CÁLCULO DIFERENCIAL

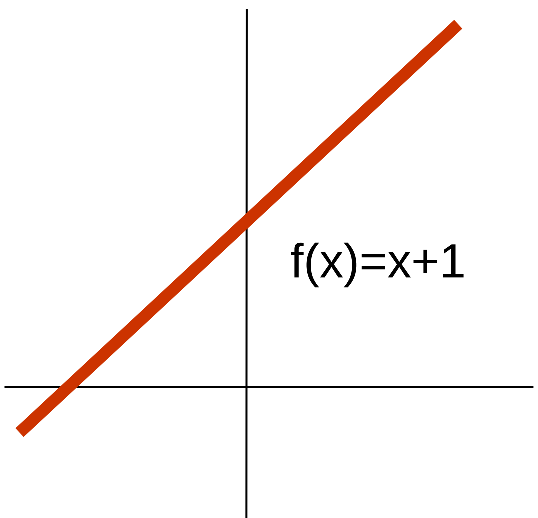
CONTINUIDAD Y TIPOS DE DISCONTINUIDAD

LÍMITES NUMÉRICOS (MÉTODOS DE SUSTITUCIÓN Y FACTORIZACIÓN)

CONTINUIDAD GRÁFICA

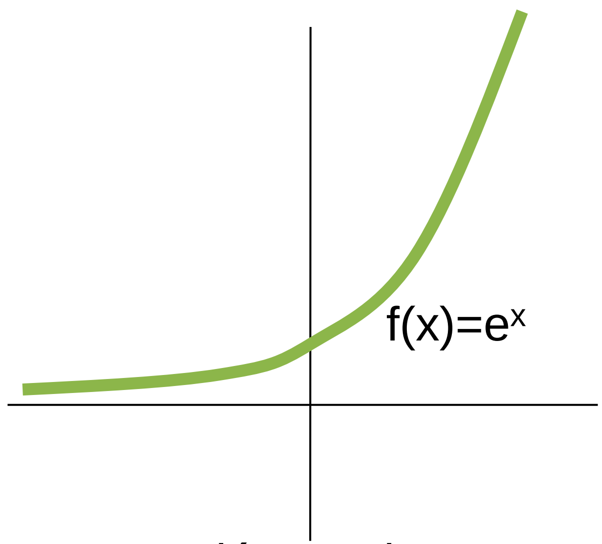
- Una función se dice que es continua en todo su dominio cuando podamos ser capaces de dibujarla de un solo trazo continuo, sin levantar el lápiz del papel.

Ejemplo 1



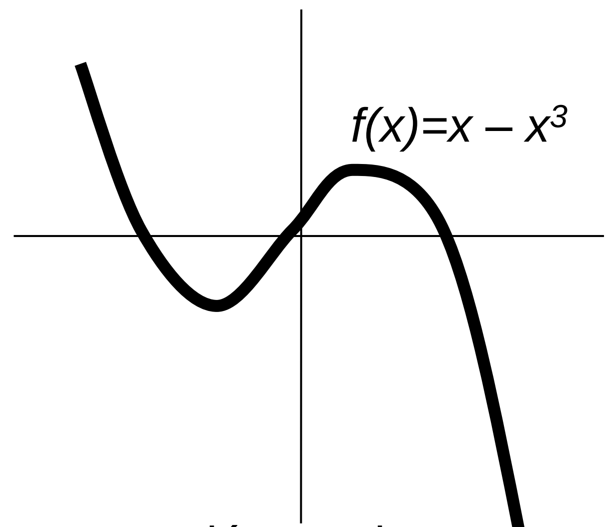
Función continua en R

Ejemplo 2



Función continua en R

Ejemplo 3



Función continua en R

Se deben cumplir **3 criterios** para que una función sea continua:

