
Étude de la déflexion d'un câble : Partie 2

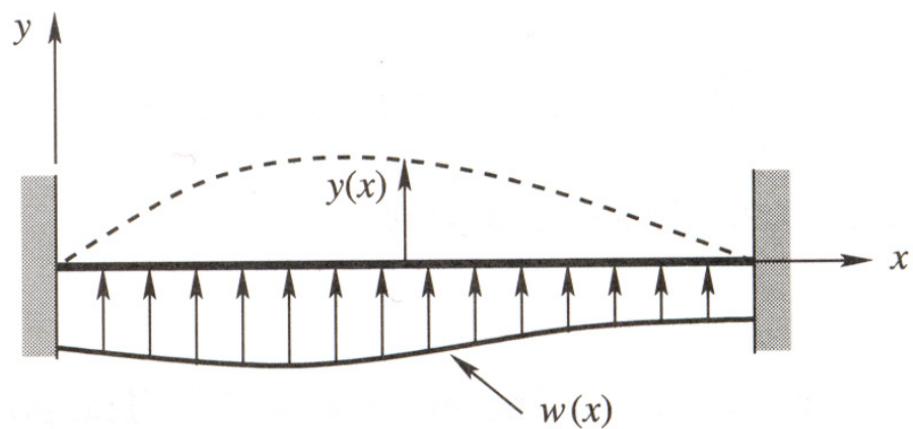


FIGURE 1 – Câble tendu sous une charge $w(x)$.

Gilbert Djidiack FAYE

Table des matières

Sommaire	i
Table des matières	ii
Table des figures	iii
Liste des tableaux	iv
1 TP3 : Étude de la déflexion d'un câble : Partie 2	1
1.1 Rappel de la mise en contexte du problème et de la solution exacte.	1
1.2 Développements mathématiques menant à l'application par éléments finis allant de la mise en équation à partir de l'équation d'équilibre jusqu'au système matriciel à résoudre en passant par une présentation de la méthode de prise en compte des conditions aux limites essentielles, l'intégration numérique, le calcul des réactions, etc.	2
1.2.1 Calcul de la fonction linéaire sur l'élément de référence (bornée -1 à 1)	2
1.2.2 Exprimons δy , $\frac{d\delta y}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$ par rapport à la fonction linéaire sur l'élément de référence	3
1.2.3 Calcul des formes élémentaires par intégration exacte	4
1.2.4 Calcul des formes élémentaires par intégration numérique à l'aide de schémas de Gauss à 1, 2 et 3 points.	6
1.2.5 Assemblage des formes élémentaires dans les formes globales	8
1.2.6 Calcul des conditions aux limites essentielles selon la méthode d'élimination des équations et calcul des réactions aux appuis	10
1.2.7 Calcul de la valeur exacte des réactions	11
1.3 Développons une application générique dans laquelle chaque opération spécifique fera l'objet d'une fonction dédiée à ladite opération (suggestion : une fonction = un fichier). (Voir Fichier Matlab)	11
1.4 En utilisant une intégration exacte	11

1.4.1	Présentons sur un seul graphique une comparaison de la solution exacte avec celles obtenues par éléments finis avec 2, 4, 8, 10, 20 et 100 éléments le long du câble	11
1.4.2	Présentons sur un graphique l'erreur absolue obtenue par éléments finis le long du câble en considérant les solutions obtenues par éléments finis obtenues en 3.4.1)	12
1.4.3	Présenter dans un tableau l'évolution des deux réactions aux appuis en fonction du nombre d'éléments (2, 4, 8, 10, 20 et 100).	13
1.4.4	Présenter sur un seul graphique l'estimation de l'erreur (Err_g) le long du câble et ce, pour 2, 4, 8, 10, 20 et 100 éléments.	14
1.5	En utilisant 4 éléments	15
1.5.1	Présenter sur un seul graphique une comparaison de la solution exacte avec celles obtenues par éléments finis en utilisant 1, 2 et 3 points d'intégration ainsi qu'une intégration exacte.	15
1.5.2	Présentons sur un graphique l'erreur absolue obtenue par éléments finis le long du câble en considérant les solutions obtenues par éléments finis obtenues en 3.5.1	16
1.5.3	Présenter dans un tableau l'évolution des deux réactions aux appuis en fonction du nombre de points d'intégration et pour une intégration exacte. Comparer avec la valeur exacte des réactions.	17
1.5.4	Présenter sur un seul graphique l'estimation de l'erreur (Err_g) le long du câble et ce, en utilisant 1, 2 et 3 points d'intégration ainsi qu'une intégration exacte	17
1.6	Conclusion incluant une discussion des résultats obtenus en 3.4	18
	Index	19
	Bibliographie	19

Table des figures

1	Câble tendu sous une charge $w(x)$	i
1.1	Câble tendu sous une charge $w(x)$	1
1.2	Fonctions d'interpolation.	2
1.3	Comparaison de la solution exacte avec celles obtenues par éléments finis avec 2, 4, 8, 10, 20 et 100 éléments le long du câble.	12
1.4	Erreur absolue obtenue par éléments finis le long du câble.	13
1.5	Estimation de l'erreur (Err_g) le long du câble et ce, pour 2, 4, 8, 10, 20 et 100 éléments	14
1.6	Comparaison de la solution exacte avec celles obtenues par éléments finis en utilisant 1, 2 et 3 points d'intégration ainsi qu'une intégration exacte. . . .	15
1.7	Erreur absolue obtenue par éléments finis ($N=4$ éléments) le long du câble. .	16
1.8	Estimation de l'erreur (Err_g) le long du câble et ce, en utilisant 1, 2 et 3 points d'intégration ainsi qu'une intégration exacte.	17

Liste des tableaux

1.1	Schémas de Gauss.	7
1.2	Évolution des deux réactions aux appuis en fonction du nombre d'éléments (2, 4, 8, 10, 20 et 100).	13
1.3	Évolution des deux réactions aux appuis en fonction du nombre de points d'intégration et pour une intégration exacte.	17

TP3 : Étude de la déflexion d'un câble : Partie 2

1.1 Rappel de la mise en contexte du problème et de la solution exacte.

Soit le câble tendu ci-dessous sur lequel s'applique une force $w(x) = w_0(1 - kx)e^{-kx}$. L'objectif de ce travail est de réaliser une étude de convergence de la déflexion d'un câble tendu et ce, en comparant la solution exacte et celle par éléments finis.

