CÁLCULO DIFERENCIAL

LÍMITES DE FORMA GRÁFICA

INTRODUCCIÓN

Antes de iniciar con definiciones y fórmulas, es importante tener presente:

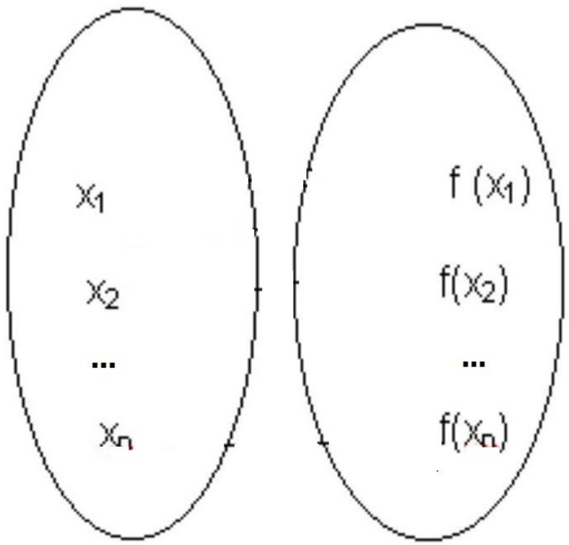
¿A qué “objeto” matemático se le puede calcular un límite?

CÁLCULO DIFERENCIAL

Trata sobre el estudio de:

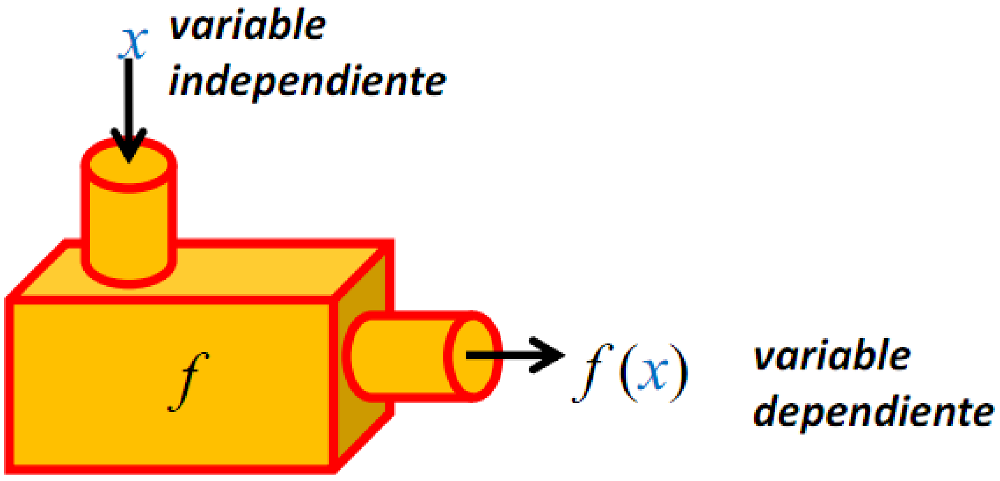
Que trabajan con:

Que manipulan:



NOTA: En Cálculo, tanto para resolver límites como derivadas, se trabaja con funciones.

Por esta razón, iniciaremos explicando lo que es y lo que no es una función.

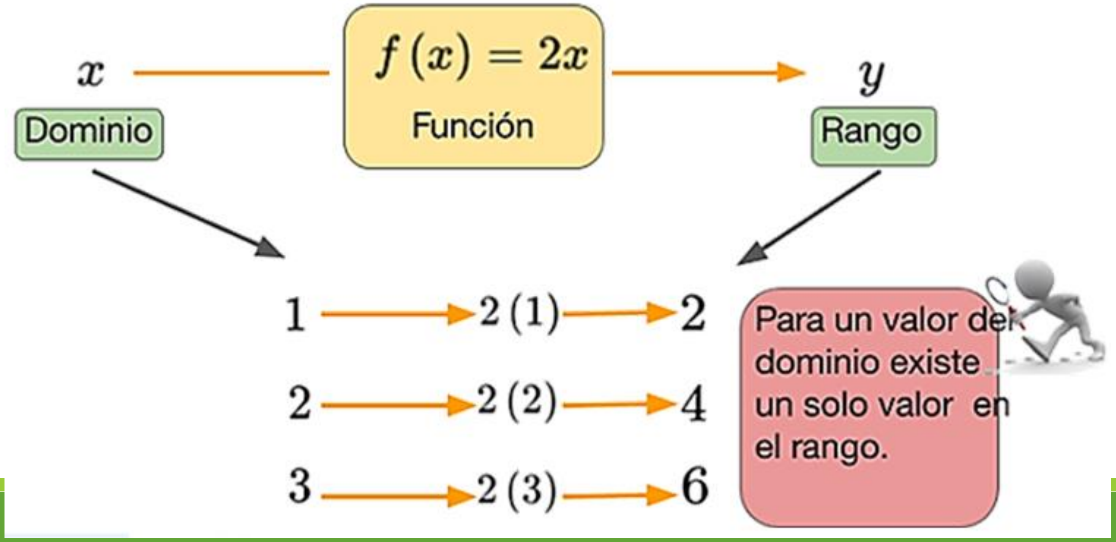


Una función maneja **variables**, es decir, entidades susceptibles a **cambios** o variación:
A "***x***" se le denota como *la variable independiente*
A "***y***" ó también *f(x)* se le denota como la *variable dependiente*

- Al **conjunto** de elementos x (en los cuales está definida una función) se le llama **Dominio**
- Al **conjunto** de elementos y se le llama **Rango**

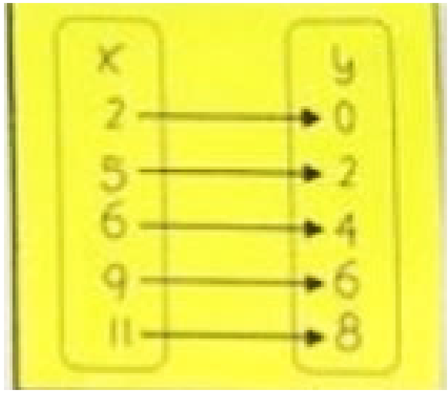
¿Qué es una función?