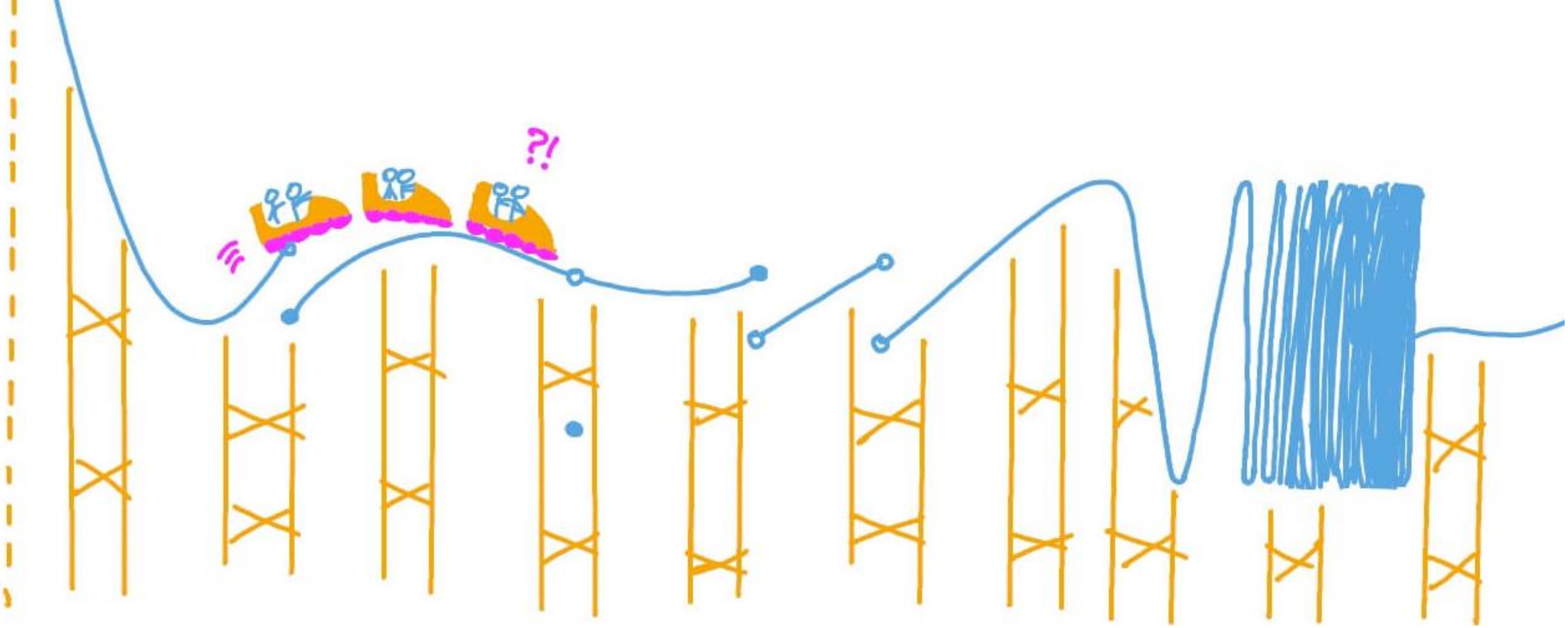
1. Existe el límite de la función cuando x$\rightarrow$a
2. Existe f(a) la imagen de la función en el punto a
3. Los dos valores anteriores deben coincidir: $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Conclusión: Una función es continua en un punto ***a*** cuando existe el límite de la función en ***a*** y, además, coincide con el valor de la imagen de la función en ***a***

Si alguna de las tres condiciones no se cumple, la función es discontinua en ***a***