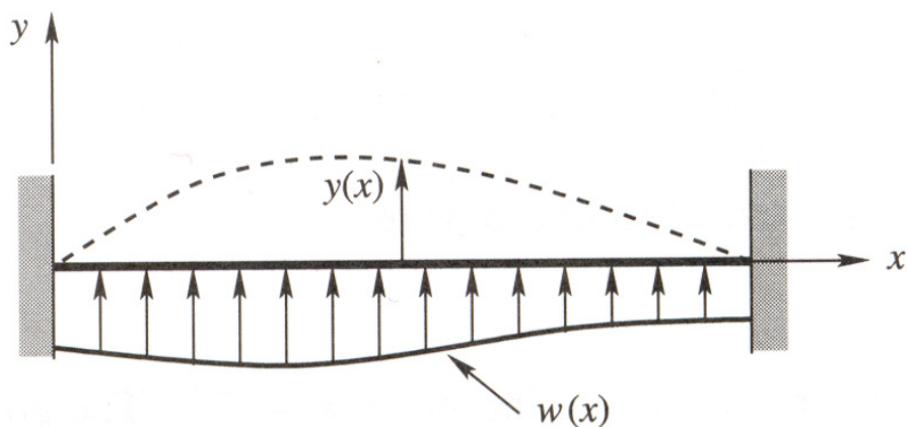


FIGURE 1.1 – Câble tendu sous une charge $w(x)$.

On rappelle que la solution exacte obtenue dans le TP2 est donnée par l'équation ??
L'équivalente avec les valeurs des caractéristiques données est donnée par l'équation
??

1.2 Développements mathématiques menant à l'application par éléments finis allant de la mise en équation à partir de l'équation d'équilibre jusqu'au système matriciel à résoudre en passant par une présentation de la méthode de prise en compte des conditions aux limites essentielles, l'intégration numérique, le calcul des réactions, etc.

On rappelle que l'équation d'équilibre du câble tendu est donné par l'équation ?? du TP2.

1.2.1 Calcul de la fonction linéaire sur l'élément de référence (bornée -1 à 1)

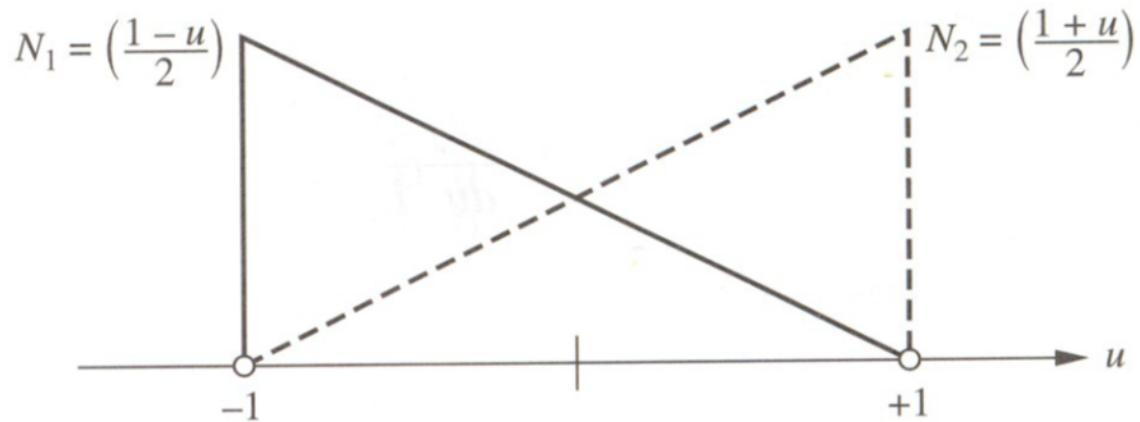


FIGURE 1.2 – Fonctions d'interpolation.

Sur un système de coordonnées locales (u) avec une origine localisée à gauche ($\alpha = -1$), déterminons l'expression du champ géométrique (position) en termes des fonctions de base sur u .

On a,

$$\langle P \rangle = \begin{pmatrix} 1 & u \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Puis,

$$\langle N \rangle = \begin{pmatrix} 1 & u \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \quad (1.2)$$

$$\Rightarrow \langle N \rangle = \begin{pmatrix} 1 & u \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

$$\Rightarrow \langle N \rangle = \begin{pmatrix} \frac{1-u}{2} & \frac{1+u}{2} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Ceci nous l'expression suivante :

Chapitre 1.

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1-u}{2} & \frac{1+u}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (1.5)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}[(1-u)a + (1+u)b] \quad (1.6)$$

Finalement l'expression de la position en termes des fonctions de base sur u s'écrit :

$$x = \left(\frac{a+b}{2} \right) + \left(\frac{b-a}{2} \right) u \quad (1.7)$$

1.2.2 Exprimons δy , $\frac{d\delta y}{dx}$ et $\frac{dy}{dx}$ par rapport à la fonction linéaire sur l'élément de référence

On a :

$$\delta y = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \end{Bmatrix} \quad (1.8)$$

Ceci implique que :

$$\delta y = \begin{pmatrix} \frac{1-u}{2} & \frac{1+u}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \end{Bmatrix} \quad (1.9)$$

Puisque :

$$\frac{d\delta y}{dx} = \frac{d\delta y}{du} \frac{du}{dx} \quad (1.10)$$

En utilisant l'expression de l'équation 1.9 :

$$\Rightarrow \frac{d\delta y}{du} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

Ceci implique que :

$$\frac{d\delta y}{dx} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \end{Bmatrix} \frac{du}{dx} \quad (1.12)$$

Trouvons l'expression de $\frac{du}{dx}$.

D'emblée on sait que :

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1-u}{2} & \frac{1+u}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (1.13)$$

Alors,

$$\frac{dx}{du} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} \quad (1.14)$$

Chapitre 1.

Donc :

$$\Rightarrow \frac{dx}{du} = \frac{x_2 - x_1}{2} \quad (1.15)$$

D'où

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{x_2 - x_1} \quad (1.16)$$

Où :

L_e , la longueur de l'élément [mètre (m)]

En remplaçant 1.16 dans l'équation 1.12, on obtient :

$$\boxed{\frac{d\delta y}{dx} = \left\langle \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right\rangle \frac{2}{x_2 - x_1} \begin{Bmatrix} \delta y_1 \\ \delta y_2 \end{Bmatrix}} \quad (1.17)$$

Également on peut exprimer y avec l'expression suivante :

$$y = \left\langle \begin{array}{cc} 1-u & 1+u \\ 2 & 2 \end{array} \right\rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \quad (1.18)$$

Puisque :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad (1.19)$$

En remplaçant 1.16 dans 1.18 on a :

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \left\langle \begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{array} \right\rangle \frac{2}{x_2 - x_1} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix}} \quad (1.20)$$

1.2.3 Calcul des formes élémentaires par intégration exacte

Utilisons la méthode de Ritz via Galerkine avec la fonction test δy .