Una relación de correspondencia entre dos conjuntos: en donde a cada valor x (perteneciente al dominio) le corresponde un único valor de y (perteneciente al rango)



DE FORMA TABULAR…

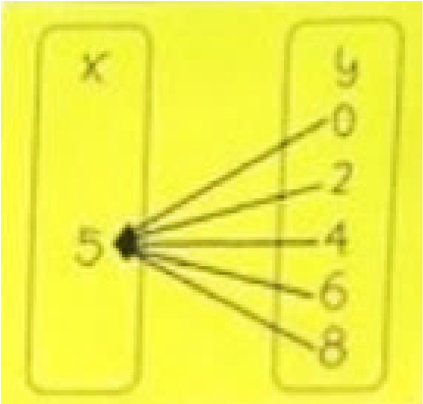
Función



A un valor de X le corresponde un único valor en Y.

X	1	2	3	4
y	1	5	6	9

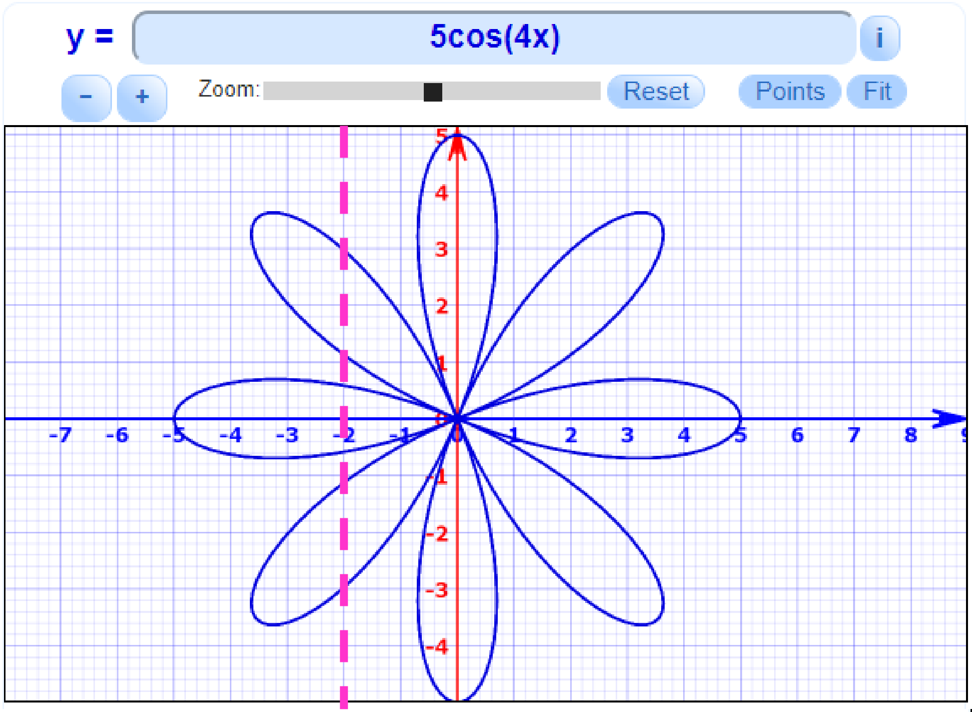
NO Función



A un valor de X le corresponden varios valores en Y.

