
Transfert de chaleur 2D en régime stationnaire : Partie 1

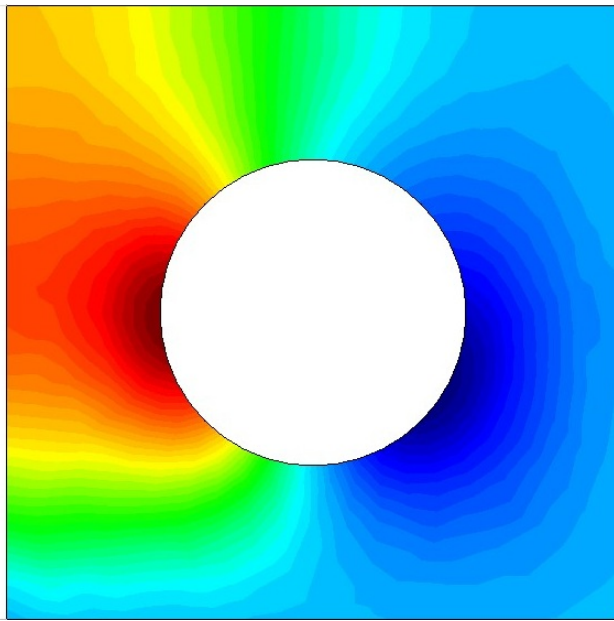


FIGURE 1 – Câble tendu sous une charge $w(x)$.

Gilbert Djidiack FAYE

Table des matières

Sommaire	i
Table des matières	i
Table des figures	ii
Liste des tableaux	iii
1 TP4 : Transfert de chaleur 2D en régime stationnaire : Partie 1	1
1.1 Présentation du mandat, des objectifs et de la méthodologie.	1
1.2 Développements mathématiques menant à l'application par éléments finis etc.	1
1.2.1 Calcul des fonctions d'interpolation sur l'élément de référence trian- gulaire	2
1.2.2 Exprimons δt , $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial \delta t}{\partial x}$ et $\frac{\partial \delta t}{\partial y}$ par rapport aux fonctions d'inter- polation sur l'élément de référence triangulaire	3
1.2.3 Calcul de l'aire infinitésimale sur l'espace de référence (u, v)	4
1.2.4 Déterminons $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ sur l'élément de référence triangulaire	4
1.2.5 Calcul de la fonction linéaire sur l'élément de référence (bornée -1 à 1)	5
1.2.6 Exprimons δt , T , $d\Gamma$, $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$ par rapport à la fonction linéaire sur l'élément de référence	6
1.2.7 Calcul des formes élémentaires par intégration exacte	7
1.3 Présentation des résultats obtenus	10
1.3.1 Température	10
1.3.2 Gradient	11
1.3.3 Flux	13
1.4 Conclusion incluant une discussion des résultats obtenus.	15

Table des figures

1.1	Fonctions d'interpolation.	2
1.2	Fonctions d'interpolation.	5
1.3	Solution Référencée de la température.	10
1.4	Solution Trouvée de la température.	10
1.5	Solution Référencée du gradient suivant X.	11
1.6	Solution Trouvée du gradient suivant X.	11
1.7	Solution Référencée du gradient suivant Y.	12
1.8	Solution Trouvée du gradient suivant Y.	12
1.9	Solution Référencée du flux suivant X.	13
1.10	Solution Trouvée du flux suivant X.	13
1.11	Solution Référencée du flux suivant Y.	14
1.12	Solution Trouvée du flux suivant Y.	14

Liste des tableaux

TP4 : Transfert de chaleur 2D en régime stationnaire : Partie 1

1.1 Présentation du mandat, des objectifs et de la méthodologie.

L'étude entre dans le cadre d'un problème de transfert de chaleur 2D en régime stationnaire par la méthode des éléments finis. En effet l'objectif est de développer une application générique permettant de résoudre cette dernière. Pour se faire, une pièce en 2D a été conçue grâce au logiciel *GIDTM* et un maillage a été généré afin d'importer toutes les données d'entrées (nœuds, éléments, matériaux, propriétés géométriques, conditions aux limites naturelles et essentielles ainsi les sources ou puits de chaleur) nécessaires au traitement du problème. Ainsi à l'aide d'un développement mathématique allant de la mise en équation à partir de l'équation d'équilibre jusqu'au système matriciel à résoudre, nous allons développer sur Matlab une application structurée dans laquelle chaque opération spécifique fera l'objet d'une fonction dédiée à ladite opération.

1.2 Développements mathématiques menant à l'application par éléments finis etc.

On rappelle que l'équation d'équilibre de transfert de chaleur est donnée par la relation suivante :

$$-\frac{dq_x}{dx} - \frac{dq_y}{dy} + Q = 0 \quad (1.1)$$

avec,

$$q_x = -K_x \frac{\partial T}{\partial x} \text{ et } q_y = -K_y \frac{\partial T}{\partial y}$$

1.2.1 Calcul des fonctions d'interpolation sur l'élément de référence triangulaire

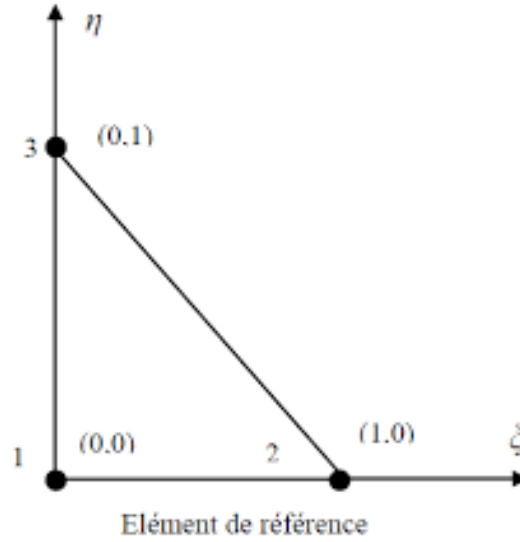


FIGURE 1.1 – Fonctions d'interpolation.