D'après l'équation d'équilibre rappelé en ??, nous pouvons dire que l'expression de l'énergie élémentaire peut s'écrire sous la forme :

$$\delta E = \int_0^L \delta y \left(\frac{T d^2 y}{dx^2} + w(x) \right) dx = 0 \quad (1.21)$$

En faisant une intégration par partie :

$$\Rightarrow \delta E = \int_0^L \delta y \frac{T d^2 y}{dx^2} dx + \int_0^L \delta y w(x) dx = 0 \quad (1.22)$$

Par ailleurs,

Chapitre 1.

$$\frac{d}{dx} \left[\delta y \frac{dy}{dx} \right] = \frac{d\delta y}{dx} \frac{dy}{dx} + \delta y \frac{d^2y}{dx^2} \quad (1.23)$$

$$\Rightarrow \delta y \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[\delta y \frac{dy}{dx} \right] - \frac{d\delta y}{dx} \frac{dy}{dx} \quad (1.24)$$

Ainsi que l'équation 1.22 peut se réécrire de la forme :

$$\delta E = \int_0^L \left[\frac{d}{dx} \left[\delta y \frac{dy}{dx} \right] - \frac{d\delta y}{dx} \frac{dy}{dx} \right] dx + \int_0^L \delta y w(x) dx = 0 \quad (1.25)$$

$$\Rightarrow \delta y \frac{T dy}{dx} \Big|_0^L - \int_0^L T \frac{d\delta y}{dx} \frac{dy}{dx} dx + \int_0^L \delta y w(x) dx = 0 \quad (1.26)$$

$$\Rightarrow \delta y_L \frac{T dy}{dx} \Big|_L - \delta y_0 \frac{T dy}{dx} \Big|_0 - \int_0^L T \frac{d\delta y}{dx} \frac{dy}{dx} dx + \int_0^L \delta y w(x) dx = 0 \quad (1.27)$$

Ainsi les conditions limites naturelles peuvent être déduites en étant égales à :

$$R_L = \frac{T dy}{dx} \Big|_L \quad R_0 = - \frac{T dy}{dx} \Big|_0 \quad (1.28)$$

$$\delta E = \delta y_L R_L + \delta y_0 R_0 - \int_0^L T \frac{d\delta y}{dx} \frac{dy}{dx} dx + \int_0^L \delta y w(x) dx = 0 \quad (1.29)$$

La discrétisation de l'énergie obtenue en 1.29 donne :

$$\delta E = \delta y_L R_L + \delta y_0 R_0 - \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} T \frac{d\delta y}{dx} \frac{dy}{dx} dx + \sum_{i=1}^N \int_{x_i}^{x_{i+1}} \delta y w(x) dx = 0 \quad (1.30)$$

$$\Rightarrow \delta E = \delta y_L R_L + \delta y_0 R_0 - \sum_{i=1}^N \left[\int_{x_i}^{x_{i+1}} T \frac{d\delta y}{dx} \frac{dy}{dx} dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \delta y w(x) dx \right] = 0 \quad (1.31)$$

Donc l'énergie élémentaire à calculer est :

$$\delta E_e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} T \frac{d\delta y}{dx} \frac{dy}{dx} dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \delta y w(x) dx = 0 \quad (1.32)$$

$$\delta E_e = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(T \frac{d\delta y}{dx} \frac{dy}{dx} - \delta y w(x) dx \right) = 0 \quad (1.33)$$

D'où le calcul des formes élémentaires par intégration exacte donne la solution suivante :

$$\boxed{\delta E = \delta y_L R_L + \delta y_0 R_0 - [\delta E_{e1} + \delta E_{e2} + \dots + \delta E_{eN-1} + \delta E_{eN}]} \quad (1.34)$$

Chapitre 1.

1.2.4 Calcul des formes élémentaires par intégration numérique à l'aide de schémas de Gauss à 1, 2 et 3 points.

En remplaçant les équations 1.9, 1.17 et 1.20 dans 1.32, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \delta E_e = & \int_{x_i}^{x_{i+1}} T \begin{pmatrix} \delta y_i & \delta y_{i+1} \end{pmatrix} \frac{2}{x_{i+1} - x_i} \begin{Bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{2}{x_{i+1} - x_i} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} dx \\ & - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} \delta y_i & \delta y_{i+1} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1-u}{2} \\ \frac{1+u}{2} \end{Bmatrix} w(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (1.35)$$

La transformation des intégrales à résoudre sur l'intervalle [-1 1] et fonction de la variable paramétrique u donne :

$$\int_{x=a}^b f(x) dx = \int_{u=-1}^1 f[x(u)] \left(\frac{b-a}{2} \right) du \quad (1.36)$$

Ceci nous donne :

$$\begin{aligned} \delta E_e = & \int_{u=-1}^1 \begin{pmatrix} \delta y_i & \delta y_{i+1} \end{pmatrix} \frac{2T}{x_{i+1} - x_i} \begin{Bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{2}{x_{i+1} - x_i} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) du \\ \Rightarrow & - \int_{u=-1}^1 \begin{pmatrix} \delta y_i & \delta y_{i+1} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1-u}{2} \\ \frac{1+u}{2} \end{Bmatrix} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) w(x(u)) du \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} \delta E_e = & \begin{pmatrix} \delta y_i & \delta y_{i+1} \end{pmatrix} \left(\frac{2T}{x_{i+1} - x_i} \right) \begin{Bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} \int_{u=-1}^1 du \\ \Rightarrow & - \begin{pmatrix} \delta y_i & \delta y_{i+1} \end{pmatrix} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) \int_{u=-1}^1 \begin{Bmatrix} \frac{1-u}{2} \\ \frac{1+u}{2} \end{Bmatrix} w(x(u)) du \end{aligned} \quad (1.38)$$

On a : $w(x) = w_0(1 - kx)e^{-kx}$, Donc

$$\begin{aligned} \delta E_e = & \begin{pmatrix} \delta y_i & \delta y_{i+1} \end{pmatrix} \left(\frac{2T}{x_{i+1} - x_i} \right) \begin{Bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} \int_{u=-1}^1 du \\ & - \begin{pmatrix} \delta y_i & \delta y_{i+1} \end{pmatrix} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) \int_{u=-1}^1 \begin{Bmatrix} \frac{1-u}{2} \\ \frac{1+u}{2} \end{Bmatrix} w_0(1 - kx(u))e^{-kx(u)} du \end{aligned} \quad (1.39)$$

L'équation 1.6 implique que :

$$\Rightarrow x = \left(\frac{1-u}{2} \right) x_i + \left(\frac{1+u}{2} \right) x_{i+1} \quad (1.40)$$

Nous savons que l'intégral en fonction des poids localisés s'écrit de la forme :

Chapitre 1.

$$\int_{-1}^{+1} f(u)du = \sum_{i=1}^n \omega_i f(u_i) \quad (1.41)$$

avec,

n , le nombre de points d'intégration
 u_i , les coordonnées de ces points
 ω_i , les poids associés

Puisque l'expression de l'énergie est équivalent à un polynôme de degré 1, on peut utiliser le schémas de Gauss à 1 point (Voir également figure).

D'où

$$\int_{-1}^{+1} f(u)du = \omega_1 f(u_1) \quad (1.42)$$

avec $\omega_1 = 2.0$ et $u_1 = 0.0$

Aussi :

$$x(u_1) = \frac{x_{i+1} - x_i}{2} \quad (1.43)$$

car $u_1 = 0$

n	Coordonnées	Poids
1	0,0	2,0
2	-0.57735026918963	1.0
	+0.57735026918963	1.0
3	-0,77459666924148	0,555555555555556
	0,0	0,8888888888889
	+0,77459666924148	0,555555555555556

TABLE 1.1 – Schémas de Gauss.