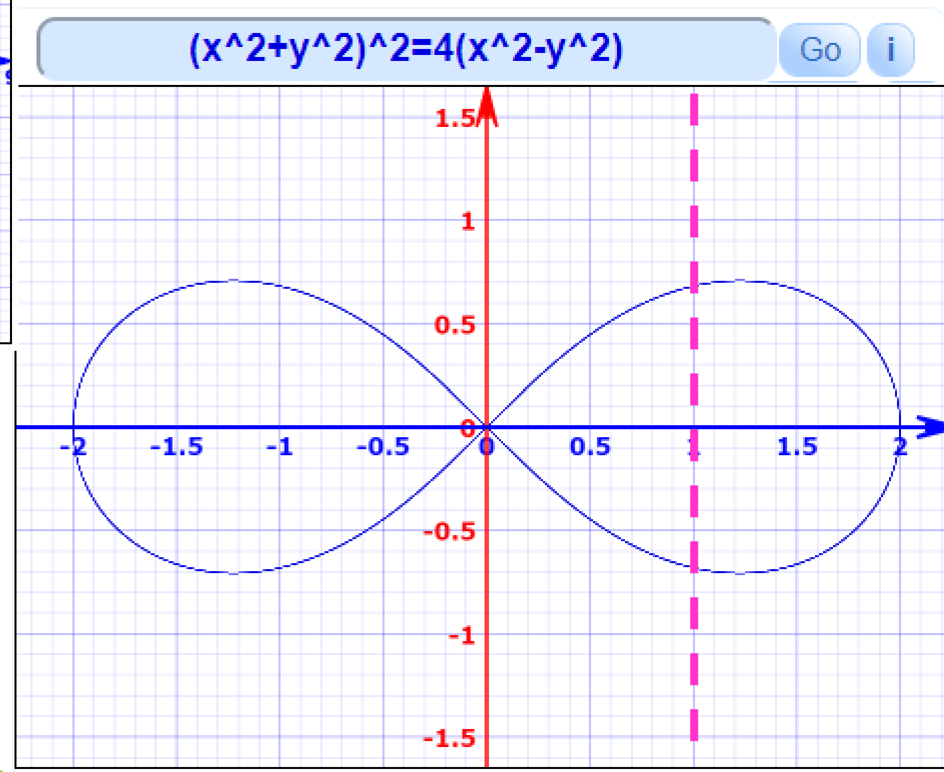
X	4	4	4	4
y	1	2	3	4

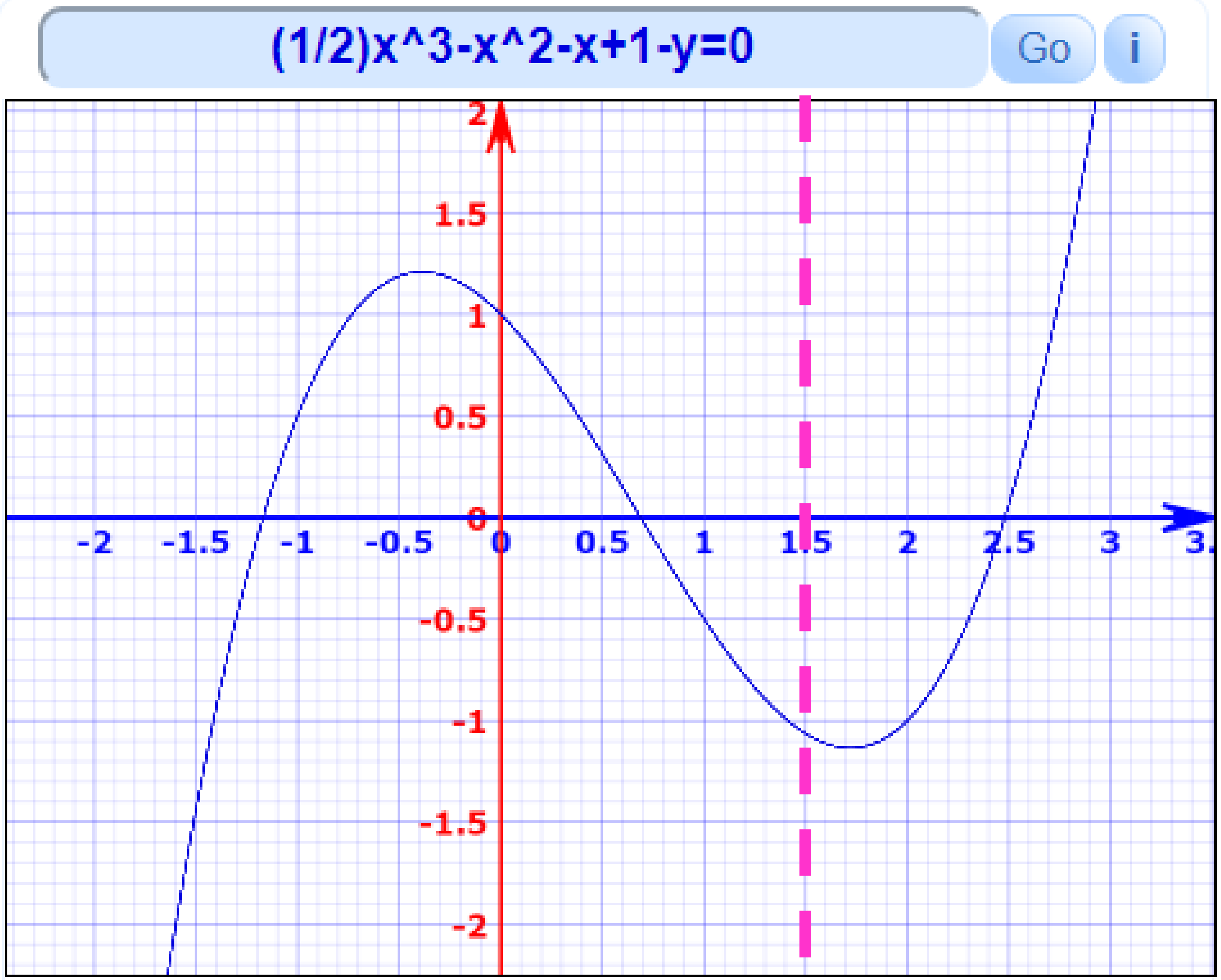
DE FORMA GRÁFICA…



Prueba de la recta vertical

La prueba establece que una gráfica representa una función **si y solo si** al trazar rectas verticales sobre ella, ninguna la intercepta en más de un punto.



