

---

## Étude de la déflexion d'un câble : Partie 1

---

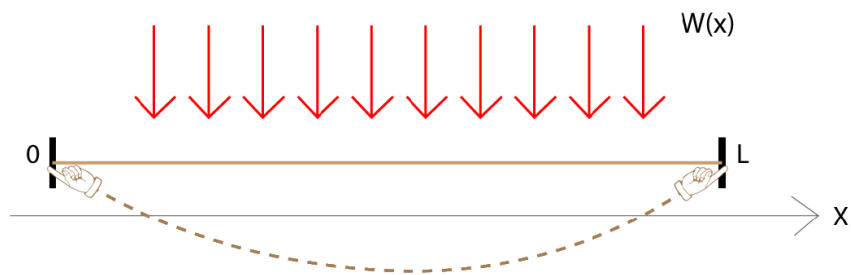


FIGURE 1 – Câble unidimensionnelle sous une charge  $w(x)$ .

**Gilbert Djidiack FAYE**

# Table des matières

|  |            |
|--|------------|
| <b>Sommaire</b>  | <b>i</b>   |
| <b>Table des matières</b>  | <b>i</b>   |
| <b>Table des figures</b>   | <b>ii</b>  |
| <b>Liste des tableaux</b>  | <b>iii</b> |
| <b>1 TP2 : Étude de la déflexion d'un câble : Partie 1</b>   | <b>1</b>   |
| 1.1 Mise en contexte du problème. . . . .  | 1          |
| 1.2 Développements mathématiques menant à la solution exacte. . . . .  | 1          |
| 1.2.1 Détermination de l'équation d'équilibre . . . . .  | 1          |
| 1.2.2 Détermination de la solution exacte . . . . .  | 3          |
| 1.3 Développements mathématiques menant à la solution par collocation. . . . .   | 5          |
| 1.4 Développements algébriques menant à l'application par éléments finis. . . . .  | 7          |
| 1.5 Étude de cas : . . . . .   | 10         |
| 1.5.1 Présentons sur un seul graphique une comparaison de la solution exacte et de celle obtenue par collocation le long du câble. . . . .   | 10         |
| 1.5.2 Présentons sur un graphique le résidu d'équilibre résultant de la solution par collocation le long du câble. . . . .   | 11         |
| 1.5.3 Présentons sur un seul graphique une comparaison de la solution exacte avec celles obtenues par éléments finis avec 2, 4, 8, 10, et 20 éléments le long du câble. . . . .    | 12         |
| 1.5.4 Présentons sur un graphique l'erreur absolue obtenue par collocation le long du câble. . . . .   | 13         |
| 1.6 Présentons sur un graphique l'erreur absolue obtenue par éléments finis le long du câble en considérant les solutions obtenues par éléments finis obtenues en 2.5.3) . . . . . | 14         |
| 1.7 Conclusion incluant une discussion des résultats obtenus en 2.5 . . . . .  | 15         |
| <b>Index</b>   | <b>16</b>  |
| <b>Bibliographie</b>   | <b>16</b>  |

# Table des figures

|     |  |    |
|-----|--|----|
| 1.1 | Câble unidimensionnelle sous une charge $w(x)$ . . . . .   | 1  |
| 1.2 | Comparaison de la solution exacte et de celle obtenue par collocation le long du câble. . . . .                                      | 10 |
| 1.3 | Résidu d'équilibre résultant de la solution par collocation le long du câble. .  | 11 |
| 1.4 | Comparaison de la solution exacte avec celles obtenues par éléments finis avec 2, 4, 8, 10, et 20 éléments le long du câble. . . . . | 12 |
| 1.5 | Erreur absolue obtenue par collocation le long du câble. . . . .   | 13 |
| 1.6 | Erreur absolue obtenue par éléments finis le long du câble. . . . .  | 14 |

# Liste des tableaux

# Chapitre 1

## TP2 : Étude de la déflexion d'un câble : Partie 1

### 1.1 Mise en contexte du problème.

L'étude entre dans le cadre de la représentation du comportement dynamique d'un câble. En effet l'objectif est de donner une solution de l'équation différentielle gouvernant la déflexion du câble sous l'action d'un chargement de type exponentielle. Ainsi, plusieurs approximations de la solution ont été présentées selon des méthodes de résolution différentes à l'instar de la méthode par collocation et celle par élément fini afin de déterminer la plus fidèle à la solution exacte.

### 1.2 Développements mathématiques menant à la solution exacte.

#### 1.2.1 Détermination de l'équation d'équilibre

Considérons un câble de longueur  $L$  soumis à un charge distribué  $w(x)$  dans un repère orthonormé  $(O, x, y)$  :

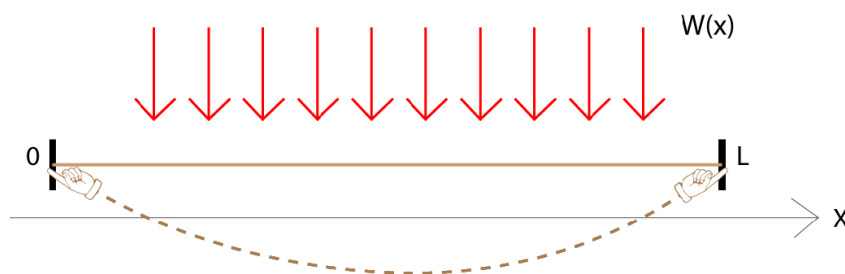


FIGURE 1.1 – Câble unidimensionnelle sous une charge  $w(x)$ .