Alors,

$$\delta E_e = \begin{pmatrix} \delta y_i & \delta y_{i+1} \end{pmatrix} \left(\frac{2T}{x_{i+1} - x_i} \right) \begin{Bmatrix} \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} 2.0 \quad (1.44)$$

$$- \begin{pmatrix} \delta y_i & \delta y_{i+1} \end{pmatrix} \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) 2.0 \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} w_0 \left(1 - k \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) \right) e^{-k \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)}$$

Ce qui nous donne :

$$\delta E_e = \begin{pmatrix} \delta y_i & \delta y_{i+1} \end{pmatrix} \left(\frac{T}{x_{i+1} - x_i} \right) \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} \quad (1.45)$$

$$- \begin{pmatrix} \delta y_i & \delta y_{i+1} \end{pmatrix} (x_{i+1} - x_i) \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} w_0 \left(1 - k \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right) \right) e^{-k \left(\frac{x_{i+1} - x_i}{2} \right)}$$

Chapitre 1.

Finalement on obtient l'expression de l'énergie élémentaire suivante :

$$\boxed{\delta E_e = \begin{aligned} & \left\langle \delta y_i \quad \delta y_{i+1} \right\rangle \left(\frac{T}{x_{i+1} - x_i} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{Bmatrix} \\ & - \left\langle \delta y_i \quad \delta y_{i+1} \right\rangle (x_{i+1} - x_i) \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{Bmatrix} w_0(1 - k(\frac{x_{i+1} - x_i}{2})) e^{-k(\frac{x_{i+1} - x_i}{2})} \end{aligned}} \quad (1.46)$$

Donc :

$$E_e = \lfloor \delta Y \rfloor_e [K]_e \{Y\}_e - \lfloor \delta Y \rfloor_e [F]_e \quad (1.47)$$

avec,

$$[K]_e = \left(\frac{T}{x_{i+1} - x_i} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.48)$$

$$[F]_e = \begin{cases} (x_{i+1} - x_i) \frac{1}{2} w_0(1 - k(\frac{x_{i+1} - x_i}{2})) e^{-k(\frac{x_{i+1} - x_i}{2})} \\ (x_{i+1} - x_i) \frac{1}{2} w_0(1 - k(\frac{x_{i+1} - x_i}{2})) e^{-k(\frac{x_{i+1} - x_i}{2})} \end{cases} \quad (1.49)$$

Qui peut être réécrit de la manière suivante :

$$\boxed{[K]_e = \begin{bmatrix} \frac{T}{\Delta x_i} & -\frac{T}{\Delta x_i} \\ -\frac{T}{\Delta x_i} & \frac{T}{\Delta x_i} \end{bmatrix}} \quad (1.50)$$

$$\boxed{[F]_e = \begin{cases} Fa_i = \frac{1}{2} w_0 (x_{i+1} - x_i) (1 - k(\frac{x_{i+1} - x_i}{2})) e^{-k(\frac{x_{i+1} - x_i}{2})} \\ Fb_i = \frac{1}{2} w_0 (x_{i+1} - x_i) (1 - k(\frac{x_{i+1} - x_i}{2})) e^{-k(\frac{x_{i+1} - x_i}{2})} \end{cases}} \quad (1.51)$$

1.2.5 Assemblage des formes élémentaires dans les formes globales

Pour une discrétisation à l'aide de N éléments finis, la variation de l'énergie totale s'écrit :

$$\delta E = \sum_{i=1}^N \delta E_e \quad (1.52)$$

$$\delta E = \delta E_1 + \delta E_2 + \dots + \delta E_{N-1} + \delta E_N \quad (1.53)$$

Donc l'expression de E globale peut s'écrire de la forme suivante :

$$\delta E = \lfloor \delta Y \rfloor [K] \{Y\} - \lfloor \delta Y \rfloor [F] \quad (1.54)$$

Ainsi, en accord avec les conditions limites appliquées, la variation de l'énergie potentielle est nulle et ce, pour toute variation des valeurs nodales de la fonction test δy

$$\delta E = \lfloor \delta Y \rfloor [K] \{Y\} - \lfloor \delta Y \rfloor [F] = 0 \quad (1.55)$$

Chapitre 1.

En factorisant par δY on obtient :

$$\delta E = \lfloor \delta Y \rfloor [[K] \{Y\} - [F]] = 0.0 \quad (1.56)$$

D'où :

$$[K] \{Y\} - [F] = 0.0 \quad (1.57)$$

$$[K] \{Y\} = [F] \quad (1.58)$$

avec,

$$[K] = \begin{bmatrix} \frac{T}{\Delta x_1} & -\frac{T}{\Delta x_1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{T}{\Delta x_1} & \frac{T}{\Delta x_1} + \frac{T}{\Delta x_2} & -\frac{T}{\Delta x_2} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{T}{\Delta x_2} & \frac{T}{\Delta x_2} + \frac{T}{\Delta x_3} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{T}{\Delta x_{N-3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T}{\Delta x_{N-3}} & \frac{T}{\Delta x_{N-3}} + \frac{T}{\Delta x_{N-2}} & -\frac{T}{\Delta x_{N-2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T}{\Delta x_{N-2}} & \frac{T}{\Delta x_{N-2}} + \frac{T}{\Delta x_{N-1}} & -\frac{T}{\Delta x_{N-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T}{\Delta x_{N-1}} & \frac{T}{\Delta x_N} \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

$$[F] = \left\{ \begin{array}{c} Fa_i \\ Fb_i + Fa_{i+1} \\ Fb_{i+1} + Fa_{i+2} \\ \dots \\ \dots \\ Fb_{N-2} + Fa_{N-1} \\ Fb_{N-1} + Fa_N \\ Fb_N \end{array} \right\} \quad (1.60)$$

Chapitre 1.

1.2.6 Calcul des conditions aux limites essentielles selon la méthode d'élimination des équations et calcul des réactions aux appuis

Prenons en compte les conditions limites particulières à notre problème et fixons les valeurs des degrés de libertés Y_1 et Y_N afin de lever l'indétermination.