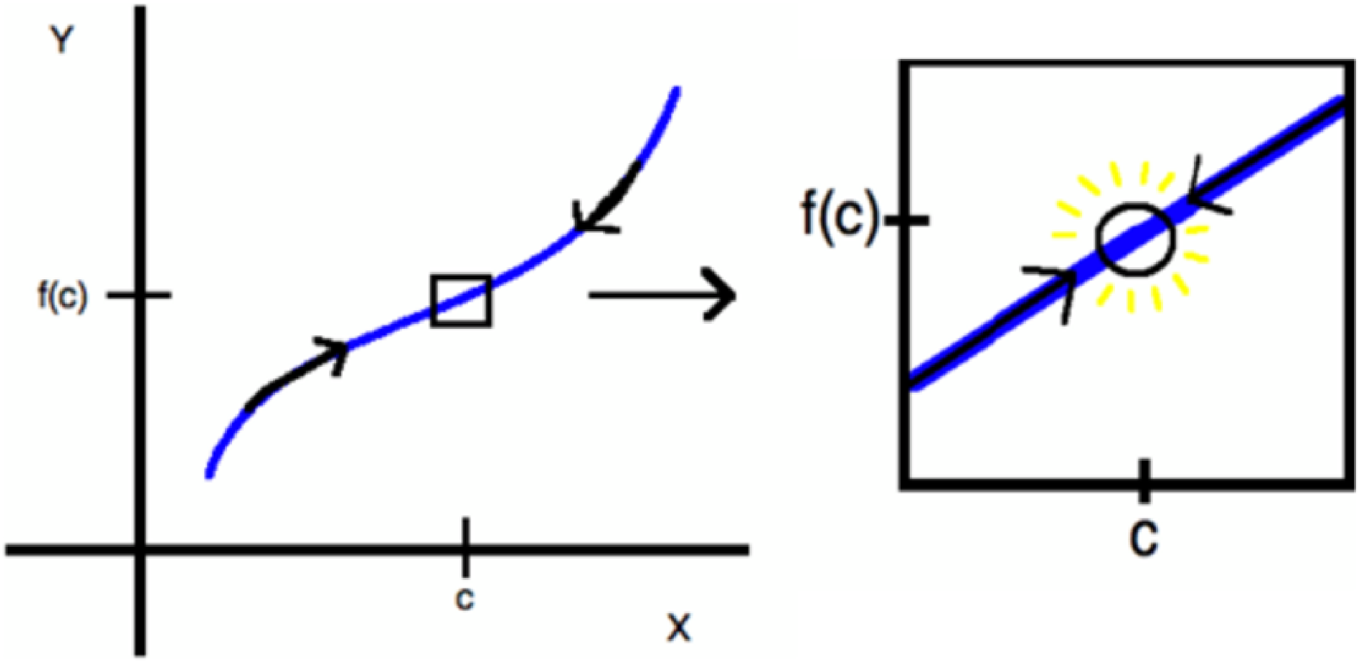


La gráfica sí representa a una función

Indeterminaciones en cálculo

<table>
<tr><th colspan="4">NO INDETERMINADO (SÍ HAY RESULTADO EXACTO)</th><th>INDETERMINADO</th></tr>
<tr><td colspan="2">$k + \infty = +\infty$
$+\infty + \infty = +\infty$</td><td colspan="2">$k - \infty = -\infty$
$-\infty - \infty = -\infty$
Suma de infinitos</td><td>$+\infty - \infty$
Diferencia de infinitos</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\frac{0}{k} = 0$
Cero entre un número</td><td colspan="2">$\frac{0}{\infty} = 0$
Cero entre infinito</td><td>$\frac{0}{0}$
Cero entre cero</td></tr>
<tr><td>$\frac{k}{\infty} = 0$
Un número entre infinito</td><td>$\frac{\infty}{k} = \infty$
Infinito entre un número</td><td colspan="2">$\frac{k}{0} = \infty$
Un número entre cero</td><td>$\frac{\infty}{\infty}$
Infinito entre infinito</td></tr>
<tr><td colspan="4">$k^0 = 1; \ \ donde\ k \neq 0$
Un número +, elevado a una potencia par, el resultado es +
Un número +, elevado a una potencia impar, el resultado es +
Un número -, elevado a una potencia par, el resultado es +
Un número -, elevado a una potencia impar, el resultado es -</td><td>0^0
∞^0</td></tr>
</table>

1.1. Límites



El límite

La expresión $\lim_{x \to a} f(x) = b$ quiere decir que si la variable independiente x toma valores próximos a un valor "*a*" (de referencia), la función $f(x)$ se aproximará a otro valor *b*.

Entonces, ¿**cómo leer matemáticamente** la expresión: $\lim_{x \to 1} 3x - 1 = 2$?

"El límite de la función 3x -1, cuando x tiende a 1, es igual a 2 "

¿**Cómo interpretar** la expresión anterior?

"Cuando la variable independiente x toma valores próximos a 1, la función $3x - 1$ se aproximará a 2. "

