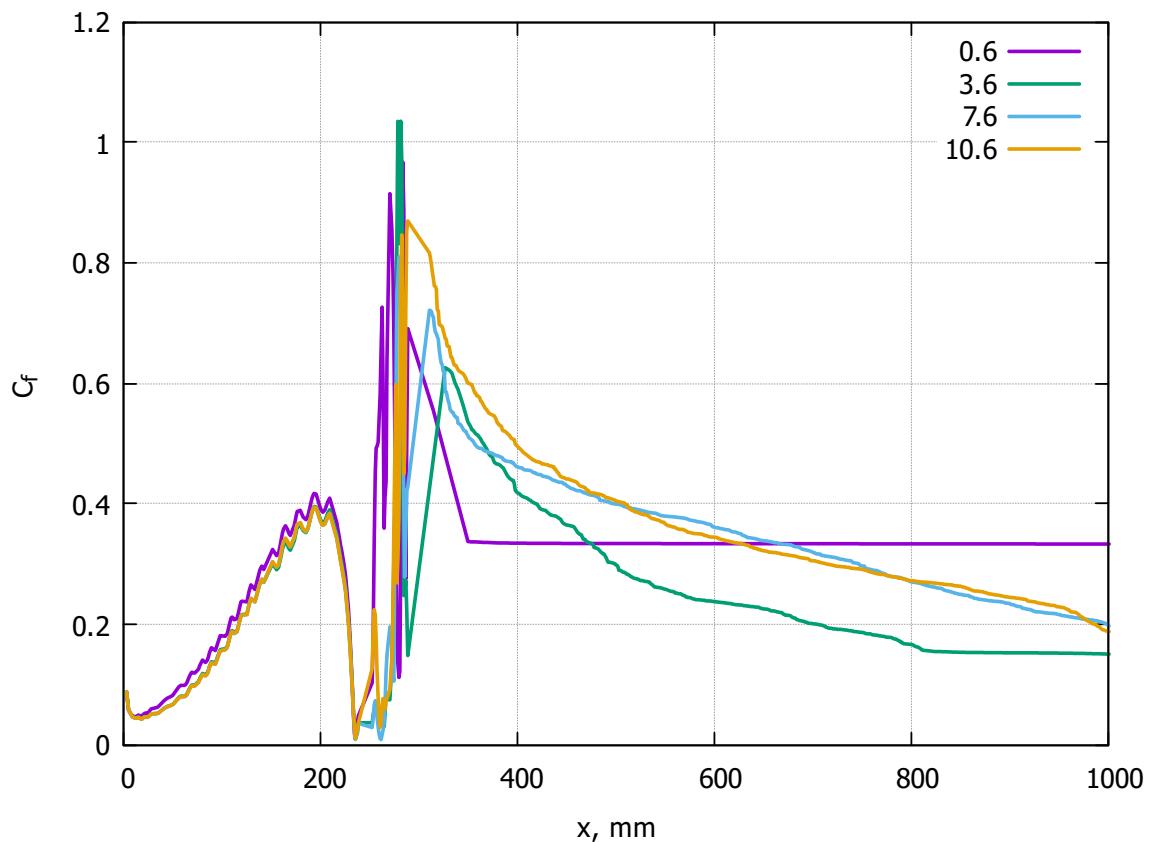


Рисунок 1: Изменение коэффициента трения по длине канала

## **ПРИЛОЖЕНИЕ В**