

8. razred - Elektromagnetizam

Duje Jerić- Miloš

15. veljače 2025.

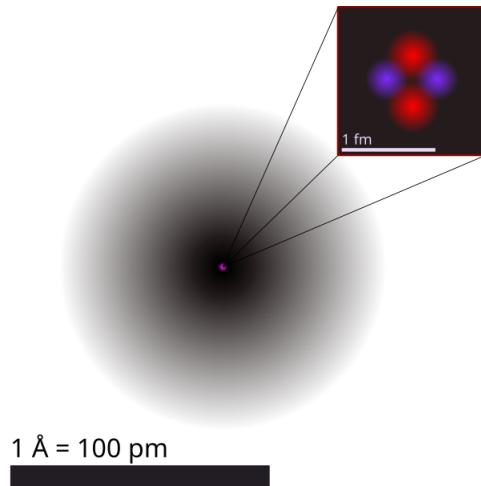
1 Elektricitet

1.1 Naboј

Iz antike je bilo poznato da jantar (fossilizirana smola) nakon što je natrljan krznom može privlačiti male lagane objekte (npr. kosu ili suho lišće). Ovo je nazvano elektricitet po grčkom ἡλεκτρον (elektron; jantar).

Kasnije (18. st.) je otkriveno da zapravo postoje 2 tipa elektriciteta. Jedan se javlja kada npr. trljamo jantar s krznom (nazovimo ga "smolasti elektricitet"), a drugi kada trljamo staklo sa svilom (nazovimo ga "staklasti"). Pokazano je da se objekti nanelektrizirani istim tipom elektriciteta međusobno odbijaju, a oni nanelektrizirani različitim tipovima se privlače. Dalje, Benjamin Franklin je eksperimentom pokazao da koliko staklo trljanjem dobije staklastog elektriciteta, točno toliko svila dobije smolastog. Ovo je dovelo do sljedeće slike. Elektricitet je nevidljivi "fluid" prisutan u svim tvarima te trljanjem stakla svilom, staklo dobiva višak tog fluida, a na svili se javlja manjak. Dakle, staklasti elektricitet je sada nazvao pozitivnim (+), a smolasti negativnim (-).

Danas poznajemo atomsku teoriju te je slika sljedeća. Sva materija je građena od malih čestica - atoma. Ti atomi se sastoje od **pozitivno nabijene jezgre i negativno nabijenog elektronskog omotača**. Atomi su u pravilu neutralni, što znači da je naboј jezgre točno jednak naboju elektronskog omotača koji je okružuje.



Slika 1: Atom helija. Jezgra ima dva protona (+) i dva neutrona (0), a elektronski omotač ima dva elektrona (-). Naboj jezgre te je atom helija neutralan. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Helium_atom_QM.svg.

Elektron, doduše, nije mala kuglica koja u svim trenutcima ima dobro definiran položaj i brzinu. Elektron je možda bolje zamisliti kao nekakav oblak oko jezgre. Još uvijek možemo govoriti o položaju i brzini elektrona, ali na sljedeći način. Gdje je oblak gušći tu je elektron "više prisutan", što ugrubo znači da je izglednije da će se na tom mjestu mjerni uređaj (koji određuje položaj elektrona) aktivirati. Čim izmjerimo položaj, oblak koji opisuje elektron se naglo mijenja te je sada jako gust na mjestu na kojem se uređaj aktivirao (a na drugim mjestima vrlo rijedak). To znači da ćemo, ako odmah nakon prvog mjerjenja ponovno izmjerimo položaj elektrona, dobiti ponovno isti rezultat, tj. isti položaj. Oblak koji opisuje elektron zauzima određeni volumen, no često se može čuti da je elektron "točkasta čestica". To samo znači da položaj elektrona tražimo u jednoj točki prostora, odnosno da oblak nakon mjerjenja može postati proizvoljno malen (ovisno o preciznosti mjerjenja).

Trljanjem stakla svilom zapravo kupimo elektrone sa stakla te ih prenosimo na svilu. Tako staklo ostane pozitivno nabijeno, što znači da ima mali manjak elektrona (umjesto višak "električnog fluida" kako je mislio Franklin), a svila postane malo negativno nabijena, što znači da ima mali višak elektrona. Ovaj prelazak elektrona kada trljamo dva tijela zovemo *triboelek-*

trični efekt po grčkom τρίβω (tribo; trljati). On ovisi o materijalu od kojih su tijela građena, ali i o geometriji samih tijela na mjestu trljanja te njihovoj mikroskopskoj strukturi (pa čak i o npr. vlažnosti zraka jer je efekt izraženiji na suhom zraku). Iz ovog razloga, detaljni opis triboelektričnog efekta još uvijek nije u potpunosti poznat, ali postoje razni prijedlozi (vidi https://en.wikipedia.org/wiki/Triboelectric_effect).

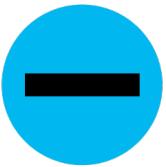
Dakle, imamo dva tipa naboja + i -. **Istovrsni naboji** (+ i + ili - i -) se **odbijaju**, a **suprotni naboji** (+ i -) se **privlače**. Naboj se može prenositi s jednog tijela na drugo, a nositelji tog naboja su elektroni (-) u omotaču i protoni (+) u jezgri atoma. Konačno, naboj elektrona po iznosu je točno jednak naboju protona (ali naravno suprotnog predznaka) - to zovemo elementarni naboj e . Ukupni naboj na neko tijelo obično označavamo s q ili Q (vjerojatno dolazi od riječi *quantity [of electricity]*). **Tijelo može pokupiti samo cijeli broj ovih elementarnih naboja** e pa ne može recimo imati ukupni naboj tijela jednak $\frac{1}{2}e$ ili pak $\frac{25}{7}e$ (tijelo ne može primiti ili predati pola elektrona). Privlačenje ili odbijanje nabijenih tijela je tim jače što tijela na sebi imaju veću količinu naboja i, naravno, što su manje udaljena.

Jedan elementarni naboj e je dosta sitan pa kao standardnu mjernu jedinicu za naboj koristimo nešto veću veličinu - **coulomb** (C):

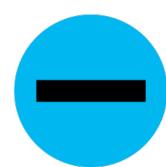
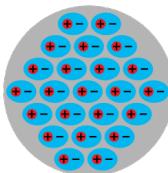
$$1\text{C} = \frac{1}{1.602176634 \cdot 10^{-19}}e.$$

Jedan coulomb je stoga otprilike $6.24 \cdot 10^{18}e$, odnosno vrijednost elementarnog naboja u coulombima je točno $1e = 1.602176634 \cdot 10^{-19}\text{C}$. Zašto baš ovaj broj? Zato što je ranije coulomb bio drukčije definiran, a elementarni naboj je onda izmјeren korištenjem te definicije. Tu raniju definiciju ćemo objasniti tek kasnije kada budemo pričali o magnetizmu.

Nabijeni predmet, primjerice negativno nabijeni, naravno privlači pozitivno nabijene predmete, ali može privlačiti i neutralni komad materijala (npr. kosu ili lišće). Što se tu točno događa? Neutralni komad materijala nije nabijen, no na njemu se može **inducirati naboj**. Ovo znači da je materijal sveukupno električki neutralan, ali strana bliža negativnom naboju postane pozitivna, a suprotna strana negativna:



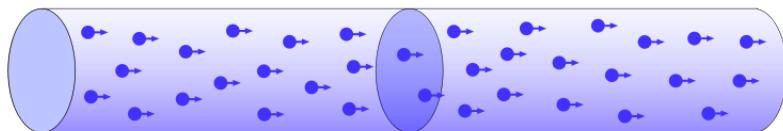
(a) Elektrostatska indukcija na izolatoru. Elektroni su vezani na atome. Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Electrostatic-polarization-2.svg>.



(b) Elektrostatska indukcija na metalu (vodiču). Neki elektroni se mogu slobodno gibati. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:St%C3%BCckle_Spielwiese.svg.

1.2 Struja

Naboj se može prenositi s jednog tijela na drugo - nabijene čestice se mogu gibati. Električna struja nam govori koliko naboja će proći kroz neku zamišljenu površinu (npr. poprečni presjek žice) u jedinici vremena.



Slika 3: Naboji prolaze kroz zamišljenu površinu. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ampere_coulomb.svg.

Struju označavamo slovom I (vjerojatno od riječi *intenzitet* [struje]), a mjerimo u **amperima** (A). Matematički, ako kroz presjek prođe q naboja u t vremena, struja je dana izrazom:

$$I = \frac{q}{t}.$$

Smjer struje pokazuje u smjeru gibanja (tj. brzine) *pozitivnog* naboja. U slučaju da struju stvara gibanje negativnih naboja, smjer struje će biti u suprotnom smjeru od brzine ¹

Ako u jednoj sekundi kroz presjek žice prođe 1C naboja, kažemo da kroz žicu prolazi 1A struje, odnosno $1A = \frac{1C}{s}$. Vidimo da coulomb možemo dobiti kao $C = A \cdot s$. Dakle, coulomb je ampersekunda - količina naboja koja u 1s prođe kroz žicu kada kroz nju teče struja od 1A. Ponekad se koriste i Ah (ampersati), odnosno količina naboja koja u 1h prođe kroz žicu kada kroz nju teče struja od 1A. Kako je u satu ukupno 3600s, jasno je da $1Ah = 1A \cdot 3600s = 3600C$.

Naboj je očuvan. Ako imamo neku kutiju, onda će količina naboja u toj kutiji biti uvijek ista, osim u slučaju kada u kutiju ili iz kutije teče struja. Ako, primjerice, u kutiju teče struja od 1A, onda će se svake sekunde povećati količina *pozitivnog* naboja u kutiji za 1C. Ako struja izlazi iz kutije, to znači da se količina pozitivnog naboja u kutiji smanjuje, tj. da se količina negativnog naboja povećava.

Ono što zakon očuvanja naboja *ne tvrdi* je da nabijene čestice žive vječno, tj. da ne mogu nastati ili nestati. Čestična fizika nas uči da iz jedne čestice mogu nastati druge ako izvorna čestica ima dovoljno energije (i međudjeluje s okolinom). Tako, primjerice, blizu jezgre atoma iz fotona (čestice svjetla koja je neutralna; ima naboј 0) može nastati elektron, no ne samo elektron jer tako naboј ne bi bio očuvan. Foton dovoljno visoke energije se raspada na elektron i pozitron (česticu koja je po svemu ista kao elektron, osim što ima suprotni naboј).

¹Precizna matematička veza između struje i brzine je sljedeća. Gustoća naboja je količina naboja po jedinici volumena $\rho = \frac{q}{V}$. Gustoća struje (mislimo na struju po jedinici površine) se onda može definirati kao $j = \rho v$ - ovo je vektor (brzina je vektor). Kada je gustoća naboja negativna $\rho < 0$, vektor j pokazuje u suprotnom smjeru od brzine. Ako imamo poprečni presjek A , struju kroz A dobijemo kao $I = jA$. Zaista, ako se naboji gibaju brzinom v , nakon vremena t , će se pomaknuti za $\Delta x = vt$. Ako kroz površinu A u istom vremenu t ukupno prođe q naboja, oni će ispuniti volumen $V = A\Delta x = Avt$, tj. gustoća im je $\rho = \frac{q}{V} = \frac{q}{Avt}$. Vidimo da je $jA = \rho v A = \frac{q}{Avt} v A = \frac{q}{t} = I$.

Generalno govoreći, tvari bismo mogli podijeliti u dvije skupine: na **izolatore i vodiče**. Vodići u sebi imaju slobodne naboje, stoga dobro provode struju. Izolatori nemaju slobodnih naboja te slabo provode struju. Primjerice, mnogi metali su vodići jer imaju slobodne elektrone koji se onda mogu gibati kroz metal kada na njih djeluje električna sila ². S druge strane, plastike su uglavnom izolatori jer su njihovi elektroni vezani za atome i ne mogu se slobodno gibati.

Dalje, čista voda (H_2O) je izolator jer nema slobodnih naboja (imamo samo molekule vode koje su sveukupno neutralne). Otopimo li kuhinjsku sol ($NaCl$) u vodi, odjednom ćemo u otopini dobiti pozitivne ione (Na^+) i negativne ione (Cl^-), koji se onda mogu slobodno gibati. Dakle, otopina soli i vode je vodič koji provodi struju gibanjem iona, odnosno **elektrolit**. Napomenimo još i da voda iz slavine nije čista, tj. u njoj su otopljeni razni ioni, stoga u određenoj mjeri provodi struju.

1.3 Napon

Pretpostavimo da prenosimo neki mali pozitivni naboj q prema velikoj hrpi (recimo pozitivnih) mirujućih naboja. Na naboj duž puta djeluje (električna) sila koja će stoga obaviti neki rad W . Prenesemo li duplo veći naboj ($2q$), sila na naboj je duplo veća pa je i samim time i rad duplo veći ($2W$).

Primjerice, ako nam ua prenijeti 1C naboga s jednog mjersta na drugo treba 10J rada, onda za prenijeti 3C treba 30J. Želimo izbaciti ovisnost rada o naboju q koji prenosimo, stoga definiramo **napon** (ili voltažu, V) kao rad električne sile po jedinici prenesenog naboja q :

²Ovdje moramo imati na umu da slobodni elektron u metalu NIJE mala kuglica koje se slobodno pomiče od jednog atoma do drugog. Slobodni elektron je bolje zamisliti kao oblak koji se proteže kroz određeni dio metala. Pri vrlo niskim temperaturama (blizu apsolutne nule), oblaci su vrlo rašireni, tj. protežu se duž gotovo cijelog materijala. Kako dižemo temperaturu prema sobnoj, tako elektronski oblaci postaju manji pa samo zauzimaju mali komadić materijala. Fizičarskim žargonom: pri niskim temperaturama elektronske valne funkcije su ravni valovi (beskonačne protežnosti), no povećanjem temperature nesigurnost u brzini se povećava, a elektronske valne funkcije postaju lokalizirani valni paketići. Ako to sve promatramo s dovoljne udaljenosti, mogli bismo reći da su pri sobnoj temperaturi elektronski oblaci prostorno sitni, odnosno nalik malim točkicama (ali kada zumiramo, trebamo imati na umu da je veličina oblaka koji opisuje slobodni elektron u metalu često veća od samih atoma metala). Vidi <https://physics.stackexchange.com/questions/753536> i https://en.wikipedia.org/wiki/Electronic_band_structure

$$V = \frac{W}{q}$$

Napon (voltažu) mjerimo u **voltima** (V); $V = \frac{J}{C}$. Napon u voltima je samo količina rada u jouleima potrebna da s jednog mjesta na drugo prenesemo 1C naboja. Primjerice, ako nam za prijenos 3C naboja treba 15J, onda za prijenos 1C naboja treba 5J, odnosno napon je 5V. Ideja je da nabojem q ispitujemo ponašanje hrpe naboja. Napon nam onda govori nešto o hrpi (jer smo izbacili ovisnost o q), npr. veća hrpa znači veći rad pa samim time i veći napon.

Primjećujemo da smo voltažu V i njenu mjernu jedinicu V označili istim slovom. Do zabune ne bi trebalo doći jer je jasno da se u izrazu $V = 5V$ lijevo V odnosi na oznaku fizikalne veličine (voltaže), a desno V na znaku mjerne jedinice (volte). Ako baš želite umanjiti mogućnost zabune, voltažu možete označiti i s U , onda npr. $U = 5V$.

Javlja se jedan problem. Ako naboj q prenosimo s točke a na točku b , hoće li rad električne sile ovisiti o putanji po kojoj se naboj prenosi? U kasnijoj sekciji (vidi Coulombov zakon) ćemo pokazati da neće, odnosno pokazat ćemo da je električna sila *konzervativna*. Dakle, **rad električne sile ovisi samo o krajnjim točkama putanje**, stoga možemo govoriti o voltaži *između* točaka a i b , V_{ab} . Želimo li pripaziti na predznak, trebamo imati na umu da, ako obrnemo putanju, rad (pa samim time i napon) mijenja predznak $V_{ab} = -V_{ba}$. Naime, ako je rad od a do b pozitivan (sila gleda u smjeru pomaka), onda je rad od b do a negativan (sila je u suprotnom smjeru od pomaka).

Zaključimo, mirujuća hrpa naboja generira napon (neki broj) između bilo koje dvije točke prostora. Ako dvije točke dijeli napon od 15V, treba uložiti 15J energije da bismo prenijeli 1C naboja između te dvije točke. Primijetimo da je napon između neke točke i nje same 0. Rad ne ovisi o putanji, stoga ako prenesemo 1C naboja po nekoj kružnoj putanji iz točke a natrag u a isto ćemo obaviti 0J rada. Ako na jednom dijelu putanje električna sila pokazuje u smjeru pomaka i tako nam olakšava guranje, onda na nekom drugom dijelu putanje električna sila pokazuje u suprotnom smjeru od pomaka i tako otežava guranje - ukupni rad je 0.

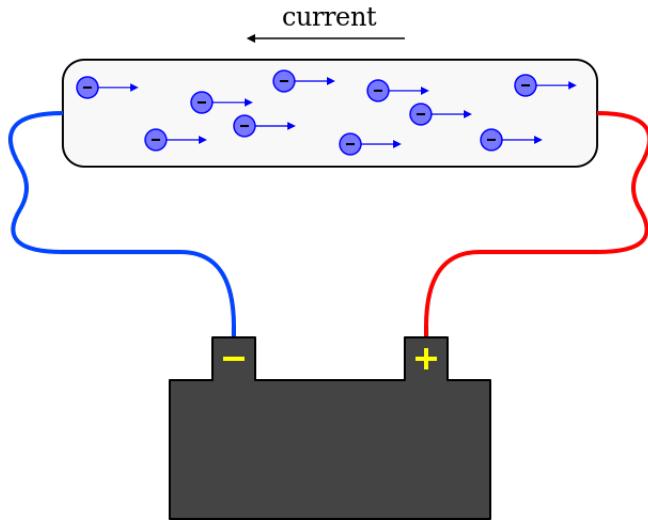
Ako između neke dvije točke postoji napon, to znači da će, ako u blizini zaista imamo neke slobodne naboje (naboje koji se mogu micati), električna

sila obaviti rad. Kako se pozitivni i negativni naboji se privlače, u konačnici će negativni naboji nastojati u tome da se spare s pozitivnim nabojima. Ovo pak znači da se ukupni naboј sada neutralizirao, odnosno da je električna sila na druge naboje manja, tj. da je napon između točaka manji. Dakle, u vodičima (u kojima postoje slobodni naboji), električna sila će djelovati tako da umanji napon između bilo koje dvije točke vodiča.

Postoje još neke korisne veličine koje imaju veze s naponom. **Električna potencijalna energija** naboja q kada se nalazi u točki a (koja je možda blizu nekih drugih naboja) je rad PE koji treba obaviti da bismo naboј q oslobođili od utjecaja drugih naboja. Preciznije, to je rad koji treba obaviti da bismo naboј q iz a odnijeli beskonačno daleko od a (gdje pretpostavljamo nema nikakvih naboja). **Potencijal** ϕ u točki a je napon između a i beskonačnosti, tj. električna potencijalna energija naboja q po jedinici naboja $\phi = \frac{PE}{q}$. Primijetimo da je napon od a do b jednak razlici potencijala: $V_{ab} = \phi(a) - \phi(b)$. Zaista, rad potreban da naboј iz točke a dovedemo do beskonačnosti jednak je radu da naboј od a dovedemo do b , potom od b do beskonačnosti: $\phi(a) = V_{ab} + \phi(b)$.

Ako blizu točke a imamo neku hrpu pozitivnih naboja, onda je potencijal u a pozitivan. Zaista, sila na mali pozitivni naboј q u točki a je odbojna (gleda od hrpe) pa, dok naboј q nosimo od hrpe u beskonačnost, sila djeluje u smjeru pomaka i rad je pozitivan. Slično tome, da smo imali hrpu negativnih naboja, onda bi sila bila privlačna (gledala bi prema hrpi), a rad bi bio negativan. Dakle, potencijal je blizu hrpe negativnih naboja negativan. Jednostavno rečeno, imamo potpuno logičnu (i lako pamtljivu) situaciju da je potencijal negativan u blizini negativnog naboja, pozitivan u blizini pozitivnog naboja te da opada kako se udaljavamo od pozitivnog naboja.

Pozitivni naboј bježi od drugih pozitivnih naboja, stoga želi ići od mjesta višeg na mjesto nižeg potencijala. Ovo pak znači da **struja teče od mjesa višeg potencijala (+) prema mjestu nižeg potencijala (-)**. Negativni naboji pak idu od mjesa nižeg prema mjestu višeg potencijala:



Slika 4: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Voltage_source_with_metallic_conductor.svg.

Kada kroz žicu teče struja, naboji se gibaju jer na njih djeluje električna sila. Dakle, dok naboј prijeđe s jednog kraja žice na drugi, obavljen je nekakav rad, odnosno između krajeva žice je nekakav napon. Matematički, $V = \frac{W}{q}$, tj. $W = Vq$. **Dok god održavamo napon na krajevima žice, struja će teći kroz žicu.** Napon na krajevima žice održavamo **baterijom**. Baterija, doduše, napon ne održava nekom distribucijom naboja, već kemijskim procesima. Ona na svom negativnom terminalu stvara elektrone, a na pozitivnom ih upija. Što struja duže vremena teče, to će se prenijeti više naboja, odnosno obavljeni rad je veći. Dakle, možemo govoriti o snazi - koliko je rada električna sila obavila u jedinici vremena:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{Vq}{t} = V \frac{q}{t} = VI$$

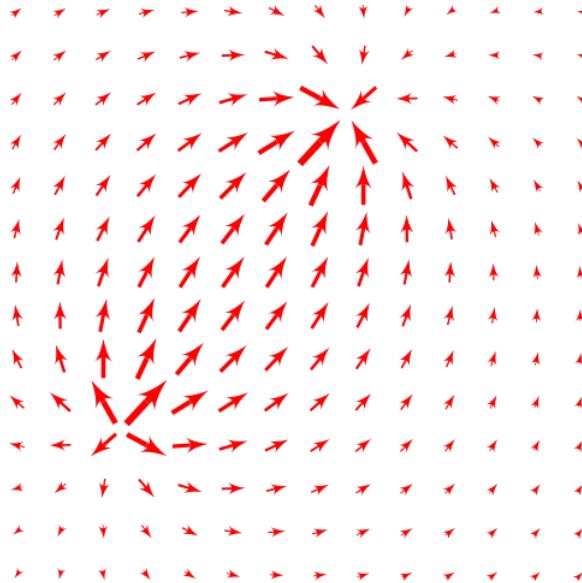
1.4 Električno polje

Među nabojima koji miruju (tj. koji su *statični*) djeluje *elektrostatska sila*. Kada se naboј giba, onda moramo uračunati magnetske efekte i situacija je nešto komplikiranija. Krećemo dakle od hrpe mirujućih naboja i želimo ispitati silu na neki mali mirujući naboј q . Taj naboј jednostavno stavimo

na neko mjesto i zabilježimo silu. Kada ovo napravimo na više lokacija, dobit ćemo kako sila (njen iznos i smjer) ovisi o položaju malog testnog naboja. Primjerice, očekujemo da ukoliko q postavimo dalje od hrpe naboja, sila će biti slabija. Ono što treba imati na umu je da ćemo za duplo veći testni naboju q , imati i duplo veću силу, stoga je bolje u svakoj točki prostora promatrati silu po jedinici testnog naboja q :

$$E = \frac{F}{q}$$

Ovo je **električno polje** koje generira hrpa naboja. Ideja je ista kao za napon - električno polje u točki p predstavlja силу koja će djelovati na naboju od 1C kada ga postavimo u točku p . Električno polje je *vektorsko polje* - svakoj točki prostora je pridružen vektor. Smjer tog vektora je smjer sile na mirujući pozitivni naboju q , a iznos tog vektora je sila po jedinici naboja q . Na negativni naboju je sila, naravno, u suprotnom smjeru od električnog polja (ono što npr. privlači pozitivni naboju odbija negativni).

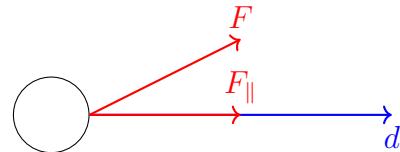


Slika 5: Električno polje za neku konfiguraciju mirujućih naboja. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Campo_el%C3%A9ctrico_de_una_carga_puntual_positiva_y_una_carga_puntual_negativa.svg.