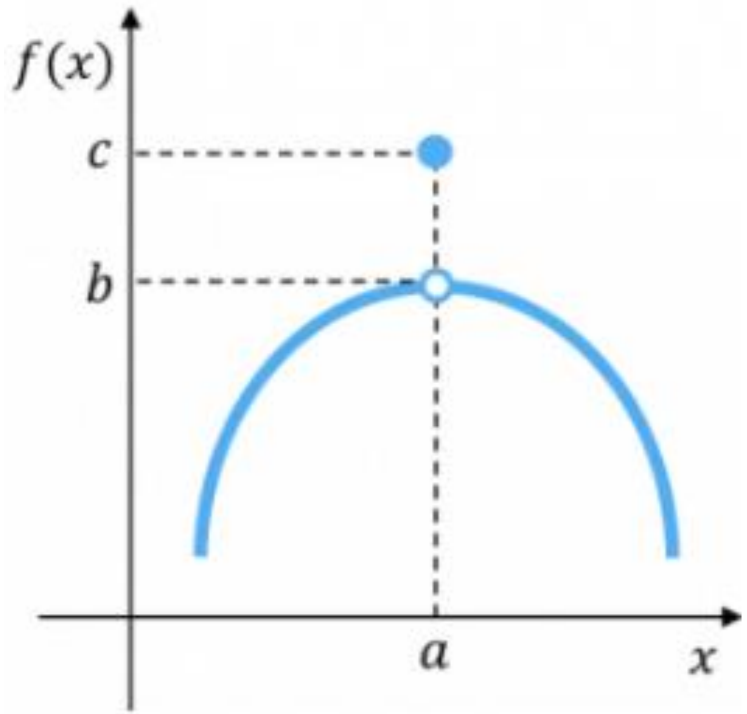
No todas las funciones son continuas

Existen varios tipos de discontinuidad…

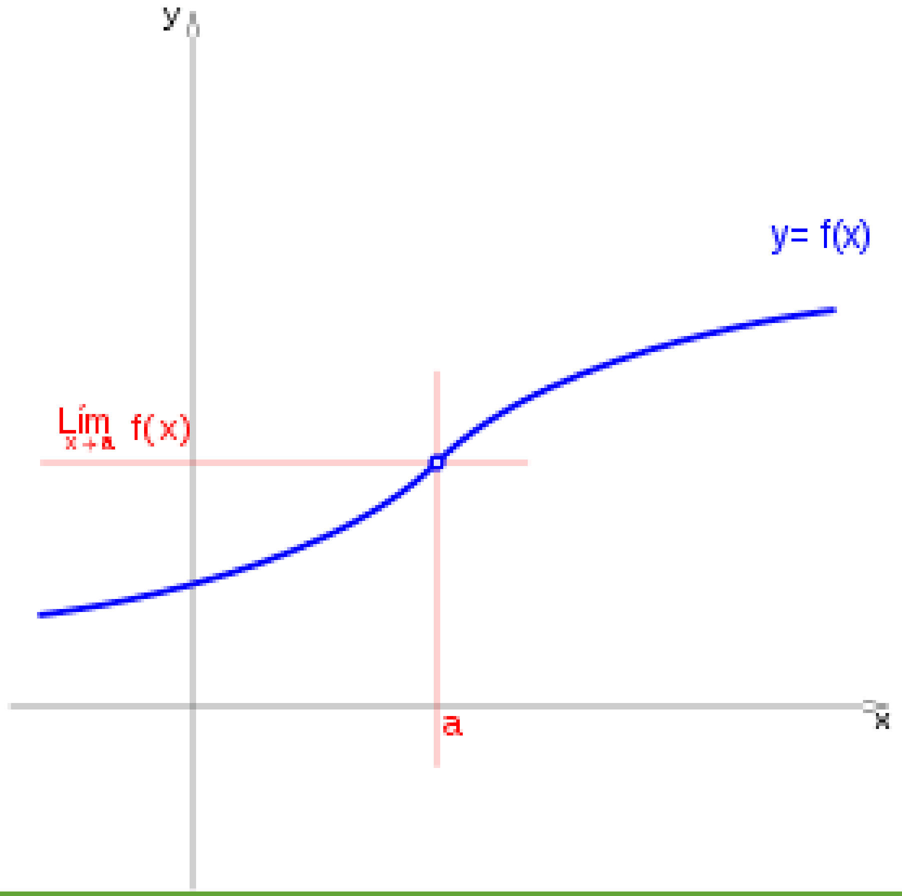


Discontinuidad removible (o evitable)

El límite existe, pero no coincide con la imagen en ese mismo punto.



El límite existe, pero no existe la imagen en el punto de referencia (el punto no pertenece al dominio).

