

УДК 532.526

## ВЛИЯНИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ ПОТОКА БОКОВЫМИ СТЕНКАМИ НА ПОПЕРЕЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА ПРИ УМЕРЕННЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

© 2023 г. О. А. Душина<sup>a,\*</sup>, Е. И. Калинин<sup>a,b,\*\*</sup>, М. А. Ключев<sup>a,c,\*\*\*</sup>,  
А. Б. Мазо<sup>a,b,\*\*\*\*</sup>, В. М. Молочников<sup>a,c,\*\*\*\*\*</sup>

<sup>a</sup>Федеральный исследовательский центр Казанский научный центр РАН, Казань, Россия

<sup>b</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет, Казань, Россия

<sup>c</sup>Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева (КАИ),  
Казань, Россия

\*E-mail: o.a.dushina@mail.ru

\*\*E-mail: kalininei@yandex.ru

\*\*\*E-mail: yahoo\_099@mail.ru

\*\*\*\*E-mail: abmazo1956@gmail.com

\*\*\*\*\*E-mail: vmolochnikov@mail.ru

Поступила в редакцию 28.06.2022 г.

После доработки 10.10.2022 г.

Принята к публикации 11.10.2022 г.

Выполнено численное и экспериментальное исследование влияния ограничения потока по трансверсальной координате на поперечное обтекание кругового цилиндра при числах Рейнольдса (по диаметру цилиндра и скорости невозмущенного потока) от 40 до 255. В экспериментах цилиндр располагался в канале прямоугольного поперечного сечения, а при численном моделировании на ограничивающих поток боковых стенках ставились три типа граничных условий: периодические граничные условия, условия скольжения и прилипания. Особое внимание уделено вихревой структуре течения в следе цилиндра. Показано, что только в случае граничных условий прилипания, в области соединения цилиндра с боковыми стенками формируются спиралевидные вихри, движущиеся к плоскости симметрии канала. При их взаимодействии в центре канала образуются вихревые сгустки и наблюдаются признаки турбулизации потока в следе. При периодических граничных условиях и условиях скольжения на боковых стенках спиралевидные вихри отсутствуют, а в диапазоне  $Re$  от 200 до 250 в следе цилиндра реализуются моды А и Б трехмерной неустойчивости и переход к турбулентности. Получена оценка влияния ширины канала и типа граничных условий на его боковых стенках на структуру вихревого следа за цилиндром и интегральные параметры его обтекания.

**Ключевые слова:** обтекание кругового цилиндра, стенки канала, переход к турбулентности, моды А и Б трехмерной неустойчивости, граничные условия, прямое численное моделирование

DOI: 10.31857/S0568528122600448, EDN: AIEIPR

Обтекание кругового цилиндра потоком вязкой жидкости моделирует широкий класс отрывных течений около затупленных тел; этой задаче гидродинамики посвящено значительное количество экспериментальных и численных исследований, например, [1–5], главной целью которых обычно является интегральная характеристика – зависимость коэффициента сопротивления цилиндра или частоты срыва вихрей от числа Рейнольдса. В большинстве публикаций неявно предполагается, что результаты относятся к поперечному обтеканию бесконечно длинного цилиндра безграничным равномерным потоком вязкой жидкости. Это относится и к классическим экспериментальным результатам разных авторов, представленным в [6] на рис. 1.4. Между тем, любые реальные лабораторные измерения проводятся в потоках, ограниченных стенками, что может влиять не только на вихревую картину течения в следе, но и на интегральные параметры обтекания препятствия.

При поперечном обтекании длинного цилиндра диаметра  $d$  однородным, со скоростью  $\mathbf{u} = (U, 0, 0)$ , безграничным потоком жидкости вязкости  $V$  режим течения в следе за телом определяется критерием подобия Рейнольдса  $Re = Ud/v$ , причем с ростом этого числа наблюдается потеря устойчивости одного режима течения и замена его другим. Согласно [7] при  $Re_1^* \approx 5$  происходит стационарное двумерное (в плоскости  $xy$ , ортогональной оси цилиндра), безотрывное обтекание, которое сменяется отрывным следом с парой симметричных стационарных вихревых зон за телом. Эти зоны увеличиваются с ростом числа Рейнольдса, и при  $Re < Re_2^* \approx 41$  теряют устойчивость, формируя двумерную вихревую дорожку Кармана с периодическим срывом вихрей с поверхности цилиндра [7]. Картина течения остается двумерной [5] вплоть до  $Re < Re_3^* \approx 180$ , когда происходит переход к трехмерному течению в следе за препятствием.

До последнего десятилетия прошлого века основное внимание в исследованиях поперечно обтекаемого цилиндра уделялось номинально двумерному процессу формирования вихрей в следе. В экспериментах это условие старались обеспечить за счет увеличения удлинения цилиндра. Так, в работе [8] представлены результаты визуализации структуры вихрей, сходящих с поверхности цилиндра, которые получены на буксируемых моделях с удлинением порядка 150 и 300 (диаметр цилиндров  $d$  составлял 3.28 и 6.57 мм, а длина  $L$  порядка 1 м). В лабораторных экспериментах [9] удлинение цилиндра было доведено до нескольких тысяч диаметров. Тем не менее, как отмечается в [10], в настоящее время полностью исключить влияние граничных условий на концах цилиндра в экспериментах невозможно.

Численное моделирование поперечного обтекания цилиндра часто выполняют по двумерной модели, напр., [11]. В трехмерных расчетах для имитации обтекания бесконечно длинного цилиндра безграничным потоком подавляющее большинство исследователей ставят на боковых границах конечной расчетной области либо периодические граничные условия, либо условия свободного скольжения [12–17]. В обоих случаях касательные напряжения на боковых границах равны нулю, вязкий пограничный слой там не формируется, и его взаимодействие с областью отрыва потока за цилиндром не происходит. В [10] данный прием назван “эффективным числовым трюком”, используемым для экономии вычислительных ресурсов. Однако, как показывают многочисленные результаты подобных расчетов, размер расчетной области по размаху цилиндра оказывает влияние на распределение характеристик потока в его ближнем следе [15–17].

Известно, что при  $150 < Re < 300$  в следе поперечно обтекаемого цилиндра происходят переходные процессы. Впервые на их существование в этом диапазоне чисел Рейнольдса указано в [18], где автор обнаружил крупномасштабные трехмерные неоднородности поля скорости. На графике зависимости безразмерной частоты образования вихрей (числа Струхала  $St$ ) от числа  $Re$  эти явления отображаются в виде двухступенчатых изменений. При  $Re_3^* \approx 180$  наблюдается резкое падение  $St$ , а при увеличении  $Re$  до  $Re = Re_4^* \approx 240$  – резкое увеличение числа Струхала [5, 8, 18]. Первое изменение исследователи связывают с появлением продольных вихревых пар с масштабом длины порядка  $3–4d$ , так называемой моды неустойчивости А. Второе изменение, режим неустойчивости моды Б, связано с формированием коротких вихревых образований длины  $d$  и характеризуется постепенной передачей энергии к ним от вихрей моды А. Моды неустойчивости А и Б описаны в [5, 8], где система вихрей, сходящих с поверхности цилиндра, визуализировалась с помощью флуоресцентного красителя, смываемого с поверхности обтекаемого тела и возбуждаемого при помощи лазерного излучения.

При прямом численном моделировании обтекания цилиндра моды неустойчивости А и Б были впервые обнаружены в работах [19, 20]. Отметим, что в расчетах использовались периодические граничные условия на боковых границах расчетной области. Эксперименты [20] проводились с цилиндрами удлинения от 50 до 133, причем для обеспечения близкого к двумерному режиму обтекания цилиндр снабжался концевыми шайбами, которые устанавливались на некотором расстоянии от боковых стенок канала, отсекая тем самым развивающийся на них вязкий пограничный слой.

Можно констатировать, что практически все результаты формирования вихревых структур за поперечным круговым цилиндром на переходных режимах течения получены при условии минимизации (в эксперименте) или отсутствия (при численном моделировании) влияния боковых стенок.

Попытки оценить влияние граничных условий прилипания на боковых границах расчетной области на обтекание цилиндра предпринимались крайне редко. Одно из немногих исследований в этом направлении выполнено в [10] с использованием метода моделирования крупных вихрей (LES) для турбулентного потока. Расчеты показали, что, несмотря на наличие двумерной

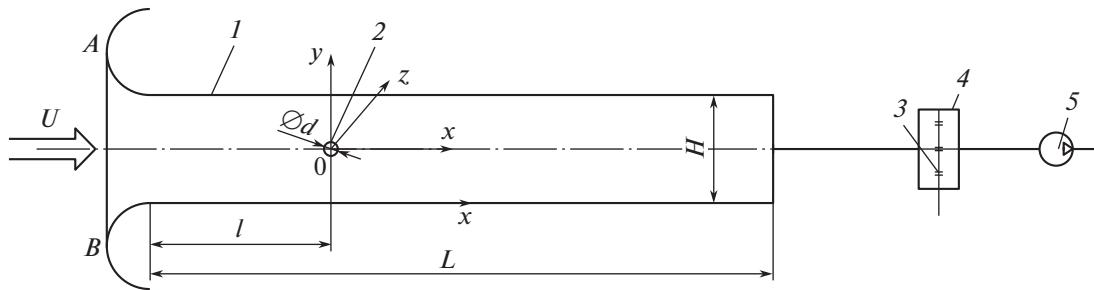
области в центральной зоне канала при  $L/d = 24$ , статистические характеристики турбулентного течения в этой области существенно отличаются от случая периодических граничных условий, а сдвиговые слои за цилиндром оказались более устойчивыми, что задерживало образование турбулентного следа. Однако эти исследования выполнены только для одного значения  $Re = 3900$  и не затрагивают вопросов, связанных с переходом к трехмерной структуре следа при умеренных числах Рейнольдса порядка  $10^2$ .