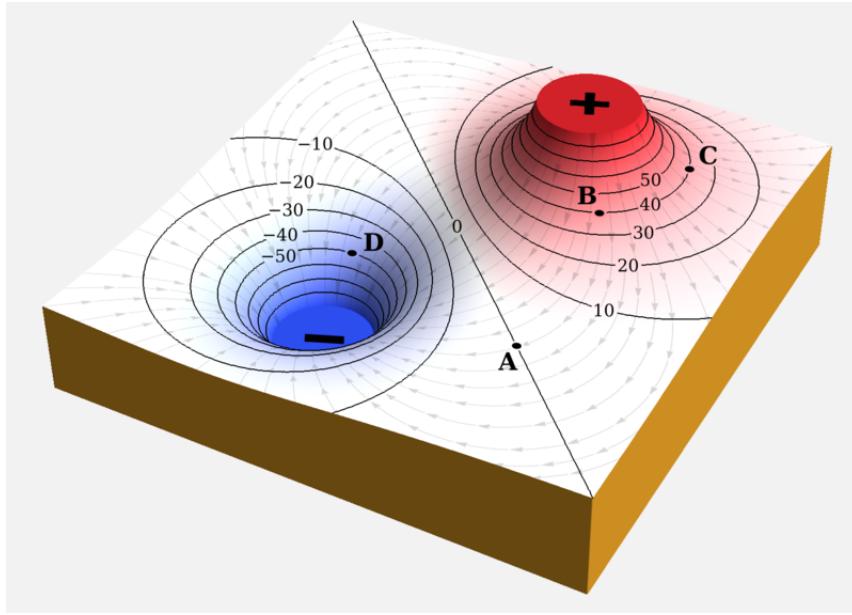
Nema posebne mjerne jedinice za električno polje, koristimo samo $\frac{N}{C}$.

Prisjetimo li se da $J = N \cdot m$, vidimo da $\frac{N}{C} = \frac{J}{mC} = \frac{V}{m}$.

Potencijal ϕ slično tome svakoj točki pridruži broj (skalar), stoga potencijal zovemo *skalarmim poljem*. Interesantno je da **iz potencijala možemo rekonstruirati električno polje**. Naime, pretpostavimo neku kolekciju mirujućih naboja. Ta kolekcija generira potencijal u svakoj točki. Što je veća razlika u potencijalu između dvije susjedne točke, to je veći rad koji treba obaviti po jedinici naboja pa je samim time i veća sila (tj. veće električno polje). Dalje, smjer električnog polja (tj. sile) u točki p je, krenuvši iz p , smjer najveće promjene potencijala. Zaista, ako se iz p pomaknemo u smjeru sile za neku malu udaljenost d , onda je rad (tj. napon) najveći - inače koristimo samo dio sile F_{\parallel} koji gleda duž pomaka d :

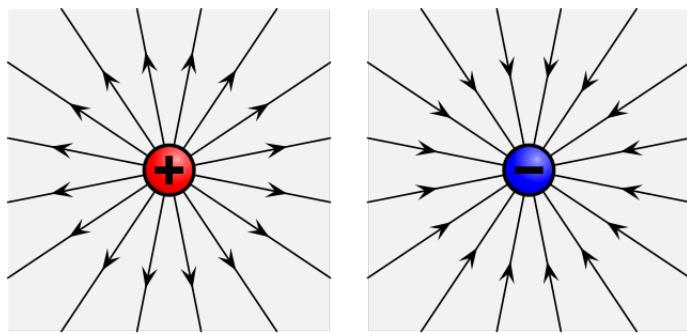


Slikovito, ako zamislimo kolekciju naboja u ravnini, onda iznad svake točke u ravnini nacrtamo vrijednost potencijala u toj točki (negativne potencijale crtamo ispod ravnine). Dakle, dobijemo nekakav reljef - planine i doline. Planine se nalaze iznad točaka u kojima je potencijal jako pozitivan, a doline ispod točaka u kojima je potencijal jako negativan. Smjer najbrže promjene potencijala, tj. smjer električnog polja je smjer u kojem je reljef najstrmiji. To je smjer okomit na linije duž kojih je reljef na istoj visini (izohipse), odnosno duž kojih potencijal ima istu vrijednost.



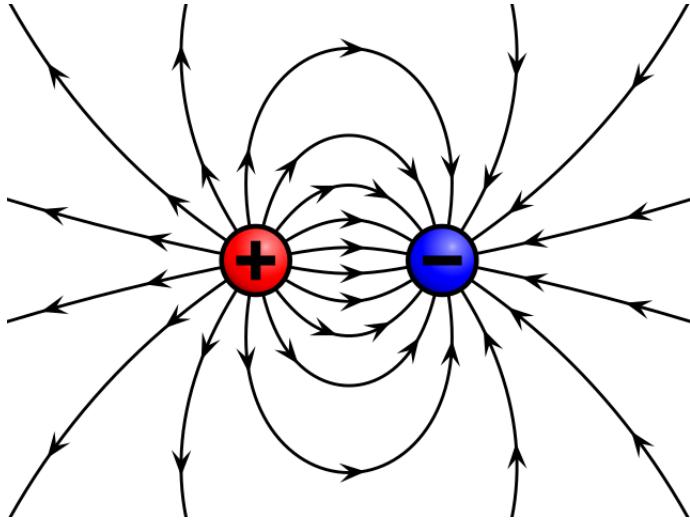
Slika 6: Reljef potencijala za pozitivan i negativan naboj. Tamne linije su izohipse (ista visina, tj. isti potencijal), a svijetle linije koje su okomite na njih predstavljaju smjer električnog polja. Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dipole-potential-3D-values.png>.

Smjer električnog polja u točki p je smjer sile na neki mali pozitivni naboj u p . Dakle pozitivan točkasti naboj stvara el. polje koje pokazuje od njega (jer neki mali pozitivni naboj bjezi od njega), a negativan točkasti naboj stvara polje koje pokazuje prema njemu.



Slika 7: Linije električnog polja izoliranih sitnih naboja. Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fields-of-point-charges.svg>.

Umjesto da crtamo puno strelica koje predstavljaju električno polje u velikom broju prostornih točaka, jednostavnije je nacrtati linije koje prate te strelice - linije električnog polja (eng. *electric field lines*).



Slika 8: Linije električnog polja za sitni pozitivni i negativni naboj. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:VFPt_charges_plus_minus_thumb.svg.

1.5 Dodatak: Coulombov zakon

U diskusiji o naponu i električnom polju smo spomenuli električnu (tj. elektrostatsku) silu, no nismo precizno matematički opisali ponašanje te sile. Za početak, ovo ćemo obaviti samo za najjednostavniji mogući slučaj - dva mirujuća sitna (točkasta) naboja.

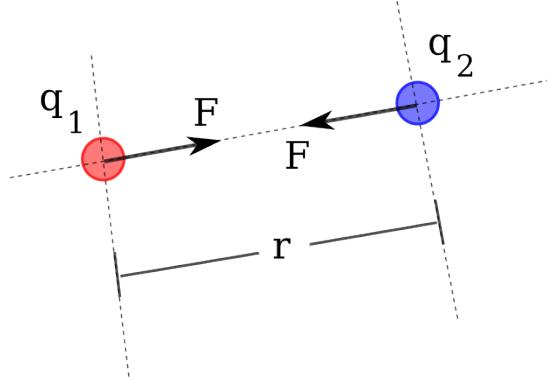
Prvo, naboji međudjeluju jedan na drugoga. Newtonov 3. zakon kaže da sila na prvi naboj zbog drugog mora biti jednak po iznosu, a suprotnog smjera od sile na drugi naboj zbog prvog.

Izraz za silu između dva točkasta naboja q_1 i q_2 koja držimo na udaljenosti r jedno od drugoga je eksperimentalno odredio Coulomb. Dobio je da sila iznosi:

$$F = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Ovdje je k_e konstanta. Kada naboje iskažemo u coulombima (C), udaljenost u metrima (m), a silu u Newtonima (N), onda konstanta iznosi $k_e =$

$8.987551788 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2}$. Što se smjera tiče, sila leži na pravcu koji veže dva naboja.



Slika 9: Međudjelovanje pozitivnog i negativnog točkastog naboja elektrostatskom silom. Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hukum-coulomb.png>.

Iznos jednog od naboja udvostručimo, sila će se isto udvostručiti. Ako pak udvostručimo udaljenost između dva naboja, sila će opasti 4 puta (u nazivniku imamo r^2). Coulombov zakon nam, zapravo, samo daje izraz za električno polje točkastog naboja (najjednostavniji slučaj). Ako želimo pronaći električno polje u točki p koje generira neki naboј Q na udaljenosti r od p , onda promatramo silu na neki testni naboј q :

$$E = \frac{F}{q} = k_e \frac{Q}{r^2}.$$

$E = k_e \frac{Q}{r^2}$ je samo iznos polja. Želimo li naglasiti da je riječ o vektoru, možemo pisati \mathbf{E} ili \vec{E} . Onda $\mathbf{E} = k_e \frac{Q}{r^2} \hat{r}$, gdje je \hat{r} vektor duljine 1 koji pokazuje od naboja Q do točke p . Dakle, \hat{r} je vektor koji pokazuje u pravom smjeru (u smjeru električnog polja), ali nema pravi iznos. Kada \hat{r} (vektor iznosa 1) pomnožimo s $k_e \frac{Q}{r^2}$, dobijemo vektor koji ima isti iznos i isti smjer kao električno polje.

Što ako želimo pronaći električno polje neka dva točkasta naboja. U tom slučaju promatramo kakvo polje stvara svaki naboј u izolaciji (kada nema drugog naboja). Preciznije, ako prvi naboј u prostornoj točki p stvara polje

E_1 , a drugi naboј polje E_2 , onda ta dva naboјa zajedno u točki p stvaraju polje koje je vektorski zbroj ta dva:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = k_e \frac{Q_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + k_e \frac{Q_2}{r_2^2} \hat{r}_2,$$

gdje je r_1 udaljenost naboјa Q_1 od točke p , a \hat{r}_1 vektor duljine 1 koji pokazuje od naboјa Q_1 do točke p (slično i za r_2 i \hat{r}_2). Sila na naboј q u točki p je dana kao $\mathbf{F} = q\mathbf{E} = q\mathbf{E}_1 + q\mathbf{E}_2 = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, gdje je $\mathbf{F}_1 = k_e \frac{qQ_1}{r_1^2} \hat{r}_1$ sila kojom prvi naboј djeluje na q (kada nema drugog naboјa), a $\mathbf{F}_2 = k_e \frac{qQ_2}{r_2^2} \hat{r}_2$ sila kojom drugi djeluje na q (kada nema prvog naboјa). Naravno, ako imamo više naboјa, samo zbrojimo električno polje svakog pojedinačnog naboјa. Ovo je tzv. princip *superpozicije*.

Postavimo neki točkasti naboј Q u ishodište $(0, 0)$. Sada nije teško vidjeti da **rad elektrostatske sile na neki mali testni naboј q ne ovisi o putanji**, već samo o krajnjim točkama. Zaista, rad ovisi samo o dijelu sile koji je u smjeru pomaka, stoga na rad utječe samo radijalni pomaci (oni koji idu direktno prema naboјu Q , tj. koji leže na pravcu koji prolazi kroz ishodište). Znači da rad ovisi samo o tome koliko smo se radijalno pomaknuli, odnosno samo o početnoj i konačnoj udaljenosti od ishodišta.

U općem slučaju, tj. kada imamo veći broj naboјa, rad isto ne ovisi o putanji. Ovo slijedi iz principa superpozicije. Zaista, ako rad sile \mathbf{F}_1 (zbog prvog naboјa) označimo s W_1 , sile \mathbf{F}_2 (zbog drugog naboјa) s W_2 , itd. onda je rad ukupne sile $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 \dots$ samo $W_1 + W_2 \dots$. Kako nijedan $W_1, W_2 \dots$ ne ovisi o putanji, tako ni ukupni rad $W_1 + W_2 \dots$ ne ovisi o putanji.

Električna potencijalna energija naboјa q kada se nalazi na udaljenosti r od naboјa Q je dana izrazom (za izvod vidi napredno o radu i energiji):

$$PE = k_e \frac{Qq}{r}.$$

Dakle, potencijal točkastog naboјa Q je

$$\phi = \frac{PE}{q} = k_e \frac{Q}{r}.$$

Kada imamo više naboјa, po principu superpozicije, potencijal je dan izrazom:

$$\phi = k_e \frac{q_1}{r_1} + k_e \frac{q_2}{r_2} + \dots$$

2 Magnetizam

2.1 Magneti

Od antike je poznato da određene željezne rude (magnetit) privlače metalne objekte. Ovaj efekt je nazvan *magnetizam*, a kamen koji ima takvo ponašanje *magnet*. Dva magneta se mogu privlačiti ili odbijati ovisno o tome kako su okrenuti. Otkriveno je i da se svojstvo magnetičnosti može trljanjem prebaciti na druge predmete od željeza.

Namagnetiziramo li iglu i objesimo je o tanku nit, ona će se okrenuti uвijek u istom smjeru - put sjevera. Iz ovog razloga, strana magneta koja pokazuje put sjevera je nazvana sjeverni pol magneta (eng. *north*, N), a suprotna strana je nazvana južni pol (eng. *south*, S). Magnetska sila kojom magnet djeluje je najizraženija na polovima (privlačnost / odbijanje je slabije između polova).

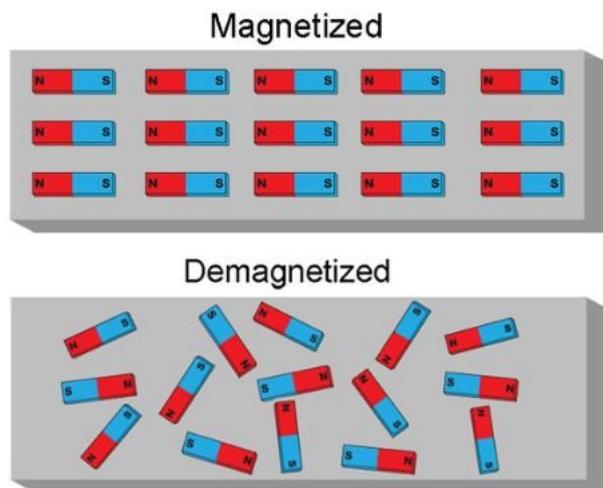


Slika 10: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Bar_magnet.jpg.

Isti polovi dva različita magneta će se odbijati, a suprotni privlačiti. Po sljedica ovakvog nazivlja je da zapravo južni magnetski pol Zemlje privlači sjeverni pol magneta pa se južni pol Zemlje (kao magneta) zapravo nalazi na sjeveru.

Odmah ćemo reći da se magnetski polovi ne javljaju na isti način kao električni naboj. Dakle, sjeverni pol nije nakupina "sjevernog magnetskog

naboja” kako bi se možda dalo naivno pretpostaviti. Magnetski polovi uvijek dolaze u parovima i uvijek su prisutni na magnetu. Dakle, ako magnet prepolovimo popola, i njegove polovice će imati dva pola. Da bismo ovo shvatili, moramo malo objasniti zašto su magneti uopće magnetični. Zapravo, magnetizam potječe od samih atoma (ili još preciznije od spina elektrona). Atomi materijala koji mogu postati magnetični (npr. željezo), se sami ponašaju kao mali magnetičci. Materijal je namagnetiziran kada su ti magnetičci postavljeni u istom smjeru:



Slika 11: Izvor: <https://bemagnet.com/how-long-does-a-magnet-last/>

Ovo možemo postići npr. tako da u jednom smjeru povlačimo magnet po željeznoj igli. Ako sada namagnetizirani materijal prepolovimo, vidimo da će obje polovice imati usmjerene atome, tj. imat će dva pola. Ova slika također objašnjava zašto magneti gube magnetičnost na visokim temperaturama - onda zbog termalnog gibanja smjerovi tih malih magneta (atoma) postanu nasumični.

2.2 Magnetsko djelovanje struje

1820. godine Hans Christian Ørsted je otkrio da se magnetska igla u blizini žice kroz koju teče struja pomiče. Kada kroz žicu pustimo struju u suprotnom smjeru, igla kompasa se okreće u drugu stranu. Vidi <https://www.youtube.com/watch?v=bjRAfNSe1E0>. Iste godine su Biot i Savart otkrili da je sila na

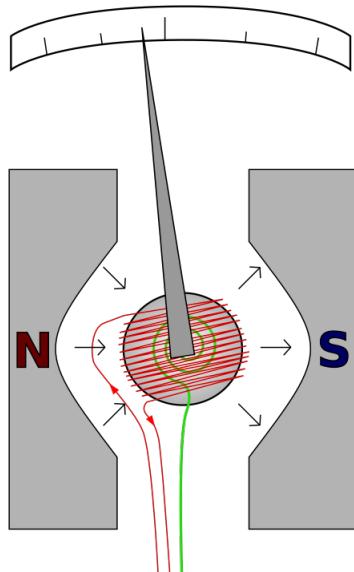
magnet tim veća što je struja koja prolazi kroz žicu veća. Također, sila je manja što je udaljenost od žice veća.

Dakle, **žica kroz koju prolazi struja se ponaša slično kao magnet**. Iako, kao što ćemo u sljedećoj sekcijsi vidjeti, ravna žica **nema polove** u uobičajenom smislu. Kasnije je André-Marie Ampère eksperimentima potvrdio da se dvije žice kroz koje teče struja privlače ili odbijaju ovisno o tome kako su žice postavljene (tj. u kojem smjeru kroz žice teče struja).

Struja su samo naboji u gibanju, stoga nije iznenađujuće i da se pojedinačni naboj u gibanju ponaša kao magnet (da na njega djeluje magnetska sila).

Izvorno (do 2019.) je amper bio definiran na sljedeći način. Imamo dvije duge ravne paralelne žice postavljene na jedan metar međusobne udaljenosti (u vakuumu). Što imamo duže žice to je veća ukupna sila na žicu, stoga moramo promatrati silu po metru duljine. Kada na žice djeluje sila od $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ po metru duljine, onda kroz žice prolazi struja od 1A. 1C je bio definiran kao količina naboja koja prođe žicom u 1s kada istom žicom teče struja od 1A.

Koristeći ovu definiciju ljudi su osmislili uređaj za mjerjenje struje - **ampmetar** (ili *galvanometar*)



Slika 12: Crveno je žica koja nosi struju koju mjerimo. Zeleno je opruga koja vraća kazaljku u početni položaj. Oko žice se nalazi trajni magnet koji djeluje na žicu kada kroz nju prolazi struja i tako okreće kazaljku. Mjeranjem sile na kazaljku (tj. na oprugu) zapravo mjerimo jačinu struje, odnosno ampere. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galvanometer_diagram.svg.

Koristeći magnetsko djelovanje struje, možemo osmisliti **elektromagnet**, tj. magnet čiju jačinu možemo kontrolirati jačinom struje. Za početak, magnetsko djelovanje ravne žice je "razvodnjeno", tj. slabije nego bi moglo biti. Magnetsko djelovanje žice možemo "fokusirati" tako da je zakrivimo u petlju (onda su prethodno udaljeni dijelovi žice sada međusobno blizu i djelovanje je unutar petlje jače³). Učinak možemo još više pojačati tako da naslažemo više petlja jednu na drugu, odnosno zakrivimo žicu u **zavojnicu**.

³Unutar petlje pojačavamo *magnetsko polje*. Ovo ćemo objasniti u sljedećoj sekciji.



Slika 13: Zavojnica od bakrene žice. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Copper_coil_with_six_turns.png?uselang=bg.

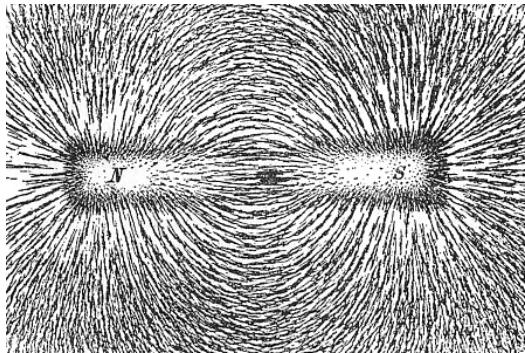
Što su petlje gušće razmještene u zavojnici, odnosno što imamo više petlji po jedinici duljine, to je magnetski učinak jači. Stavimo li u zavojnicu neku željeznu šipku (tzv. željeznu jezgru), željezo će se namagnetizirati i učinak će biti još jači. Pod "elektromagnet" obično mislimo na nekakvu zavojnicu sa željeznom jezgrom.



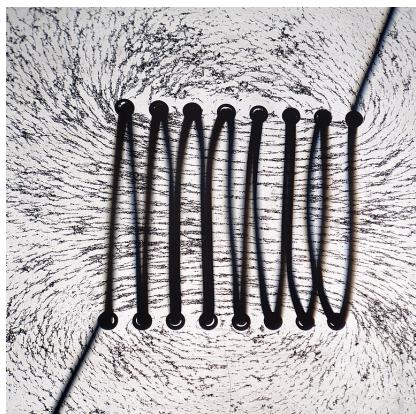
Slika 14: Zavojnica sa željeznom jezgrom. Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Solenoid-with-core.JPG>.

2.3 Magnetsko polje

Isto kao i električno polje, ideja je da vodič kroz koji prolazi struja (ili komad namagnetiziranog metala) oko sebe stvori u svakoj točki magnetsko polje. Iznos toga polja dobijemo iz sile. Situacija je nešto komplikiranija od električnog polja jer se magnetska sila na naboj javlja samo onda kada se naboj kreće (kada miruje onda na naboj djeluje samo električna sila). Doduše, obrije polja možemo dobiti pomoću željezne piljevine - ona će se posložiti duž magnetskog polja (svaki komadić željeza se ponaša kao mali magnetić):

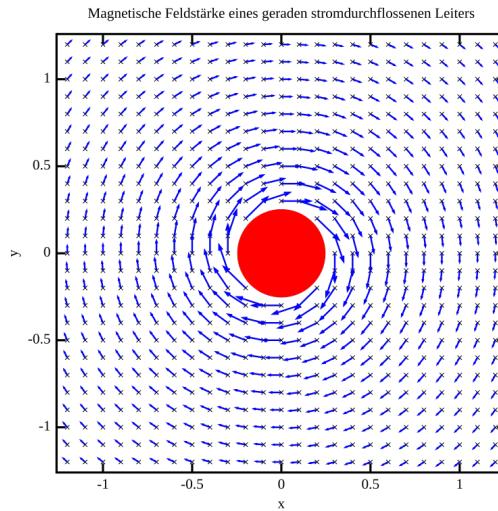


Slika 15: Željezna piljevina daje obris magnetskog polja trajnog magneta.
Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnet0873.jpg>.



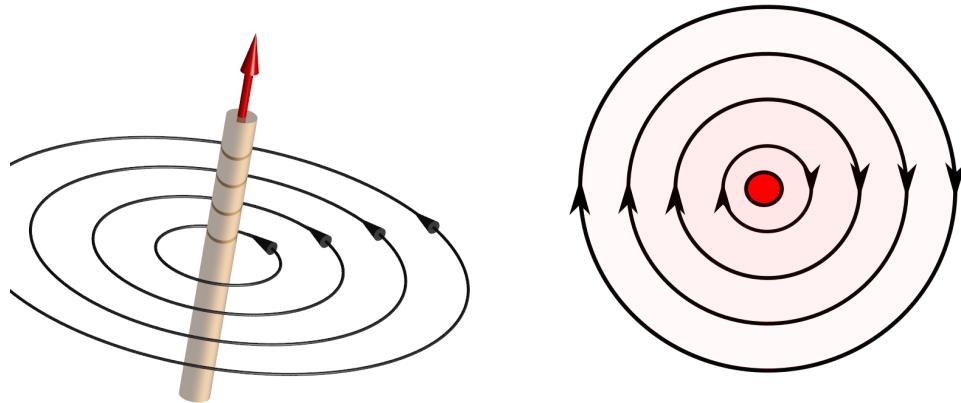
Slika 16: Željezna piljevina daje obris magnetskog polja zavojnice.
Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnetic_field_around_solenoid.jpg.