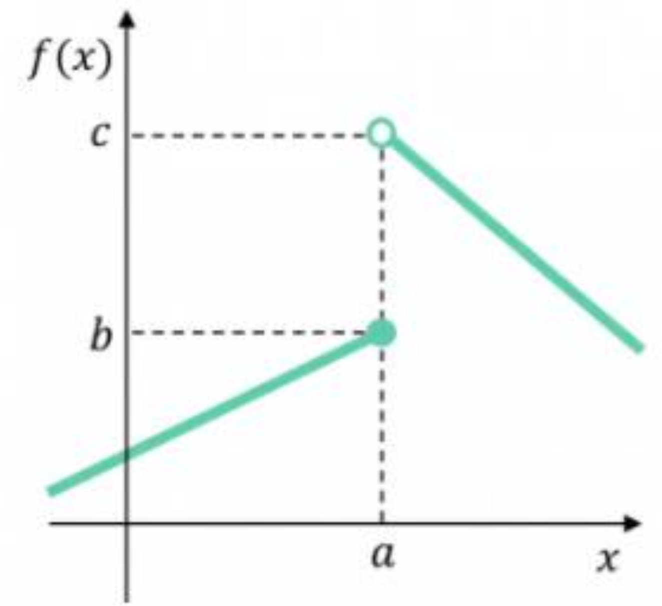


Discontinuidad esencial (de primera especie)

De salto finito

Existen los límites laterales, pero no son iguales.