В [21] на основе решения нестационарных уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости в естественных переменных изучается структура течения в следе цилиндра при наличии боковых стенок канала и различных сочетаниях числа Рейнольдса ( $50 < Re < 100$ ) и удлинения цилиндра ( $5 < L/d < 90$ ). Особое внимание уделяется формированию и характеристикам вихревых структур в области соединения цилиндра и боковых стенок. Обнаружен ячеистый характер этих структур, установлены основные закономерности их эволюции в зависимости от сочетания варьируемых параметров. Предпринята попытка классификации этих структур и описания механизма их зарождения и развития. Как показано в [21], в местах крепления цилиндра к боковым стенкам формируются дополнительные крупномасштабные вихревые структуры, движущиеся к центру потока. Они способны не только заметно исказить идеальную картину обтекания цилиндра безграничным потоком в виде вихревой дорожки Кармана, но и повлиять на интегральные параметры потока, такие как коэффициент сопротивления. Борьба с указанными искажениями сводится к снижению влияния пограничного слоя на боковых стенках канала. Для этого в лабораторных экспериментах и численном моделировании увеличивают относительное удлинение цилиндра (расширение канала) или применяют установку концевых шайб. При численном моделировании, кроме того, на боковых стенках (границах расчетной области по размаху цилиндра) вместо реальных граничных условий прилипания ставят специальные граничные условия, обеспечивающие отсутствие касательных напряжений и пограничного слоя (периодические граничные условия или условия скольжения).

Существенно трехмерный характер вихревой структуры течения наблюдается и при поперечном обтекании цилиндрических тел конечного (малого) удлинения в условно безграничном внешнем потоке. Большинство подобных исследований выполнено при умеренно высоких числах Рейнольдса [22–24]. Особый интерес представляет изучение структуры такого течения при малых числах Рейнольдса: эксперименты и численное моделирование таких течений встречаются достаточно редко [25, 26]. В [27] представлены результаты совместного численного и экспериментального исследования вихревых структур, формирующихся при обтекании кругового цилиндра конечного размаха в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re$  от 50 до 150 при отношении размаха цилиндра к его диаметру  $L/d$  от 1.5 до 5. Обнаружено новое физическое явление: в некотором диапазоне параметров  $Re - L/d$  течение в следе цилиндра является стационарным, отрывным и дважды симметричным. Встречные линии тока в плоскости биссекционного сечения (плоскости, проходящей через ось цилиндра) и в соседних параллельных ей плоскостях могут приводить к формированию источниковоподобного течения в следе в центральной плоскости поперечного сечения цилиндра. При этом центр источника совпадает с так называемой седловой точкой в плоскости биссекционного сечения. Авторами [27] выполнена классификация схем течения и высказано предположение о существовании нового типа неустойчивости течения в следе. Выявлены закономерности изменения коэффициента сопротивления цилиндра в исследуемом диапазоне параметров.

Особенности трехмерной вихревой структуры течения при отрыве потока за цилиндрическими телами некруглого поперечного сечения – прямоугольными крыльями малого удлинения в условно безграничном потоке при малых скоростях – представлены в серии работ [28–30]. Показаны формирование крупномасштабных вихревых структур вблизи концов крыла на его верхней поверхности и положение области ламинарно-турбулентного перехода вблизи передней кромки крыла. Проанализирована эволюция этой области с увеличением угла атаки.

Таким образом, в области соединения поперечно обтекаемого цилиндра с боковыми стенками канала или в зоне концевых сечений цилиндрических тел конечного размаха в безграничном внешнем потоке при низких числах Рейнольдса формируются трехмерные крупномасштабные вихревые структуры, топология которых определяется геометрией течения (цилиндр в канале или цилиндр конечного размаха в безграничном потоке), соотношением сторон  $L/d$  цилиндрического тела и числом Рейнольдса. Представляется, что механизмы формирования упомянутых вихревых структур имеют общую физическую природу. Целью настоящих исследований является экспериментальное и численное изучение влияния ограничения потока по трансверсальной координате на закономерности формирования вихревой структуры течения в следе поперечного



**Рис. 1.** Схема экспериментальной установки: 1 – рабочий участок; 2 – цилиндр; 3 – герметичная перегородка с набором критических сопел; 4 – ресивер; 5 – вакуумный насос.

кругового цилиндра при низких и умеренных числах Рейнольдса порядка  $10^2$ . На ограничивающих течение боковых стенках ставятся граничные условия прилипания (эксперимент и численное моделирование), условия периодичности и скольжения (численное моделирование). Варьируются число Рейнольдса и удлинение цилиндра (ширина канала). Оценивается влияние этих параметров, а также типа граничных условий на интегральные характеристики обтекания цилиндра.

## 1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОБОРУДОВАНИЕ И МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

Экспериментальные исследования проводились в специализированной экспериментальной установке – рис. 1. Расход воздуха в тракте установки обеспечивался вакуумным насосом 5, и поддерживался постоянным на каждом режиме при помощи дискретного набора критических сопел 3, расположенных на герметичной перегородке ресивера 4. Таким образом, на соплах во всем исследуемом диапазоне расходов создавался перепад давления выше некоторого критического значения. При выполнении этого условия обеспечивается постоянство объемного расхода газа через сопла, а величина расхода определяется только площадью проходного сечения сопла. Принцип работы и методика использования критических сопел для определения расхода газа подробно изложены в Международном стандарте ISO 9300 [31]. Это свойство критических сопел позволяет использовать их в качестве образцового средства измерения объемного расхода [31]. Сопла прошли соответствующую процедуру поверки. Погрешность поддержания заданного значения расхода не превышала 0.25%.

Рабочий участок установки 1 был выполнен в форме канала прямоугольного поперечного сечения шириной  $B = 50$  мм и высотой  $H = 20$  мм. Длина рабочего участка составляла  $L = 250$  мм. Все стенки участка были выполнены светопрозрачными для обеспечения возможности видеосъемки картины течения. Участок снабжен плавным входом, выполненным по лемнискате Бернулли и обеспечивающим степень поджатия потока 6:1 (отношение площади входа в плоскости  $AB$  к площади поперечного сечения рабочего участка, см. рис. 1). Поперечный круговой цилиндр устанавливался в рабочем участке на равном удалении от его верхней и нижней стенок на расстоянии  $l = 100$  мм от плавного входа. Цилиндр имел диаметр  $d = 3$  мм и длину, равную ширине канала  $B$ . Таким образом, удлинение цилиндра составляло  $B/d = 16.7$ , что значительно выше, чем обычно рекомендуется в экспериментах (см., напр., [10]) для получения близкого к двумерному течению в центральной части его следа.

Визуализация течения выполнялась методом дымящейся проволоки, для чего тонкие (0.3 мм) никромовые проволочки с нанесенным на них слоем масла устанавливались вблизи широкой части плавного входа в рабочий участок. При пропускании тока через проволочки масло испарялось, создавая концентрированный дымовой след. Съемки картины течения проводились в светодовом ноже в вертикальной плоскости  $xy$  ( $z = 0$ ) и в горизонтальной плоскости  $xz$  ( $y = 0.5$ ), касающейся верхней образующей цилиндра. Частота съемки составляла 700 кадр/с. Световой нож создавался лазером непрерывного действия KLM-532/5000.

Помимо визуализации, выполнялись измерения мгновенных векторных полей скорости потока с использованием оригинального метода SIV (Smoke Image Velocimetry) [32, 33]. Метод SIV является аналогом классического метода PIV, однако, в отличие от последнего, использует многократно более высокую концентрацию трассеров (мелкие взвешенные частицы водного раствора глицерина размером от 1 до 5 мкм). Благодаря этому при обработке покадрового изображения

рассматривается не перемещение отдельных точек (трассеров), а фрагментов с наиболее похожим друг на друга распределением яркости. Эта особенность техники SIV обеспечивает более высокое, по сравнению с PIV, пространственное разрешение и способствует снижению шумов измерений. Эксперименты проводились в диапазоне изменения числа Рейнольдса от 60 до 250.

Термоанеметрические измерения не выявили турбулентных пульсаций скорости потока на входе в канал. Измерения выполнялись во входном сечении рабочего участка (в выходном сечении плавного входа) и в области установки цилиндра термоанемометром постоянной температуры с нитяным датчиком, чувствительный элемент которого представлял собой вольфрамовую проволоку диаметром 5 мкм и длиной 1.5 мм. Частота опроса датчика 14-разрядным АЦП L-Card составляла 10 кГц. Измерения подтвердили, что во всем исследуемом диапазоне чисел Рейнольдса в канале без цилиндра сохранялось стационарное ламинарное течение. Поэтому именно установка в канале поперечного цилиндрического препятствия является единственной причиной возникновения нестационарных трехмерных вихревых структур и перехода к турбулентности в следе за телом при  $Re \sim 100$ .

## 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Прямое численное моделирование исследуемого течения выполнено на основе решения трехмерных нестационарных уравнений Навье–Стокса для несжимаемой жидкости в безразмерных естественных переменных

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} &= 0; \quad Re = \frac{Ud}{v} \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнения (2.1) записаны в безразмерной форме; принято соглашение о суммировании по повторяющимся индексам. Декартовы координаты  $x_i, i = 1, 2, 3$  отнесены к диаметру цилиндра  $d$ . Компоненты  $u_i$  вектора скорости  $\mathbf{u}$  нормированы на среднюю расходную скорость  $U$ , время  $t$  – на масштаб  $d/U$ , а давление  $p$  отнесено к величине скоростного напора  $\rho U^2$ ,  $\rho$  – плотность воздуха при температуре 20°C. Таким образом, все приведенные ниже результаты численного моделирования и физического эксперимента представлены в безразмерном виде.

Во входном сечении канала задается равномерный единичный профиль скорости:  $u_x = 1, u_y = u_z = 0$ . На выходной границе расчетной области ставятся конвективные граничные условия [34, 35], обеспечивающие свободный выход потока

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

На поверхности кругового цилиндра, на верхней и нижней горизонтальных стенках канала ставится граничное условие прилипания  $\mathbf{u} = 0$ . Что касается левой (*Left*) и правой (*Right*) боковых стенок канала, то для расчета физически содержательных вариантов вязкого течения там задается граничное условие прилипания. При моделировании обтекания бесконечно длинного цилиндра безграничным в трансверсальном направлении потоком на этих границах ставятся либо условия периодичности

$$\mathbf{u}, \quad \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right|_{Left} = \mathbf{u}, \quad - \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} \right|_{Right}$$

либо условие свободного скольжения

$$u_n = 0, \quad \left. \frac{\partial u_\tau}{\partial n} \right|_{Left, Right} = 0$$

Здесь  $n$  и  $\tau$  – внешняя нормаль и касательная к боковым границам.