Sur un système de coordonnées locales (u) avec une origine localisée à gauche ($\alpha = -1$), déterminons l'expression du champ géométrique (position) en termes des fonctions de base sur u .

On a,

$$\langle P \rangle = \langle 1 \quad u \quad v \rangle \quad (1.2)$$

Puis,

$$\langle N \rangle = \langle 1 \quad u \quad v \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (1.3)$$

$$\Rightarrow \langle N \rangle = \langle 1 \quad u \quad v \rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

$$\Rightarrow \langle N \rangle = \langle 1 - u - v \quad u \quad v \rangle \quad (1.5)$$

Ceci nous l'expression suivante :

$$x = \langle 1 - u - v \quad u \quad v \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

Chapitre 1.

1.2.2 Exprimons δt , $\frac{\partial T}{\partial x}$, $\frac{\partial T}{\partial y}$, $\frac{\partial \delta t}{\partial x}$ et $\frac{\partial \delta t}{\partial y}$ par rapport aux fonctions d'interpolation sur l'élément de référence triangulaire

On a :

$$\delta t = \begin{Bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta t_1 \\ \delta t_2 \\ \delta t_3 \end{Bmatrix} \quad (1.7)$$

Ceci implique que :

$$\delta t = \begin{Bmatrix} 1 - u - v & u & v \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta t_1 \\ \delta t_2 \\ \delta t_3 \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

Puisque :

$$\frac{\partial \delta t}{\partial x} = \frac{\partial \delta t}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \delta t}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial \delta t}{\partial x} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta t}{\partial u} \\ \frac{\partial \delta t}{\partial v} \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

En utilisant l'expression de l'équation 1.8 :

$$\Rightarrow \frac{\partial \delta t}{\partial x} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial u} & \frac{\partial N_2}{\partial u} & \frac{\partial N_3}{\partial u} \\ \frac{\partial N_1}{\partial v} & \frac{\partial N_2}{\partial v} & \frac{\partial N_3}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta t_1 \\ \delta t_2 \\ \delta t_3 \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

En appliquant les dérivées partielles des fonctions d'interpolation, on obtient :

$$\Rightarrow \frac{\partial \delta t}{\partial x} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta t_1 \\ \delta t_2 \\ \delta t_3 \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \delta t}{\partial x} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta t_1 \\ \delta t_2 \\ \delta t_3 \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

Par analogie, $\frac{\partial \delta t}{\partial y}$ est la suivante :

$$\Rightarrow \frac{\partial \delta t}{\partial y} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta t_1 \\ \delta t_2 \\ \delta t_3 \end{Bmatrix} \quad (1.14)$$

D'où :

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta t}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta t}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta t_1 \\ \delta t_2 \\ \delta t_3 \end{Bmatrix} = [B] \begin{Bmatrix} \delta t_1 \\ \delta t_2 \\ \delta t_3 \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

Chapitre 1.

Par analogie :

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right\} = [B] \left\{ \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{array} \right\} \quad (1.16)$$

1.2.3 Calcul de l'aire infinitésimale sur l'espace de référence (u, v)

Considérant les deux composantes scalaires du, dv transporté de u, v dans x, y tel que :

$$d\vec{u} = |d\vec{u} \times d\vec{v}| \quad (1.17)$$

On note que toute variation dans l'élément parent implique une variation dans l'élément réel alors,

$$d\vec{u} = \frac{\partial x}{\partial u} du \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial u} du \hat{j} \quad d\vec{v} = \frac{\partial x}{\partial v} dv \hat{i} + \frac{\partial y}{\partial v} dv \hat{j} \quad (1.18)$$

Donc l'équation 1.17 revient à :

$$dA = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \right) dudv \quad (1.19)$$

Ou bien :

$$dA = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{array} \right\| dudv = \|J\| dudv \quad (1.20)$$

1.2.4 Déterminons $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ sur l'élément de référence triangulaire

On sait que :

$$x = \langle 1 - u - v \quad u \quad v \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad y = \langle 1 - u - v \quad u \quad v \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \quad (1.21)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \langle -1 \quad 1 \quad 0 \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = x_2 - x_1 & \frac{\partial x}{\partial v} &= \langle -1 \quad 0 \quad 1 \rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = x_3 - x_1 \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \langle -1 \quad 1 \quad 0 \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = y_2 - y_1 & \frac{\partial y}{\partial v} &= \langle -1 \quad 0 \quad 1 \rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = y_3 - y_1 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Le jacobien peut se réécrire de la forme :

$$[J] = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

Chapitre 1.

La transformé inverse du Jacobien donne :

$$[J]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \quad (1.25)$$

Finalement :

$$\begin{array}{cc} \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y_3 - y_1}{D}} & \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y_1 - y_2}{D}} \\ \boxed{\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x_1 - x_3}{D}} & \boxed{\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{x_2 - x_1}{D}} \end{array} \quad (1.26)$$

avec,

$$D = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)$$

1.2.5 Calcul de la fonction linéaire sur l'élément de référence (bornée -1 à 1)

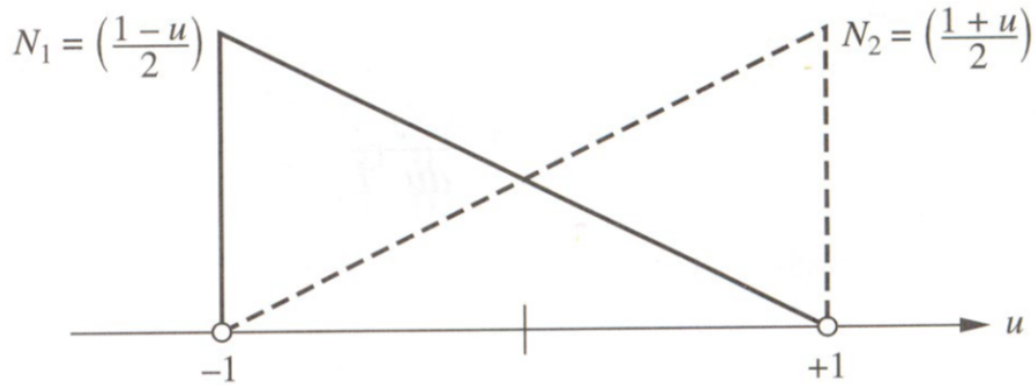


FIGURE 1.2 – Fonctions d'interpolation.