## Chapitre 1.

D'après le théorème de la résultante statique, si le système est en équilibre alors la somme résultante des forces extérieures est nulle. Ce qui équivaut à écrire l'équation suivante :

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad (1.1)$$

Appliqué à notre système, ceci implique que :

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_x = 0 \\ \sum \vec{F}_y = 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

1) Résolvons l'équation 1.2 suivant l'axe  $(Ox)$  :

$$\sum \vec{F}_x = -T(x)\cos\Theta(x) + T(x + \Delta x)\cos\Theta(x + \Delta x) \quad (1.3)$$

$$\Rightarrow -T(x)\cos\Theta(x) + T(x + \Delta x)\cos\Theta(x + \Delta x) = 0 \quad (1.4)$$

Soit  $\Theta$  l'angle entre la tension  $T$  du câble et l'axe  $(Ox)$ . Donc par un procédé géométrique à petite échelle on peut dire que :

$$\cos\Theta = \frac{dx}{ds} \quad (1.5)$$

avec  $ds$  le diagonale du triangle rectangle formé par  $dx$  et  $dy$

Prenons comme hypothèse que la tension ( $T$ ) est suffisamment grande et la déflexion ( $y$ ) suffisamment petite pour maintenir la tension ( $T$ ) constante durant la déformation.

Alors,

$$\Rightarrow \begin{cases} \Theta \rightarrow 0 \\ \cos\Theta \rightarrow 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

Ainsi,

$$(1.5) \Rightarrow dx \approx ds \quad (1.7)$$

D'où,

$$(1.4) \Rightarrow -T(x).1 + T(x + \Delta x).1 = 0 \quad (1.8)$$

$$\Rightarrow -T(x) + T(x + \Delta x) = 0 \quad (1.9)$$

$$\Rightarrow T(x) = T(x + \Delta x) = T \quad (1.10)$$

2) Résolvons l'équation 1.2 suivant l'axe  $(Oy)$  :

## Chapitre 1.

$$\sum \vec{F}_y = T(x)\sin\Theta(x) - T(x + \Delta x)\sin\Theta(x + \Delta x) + w(x)\Delta x \quad (1.11)$$

$$\Rightarrow T(x)\sin\Theta(x) - T(x + \Delta x)\sin\Theta(x + \Delta x) + w(x)\Delta x = 0 \quad (1.12)$$

Avec l'angle  $\Theta$  précédemment défini, nous pouvons dire que :

$$\sin\Theta = -\frac{dy}{ds} \quad (1.13)$$

En reprenant la même hypothèse en 1.6 et 1.7,

$$(1.13) \Rightarrow \sin\Theta \approx -\frac{dy}{dx} \quad (1.14)$$

D'où,

$$(1.12) \Rightarrow -\left[\frac{Tdy}{dx}\right]_x + \left[\frac{Tdy}{dx}\right]_{x+\Delta x} + w(x)\Delta x = 0 \quad (1.15)$$

$$\Rightarrow \frac{-\left[\frac{Tdy}{dx}\right]_x + \left[\frac{Tdy}{dx}\right]_{x+\Delta x}}{\Delta x} + w(x) = 0 \quad (1.16)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d}{dx} \left[ \frac{Tdy}{dx} \right] + w(x) = 0 \quad (1.17)$$

$T$  une constante considéré et définit en 1.10, ce qui donne l'équation de l'équilibre suivante :

$$\boxed{\frac{Td^2y}{dx^2} + w(x) = 0} \quad (1.18)$$

avec,

$T$ , la tension dans le câble [Newton ( $N$ )]  
 $y$ , la déflexion du câble [mètre ( $m$ )]  
 $w$ , le chargement distribué [ $N/m$ ]

### 1.2.2 Détermination de la solution exacte

Les caractéristiques du problèmes sont définis comme suit :

- Longueur ( $L$ ) :  $2m$
- Tension ( $T$ ) :  $5kN$
- Chargement linéique ( $w$ ) :

$$w(x) = w_0(1 - kx)e^{-kx} \quad \text{avec } w_0 = 1kN/m \text{ et } k = 8 \quad (1.19)$$

Le chargement étant définit linéique en 1.19 alors l'équation 1.18 peut être réécrit sous la forme de :

## Chapitre 1.

$$\frac{Td^2y}{dx^2} + w_0(1 - kx)e^{-kx} = 0 \quad (1.20)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w_0}{T}(-e^{-kx} + kxe^{-kx}) \quad (1.21)$$

Effectuons une intégrale première de l'équation 1.21 :

$$\Rightarrow \int \frac{d^2y}{dx^2} dx = \frac{w_0}{T} \int (-e^{-kx} + kxe^{-kx}) dx \quad (1.22)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{w_0}{T} \int (e^{-kx} - kxe^{-kx}) dx \quad (1.23)$$

Or nous savons que :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \frac{1}{k} (1 + kx) e^{-kx} = -kx e^{-kx} \\ \frac{d}{dx} \frac{1}{k} e^{-kx} = e^{-kx} \end{cases} \quad (1.24)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \int -kx e^{-kx} = \frac{1}{k} (1 + kx) e^{-kx} + cste \\ \int e^{-kx} = -\frac{1}{k} e^{-kx} + cste \end{cases} \quad (1.25)$$