Matematički, magnetsko polje je vektorsko polje (kao i električno polje). Stoga, u svakoj točki oko vodiča kojim teče struja imamo strelicu koja ima svoju veličinu i smjer:



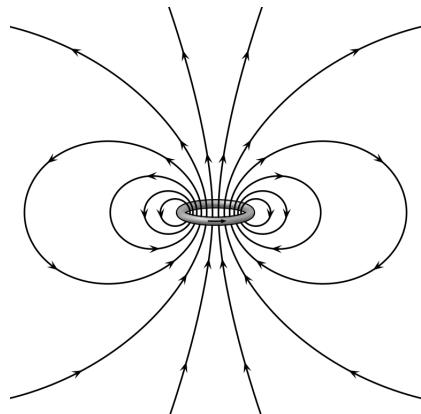
Slika 17: Magnetsko polje oko ravne žice. Struja (crvena centralna točka) ulazi u stranicu. Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnetische-Feldstaerke.svg>.

Vidimo da se magnetsko polje ravne žice razlikuje od trajnog magneta. Polje trajnog magneta "izvire" s jednog pola (N) i ulazi u "drugi" (S), no u slučaju ravne žice nemamo takvo ponašanje (polje samo "kruži" oko žice). Magnetsko polje možemo prikazati i linijama koje prate vektore (tzv. linije magnetskog polja; eng. *magnetic field lines*). Ovako je slika urednija:



Slika 18: Linije koje prate magnetsko polje oko ravne žice. Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MagneticFieldAroundCurrent.png> i <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wire2.svg>.

Kada zakrivimo ravnu žicu u petlju dobijemo sljedeće polje:

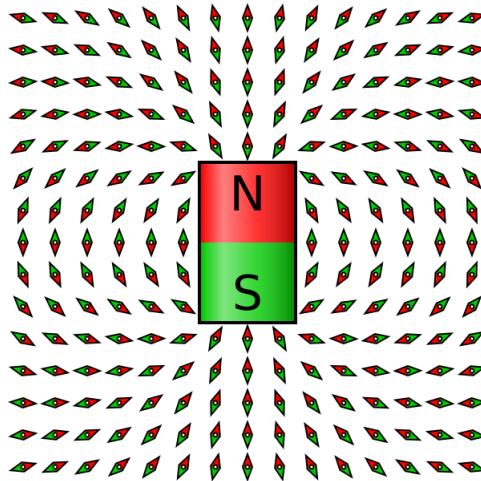


Slika 19: Magnetsko polje petlje. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dipole_magnetic-ring.svg.

Petlja je već sličnija trajnom magnetu - magnetsko polje ulazi s jedne strane i izlazi iz druge (pa bismo mogli reći da ona ima polove). Zapravo, ključna stvar je u tome da petlja, kao i trajni magnet (npr. kompas), ima **magnetski moment** koji je zakreće kada se ona nađe u nekom vanjskom

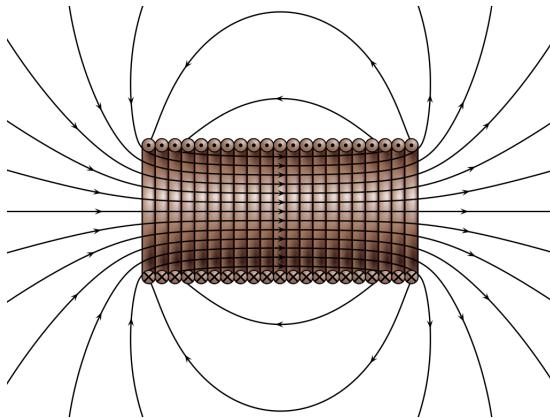
magnetskom polju. Ravna žica, primjerice, nema magnetski moment - nju vanjsko magnetsko polje samo gura, ne zakreće.

Kompas se zakreće dok mu se smjer ne poklopi s vanjskim magnetskim poljem (obično magnetskim poljem Zemlje). Preciznije, magnet se okreće dok mu se vektor magnetskog momента (koji pokazuje od S do N) ne poklopi sa smjerom vanjskog magnetskog polja.



Slika 20: Mali kompasi se usmjeravaju duž magnetskog polja trajnog magneta. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Magnet_compasses.svg.

Kako je magnetsko polje ispod ravne žice kroz koju prolazi struja okomito na smjer žice, kompas će se okrenuti okomito na žicu u Ørstedovom pokusu. Kada naslažemo više petlji dobijemo zavojnicu:



Slika 21: Magnetsko polje zavojnice. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:VFPt_cylindrical_tightly-wound_coil.svg.

Ako u zavojnicu stavimo željeznu šipku, magnetsko polje unutar zavojnice će je namagnetizirati - dobijemo elektromagnet.

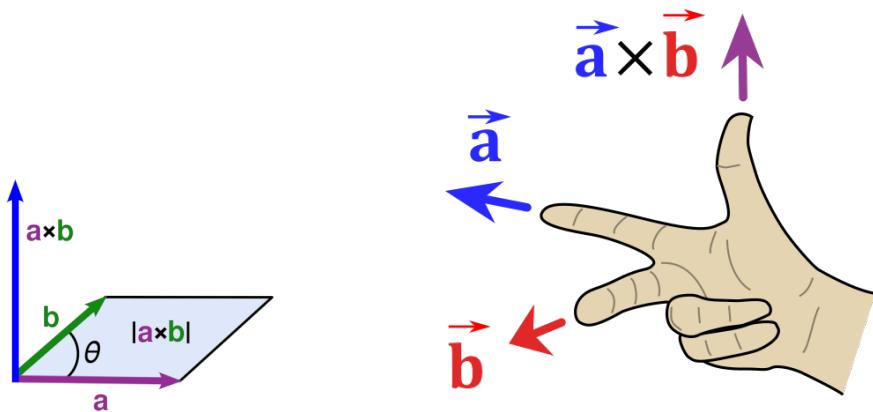
2.4 Dodatak: Magnetsko polje (definicija)

Nakon svih ovih primjera valjalo bi srediti ključnu stvar - dati preciznu definiciju magnetskog polja. Kako za danu točku prostora odrediti smjer i iznos magnetskog polja u toj točki? Ideja je sljedeća. Na naboј koji se giba može djelovati i magnetska i električna sila. Dakle, prvo izmjerimo električnu silu pomoću mirujućih naboja. Sada izmjerimo silu na naboј u gibanju i oduzmemo izmjerenu električnu silu - ovo je magnetska sila na naboј u gibanju. Pretpostavimo privremeno radi jednostavnosti da nema električnog polja, tj. da na naboј samo djeluje magnetska sila.

U tom slučaju je primijećeno da magnetska sila zakreće naboј u gibanju. Preciznije, primijećeno je da magnetska sila uvijek djeluje okomito na brzinu naboja. Nadalje, sama sila (u danoj točki) je uvijek okomita s obzirom na neki fiksni smjer te iznos sile ovisi ne o punom iznosu brzine, već samo o komponenti brzine koja gleda duž tog smjera. Taj fiksni smjer na koji magnetska sila okomita uzimamo da je smjer magnetskog polja B . Na iznos magnetske sile, stoga, utječe komponenta brzine naboja okomita na smjer magnetskog polja v_{\perp} i, naravno, iznos samog naboja (kao i za električno polje). Dakle, iznos magnetskog polja definiramo kao silu po jedinici naboja i brzine $B = \frac{F}{qv_{\perp}}$, tj. sila je onda $F = qBv_{\perp}$. Osnovna mjerna jedinica za

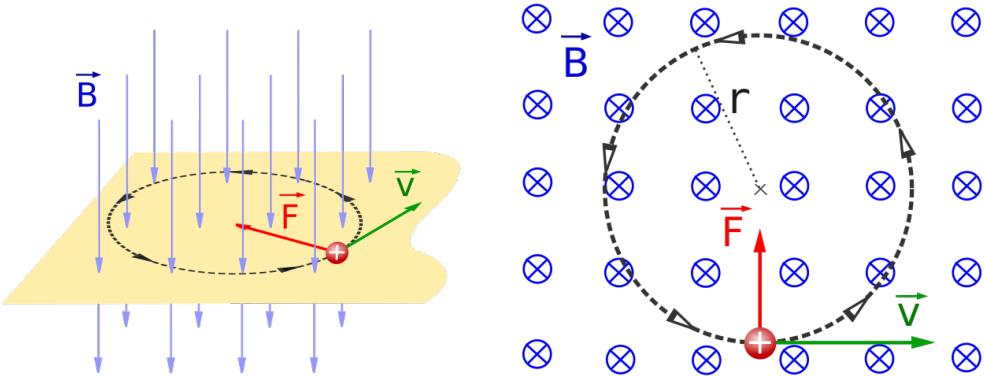
magnetsko polje je **tesla** (T) $1\text{T} = \frac{\text{N}}{\text{Cm/s}}$

Prisjetimo se (iz gradiva o momentu sile) vektorskog umnoška vektora **a** i **b** (što pišemo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$). Njegov iznos je $a_{\perp}b$, gdje je a_{\perp} iznos komponente vektora a koja je okomita na b . Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je okomit i na **a** i na **b** (dakle na ravninu koja sadrži **a** i **b**), a smjer mu je dan tzv. pravilom desne ruke:



Slika 22: Pravilo desne ruke. Postavimo se tako da je ravnina na kojoj leže vektori **a** i **b** horizontalna. Promotrimo manji kut između vektora **a** i **b**, odnosno neki $\theta < 180^\circ$. Ako krenuvši od prvog vektora u umnošku $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ (dakle **a**) ovaj kut prebrišemo u pozitivnom smjeru \circlearrowright , onda je umnožak prema gore (kao na slici); u suprotnom je prema dolje. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cross_product_parallelgram.svg i https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Right_hand_rule_cross_product.svg.

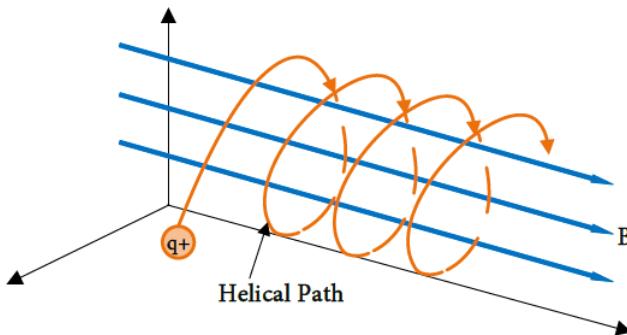
Dakle, vektor magnetskog polja možemo definirati tako da je sila na naboj q koji se giba brzinom **v** dana kao $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Pravilo desne ruke u ovom slučaju daje da magnetsko polje koje zakreće pozitivni naboj u pozitivnom smjeru \circlearrowright (suprotno od kazaljke na satu) gleda prema dolje:



Slika 23: Lorentzova sila na pozitivni naboj. Na desnoj slici magnetsko polje ulazi u stranicu (gledamo odozgo). Ovo je naznačeno tako što je nacrtan rep strelice \otimes (gledamo strelicu odstraga); da je polje kojim slučajem izlazilo iz papira crtali bismo prednji dio strelice (oštri vrh) \odot (gledamo strelicu sprijeda). Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FuerzaCentripetaLorentzP.svg> i <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:FuerzaCentripetaLorentzP2.svg>.

Magnetsko polje će negativni naboj zakrenuti u suprotnom smjeru (sila ima suprotni predznak). Ovo je sve obuhvaćeno postojećom definicijom $\mathbf{F} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ jer je sada q negativan.

Kada se naboj kreće u smjeru magnetskog polja, magnetska sila je 0 (jer je iznos komponente brzine koja je okomita na polje $v_{\perp} = 0$). Ako naboj pak ima komponentu brzine u smjeru magnetskog polja (i komponentu koja je okomita na magnetsko polje), onda magnetska sila neće utjecati na komponentu duž polja i naboj će se gibati po spiralnoj putanji.



Slika 24: Spiralna putanja nabijene čestice u magnetском polju. Izvor: https://www.researchgate.net/figure/Helical-path-positively-charged-particle-in-a-magnetic-field-7-Figure-42-E-xB-Drifig5_343385818.

Općenito, na naboju u gibanju može djelovati i električna sila $q\mathbf{E}$. Magnetska sila je u tom slučaju samo ukupna sila \mathbf{F} minus električna, tj. ukupna sila je samo zbroj električne i magnetske: $\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Primijetimo da je smjer magnetske sile uvijek okomit na smjer brzine čestice, što je (barem za neko kratko vrijeme) smjer pomaka. Stoga, **magnetska sila NE obavlja rad**. Rad elektromagnetske sile \mathbf{F} je uvijek jednak radu električne sile $q\mathbf{E}$.

2.5 Dodatak: Amperov zakon

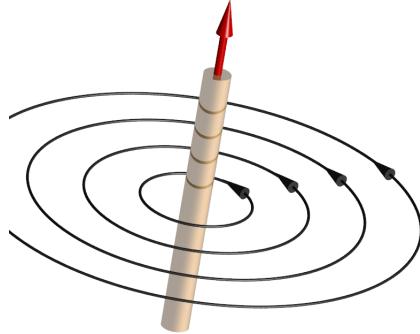
Definirali smo magnetsko polje, ali nismo dali zakon kojim možemo odrediti kako struja generira magnetsko polje (slično kao što Coulombov zakon objašnjava kako točkasti naboј generira električno polje). Ovo ćemo objasniti samo za najjednostavniji slučaj - beskonačnu ravnu žicu kroz koju prolazi jednolika struja (nemamo nakupljanja naboja u žici).

U tom slučaju su eksperimenti (Amper, Biot i Savart) pokazali da je iznos magnetskog polja

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Ovdje je $\frac{\mu_0}{2\pi}$ obična konstanta - količnik $\mu_0 = 1.256637 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{A}^2}$ (tzv. permeabilnost vakuma) i 2π (opseg jedinične kružnice). Ovu konstantu je uobičajeno pisati u ovom obliku jer onda jedan općenitiji zakon poprima ljepši

oblik, tj. uključuje samo μ_0 (vidi napredno o Maxwellovim jednadžbama). Magnetsko polje je pritom postavljeno kružno oko žice:



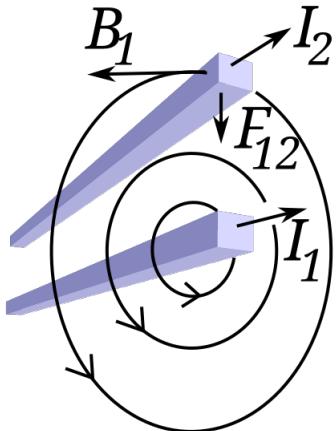
Slika 25: Smjer magnetskog polja ravne žice. Ako struja ide prema gore, magnetsko polje kruži u pozitivnom smjeru \circlearrowleft .

Sada nas zanima sila koja djeluje na ravnu žicu kada ju stavimo u neko vanjsko magnetsko polje. Ako kroz žicu u nekom kratkom vremenu t prođe q naboja i ako se ti naboji pomaknu za neku malu udaljenost l , onda im je brzina $v = \frac{l}{t}$, stoga vidimo da $qv = q\frac{l}{t} = l\frac{q}{t} = lI$ ⁴ Stoga, za komadić žice duljine l u magnetskom polju imamo $\mathbf{F} = qv \times \mathbf{B} = I(\mathbf{l} \times \mathbf{B})$, gdje vektor \mathbf{l} gleda duž žice (u smjeru struje). Ovo vrijedi samo kada je magnetsko polje \mathbf{B} konstantno duž čitave duljine l (ili kada je duljina l dovoljno malena). Ukupnu силу за žicu veće duljine dobijemo tako da žicu podijelimo na sitne komadiće l_1, l_2, \dots izračunamo $\mathbf{F}_1 = I(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{B}_1)$, $\mathbf{F}_2 = I(\mathbf{l}_2 \times \mathbf{B}_2), \dots$ za svaki komadić te zbrojimo sve sile.

Uzmimo beskonačno dugu ravnu žicu i pustimo kroz nju struju. Ona stvara svoje magnetsko polje. Sada paralelno s prvoj žicom u njeno magnetsko polje stavimo drugu žicu kroz koju također teče struja. Na tu će žicu onda djelovati magnetska sila (ali, naravno, i na prvu žicu djeluje sila istog iznosa samo suprotnog predznaka jer i druga žica stvara svoje magnetsko polje). Smjer struje je samo smjer brzine pozitivnog naboja. Ako kroz obje

⁴Isti rezultat možemo dobiti i na sljedeći način. Sjetimo se da su struja i brzina vezane preko pojma gustoće struje. Ako promatramo beskonačnu tanku žicu, onda je $\rho = \frac{q}{l}$ gustoća naboja (po jedinici duljine). Gustoća struje je u ovom slučaju isto što i struja jer je presjek beskonačno tanke žice točka (pa samo brojimo naboje koji prolaze kroz točku). Dakle $I = j = \rho v = \frac{q}{l} v$, odnosno $Il = qv$.

žice struja teče u istom smjeru, onda pravilo desne ruke daje da sila kojom žice međudjeluju mora biti privlačna:



Slika 26: Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:MagneticWireAttraction.svg>.

Da su struje bile u suprotnim smjerovima, sila bi među žicama bila odbojna. Kako su struja (brzina) i magnetsko polje međusobno okomiti, iznos sile na drugu žicu je samo $F = qvB = I_2 l B$. Ovdje je $B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$ magnetsko polje koje stvara prva žica, stoga je sila na neki dio žice duljine l dana izrazom:

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi} l \frac{I_1 I_2}{r}.$$

Ovo se obično zove Amperov zakon.

3 Dodatak: Baterije

Galvani je 1780-ih godina zapazio da se, kada metalnom žicom spoji živac žablje noge s njenim mišićem, žablja nogu trza. Ovo ga je dovelo do ideje da živci i mišići živih bića stvaraju svoj "životinjski elektricitet" koji ostaje u tijelu i nakon smrti.

S vremenom je ušao u raspravu s jednim drugim talijanskim znanstvenikom - Alessandrom Voltom. Volta je zapazio da korištenjem dviju žica od

različitih metala dobije snažniji efekt, što ga je navelo na mišljenje da je metalna žica ključni dio eksperimenta i da postoji samo jedan tip elektriciteta (koji je prisutan i u živim bićima i u neživim tvarima).

U pozadini se nalazilo uzbudljivo pitanje: možemo li uspostaviti kretanje ljudskog tijela i nakon smrti? Ili još eksplicitnije - je li elektricitet možda ključ besmrtnosti?⁵

Danas znamo da je Volta bio uglavnom u pravu i da je na oba pitanja odgovor *ne*. Ipak, istina je da životinje mogu stvoriti vlastiti elektricitet i da za Galvanijev eksperiment nisu uopće potrebne metalne žice (Galvani je ovo demonstrirao spajanjem dvaju živaca bez korištenja metalnih žica).

Za nas nije toliko bitna debata, koliko je bitan uređaj koji je Volta izumio da bi dokazao svoju teoriju - baterija. Baterija kemijskim procesima održava napon (razliku u potencijalu) između svoja dva pola i tako stvara gibanje naboja ("elektricitet", tj. struju) kroz žicu kada njom spojimo polove. Dakle, baterije pretvaraju kemijsku energiju u električnu.

Općenito govoreći (ne nužno samo za baterijel), **anoda** je pol uređaja u koji struja ulazi, a **katoda** je pol uređaja iz kojeg struja izlazi. U slučaju baterije imamo dva pola: pozitivni + (na višem potencijalu) i negativni – (na nižem potencijalu). Struja (tok pozitivnih naboja) ide od + prema –, tj. izlazi iz + pola, a ulazi u – pol. Dakle, za baterije, + pol je katoda, a – pol je anoda. Katoda nije uvijek pozitivan pol (npr. u vakuumskim cijevima je katoda negativna).

Nije očito, doduše, *kako* baterija održava voltažu - konkretno moramo objasniti 2 stvari:

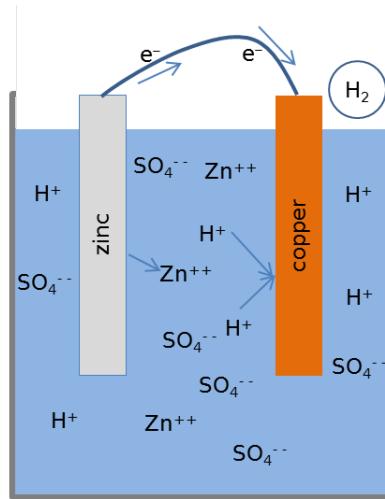
1. Odakle dolaze elektroni koji idu od – pola prema + polu baterije?
2. Ako elektroni već idu od – (niži potencijal) prema + (viši potencijal) polu baterije, onda očekujemo da se nakuplja negativni naboј na + polu, tj. da se pozitivni potencijal + pola umanjuje (pa samim time i smanjuje voltažu između polova)

Trebalo bi stoga možda malo zaći u kemiju i objasniti procese koji omogućuju funkciranje baterije.

Za početak, pretpostavimo da imamo dvije pločice od različitih metala - npr. cink (Zn) i bakar (Cu). Ako sada te dvije pločice zabijemo u neki

⁵Ovo pitanje i vezane debate su oko 1816. godine inspirirale mladu Mary Shelly da napiše *Frankensteina*.

elektrolit (npr. otopinu soli ili limun ili krumpir ili, da, žabu) i spojimo ih žicom, primijetit ćemo da kroz žicu teče struja. Dobili smo najjednostavniju bateriju, tzv. Galvanski članak (eng. *Galvanic cell*).



Slika 27: Galvanski članak. Elektrolit je otopina sumporne kiseline H_2SO_4 . Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ZnCuVoltaicCell.svg>

Ako pažljivo promotrimo pločice nakon nekog vremena, primijetit ćemo da se Zn pločica djelomično otopila (ostavila je Zn ione u elektrolitu), a blizu bakrene se javljaju mjehurići - oslobađa se plin vodik H_2 . Dakle, imamo otapanje pločice cinka, što oslobađa elektrone: $\text{Zn} \longrightarrow \text{Zn}^{2+} + 2\text{e}^-$ te stvaranje vodika blizu bakrene pločice, što upija elektrone: $2\text{H}^+ + 2\text{e}^- \longrightarrow 2\text{H}_2$.

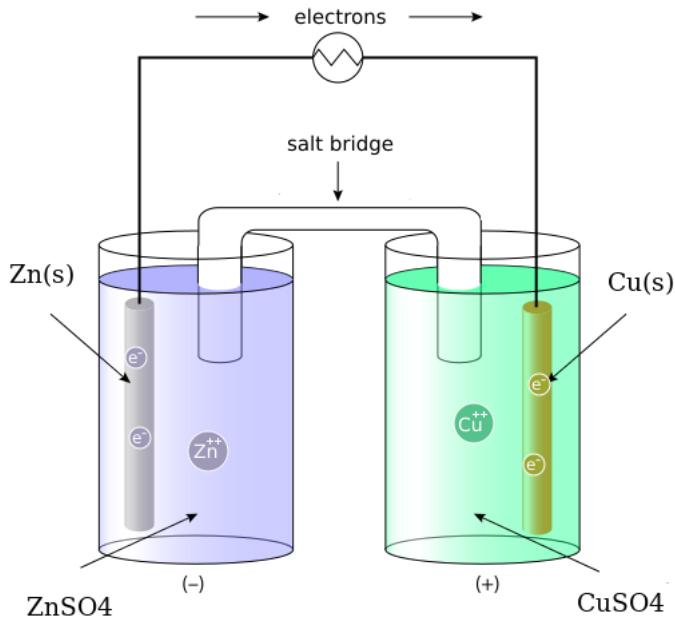
Dakle, energetski je povoljnije da se cink otopi u elektrolit i preda svoje elektrone vodiku. Ove kemijske reakcije u bateriji stvaraju napon.

Vidimo da u okolini cinkove anode elektrolit postaje pozitivniji zbog novonastalih cinkovih iona, a u blizini katode elektrolit postaje manje pozitivan zbog odlaska vodikovih iona. Ostali naboji u elektrolitu se razmjestite na način da ponovno uspostave ravnotežu naboja.

Napomenimo da je za elektrolit poželjno koristiti kiseline (npr. ocat ili limun ili H_2SO_4). To je zato što u otopini kiseline ima više vodikovih iona, što pospješuje oslobađanje plina vodika.

Voltina baterija ima jedan bitan nedostatak - mjehurići vodika koji se stvaraju na bakrenoj katodi djeluju kao izolator (i tako onemogućuju drugim

ionima vodika da lako dođu do bakra i tako upiju elektrone). John Frederic Daniell je ovo 1836. riješio tako da je cink i bakar stavio u dva različita elektrolita:



Slika 28: Daniellov članak. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Galvanic_cell_labeled.svg

Sada imamo sljedeće reakcije. Na anodi cink otpušta elektrone i otapa se u otopinu cinkovog sulfata: $\text{Zn}_{(\text{s})} \longrightarrow \text{Zn}_{(\text{aq})}^{2+} + 2\text{e}^-$. Na katodi ioni bakra iz otopine bakrovog sulfata upijaju elektrone i talože se na bakrenu katodu: $\text{Cu}_{(\text{aq})}^{++} + 2\text{e}^- \longrightarrow \text{Cu}_{(\text{s})}$.