Sur un système de coordonnées locales (u) avec une origine localisée à gauche ($\alpha = -1$), déterminons l'expression du champ géométrique (position) en termes des fonctions de base sur u .

On a,

$$\langle P \rangle = \langle 1 \quad u \rangle \quad (1.27)$$

Puis,

$$\langle N \rangle = \langle 1 \quad u \rangle \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (1.28)$$

Chapitre 1.

$$\Rightarrow \langle N \rangle = \langle 1 \quad u \rangle \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

$$\Rightarrow \langle N \rangle = \left\langle \frac{1-u}{2} \quad \frac{1+u}{2} \right\rangle \quad (1.30)$$

Ceci nous l'expression suivante :

$$x = \left\langle \frac{1-u}{2} \quad \frac{1+u}{2} \right\rangle \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (1.31)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}[(1-u)a + (1+u)b] \quad (1.32)$$

Finalement l'expression de la position en termes des fonctions de base sur u s'écrit :

$$\boxed{x = \left(\frac{a+b}{2}\right) + \left(\frac{b-a}{2}\right)u} \quad (1.33)$$

1.2.6 Exprimons δt , T , $d\Gamma$, $\frac{dx}{du}$, $\frac{dy}{du}$ par rapport à la fonction linéaire sur l'élément de référence

On a :

$$\delta t = \langle N_1 \quad N_2 \rangle \begin{Bmatrix} \delta t_1 \\ \delta t_2 \end{Bmatrix} \quad (1.34)$$

Ceci implique que :

$$\boxed{\delta t = \left\langle \frac{1-u}{2} \quad \frac{1+u}{2} \right\rangle \begin{Bmatrix} \delta t_1 \\ \delta t_2 \end{Bmatrix}} \quad (1.35)$$

Par analogie :

$$\boxed{T = \left\langle \frac{1-u}{2} \quad \frac{1+u}{2} \right\rangle \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{Bmatrix}} \quad (1.36)$$

Trouvons l'expression de $\frac{du}{dx}$.
D'emblée on sait que :

$$x = \left\langle \frac{1-u}{2} \quad \frac{1+u}{2} \right\rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (1.37)$$

Alors,

$$\frac{dx}{du} = \left\langle \frac{-1}{2} \quad \frac{1}{2} \right\rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (1.38)$$

Donc :

Chapitre 1.

$$\boxed{\frac{dx}{du} = \frac{x_2 - x_1}{2}} \quad (1.39)$$

Par analogie :

$$\boxed{\frac{dy}{du} = \frac{y_2 - y_1}{2}} \quad (1.40)$$

Calculons une petite variation du contour suivant u :

$$d\Gamma = \det[J_s] du \quad (1.41)$$

$$\boxed{d\Gamma = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du} \quad (1.42)$$

1.2.7 Calcul des formes élémentaires par intégration exacte

Utilisons la méthode de Ritz via Galerkin avec la fonction test δt .

D'après l'équation d'équilibre rappelé en 1.1, nous pouvons dire que l'expression de l'énergie peut s'écrire sous la forme :

$$\delta E = \int_V \delta t \left(-\frac{dq_x}{dx} - \frac{dq_y}{dy} + Q \right) dV = 0 \quad (1.43)$$

$$\Rightarrow \delta E = \int_A \delta t \left(-\frac{dq_x}{dx} - \frac{dq_y}{dy} + Q \right) h dA = 0 \quad (1.44)$$

En faisant une intégration par partie :

$$\frac{\partial}{\partial x} [\delta t \cdot q_x] = \frac{\partial \delta t}{\partial x} q_x + \delta t \frac{\partial q_x}{\partial x} \Rightarrow \delta t \frac{\partial q_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [\delta t \cdot q_x] - \frac{\partial \delta t}{\partial x} q_x \quad (1.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} [\delta t \cdot q_y] = \frac{\partial \delta t}{\partial y} q_y + \delta t \frac{\partial q_y}{\partial y} \Rightarrow \delta t \frac{\partial q_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [\delta t \cdot q_y] - \frac{\partial \delta t}{\partial y} q_y \quad (1.46)$$

Ainsi que l'équation 1.44 peut se réécrire de la forme :

$$\Rightarrow \delta E = - \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\delta t \cdot q_x] - \frac{\partial \delta t}{\partial x} q_x \right\} h dA - \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial y} [\delta t \cdot q_y] - \frac{\partial \delta t}{\partial y} q_y \right\} h dA + \int_A \delta t Q h dA = 0 \quad (1.47)$$

$$\Rightarrow \delta E = - \int_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [\delta t \cdot q_x] + \frac{\partial}{\partial y} [\delta t \cdot q_y] \right\} h dA + \int_A \left\{ \frac{\partial \delta t}{\partial x} q_x + \frac{\partial \delta t}{\partial y} q_y \right\} h dA + \int_A \delta t Q h dA = 0 \quad (1.48)$$