El límite es una aproximación

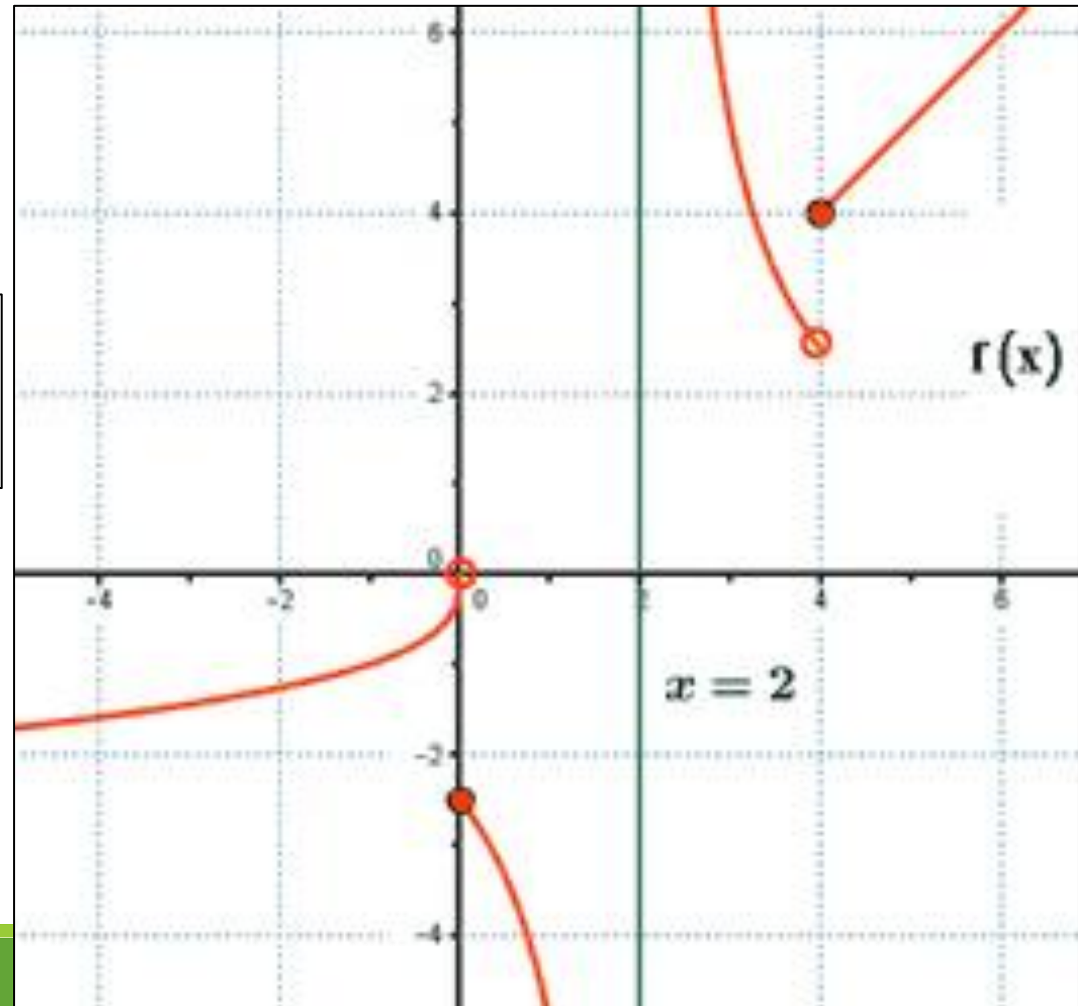
Definiciones y notación

- Al conjunto de elementos **x** (en los cuales está definida una función) se le llama **Dominio**
- Al conjunto de elementos **y** se le llama **Rango**

Al correspondiente valor en "y" para un determinado valor x se llama **Imagen**

○	●
Abierto La función no pasa por dicho valor	**Cerrado** La función pasa por dicho valor

Asíntota: línea recta que puede ser vertical, horizontal u oblicua a la que se aproxima la gráfica de una función, pero sin llegar a cruzarla.



Regresando a la notación del límite…

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

"a" es nuestro valor de referencia, "a" y "b" son 2 números reales

a^{-} significa analizar la aproximación de la función desde el lado izquierdo del valor "*a*" de referencia.

a^{+} significa analizar la aproximación de la función desde el lado derecho del valor "*a*" de referencia.

A este procedimiento se le llama ***análisis de límites laterales***.