Alors,

$$(1.23) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{w_0}{T} \left( -\frac{1}{k} e^{-kx} + \frac{1}{k} (1 + kx) e^{-kx} \right) + constante \quad (1.26)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{kT} (e^{-kx} - (1 + kx) e^{-kx}) + C_1 \quad (1.27)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{kT} (-kx e^{-kx}) + C_1 \quad (1.28)$$

En effectuant une intégrale sur l'équation 1.28 :

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{dx} = \frac{w_0}{kT} \int (-kx e^{-kx}) + \int C_1 \quad (1.29)$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{w_0}{kT} \left( \frac{1}{k} (1 + kx) e^{-kx} \right) + C_1 x + C_2 \quad (1.30)$$

Donc la solution générale de l'équation s'écrit comme suit :

$$y(x) = \frac{w_0}{k^2 T} (1 + kx) e^{-kx} + C_1 x + C_2 \quad (1.31)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes à déterminer

♣ Déterminons les constantes d'intégration à l'aide des conditions aux limites :

$$\begin{cases} y(x=0) = 0 \\ y(x=L) = 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{w_0}{k^2 T} + C_2 = 0 \\ \frac{w_0}{k^2 T}(1 + kL)e^{-kL} + C_1 L + C_2 = 0 \end{cases} \quad (1.32)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2 = -\frac{w_0}{k^2 T} \\ C_1 = -\frac{w_0}{k^2 T L}(1 + kL)e^{-kL} - \frac{C_2}{L} \end{cases} \quad (1.33)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2 = -\frac{w_0}{k^2 T} \\ C_1 = -\frac{w_0}{k^2 T L}(1 + kL)e^{-kL} + \frac{w_0}{k^2 T L} \end{cases} \quad (1.34)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_2 = -\frac{w_0}{k^2 T} \\ C_1 = -\frac{w_0}{k T} e^{-kL} \end{cases} \quad (1.35)$$

Remplaçons les valeurs de nos constantes trouvés dans l'équation 1.31 :

$$\Rightarrow y(x) = \frac{w_0}{k^2 T}(1 + kx)e^{-kx} - \frac{w_0}{k T} e^{-kL} x - \frac{w_0}{k^2 T} \quad (1.36)$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{w_0}{k^2 T} e^{-kx} + \frac{w_0}{k T} x e^{-kx} - \frac{w_0}{k T} e^{-kL} x - \frac{w_0}{k^2 T} \quad (1.37)$$

Finalement, on obtient la solution exacte :

$$\Rightarrow y(x) = \frac{w_0}{k T} (e^{-kx} - e^{-kL})x - \frac{w_0}{k^2 T} (1 - e^{-kx}) \quad (1.38)$$

En remplaçant les valeurs des caractéristiques données :

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{8 * 5} (e^{-8x} - e^{-8*2})x - \frac{1}{8^2 * 5} (1 - e^{-8x}) \quad (1.39)$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{40} (e^{-8x} - e^{-16})x - \frac{1}{320} (1 - e^{-8x}) \quad (1.40)$$

### 1.3 Développements mathématiques menant à la solution par collocation.

Dans le cadre de la déflexion du câble, considérons l'approximation de degré 4 suivante :

$$y(x) = x(x - L)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) \quad (1.41)$$

1) Verifions si  $y(x)$  respecte les conditions limites :

$$y(0) = y(L) = 0$$

2) Verifions si  $y(x)$  respecte la convergence à l'infini :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x - L)(A_0 + A_1 x + A_2 x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) \approx \lim_{x \rightarrow +\infty} A_2 x^2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$$

## Chapitre 1.

- 3) Procédons au calcul de la fonction résidu partant de l'équation d'équilibre obtenu en 1.18 :

D'abord la formule développée de  $y(x)$  donne :

$$y(x) = A_2x^4 + (A_1 - A_2L)x^3 + (A_0 - A_1L)x^2 - A_0Lx \quad (1.42)$$

En effectuant la dérivée première de  $y(x)$  par rapport à  $x$  on a :

$$\frac{dy}{dx} = 4A_2x^3 + 3(A_1 - A_2L)x^2 + 2(A_0 - A_1L)x - A_0L \quad (1.43)$$

Et la dérivée seconde :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 12A_2x^2 + 6(A_1 - A_2L)x + 2(A_0 - A_1L) \quad (1.44)$$

Donc,

$$\frac{Td^2y}{dx^2} + w(x) = T \left[ 12A_2x^2 + 6(A_1 - A_2L)x + 2(A_0 - A_1L) \right] + w_0(1 - kx)e^{-kx} = 0 \quad (1.45)$$

$$\Rightarrow 12A_2x^2 + 6(A_1 - A_2L)x + 2(A_0 - A_1L) + \frac{w_0}{T}(1 - kx)e^{-kx} = 0 \quad (1.46)$$

$$\Rightarrow R(x, A_0, A_1, A_2) = 12A_2x^2 + 6(A_1 - A_2L)x + 2(A_0 - A_1L) + \frac{w_0}{T}(1 - kx)e^{-kx} \text{ pour tout } x \in [0, L] \quad (1.47)$$

- 4) Application de la méthode de collocation

Supposons que la résultante  $R = 0$  en deux points du câble ( $x = \frac{2L}{7}$ ,  $x = \frac{4L}{7}$  et  $x = \frac{4L}{5}$ ) :

$$\begin{cases} R(x = \frac{2L}{7}, A_0, A_1, A_2) = 0 \\ R(x = \frac{4L}{7}, A_0, A_1, A_2) = 0 \\ R(x = \frac{4L}{5}, A_0, A_1, A_2) = 0 \end{cases} \quad (1.48)$$