D'après le théorème de Green :

$$\int_A \left[\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right] h dA = \int_{\Gamma_q} [P dy - Q dx] h d\Gamma \quad (1.49)$$

avec,

Chapitre 1.

$$P = \delta t . q_x \quad ; \quad Q = \delta t . q_y$$

Ce qui nous donne :

$$- \int_{\Gamma_q} \{(\delta t . q_x) dy - (\delta t . q_y) dx\} h d\Gamma + \int_A \left\langle \frac{\partial \delta t}{\partial x} \quad \frac{\partial \delta t}{\partial y} \right\rangle \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} h dA + \int_A \delta t Q h dA = 0 \quad (1.50)$$

Sachant que,

$$dy = n_x . d\Gamma \quad ; \quad dx = n_y . d\Gamma$$

$$- \int_{\Gamma_q} (\delta t . q_x) n_x - \delta t . q_y n_y h d\Gamma - \int_A \left\langle \frac{\partial \delta t}{\partial x} \quad \frac{\partial \delta t}{\partial y} \right\rangle \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} h dA + \int_A \delta t Q h dA = 0 \quad (1.51)$$

Or

$$q = q_x n_x + q_y n_y \quad \text{et} \quad [K] = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix}$$

Ce qui nous donne :

$$- \int_{\Gamma_q} \delta t . q h d\Gamma - \int_A \left\langle \frac{\partial \delta t}{\partial x} \quad \frac{\partial \delta t}{\partial y} \right\rangle [K] \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} h dA + \int_A \delta t Q h dA = 0 \quad (1.52)$$

Validons le sens de q par convention avec les modes d'échange :

$$q = h_c (T - T_{air}) \quad (1.53)$$

$$- \int_{\Gamma_q} \delta t . h_c T h d\Gamma + \int_{\Gamma_q} \delta t . h_c T_{air} h d\Gamma - \int_A \left\langle \frac{\partial \delta t}{\partial x} \quad \frac{\partial \delta t}{\partial y} \right\rangle [K] \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} h dA + \int_A \delta t Q h dA = 0 \quad (1.54)$$

En remplaçant les équations des fonctions de référence triangulaire et linéaire dans 1.54, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & - \sum_{e \in \Gamma_q} \int_{-1}^1 \left\langle \delta t_1 \quad \delta t_2 \right\rangle \begin{Bmatrix} \frac{1-u}{2} \\ \frac{1+u}{2} \end{Bmatrix} h_c h \left\langle \frac{1-u}{2} \quad \frac{1+u}{2} \right\rangle \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2}{4} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{4}} du \\ & + \sum_{e \in \Gamma_q} \int_{-1}^1 \left\langle \delta t_1 \quad \delta t_2 \right\rangle \begin{Bmatrix} \frac{1-u}{2} \\ \frac{1+u}{2} \end{Bmatrix} h_c T_{air} h \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2}{4} + \frac{(y_2 - y_1)^2}{4}} du \\ & - \sum_{e \in \Omega} \int_0^1 \int_0^{1-v} \left\langle \delta t_1 \quad \delta t_2 \quad \delta t_3 \right\rangle [B]^T [K] h [B] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} \|J\| du dv \\ & + \sum_{e \in \Omega} \int_0^1 \int_0^{1-v} \left\langle \delta t_1 \quad \delta t_2 \quad \delta t_3 \right\rangle \begin{Bmatrix} 1-u-v \\ u \\ v \end{Bmatrix} Q \|J\| du dv = 0 \end{aligned} \quad (1.55)$$

Chapitre 1.

$$\begin{aligned}
& - \sum_{e \in \Gamma_q} \langle \delta t_1 \quad \delta t_2 \rangle \frac{h_c h}{8} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} (1-u)^2 & (1-u)(1+u) \\ (1+u)(1-u) & (1+u)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} \\
& \quad + \sum_{e \in \Gamma_q} \langle \delta t_1 \quad \delta t_2 \rangle \frac{h_c T_{air} h}{4} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \int_{-1}^1 \begin{Bmatrix} 1-u \\ 1+u \end{Bmatrix} du \\
& \quad - \sum_{e \in \Omega} \langle \delta t_1 \quad \delta t_2 \quad \delta t_3 \rangle [B]^T [K] h [B] \|J\| \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} \int_0^1 \int_0^{1-v} dudv \\
& \quad + \sum_{e \in \Omega} \langle \delta t_1 \quad \delta t_2 \quad \delta t_3 \rangle h \|J\| \int_0^1 \int_0^{1-v} \begin{Bmatrix} 1-u-v \\ u \\ v \end{Bmatrix} Q(X(u,v), Y(u,v)) dudv = 0
\end{aligned} \tag{1.56}$$

Nous savons que l'intégral en fonction des poids localisés s'écrit de la forme :

$$\int_{V_{uv}} f(u,v) dV = \sum_{i=1}^n \omega_i f(u_i, v_i) \tag{1.57}$$

avec,

n , le nombre de points d'intégration
 u_i, v_i , les coordonnées de ces points
 ω_i , les poids associés

$$\begin{aligned}
& - \sum_{e \in \Gamma_q} \langle \delta t_1 \quad \delta t_2 \rangle [H] \begin{Bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{Bmatrix} + \sum_{e \in \Gamma_q} \langle \delta t_1 \quad \delta t_2 \rangle \{F_H\} - \sum_{e \in \Omega} \langle \delta t_1 \quad \delta t_2 \quad \delta t_3 \rangle [K] \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} \\
& \quad + \sum_{e \in \Omega} \langle \delta t_1 \quad \delta t_2 \quad \delta t_3 \rangle h \|J\| \sum_{k=1}^{NPI} \begin{Bmatrix} 1-u_k-v_k \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} Q(X(u_k, v_k), Y(u_k, v_k)) \omega_k = 0
\end{aligned} \tag{1.58}$$

où,

k , le nombre de point d'intégration de Hammer.

avec,

$$\begin{aligned}
[H] &= \frac{h_c h}{6} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
[F_H] &= \frac{h_c T_{air} h}{2} \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\
[K] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix} h \begin{bmatrix} -\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix} \left\| \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \right\|
\end{aligned}$$

Chapitre 1.