Problem s vodikovim mjehurićima je riješen, ali sada imamo drugi problem: elektrolit u kojem je cink postaje polako pozitivan (povećava se broj cinkovih iona), a onaj u kojem je bakar postaje polako negativan (smanjuje se broj bakrovih iona). Da bismo uspostavili ravnotežu naboja moramo povezati dva elektrolita mostom koji sadrži ione soli koji će onda po potrebi "procuriti" u jedan ili drugi elektrolit. Vidi animaciju: https://www.youtube.com/watch?v=qpFC_Ecu_yQ

Moderne litij-ionske baterije (koje imate u laptopima, mobitelima, itd.) su malo drukčije. Postoji više varijacija, ali sve na neki način koriste (lo

and behold) litijeve ione. Tradicionalno, anoda je grafit, a katoda je obično kobaltov oksid. Ove materijale možemo shatiti kao rešetke u koje spremamo litijeve ione. Kada je baterija puna, litijevi ioni se nalaze spremljeni na anodi (u grafitu). Kako se baterija troši, litijevi ioni se otpuštaju s anode i tako stvaraju elektrone koji prolaze ostatkom strujnog kruga prema katodi. S druge strane, isti litijevi ioni prolaze nekim poroznim sredstvom (elektrolit) koji dijeli anodu i katodu te se spremaju u kobaltov oksid. Na ovaj način stvaramo elektrone i održavamo neutralnost naboja. Ovaj proces se može okrenuti, tj. baterija se može puniti (onda ulažemo energiju da vratimo litijeve ione na anodu). Baterija gubi na životu kako je koristimo jer litij s vremenom može reagirati s elektrolitom. Vidi animaciju <https://www.youtube.com/watch?v=G5McJw4KkG8>

Napomenimo da je voltaža baterije više-manje konstantna dok je baterija puna, ali kada se baterija značajno isprazni, voltaža će se početi smanjivati:

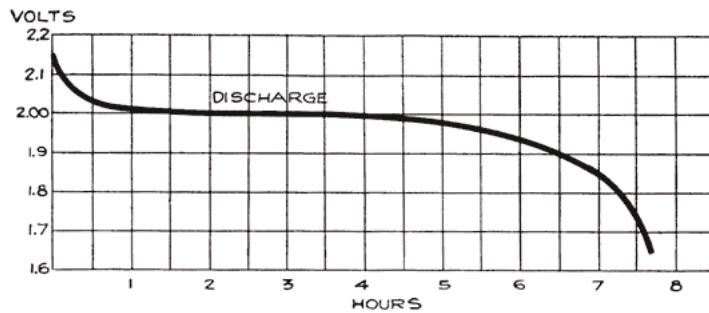


Fig. 22. Voltage Changes During Discharge

Slika 29: Izvor: https://www.powerstream.com/1922/battery_1922_WITTE/batteryfiles/chapter05.htm

Kapacitet baterije (koliko baterija može trajati) obično mjerimo u amperatima (Ah). 1Ah je količina naboja koja u 1h prođe kroz žicu kojom teče 1A struje. Dakle, $1\text{Ah} = 1\text{A} \cdot 3600\text{s} = 3600\text{C}$. 10 000mAh (tj. 10Ah) znači da kroz bateriju može proći 10Ah naboja prije nego se ona potpuno isprazni (prije nego se anoda i katoda izmjene do te mjere da se reakcija ne može nastaviti).

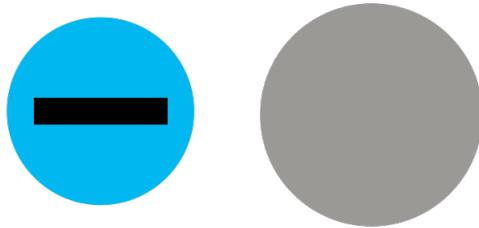
Ovdje treba imati na umu i da kemijske reakcije u bateriji mogu biti manje ili više učinkovite ovisno o temperaturi (litij-ionske baterije obično funkcioniraju bolje na višim temperaturama) tako da i količina naboja koju

baterija može proizvesti isto ovisi o temperaturi. Nadalje, količina naboja koju baterija može proizvesti ovisi i o tome koliko brzo stvaramo naboj (kolika struja prolazi kroz bateriju). Za veću struju su kemijske reakcije manje efikasne i kapacitet baterije je manji.

Dakle, ako proizvođač tvrdi da je kapacitet baterije 100Ah, moramo znati pod kolikom strujom je baterija ispraznjena, odnosno moramo znati u koliko sati je ispraznjena. Obično se koristi vremenski okvir od 20h (ali ne uvijek). Baterija koja ima kapacitet 100Ah, koji je izmjerjen u 20h, će trajati 20h ako kroz nju prolazi $I = \frac{q}{t} = \frac{100\text{Ah}}{20\text{h}} = 5\text{A}$ struje.

4 Pitanja

1. Objasni ponašanje naboja tako da odgovoriš na sljedeća pitanja. Postoje dvije vrste (tipa) naboja - koje? Kako se tipovi naboja odražavaju na privlačnost ili odbojnost sile među njima?
2. Koja je čestica nosioc negativnog naboja u tvarima, a koja pozitivnog?
3. Koja je osnovna mjerna jedinica naboja? (Hint: jedan Francuz)
4. Može li tijelo imati proizvoljno malenu količinu naboja na sebi ili postoji neki najmanji naboј koji tijelo može nositi? Navedi česticu koja nosi taj naboј?
5. Imamo neutralnu metalnu kuglu kojoj smo približili negativan naboј (kao na slici). Odgovori na sljedeća pitanja:

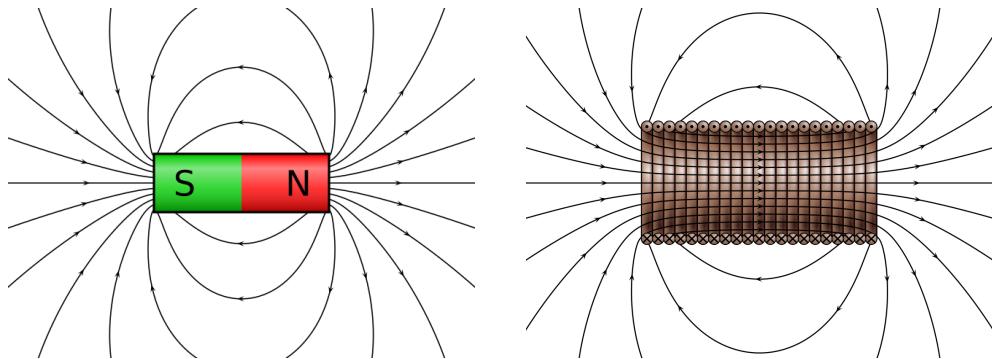


- Privlači li naboј kuglu ili odbija?
 - Nacrtaj inducirani naboј na kugli.
 - Ako kuglu presiječemo popola, hoće li polovice biti nabijene? Zašto?
 - Odgovori na gornja pitanja u slučaju kada je kugla izolator (Hint: pripazite - privlači li nabijena kugla npr. kosu ili lišće; jesu li kosa i lišće vodiči ili izolatori?).
6. Koja je osnovna mjerna jedinica za struju? (Hint: jedan drugi Francuz)
 7. Ako kroz poprečni presjek vodiča prolazi svake sekunde $10C$, kolika struja u amperima prolazi kroz taj vodič?
 8. Ako kroz poprečni presjek vodiča u $5s$ prođe $20C$ naboja, koliko naboja prođe u $1s$? Kolika struja prolazi vodičem?

9. Koji se to naboji (čestice) gibaju u metalima kada kroz njih teče struja?
10. Ako se elektroni u komadu metalne žice kreću udesno, koji je smjer struje?
11. Po čemu se razlikuju vodiči od izolatora (za odgovor se probaj spustiti na atomsku razinu)?
12. Provodi li čista (destilirana) voda struju? Što ako u vodu ubacimo sol (NaCl)?
13. Kada kroz slanu vodu protječe struja, koji se to naboji (čestice) gibaju?
14. Očuvanje naboja. Zamislite zatvorenu kutiju u kojoj je $+10C$ naboja. Iz te kutije izlazi $2A$ struje. Koliko je naboja u kutiji nakon $1s$? Koliko je naboja nakon $2s$? Nakon koliko vremena će u kutiji biti $0C$?
15. Očuvanje naboja. Zamislite zatvorenu kutiju u kojoj je $+10C$ naboja. Iz te kutije izlazi $2A$ struje, a ulaze $3A$ struje. Koliko naboja se nalazi u kutiji nakon $1s$, a koliko nakon $2s$?
16. Očuvanje naboja. Zamislite zatvorenu kutiju u kojoj je $+10C$ naboja. Iz te kutije izlazi $2A$ struje i ulaze $2A$ struje. Koliko naboja se nalazi u kutiji nakon $2s$?
17. Imamo dvije metalne kugle, a jedna je puno veća od druge. Obje kugle imaju $-5C$ naboja i stavili smo ih u kontakt. Hoće li nabolj prijeći s jedne kugle na drugu (Hint: na većoj kugli se elektroni mogu puno šire razmjestiti.) Bi li nabolj prešao da su obje kugle istih veličina?
18. Imamo dvije identične metalne kugle. Jedna nosi $+10C$ naboja na sebi, a druga $+20C$. Kada dodirnemo kugle, što će se dogoditi? Koliki će nabolj imati jedna, a koliki druga kugla. (Hint: koliki je ukupni nabolj obje kugle? Kako će se taj ukupni nabolj rasporediti po kuglama (koristi zaključak prethodnog zadatka)?)
19. Koja je osnovna mjerna jedinica za napon/voltažu (Hint: it's in the friggin' name!)
20. Ako je između dvije točke A i B voltaža $6V$, koliko rada treba uložiti da bi se od A do B prebacio $1C$ nabolj? Koliko treba rada uložiti da bi se prebacilo $3C$?

21. Od A do B ste prebacili 10C i izmjerili rad od 100J. Koliko rada treba uložiti ako želite prebaciti 1C? Kolika je voltaža između točaka A i B?
22. Točke A i B su udaljene 2m te nigdje u njihovoј blizini nema magnetskog djelovanja (magnetskog polja). Prebacujete 1C naboja od A do B po pravcu i mjerite 5J rada. Koliko rada treba ako isti naboј od A do B prebacujete po dugoj zakriviljenoј putanji? Više? Manje? Isto? Objasni.
23. Koliko rada treba uložiti da biste 1C naboja (kada nema nikakvog magnetskog djelovanja) prebacili iz neke točke A po kružnoј putanji natrag u A? Objasni.
24. Ako trajni magnet objesimo o nit, jedna njegova strana će se okrenuti prema _____ - tu stranu zovemo _____ magnetski pol. Druga strana će se pak okrenuti prema _____ i tu stranu zovemo _____ magnetski pol.
25. Istoimeni magnetski polovi se _____, a raznoimeni _____.
26. U kojem slučaju magneti jače djeluju: kada približavamo pol jednog magneta polu drugog ili kada približavamo pol jednog magneta sredini drugog?
27. Ako magnet preplovimo na dva dijela, hoće li svaka polovica imati samo jedan magnetski pol? Drugim riječima, postoji li "magnetski naboј"?
28. Ako Zemlju promatramo kao magnet (njen sjever privlači sjeverni pol igle kompasa), koji magnetski pol se nalazi na sjeveru Zemlje?
29. Komad namagnetiziranog željeza nam slučajno iz ruke padne u vatru. Sjetimo se da bismo ga mogli dohvatići nekim metalnim štapom (metal privlači magnete), no prošlo je neko vrijeme dok smo pronašli štap i vratili se do vatre. Je li nam ideja upalila? Objasni.
30. Imamo ravnu žicu pokraj koje smo stavili kompas. Pustimo struju kroz žicu, što se događa s iglom kompasa? Pustimo li struju u suprotnom smjeru, što se onda događa s iglom?

31. Što će se dogoditi sa dvije paralelne žice kroz koje puštamo struju? Što ako struja kroz obje žice ide u istom smjeru, a što ako struja kroz dvije žice ide u suprotnim smjerovima?
32. Ima li ravna žica kroz koju prolazi struja magnetske polove?
33. Magnetsko polje (magnetsko djelovanje) unutar petlje kroz koju prolazi 1A struje je _____ nego magnetsko polje pored ravne žice (na istoj udaljenosti) kroz koju prolazi 1A struje.
34. Kako ovisi jačina magnetskog polja unutar zavojnice o broju, tj. gustoći navoja zavojnice? Što zavojnica ima više navoja (što smo nanizali više petlji), to je polje _____.
35. Polje unutar zavojnice možemo dodatno ojačati dodavanjem _____. Objasni zašto u tom slučaju polje (tj. djelovanje) jača.
36. Imaju li zavojnica i strujna petlja magnetske polove. Usporedi sljedeće dvije slike i navedi gdje bi bio sjeverni, a gdje južni pol zavojnice (pažljivo prati smjer magnetskih linija).

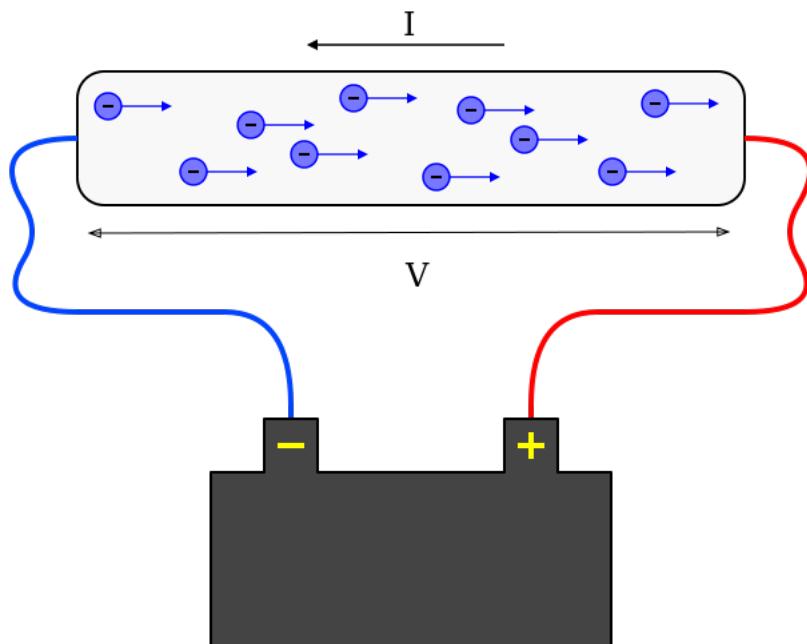


37. Kako možemo upravljati jačinom elektromagneta? (ili zašto se elektromagnet uopće zove ELEKTROMagnet)

5 Otpor (Ohmov zakon)

5.1 Otpor

Baterija održava voltažu (razliku u potencijalu) među krajevima žice. Spojimo li krajeve žice na bateriju, kroz žicu će proteći struja. Na većoj voltaži će proteći veća struja. Također, ovisno o vrsti materijala od kojeg je žica građena, kroz nju na danoj voltaži može proći veća ili manja struja.



Slika 31: Baterijom držimo krajeve žice na voltaži V , kroz žicu teče neka struja I .

Ako su krajevi žice na voltaži V , a kroz nju prolazi struja I , kažemo da je **otpor** žice (eng. *resistance*):

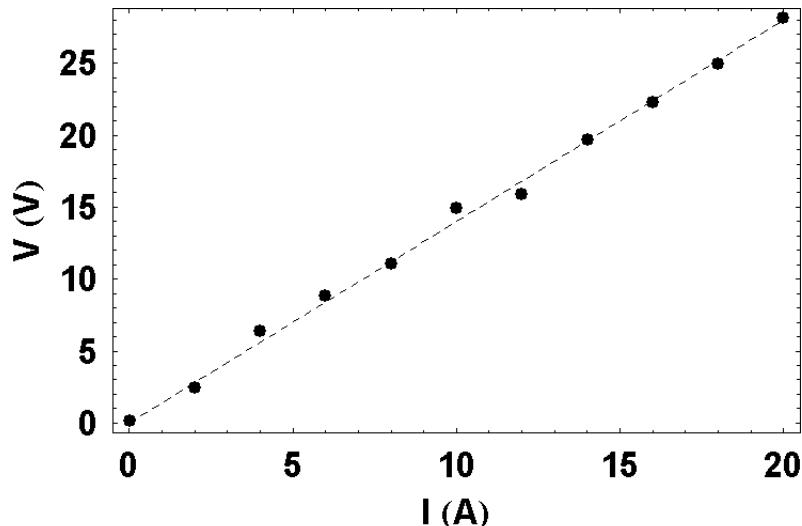
$$R = \frac{V}{I}.$$

Otpor nam govori koliko se materijal odupire gibanju naboja (koliko je teško pogurati struju kroz vodič): ako na danoj voltaži V prolazi velika struja

I , onda je otpor malen. Osnovna mjerna jedinica za otpor je **ohm**, $1\Omega = \frac{1V}{1A}$. Ovo nam konkretno govori za koliko moramo povećati voltažu na krajevima žice da bismo kroz žicu dobili jedan amper više. Npr. 5Ω znači da ćemo kroz žicu dobiti za $1A$ veću struju ako na krajevima žice stavimo za $5V$ veću voltažu⁶.

Tvari koje zovemo **vodiči** imaju generalno mali otpor, a **izolatori** imaju veliki otpor.

Za mnoge materijale je otpor (na razumno velikom rasponu voltaža) isti, tj. konstantan. U tom slučaju su voltaža i struja proporcionalne $V = IR$. Ovo zovemo **Ohmov zakon**, a takve materijale ohmskim materijalima. Dakle, Ohmov zakon kaže da će, ako udvostručimo voltažu na krajevima žice, kroz žicu proteći duplo veća struja.

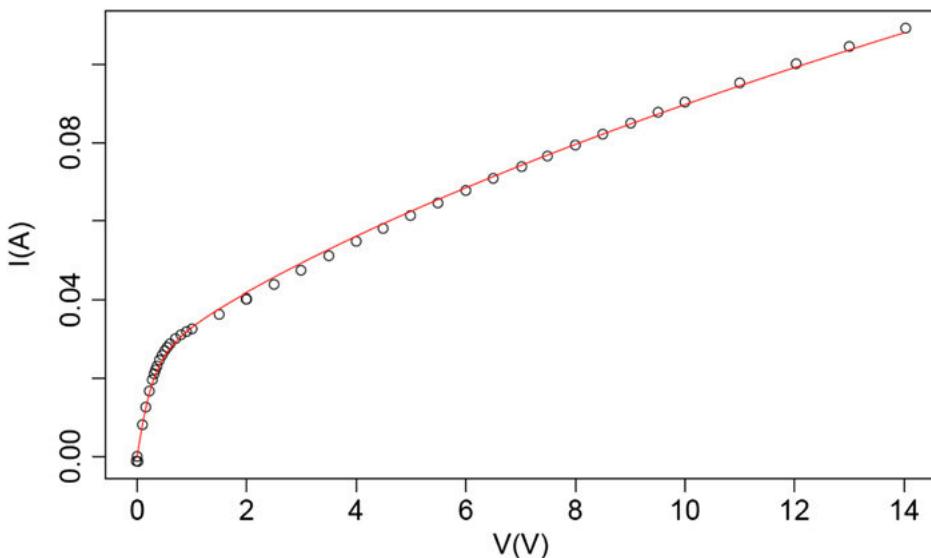


Slika 32: Graf Ohmovog materijala koji prikazuje ovisnost voltaže i struje $V = IR$. Omjer voltaže i struje (otpor) je približno stalna vrijednost, tj. voltaža i struja su približno proporcionalne veličine. U ovom konkretnom slučaju voltaža od oko $7.5V$ stvara struju od oko $5A$, a voltaža od oko $15V$ stvara struju od oko $10A$. Otpor (nagib pravca) je dakle otprilike $R = \frac{V}{I} = \frac{7.5V}{5A} = 1.3\Omega$.

Naravno, ako učinimo voltažu $1\ 000\ 000$ puta većom, Ohmov zakon će vjerojatno prestati vrijediti, tj. struja neće baš biti točno $1\ 000\ 000$ puta

⁶Pod pretpostavkom da se otpor, kada smo povećali voltažu, nije značajno promijenio

veća (raspon voltaže mora biti razuman). Žarulje sa žarnom niti, primjerice, ne prate dobro Ohmov zakon. Na maloj voltaži kroz žaruljicu prolazi mala struja i žaruljica neće sjati (neće se ugrijati do usijanja). Izmjerimo prvo na toj maloj voltaži struju i napon te izračunamo otpor kao $R = \frac{V}{I}$. Sada povećamo voltažu tako da žaruljica svjetli (žarna nit je sada usijana, tj. na puno višoj temperaturi), a onda ponovno izračunamo otpor. Otpor je u slučaju kada žarulja gori znatno veći.



Slika 33: Odnos struje i voltaže za žaruljicu sa žarnom niti. Graf nije pravac. Otpor generalno raste s povećanjem voltaže (tj. s povećanjem temperature). Izvor: https://www.researchgate.net/figure/Current-voltage-curve-for-a-12-V-light-bulb-Experimental-points-and-a-fitted-curve-fig3_258272194

5.2 Otpornost (mikroskopska slika)

Sada želimo zaviriti u žicu i bolje shvatiti što se točno događa kada kroz nju teče struja. Prvo, baterija na krajevima žice stvori napon. S druge strane, napon znači da električna sila obavlja rad na pokretnim nabojima, tj. da imamo električno polje E . To električno polje gura nabaje (elektrone) kroz žicu jer na njih sada djeluje sila $F = qE$. Elektroni kroz žicu zapravo ne ubrzavaju jer osim električne sile, na njih djeluju i atomi metala, koji ih

povlače tj. usporavaju kada se elektroni nađu blizu njih (ovo možemo shvatiti kao sudare). Dakle, kroz žicu teče stalna struja.

Otpor žice ovisi o njenoj debljini (poprečnom presjeku) i duljini: što je žica deblja otpor je manji, što je žica duža otpor je veći. Ovo ima smisla jer kroz deblju žicu (kroz njen poprečni presjek) možemo pogurati više naboja (pa je za danu voltažu struja veća nego kroz tanku žicu). S druge strane, za dulju žicu imamo više sudara pa će ukupno manja struja proći kroz čitav komad žice.

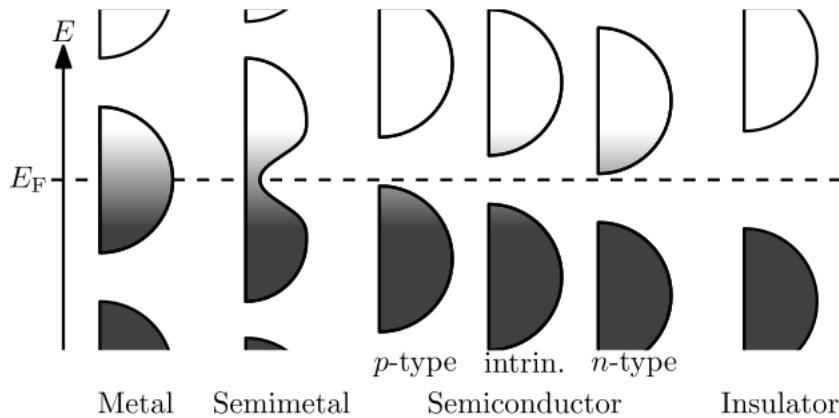
Dakle, zgodno je uvesti varijablu koja je karakteristična za materijal (te ne uključuje duljinu i širinu žice), što zovemo **otpornost** ρ :

$$R = \rho \frac{l}{A}.$$

Eksplicitno, otpornost je dana formulom $\rho = \frac{RA}{l}$. ρ se dakle mjeri u $\frac{\Omega \text{m}^2}{\text{m}} = \Omega \text{m}$. Otpornost je manja (tj. materijal je bolji vodič), što postoji više slobodnih elektrona koji se mogu gurati kroz taj materijal. Ti slobodni elektroni nisu vezani ni za jedan konkretni atom materijala i kao takvi se lagano mogu micati kroz materijal.