В качестве начального условия берется состояние покоя,  $t = 0, \mathbf{u} = 0$ . Заметим, что данное начальное условие не согласовано с граничным условием  $u_x = 1$  на входе в канал. Это приводит к тому, что требуется некоторое время релаксации, порядка 200, прежде чем численное решение задачи приобретет характер установившихся автоколебаний. В дальнейшем, при описании результатов численного моделирования, мы рассматриваем только установившееся течение.

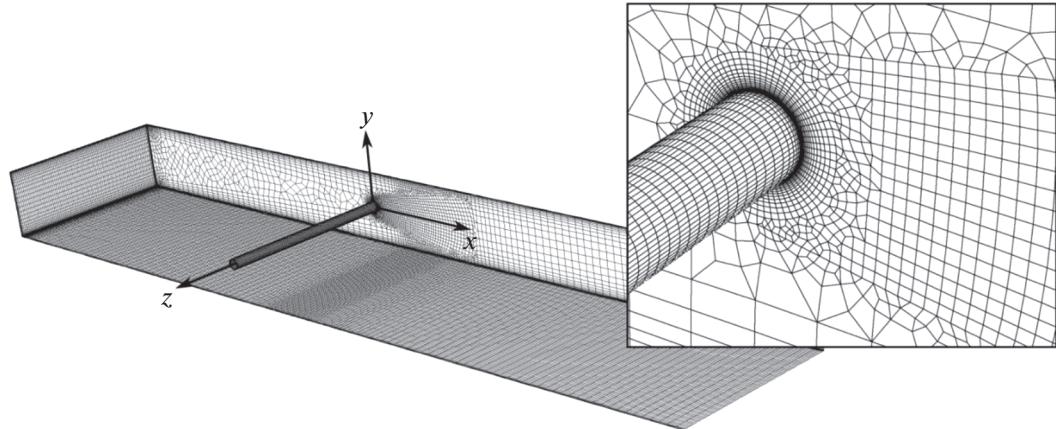


Рис. 2. Расчетная сетка (вид изнутри канала).

Расчетная сетка была построена с использованием композиционного подхода [34]. Область расчета была покрыта набором нескольких структурированных локально-ортогональных сеточных фрагментов, соединенных неструктурными вставками. Сетка сильно сгущалась вблизи твердых стенок и в области следа за препятствием – рис. 2.

Число ячеек сетки (для ширины канала  $B = 16$ ) составляло приблизительно  $1.5 \times 10^6$ , безразмерный пространственный шаг сетки в пограничных слоях на стенках канала и на поверхности цилиндра составлял 0.005 в направлении нормали к стенке, в области среднего следа – 0.1, шаг по времени – 0.02. Данные параметры сетки выбирались так, чтобы соответствовать безразмерным пространственному и временному масштабам диссипативных вихрей  $\lambda = Re^{-3/4}$ ,  $\tau = Re^{1/2}$  в развитом турбулентном течении. Их можно принять как экстремальные оценки для масштабов вихрей в рассматриваемом переходном режиме течения для  $Re < 250$ . Этому значению числа Рейнольдса соответствуют колмогоровские параметры  $\lambda = 0.016$ ,  $\tau = 0.063$ .

Расчеты проводились в пакете ANSYS Fluent 15.0 по методу конечных объемов, схема SIMPLE второго порядка. Устойчивость численного решения уравнений Навье–Стокса (2.1) при умеренных значениях числа  $Re$  в этом пакете многократно проверена и не подвергается сомнению, а точность определяется только сеткой.

Пригодность выбранной сетки для решения поставленной задачи подтверждена сравнением с эталонным DNS-расчетом [36], выполненным для подобной задачи с использованием суперкомпьютера на подробных сетках, вплоть до 28 млн. узлов с демонстрацией сходимости численного решения на последовательности сгущающихся сеток. Авторы [36] моделировали ламинарно-турбулентный переход при обтекании поперечного кругового цилиндра, расположенного на осевой линии канала прямоугольного поперечного сечения. Число Рейнольдса варьировалось от 60 до 400. На боковых стенках канала ставились периодические граничные условия (условия скольжения). Авторы [36] выполнили и сравнили между собой два варианта расчета: 2D и 3D. Показано, что при  $Re \leq 170$  результаты 2D- и 3D-расчетов практически совпадают, а в области  $Re > 170$ , где наблюдается потеря устойчивости двумерного течения и формирование продольных вихревых структур, принципиально различаются, см. рис. 3. Эти расчеты были повторены на нашей сетке; получены практически те же результаты, включая точку потери устойчивости двумерного течения, рис. 3. Это подтверждает пригодность сетки с локальным сгущением и сравнительно малым общим количеством ячеек для моделирования ламинарно-турбулентного перехода.

Кроме того, на нашей расчетной сетке были проведены расчеты обтекания цилиндра, ранее выполненные Томпсоном [19], который впервые численно получил моды А и Б трехмерной неустойчивости течения в следе цилиндра с использованием метода спектральных элементов высокого порядка и граничных условий скольжения на боковых границах расчетной области. Полученные нами поля завихренности для режимов А и Б трехмерной неустойчивости при  $Re = 200, 300$  (рис. 10а, 11а) вполне согласуются с оригинальными расчетами [20].

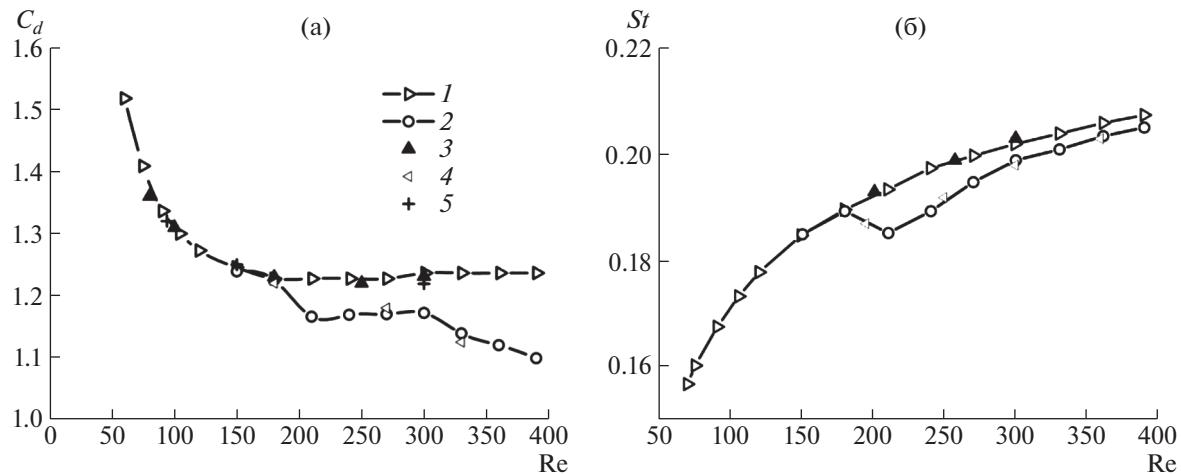


Рис. 3. Зависимость коэффициента сопротивления (а) и числа Струхала (б) от  $Re$ : 1, 2 – 2D-, 3D-расчет [36]; 3, 4 – наш 2D-, 3D-расчет; 5 – 2D-расчет [37].

Визуализация результатов расчетов осуществлялась с помощью моделирования движения трассеров – пассивных меченых частиц, выпускаемых с виртуальных “дымящихся проволочек”, расположенных вблизи поверхности цилиндра.

### 3. РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

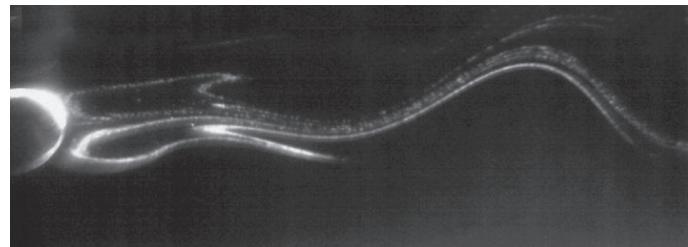
Ниже представлены результаты экспериментов и численного моделирования обтекания по-перечного кругового цилиндра в диапазоне чисел Рейнольдса  $Re = 40–255$ . Выбранный диапазон изменения  $Re$  включает начало потери устойчивости следа за цилиндром в условиях ограничения потока и режимы мод неустойчивости А и Б, наблюдаемые при обтекании цилиндра большого удлинения [5, 8]. При изложении результатов исследований будем выделять *базовый вариант* конфигурации течения, включающий результаты эксперимента на описанной выше установке и численного моделирования, при котором расчетная область полностью соответствует параметрам установки. Кроме того, в базовой конфигурации выполнены расчеты при периодических граничных условиях и условиях свободного скольжения на боковых стенках. Затем мы представим *дополнительные расчеты*, в которых для фиксированного значения  $Re = 250$  численно изучается влияние ширины канала (удлинения цилиндра) и граничных условий на боковых стенах.