$$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$$

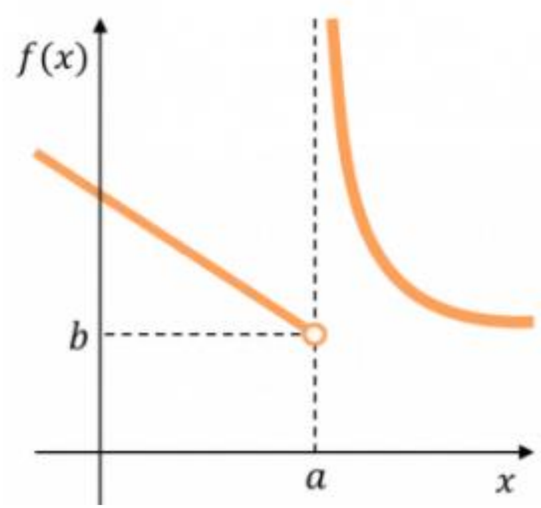


De salto infinito

Cuando uno de los límites laterales tiende a infinito

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b$$

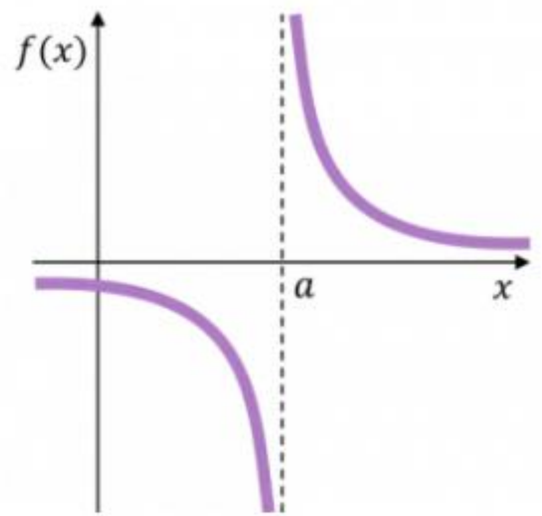


Asintótico

Ambos límites laterales tienden a infinito

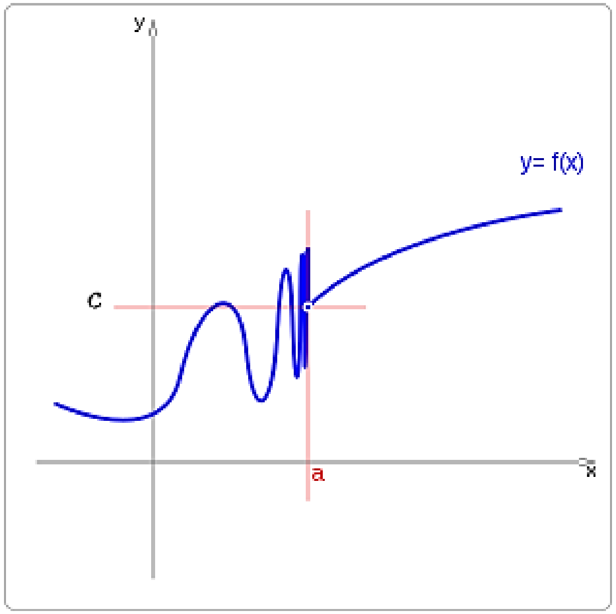
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$$

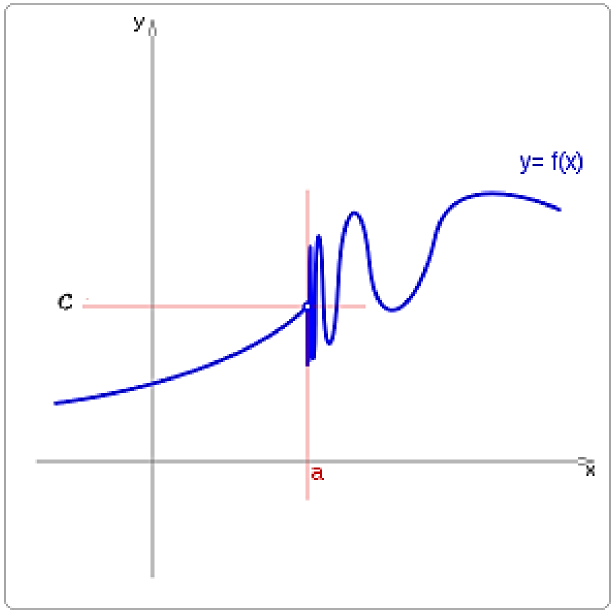


Discontinuidad esencial (de segunda especie)

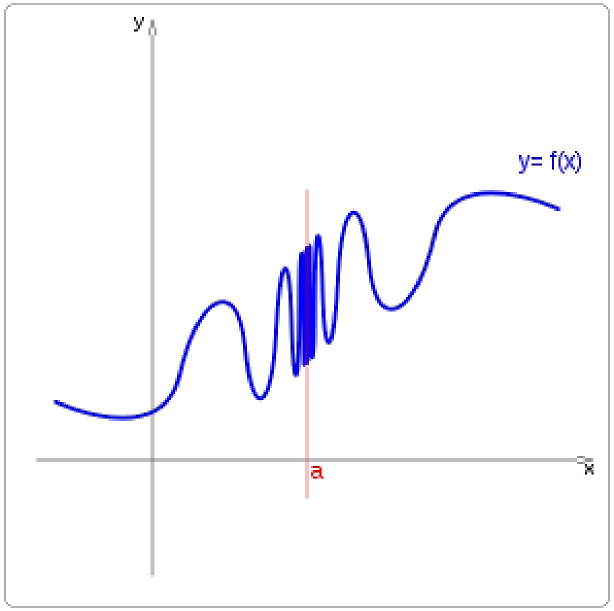
La discontinuidad de segunda especie se presenta cuando uno de los límites laterales (o ambos) no existe.