Elektroni jednog atoma smiju postojati samo na određenim energijama (ovo slijedi iz kvantne mehanike). Elektroni općenito žele biti na što manjoj energiji - žele biti što bliže jezgri atoma. Ipak, zbog tzv. Paulijevog principa ne mogu zauzeti istu energiju koju već ima neki drugi elektron, tj. energiju koja je već popunjena. Dakle, ako krenemo popunjavati atom elektronima (krenuvši od gole jezgre), prvi elektroni će biti blizu jezgre, a kako dolazimo do sve viših i viših energija, tako će i obaci tih elektrona biti sve dalje i dalje od atomske jezgre.

Ako sada imamo puno atoma na okupu (čitav komad materijala), onda će najudaljeniji elektroni svakog atoma biti toliko daleko od svoje izvorne jezgre da se bez problema mogu pomaknuti i do neke druge jezgre. Takvi elektroni sada okupiraju energijske razine materijala koje su vrlo gusto razmještene (tj. efektivno tvore kontinuum) - tzv. energijske vrpce:



Slika 34: Energije elektrona za različite materijale. Nacrtana područja su energije koje elektroni mogu postići (tzv. energijske vrpce). Energije između vrpci se ne mogu postići, tj. treba uložiti određenu energiju da bismo promovirali elektron iz jedne vrpce u drugu. Tamno su popunjene energije (postoje elektroni tih energija), a bijelo su nepopunjene. Elektroni popune prvo najniže energije, potom (zbog Paulijevog principa) počnu popunjavati i više energije. Kako temperatura raste, tako imamo više termalne energije (najsumično gibanje), stoga i elektroni mogu doseći sve više energije pa je popunjenošć viših razina veća. E_F je tzv. Fermijeva energija koja predstavlja granicu između popunjjenih i nepopunjjenih energija.

Metali su dobri vodiči jer im najviša energijska vrpca nije popunjena. Ovo znači da bez problema možemo ubrzati elektrone (dati im malo ekstra energije) i tako dobiti struju. Izolatorima je najviša vrpca u potpunosti popunjena i ne možemo elektronima dati samo malo energije kada ih želimo pokrenuti. Kod izolatora moramo nadvladati energijski jaz između dvije vrpce. Kod poluvodiča isto imamo energijski jaz, no on nije prevelik (lagano se premosti).

U suprotnom smjeru, kada elektroni gube energiju kroz sudare, u vodičima mogu izgubiti malo energije i tako pasti na nižu razinu. Dakle, svaki sudar generalno ostavlja malo energije atomima metala. U izolatorima pak elektroni moraju izgubiti više energije da bi premostili energijski jaz i samim time sudari ostavljaju više energije.

Na višim temperaturama se u vodičima u cijelosti popuni vodljiva vrpca slobodnim elektronima i onda treba uložiti značajnu energiju da bismo počeli popunjavati sljedeću energijsku vrpcu - otpor raste. Za izolatore je pak otpor

nost na višim temperaturama manja (jer oni tek krenu popunjavati vodljivu vrpcu). Što se elektroni više sudaraju s atomima žice, to se atomi žice više nasumično gibaju - imamo višu temperaturu. Dakle, pri višim strujama se vodič više zagrijava, a samim time mu se mijenja i otpor. Ovo je razlog zašto Ohmov zakon ne vrijedi na vrlo velikom rasponu voltaža.

5.3 Energijski gubitci u vodiču

Snaga električne sile u žici jednaka je $P = \frac{W}{t} = \frac{Vq}{t} = VI$. Zbog sudara s atomima u žici, kroz žicu teče stalna struja (naboji ne ubrzavaju), stoga je električna sila u prosjeku jednaka sili koja usporava naboje. Dakle, snaga P nam upravo govori koliko energije struja prenese na žicu (koliko se energije pretvori iz električne u termalnu). Primijenimo li Ohmov zakon $V = IR$, dobijemo:

$$P = VI = RI^2.$$

Dakle, duplo veća struja daje 4 puta veću snagu. Drugim riječima, ako kroz žicu u sekundi prođe duplo više naboja, žici će se kroz sudare (u istoj sekundi) prenijeti 4 puta više energije. Bolji vodiči (manji R) će iskusiti manje gubitaka kroz sudare, tj. toplinu.

Jako dobri vodiči imaju mali otpor - ovo znači da čak i za jako malu voltažu na krajevima žice kroz žicu može poteći velika struja. Drugim riječima, čak i ako je električno polje unutar žice maleno, ono će svejedno usjetiti pogurati dosta naboja kroz žicu.

Savršeni vodič ima otpor $R = \frac{V}{I} = 0$. U savršenom vodiču nemamo gubitaka na termalnu energiju (kroz sudare), tj. ne treba uložiti nikakvu energiju da bismo progurali naboje kroz njega. Ako pokrenemo elektrone u savršenom vodiču, oni se nastavljaju gibati čak i ako unutar vodiča nema električnog polja, tj. čak i ako nema napona na krajevima savršene žice. Štoviše, ako napon između neke dvije točke idealnog vodiča nije 0, odmah će poteći beskonačna struja koja će pokušati umanjiti razliku u potencijalu. Dakle, električno polje unutar idealnog vodiča je 0, a voltaža između bilo koje dvije točke je isto 0V. Ovo znači da kroz savršene vodiče nemamo promjenu potencijala (kao kroz npr. obične žice s otporom).

Neki materijali (npr. aluminij) na vrlo niskim temperaturama postanu savršeni vodiči, tj. postanu **supravodljivi** (eng. *superconducting*)⁷. U su-

⁷Ukratko, elektroni se kroz međudjelovanje s atomima materijala spare (Cooperov par),

pravodičima je električno polje 0. U početku, dok naboji još ubrzavaju, magnetsko polje se mijenja na takav način da poništi električno polje (pojava elektromagnetske indukcije - ovo ćemo objasniti kasnije), što efektivno stvara otpor (pa nemamo problem beskonačne struje). Kasnije, naboji nastave teći bez otpora stalnom brzinom. Jedan od bitnih neriješenih problema fizike je pronaći materijal koji se pri temperaturama blizu sobnoj ponaša kao supravodič. Doduše, valja imati na umu da zapravo ništa ne garantira postojanje takvog materijala.

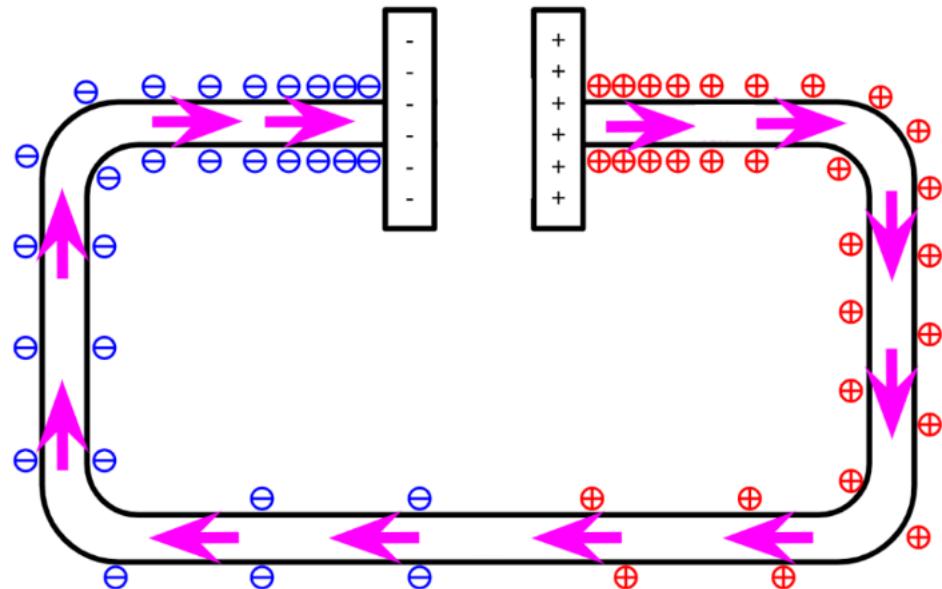
5.4 Dodatak: Električno polje unutar vodiča (iliti za sve treba vremena)

Kako se stvara el. polje unutar vodiča kada ga spojimo na bateriju? Prvo, ako se naboј nigdje unutar vodiča ne nakuplja, gustoća naboja unutar vodiča mora biti nula. U materijalima koji slijede Ohmov zakon (tzv. ohmskim materijalima) struja ide u smjeru električnog polja⁸. Kada bismo imali neku gustoću (npr. negativnog) naboja negdje u vodiču, onda bi električno polje pokazivalo prema tom naboju pa bi i struja pokazivala u tom smjeru. Ovo znači da struja ulazi u područje gdje se negativni naboј nalazi, što znači da se tu sada nakuplja pozitivni naboј (koji teži tome da eliminira negativan naboј). Ukoliko se struja primirila, tj ukoliko nemamo nakupljanje naboja, automatski nećemo imati gustoću naboja u vodiču (naboji elektrona su poništeni nabojima jezgara).

Ovo znači da se bilo kakva gustoća naboja smije javiti samo na površini vodiča. Dakle, naboji se rasporede po površini vodiča i tako stvaraju električno polje unutar (ali i van) vodiča koje gura elektrone duž vodiča.

a parovi onda mogu okupirati iste energije (ne ponašaju se više kao fermioni tj. ne poštuju Paulijev princip) Dakle, parovi će svih pasti na najnižu energijsku razinu i kao takvi ne mogu više gubiti energiju kroz sudare.

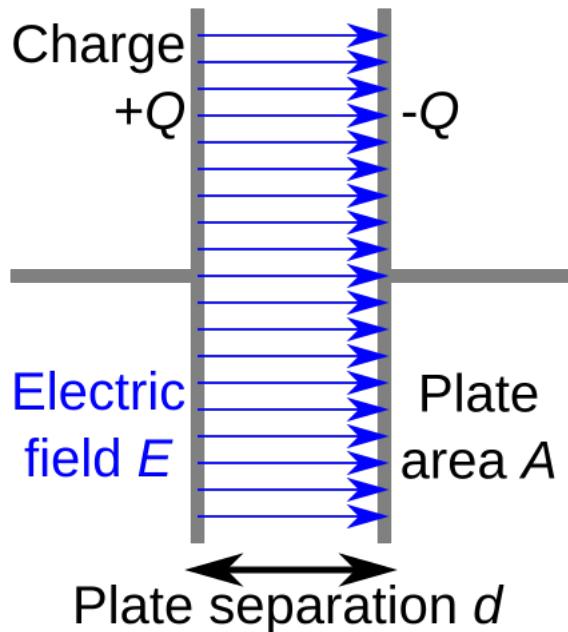
⁸Ohmov zakon se može iskazati i na sljedeći način: gustoća struje i električno polje su proporcionalni. Naime, voltaža je rad po jedinici naboja $V = \frac{Fl}{q} = El$, a definicija otpora $V = IR$ i otpornosti $R = \rho \frac{l}{A}$ daju $El = IR = I\rho \frac{l}{A}$, tj. $E = \rho \frac{I}{A} = \rho j$, gdje je j gustoća struje (struja po jedinice površine). Dakle, gustoća struja je proporcionalna električnom polju $j = \frac{1}{\rho}E$, a faktor proporcionalnosti je recipročna vrijednost otpornosti (tzv. provodljivost).



Slika 35: Kada spojimo bateriju, površinski naboji na vodiču stvaraju električno polje unutar vodiča. Izvor: <https://physicsteacher.blog/2022/10/30/explaining-current-flow-in-conductors-part-three/>

Ovo NE znači da se sami elektroni moraju gibati skroz do površine vodiča. Dovoljno je da se elektroni samo malo pomaknu prema unutrašnjosti vodiča (ili prema vani) tako da na mjestu gdje su jezgre atoma malo ogoljene dobijemo ukupno pozitivni naboј. Dakle, u unutrašnjosti se pozitivni i negativni naboјi ponište te nemamo gustoću naboјa, ali na površini se ne ponište i postoji nekakva rezultantna gustoća naboјa. Vidi (oko 5:50) https://www.youtube.com/watch?v=oI_X2cMHNe0.

Ponekad možemo imati nakupljanje naboјa. Primjerice, svi valjda znamo da struja ne teče ako presiječemo žicu. Naime, zrak je dobar izolator i naboјi ne mogu tako lako preći s jednog kraja žice preko zraka na drugi kraj žice. Ovo znači da će se na vrhu žice nakupljati naboјi sve dok električno polje tih nakupljenih naboјa ne poništi električno polje unutar žice. U tom trenutku električno polje unutar žice je 0 i struja više ne teče. Ovo se dogodi jako brzo. Ako pak dva kraja prekinute žice spojimo na dvije velike paralelne ploče, trebat će više vremena dok se na pločama nakupi dovoljno naboјa da struja prestane teći jer se naboјi po ploči mogu raširiti:



Slika 36: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Capacitor_schematic.svg

Znači imat ćemo neki period vremena gdje kroz žicu prolazi struja unatoč tome što imamo "rupu" između ploča. Ploče imaju dovoljno *kapaciteta* da prime određenu količinu naboja i struja će teći dok se taj kapacitet ne popuni (tj. dok odbijanje između naboja na ploči i naboja koji pokušavaju stići na ploču na postane dovoljno veliko). Ovakav uređaj koji može primati nabolj kada se na njegovim krajevima nalazi napon zovemo *kapacitor* (ili *kondenzator*).

Stvori li se električno polje odmah kada spojimo bateriju? Drugim riječima, hoće li se površinski naboji poredati instantno? Odgovor je, naravno, neće - treba im neko vrijeme. Dakle, ni električno polje se neće stvoriti odmah, ali će se stvoriti jako brzo. Električno polje će se od baterije žicom proširiti *brzinom svjetlosti* ($299\ 792\ 458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$). Ovo znači da suprotni kraj žice ne zna jesmo li mi spojili bateriju ili ne dok do njega ne dođe električno polje.

Zamislimo sada vrlo dugu zatvorenu žicu (petlju), npr. od Zemlje do Mjeseca (i natrag). Na Zemlji spojimo žicu na bateriju, ali na Mjesecu nam netko bez da smo to znali presječe žicu. Hoće li struja poteći kroz žicu? Odgovor je - da! Kada spojimo bateriju, trebat će otprilike 1.2 sekunde da

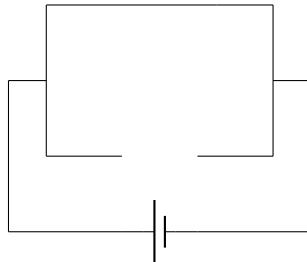
se električno polje u žici na Mjesecu ažurira. Dakle, električno polje se širi s jednog kraja na drugi i ono punu sekundu ne zna da je na drugom kraju rupa. Elektroni u vodiču pak ubrzavaju onako kako im to električno polje nalaže - dakle imamo struju. Tek kada električno polje dođe do rupe, odbit će se od nje i tako će se umanjiti iznos polja kroz žicu. Ovako se polje par puta može odbiti između Mjeseca i Zemlje dok se situacija ne stabilizira i onda će električno polje u žici zaista biti 0, tj. kroz žicu neće prolaziti struja.

Slična se stvar događa kada imamo žicu koja se grana:



Slika 37: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coaxial_cable_splitter_%28TV_%26_Internet%29.JPG

Na oba pola baterije spojimo po jednu žicu koja se grana. Dakle, na jednoj strani imamo bateriju, a na drugoj ukupno 4 kraja. Od ta 4 kraja stvorimo dvije grane (dvije putanje za struju) na sljedeći način. Uzmemo jedan kraj spojen na + pol baterije i spojimo ga s drugim krajem spojenim na – pol; kroz tu granu će teći struja. Preostala dva kraja ostavimo odspojena; kroz tu granu neće teći struja. Shematski:



Pitanje je sada: kako elektroni znaju kako odabrat put? Elektroni samo prate električno polje. U početku to znači da će elektroni odabrat obje putanje, ali kada se električno polje u žici stabilizira, polje kroz granu koja nije spojena je 0, a kroz granu koja je spojena, polje nije 0 te gura naboje u žici i tako stvara struju. Vidi stvarni eksperiment: <https://www.youtube.com/watch?v=2AXv49dDQJw>.

Što ako sada otvorenu granu spojimo (zavarimo) ali koristeći neki metal većeg otpora od ostatka žice. Kako su obje grane spojene na istu voltažu, očigledno će **veća struja poteći kroz granu na kojoj je manji otpor**. Situacija s električnim poljem je pak sljedeća. Kroz granu u kojoj je mali otpor (čista žica), stvara se jako električno polje koje gura puno naboja, tj. stvara veliku struju. Na drugoj grani imamo veći otpor, stoga će se u toj grani stvoriti malo električno polje i struja kroz tu granu je manja. Preciznije, unutar te grane imamo sljedeću situaciju. Malo električno polje (mala promjena u potencijalu) je u komadu žice koji je dobar vodič, a veće električno polje (veća promjena u potencijalu) je unutar onog segmenta koji smo zavarili i koji je slabiji vodič (treba jače polje da gurne naboje kroz komad jakog otpora).

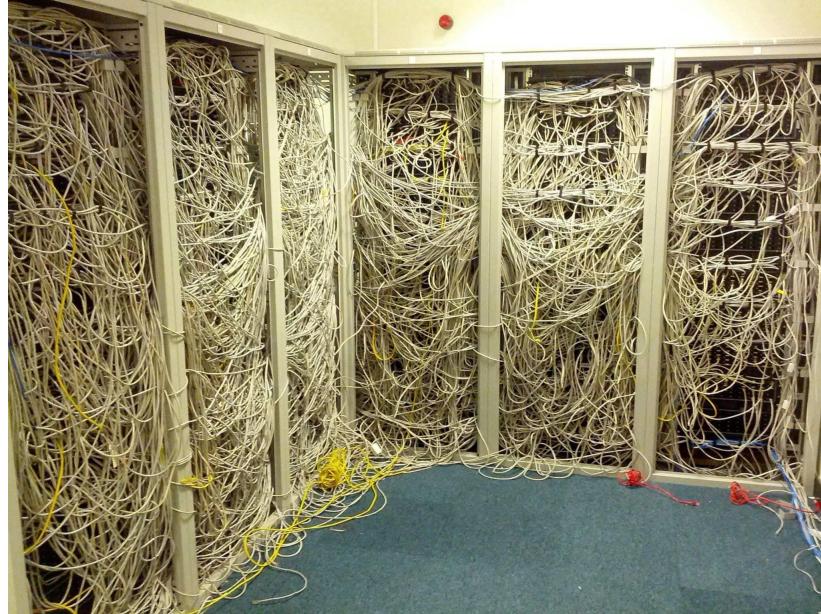
6 Strujni krug

6.1 Jednostavni strujni krug

Žice koristimo da bismo usmjerili tok struje i poboljšali tok električne energije. Sjetimo se, električna energija (tj. električno polje) se može širiti i praznim prostorom ⁹, no efekt je puno jači kada imamo vodič. Iz ovog razloga uređaje spajamo žicama. Ponekad žica i uređaja ima jako veliki broj i

⁹Primjerice, mobilne uređaje možemo puniti i bežično, no puno je brže žično punjenje.

teško je razumijeti kako je što međusobno povezano (kao npr. u sljedećem primjeru preuzetom direktno iz 9. kruga pakla):

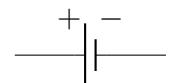


Slika 38: Izvor: https://www.reddit.com/r/pcmasterrace/comments/5r1cr4/cable_management_from_the_depths_of_hell/

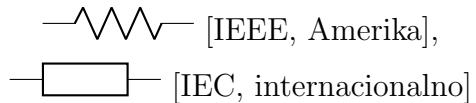
Zato je uveden shematski prikaz električnih komponenti. Objasnit ćemo taj prikaz na najjednostavnijem primjeru. Prvo, uvedimo elemente tog strujnog kruga i njihove oznake:

1. Idealna žica:

2. Baterija (izvor napona). Ovdje dulja linija predstavlja + pol baterije (katodu), a kraća linija – pol (anodu):

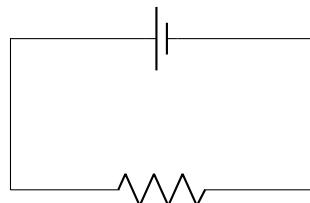


3. Otpornik. Ovdje imamo dva standarda: američki (meni osobno draži) i internacionalni.



Idealne žice su žice sačinjene od idealnog vodiča (supravodljive) ili barem one koje imaju zanemarivo mali otpor. Otpornici su elementi strujnog kruga čiji je otpor (u očekivanom radnom rasponu voltaža) konstantan, tj. zadovoljava Ohmov zakon. Baterije su isto idealne (nemaju otpor) i održavaju voltažu na nekoj dobro određenoj stalnoj vrijednosti.

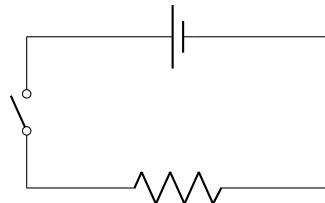
S ova 3 elementa (ili komponente) možemo konstruirati najjednostavniji strujni krug. Baterija daje energiju koja se prenosi kroz idealni vodič (žicu) potom troši na otporniku kroz sudare (točnije pretvara u druge oblike, npr. toplinu).



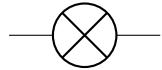
Radi jednostavnosti korištenja možemo dodati i prekidač - sklopku koja stvara prekid u strujnom krugu kada ne želimo da struja teče, tj. koju možemo vratiti u položaj takav da struja teče. Prekidač obično označavamo kao:



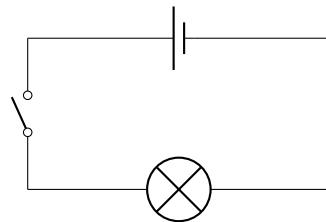
Kada je sklopka otvorena i struja ne teče, kažemo da je strujni krug otvoren, a kada smo zatvorili sklopku i struja teče, strujni krug je zatvoren.



Također, da bismo lakše vidjeli prolazi li struja kroz strujni krug ili ne, možemo umjesto otpornika staviti žaruljicu (lampu). Kada (dovoljno velika) struja prolazi kroz žaruljicu, ona će svijetliti. Žaruljice označavamo s:



Prisjetimo se da žaruljice ne slijede u svom radnom režimu Ohmov zakon te ih stoga ne smatramo otpornicima. Ipak, i žaruljice i otpornici "troše" električnu energiju (pretvaraju je u druge oblike), stoga takve uređaje zovemo *trošilima*. Kada zamjenimo otpornik sa žaruljicom, shema postane:



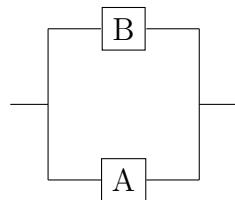
Strujni krug bismo općenito mogli definirati kao kolekciju električkih komponenti (npr. baterija, otpornik, žaruljica, prekidač...) međusobno povezanih žicama. Pritom, da bismo zaista imali "krug", moramo imati neku zatvorenu petlju kojom je omogućen povratak struje do izvora.

6.2 Paralelni i serijski spoj

Pretpostavimo da imamo neka dva elementa strujnog kruga - A i B. Ta dva elementa možemo spojiti **serijski** ili **paralelno**. U serijskom struji može pratiti samo jedan put, a dva elementa su duž tog puta nanizana jedan nakon drugog:



U paralelnom spoju se žica grana, a svaki element leži na svojoj grani:



6.2.1 Struja

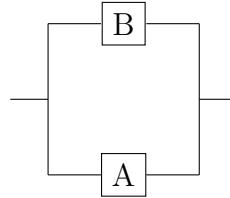
Promotrimo što se dogodi sa strujom u serijskom spoju:



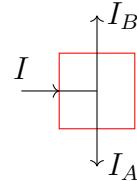
Ako se naboј ne gomila nigdje, onda (prema očuvanju naboјa) struja koja ulazi u A mora biti jednaka struji koja izlazi iz A i ulazi u B, što pak mora biti jednako struji koja izlazi iz B. Struja ima samo jedan put, što znači da (ukoliko nema gomilanja naboјa), nigdje nemamo gubitaka struje i ona je svugdje ista:

$$I_A = I_B.$$

U paralelnom spoju se grana žica pa će se i struja granati:



Promotrimo čvorište i zamislimo crvenu kutiju koja ga sadrži. Pretpostavimo da u slijeva ulazi neka struja I , a izlaze struje I_A i I_B :



Ukoliko se naboј u čvorištu (unutar crvene kutije) ne gomila, očuvanje naboјa nam daje da struja koja ulazi u kutiju (I_1) mora biti jednaka struji koja izlazi iz kutije (I_2 i I_3):

$$I = I_A + I_B$$

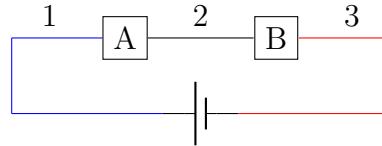
Kada bi više struje ulazilo nego izlazilo, u crvenoj kutiji bi se gomilao pozitivni naboј. Kada bi više struje izlazilo nego ulazilo, onda bi se u crvenoj kutiji gomilao negativni naboј (pozitivni naboј bi izlazio iz kutije).