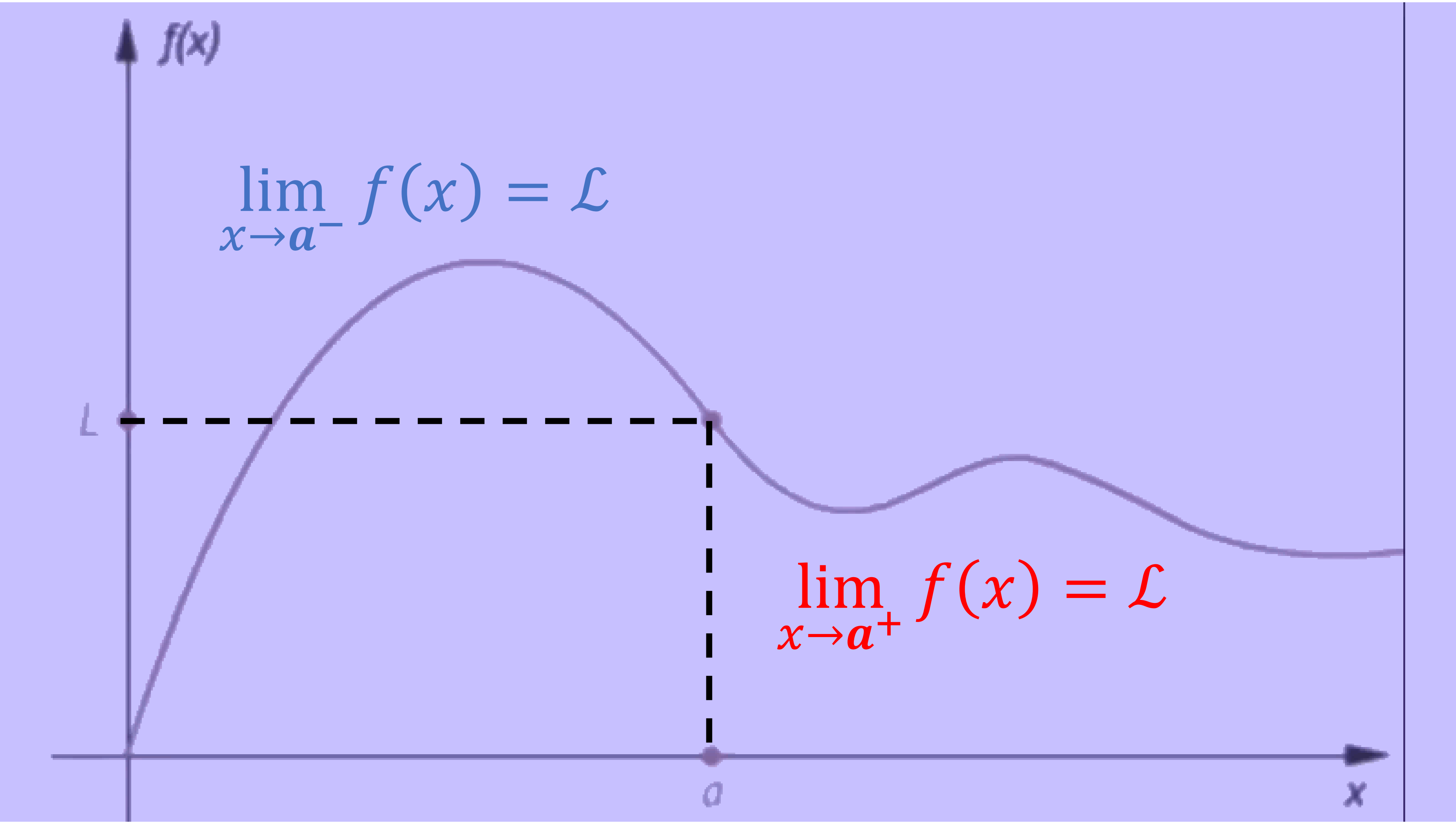
$$\text{Si} \quad \lim_{x \to a^{-}} f(x) = \lim_{x \to a^{+}} f(x)$$

Límite lateral izquierdo

Límite lateral derecho

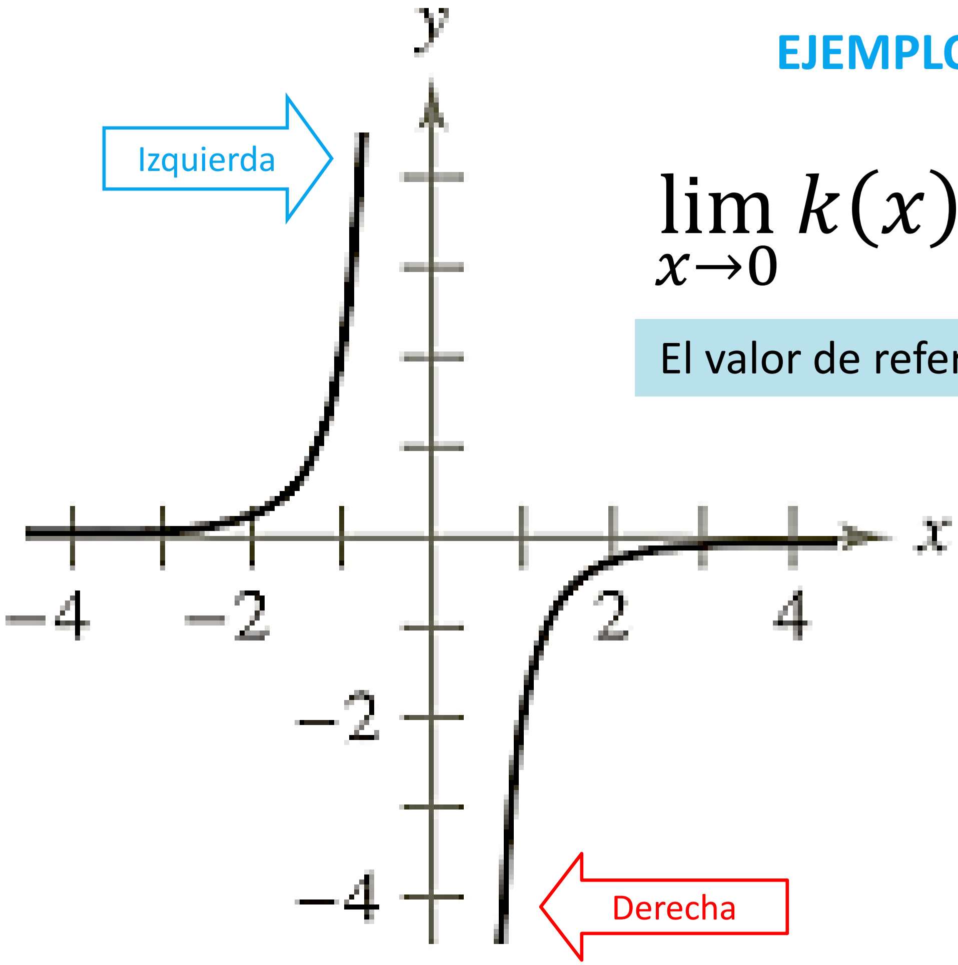
$$\text{Entonces} \quad \lim_{x \to a} f(x) \quad \text{existe}$$