En remplaçant les valeurs des variables caractéristiques dans l'équation 1.48 nous obtenons :

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A_0 - \frac{4A_1}{7} - \frac{144A_2}{49} = \frac{5e^{-\frac{32}{7}}}{7} \\ 2A_0 + \frac{20A_1}{7} + \frac{96A_2}{49} = \frac{57e^{-\frac{64}{7}}}{35} \\ 2A_0 + \frac{28A_1}{5} + \frac{288A_2}{25} = \frac{59e^{-\frac{64}{5}}}{25} \end{cases} \quad (1.49)$$

Une résolution de l'équation nous donne la solution suivante :

$$\Rightarrow \begin{cases} A_0 = 0.0041 \\ A_1 = -0.0035 \\ A_2 = 0.00099 \end{cases} \quad (1.50)$$

Finalement on obtient la solution exacte :

$$y(x) = x(x - 2)(0.00099x^2 - 0.0035x + 0.0041) \quad (1.51)$$

## 1.4 Développements algébriques menant à l'application par éléments finis.

Exprimons l'énergie potentielle totale ( $E$ ) en fonction de la déflexion :

$$E = \int_0^L \left[ \frac{1}{2} T \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + wy \right] dx \quad (1.52)$$

D'après le Principe de l'énergie interne minimale, l'état d'équilibre stable d'un système isolé est caractérisé par une énergie interne minimale pour toute variation d'un paramètre  $A_i$ . Alors,

$$\frac{\partial E}{\partial A_i} = 0 \quad \text{condition d'équilibre} \quad (1.53)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial A_i} = \frac{\partial}{\partial A_i} \int_0^L \left[ \frac{1}{2} T (y')^2 + wy \right] dx = 0 \quad (1.54)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial A_i} = \int_0^L \frac{\partial}{\partial A_i} \left[ \frac{1}{2} T (y')^2 + wy \right] dx = 0 \quad (1.55)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial A_i} = \int_0^L \left[ T y' \frac{\partial y'}{\partial A_i} - w \frac{\partial y}{\partial A_i} \right] dx = 0 \quad (1.56)$$

En utilisant une fonction d'approximation linéaire par morceau, on a :

$$y(x) = ax + b \quad (1.57)$$

Avec  $y_i$  et  $y_{i+1}$  les ordonnées respectives des abscisses  $x_i$  et  $x_{i+1}$  sur la longueur du câble, alors :

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{dy}{dx} \\ b = y_i - ax_i \end{cases} \quad (1.58)$$

Exprimons l'énergie élémentaire aux points  $x_{i+1}$  et  $x_i$  en utilisant la l'équation 1.52

$$\Rightarrow E_{elem} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[ \frac{1}{2} T a^2 + w(ax + b) \right] dx \quad (1.59)$$

En considérant que la longueur totale de notre câble est divisé en  $n$  morceau, ce qui équivaut à  $n + 1$  neud sur lesquels l'expression l'énergie totale s'écrit de la forme :

$$\Rightarrow E = \int_0^{x_1} \left[ \frac{1}{2} T a^2 + w(ax + b) \right] dx + \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{1}{2} T a^2 + w(ax + b) \right] dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left[ \frac{1}{2} T a^2 + w(ax + b) \right] dx \quad (1.60)$$

En remplaçant la valeur de  $w$  on dirait :

## Chapitre 1.

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^{x_1} \left[ \frac{1}{2} T a^2 + w_0(1 - kx) \exp(-kx)(ax + b) \right] dx \\
 \Rightarrow &+ \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{1}{2} T a^2 + w_0(1 - kx) \exp(-kx)(ax + b) \right] dx \\
 &+ \dots\dots\dots \\
 &+ \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left[ \frac{1}{2} T a^2 + w_0(1 - kx) \exp(-kx)(ax + b) \right] dx
 \end{aligned} \tag{1.61}$$

Puis les valeurs de  $a$  et  $b$

$$\begin{aligned}
 E &= \int_0^{x_1} \left[ \frac{1}{2} T \left( \frac{y_1 - y_0}{x_1 - 0} \right)^2 + w_0(1 - kx) \exp(-kx) \left( \left( \frac{y_1 - y_0}{x_1 - 0} \right) x + y_0 \right) \right] dx \\
 \Rightarrow &+ \int_{x_1}^{x_2} \left[ \frac{1}{2} T \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2 + w_0(1 - kx) \exp(-kx) \left( \left( \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right) x + \left( y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \right) \right) \right] dx \\
 &+ \dots\dots\dots \\
 &+ \int_{x_{n-1}}^{x_n} \left[ \frac{1}{2} T \left( \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right)^2 + w_0(1 - kx) \exp(-kx) \left( \left( \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \right) x + \left( y_{n-1} - \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} x_{n-1} \right) \right) \right] dx
 \end{aligned} \tag{1.62}$$

Ainsi l'équation de l'énergie totale est fonction de toutes les degrés de libertés  $y_i, i = 1 \dots n$ .