#### 3.1. Базовый вариант

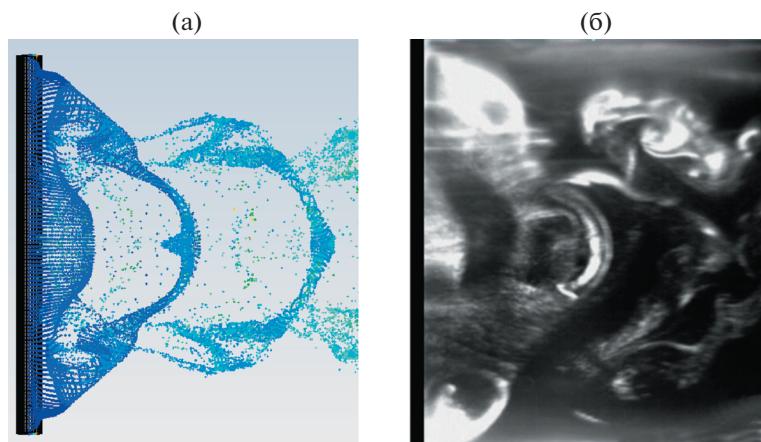
При  $Re = 40$  течение за круговым цилиндром в канале остается ламинарным и квазистационарным. В плоскости симметрии канала  $z = 0$  наблюдается симметричная стационарная пара вихрей. С увеличением числа Рейнольдса до  $Re = 60$  эта вихревая структура, хотя и остается замкнутой, но начинает совершать колебательные движения в вертикальной плоскости  $xy$ , начинается формирование вихрей Кармана, рис. 4. В безграничном потоке подобная картина наблюдается уже при  $Re \approx 40$  [7]. Отличие в значениях числа Рейнольдса обусловлено влиянием ограничивающих поток горизонтальных верхней и нижней стенок канала.

Пространственная структура течения за цилиндром в канале при  $Re = 60$  более сложная. От ограничивающих поток боковых стенок к центру канала развивается вихревое движение жидкости – периферийные вихри. Оно имеет некоторое сходство со спиральными вихрями, образующимися у боковых стенок при обтекании препятствий на дне канала [38, 39]; однако спирале-видные траектории движения в данном случае не столь явно выражены.

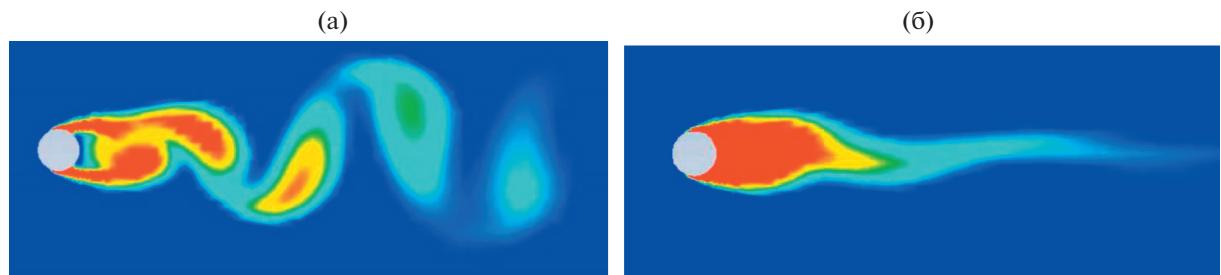
При  $Re > 100$  начинаются формирование и периодический срыв с поверхности цилиндра крупномасштабных вихревых структур, которые образуют дорожку Кармана в следе за препятствием. При этом область периферийных вихрей по размаху цилиндра несколько уменьшается. Вблизи препятствия появляется зона небольшой протяженности (при  $Re = 155$  – около четверти ширины канала), в которой периодически сходящие с верхней и нижней части поверхности вих-



**Рис. 4.** Течение за цилиндром в вертикальной плоскости на оси канала при  $Re = 60$ ; визуализация методом дымящейся проволочки.



**Рис. 5.** Вихревая структура следа в горизонтальной плоскости  $y = 0.5$  при  $Re = 155$ : (а) – DNS; (б) – визуализация методом дымящейся проволочки.



**Рис. 6.** DNS – вихревая структура следа в вертикальных плоскостях при  $Re = 155$ : (а) –  $z = 0$  (на оси канала); (б) –  $z = 6.25$  (на периферии потока).

ри имеют цилиндрическую форму (рис. 5), а в вертикальном сечении – характерный вид вихревой дорожки Кармана (рис. 6а). Однако вблизи боковых стенок канала периферийное движение жидкости за препятствием подавляет образование и периодический сход поперечных вихрей (рис. 6б).

Трехмерная картина вихревого следа за препятствием в канале для  $Re = 155$  представлена на рис. 7 в виде траекторий виртуальных частиц трассера, выпускаемых с верхней образующей цилиндра – линии  $x = 0, y = 0.5$ .

Видно, что поток в следе приобретает черты турбулентности. Детальный анализ турбулентных характеристик течения выходит за рамки настоящей статьи, однако для верификации расчетов и

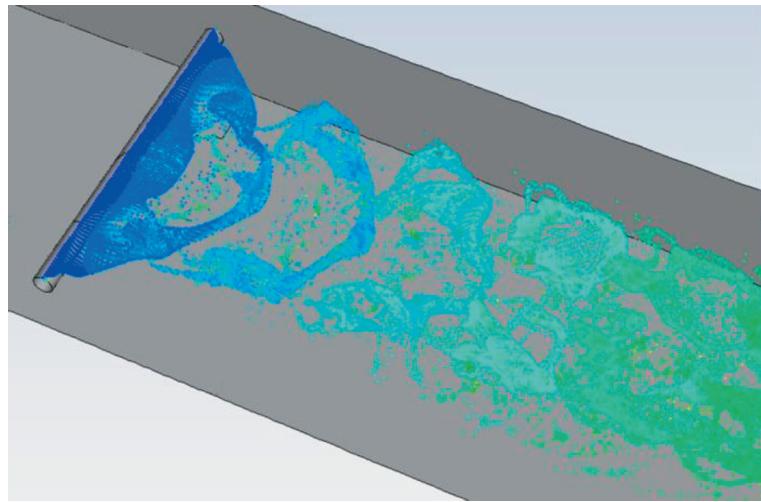


Рис. 7. DNS – визуализация течения в следе цилиндра трассерами за цилиндром по данным при  $Re = 155$ .

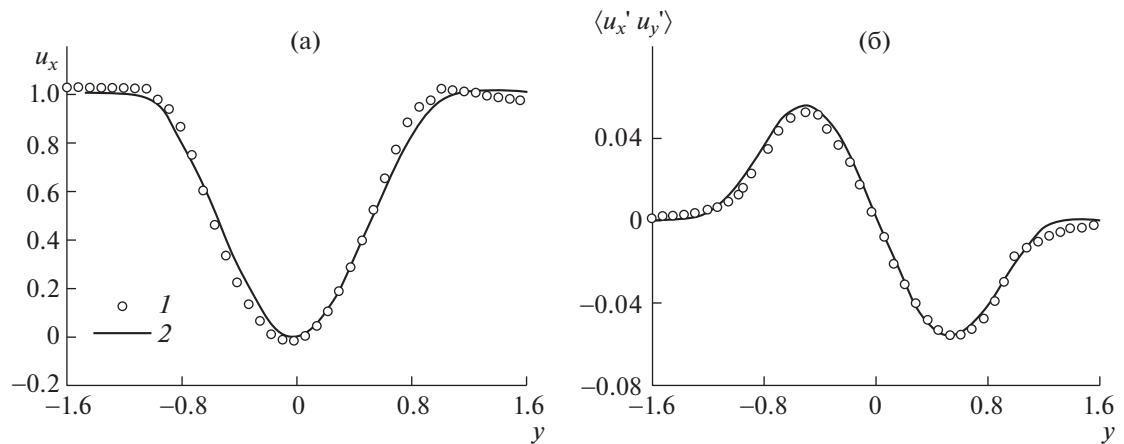


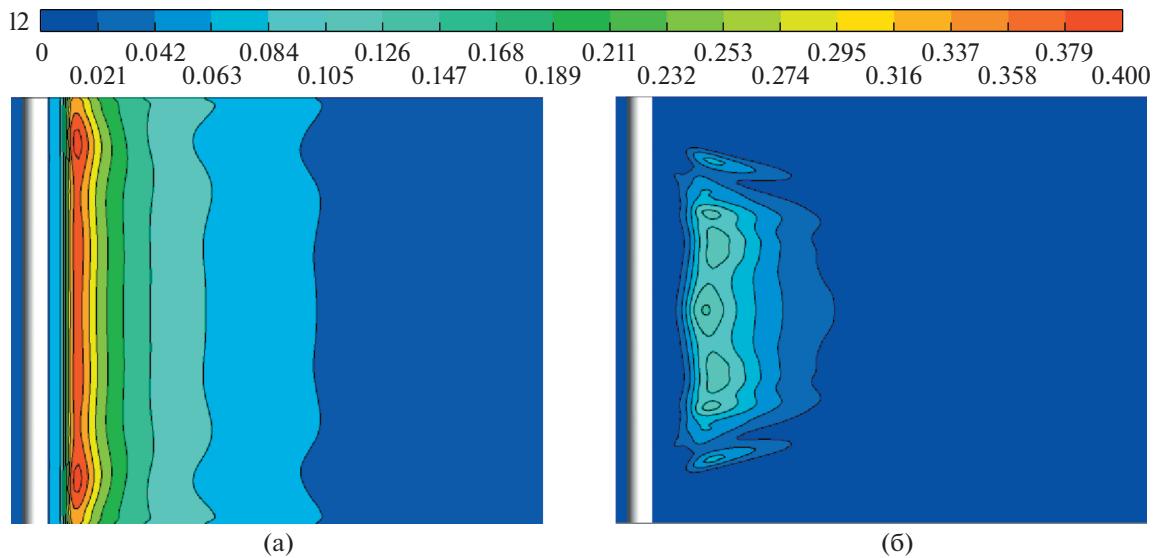
Рис. 8. Эпюры продольной скорости (а) и рейнольдсовых напряжений (б) на оси канала за цилиндром при  $x = 2.63$  для  $Re = 155$ : 1 – эксперимент (SIV); 2 – расчет.