Donc $[K] \{Y\} = [F]$ équivaut à :

$$\left[\begin{array}{ccccccc} -\frac{T}{\Delta x_1} & \frac{T}{\Delta x_1} + \frac{T}{\Delta x_2} & -\frac{T}{\Delta x_3} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{T}{\Delta x_2} & \frac{T}{\Delta x_2} + \frac{T}{\Delta x_3} & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{T}{\Delta x_{N-3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T}{\Delta x_{N-3}} & \frac{T}{\Delta x_{N-3}} + \frac{T}{\Delta x_{N-2}} & -\frac{T}{\Delta x_{N-2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T}{\Delta x_{N-2}} & \frac{T}{\Delta x_{N-2}} + \frac{T}{\Delta x_{N-1}} -\frac{T}{\Delta x_{N-1}} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ \dots \\ Y_{N-2} \\ Y_{N-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fb_i + Fa_{i+1} \\ Fb_{i+1} + Fa_{i+2} \\ \dots \\ \dots \\ Fb_{N-2} + Fa_{N-1} \\ Fb_{N-1} + Fa_N \end{Bmatrix} \quad (1.61)$$

Par la **méthode d'élimination des équations**, on obtient :

$$\left[\begin{array}{ccccccc} \frac{T}{\Delta x_1} + \frac{T}{\Delta x_2} & -\frac{T}{\Delta x_3} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{T}{\Delta x_2} & \frac{T}{\Delta x_2} + \frac{T}{\Delta x_3} & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{T}{\Delta x_{N-3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{T}{\Delta x_{N-3}} & \frac{T}{\Delta x_{N-3}} + \frac{T}{\Delta x_{N-2}} & -\frac{T}{\Delta x_{N-2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{T}{\Delta x_{N-2}} & \frac{T}{\Delta x_{N-2}} + \frac{T}{\Delta x_{N-1}} \end{array} \right] \begin{Bmatrix} Y_2 \\ Y_3 \\ \dots \\ \dots \\ Y_{N-2} \\ Y_{N-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Fb_i + Fa_{i+1} + \frac{T\Delta x_1}{4}\bar{Y}_1 \\ Fb_{i+1} + Fa_{i+2} \\ \dots \\ \dots \\ Fb_{N-2} + Fa_{N-1} \\ Fb_{N-1} + Fa_N + \frac{T\Delta x_N}{4}\bar{Y}_N \end{Bmatrix} \quad (1.62)$$

Et pour les réactions :

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{T}{\Delta x_1} Y_2 \\ -\frac{T}{\Delta x_{N-1}} Y_{N-1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{T}{\Delta x_1} \bar{Y}_1 \\ \frac{T}{\Delta x_{N-1}} \bar{Y}_N \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Fa_i \\ Fb_N \end{Bmatrix} \quad (1.63)$$

1.2.7 Calcul de la valeur exacte des réactions

Considérons A, un point du câble tendu tel que $x_A = L$.

D'après le principe fondamental de la statique, le système est en équilibre par rapport à un référentiel galiléen si la somme des forces est nulle et si la somme des moments des forces par rapport à A et des couples est nulle :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \vec{M}_o \vec{F}_i &= 0 \end{aligned} \quad (1.64)$$

$$\Rightarrow R_L + R_0 - \int_0^L \omega(x) dx = 0 \quad (1.65)$$

$$\Rightarrow R_0 L - \int_0^L \omega(x) x dx = 0 \quad (1.66)$$

$$1.66 \Rightarrow R_0 = \frac{\int_0^L \omega(x) x dx}{L} \quad (1.67)$$

En remplaçant 1.67 dans 1.65, on obtient :

$$\Rightarrow R_L = \int_0^L \omega(x) dx - \frac{\int_0^L \omega(x) x dx}{L} \quad (1.68)$$

D'où,

$$R_0 = \frac{\int_0^L w_0(1 - kx)e^{-kx} x dx}{L} \quad (1.69)$$

$$R_L = \int_0^L w_0(1 - kx)e^{-kx} dx - \frac{\int_0^L w_0(1 - kx)e^{-kx} x dx}{L} \quad (1.70)$$

1.3 Développons une application générique dans laquelle chaque opération spécifique fera l'objet d'une fonction dédiée à ladite opération (suggestion : une fonction = un fichier).(Voir Fichier Matlab)

1.4 En utilisant une intégration exacte

1.4.1 Présentons sur un seul graphique une comparaison de la solution exacte avec celles obtenues par éléments finis avec 2, 4, 8, 10, 20 et 100 éléments le long du câble

La figure 1.3 illustre plusieurs représentations du comportement dynamique de la déflexion du câble (solution de l'équation différentielle) par intégration exacte dépendamment du nombre d'éléments choisis comparées à celle exacte. La précision est pointu d'autant plus que le nombre d'éléments est grand. En effet, la solution par élément fini obtenu pour 100 éléments donne une approximation aussi parfaite que la solution exacte.

Chapitre 1.

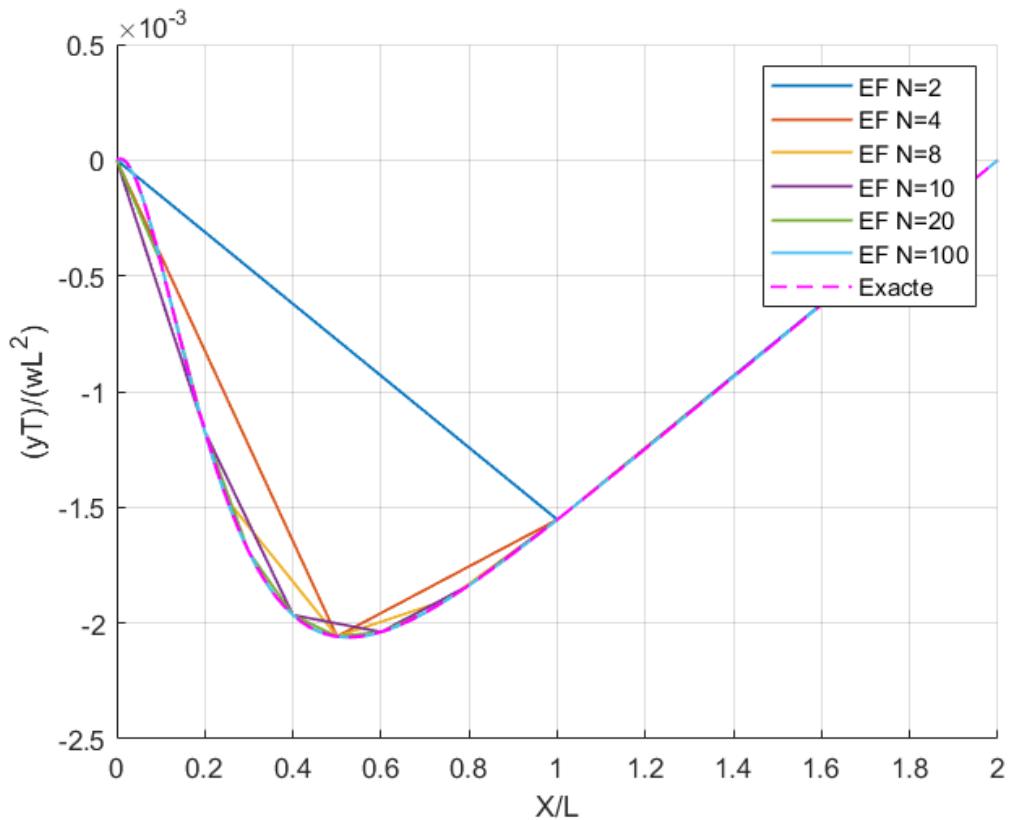


FIGURE 1.3 – Comparaison de la solution exacte avec celles obtenues par éléments finis avec 2, 4, 8, 10, 20 et 100 éléments le long du câble.