Naravno, može se dogoditi da više struja $I_1, I_2, I_3\dots$ ulazi u čvorište i više struja $I_A, I_B, I_C\dots$ izlazi iz čvorišta. U tom slučaju princip je isti - ukupna struja koja ulazi u čvorište (zbroj svih ulaznih struja) jednak je ukupnoj struci koja izlazi iz čvorišta (zbroju svih izlaznih struja):

$$I_1 + I_2 + I_3\dots = I_A + I_B + I_C\dots$$

6.2.2 Napon

Promotrimo sada što se događa s naponom u serijskom spoju:



Kako su žice idealne, na njima nema promjene potencijala (napona), tj. ne treba uložiti nikakav rad da bismo prenijeli naboje kroz žicu. Dakle, žica koja vodi od + pola baterije sve do elementa A je čitava na istom potencijalu kao + pol baterije. Isto tako, žica koja vodi od elementa B do – pola baterije je na istom potencijalu kao i – pol.

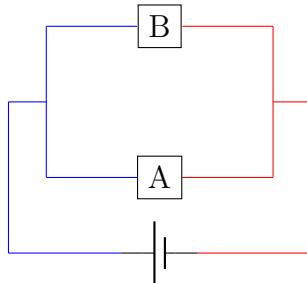
Neka je napon između točaka 1 i 2 (napon na krajevima elementa A) V_A , a napon između točaka 2 i 3 (napon na krajevima elementa B) V_B . Ovo znači da za prijenos 1C naboja preko elementa A treba uložiti V_A joulea, potom za prijenos preko elementa B treba uložiti još V_B joulea. Ukupno smo, dakle, uložili $V_A + V_B$ joulea za prijenos 1C naboja preko oba elementa (od 1 do 3), odnosno voltaža na krajevima serijskog spoja (između točaka 1 i 3) je ¹⁰

$$V = V_A + V_B.$$

Napon V (napon između točaka 1 i 3) je ujedno i napon baterije

Za paralelni spoj imamo sljedeću situaciju:

¹⁰Istu stvar možemo pokazati i korištenjem potencijala. Konkretno, označimo potencijal u točki 1 s ϕ_1 , potencijal u točki 2 s ϕ_2 i u točki 3 s ϕ_3 . Napon na krajevima elementa A je $V_A = \phi_1 - \phi_2$, a napon na krajevima elementa B $V_B = \phi_2 - \phi_3$. Sada imamo da je napon na krajevima spoja $V = \phi_1 - \phi_3 = (\phi_1 - \phi_2) + (\phi_2 - \phi_3) = V_A + V_B$.



Duž idealne žice nema promjene potencijala (nema napona). Plavo obojane žice su na istom potencijalu kao + pol baterije, a crveno obojane žice na istom potencijalu kao – pol.

Dakle, krajevi gornjeg elementa su na naponu baterije i krajevi donjeg elementa su isto na naponu baterije V . Ovo znači da su oba elementa na istom naponu

$$V_A = V_B.$$

Ovaj rezultat možemo dobiti i na sljedeći način (bez korištenja potencijala). Želimo prenijeti 1C naboja s jednog kraja paralelnog spoja na drugi. Ovo možemo obaviti na dva načina:

- Prvo 1C prenosimo gornjom granom (preko B), pri čemu obavimo rad V_B . Dok prenosimo naboj kroz idealnu žicu ne obavljamo nikakav rad (rad obavimo samo onda kada prolazimo kroz element).
- Sada 1C prenesemo donjom granom (preko A) pri čemu obavimo rad V_A .

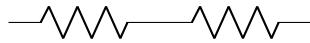
Kako rad električne sile ne ovisi o putanji, već samo o rubnim točkama, rad je u oba slučaja isti, odnosno $V_A = V_B$.

6.2.3 Otpor

Zamislimo da smo spojili dva otpornika serijski ili paralelno i taj spoj stavili u crnu kutiju. Netko sa strane, tko ne zna što je u crnoj kutiji, vidi samo da ta crna kutija ima otpor i slijedi Ohmov zakon (jer unutar kutije imamo samo otpornike koji isto slijede Ohmov zakon). Dakle, čitavu crnu kutiju možemo shvatiti kao otpornik, koji će imati neki svoj *efektivni* otpor. Taj otpor će ovisiti o otporu pojedinačnih otpornika od kojih je spoj (crna kutija)

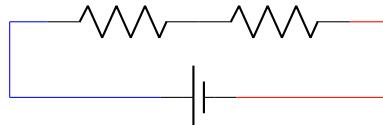
sastavljen i o tome jesu li oni spojeni paralelno ili serijski. Želimo pronaći izraz za taj efektivni otpor u oba slučaja (serijski, paralelno).

Prvo, u serijskom spoju imamo dva otpornika nanizana jedan nakon drugog. Očekujemo da je ukupni otpor (tj. efektivni otpor spoja) veći od pojedinačnih otpornika jer sada struja mora proći i kroz jedan i kroz drugi otpornik.



U osnovi, kada smo nanizali jedan otpornik na drugi serijski, učinili smo dio žice koji stvara otpor dužim. To znači da se broj sudara povećava i da je ukupni otpor spoja veći.

Prepostavimo da je serijski spoj otpornika sada spojen na bateriju napona V .



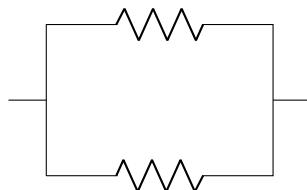
Kroz čitav krug prolazi jedno te ista struja, označimo je s I . Neka je voltaža na krajevima prvog otpornika V_1 , a voltaža na krajevima drugog V_2 . Voltaža na krajevima serijskog spoja je $V = V_1 + V_2$. Ukupni (efektivni) otpor serijskog spoja otpornika jednak je omjeru voltaže V na krajevima spoja i struje I koja prolazi kroz spoj. Dakle, dan je izrazom:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{V_1 + V_2}{I} = \frac{V_1}{I} + \frac{V_2}{I} = R_1 + R_2$$

Zaključujemo, **efektivni otpor serijskog spoja je zbroj otpora pojedinačnih otpornika:**

$$R = R_1 + R_2.$$

Sada promotrimo paralelni spoj otpornika:



U ovom slučaju smo proširili put kroz koji struja može proći (imamo dva puta umjesto jedan). Dakle, ovo je kao da smo proširili žicu koja stvara otpor. Ako imamo npr. dva identična otpornika, očekujemo da je ukupni (efektivni) otpor duplo manji (žica je duplo šira).

Štoviše, **ukupni otpor paralelnog spoja je uvijek manji od otpora i jednog i drugog otpornika.** Da bismo vidjeli zašto, promotrimo dvije situacije:

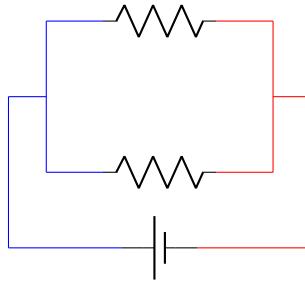
1. Imamo samo jednu granu i na njoj se nalazi otpornik otpora 100Ω .
2. imamo dvije grane (paralelni spoj) - na jednoj je otpornik od 100Ω , a na drugoj 1Ω .

Očito je u drugoj situaciji manji otpor, tj. kroz cijeli sustav može proći više struje (jer će velika struja poteći kroz granu manjeg otpora). Promotrimo pak ove dvije situacije:

1. Imamo samo jednu granu i na njoj se nalazi otpornik otpora 1Ω .
2. Imamo dvije grane - na jednoj je otpornik od 100Ω , a na drugoj 1Ω .

I ovdje je otpor manji u drugom slučaju. Naime, kako smo u oba slučaja otpornik od 1Ω spojili na isti izvor napona (istu voltažu), kroz njega prolazi ista struja u oba slučaja $I = \frac{V}{1\Omega}$. S druge strane, u drugom slučaju imamo još jedan mogući put kojim struja može ići pa će i tuda proći malo struje. Dakle, ukupna struja je malo veća u drugom slučaju pa otpor mora biti manji. U ekstremnom slučaju jedan od otpornika ima beskonačan otpor - to je kao da smo na tom mjestu presjekli žicu (struja ne može teći). Sada smo u situaciji kao da imamo samo jednu granu, odnosno ukupni otpor jednak je otporu drugog (konačnog) otpornika.

Konačno, kao i za slučaj serijskog spoja, izvedimo matematički izraz za efektivni otpor paralelnog spoja otpornika:



Kako je riječ o paralelnom spoju, voltaža na krajevima oba otpornika je ista - označimo je s V . Ako je I_1 struja kroz prvi, a I_2 kroz drugi otpornik, onda iz Ohmovog zakona vidimo da $V = I_1 R_1$ i $V = I_2 R_2$. Promatramo li spoj otpornika kao jedan veliki otpornik (crnu kutiju) otpora R , na krajevima te kutije je napon V , a kroz kutiju prolazi struja $I = I_1 + I_2$ (I ulazi u kutiju i I izlazi iz kutije). Dakle, taj otpor R mora biti jednak $R = \frac{V}{I} = \frac{V}{I_1 + I_2}$. Drugim riječima:

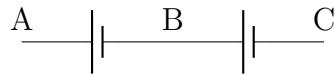
$$\frac{1}{R} = \frac{I_1 + I_2}{V} = \frac{I_1}{V} + \frac{I_2}{V} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Zaključimo, **ukupni otpor je harmonijska sredina otpora pojedinačnih otpornika:**

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

6.2.4 Serijski i paralelni spoj baterija

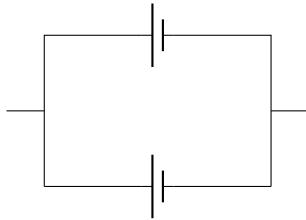
Spojimo sada serijski neke dvije baterije:



Prva baterija održava neku voltažu V_1 između točaka A i B. Druga baterija, isto tako, održava neku voltažu V_2 između B i C. Dakle, ukupna voltaža između A i C mora biti $V_1 + V_2$. Naime, neka obje baterije održavaju napon od 5V. Ako u točki C imamo potencijal jednak ϕ_C , u točki B automatski moramo imati potencijal $\phi_C + 5V$. Potencijal mora skočiti za +5V jer smo prešli s – na + pol baterije (pa smo sada na višem potencijalu). Isto tako, kada prijeđemo s točke B na točku A, potencijal opet mora skočiti za 5V pa je sada vrijednost ukupno $\phi_C + 10V$. Dakle, razlika u potencijalu između točaka A i C je 10V, tj. **napon serijskog spoja baterija je zbroj napona pojedinačnih baterija:**

$$V = V_1 + V_2.$$

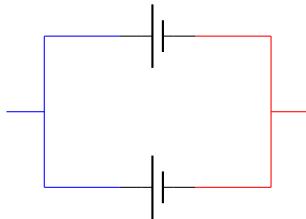
Baterije isto možemo spajati paralelno, no tu se javlja jedan problem.



Vidimo da je + pol jedne baterije spojen na + pol druge (i isto tako – pol jedne s – polom druge). Ako dvije baterije nisu iste, tj. ako nemaju istu građu, onda se može dogoditi da je + pol jedne baterije pozitivniji (na višem potencijalu) od + pola druge. Ovo znači da postoji neka voltaža između ta dva pozitivna pola pa ako ih spojimo žicom kroz žicu će poteći struja. Kroz idealnu žicu (kojoj je otpor 0) bi potekla beskonačna struja. U stvarnosti bi kroz žicu potekla konačna, ali velika struja (koliko velika ovisi o tome koliki je napon između dva + pola). U svakom slučaju, nije dobro da velika struja prolazi kroz bateriju jer je to može oštetiti. U slučaju izuzetno velike struje, visoka temperatura može pokrenuti lančanu kemijsku reakciju unutar baterije što čak može dovesti i do eksplozije (eng. *thermal runaway*).

Dakle, paralelno spajati različite baterije - bilo novu i staru (potrošenu) bateriju ili općenito baterije različitih voltaža ili jednostavno različitih građa **NIJE PAMETNO!** Baterije smijete spojiti paralelno samo onda kada ste sigurni da imate dvije više-manje identične baterije.

Što nam onda paralelni spoj identičnih baterija daje? Primijetimo da je voltaža paralelnog spoja baterija ista kao pojedinačne baterije:



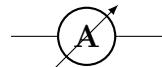
Naime, plava žica je na istom potencijalu kao + polovi obje baterije, a crvena kao – polovi. Doduše, primijetimo da se struja grana na dva jednakaka dijela (baterije u stvarnosti imaju neki mali unutrašnji otpor, a identične baterije imaju identične otpore). Ovo znači da ako iz paralelnog spoja povlačimo 10A struje, kroz svaku bateriju zapravo prolazi 5A pa će paralelni spoj trajati duplo duže nego da iz jedne baterije vučemo 10A. Drugim riječima, kapacitet

paralelnog spoja je veći: ako jedna baterija ima 10000 mAh kapaciteta, dvije takve baterije spojene u paralelu imaju 20000mAh. Zaključimo, **paralelnim spajanjem (identičnih!) baterija voltaža ostaje ista, ali zbrajamo njihov kapacitet.**

Ako spojimo veliki broj baterija u paralelu, možemo dobiti ogromni kapacitet, koji nam omogućuje da povučemo i ogromnu struju, ako treba. Vidi <https://www.youtube.com/watch?v=ywaTX-nLm6Y>.

6.3 Ampermetar i voltmetar

Ampermetar mjeri količinu struje koja prolazi kroz njega i označava se kao:

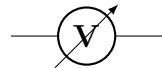


Želimo li znati koliko struje prolazi kroz neki uređaj (npr. otpornik), **ampermetar ćemo spojiti serijski s tim uređajem:**

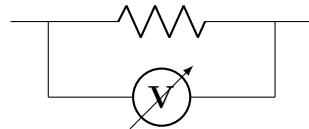


Zašto serijski? Zato što je u tom slučaju struja koja prolazi kroz uređaj jednaka struci koja prolazi kroz ampermetar (struja se ne grana). Kao što smo bili spomenuli, u praksi jačinu struje pronađemo mjerjenjem magnetske sile.

Voltmetar mjeri napon između neke dvije točke strujnog kruga. Označavamo ga kao:

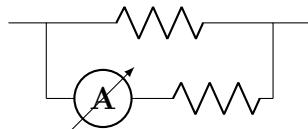


Voltmetar spajamo paralelno s uređajem na čijim krajevima želimo izmjeriti napon:



Zašto paralelno? Zato što voltmetar mjeri napon između neke dvije točke (npr. dva kraja nekog uređaja), stoga dva kraja voltmetra moramo spojiti na te dvije točke. Idealni voltmetar ima beskonačni otpor - kroz njegovu granu struja ne prolazi (tj. on ne ometa struju kroz uređaj).

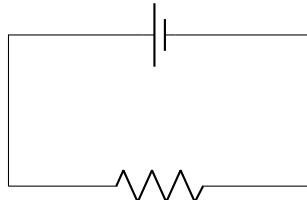
U praksi, voltmetar možemo konstruirati tako da u seriju nanižemo ampermeter i neki otpornik velikog, ali poznatog otpora:



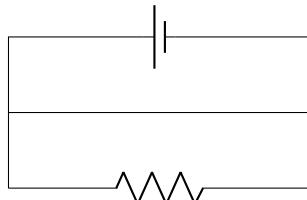
Zbog velikog otpora kroz voltmeter će prolaziti jako mala struja (tako da će voltmeter minimalno ometati struju kroz uređaj čiju voltažu okušavamo mjeriti). Kako je otpor velikog otpornika (koji je u seriji s ampermeterom) poznat, dovoljno je izmjeriti tu malu struju koja prolazi voltmetrom, onda voltažu zaključimo iz Ohmovog zakona $V = IR$.

6.4 Kratki spoj

Promotrimo sljedeći jednostavni strujni krug:



Kažemo da imamo **kratki spoj** ako je struji otvoren put jako niskog otpora - prečac koji preskače otpornik (ili općenito nekakvo trošilo):



Kako taj prečac ima jako mali otpor (u idealnom slučaju otpor mu je 0), kroz njega će proći jako velika struja. Ovo znači da se žica može jako ugrijati, što pak može dovesti do požara (ako je žica u kontaktu sa zapaljivim materijalom). U manje dramatičnom scenariju, prevelika struja može i oštetiti uređaje koji su priključeni u strujni krug. Da bismo zaštitili strujni krug od prevelike struje, koristimo osigurače. **Osigurač** (eng. *circuit breaker*) će napraviti prekid u strujnom krugu ako detektira da kroz njega prolazi prevelika struja. Primjerice, osigurač od 6A će prekinuti strujni krug ako detektira struju veću od 6A.

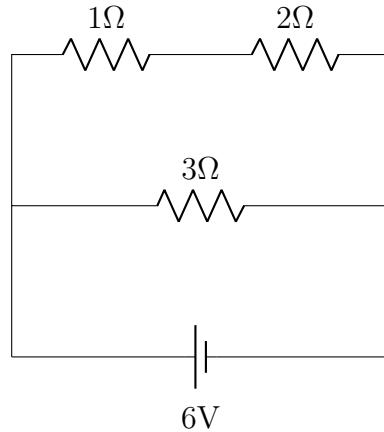
Osigurač se, osim u slučaju kratkog spoja, može aktivirati i ako je npr. više jakih uređaja priključeno na isti dio strujnog kruga (npr. istu utičnicu) pa crpe više struje nego je dozvoljeno.



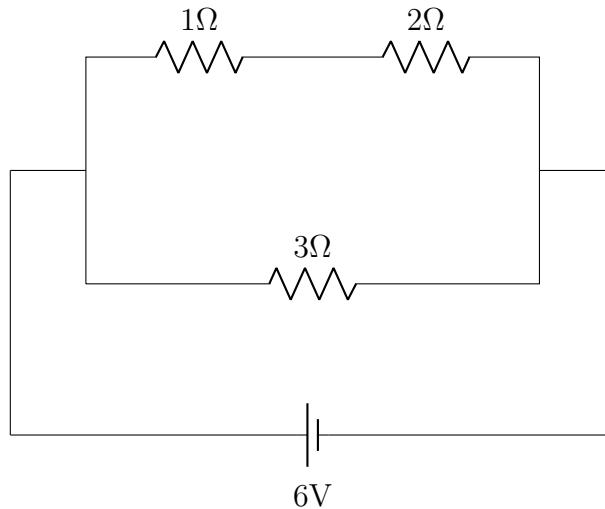
Slika 39: Osigurač je u osnovi samo prekidač. Kada se osigurač aktivira, napravi se prekid u strujnom krugu. Prekid možemo zatvoriti tako da prekidač vratimo u početni položaj (nakon što smo uklonili izvor prevelike struje). Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circuit_breaker_2_pole_on_DIN_rail.JPG

6.5 Dodatak: složeniji strujni krugovi

Promotrimo sljedeći strujni krug:



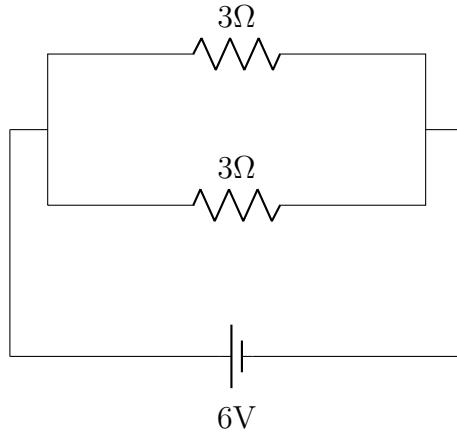
Zanima nas kolika struja će proći kroz svaki dio strujnog kruga. Valjalo bi prvo primijetiti da je to isto što i sljedeći strujni krug:



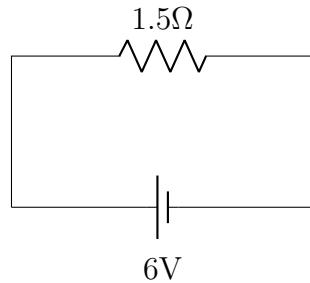
Naime, nebitno je kako izgledaju žice, bitno je samo da su priključci na istom mjestu, odnosno između istih uređaja (u ovom slučaju istih otpornika). Tako je, primjerice, + pol baterije spojen između otpornika od 1Ω i otpornika od 3Ω na obje skice.

Ova druga skica malo bolje prikazuje problem - imamo kolekciju otpornika koji su međusobno spojeni na nekakav način i tu kolekciju smo spojili na bateriju. Tu kolekciju otpornika možemo shvatiti kao crnu kutiju koja ima

svoj efektivni otpor. Prvo ćemo pronaći taj otpor, što moramo napraviti u 2 koraka. Prvo, gornja grana je serijski spoj otpornika od 1Ω i 2Ω . Efektivni otpor ove grane je stoga $1\Omega + 2\Omega = 3\Omega$. Dakle, ništa značajno se ne mijenja ako ta dva otpornika zamijenimo jednim otpornikom od 3Ω :

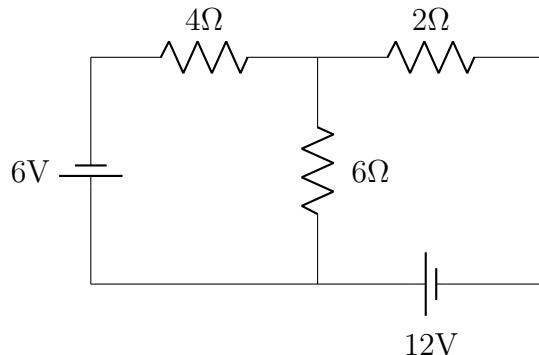


Konačno, sada imamo paralelni spoj dva otpornika od 3Ω , što za efektivni otpor daje $\frac{1}{R} = \frac{1}{3\Omega} + \frac{1}{3\Omega} = \frac{2}{3\Omega}$, odnosno $R = \frac{3\Omega}{2} = 1.5\Omega$. Dakle, taj paralelni spoj možemo zamijeniti jednim otpornikom otpora 1.5Ω i situacija je sada:



Sada lagano možemo pronaći struju koja prolazi kroz bateriju i kroz crnu kutiju koja sadrži sve otpornike (odnosno kroz otpornik od 1.5Ω). Ohmov zakon daje $V = IR$, tj. $I = \frac{V}{R} = \frac{6V}{1.5\Omega} = 4A$. Kako su obje grane jednakog otpora (3Ω), ova struja će se granati na dva jednakaka dijela pa kroz svaku granu prolaze $2A$. Dakle, konačno rješenje je da i kroz gornju i kroz donju granu prolaze $2A$, a kroz bateriju prolaze $4A$.

Sljedeći se strujni krug pak ne može na isti način reducirati do najjednostavnijeg primjera (jer nemamo samo kolekciju otpornika koji su spojeni serijski ili paralelno):



Zato koristimo jednu drugu metodu - Kirchoffova pravila.

1. Naboj je očuvan. Ovo znači da je ukupna struja koja ulazi u neko čvorište jednaka ukupnoj struji koja izlazi iz čvorišta.
2. Rad električne sile (pa samim time ni napon) ne ovisi o putanji. Štoviše, rad električne sile po bilo kojoj zatvorenoj putanji mora biti 0. Dakle, zbroj svih napona (gdje pazimo na pozitivni ili negativni predznak) duž bilo koje zatvorene putanje jednak je 0.