экспериментальных измерений проведены DNS-расчеты актуальных полей компонент вектора скорости  $\mathbf{u}(t)$  для интервала времени  $0 < t < T$ , определены средние скорости и их пульсации

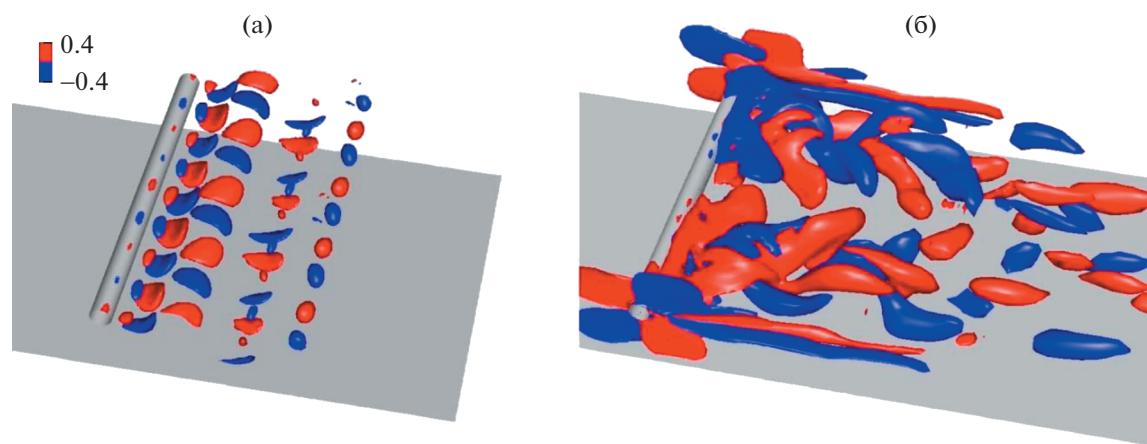
$$\langle \mathbf{u} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(t) dt, \quad \mathbf{u}'(t) = \mathbf{u}(t) - \langle \mathbf{u} \rangle$$

а также моменты пульсаций второго порядка  $\langle u'_i u'_j \rangle$ , характеризующие величину турбулентных напряжений. Интервал осреднения  $T$  содержал не менее 10 периодов автоколебаний потока. На рис. 8 представлены безразмерные профили продольной скорости  $u_x(y)$  и рейнольдсовых напряжений сдвига  $\tau_{x,z}(y) = -\langle u'_x u'_z \rangle(y)$  на оси канала  $z = 0$  за цилиндром в сечении  $x = 3.83$  (11.5 мм). Аналогичные измерения проведены и по методике SIV [32], но для двух компонент вектора скорости в вертикальной плоскости  $z = 0$ . Отметим в целом хорошее совпадение кривых, построенных по результатам выполненного в рамках настоящей работы физического эксперимента SIV и расчета DNS (рис. 8).

Важной характеристикой вихревого потока является интенсивность пульсаций скорости, которую можно характеризовать величиной второго инварианта тензора турбулентных напряжений  $I_2 = \tau_{ij} \tau_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2, 3$  (суммирование по повторяющимся индексам). На рис. 9 показаны поля



**Рис. 9.** Интенсивность пульсаций скорости – второй инвариант тензора турбулентных напряжений  $I_2 = \tau_{ij}\tau_{ij}$  за цилиндром в плоскости  $y = 0$  при условиях симметрии (а) и прилипания (б) на боковых стенках канала при  $Re = 255$ .

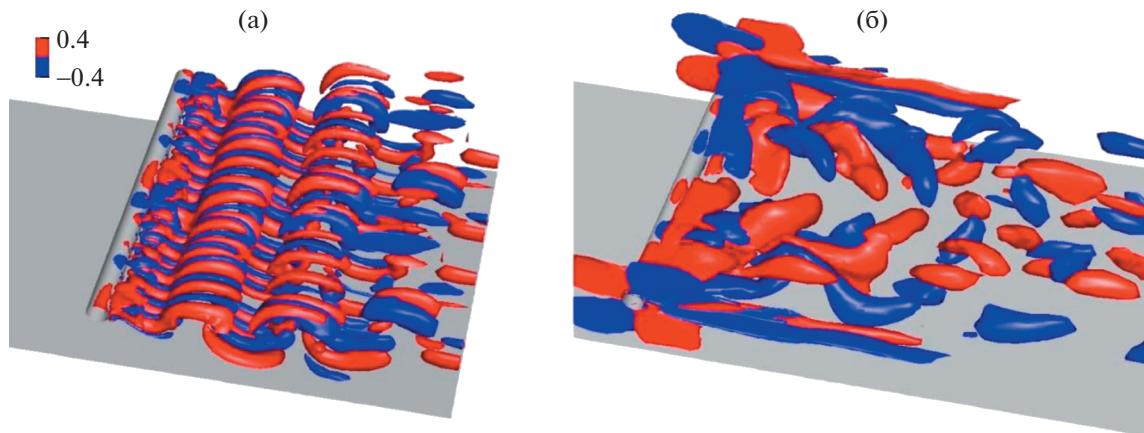


**Рис. 10.** Изоповерхности завихренности  $\omega_x$  за цилиндром по данным DNS при  $Re = 200$ : (а) – периодические граничные условия; (б) – условия прилипания на боковых стенках канала. Цветом обозначена завихренность  $\omega_x$ .

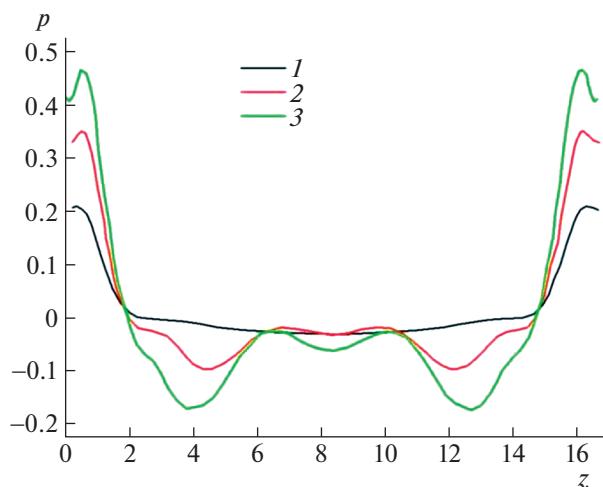
этой функции при  $Re = 255$  в горизонтальной плоскости непосредственно за препятствием при граничных условиях скольжения (а) и прилипания (б) на боковых вертикальных стенках канала. Видно, что прилипание к стенкам подавляет пульсации скорости и заметно снижает уровень турбулентных напряжений в следе за препятствием.

Прямое численное моделирование при периодических граничных условиях на боковых границах расчетной области показывает, что при  $Re = 200$  в следе цилиндра появляются продольные вихревые структуры, соответствующие моде А трехмерной неустойчивости течения (рис. 10а). Однако при постановке на боковых стенках условия прилипания, структура течения в следе цилиндра существенно изменяется: в области периферийного движения появляются трехмерные вихревые образования, а изоповерхности продольной завихренности  $\omega_x$  ориентируются вдоль потока лишь на значительном удалении от препятствия (рис. 10б).

Существенные отличия структуры вторичного течения в следе цилиндра от случая периодических граничных условий наблюдается и при  $Re = 250$ . Это значение числа Рейнольдса соответствует



**Рис. 11.** Изоповерхности завихренности  $\omega_x$  за цилиндром по данным DNS при  $Re = 250$ : (а) – периодические граничные условия; (б) – условия прилипания на боковых стенках канала. Цветом обозначена завихренность  $\omega_x$ .

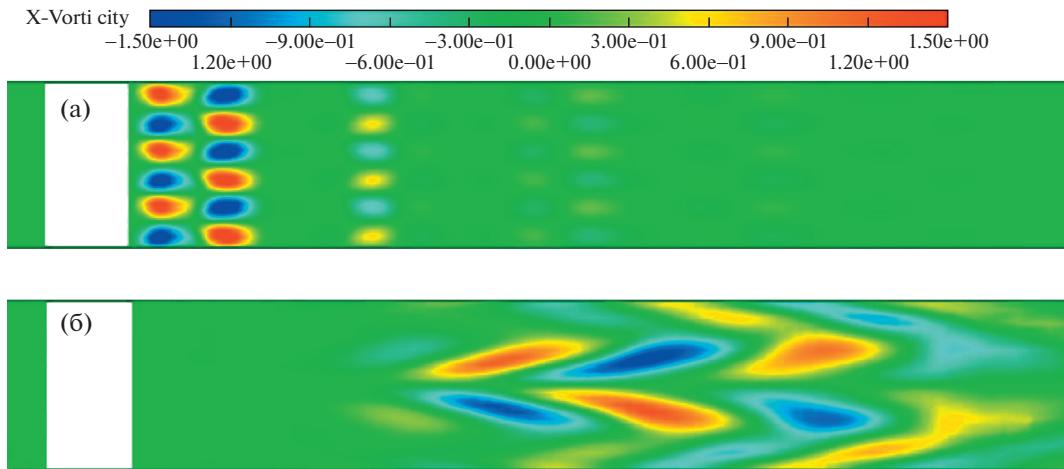


**Рис. 12.** Распределение давления по ширине канала за цилиндром при  $y = 0$ : 1–3 –  $Re = 60, 100, 155$ . DNS – результаты.

режиму неустойчивости моды В (изоповерхности  $\omega_x = \text{const}$  на рис. 11а). При условии прилипания на боковых стенках канала поле завихренности  $\omega_x$  (рис. 11б) схоже со случаем  $Re = 200$  (рис. 10б).

Ограничение потока боковыми стенками канала приводит к существенно неравномерному распределению давления за цилиндром по трансверсальной координате  $z$  – рис. 12. Вблизи боковых стенок давление остается близким к среднему по потоку, а в отрывной области существенно снижается. Характер этого распределения зависит от числа Рейнольдса. Отметим, что в случае граничных условий скольжения на боковых стенах распределение давления за цилиндром по координате  $z$  равномерное.

Условия ограничения потока боковыми стенками канала оказывают заметное влияние и на параметры силового взаимодействия потока с цилиндром. Результаты DNS показали, что при  $Re = 250$  осредненный по времени коэффициент сопротивления цилиндра при условии прилипания на боковых стенах канала равен  $C_d = 1.6429$ , а при условии свободного скольжения на этих границах  $C_d^0 = 1.8644$ . Заметим, что при обтекании цилиндра безграничным потоком этот коэффициент равен  $C_d^\infty = 1.236$ . Столь существенный рост сопротивления тела в канале объясняется увеличением локальной скорости потока в зазоре между цилиндром и горизонтальными



**Рис. 13.** Завихренность  $\omega_x$  для периодических граничных условий (а) и граничных условий прилипания (б) в центральном сечении канала за препятствием при ширине  $B = 2$ . Цветом обозначена завихренность  $\omega_x$ .