Donc nous pouvons déterminer la dérivée partielle de l'équation en fonction de chaque degré de liberté  $\frac{\partial E}{\partial y_i}$

$$\Rightarrow \frac{\partial E}{\partial y_i} = 0 \tag{1.63}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial E}{\partial y_1} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial y_2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial E}{\partial y_{n-1}} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial y_n} = 0 \end{pmatrix} \tag{1.64}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{12}y_3 + cste1 = 0 \\ a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 + cste2 = 0 \\ ..... \\ ..... \\ ..... \\ a_{n-3n-3}y_{n-3} + a_{n-3n-2}y_{n-2} + a_{n-3n-1}y_{n-1} + csten - 3 = 0 \\ a_{n-2n-2}y_{n-2} + a_{n-2n-1}y_{n-1} + a_{n-1n}y_n + csten - 2 = 0 \end{pmatrix} \quad (1.65)$$

où  $n$  égale au nombre d'éléments équivalent à  $n + 1$  nœuds.

En appliquant les conditions limites on obtient :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{12}y_2 + a_{12}y_3 + cste1 = 0 \\ a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}y_4 + cste2 = 0 \\ ..... \\ ..... \\ ..... \\ a_{n-3n-3}y_{n-3} + a_{n-3n-2}y_{n-2} + a_{n-3n-1}y_{n-1} + csten - 3 = 0 \\ a_{n-2n-2}y_{n-2} + a_{n-2n-1}y_{n-1} + csten - 2 = 0 \end{pmatrix} \quad (1.66)$$

En écrivant cette équation sous forme matricielle, on obtient :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-11} & a_{n-12} & \dots & a_{n-1n-1} & a_{n-1n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cste1 \\ cste2 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ cste_{n-1} \\ cste_n \end{pmatrix}$$

Ainsi la résolution de l'équation matricielle donne :

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 = solution_1 \\ y_2 = solution_2 \\ ..... \\ ..... \\ ..... \\ y_{n-1} = solution_{n-1} \\ y_1 = solution_n \end{pmatrix} \quad (1.67)$$

## 1.5 Étude de cas :

### 1.5.1 Présentons sur un seul graphique une comparaison de la solution exacte et de celle obtenue par collocation le long du câble.

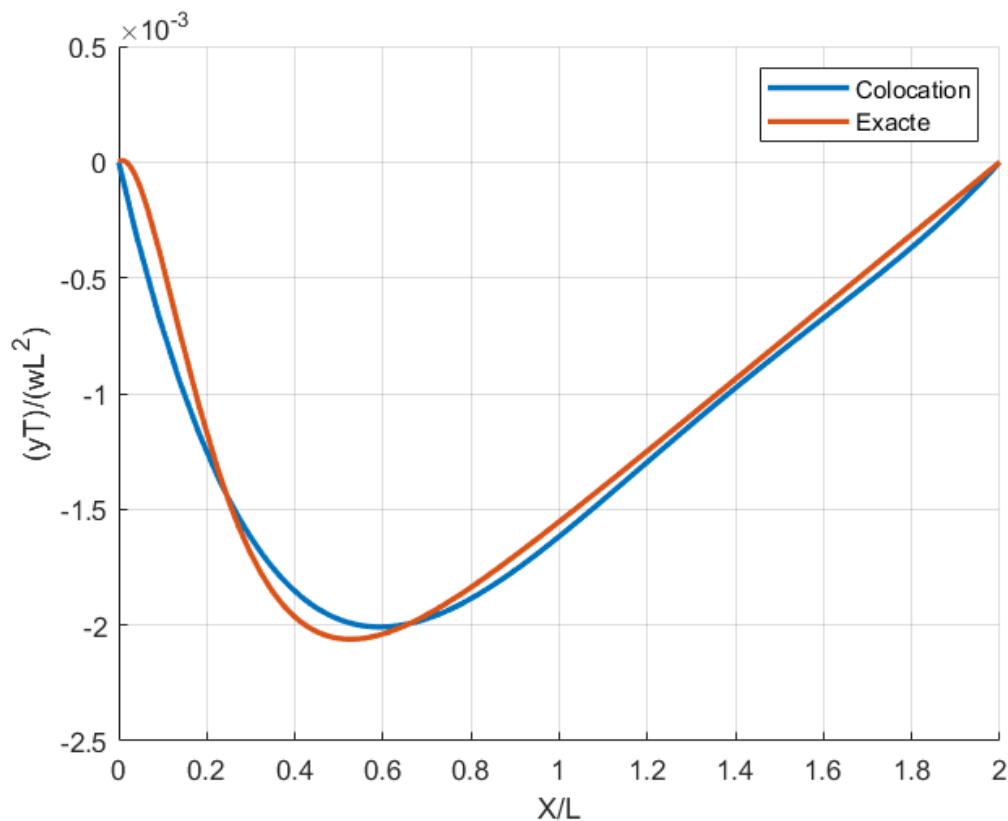


FIGURE 1.2 – Comparaison de la solution exacte et de celle obtenue par collocation le long du câble.

La solution par collocation montre un résultat assez proche de celui obtenu par solution exacte le long du câble. Tout de même un choix rigoureux et logique s'impose pour avoir une approximation aussi parfaite de la solution exacte. Ainsi sur la base du nombre d'opérations, nous pouvons conclure que la collocation est généralement compétitive si l'évaluation des fonctions d'approximation et la solution stable des systèmes linéaires à l'aide de l'approximation sont effectuées avec soin.

