PRIMER EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO EN UNA VARIABLE

Apellidos y Nombres :...
Escuela :...
Fecha : viernes, 26, setiembre, 2025

---

1. **(6 puntos)** Dado el gráfico de la función:

Determine:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2^-$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = -1$

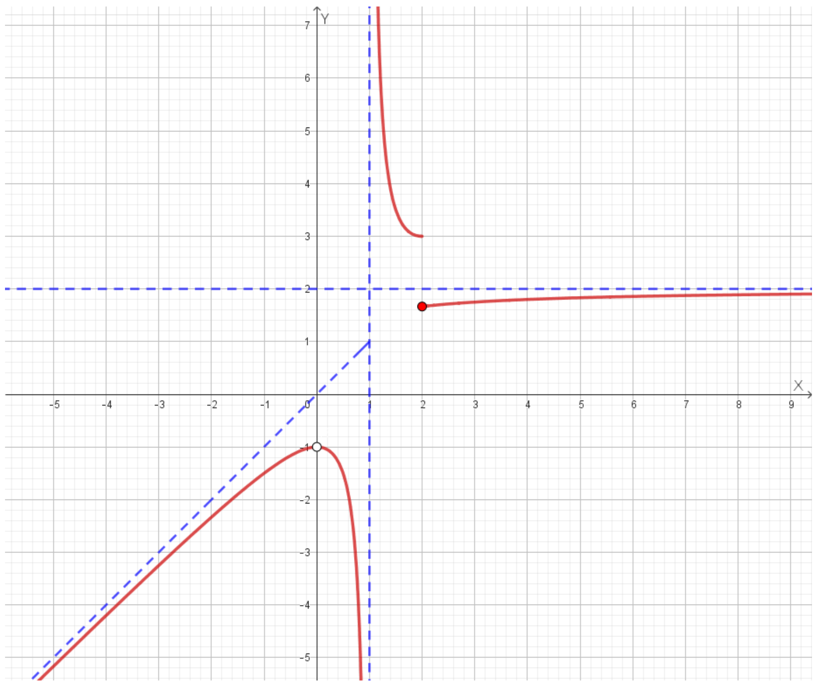
f) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = 3^+$

g) Las ecuaciones de todas las asíntotas.
A.V: $x = 1$
A.H: $y = 2$
AO: $y = x$

h) ¿ f es contínua en $x = 0$? Justificar
No. Presenta DISCONTINUIDAD REMOVIBLE en $x = 0$. Porque la función no está definida en $x = 0$.

i) ¿ f es contínua en $x = 1$? Justificar
No. Presenta DISCONTINUIDAD INFINITA en $x = 1$. Porque $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$.

j) ¿ f es contínua en $x = 2$? Justificar
No. Presenta DISCONTINUIDAD FINITA en $x = 2$. Porque $\lim\limits_{x\to1} f(x) = \infty$.



2. **(4 puntos)** Calcule si es que existen:

a) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x+2}\right)$ b) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x+2}\right)$

SOLUCION

a)
$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x+2}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x+2}\right).\left(x+\sqrt{x^2+5x+2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+5x+2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-\left(x^2+5x+2\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+5x+2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-5x-2}{\left(x+\sqrt{x^2+5x+2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-5-\frac{2}{x}\right)}{\left(x+|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(-5-\frac{2}{x}\right)}{\left(x+x\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(-5-\frac{2}{x}\right)}{\left(1+\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}=-\frac{5}{2}$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x+2}\right)=-\frac{5}{2}$$

b)
$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x+2}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2+5x+2}\right).\left(x+\sqrt{x^2+5x+2}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+5x+2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\left(x^2+5x+2\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+5x+2}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-5x-2}{\left(x+\sqrt{x^2+5x+2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-5-\frac{2}{x}\right)}{\left(x+|x|\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(-5-\frac{2}{x}\right)}{\left(x-x\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(-5-\frac{2}{x}\right)}{\left(1-\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)}=-\frac{5}{0^+}=-\infty$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{x^2+5x+2}\right)=-\infty$$

3. **(5 puntos)** Determine el valor de las contantes para que la función sea continua en todo su dominio	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x+2} & ; \quad x<-2\\ ax^2-2bx & ;-2\le x\le 2\\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & ; \quad x>2\end{cases}$

SOLUCIÓN

- f es continua en $x=-2$:

  i. $\exists f(-2)=4a+4b$

  ii. $\exists \underset{x\to -2}{Lím}\ f(x)=4a-4b$

$$\underset{x\to -2^-}{Lím}\ f(x)=\underset{\substack{x\to -2\\ x<-2}}{Lím}\ \frac{x^3-x^2-4x+4}{x+2}=\underset{x\to -2}{Lím}\ \frac{(x+2)(x^2-3x+2)}{(x+2)}=\underset{x\to -2}{Lím}\ (x^2-3x+2)=12$$

$$\underset{x\to -2^+}{Lím}\ f(x)=\underset{\substack{x\to -2\\ x>2}}{Lím}\ =\underset{x\to -2}{Lím}\ ax^2-2bx=4a+4b$$

$$\therefore 4a+4b=12 \quad \Rightarrow \quad a+b=3 \text{....(1)}$$

- f es continua en $x=2$:

  iii. $\exists f(2)=4a-4b$

  iv. $\exists \underset{x\to 2}{Lím}\ f(x)=4a-4b$

$$\underset{x\to 2^+}{Lím}\ f(x)=\underset{\substack{x\to 2\\ x>2}}{Lím}\ \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}=\underset{x\to 2}{Lím}\ \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)}=\underset{x\to 2}{Lím}\ (\sqrt{x+2}+2)=4$$

$$\underset{x\to 2^-}{Lím}\ f(x)=\underset{\substack{x\to 2\\ x<2}}{Lím}\ =\underset{x\to 2}{Lím}\ ax^2-2bx=4a-4b$$

$$\therefore 4a-4b=4 \quad \Rightarrow \quad a-b=1 \text{....(2)}$$

Resolviendo el sistema (1) y (2):

$$\begin{cases}a-b=1\\ a+b=3\end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases}a=2\\ b=1\end{cases}$$

4. **(5 puntos)** Derive:

a) $f(x)=\dfrac{1+x^3}{1-x^3}$

b) $f(x)=(4x-1)^2.\sqrt[4]{1+2x^2}$

SOLUCION

a) $$f'(x)=\frac{3x^2(1-x^3)-(-3x^2)(1+x^3)}{(1-x^3)^2}$$

$$f'(x)=\frac{3x^2-3x^5+3x^2+3x^5}{(1-x^3)^2}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{6x^2}{(1-x^3)^2}}$$

b) $$f(x)=(4x-1)^2.(1+2x^2)^{1/4}$$

$$f'(x)=\left[2(4x-1)4\right].(1+2x^2)^{1/4}+\left[\frac{1}{4}(1+2x^2)^{-3/4}.4x\right].(4x-1)^2$$

$$f'(x)=(4x-1)(1+2x^2)^{-3/4}\left[8(1+2x^2)+x(4x-1)\right]$$

$$f'(x)=(4x-1)(1+2x^2)^{-3/4}\left[8+16x^2+4x^2-x\right]$$

$$f'(x)=(4x-1)(1+2x^2)^{-3/4}\left[20x^2-x+8\right]$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{(4x-1)(20x^2-x+8)}{\sqrt[4]{(1+2x^2)^3}}}$$