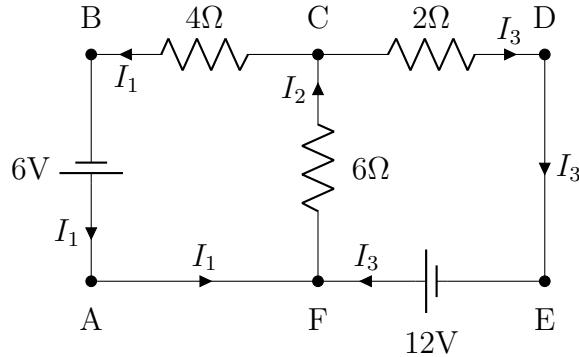
Koristeći ova dva pravila možemo riješiti SVAKI strujni krug (ili barem postaviti jednadžbe za svaki strujni krug; rješavanje tih jednadžbi je onda pitanje odgovarajuće matematike).

Da bismo koristili drugo pravilo moramo paziti na predznak napona. Ključna stvar je da potencijal pada kada prijeđemo s + na – pol baterije, odnosno u smjeru + prema – napon je negativan. Naravno, ako idemo od – pola prema + polu, napon je pozitivan. Što se otpornika tiče, struja ide od + prema –, stoga ako prijeđemo preko otpornika u smjeru struje, potencijal pada i napon je negativan. Ako idemo preko otpornika u smjeru koji je suprotan od struje, potencijal raste i napon je pozitivan.

Iz ovog razloga prije rješavanja problema bi bilo dobro prepostaviti smjer struje svugdje u strujnom krugu. Nema veze ako pogriješimo - samo ćemo na kraju za rješenje dobiti negativan iznos struje, što znači da je pravi smjer

struje suprotan (tj. da odabrani smjer predstavlja gibanje negativnog, a ne pozitivnog naboja).

Primjerice, za gornji strujni krug imamo:



Sada obilazimo zatvorenu putanju $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow A$. Prvo prelazimo bateriju od $+$ pola prema $-$, što daje napon od $-6V$. Sada prelazimo preko otpornika od 4Ω suprotno od smjera struje pa prema Ohmovom zakonu dobijemo napon $+4\Omega I_1$. Nakon toga, prelazimo preko otpornika od 6Ω isto u smjeru suprotnom od struje pa je po Ohmovom zakonu napon $+6\Omega I_2$. Konačno, od F do A idemo po idealnoj žici i napon (razlika u potencijalu) je samo 0. Sveukupno imamo:

$$-6V + 4\Omega I_1 + 6\Omega I_2 + 0 = 0$$

Jednostavnije (zanemarimo li mjerne jedinice):

$$4I_1 + 6I_2 = 0$$

Vidimo da imamo dvije nepoznanice, ali samo jednu jednadžbu (za sada). Drugu jednadžbu dobijemo kada obidiemo putanju $C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow C$ jer i ova putanja opet sadrži struju I_2 . Sada prvo prelazimo preko otpornika od 2Ω u smjeru struje pa je napon $-2\Omega I_3$. Potom prelazimo preko idealne žice i napon je 0V, a nakon toga preko baterije od $-$ pola prema $+$ polu i napon je $+12V$. Za kraj, prelazimo preko otpornika od 6Ω u smjeru struje i napon je $-6\Omega I_2$. Sveukupno:

$$-2\Omega I_3 + 0 + 12V - 6\Omega I_2 = 0$$

Jednostavnije:

$$2I_3 + 6I_2 = 12$$

Sada imamo 3 nepoznanice (I_1 , I_2 i I_3), a samo 2 jednadžbe. Posljednja jednadžba veže sve tri struje i dobijemo je iz prvog Kirchoffovog pravila (iz očuvanja naboja). U točku ulaze struje I_1 i I_3 , a izlazi struja I_2 . Dakle, imamo:

$$I_1 + I_3 = I_2$$

Uvrstimo li ovaj izraz za I_2 u prethodne dvije jednadžbe, dobijemo:

$$4I_1 + 6(I_1 + I_3) = 6$$

$$2I_3 + 6(I_1 + I_3) = 12$$

Ovo pak postane:

$$10I_1 + 6I_3 = 6$$

$$6I_1 + 8I_3 = 12$$

Sada imamo sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, što nije teško riješiti. Dobijemo $I_1 = -\frac{6}{11}A$ i $I_3 = \frac{21}{11}A$. Dakle, smjer struje I_1 smo pogriješili, a smjer struje I_3 smo pogodili. Konačno,

$$I_2 = I_1 + I_3 = -\frac{6}{11}A + \frac{21}{11}A = \frac{15}{11}A.$$

7 Indukcija i izmjenična struja

7.1 Faradayev zakon

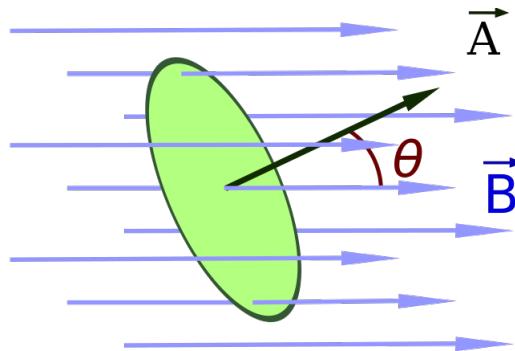
Faraday je 1831. godine primijetio da, kada u blizini zavojnice pomiče magnet, kroz zavojnicu teče struja. Kada magnet miruje, struja ne teče, ali kada magnet uvlači u ili izvlači iz zavojnice, u zavojnici se *inducira* struja. Što brže pomiče magnet, struja je veća i što više navoja zavojnica ima, struja je veća. Također, kada uvlači magnet, struja teče u jednom smjeru, a kada izvlači magnet, struja teče u suprotnom smjeru. Zaključujemo da **promjenjivo magnetsko polje u zavojnici inducira struju**. Vidi <https://www.youtube.com/watch?v=vwIdZjjd8fo>.

Direktna posljedica ovog eksperimenta je da rad električne sile po zatvorenim petlji u prisutnosti promjenjivog magnetskog polja više nije 0. Naime,

električna sila sada djeluje na način da tjera naboje kroz petlju u nekom smjeru. Naboji neće spontano sami od sebe napraviti krug oko petlje - za to treba obaviti rad. Rad koji električna sila obavi kada prenese 1C naboja duž jednog punog krug kroz petlju zovemo elektromotorni napon i obično zapisujemo oznakom ε .

Promjenjivo magnetsko polje dakle stvara električno polje koje nije konzervativno, odnosno rad električne sile sada ovisi o obliku putanje. Samim time i napon ovisi o putanji, a "električni potencijal u točki a " više nije dobro definirana veličina.

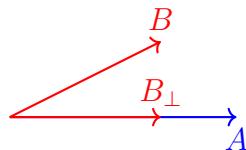
Ne bismo li preciznije formulirali zakon koji je Faraday otkrio svojim eksperimentima, moramo objasniti pojam **toka magnetskog polja** kroz neku (zamišljenu) plohu (eng. *magnetic flux*). Recimo da imamo neku plohu koju probada magnetsko polje B :



Slika 40: A je površina plohe, a \mathbf{A} je vektor duljine A koji je okomit na plohu.

Ugrubo rečeno, tok magnetskog polja kroz plohu Φ_B mjeri koliko magnetsko polje probada tu plohu. Primjerice, ako polje B leži na plohi, \mathbf{A} i \mathbf{B} su okomiti, a tok je 0 (magnetsko polje uopće ne probada plohu).

U općem slučaju nas zanima samo B_{\perp} - dio magnetskog polja koji je okomit na plohu (tj. gleda duž okomice \mathbf{A}):



Tok magnetskog polja možemo sada jednostavno definirati kao $\Phi_B = B_\perp A$.

Ovdje valja primijetiti nešto: i vektor u suprotnom smjeru od \mathbf{A} bi isto bio okomit na plohu. Dakle, smjer okomice \mathbf{A} nije jedinstveno definiran. Kada smo za plohu odabrali jedan od dva moguća smjera za vektor okomice, kažemo da je ploha orijentirana. Suprotni odabir okomice daje plohi suprotnu orijentaciju. Jednostavno rečeno, orijentacija nam samo govori što za plohu znači "gore".

Ako je magnetsko polje u suprotnom smjeru od okomice, onda je tok polja negativan. Dakle, odnos je sličan kao između rada, sile i pomaka¹¹.

Ukoliko se magnetsko polje mijenja duž plohe, plohu možemo isjeckati na male komadiće tako da je na svakom komadiću magnetsko polje (približno) konstantno, potom izračunati tok kroz svaki mali komadić i zbrojiti.

Faradayev zakon sada možemo formulirati na jednostavan način. Kada se magnetski tok kroz neku petlju vodiča mijenja, onda će kroz taj vodič poteći struja. Preciznije, **što se magnetski tok kroz petlju u jedinici vremena više promjeni, to će i iznos elektromotornog napona** (rad po jedinici naboja za jedan krug oko petlje) **biti veći**. Učinak je očitiji kod zavojnice s velikim brojem navoja jer tu u suštini imamo više petlji naslaganih jednu na drugu pa je tok magnetskog polja automatski veći (a samim time i njegova promjena kada pomičemo magnet).

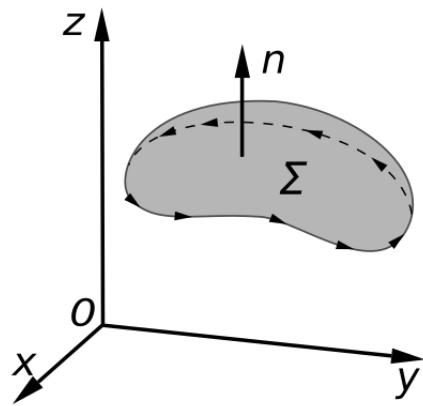
U vodiču će se struja inducirati na takav način da umanji promjenu toka ukupnog magnetskog polja kroz petlju - ovo je tzv. **Lenzovo pravilo**. Drugim riječima, magnetsko polje inducirane struje se odupire promjeni vanjskog magnetskog polja. Razlog je zapravo jednostavan: da kojim slučajem struja pojača magnetski tok kroz petlju, potekla bi još jača struja, koja bi stvorila još jači tok koji bi stvorio još jaču struju i imali bismo eksploziju u energiji.

Lenzovo pravilo objašnjava jednu interesantnu pojavu: kada kroz šuplju bakrenu cijev ispustimo magnet, on će kroz cijev padati polako. Naime, magnet će svojim padom stvoriti promjenjivo magnetsko polje i inducirati vrtložne struje u bakrenoj cijevi (eng. *eddy current*). Magnetsko polje tih vrtložnih struja će usporiti madanje magneta jer se po Lenzovom pravilu smjer struje odupire promjeni vanjskog polja (a polje će se sporije mijenjati ako magnet sporije pada). Vidi <https://www.youtube.com/watch?v=H31K9qcmeMU>. Slična se stvar događa i kada bacimo magnet na bakrenu

¹¹Matematičari taj odnos zovu *skalarni umnožak vektora*: $\Phi_B = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$.

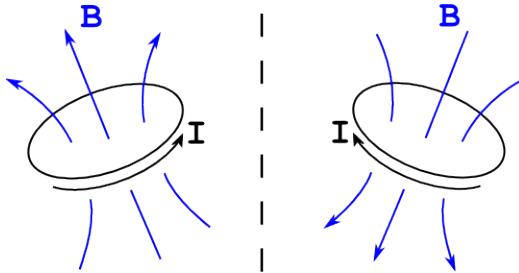
ploču - vrtložne struje i u tom slučaju uspore pad magneta: <https://www.youtube.com/watch?v=Yu1uRvErM80>

Da bismo mogli govoriti o predznaku magnetskog toka, moramo se dogovoriti kako odabratи okomicu (normalu) na plohu koju definira petlja (petlja je rub te plohe). Ako petljу obilazimo u pozitivnom smjeru \circlearrowright , smjer normale je prema gore:



Slika 41: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Stokes%27_Theorem.svg

Dakle, ako se magnetsko polje pojačava u smjeru normale na plohu (prema gore), onda će inducirana struja teći negativnom smjeru \circlearrowleft jer se tako smanjuje tok magnetskog polja kroz petlju. Prisjetimo se kako izgleda magnetsko polje strujne petlje:



Slika 42: Magnetsko polje strujne petlje. Ako struja ide u pozitivnom smjeru \circlearrowright , magnetsko polje petlje će povećati magnetski tok (u smeru prema gore). Ako struja pak ide u negativnom smjeru \circlearrowleft , magnetski tok se smanjuje. Izvor <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:BIsAPseudovector.png>

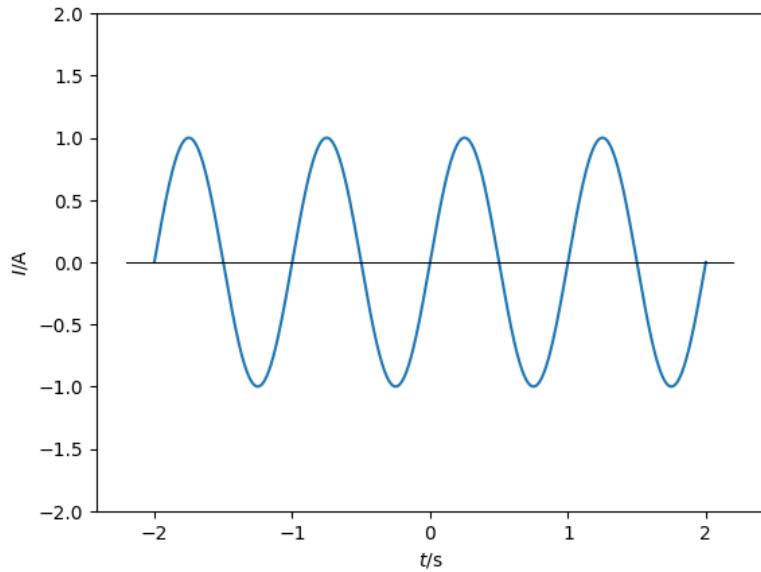
Matematički sve ovo možemo obuhvatiti jednom jednostavnom formulom. Ako s Φ_B označimo tok magnetskog polja kroz petlju žice, tj. s $\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}$ promjenu magnetskog toka u jedinici vremena, onda je elektromotorni napon ε dan s:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}.$$

Minus je tu zbog Lenzovog pravila.

7.2 Izmjenična struja

Vidjeli smo da ako neprestano provlačimo magnet kroz zavojnicu, imamo struju. Magnet ubrzava i usporava, stoga se i promjena toka magnetskog polja mijenja - jača je dok je magnet brži, manja dok je sporiji. Samim time i inducirani elektromotorni napon, a onda i inducirana struja se isto tako mijenjaju s vremenom. Štoviše, dok magnet izvlačimo (pomičemo u suprotnom smjeru) inducirani napon je suprotnog predznaka, tj. struja je u suprotnom smjeru. Dakle, ako magnet izvlačimo i uvlačimo periodički (u pravilnim vremenskim razmacima), struja (i napon) o vremenu ovisi otprilike kao:

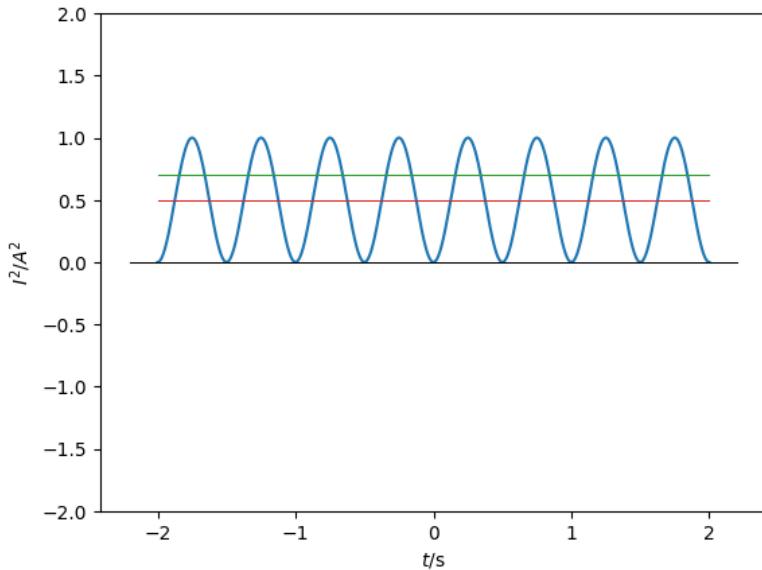


Ovo je **izmjenična struja** (eng. *alternating current, AC*). S druge strane, kada se naboji gibaju u jednom smjeru, imamo **istosmjernu** struju (eng. *directed current, DC*). Ako u jednoj sekundi magnet uvučemo i izvučemo 2 puta, najveća vrijednost struje će se isto postići 2 puta u sekundi i kažemo da je **frekvencija** te struje 2Hz (2 herza [herca]). Frekvencija nam dakle govori koliko *frekventno* (učestalo) se postiže najveća vrijednost struje (ili induciranih napona). Ako se maksimum postigne 10 puta, frekvencija je 10Hz, tj. ciklus se u jednoj sekundi ponovi 10 puta.

Izmjeničnu struju tvore naboji koji se gibaju naprijed-natrag. Znači ne prenosimo naboje, ali prenosimo energiju. Zaista, za snagu (tj. prijenos energije) na otporniku imamo $P = VI = RI^2$, dakle nije bitan predznak struje, već samo njen iznos. Drugim riječima, nebitno je u kojem se smjeru gibaju naboji, već samo koliko jako se gibaju (tj. koliko jako se sudaraju s atomima otpornika).

Dakle, možemo usrednjiti snagu, tj. kvadrat struje (ili napona) po jednom ciklusu¹²:

¹²Srednju vrijednost kvadrata struje nađemo tako da unutar jednog ciklusa napravimo jako veliki broj mjeranja, što daje $I_1^2, I_2^2 \dots I_N^2$. Sada je srednja vrijednost $\langle I^2 \rangle = \frac{1}{N}(I_1^2 + \dots I_N^2)$



Slika 43: Kvadrat struje I^2 i srednja vrijednost kvadrata $\langle I^2 \rangle$ (crveno). Zeleno prikazuje korijen srednje vrijednosti kvadrata struje $\langle I \rangle_{rms} = \sqrt{\langle I^2 \rangle}$

Ako se struja I pravilno mijenja od $-1A$ do $1A$, onda se njen kvadrat mijenja od 0 do 1 , a srednja vrijednost kvadrata struje I^2 po jednom ciklusu je točno na pola puta $0.5 = \frac{1}{2}$. Da je struja išla od $-I_0$ do I_0 , njen kvadrat bi išao od 0 do I_0^2 , stoga bi srednja vrijednost kvadrata struje bila $\langle I^2 \rangle = \frac{I_0^2}{2}$.

Uzmemo li korijen srednje vrijednosti kvadrata struje, dobit ćemo srednju struju (preciznije "root mean square", rms) $\langle I \rangle_{rms} = \sqrt{\langle I^2 \rangle} = \sqrt{\frac{I_0^2}{2}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$. Ovo je vrijednost istosmjerne struje koja bi prenijela istu snagu. Budući da $W = VI = \frac{1}{R}V^2$, napon dobijemo na isti način kao i struju - usrednjimo kvadrat napona, potom uzmemo korijen $\langle V \rangle_{rms} = \frac{V_0}{\sqrt{2}}$.

Struja koju direktno dobijamo iz utičnice je izmjenična. U Hrvatskoj (kao i većini Europskih zemalja) napon iz utičnice je 50Hz i srednja vrijednost (rms) mu je 230V. S druge strane, u SAD je vrijednost 60Hz i 120V (a neke utičnice koje se koriste za veća trošila imaju 240V)¹³. Vidi https://en.wikipedia.org/wiki/Mains_electricity_by_country.

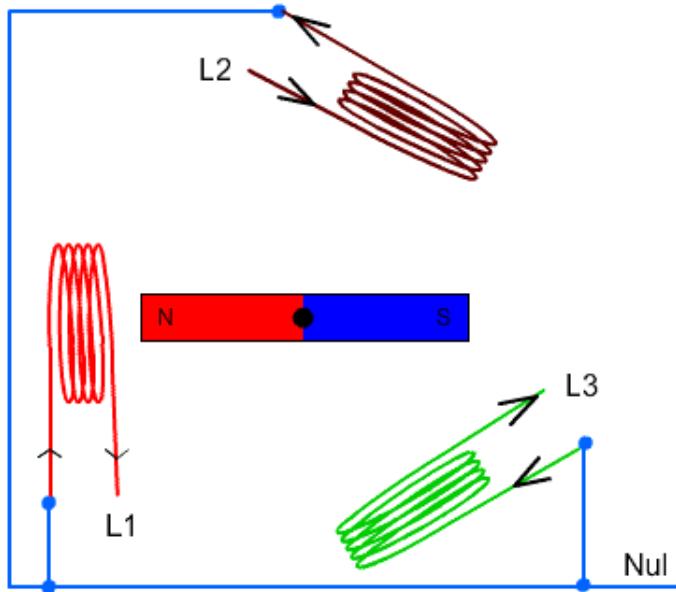
¹³ Japan je interesantan slučaj jer zapadni dio zemlje (od Kanto prema sjeveru) ima 50Hz i 100V, a istočni (od Kansai prema jugu) 60Hz i 200V. Povjesno, Kanto regija (Tokyo) je generatore dobavljala od Nijemaca (AEG), a Kansai regija (Osaka, Kyoto) od Amerikanaca (General Electric). Tako su nastale dvije mreže koje su se tek kasnije spojile. Struja od 50

7.3 Generator i elektromotor

Generator je uređaj koji stvara (izmjeničnu) struju. Imamo zavojnice razmještene razmještene ukrug (ovo miruje, tj. tvori *stator*), a u središtu magnet koji se može okretati (tzv. *rotor*). Kako se magnet okreće, mijenja se magnetski tok kroz zavojnice, što inducira elektromotorni napon. Ovdje valja imati na umu da se, pomalo kontraintuitivno, tok najmanje mijenja upravo onda kada je glava magneta najbliža zavojnici (jer se tada najmanje mijenja udaljenost magneta od zavojnice) pa će tada biti i najmanji inducirani napon.

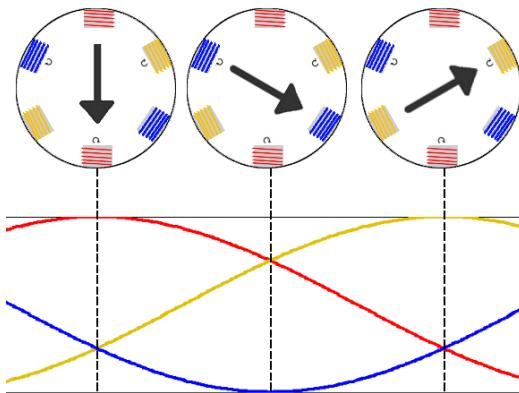
Konačno, jedan kraj svake zavojnice je spojen na zajedničku žicu (tzv. nul ili neutralnu žicu) i ti krajevi svi žive na zajedničkom potencijalu. Na drugom kraju zavojnice se onda inducira izmjenični potencijal u ovisnosti o položaju magneta. Ako se rotor okreće 50 puta u sekundi, dobit ćemo izmjeničnu struju frekvencije 50Hz.

Hz se ne može tek tako spojiti sa strujom od 60Hz - moramo ujednačiti frekvencije. Ovo ograničava koliko brzo se energija može sa Zapada zemlje prebaciti na istok i obratno, što stvara stvarne probleme za vrijeme prirodnih katastrofa (npr. 2011. godine za vrijeme Tohoku potresa).



Slika 44: Primijeti da je u crvenoj (L1) zavojnici struja najmanja. Vidi animaciju: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Simpel-3-faset-generator.gif>

Ovakav generator (s 3 zavojnice) stvara trofaznu struju koju koriste praktički sve svjetske eletrične mreže (tako i Hrvatska). Ovo znači da u žicama koje vode do svake zavojnice imamo izmjeničnu struju, ali u danom trenutku se vrh (najveća vrijednost) struje u jednoj žici neće poklopiti s vrhom u preostale dvije. Kažemo da su te tri struje pomaknute u fazi:

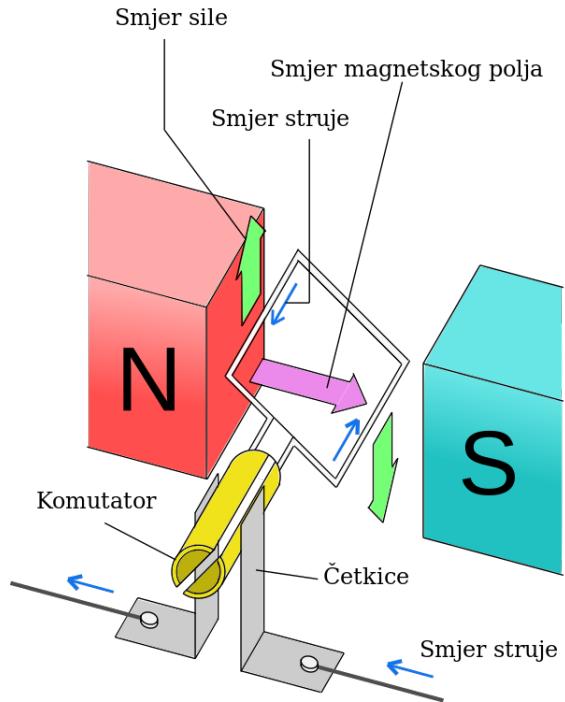


Slika 45: Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rotatingfield.png>

Doduše, mi u domovima dobijemo samo jednu fazu - dobijemo neutralnu žicu i žicu koja vodi do jedne od tri zavojnice (i razlika u naponu između te dvije žice je u prosjeku 230V). S druge strane, industrijski pogoni dobiju sve tri faze, što koriste za pokretanje mašinerije.