1.4.2 Présentons sur un graphique l'erreur absolue obtenue par éléments finis le long du câble en considérant les solutions obtenues par éléments finis obtenues en 3.4.1)

Le graphe 1.4 mesure l'imprécision de la solution par éléments finis par rapport à la solution exacte. L'erreur absolue est réduit d'autant plus que le nombre d'éléments du système est grand (N=100, N=20 etc.)

Chapitre 1.

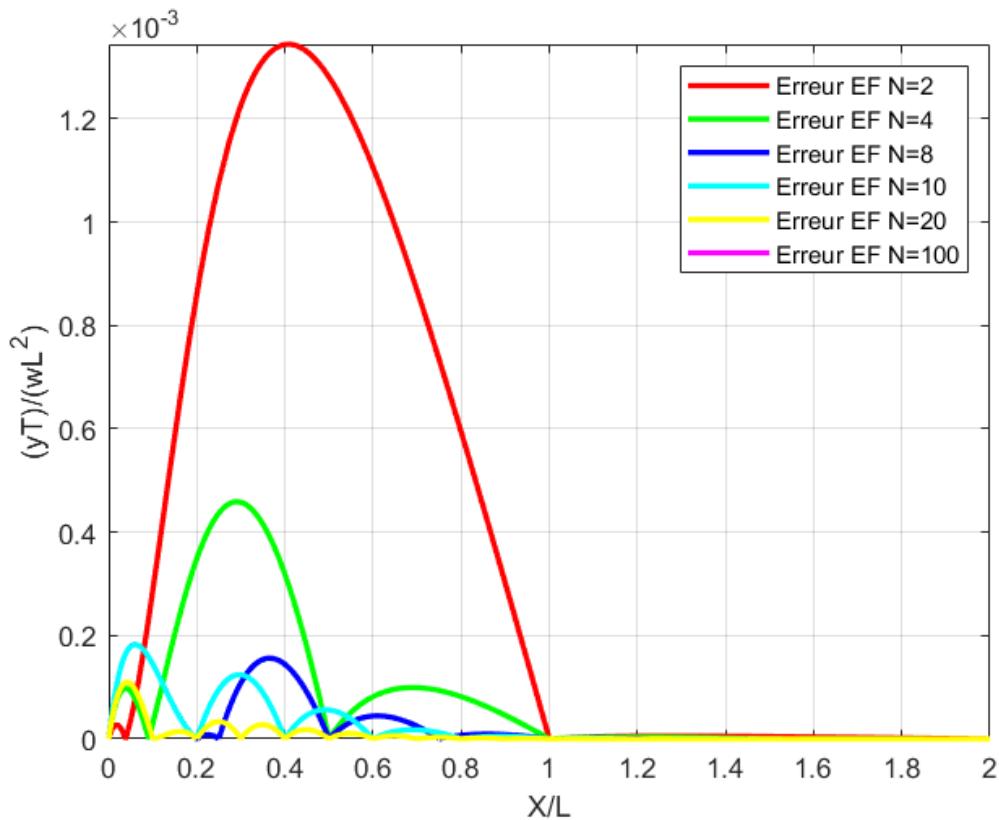


FIGURE 1.4 – Erreur absolue obtenue par éléments finis le long du câble.

1.4.3 Présenter dans un tableau l'évolution des deux réactions aux appuis en fonction du nombre d'éléments (2, 4, 8, 10, 20 et 100).

Eléments	Réaction 1	Réaction 2
2	-0,00781248505392211	0,00781225998357267
4	-0,00781248505392211	0,00781225998357267
8	-0,00781248505392211	0,00781225998357267
10	-0,00781248505392211	0,00781225998357267
20	-0,00781248505392211	0,00781225998357267
100	-0,00781248505392211	0,00781225998357267
Valeur Exact	-0,00781248505392211	0,00781225998357267

TABLE 1.2 – Évolution des deux réactions aux appuis en fonction du nombre d'éléments (2, 4, 8, 10, 20 et 100).

Le tableau 1.2 présente la valeur des réactions aux appuis en fonction du nombre d'éléments d'intégration. En effet, il se trouve que la réaction à chaque appui est la même peu importe le nombre d'éléments d'intégration choisis.

Chapitre 1.

1.4.4 Présenter sur un seul graphique l'estimation de l'erreur (Err_g) le long du câble et ce, pour 2, 4, 8, 10, 20 et 100 éléments.

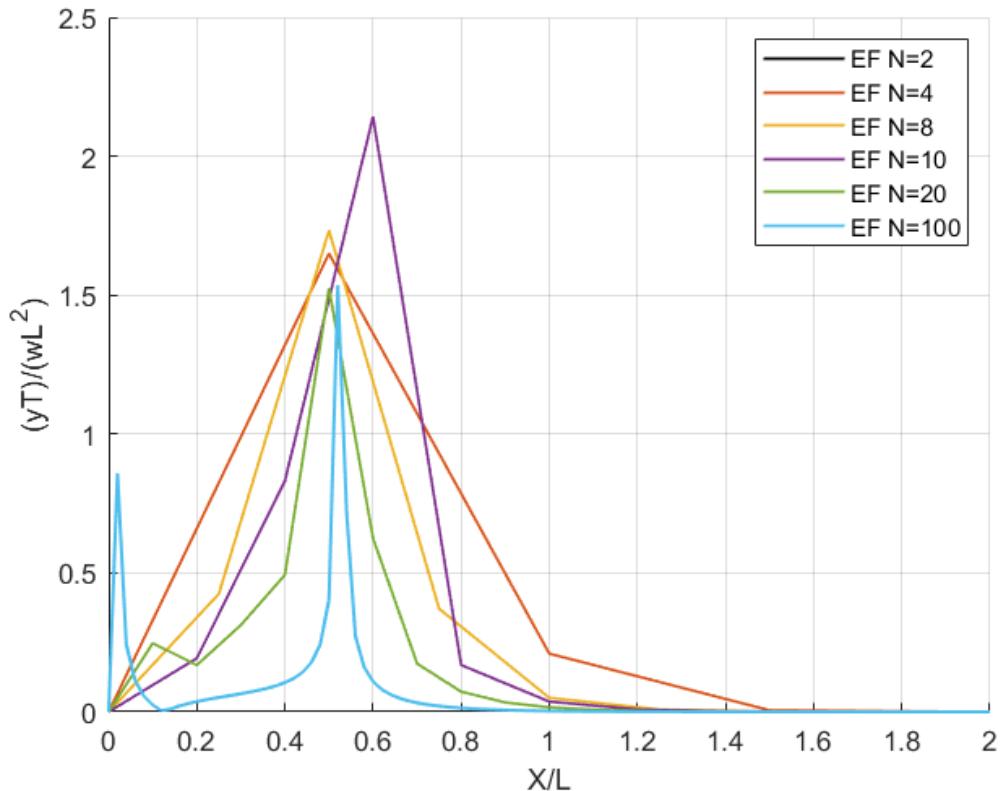


FIGURE 1.5 – Estimation de l'erreur (Err_g) le long du câble et ce, pour 2, 4, 8, 10, 20 et 100 éléments

La figure 1.5 illustre une estimation de l'erreur sur le gradient du champ solution. En effet, chaque nœud dispose d'un gradient résultant de la moyenne du contribution de chaque élément relié au nœud. Elle vise à corriger les erreurs selon l'importance de la contribution de chaque élément. Ainsi plus le maillage est important plus la correction est d'autant plus correcte pour une meilleure représentation.