1.3 Présentation des résultats obtenus

1.3.1 Température

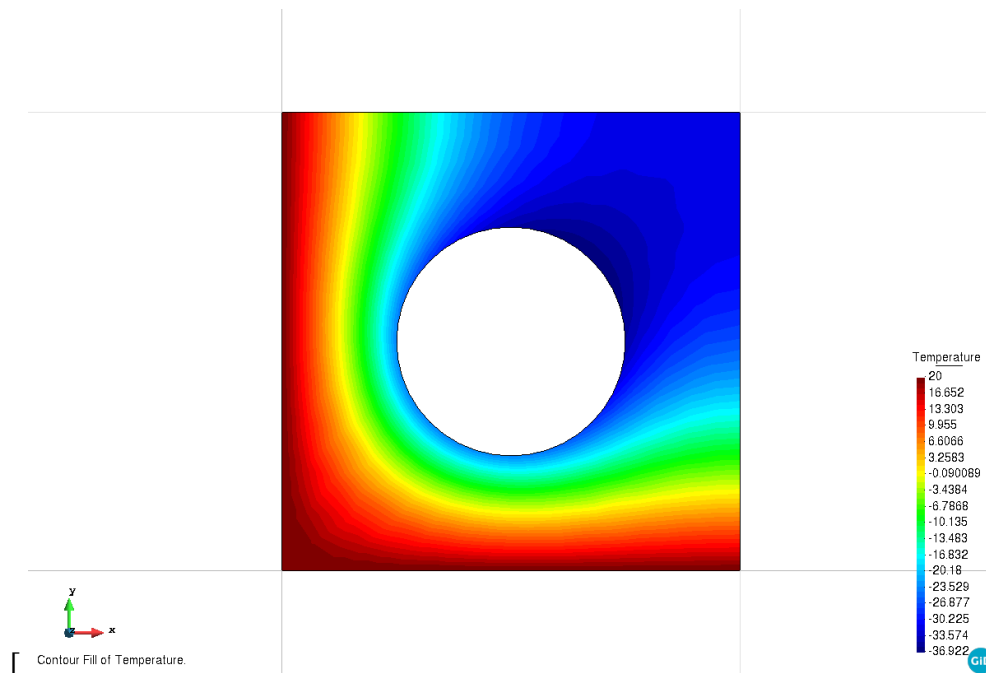


FIGURE 1.3 – Solution Référencée de la température.

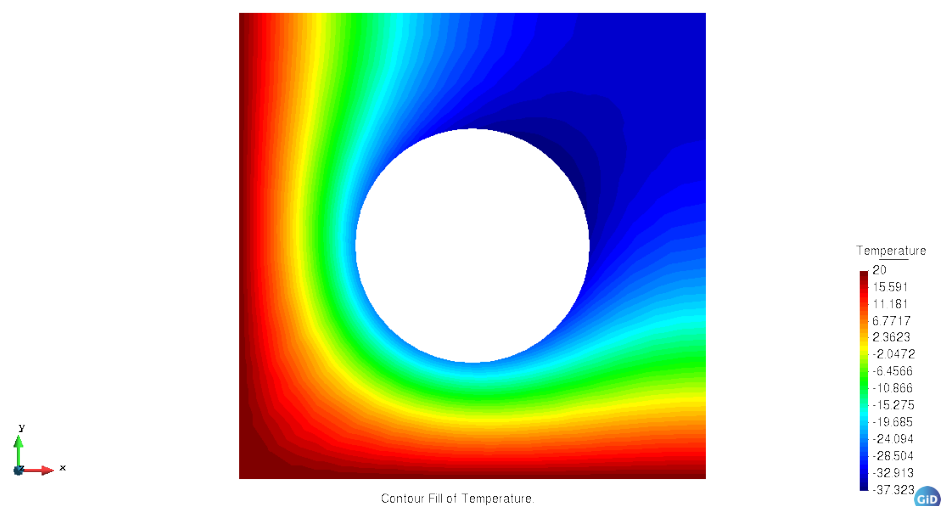


FIGURE 1.4 – Solution Trouvée de la température.

Chapitre 1.