(верхней и нижней)  $y = \pm H/2$  стенками канала, что является следствием загромождения потока цилиндром.

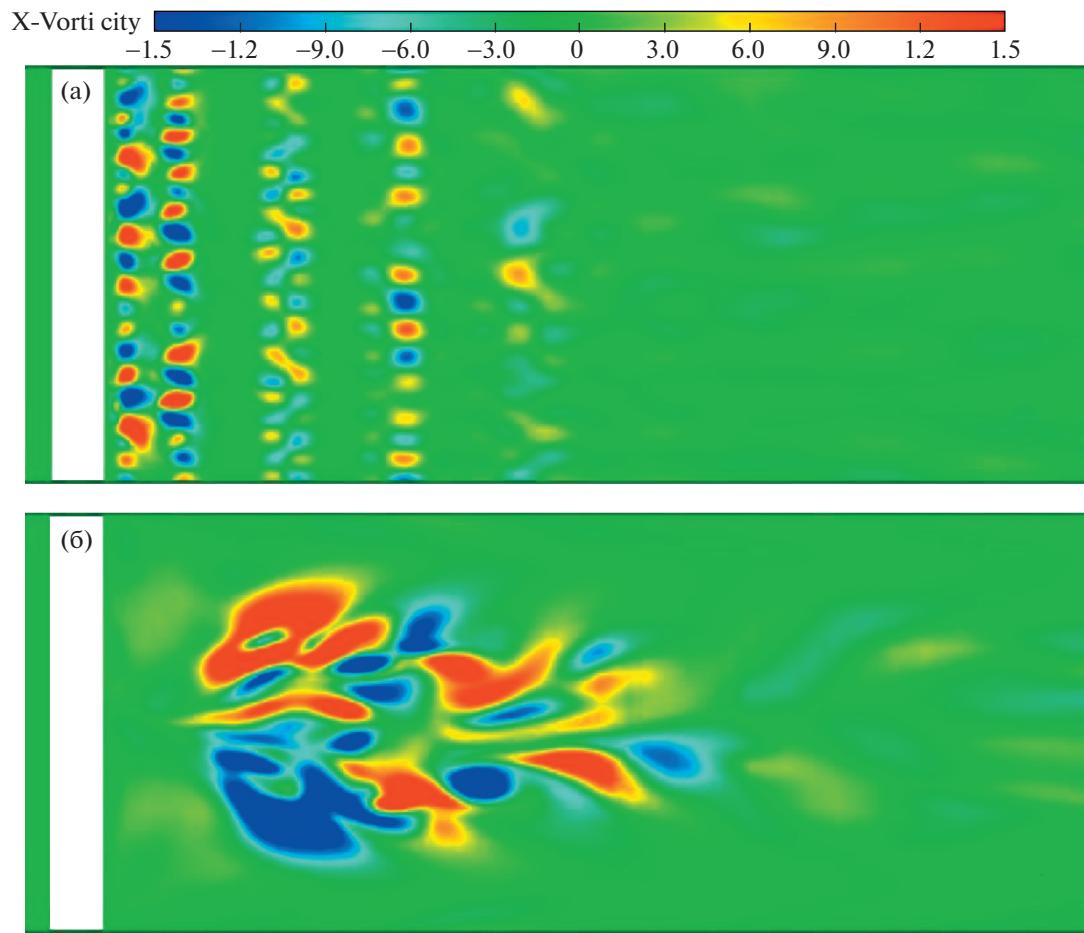
### 3.2. Дополнительные расчеты

**3.2.1. Ширина канала и структура вихревого следа.** Проведена серия расчетов обтекания кругового цилиндра при  $Re = 250$  (это значение соответствует режиму неустойчивости моды  $B$ , см. рис. 11) в каналах различной ширины  $B \in [2, 44]$ . Соответственно менялась и длина цилиндра, крепящегося к боковым стенкам канала, на которых ставились граничные условия трех типов: прилипания, свободного скольжения и условия периодичности. Цель расчетов была в оценке снижения влияния периферийных вихрей с ростом удлинения цилиндра. Структуру вторичного течения в следе удобно визуализировать с помощью карты изолиний завихренности  $\omega_x = \partial u_y / \partial z - \partial u_z / \partial y$  в горизонтальной плоскости  $y = 0$ . Расчеты показали, что даже в узких каналах, начиная с  $B = 2$ , в следе за цилиндром периодически образуются и сносятся вниз по потоку вихревые сгустки размером порядка 0.32, если на стенках заданы условия скольжения или периодические граничные условия, см. рис. 13. Картина течения принципиально меняется при условии прилипания на стенках: в ближнем следе течение остается стационарным, а на расстоянии трех калибров за препятствием происходит образование крупномасштабных вытянутых вдоль потока вихревых структур (рис. 13б).

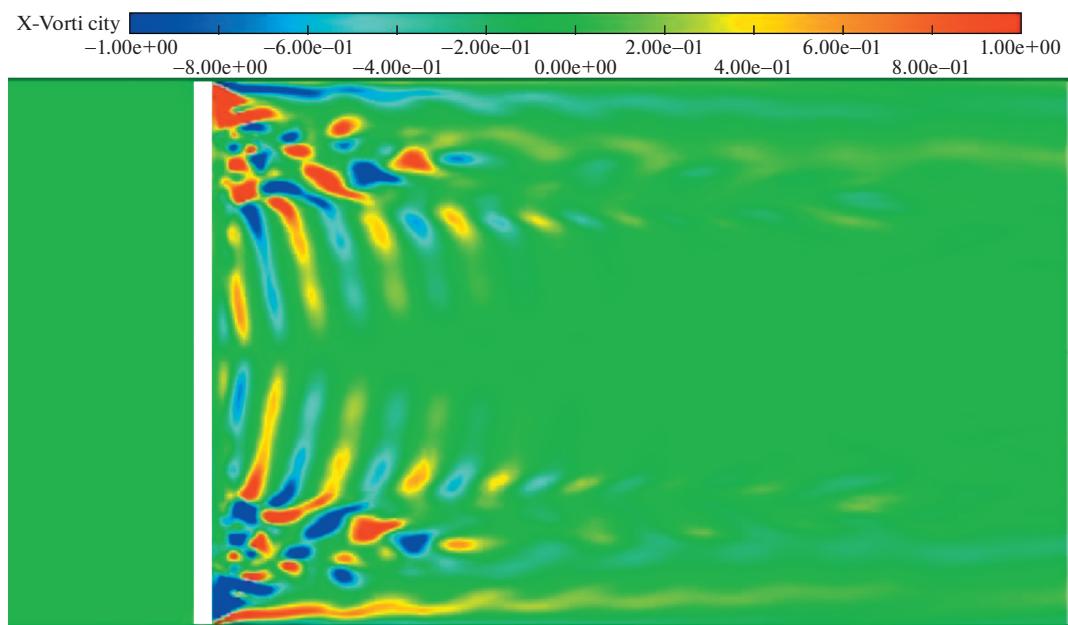
С увеличением ширины канала при условиях периодичности и скольжения принципиальных изменений картины вторичного течения не происходит, и она по-прежнему принципиально отличается от обтекания цилиндра при граничных условиях прилипания к боковым стенкам, см. рис. 14 для  $B = 8$ .

При граничном условии прилипания по мере расширения канала в следе за препятствием происходит переход к турбулентности. При  $B = 5$  течение в ближнем следе теряет устойчивость (нарушается симметрия относительно оси канала), при  $B = 8$  (рис. 14) в среднем следе появляется выраженное пятно турбулентности, при  $B = 12$  начинаются отрывы жидкости с боковых стенок, а начиная с  $B = 20$  в центре канала образуется близкая к двумерной дорожке Кармана (рис. 15).

Возмущения потока, индуцированные периферийными вихрями, проявляются также в отличие от нуля трансверсальной скорости  $u_z$  в ближнем следе цилиндра (см. рис. 16) на всей ширине канала во всем рассматриваемом диапазоне изменения  $B$ . Именно это отличает решение задачи, полученное с использованием граничных условий прилипания, от решений с граничными условиями периодичности и скольжения, в которых осредненная по времени величина  $u_z$  равна нулю в любой точке следа даже при малых  $B$ . Динамика изменения наклона  $u_z(z)$  при  $z \approx 0$  (рис. 16) в ближнем следе с увеличением ширины канала позволяет предположить, что влияние ограничения потока боковыми стенками на течение в центральной части канала полностью прекратится примерно при  $B > 200$ .



**Рис. 14.** Завихренность  $\omega_x$  для периодических граничных условий (а) и прилипания (б) в горизонтальной плоскости  $y = 0$  при ширине канала  $B = 8$ .



**Рис. 15.** Завихренность  $\omega_x$  для граничных условий прилипания в горизонтальной плоскости  $y = 0$  при ширине канала  $B = 32$ . Дорожка Кармана в центральной части потока, вихри мод неустойчивости А и Б и периферийные боковые вихри вблизи стенок.

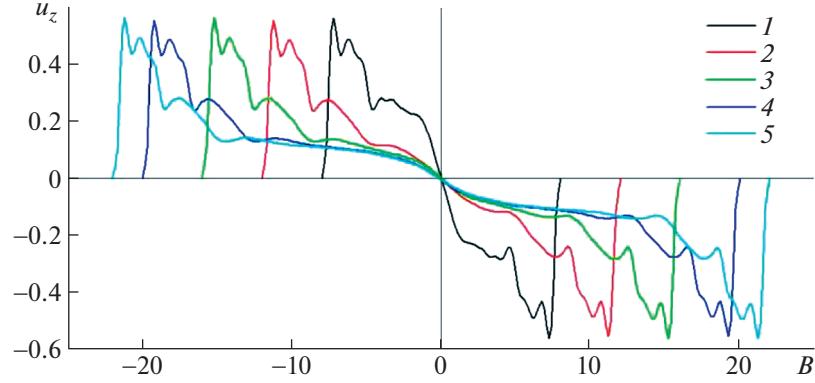


Рис. 16. Эпюры трансверсальной скорости  $u_z(z)$  в каналах разной ширины: 1–5 –  $B = 16, 24, 32, 40, 44$ .