Primjerice, koristeći trofaznu struju (koju smo dobili nekim drugim generatorom) možemo stvoriti "rotirajuće" magnetsko polje tako da kroz tri zavojnice statora puštamo različite faze. Zavojnica kroz koju prolazi najveća struja će djelovati kao najjači magnet i privući će rotor. U međuvremenu ta zavojnica oslabi, a druga ojača i rotor se nastavlja rotirati prema toj novoj zavojnici. Na ovaj način se rotor okreće te smo energiju iz električnog oblika pretvorili u mehanički rad. Ovo zovemo **elektromotor**, što je u osnovi isti uređaj kao i generator (samo ga koristimo na drugi način). Za više o trofaznoj struji vidi https://www.youtube.com/watch?v=c9gm_NL7KyE

Postoji i elektromotor koji funkcioniра s usmjerenom strujom (DC elektromotor). Stator je trajni magnet, a rotor elektromagnet. Mehaničkim putem onda možemo preokrenuti smjer struje kroz elektromagnet, što mu okreće magnetske polove i tjera ga da nastavi rotaciju. Mehanizam tvore četkice (eng. *brush*) koje održavaju kontakt s tzv. *komutatorom* koji se rotira. Kada četkice prijeđu rupu u komutatoru, smjer struje kroz elektromagnet se preokrene. Vidi animaciju <https://www.youtube.com/watch?v=CWu1Q1ZSE3c>.



Slika 46: Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:%E3%83%A2%E3%83%BC%E3%82%BF%E3%83%BC%E3%81%AE%E3%81%97%E3%81%8F%E3%81%BF.svg>

Postoji i elektromotor koji radi s DC strujom, a ne koristi četkice (koje se s vremenom troše), tzv. *brushless DC*. Ovo je u osnovi isto što i AC elektromotor, samo se za pokretanje ne koristi trofazna AC struja nego se elektronikom detektira kut rotora i temeljem te informacije pušta (i zaustavi) DC struja kroz odgovarajuću zavojnicu i tako dobije rotirajuće magnetsko polje.

7.4 Transformator

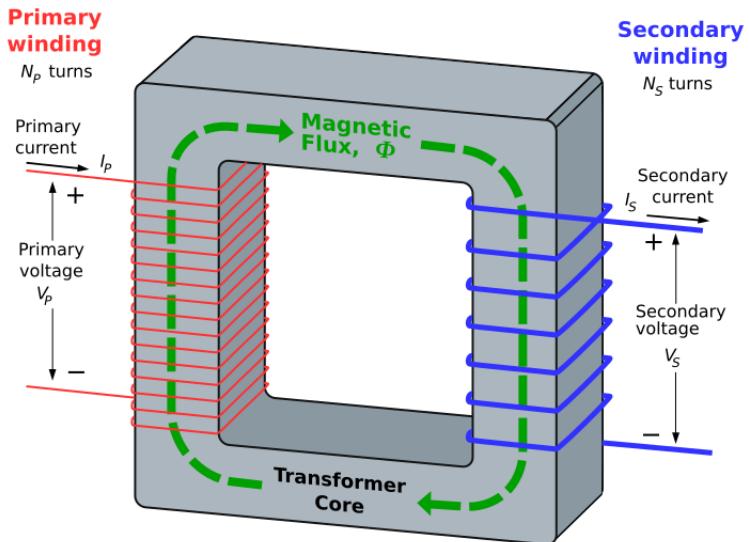
Kasnih 1880-ih godina u New Yorku, dvije tvrtke su se borile za prevlast u području osvjetljenja električnom energijom. S jedne strane Edison General Electric (kasnije General Electric) je koristio istosmjernu struju, a s druge strane, Westinghouse Electric je koristio Teslinu tehnologiju višefazne izmjenične struje (koju je kupio od Tesle 1888. godine). 1893. je Westingho-

use Electric izašao kao jasni pobjednik osvojivši ugovor da osvijetli svjetski sajam u Chicagu. Time se upravo Teslina tehnologija proširila svijetom.

Jedna velika prednost izmjenične struje naspram istosmjerne je da se njom energija puno lakše prenosi na velike udaljenosti.

Naime, recimo da dvjema žicama dovodimo električnu energiju do nekog dalekog mjesto. Razlika u voltaži između te dvije žice je V , te kroz žice prolazi struja I . Izraz za snagu je $P = VI$, stoga ako želimo prenijeti 100W snage električnom strujom, onda to možemo tako da na 100V pustimo 1A struje ili da na 1V pustimo 100A. U drugom slučaju (velika struja) imamo problem - žice se zagrijavaju i energija se gubi dok dođe do potrošača. Dakle, ako nam treba 100W na jednom kraju, s drugog kraja moramo puštati puno više energije od 100W. Stoga, za prijenos energije je poželjno raditi s visokom voltažom, a ne velikom strujom. U ovom pogledu, izmjenična struja je imala veliku prednost u odnosu na istosmjernu - izmjeničnu struju je jako lagano dovesti na visoku voltažu **transformatorom**.

Transformator je samo par zavojnica s različitim brojem navoja koje su blizu jedna drugoj. Najbolje ih je omotati oko neke zajedničke željezne jezgre da bi se fokusiralo magnetsko polje i povećao prijenos energije s jedne na drugu zavojnicu:



Slika 47: Izvor: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Transformer3d_col3.svg

Prva zavojnica (koja je spojena na izvor) je primarni, između njenih krajeva imamo voltažu V_1 i kroz nju prolazi struja I_1 . Kako kroz primarni prolazi izmjenična struja, ona stvara promjenjivo magnetsko polje koje u drugoj zavojnici (sekundarni) inducira elektromotorni napon V_2 i struju I_2 . Pretpostavimo li savršeni prijenos energije, tj. da se svake sekunde sva energija iz prve zavojnice prenese na drugu, onda je snaga na obje zavojnice ista: $V_1 I_1 = V_2 I_2$. Elektromotorni napon na drugoj zavojnici ovisi o njenom broju navoja. Ako druga zavojnica ima manje navoja od prve, na njem krajevima će se inducirati manji napon (nego je na krajevima primarni zavojnici), ali će prolaziti veća struja (nego prolazi kroz primarnu zavojnicu). Ako druga zavojnica pak ima više navoja, na njoj se inducira veći napon, ali kroz nju onda prolazi manja struja.

Vidimo da transformatorom vrlo lagano možemo AC struju pretvoriti iz niskovoltažne u visokovoltažnu (i obratno). Dakle, struja se prvo blizu elektrane prebaci u visokovoltažnu, potom se blizu gradova postepeno prebacuje na niže voltaže, te na kraju u domove dolazi 230V (srednja voltaža rms, Hrvatska).

7.5 "Don't be stupid, stupid" iliti kako NE osvojiti Darwinovu nagradu

Za ljudsko tijelo je opasno ako kroz njega velika struja protjeće neko vrijeme. "Neko vrijeme" se ovdje obično mjeri u milisekundama - vidi https://commons.wikimedia.org/wiki/File:IEC_TS_60479-1_electric_shock_graph.svg. Dok struja prolazi kroz ljudsko tijelo, prenosi se energija (u obliku termalne energije). Ukoliko se prenese značajna količina energije u malo vremena (velika snaga), javit će se opeketine. Čak i struja nije dovoljno velika da izazove opeketine, komplikacije se mogu javiti jer izmjenična struja može poremetiti ritam srca (i izazvati srčani zastoj) ili može izazvati kontrakcije mišića i time onemogućiti disanje.

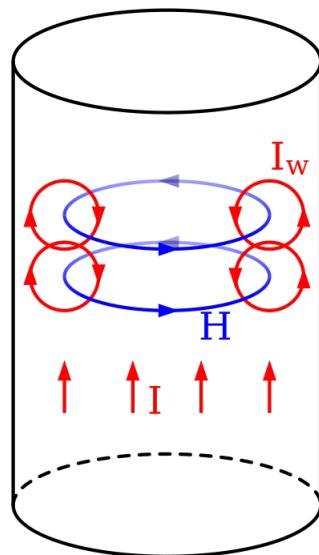
Dakle, opasno je da su dva kraja ljudskog tijela na jako različitim voltažama jer će onda kroz tijelo poteći velika struja. Opasnost se umanji tako da koristimo izolatore. Primjerice, ako bosonogi diramo žicu visokog napona golom rukom, vjerojatno će nas ubiti ili jako ozlijediti struju, koja će poteći od žice prema tlu. Ako pak obučemo gumene čizme i stanemo na nekakvu drvenu dasku i tek onda dotaknemo žicu, zbog velikog otpora na našim nogama kroz nas neće poteći velika struja prema zemlji (ali ako je voltaža baš velika ni izolacija možda ne bude dovoljna). S druge strane, suha koža ima veći otpor od mokre, stoga ćemo mokri puno lakše doživjeti strujni udar nego kada smo suhi.

Nadalje, ako objeručke uhvatimo jedno te istu žicu (dakle i jednom i drugom rukom diramo isti napon), neće se ništa značajno dogoditi jer je napon, tj. razlika u potencijalu mala pa će poteći i mala struja. Zato npr. ptice mogu sletiti na dalekovode potpuno sigurno. Treba imati na umu da se napon može mijenjati od točke do točke, stoga ako baš želite golim rukama dirati visokonaponsku žicu (što ne preporučujem), nakon što izolirate noge od tla, najsigurnije je obje ruke postaviti jako blizu jednu drugoj. Ovo je razlog zašto, kada visokonaponska žica dodirne tlo, radi sigurnosti osoba u blizini mora skupiti noge i sitnim korakom (bez razdvajanja nogu) doći na sigurnu udaljenost. Ako su noge znatno raširene, može se dogoditi da je između njih dovoljna razlika u potencijalu (tj. dovoljni napon) pa će struja proći kroz jednu prema drugoj nozi. Možete i skakutati na jednoj nozi, no u tom slučaju postoji opasnost gubitka ravnoteže i pada (a onda će vas sigurno stresti struja).

Interesantno je da struja viših frekvencija manje boli: vidi primjerice

<https://www.youtube.com/watch?v=MMzU66IHe-k>. Neki ljudi ovo ponekad objašnjavaju pomoću tzv. *skin efekta*, no to nije točno.

Prvo, *skin efekt* (površinski efekt) je pojava gdje izmjenična struja vrlo visokih frekvencija teče uglavnom samo površinom vodiča. Ovo se javlja zbog elektromagnetske indukcije - pri visokim frekvencijama struja stvara promjenjivo magnetsko polje, koje pak stvara značajne vrtložne struje. Te vrtložne struje u unutrašnjosti vodiča idu u suprotnom smjeru od struje i tako je poništavaju.



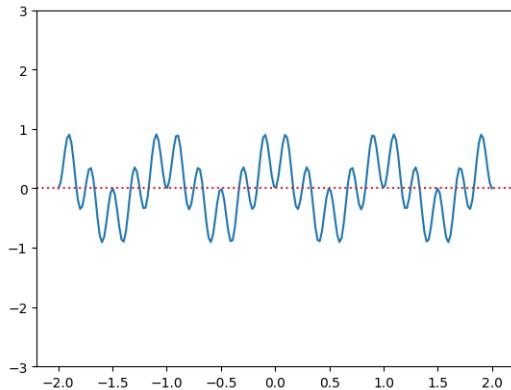
Slika 48: Razlog skin efekta. Izmjenična struja I stvara promjenjivo magnetsko polje H , koje stvara vrtložne struje I_w . Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Skineffect_reason.svg

Primijetimo da, kako sada struja prolazi efektivno manjim poprečnim presjekom vodiča, otpor je veći. Ovo je (jedan od) razloga zašto nije zgodno koristiti AC struju visoke frekvencije za prijenos električne energije. Skin efekt NIJE toliko značajan na ljudskom tijelu jer ono nije toliko dobar vodič (ima veliki otpor), stoga je i dubina do koje se struja probije značajna - struja neće teći samo po koži.

Razlog zašto struja visoke frekvencije ne boli je zapravo biološki: živci i stanice jednostavno ne reagiraju na visoke frekvencije pa ih ni ne osjetimo.

Naravno, vrlo jaku struju visoke frekvencije ćemo svakako osjetiti (u najmanju ruku izazvat će opekatine).

Pripazi! Ponekad se javljaju periodičke komponente u struji koje su niže frekvencije pa nas struja svejedno može stresti:

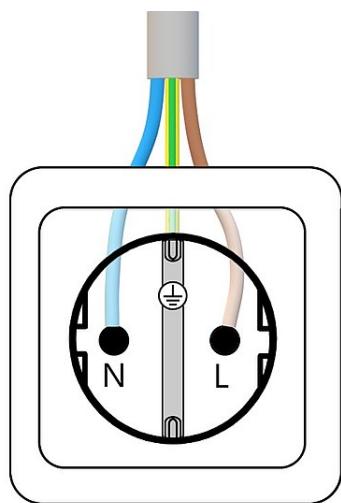


Slika 49: Struja visoke osnovne frekvencije nalazi se u periodičkom signalu niže frekvencije. Iako živci ne reagiraju na osnovnu frekvenciju struje, mogu reagirati na frekvenciju signala.

Recimo da imamo neki uređaj (npr. toster) koji ima neke unutrašnje žice kroz koje prolazi struja i vanjsko kućište od metala. Ako se dogodi da unutrašnje žice slučajno dotaknu kućište, kućištu će se automatski povisiti potencijal, stoga je vrlo opasno dirati toster (jer kroz nas može proteći struja prema tlu). Ovu opasnost možemo izbjegići tako da žicom spojimo kućište i tlo. Kažemo da smo toster **uzemljili**. Sada su toster i tlo na istom potencijalu (bilo kakav višak naboja na tosteru sada može putem niskog otpora otići u tlo), stoga nema velike opasnosti ako netko dotakne toster. Ako se slučajno dogodi da u uređaju unutrašnje žice dodirnu kućište, velika struja će poteći kroz žicu do tla. Stavimo li osigurač na tu žicu, on će se aktivirati kada kroz njega prođe velika struja i isključit će uređaj (i cijeli dio strujnog kruga na koji je uređaj spojen).

Neutralna žica je isto spojena s tlom (tako da je razlika u potencijalu između nje i tla minimalna), što znači da, ukoliko dotaknemo neutralnu žicu, kroz nas ne prolazi struja. Ako pak dotaknemo žicu koja nosi jednu tri faze (eng. *live wire*), onda postoji napon između žice i tla i ne piše nam se dobro. Video o uzemljenju: <https://www.youtube.com/watch?v=jduDyF2Zwd8>.

Većina zemalja EU (uključujući Hrvatsku) koristi tzv. schuko utičnice (njem. *Schutzkontakt*), tj. utičnice tipa F. Iznimka su Francuzi, Belgijanci, Poljaci, Česi, Slovaci koji koriste vrlo slični francuski standard (utičnice tipa E), Danci (tip K) te Talijani (koji osim schuko koriste i utičnice tipa L). Vidi https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Map_of_current_European_mains_electricity_plug_types.png.



CEE 7/3 European socket wiring

Slika 50: Schuko utičnica. Neutralna žica (N, plavo) je obično lijevo, faza (L, narančasto) desno, a iznad i ispod su spojevi za uzemljenje (zeleno). Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:CEE_7-3_european_socket_wiring_-_schuko_polarity_standard.jpg.

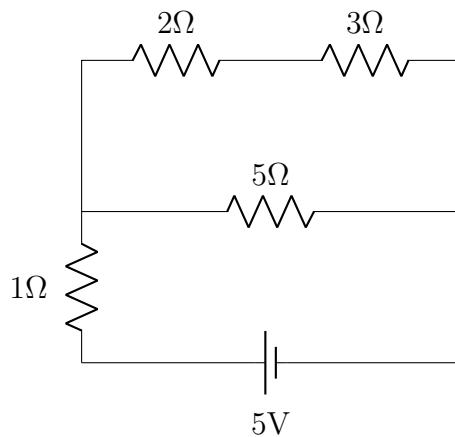
8 Pitanja i Zadatci

1. Voltmetar u strujnom krugu spajamo (paralelno/serijski?). Zašto?
2. Ampermetar u strujnom krugu spajamo (paralelno/serijski?). Zašto?
3. Objasni Ohmov zakon svojim riječima. Pritom navedi koje veličine veže ta matematička relacija i na koji način (zamisli npr. da se jedna veličina poveća/smanji dva puta?).
4. Kako otpor ovisi o duljini vodiča?
5. Serijskim spajanjem otpornika njihov ukupni otpor se (povećava/smanjuje?). Objasni ovo imajući na umu odgovor na prethodno pitanje.
6. Kako otpor ovisi o poprečnom presjeku?
7. Paralelnim spajanjem otpornika njihov ukupni otpor se (povećava/smanjuje?). Objasni ovo imajući na umu odgovor na prethodno pitanje.
8. Što se dogodi kada na bateriju od 5V spojimo prvo jednu žaruljicu, potom 5 identičnih serijski spojenih žaruljica. Hoće li u oba slučaja žaruljice jednakojako svijetliti (odgovori imajući na umu odgovor na prethodno pitanje)? Koliko se potroši energije za prijenos 1C naboja kroz cijeli krug u prvom slučaju, a koliko u drugom? Koliko se potroši energije za prijenos 1C naboja kroz jednu žarulju u prvom, a koliko u drugom slučaju [kako se ponašaju voltaže u serijskom spoju]?
9. Smjer struje je smjer gibanja (pozitivnog/negativnog?) naboja. Dakle, struja ide od mjesta (višeg/nižeg?) napona prema mjestu (višeg/nižeg?) napona, odnosno od (+/-?) pola baterije prema (+/-?) polu baterije.
10. Elektron je čestica (pozitivnog/negativnog) naboja. Dakle smjer gibanja elektrona je (isti smjeru/suprotan od smjera) gibanja struje. Elektroni se dakle gibaju od (+/-) do (+/-) pola baterije.
11. Kratki spoj će se javiti ako bateriju serijski spojimo s (trošilom/samom sobom?).
12. Imate dvije identične žarulje te bateriju neke (nebitne) voltaže. Spojili ste jednu žarulju na bateriju te voltmetrom očitali napon na njenim

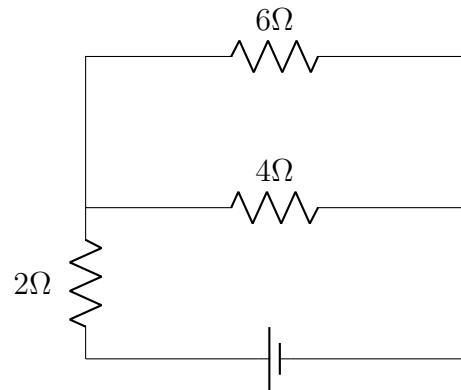
krajevima. Sada ste spojili te dvije žarulje serijski te voltmetrom očitali napon na krajevima JEDNE od žarulja. Napon je (veći/ manji/isti?) u drugom slučaju

13. Imate dvije identične žarulje te bateriju neke (nebitne) voltaže. Spojili ste jednu žarulju na bateriju te ampermeterom očitali struju koja kroz nju prolazi. Sada ste spojili te dvije žarulje serijski te ampermeterom očitali struju kroz te dvije žarulje. Struja je (manja/veća?) u drugom slučaju zato što je otpor serijski spojenih trošila (manji/veći?).
14. Radite pokuse s magnetima. Spojili ste zavojnicu na voltmetar (ali NE i na kakav izvor napona, npr. bateriju) i stavili u nju magnet. Nakon 30s očitavate voltmetar. On pokazuje V.
15. Radite pokuse s magnetima. Sada vam je palo na pamet očitavati voltmetar dok vadite magnet iz zavojnice. Što ćete vidjeti? Igla na voltmetru (se pomiče/ ostaje na mjestu?)
16. Ako u pravilnim vremenskim razmacima nastavite uvlačiti i izvlačiti magnet iz zavojnice inducirati ćete (istosmjernu/ izmjeničnu?) struju.
17. U utičnici možete izmjeriti (izmjenični/istosmjerni?) napon. Dakle, u Hrvatskoj napon gradske mreže stoji na konstantnoj vrijednosti od 230V i ne mijenja se. (Točno/Netočno?).
18. Bateriju kolike voltaže treba spojiti na otpornik od 50Ω da bi kroz njega potekla struja od 0.24A?
19. Ako smo spojili otpornik od 20Ω na bateriju od 5V, kolika će struja proteći otpornikom?
20. Struja jačine 0.24A protjeće kroz žarulju 48h. Koliko je naboja prošlo kroz žarulju za to vrijeme?
21. Ako smo za prijenos 200C naboja kroz žarulju utrošili 2.7kJ energije, koliki je napon na krajevima te žarulje?
22. TV snage 200W je spojen na napon gradske mreže (230V). Ako je TV bio uključen 24h, koliko je naboja proteklo kroz strujni krug u C. Izračunaj koliko je to elektrona ako je naboј jednog elektrona $1.6 \cdot 10^{-19} C$.

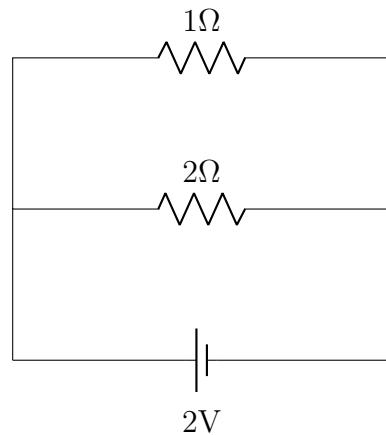
23. Bojler snage 1000W je uključen na napon gradske mreže u Hrv. (230V). Ako bojler radi 2h dnevno koliko će naboja proteći kroz grijач bojlera za mjesec dana (uzmi da mjesec ima 30 dana)?
24. Otpornost bakra (pri 20°C) je $16.78n\Omega\text{m}$ (sjetimo se da $1n\Omega = 10^{-9}\Omega$, tj "nano" je bilijunti dio). Izračunaj otpor žice od bakra poprečnog presjeka 0.5cm^2 i duljine 10m.
25. Željeznu žicu duljine 20m i poprečnog presjeka 0.1cm^2 smo spojili na bateriju od 5V i izmjerili struju od 26A. Izračunaj otpornost željeza. Očekuješ li veću ili manju otpornost na višoj temperaturi?
26. Otpor žice je 50Ω . Koliki će biti otpor ako istu žicu razvučemo u duplo veću duljinu? [Hint: ako je duljina duplo veća, što se događa s poprečnim presjekom? Hint Hint: volumen je očuvan]
27. Serijski ste spojili žarulje otpora 10Ω i 100Ω na bateriju napona 12V. Nacrtaj strujni krug. Kolika će struja proteći strujnim krugom.
28. Paralelno ste spojili otpornike od 5Ω i 100Ω na bateriju napona 12V. Nacrtaj strujni krug. Kolika će struja proteći kroz bateriju?
29. Imamo 5 identičnih otpornika od 5Ω . Izračunaj njihov otpor kada ih spojimo paralelno i kada ih spojimo serijski. Skiciraj strujni krug u oba slučaja. U kojem slučaju je veća vrijednost (i koliko puta)?
30. Izračunaj ukupni otpor spoja otpornika i struju kroz bateriju.



31. Izračunaj ukupni otpor i napon baterije ako kroz bateriju prolazi 1A.



32. Izračunaj struju kroz gornji krak



33. U strujnom krugu iz ranijeg zadatka (možete koristiti rezultate koje ste dobili) odredi struju kroz otpornik od 5Ω :