**1.5.2 Présentons sur un graphique le résidu d'équilibre résultant de la solution par collocation le long du câble.**

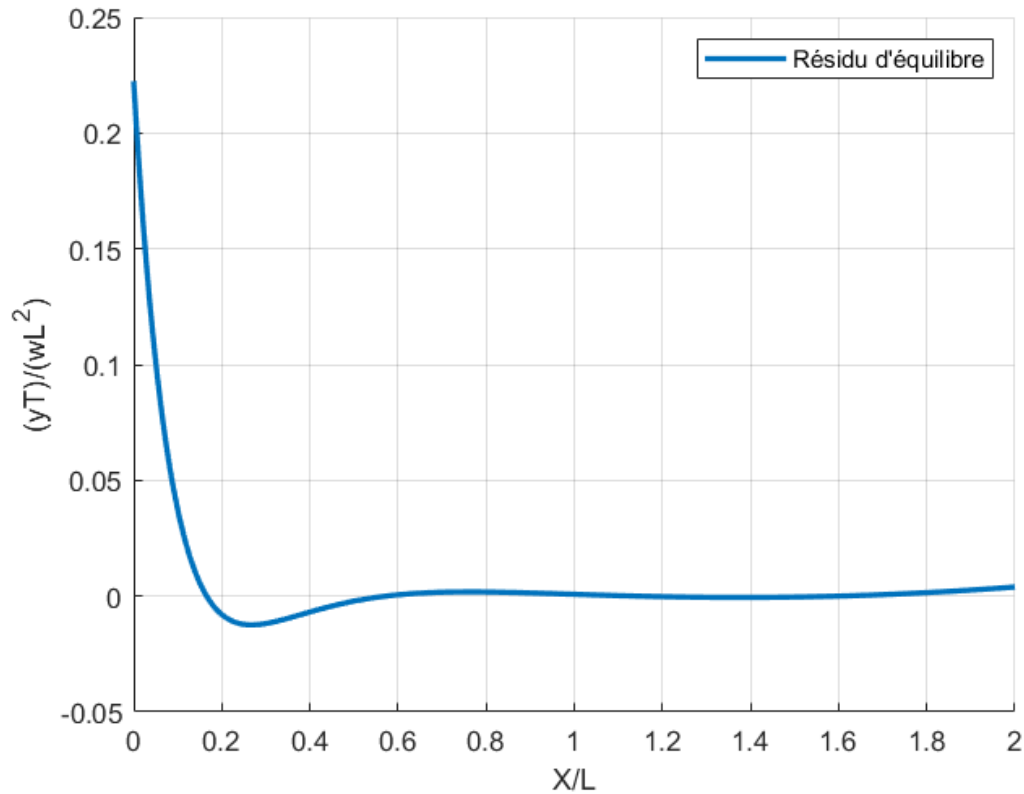


FIGURE 1.3 – Résidu d'équilibre résultant de la solution par collocation le long du câble.

L'objectif du résidu de l'équilibre est de satisfaire l'équation différentielle qui est nulle en tout point du câble. Le graphe illustre que le résidu d'équilibre obtenu est presque nulle sur un bon point du câble ( $x \in 0,15 \cup [0,6; 1,9]$ ). Mise à part au point  $x=0$ , où il prend départ à une valeur de 0,2 pour diminuer progressivement jusqu'à -0,01 au point  $x=0,25$  avant de reprendre une valeur normale nulle à  $x=0,6$ .

**1.5.3 Présentons sur un seul graphique une comparaison de la solution exacte avec celles obtenues par éléments finis avec 2, 4, 8, 10, et 20 éléments le long du câble.**

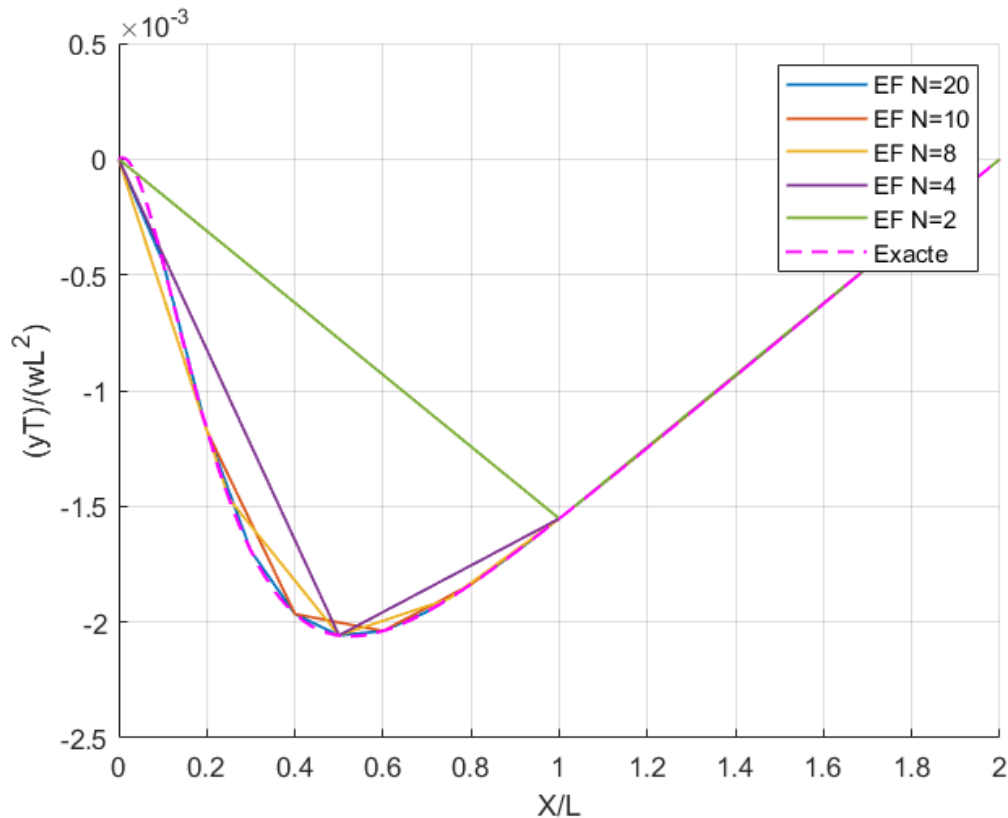


FIGURE 1.4 – Comparaison de la solution exacte avec celles obtenues par éléments finis avec 2, 4, 8, 10, et 20 éléments le long du câble.