Conclusión: Para que el límite exista (de forma gráfica), los límites laterales deben coincidir.



f(x)
$\lim_{x \to \boldsymbol{a}^-} f(x) = \mathcal{L}$
L
$\lim_{x \to \boldsymbol{a}^+} f(x) = \mathcal{L}$
a
x

EJEMPLO 1



$$\lim_{x \to 0} k(x) = ?$$

El valor de referencia es el 0

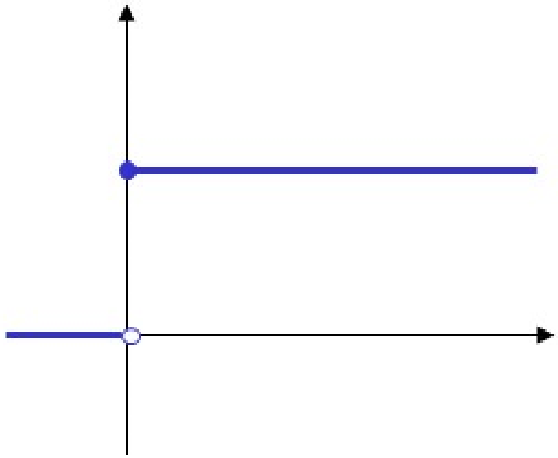
$$\lim_{x \to 0} k(x) = \nexists$$

No existe

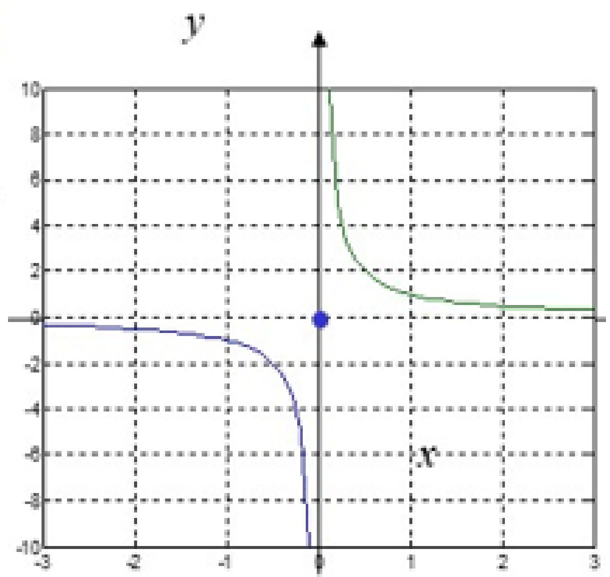
$$\lim_{x \to 0^-} k(x) = +\infty \qquad f(x)\ crece\ indefinidamente$$

$$\lim_{x \to 0^+} k(x) = -\infty \qquad f(x)\ decrece\ indefinidamente$$

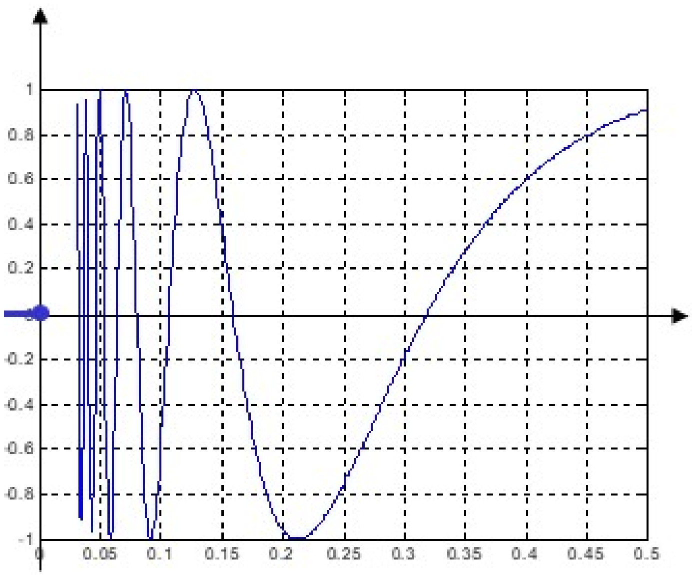
¿Cuándo el límite no existe de forma gráfica?