El límite lateral izquierdo no existe

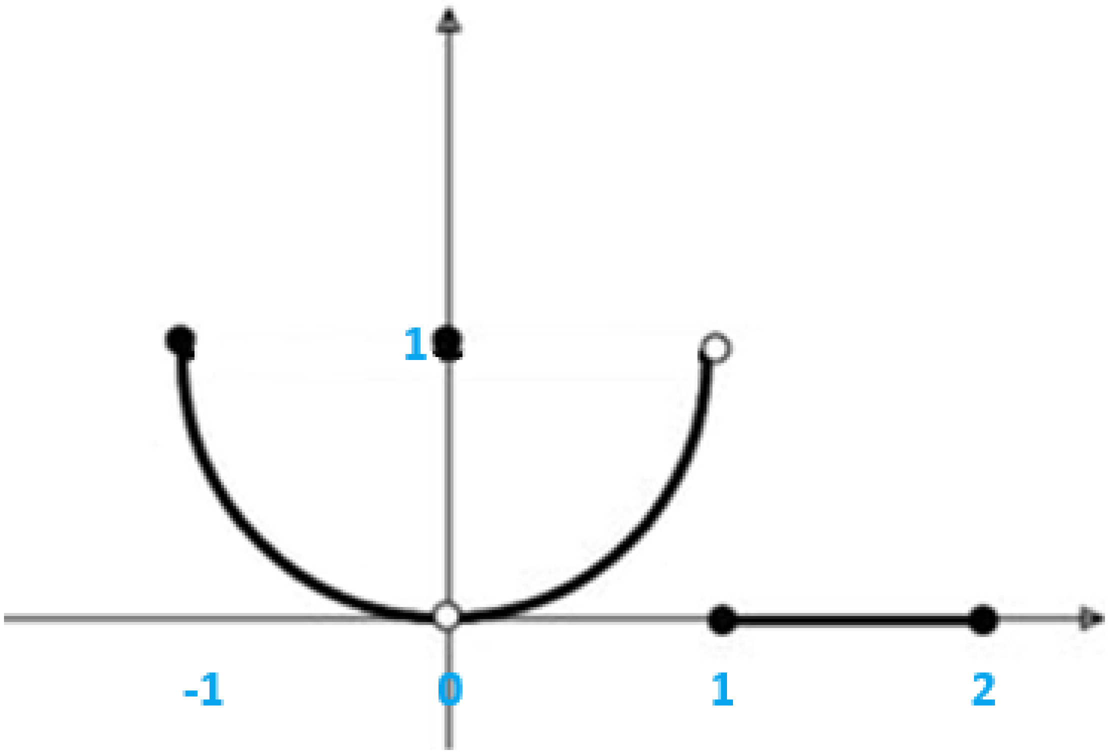


El límite lateral derecho no existe



Ambos límites laterales no existen

Para los siguientes incisos, precisar el tipo de discontinuidad:



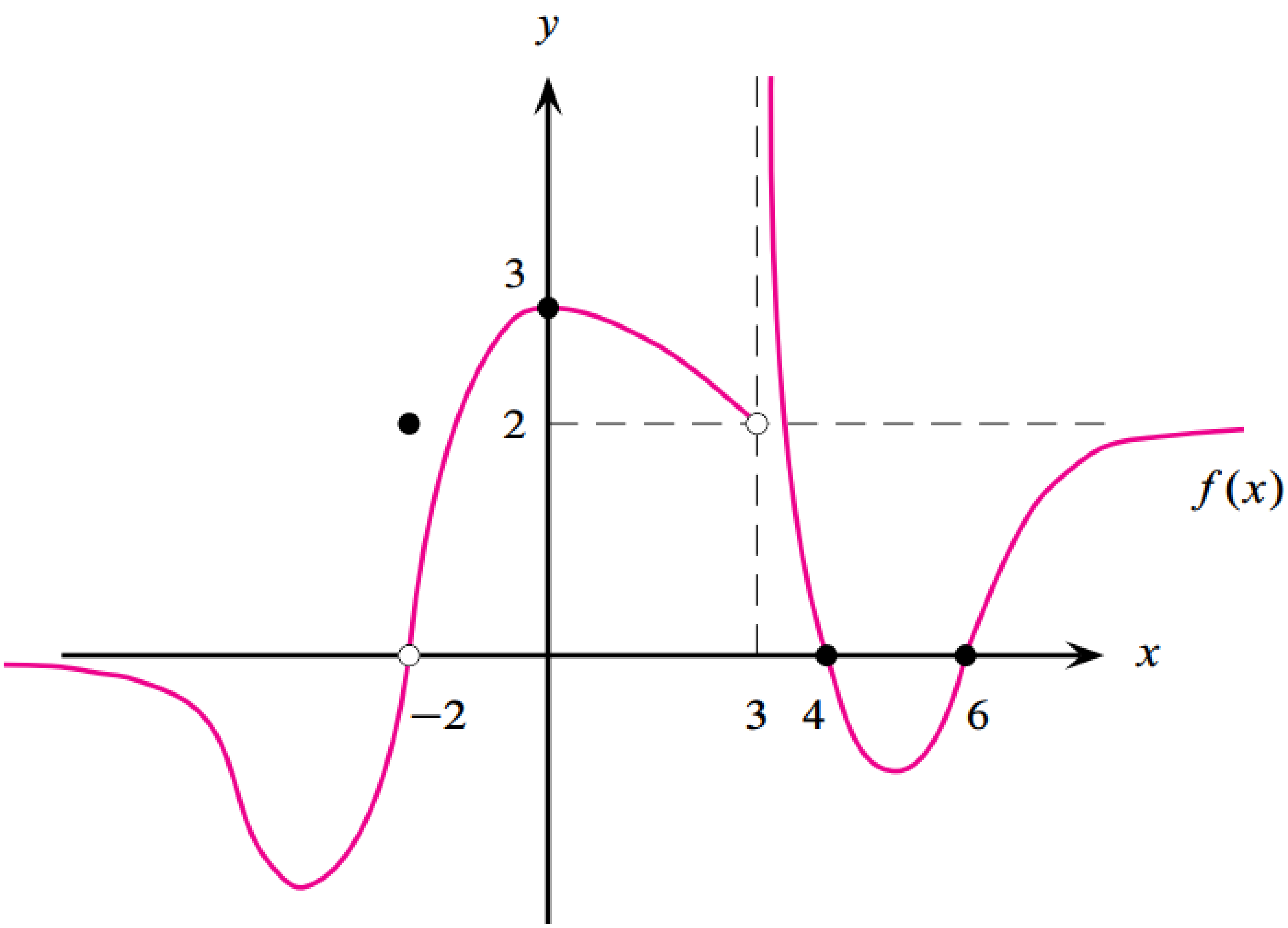
b) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

Discontinuidad de salto finito

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = existe$

Discontinuidad removible

A partir de la gráfica de una función, determinar:



- $f(0)$
- $f(-2)$
- $f(4)$

- Tipo de discontinuidad cuando x=3; x= -2

- $\lim_{x \to -2} f(x)$
- $\lim_{x \to 3} f(x)$
- $\lim_{x \to 3^+} f(x)$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x)$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Métodos para el cálculo de límites

Propiedad: "El límite de una constante, es la constante misma"

$$\lim_{x \to a} k = k$$

x es la variable independiente

a es el valor de referencia

k es una constante (un número)

$$\lim_{x \to -5} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} -3 = -3$$

Resolución de límites

Caso 1: Por sustitución

- Es el caso más simple para resolver un límite
- Como su nombre indica, basta con sustituir el valor de x en la función

EJEMPLO 2

$$\lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{x^2 + 3x + 4}{x^3 + 1}} = \lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{(2)^2 + 3(2) + 4}{(2)^3 + 1}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{4 + 6 + 4}{8 + 1}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \sqrt{\frac{14}{9}}$$

Propiedad: la raíz de un cociente equivale al cociente de las raíces (del numerador y denominador)

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{9}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{14}}{3}$$

Propiedad del límite de una constante

$$= \frac{\sqrt{14}}{3}$$

Resolución de límites

Caso 2: Por factorización

Este caso se emplea únicamente si:

1. Al sustituir el valor de x, se obtiene la indeterminación $\frac{0}{0}$
2. Se identifica que el numerador, el denominador (o ambos) es factorizable.

**Se deben cumplir las 2 condiciones

La clave está en: **SABER FACTORIZAR**

El procedimiento debe incluir 3 pasos:

1. Sustituir directamente el valor x (llegar al 0/0)
2. Factorizar y simplificar
3. Sustituir el valor x en la nueva expresión

Ejemplo resuelto en clase