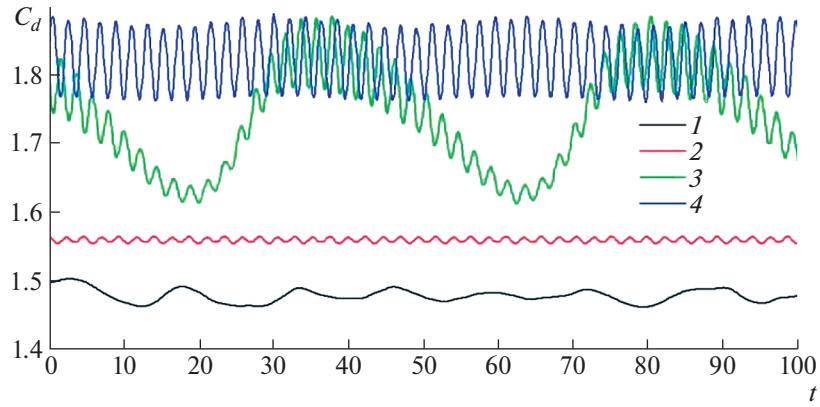
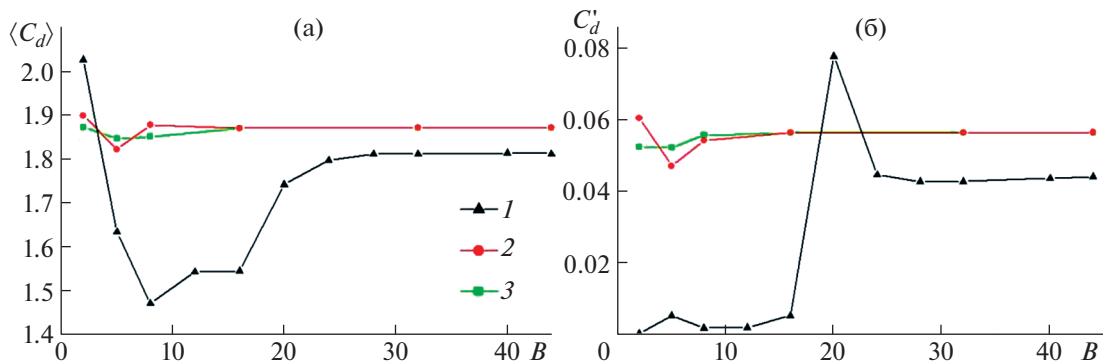


Рис. 17. Коэффициент сопротивления цилиндра  $C_d(t)$  при условиях прилипания на боковых стенках при различной ширине канала: 1–4 –  $B = 8, 12, 20, 32$ .

**3.2.2. Коэффициент сопротивления цилиндра.** Коэффициент сопротивления  $C_d$  подсчитывался при  $Re = 250$  на срединном участке поверхности цилиндра длиной в один калибр (безразмерная длина 1). Такой выбор поверхности интегрирования давления и касательных напряжений позволяет снизить зависимость  $C_d$  от концевых эффектов и проводить вычисления по единым формулам для каналов различной ширины от 2 до 44. Зависимость  $C_d$  от времени  $t$  обусловлена двумя видами возмущений стационарного течения в следе: периодическим срывом вихрей Кармана с поверхности цилиндра и периодическими срывами боковых периферийных вихрей со стенок. Развитие и взаимодействие этих возмущений, их влияние на функцию  $C_d(t)$  в нашей задаче зависят от ширины канала  $B$  и вида граничных условий.

При граничных условиях периодичности или скольжения, приближенно моделирующих бесконечно широкий канал, влияние боковых периферийных вихрей отсутствует, и коэффициент сопротивления  $C_d(t)$  колеблется преимущественно вокруг основной частоты срыва вихрей Кармана. Более того, различие между этими двумя граничными условиями незначительно влияет на сопротивление центрального участка цилиндра. Поэтому ниже основное внимание уделяется влиянию на  $C_d(t)$  ширины канала  $B$  при граничных условиях прилипания на боковых стенках. Результаты численного моделирования сведены на рис. 17.

В узком ( $B = 2$ ) канале близкий след за цилиндром стационарен (рис. 13), коэффициент  $C_d$  практически не изменяется во времени. С ростом ширины канала до  $B = 8$  область пульсаций потока и крупных вихрей расширяется и приближается к препятствию (рис. 14). При этом коэффициент сопротивления  $C_d$  испытывает нерегулярные длинноволновые колебания (кривая 1 на рис. 17). При  $B = 12$  начинается формирование и периодический отрыв периферийных вихрей



**Рис. 18.** Зависимость коэффициента сопротивления в центральной части канала от ширины расчетной области для трех видов граничных условий: 1 – прилипание; 2 – периодичность; 3 – скольжение. Среднее по времени значение  $\langle C_d \rangle$  (а) и стандартное отклонение  $C'_d$  (б).

с боковых стенок; частота срыва вихрей равна 0.4253, она определяет и частоту колебаний коэффициента сопротивления (кривая 2). При  $B = 20$  в центре канала уже формируется вихревая дорожка Кармана (частота срыва  $f_1 = 0.4738$ ), но периферийные вихри (частота срыва  $f_2 = 0.4253$ ) также доходят до оси канала. Поэтому в кривой  $C_d(t)$  заметны две гармоники (кривая 3).

Одна из них, коротковолновая, имеет частоту  $(f_1 + f_2)/2 = 0.4246$ , а другая, длинноволновая, – частоту  $(f_1 - f_2)/2 = 0.023$  [30]. В каналах, ширина которых превосходит  $B = 28$ , отрывающиеся с боковых стенок периферийные вихри не достигают оси канала (см., напр., рис. 15), изменение коэффициента сопротивления центральной части цилиндра определяется сходом вихрей дорожки Кармана и носит гармонический характер (кривая 4 на рис. 17).

Были проведены многовариантные расчеты обтекания цилиндра при  $Re = 250$  в каналах различной ширины  $B \in [2, 44]$  при трех различных граничных условиях на боковых стенках. Результаты расчетов в виде осредненного по времени (время осреднения намного превосходило период срыва вихрей) коэффициента сопротивления в центральной части канала  $\langle C_d \rangle$  и стандартного отклонения этого коэффициента  $C'_d = \|C_d(t) - \langle C_d \rangle\|$  представлены на рис. 18.

Видно, что при граничных условиях свободного скольжения и периодичности при  $B > 10$  указанные интегральные коэффициенты практически постоянны и не различаются между собой. Если же на боковых стенках ставится граничное условие прилипания, то коэффициент сопротивления существенно зависит от ширины канала вплоть до  $B \approx 30$ . Функция  $\langle C_d \rangle(B)$  имеет минимум при  $B \approx 10$ , когда периферийные вихри, сходящиеся с боковых стенок, достигают оси канала  $z = 0$  и превалируют над вихрями Кармана. С ростом ширины  $B$  эти вихри теряют интенсивность по мере приближения к оси, а в широких каналах, при  $B > 30$ , они сносятся потоком, не достигая оси. В интервале  $15 < B < 25$  оба типа вихрей (Кармана и периферийные) играют существенную роль в течении за центральной частью препятствия, их взаимодействие отражается в виде локального максимума отклонений  $C'_d$  (кривая 1 на рис. 18 справа).

Различие между кривыми 1–3 на рис. 18 при  $B \rightarrow 50$  свидетельствует о том, что такое ограничение потока боковыми стенками продолжает влиять на параметры обтекания цилиндра даже в его центральной части. Для того, чтобы полностью избавиться от этого влияния, следует, по всей видимости, рассматривать каналы на порядок большей ширины. Подтверждением такой оценки может служить опыт экспериментальных и численных исследований трехмерной неустойчивости при обтекании цилиндра. Так, в численном расчете [19] с периодическими граничными условиями моды А и В (см. рис. 11, 12) были получены уже при  $B = \pi d$ . А в физическом эксперименте [5], когда поток ограничен стенками, для наблюдений мод А и В потребовался канал ширины  $200d$ . Прямое численное моделирование обтекания цилиндра в канале ширины  $200d$  требует чрезмерных вычислительных ресурсов и выходит за рамки нашего исследования.

В табл. 1 сведены интегральные параметры обтекания кругового цилиндра в канале шириной 40 при числе Рейнольдса 250 с различными типами граничных условий.

**Таблица 1.** Средний коэффициент сопротивления цилиндра и его стандартное отклонение при различных условиях обтекания в канале шириной 40 при  $Re = 250$

	Скользжение	Периодичность	Прилипание	Шайбы
$\langle C_d \rangle$	1.8717	1.8714	1.8225	1.8102
$C'_d$	0.0565	0.0564	0.0438	0.0807

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Структура течения в следе за препятствием в ограниченном боковыми стенками потоке определяется двумя типами нестационарных вихрей: вихрями Кармана, срывающимися с поверхности цилиндра, и периферийными вихрями, формирующимиися в окрестности крепления цилиндра к боковым стенкам канала. В этой области вращение жидкости тормозится вязкостью, и давление в ней остается близким к среднему по потоку. В области формирования вихрей Кармана давление пониженное. Градиент давления в зоне по трансверсальной координате  $z$  обеспечивает встречное спиралевидное движение жидкости от боковых стенок канала к его центру.

Показано существенное отличие структуры течения за цилиндром при постановке граничных условий прилипания на боковых стенках для  $B \approx 16$  при  $Re = 200-250$  от случая граничных условий периодичности. Это отличие обусловлено поперечным (в направлении оси  $z$ ) движением жидкости от боковых стенок канала к его центру, возникающим за счет периферийных вихрей. Установлено, что это движение (периферийные вихри) наблюдается во всем рассмотренном диапазоне изменения ширины канала.