1.3.2 Gradient

Suivant X

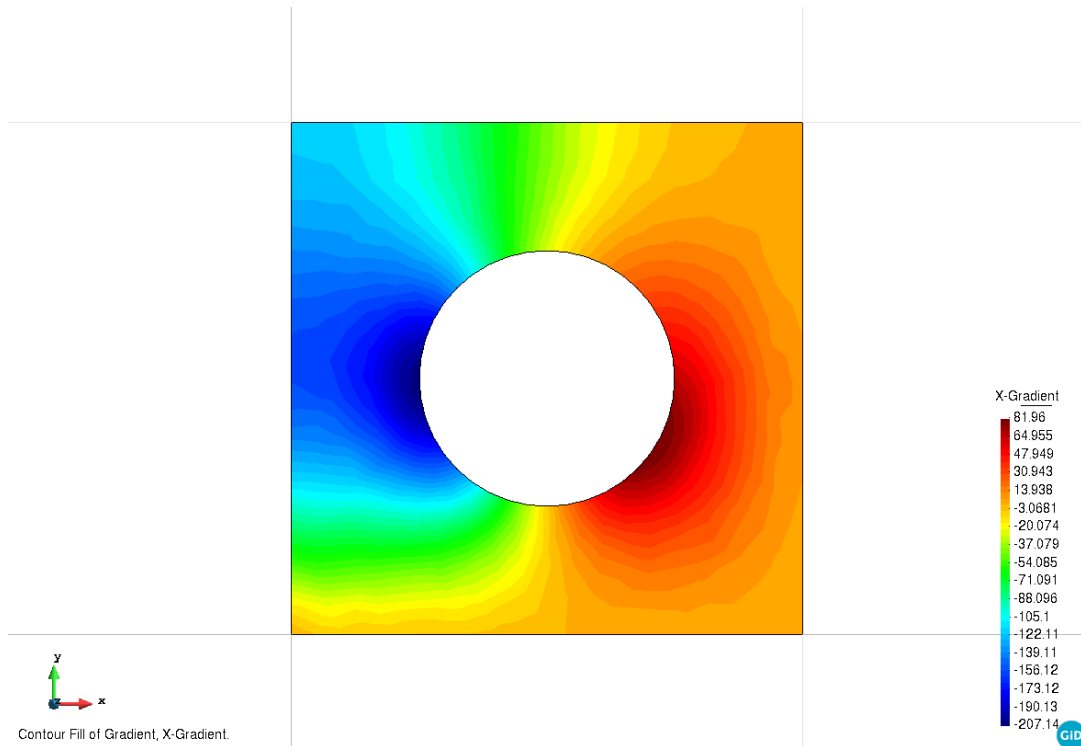


FIGURE 1.5 – Solution Référencée du gradient suivant X.

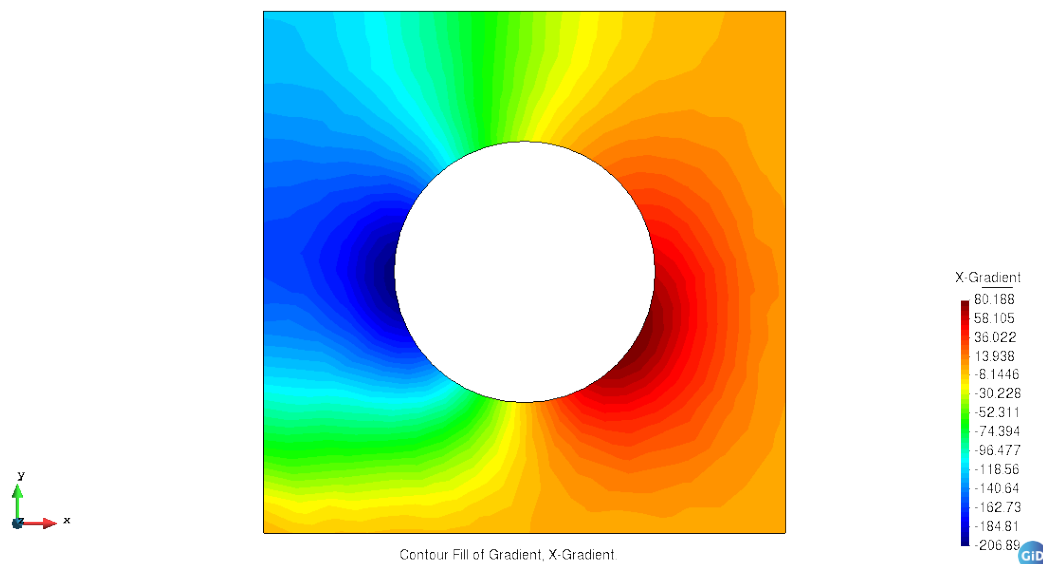


FIGURE 1.6 – Solution Trouvée du gradient suivant X.

Chapitre 1.

Suivant Y

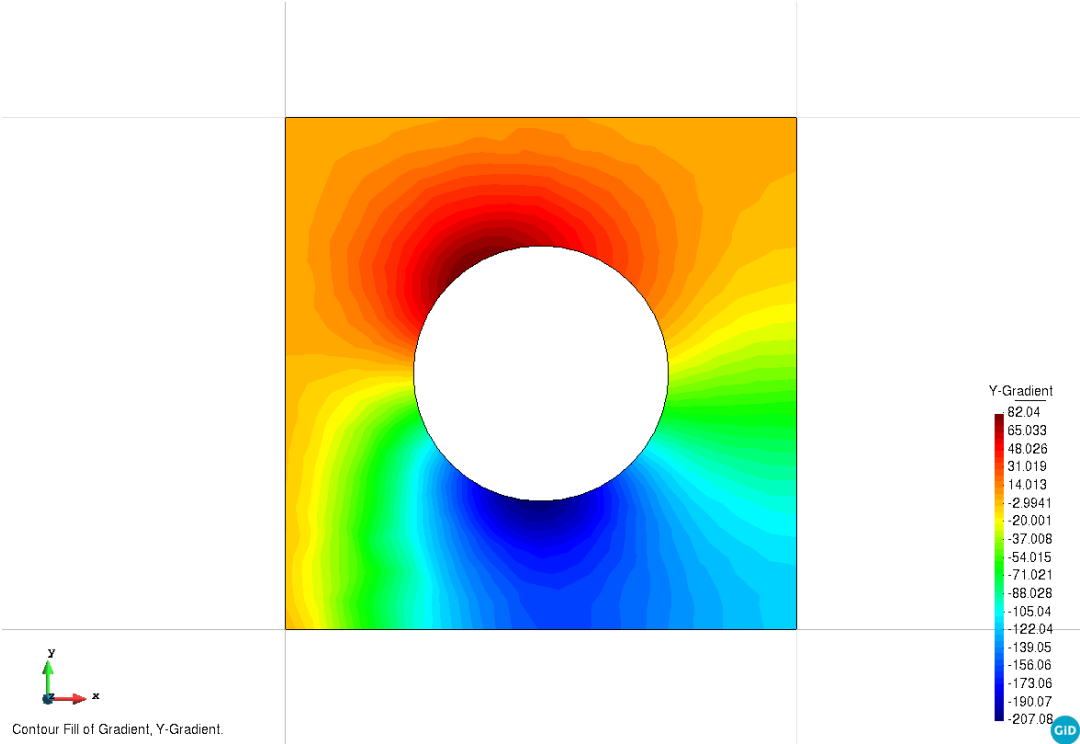


FIGURE 1.7 – Solution Référencée du gradient suivant Y.