La figure 1.4 illustre que la représentation du comportement dynamique de la déflexion du câble (solution de l'équation différentielle) est d'autant plus précise que le nombre d'éléments du système de maillage est grand. En effet, la solution par élément fini obtenu pour 20 éléments donne une approximation aussi parfaite que ceux qui lui sont inférieurs ( $N=10$ ,  $N=8$ ,  $N=4$  et  $N=2$ ).



**1.5.4 Présentons sur un graphique l'erreur absolue obtenue par collocation le long du câble.**

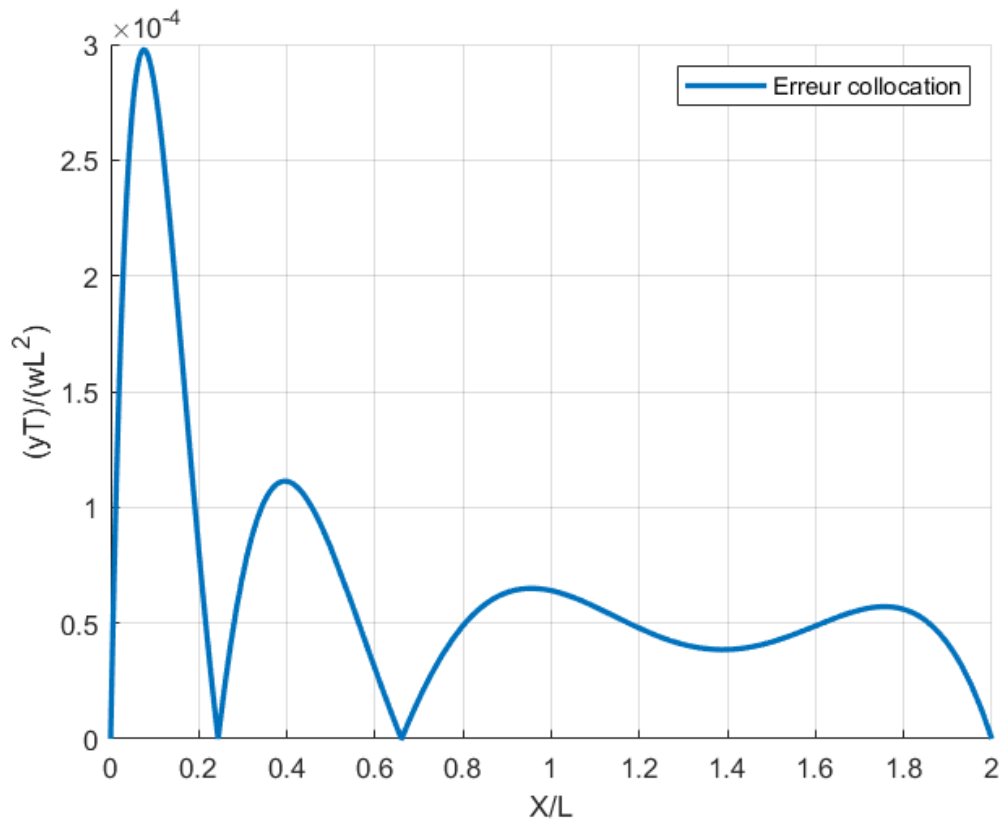


FIGURE 1.5 – Erreur absolue obtenue par collocation le long du câble.

Le graphe 1.5 mesure l'imprécision de la solution par collocation par rapport à la solution exacte. Les valeurs où l'erreur est égale à 0 équivalent aux points du graphe où les deux solutions correspondent. En effet la figure 1.5 illustre que partant de  $x=0$  l'erreur absolue atteint un maximum de  $3 \cdot 10^{-4}$  au point  $x = 0,1$  pour ensuite diminuer progressivement et s'annuler en  $x = 0,25$ . Elle reprend son cours pour atteindre un maximum de  $1,1 \cdot 10^{-4}$  en  $x = 0,4$  avant de s'annuler en  $x = 0,65$ . Et finalement elle oscille autour de  $0,5 \cdot 10^{-4}$  pour ensuite donner une valeur nulle à la fin de la longueur du câble.

## 1.6 Présentons sur un graphique l'erreur absolue obtenue par éléments finis le long du câble en considérant les solutions obtenues par éléments finis obtenues en 2.5.3)

