SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

CÁLCULO EN UNA VARIABLE

Apellidos y Nombres :...

Escuela :...

Fecha : viernes, 31, octubre, 2025

---

1. **(4 puntos)** Sea la función $y = ln\left(e^{2x} - \sqrt{e^{4x}-1}\right)$. Hallar la función $F(x)$ (simplifique) de la ecuación:

$$3y' + \left(e^{4x}-1\right)y'' = \frac{F(x)-6}{\sqrt{e^{4x}-1}}$$

SOLUCION

$$y' = \frac{1}{e^{2x}-\sqrt{e^{4x}-1}}\left(2e^{2x} - \frac{4e^{4x}}{2\sqrt{e^{4x}-1}}\right)$$

$$y' = \frac{1}{e^{2x}-\sqrt{e^{4x}-1}}\, 2e^{2x}\left(1 - \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}\right)$$

$$y' = \frac{1}{\cancel{e^{2x}-\sqrt{e^{4x}-1}}} \cdot -2e^{2x}\left(\frac{\cancel{e^{2x}-\sqrt{e^{4x}-1}}}{\sqrt{e^{4x}-1}}\right)$$

$$\boxed{y' = -\frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}}}$$

$$y'' = \frac{-4e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1} + \dfrac{2e^{2x}\cdot 4e^{4x}}{2\sqrt{e^{4x}-1}}}{(e^{4x}-1)} = \frac{-4e^{2x}(e^{4x}-1) + 4e^{6x}}{(e^{4x}-1)\sqrt{e^{4x}-1}}$$

$$\boxed{y'' = \frac{4e^{2x}}{\sqrt{(e^{4x}-1)^3}}}$$

$$\frac{-6e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}} + \frac{4e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}-1}} = \frac{F(x)-6}{\sqrt{e^{4x}-1}}$$

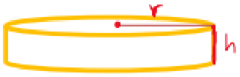
$$F(x) = -2e^{2x} + 6$$

2. **(4 puntos)** Una capa circular de aceite es provocada por un derrame de $1cm^3$ de aceite. El espesor de la capa de aceite decrece a razón de $0.1cm/h$. ¿Con que razón aumenta el radio de la capa de aceite cuando el radio es $8cm$?

Solución.-

$\text{Volumen} = 1cm^3 = \pi r^2 h$

$\therefore \; \pi r^2 h = 1 \; \ldots\ldots (*)$



$\frac{dh}{dt} = -0{,}1 \; cm/h = -\frac{1}{10} \; cm/h$

$\frac{dr}{dt} = ? \qquad r = 8 \, cm$

en $(*)$: Si $r = 8 \Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2} \Rightarrow h = \frac{1}{64\pi}$

Derivamos: $\pi r^2 h = 1$

$2\pi . r . \frac{dr}{dt} \cdot h + \pi . r^2 . \frac{dh}{dt} = 0$

$\pi r \left(2h \frac{dr}{dt} + r \frac{dh}{dt} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{r}{2h} \frac{dh}{dt}$

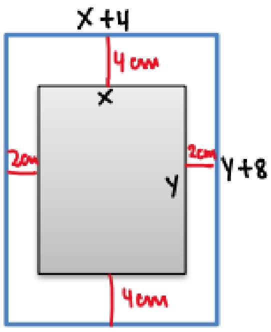
$\therefore \; \frac{dr}{dt} = -\frac{8(64\pi)}{2(1)} \cdot \left(-\frac{1}{10} \right)$ $\qquad \frac{\cancel{8}^{4} \cdot \cancel{64}^{32} . \pi}{\cancel{(2)}(1)(\cancel{10}_{5})} =$

$\therefore \; \frac{dr}{dt} = +\frac{128}{5}\pi \; cm/h = +25{,}6\pi \; cm/h = +80{,}42 \; cm/h$

RPTA: El radio de la capa de aceite aumenta a una razón de $\frac{128}{5}\pi \; {}^{cm}\!/_{h}$.

3. **(4 puntos)** Se quiere diseñar un cartel que contenga $512cm^2$ de impresión con márgenes superior é inferior de $4cm$ y márgenes laterales de $2cm$. Determine las dimensiones del cartel para que se use la menor cantidad de papel.