1.5 En utilisant 4 éléments

1.5.1 Présenter sur un seul graphique une comparaison de la solution exacte avec celles obtenues par éléments finis en utilisant 1, 2 et 3 points d'intégration ainsi qu'une intégration exacte.

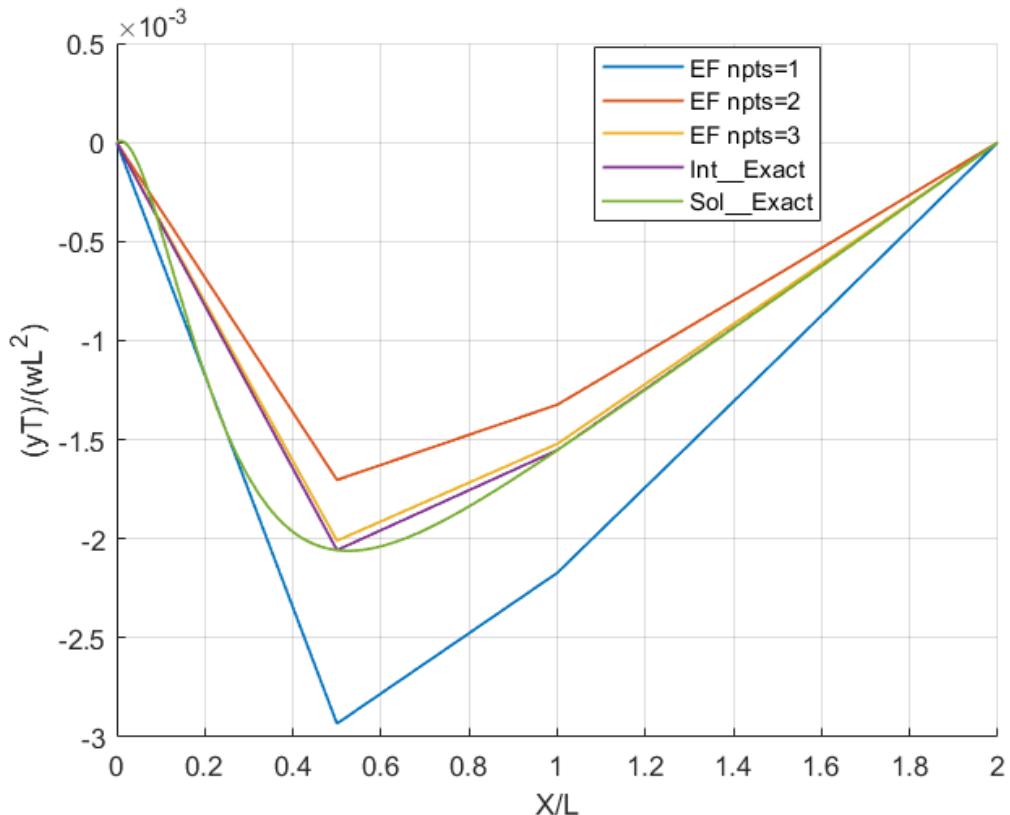


FIGURE 1.6 – Comparaison de la solution exacte avec celles obtenues par éléments finis en utilisant 1, 2 et 3 points d'intégration ainsi qu'une intégration exacte.

La figure 1.6 illustre cinq (5) représentations du comportement dynamique de la déflexion du câble (solution de l'équation différentielle) par solution exacte, intégration exacte et à l'aide du schéma à 1, 2 et 3 points de Gauss. Elle est schématisé avec un nombre précis de quatre (4) éléments. On remarque que l'intégration de Gauss à 3 points donne une meilleure représentation de la solution proche de celle exacte.

Chapitre 1.

1.5.2 Présentons sur un graphique l'erreur absolue obtenue par éléments finis le long du câble en considérant les solutions obtenues par éléments finis obtenues en 3.5.1

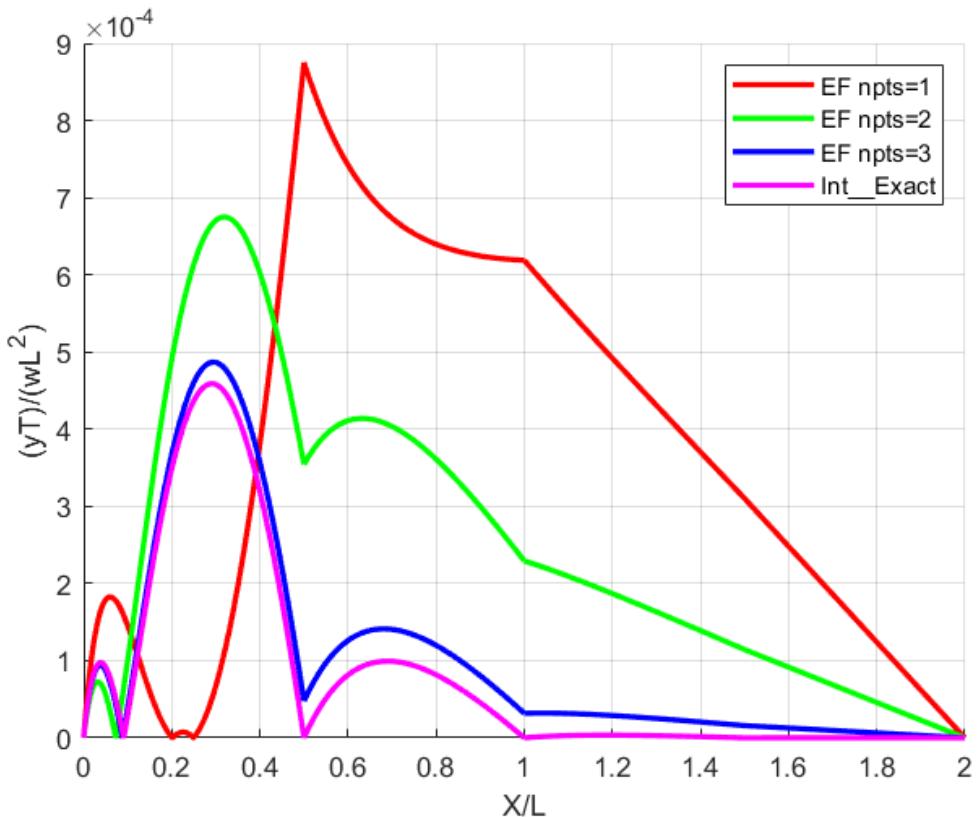


FIGURE 1.7 – Erreur absolue obtenue par éléments finis ($N=4$ éléments) le long du câble.