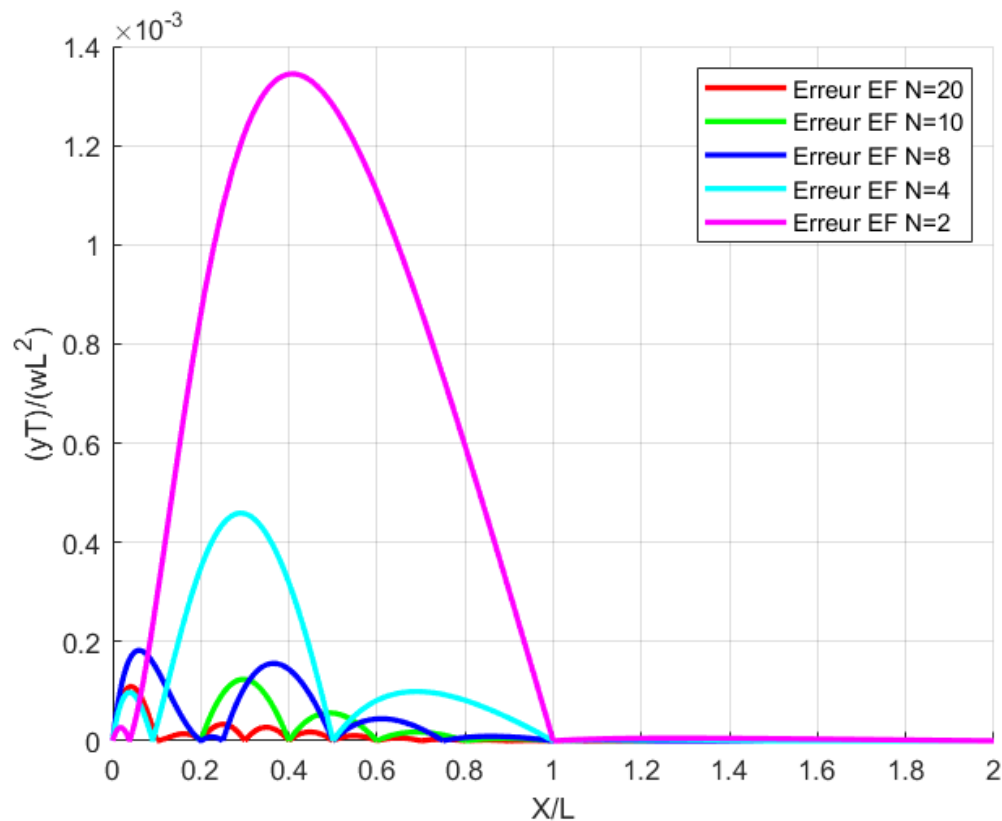


FIGURE 1.6 – Erreur absolue obtenue par éléments finis le long du câble.

Le graphique 1.6 mesure l'imprécision de la solution par éléments finis par rapport à la solution exacte. L'erreur absolue est égale à zéro aux abscisses correspondantes des degrés de libertés. Toutefois l'imprécision est d'autant plus grande que le nombre d'éléments du système de maillage est petit (Ex : N=2, N=4 etc.). En effet l'erreur absolue pour un nombre d'éléments égale à 20 avoisine la valeur zéro.

## **1.7 Conclusion incluant une discussion des résultats obtenus en 2.5**

La comportement dynamique de la déflexion du câble soumis à une sollicitation externe de type exponentielle est décrit par une équation différentielle dont l'obtention de solution numérique voir approximative est obtenu suivant plusieurs méthodes de résolution développé dans le monde de la science. Celles qui sont développés dans ce rapport menant à une solution approximative sont la méthode par collocation et celle par éléments finis.

La méthode de collocation est très rapide car il n'y a pas d'intégration à effectuer, mais le résultat dépend du choix des points de collocation. D'autant plus que plus le choix est rigoureux, plus on s'approche de la solution exacte et plus l'imprécision équivalent à l'erreur absolue est minimale.

Tandis que la méthode par éléments finis est une résolution assez fastidieuse moins précise que la solution exacte mais la précision est de taille d'autant plus que le nombre d'éléments est grand. Cependant elle reste importante pour la résolution des équations aux dérivées partielles évaluées sur des géométries complexes.

# Bibliographie

- [1] A history of Greek mathematics Vol.II from Aristarchus to Diophantus.By Sir Thomas Heath. Consulté le 15 septembre 2022.
- [2] [http://galileo.phys.virginia.edu/classes/109/lectures/greek\\_math.htm](http://galileo.phys.virginia.edu/classes/109/lectures/greek_math.htm). Consulté le 15 septembre 2022
- [3] <https://www.hellenicaworld.com/Greece/Science/en/HeronsMath.html>. Consulté le 15 septembre 2022
- [4] Greek methods of solving quadratic equations.By WALTER C. ELLS, The University of Chicago. Consulté le 16 septembre 2022.
- [5] Emmanuel Russ. Inégalités isopérimétriques et isodiamétriques. Journées mathématiques X-UPS 2017, 2018. hal-02023103. Consulté le 17 septembre 2022.
- [6] Variational methods for the solution. By Richard COURANT. Consulté le 18 septembre 2022.
- [7] <http://www.fea-consulting.com/pages/evolution.html>. Consulté le 19 septembre 2022.
- [8] [https://en.wikipedia.org/wiki/DruckerE28093Prager\\_yield\\_criterion](https://en.wikipedia.org/wiki/DruckerE28093Prager_yield_criterion). Consulté le 19 septembre 2022.
- [9] [https://en.wikipedia.org/wiki/Newmark-beta\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Newmark-beta_method). Consulté le 20 septembre 2022.
- [10] <https://www.cadfem.net/at/en/cadfem-informs/cadfem-newsroom/cadfem-journal/fem-history.html>. Consulté le 20 septembre 2022.
- [11] [https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode\\_des\\_moments\\_finis](https://fr.wikipedia.org/wiki/Méthode_des_moments_finis). Consulté le 21 septembre 2022.
- [12] <https://www.esrd.com/simulation-technology/brief-history-of-fea>. Consulté le 22 septembre 2022.