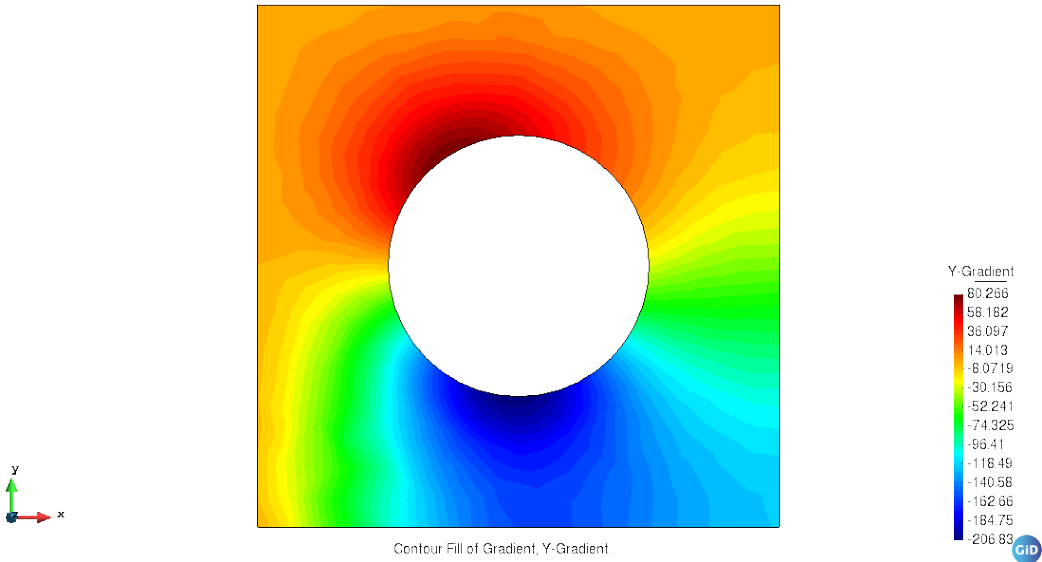


FIGURE 1.8 – Solution Trouvée du gradient suivant Y.

Chapitre 1.

1.3.3 Flux

Suivant X

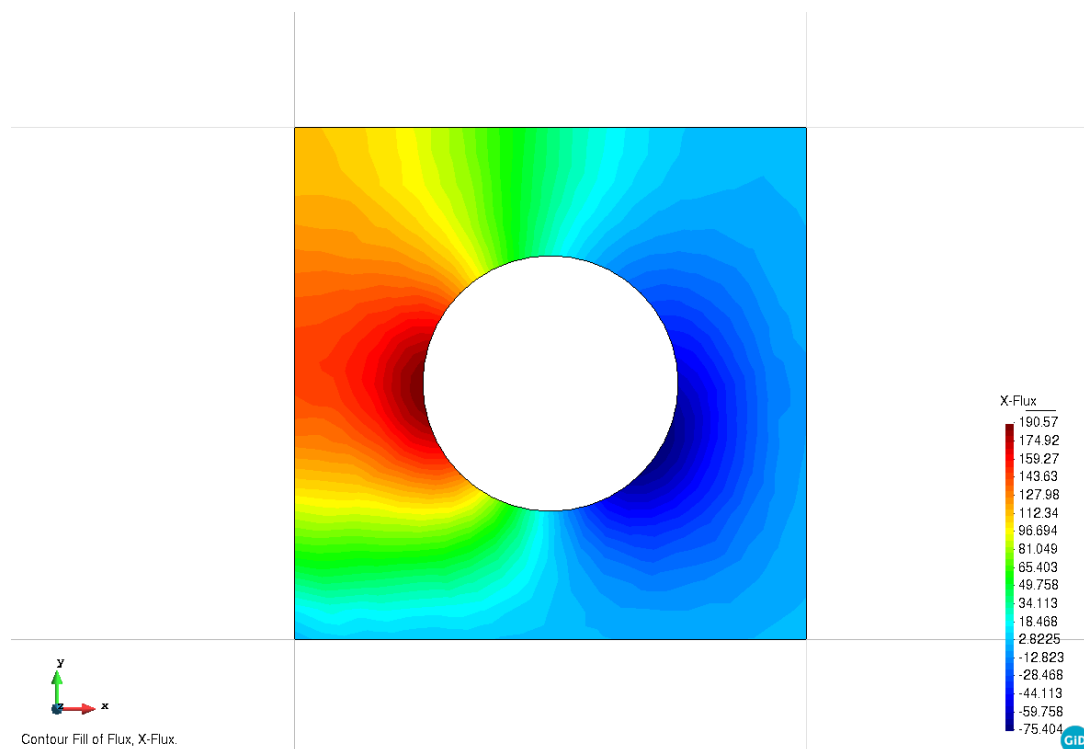


FIGURE 1.9 – Solution Référencée du flux suivant X.