Показано, что численное решение уравнений Навье–Стокса при граничных условиях периодичности или свободного от сдвиговых напряжений скольжения на боковых стенках канала конечной ширины сходится по средним интегральным параметрам потока уже при  $B > 16$ .

Показано, что ширина канала  $B$  оказывает влияние на интегральные параметры (средний коэффициент сопротивления и его отклонение) обтекания кругового цилиндра при  $Re = 250$  и граничных условиях прилипания на боковых стенках канала. Это влияние становится незначительным при  $B > 30$ . Однако для всех  $B \leq 44$  коэффициенты  $\langle C_d \rangle$ ,  $C'_d$  несколько отличаются от соответствующих значений при граничных условиях, моделирующих обтекание цилиндра бесконечного удлинения.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Государственного задания ФИЦ КазНЦ РАН (апробация метода SIV) и гранта РФФИ 20-08-00621 (научные результаты).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Chang P.K. Separation of Flow, Chapter 1. Oxford: Pergamon Press, 1970. 796 p.
2. Zdravkovich M.M. Flow around circular cylinders. Oxford Univ. Press, 1997. 694 p.
3. Norberg C. Effects of Reynolds number and a low-intensity freestream turbulence on the flow around a circular cylinder // Chalmers University, Goteborg, Sweden, Technological Publications. 1987. V. 87 (2). P. 1–55.
4. Beaudan P., Moin P. Numerical experiments on the flow past a circular cylinder at sub-critical Reynolds number // Report No. TF-62, Department of Mechanical Engineering, Stanford University. 1994.
5. Williamson C.H.K. Vortex dynamics in the cylinder wake // Annu. Rev. Fluid Mech. 1996. 28. P. 477–539.
6. Schlichting H. Boundary Layer Theory. New York: McGraw Hill Book Co. 1968.
7. Van Dyke M. An album of fluid motion. Stanford: Parabolic Press, 1982. 176 p.
8. Williamson C.H.K. The natural and forced formation of spot-like ‘vortex dislocations’ in the transition of a wake // J. Fluid Mech. 1992. V. 243. P. 393–441.
9. Norberg C. An experimental investigation of the flow around a circular cylinder: influence of aspect ratio // J. Fluid Mech. 1994. V. 258. P. 287–316.
10. Strandenes H., Pettersen D., Andersson H.I., Manhart M. Influence of spanwise no-slip boundary conditions on the flow around a cylinder // Comput. Fluids. 2017. Vol. 156. P. 48–57.
11. Dou H.S., Ben A.Q. Simulation and instability investigation of the flow around a cylinder between two parallel walls // J. Therm. Sci. 2015. V. 24 (2). P. 140–148.
12. Khan N.B., Ibrahim Z., Nguyen L.T., Javed M.F., Jameel M. Numerical investigation of the vortex-induced vibration of an elastically mounted circular cylinder at high Reynolds number ( $Re = 10^4$ ) and low mass ratio using

- the RANS code //PloS ONE. 2017. V. 12 (10), e0185832.  
<https://doi.org/10.1371/journal.pone.0185832>
13. Pereira F.S., Vaz G., Eça L., Girimaji S.S. Simulation of the flow around a circular cylinder at  $Re = 3900$  with Partially-Averaged Navier–Stokes equations // Int. J. Heat Fluid Flow. 2018. V. 69. P. 234–246.
  14. Jiang H. Separation angle for flow past a circular cylinder in the subcritical regime // Phys. Fluids. 2020. V. 32. 014106.
  15. Ma X., Karamanos G.S., Karniadakis G.E. Dynamics and low-dimensionality of a turbulent near wake // J. Fluid Mech. 2000. V. 410. P. 29–65.
  16. Wissink J.G., Rodi W. Numerical study of the near wake of a circular cylinder // Int. J. Heat Fluid Flow. 2008. V. 29 (4). P. 1060–1070.
  17. Khan N.B., Ibrahim Z., Badry A.B.B.M., Jameel M., Javed M.F. Numerical investigation of flow around cylinder at Reynolds number= 3900 with large eddy simulation technique: Effect of spanwise length and mesh resolution // Proc. Inst. Mech. Eng., Part M: J. Eng. Maritime Environment. 2019. V. 233 (2). P. 417–427.  
<https://doi.org/10.1177/1475090217751326>
  18. Roshko A. On the development of turbulent wakes from vortex streets. Washington D.C.: NACA Rep. 1191. 1954.
  19. Thompson M., Hourigan K., Sheridan J. Three-dimensional instabilities in the wake of a circular cylinder // Exp. Therm. Fluid Sci. 1996. V. 12 (2). P. 190–196.
  20. Zhang H.Q., Fey U., Noack B.R., Konig M., Eckelmann H. On the transition of the cylinder wake // Phys. Fluids. 1995. V. 7 (4). P. 779–794.
  21. Mittal S., Pandi J.S.S., Hore M. Cellular vortex shedding from a cylinder at low Reynolds number // J. Fluid Mech. 2021. V. 915. A74.
  22. Fukuoka H., Hirabayashi S., Suzuki H. The effects of free surface and end cell on flow around a finite circular cylinder with low aspect ratio // J. Mar. Sci. Technol. 2016. V. 21 (1). P. 145–153.
  23. Sarwar W., Mellibovsky F. Characterization of three-dimensional vertical structures in the wake past a circular cylinder in the transitional regime // Phys. Fluids. 2020. V. 32 (7). P. 074104.
  24. Bhattacharya S. The effect of spatially and temporally modulated plasma actuation on cylinder wake // AIAA Journal. 2020. Vol. 58. P. 3808–3818.
  25. Coutanceau M., Bouard R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1. Steady flow // J. Fluid Mech. 1977. V. 79 (2). P. 231–256.
  26. Lee T., Budwig R. A study of the effect of aspect ratio on vortex shedding behind circular cylinders // Phys. Fluids A. 1991. V. 3 (2). P. 309–315.
  27. Chang Y.S., Chen Y.-J., Qiu Y.-H., Chang C.C., Chu C.-C., Lee F.-S. Source-like patterns of flow past a circular cylinder of finite span at low Reynolds numbers // Phys. Fluids. 2021. V. 33 (8). P. 083607.
  28. Zanin B.Yu., Zverkov I.D., Kozlov V.V., Pavlenko A.M. Vortex structure of separated flows on model wings at low freestream velocities // Fluid Dyn. 2008. V. 43 (6). P. 938–944.
  29. Boiko A.V., Dovgal A.V., Zanin B.Yu., Kozlov V.V. Three-Dimensional Structure of Separated Flows on Wing Airfoils (An Overview) // Thermophys. Aeromechanics. 1996. V. 3 (1). P. 1–13.
  30. Zanin B.Y. Separated flows receptivity for external disturbances //AIP Conf. Proc. 2017. V. 1893 (1). P. 020006.
  31. American National Standards Institute. Measurement of Gas Flow by Means of Critical Flow Venturi Nozzles. American Society of Mechanical Engineers, 1987.
  32. Mikheev N.I., Dushin N.S. A method for measuring the dynamics of velocity vector fields in a turbulent flow using smoke image-visualization videos // Instrum. Exp. Tech. 2016. V. 59 (6). P. 882–889.
  33. Mikheev N.I., Goltsman A.E., Saushin I.I., Dushina O.A. Estimation of turbulent energy dissipation in the boundary layer using Smoke Image Velocimetry // Exp. Fluids. 2017. V. 58 (8). Article 97.
  34. Kalinin E.I., Mazo A.B., Isaev S.A. Composite mesh generator for CFD problems // IOP Conf. Ser.: Materials Sci. Eng. 2016. V. 158. P. 012047.
  35. Pearson R.A. Consistent boundary conditions for numerical models of system that admit disperse waves // J. Atmos. Sci. 1976. V. 31. P. 1481–1489.
  36. Nikolas K., Dimokratis G., Starvos K. Three dimensional flow around a circular cylinder confined in a plane channel // Phys. Fluids. 2011. V. 23. P. 064106.
  37. Singha S., Sinhamahapatra K. Flow past a circular cylinder between parallel walls at low Reynolds numbers // Ocean Eng. 2010. V. 37. P. 757–769.
  38. Molochnikov V.M., Mazo A.B., Kalinin E.I., Malyukov A.V., Okhotnikov D.I., Dushina O.A. Formation and turbulent breakdown of large-scale vortical structures behind an obstacle in a channel at moderate Reynolds numbers // Phys. Fluids. 2019. V. 31 (10). P. 104.

39. Molochnikov V.M., Mazo A.B., Malyukov A.V., Kalinin E.I., Mikheev N.I., Dushina O.A., Paerely A.A. Distinctive features of vortical structures generation in separated channel flow behind a rib under transition to turbulence // Thermophys. Aeromechanics. 2014. V. 21 (3). P. 309–317.
40. Kalinin E., Mazo A., Molochnikov V., Dushina O. Spectral analysis of a vortex wake behind a circular cylinder in a channel at moderate Reynolds numbers // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42 (8). P. 1989–1997.
41. Kuzmina S., Ishmuratov F., Zichenkov M., Chedrik V., Amiryants G., Kulesh V., Malyutin V., Chedrik A., Timokhin V., Shalaev S., Chevagin A., Efimov R., Kursakov I., Kuruliuk K., Lysenkov A., Malenko V., Pronin M., Saprykin A. Wind tunnel testing of adaptive wing structures // Morphing Wing Technologies. Large Commercial Aircraft and Civil Helicopters, Butterworth-Heinemann. 2018. P. 713–755.  
<https://doi.org/10.1016/B978-0-08-100964-2.00023-X>
42. Stansby P.K. The effects of end plates on the base pressure coefficient of a circular cylinder // Aeronaut. J. 1968. V. 78 (757). P. 36–37.  
<https://doi.org/10.1017/S0001924000036319>
43. Zhogolev D.A., Kopylov A.A., Nikulenko A.A., Sevostyanov S.Ya., Sudakov V.G. An active system for controlling the wing flap flow on a model of a passenger aircraft wing section // J. “Almaz–Antey” Air and Space Defence Corporation. 2020. V. 4. P. 41–46.