La función salta



La función tiende a infinitos contrarios

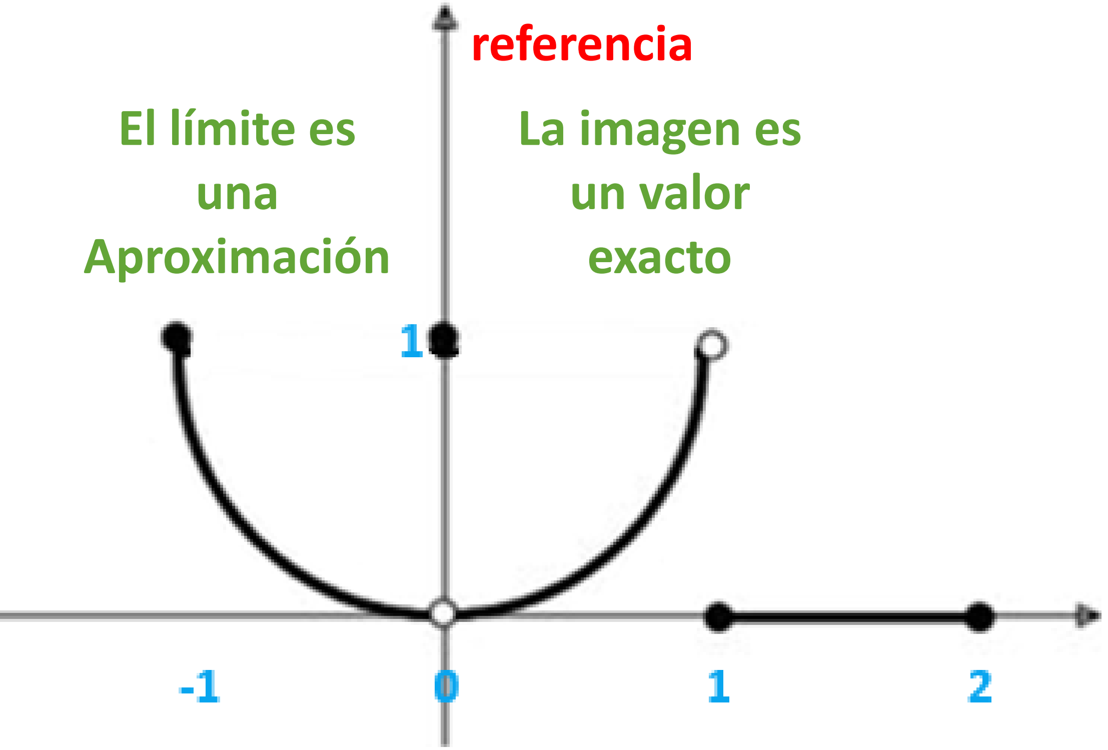


Oscila demasiado

EJEMPLO 2

Analizar la veracidad o falsedad de los siguientes incisos

No confundir el límite de la función con su imagen en el punto de referencia



a) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \text{no existe}$

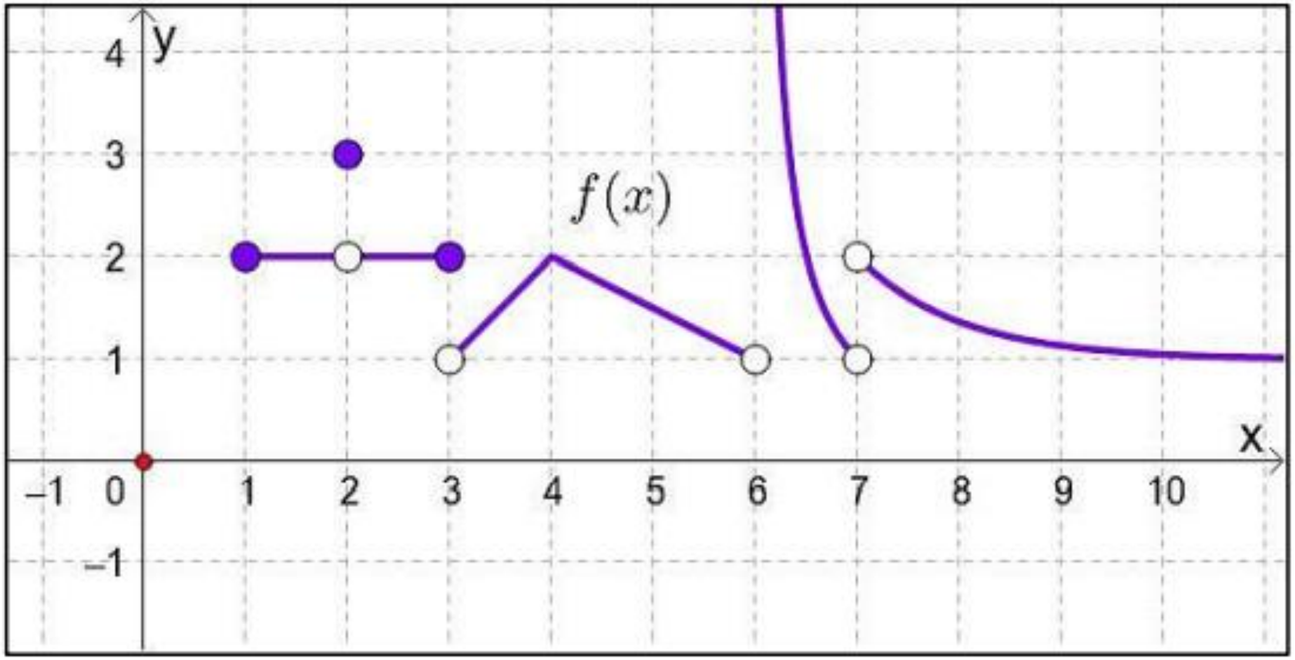
b) $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$

c) $\lim_{x \to 0} f(x) = \text{existe}$

d) $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

- Decimos que x ***tiende*** a un valor x_0, y lo escribimos $x \to x_0$, si se pueden tomar valores de x tan próximos a x_0 como se quiera, no necesariamente llegando a tomar el valor de x_0.

EJEMPLO: ERRORES EN LA INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS



a) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) =$ No existe

b) $\lim\limits_{x \to 6^-} f(x) \approx 5.99$ $\lim\limits_{x \to 7^+} f(x) \approx 7.1$

c) $\lim\limits_{x \to 7^-} f(x) \approx 6.9$ Entonces $\lim\limits_{x \to 7} f(x) =$ No existe

Por supuesto, para que exista el límite global de la función $f(x)$ en el punto x_0, debe existir tanto el límite por la izquierda, como el límite por la derecha, y ser iguales, es decir

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L \\ \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Barreno, N; Cachuput, J; Martínez, J; Román, M (2018). *Límites y Continuidad de una función Real*: Grupo Compás.