Le graphe 1.7 mesure l'imprécision de la solution par intégration exacte et celles obtenus à l'aide du schéma à 1, 2 et 3 points de Gauss. On note également que la représentation de l'imprécision est d'autant plus correcte que le nombre de points d'intégration est grand soit proche de celle par intégration exacte.

Chapitre 1.

1.5.3 Présenter dans un tableau l'évolution des deux réactions aux appuis en fonction du nombre de points d'intégration et pour une intégration exacte. Comparer avec la valeur exacte des réactions.

Nombre de points	Réaction 1	Réaction 2
1	0,0631595246906177	0,0109147019899599
2	0,00878913896295147	0,00666843844459175
3	-0,00683676330408151	0,00765349115479508
Int Exact	-0,00781248505392211	0,00781225998357267
Valeur Exact	-0,00781248505392211	0,00781225998357267

TABLE 1.3 – Évolution des deux réactions aux appuis en fonction du nombre de points d'intégration et pour une intégration exacte.

Le tableau 1.3 présente la valeur des réactions aux appuis en fonction des points d'intégration de Gauss et pour une intégration exacte. En effet, elles tendent chacune vers sa valeur exacte et ceci plus le nombre de points d'intégration est important.

1.5.4 Présenter sur un seul graphique l'estimation de l'erreur (Err_g) le long du câble et ce, en utilisant 1, 2 et 3 points d'intégration ainsi qu'une intégration exacte

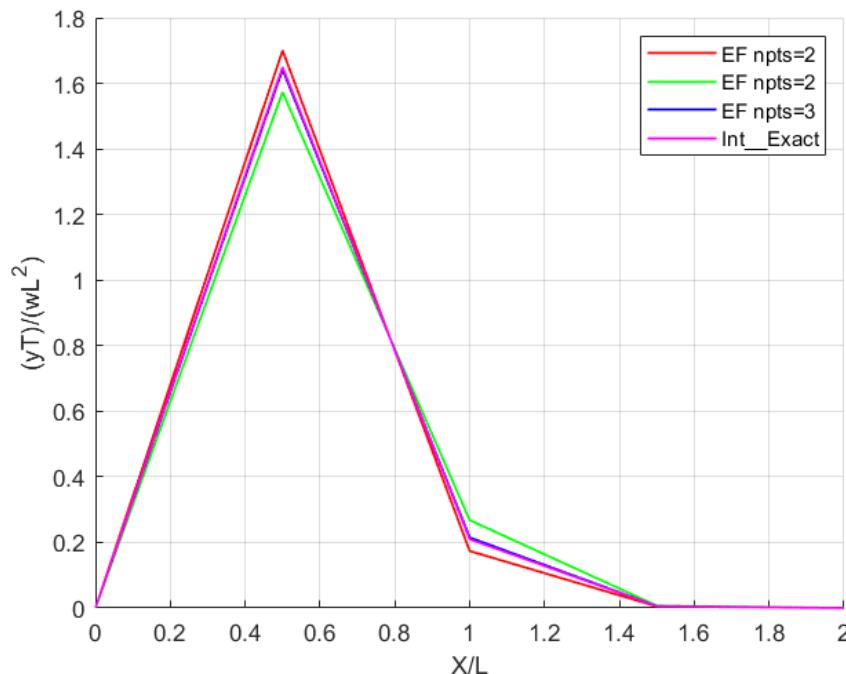


FIGURE 1.8 – Estimation de l'erreur (Err_g) le long du câble et ce, en utilisant 1, 2 et 3 points d'intégration ainsi qu'une intégration exacte.

Chapitre 1.

La figure 1.8 illustre une estimation de l'erreur sur le gradient du champ solution. Pour un nombre d'éléments égale à quatre (4), la correction de l'erreur selon l'importance de la contribution de chaque élément est presque identique peu importe l'intégration exacte et le nombre de points d'intégration de Gauss choisis. Ainsi on peut en déduire qu'elle est fonction du nombre d'éléments de maillage.

1.6 Conclusion incluant une discussion des résultats obtenus en 3.4

A l'issu de ce TP3, la représentation de la déflexion du câble soumis à une sollicitation externe de type exponentielle a été développé selon la méthode des éléments finis. Toutefois, l'application exacte de la méthode ne garantit pas une obtention assez rapide de ladite solution. Ainsi deux sous méthodes de résolution ont été abordé.

La méthode en fonction des points d'intégration de Gauss est très rapide car il n'y a pas d'intégration à effectuer, mais le résultat dépend du choix du nombre de points d'intégration. Car avec une intégration de Gauss à 3 points, l'approximation est presque identique à la solution exacte ainsi que l'erreur absolue.

Tandis que la méthode par intégration exacte est une résolution assez simple plus précise que les trois points de Gauss présenté Mais nécessite un temps d'exécution assez important.

Par ailleurs, il convient de noter que l'estimation de l'erreur sur le gradient est fonction du nombre d'élément du système de maillage choisis. La correction des erreurs selon l'importance de la contribution de chaque élément est indépendante de la sous-méthode de résolution.

Contrairement aux deux réactions aux appuis, ces derniers restent identique à la valeur exacte peu importe le nombre d'éléments de maillage choisis. Néanmoins elles tendent chacune à sa valeur exacte d'autant plus que le nombre de points d'intégration est important.

Bibliographie

- [1] A history of Greek mathematics Vol.II from Aristarchus to Diophantus.By Sir Thomas Heath. Consulté le 15 septembre 2022.
- [2] http://galileo.phys.virginia.edu/classes/109/lectures/greek_math.htm. Consulté le 15 septembre 2022
- [3] <https://www.hellenicaworld.com/Greece/Science/en/HeronsMath.html>. Consulté le 15 septembre 2022
- [4] Greek methods of solving quadratc equations.By WALTER C. EELLS, The University of Chicago. Consulté le 16 septembre 2022.
- [5] Emmanuel Russ. Inégalités isopérimétriques et isodiamétriques. Journées mathématiques X-UPS 2017, 2018. hal-02023103. Consulté le 17 septembre 2022.
- [6] Variational methods for the solution. By Richard COURANT. Consulté le 18 septembre 2022.
- [7] <http://wwwfea-consulting.com/pages/evolution.html>. Consulté le 19 septembre 2022.
- [8] https://en.wikipedia.org/wiki/Drucker-Prager_yield_criterion. Consulté le 19 septembre 2022.
- [9] https://en.wikipedia.org/wiki/Newmark-beta_method. Consulté le 20 septembre 2022.
- [10] <https://www.cadfem.net/at/en/cadfem-informs/cadfem-newsroom/cadfem-journal/fem-history.html>. Consulté le 20 septembre 2022.
- [11] https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_des_fements_finis. Consulté le 21 septembre 2022.
- [12] <https://www.esrd.com/simulation-technology/brief-history-offea>. Consulté le 22 septembre 2022.