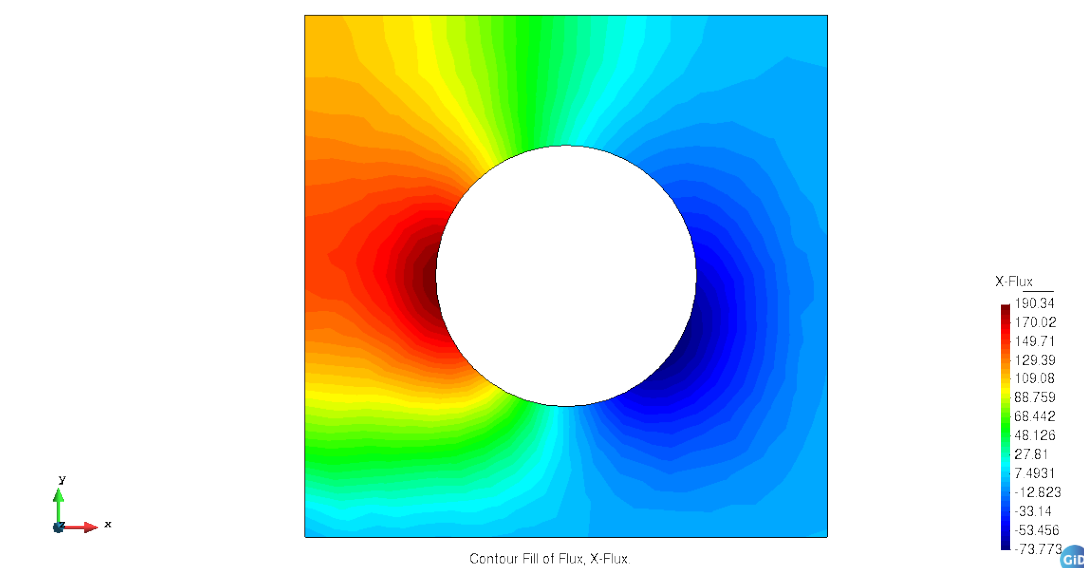


FIGURE 1.10 – Solution Trouvée du flux suivant X.

Chapitre 1.

Suivant Y

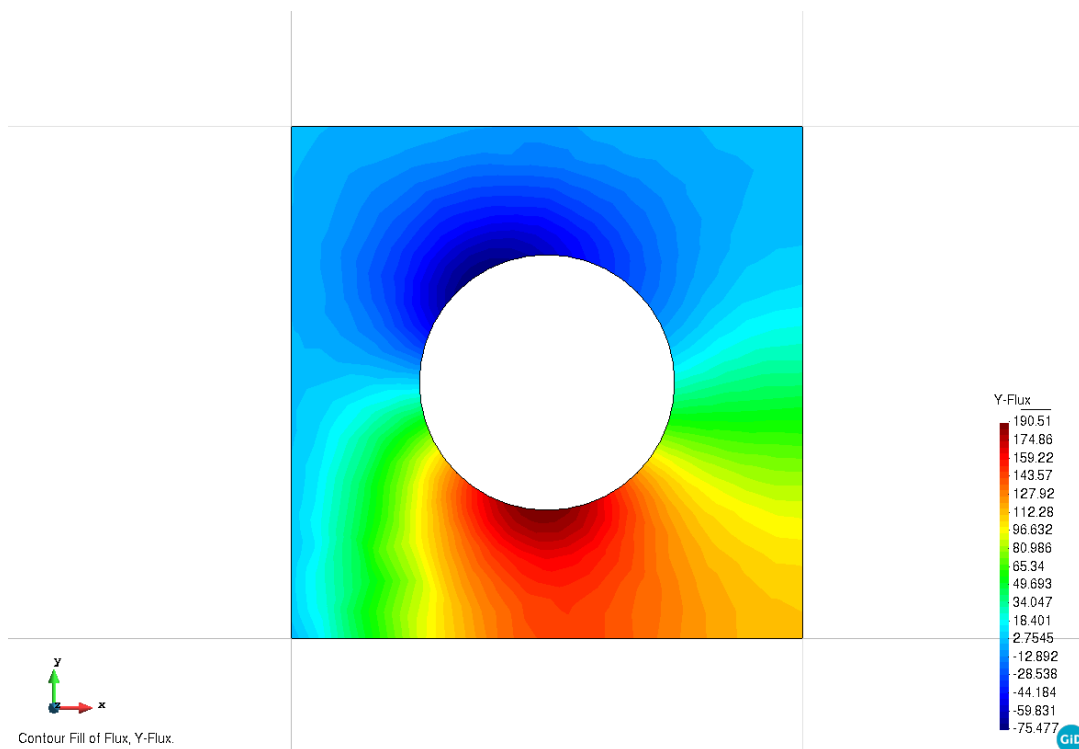


FIGURE 1.11 – Solution Référencée du flux suivant Y.



FIGURE 1.12 – Solution Trouvée du flux suivant Y.

1.4 Conclusion incluant une discussion des résultats obtenus.

A l'issu de ce TP4, une application générique résolvant un problème de transfert de chaleur 2D par la méthode des éléments finis a été développé sur Matlab. Appliquée au modèle 2D générée grâce au logiciel *GIDTM*, différents résultats ont été examinés incluant la température, le gradient ainsi que le flux.

La figure 1.4 illustre la distribution de la température le long de la plaque trouée. La température avoisinant 20° sur les parties gauche et basse s'explique des conditions limites essentielles appliquées. Également la basse température à la périphérie du trou est dû au phénomène de convection appliquée tout au long du contour. Toutefois la distribution de la température est déformé par la zone creuse.

Ceci est plus explicite avec la distribution du gradient suivant X et Y comme démontré par les figures 1.6 et 1.8. En effet, le gradient est orienté des valeurs de température basses vers les températures hautes. Dans une direction donnée, les petits gradients de température correspondent aux endroits particuliers où la température change le moins rapidement. Cette particularité noté sur nos deux figures s'expliquent du fait de l'existence de la zone d'échange entre les conditions limites naturelles et essentielles.

Le flux de chaleur n'est pas uniforme tout au long de la plaque comme le montre les figures 1.10 et 1.12. Il est limité par le trou, et pour compenser la section transversale plus petite, le flux de chaleur dans cette région est plus élevé que dans les autres régions.