Solución.-



$XY = 512 cm^2 \Rightarrow Y = \dfrac{512}{X}$ --- (*)

$X+4 = ?$ $\quad Y+8 = ?$

mín cantidad de papel

cantidad de papel $= (X+4)(Y+8)$

$CP = (X+4)\left(\dfrac{512}{X} + 8\right)$

$\boxed{CP(X) = 544 + 8X + \dfrac{2048}{X}}$, $X > 0$

Aplicando el criterio de la 2da derivada:

$CP'(X) = 8 - \dfrac{2048}{X^2} = \dfrac{8X^2 - 2048}{X^2} = \dfrac{8(X^2 - 256)}{X^2} = \dfrac{8(X-16)(X+16)}{X^2}$

$CP'(X) = 0 \Rightarrow X = 16 \vee \cancel{X = -16}$

$CP''(X) = \dfrac{4096}{X^3}$

$CP''(16) > 0 \Rightarrow CP$ tiene mín $X = 16$

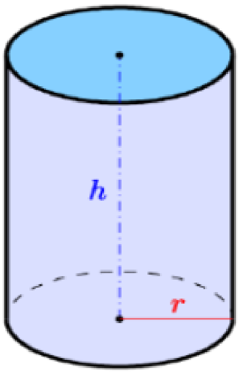
en (*) $\quad Y = 32$

$\therefore$ Dimensiones de la hoja: ancho $= X+4 = 20$ cm.
largo $= Y+8 = 40$ cm.

RPTA: Para usar la menor cantidad de papel, las dimensiones de la hoja deben ser 20 cm x 40 cm.

4. **(4 puntos)** El diámetro interior de un cilindro de una máquina de combustión interna es de 8.750 cm. y el largo del cilindro es 12.5 cm. Si el cilindro es rectificado de manera que su nuevo diámetro interior sea de 8.752 cm. Use diferenciales para estimar el aumento del volumen del cilindro.

Solución.-



$h = 12{,}5\,cm$

$d_0 = 8{,}750\,cm \rightarrow d_1 = 8{,}752\,cm$

$\Delta d = d_1 - d_0 = 0{,}002\,cm$

$\Delta V \approx dV = V'(8{,}750).\Delta d \ldots (*)$

$V = \pi r^2 h$, pero $r = \frac{d}{2}$

$V = \frac{\pi}{4} d^2 h$, $h = 12{,}5$ (fijo)

$V(d) = \frac{12{,}5}{4} \pi d^2$

$V'(d_0) = \frac{12{,}5}{2} \pi d_0$, $V'(8{,}750) = 54{,}6875\,\pi$

En $(*)$: $dV = (54{,}6875\,\pi).(0{,}002)$

$dV = 0{,}109375\,\pi$

$dV = 0{,}3436$

$\therefore \Delta V \approx 0{,}3436\,cm^3$

RPTA: El volumen del cilindro aumenta aproximadamente en 0.3436 cm^3.

5. **(5 puntos)** Use el criterio de la segunda derivada para que calcule los valores extremos, determine intervalos de concavidad, encuentre puntos de inflexión, determine asíntotas si es que existen y trace la gráfica de $f(x)=x^2-\dfrac{2}{x}$.

SOLUCION

i) $Dom(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

ii) Extremos:

$$f'(x) = 2x + \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3+2}{x^2} = \frac{2(x^3+1)}{x^2} = \frac{2(x+1)(x^2-x+1)}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1$$

$$f''(x) = 2 - \frac{4}{x^3} = \frac{2x^3-4}{x^3} = \frac{2(x^3-2)}{x^3}$$

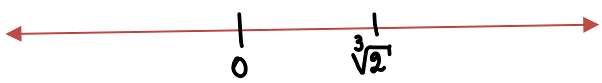
$$f''(-1) > 0$$

$\therefore$ f tiene mín local $x=-1$
valor mín local $f(-1) = 3$ $\Big\rangle$ $M = (-1, 3)$

iii) Intervalos de concavidad.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 2 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$$

$$\nexists f''(x) \Rightarrow x = 0 \notin Dom(f)$$



Intervalos	Signo de	concavidades	Puntos inflexión
$\langle -\infty, 0\rangle$	$-$	(+)	
$\langle 0, \sqrt[3]{2}\rangle$	$+$	(−)	$\exists$ P.I:
$\langle \sqrt[3]{2}, +\infty\rangle$	$-$	(+)	$P = (\sqrt[3]{2}, 0)$

iv) Asíntotas

A.V: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3-2}{x} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-2}{x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$\exists$ A.V: $x = 0$

A.H:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 - 2}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3 - 2}{x} = \frac{-\infty}{-\infty} = +\infty$$

$\nexists$ A.H.

v) Gráfica: