Algebra za osnovnoškolsku fiziku

Duje Jerić- Miloš

5. srpnja 2024.

1 O algebri

Do sada smo valjda naučili raditi s brojevima. Broj 5 označava 5 "nečega". To može biti 5 jabuka, 5 auta, 5 grla stoke, 5 eura... konkretno o čemu je riječ nije bitno. Brojevi stoga *apstrahiraju*[1] pojam "količine" - bitno je samo koliko "nečega" imamo, a ne o čemu je riječ. Tu količinu označavamo određenim simbolima. U slučaju broja "pet" to je 5 (arapska znamenka), ali kroz povijest i u različitim kulturama su korišteni i drugi simboli, npr. V (Rim), 五 (Kina), itd.

Algebra pokušava odrediti svojstva koja brojevi zadovoljavaju. Nju stoga često ne zanima konkretno o kojem je broju riječ, već samo koja svojstva taj broj zadovoljava. Algebra apstrahira sam broj, tj. "konkretnu količinu" (nečeg) i govori o "nekoj količini" (nečeg). Dakle, nije bitno je li 5 nečega ili 6 nečega, bitno je samo da je riječ o nekom broju nečega. Proizvoljni broj ne možemo stoga označiti njegovim "imenom" (arapskim znamenkama), već za to koristimo neke druge simbole, što su najčešće slova latinične (a,b,c...), ali ponekad i grčke abecede (α, β, γ...).

Tako, recimo, činjenicu da "nije bitan redoslijed zbrajanja" možemo iskazati davanjem nekoliko primjera, npr. $5 + 3 = 3 + 5$ ili $4 + 6 = 6 + 4$ ili $2 + 3 = 3 + 2$, itd. Ipak, u ovom slučaju smo tvrdnju iskazali samo za neke konkretne slučajeve, tj. parove brojeva. Bolje bi bilo reći: "za svaka dva broja a i b vrijedi $a + b = b + a$". Ovo obuhvaća sve slučajeve.

[1] Apstrahiranje ugrubo možemo definirati kao zanemarivanje detalja (zanemarivanjem detalja nešto činimo apstraktnijim - fokusiramo se samo na najnužnija svojstva). Suprotno značenje bi bilo *konkretiziranje*, odnosno dodavanje detalja (jer dodavanjem detalja nešto činimo konkretnijim).

Nadalje, može se dogoditi da broj ne poznajemo direktno, već samo po nekoj relaciji koju on zadovoljava. Primjerice, imamo određene novce (ali nismo točno izbrojali koliko). Kada platimo 15 eura ostane nam 30 eura. Sada možemo početnu svotu novca označiti sa, recimo, x. Relacija koju x zadovoljava je $x - 15 = 30$. Naravno, početna svota novca je 45 (jer $45 - 15 = 30$), što možemo zapisati kao $x = 45$. Taj nepoznati broj (koji smo označili slovom, a koji zadovoljava neku relaciju) često zovemo *nepoznanica*. Ponekad neku relaciju zadovoljava više brojeva. Recimo, $(x - 1)(x - 2) = 0$ će vrijediti kada $x = 1$ (onda je $(1 - 1) \cdot (1 - 2) = 0$) ili kada $x = 2$ (onda je $(2 - 1) \cdot (2 - 2) = 0$).

Ovdje smo koristili simbol "=" (jednako) pa bi bilo dobro objasniti i što on znači. Vrlo jednostavno, = znači da su brojevi sa obje strane jednaki. Dakle, sljedeće tvrdnje su istinite $5 = 5$ ili $2 + 3 = 5$ ili $10 - 2 = 8$, itd. Sljedeće tvrdnje nisu istinite: $6 = 5$ ili $2 + 2 = 5$ ili $3 + 4 = 10$, itd. Ovdje napomenimo da je 2+3 isto broj - broj koji dobijemo kada izvrvšimo operaciju zbrajanja.

Ako $x = 5$, to znači da x sada predstavlja broj 5. Gdje god u nastavku vidimo broj x možemo ga zamijeniti s 5, a gdje god vidimo 5 možemo ga zamijeniti brojem x. Naravno, nebitno je pišemo li $x = 5$ ili $5 = x$ u oba slučaja tvrdimo isto: "x i 5 su jedno te isti broj", tj. "predstavljaju jedno te istu količinu". Naravno, 5 je "ime" te količine, a x je samo privremena oznaka koju smo koristili jer možda u početku nismo bili sigurni točno o kojoj količini je riječ.

2 Manipuliranje algebarskim izrazima

Kada imamo neku jednakost, npr. $5 = 5$, onda nam je dozvoljeno na obje strane jednakosti izvršiti istu operaciju. Recimo, ako na obje strane jednakosti dodamo isti broj, jednakost će još uvijek vrijediti: $5 + 2 = 5 + 2$. Mogli smo imati i izraz oblika $2 + 3 = 5$, onda dodavanjem 2 na obje strane dobijemo $2 + 3 + 2 = 5 + 2$.

Isto tako, možemo i množiti obje strane istim brojem: ako $5 = 5$, onda i $5 \cdot 2 = 5 \cdot 2$ (ili ako $2 + 3 = 5$, onda $(2 + 3) \cdot 2 = 5 \cdot 2$). Naravno, možemo i oduzeti isti broj ili podijeliti istim brojem obje strane, jednakost će vrijediti.

Ovo vrijedi i za mnoge druge operacije - dozvoljeno je korijenovati obje strane, dignuti obje strane na neki isti eksponent, logaritmirati obje strane, uzeti sinus, kosinus, tangens od obje strane, primijeniti hiperbolne funkcije, eliptičke funkcije, Riemannov zeta ili bilo koju drugu funkciju [2]. Ovo vrijedi ponoviti jer predstavlja centralnu ideju ovih bilješki, a možda i osnovnoškolske algebre uopće:

> Ako vrijedi neka jednakost, uvijek je dozvoljeno izvršiti istu operaciju na obje strane te jednakosti. Jednakost u tom slučaju vrijedi i za rezultat.

Jednakost možemo shvatiti kao uravnoteženu vagu. Ako napravimo istu stvar na obje strane vage (npr. dodamo isti uteg ili poduplamo postojeće utege, itd.) - ona će ostati u ravnoteži.

Ovaj zaključak postane puno korisniji kada ga koristimo s nepoznanicama. Neka vrijedi, kao prije, $x - 15 = 30$, tj. početna svota novca umanjena za 15 je 30 eura. U tom slučaju, možemo obje strane uvećati za 15. Naime, kada "početnu svotu umanjenu za 15" uvećamo za 15 dobit ćemo samo "početnu svotu". Dakle, iz $x - 15 = 30$ slijedi da $x - 15 + 15 = 30 + 15$, tj. vrijedi da $x + 0 = 45$, odnosno $x = 45$.

Naravno, mogli smo obje strane uvećati za bilo koji drugi broj, npr. $x - 15 + 2 = 30 + 2$, što bi dalo $x - 13 = 32$. Ovo je točna tvrdnja, ali ne pomaže odrediti x. Najbolje što možemo napraviti je dodati 15, jer onda s lijeve strane ostane samo x (nepoznanica, tj. početna svota).

Objasnimo ovo sistematično. Primijetimo da su zbrajanje i oduzimanje inverzne operacije. Ovo znači da kada nekom broju (npr. 5) dodamo neki drugi broj (npr. 2) potom taj isti broj (2) oduzmemo, dobit ćemo ponovno prvi broj (5). Drugim riječima vrijedi, $5 + 2 - 2 = 5$. Zbrajanje i oduzimanje istog broja ne mijenja početnu vrijednost.

Promotrimo sada relaciju $x + 2 = 6$ - naravno jedini broj koji zadovoljava ovu relaciju je 4 (jer $4 + 2 = 6$). Ipak, čak i da nam to nije očito, možemo s obje strane oduzeti 2 (tako da na lijevoj strani ostane samo x). Ovo daje $x + 2 - 2 = 6 - 2$, tj. $x = 6 - 2$.

Da smo pak imali $x - 2 = 6$ (jedini broj x koji ovo zadovoljava je 8 jer $8 - 2 = 6$), onda bismo na obje strane dodali 2. Ovo daje $x - 2 + 2 = 6 + 2$, tj. $x = 6 + 2$.

Izvodimo sljedeći zaključak:

[2]Zapravo, sve navedene operacije su funkcije. Primjerice, "zbrajanje brojem 2" je funkcija koja svakom broju x pridruži broj $x+2$, korijenovanje pozitivnom broju x pridruži njegov korijen $\sqrt{x}$, itd. Općenito, princip sada kaže da, ako $x = y$, onda $f(x) = f(y)$.

> Kada na nepoznanicu dodajemo neki broj, taj broj možemo "prebaciti" na drugu stranu jednakosti, ali pritom on mijenja predznak. Drugim riječima, operacija $+$, prelazi u njoj inverznu operaciju $-$, odnosno operacija $-$ prelazi u $+$.

Dakle, $x + 2 = 6 \implies x = 6 - 2$, odnosno $x - 2 = 6 \implies x = 6 + 2$.

Množenje i dijeljenje su isto inverzne operacije. Ovo znači kada neki broj (npr. 5) pomnožimo nekim brojem (npr. 2) i opet podijelimo istim brojem (2), rezultat je prvi broj (5), tj. $5 \cdot 2 \div 2 = 5$, što možemo još zapisati i kao $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$.

Pretpostavimo da sada nepoznanicu množimo nekim brojem, npr. $2 \cdot x = 6$. U ovom slučaju, možemo podijeliti sa 2 obje strane jednakosti. Dobijemo $\frac{x \cdot 2}{2} = \frac{6}{2}$, tj. $x = \frac{6}{2}$. Naravno, $\frac{6}{2} = 3$ je ujedno i rezultat koji očekujemo jer znamo da ako dva x-a koštaju 6, onda jedan košta 3.

Obratno, da smo imali $\frac{x}{2} = 6$, možemo pomnožiti obje strane s 2. Ovo daje $2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \cdot 6$, tj. $x = 2 \cdot 6$. Naravno, rezultat je 12 jer ako pola x-a košta 6, onda cijeli x košta 12. Izvodimo sljedeći zaključak:

> Kada nepoznanicu množimo nekim brojem, taj broj možemo "prebaciti" na drugu stranu jednakosti, ali pritom drugu stranu jednakosti dijelimo istim brojem. Drugim riječima, operacija množenja $\cdot$ prelazi u njoj inverznu operaciju dijeljenja $\div$, odnosno operacija dijeljenja $\div$ prelazi u njoj inverznu operaciju množenja $\cdot$. [3]

Dakle, $2x = 6 \implies x = \frac{6}{2}$, odnosno $\frac{x}{2} = 6 \implies x = 6 \cdot 2$.

Ovaj posljednji zaključak je posebno bitan za osnovnoškolsku fiziku. Naime, većina formula s kojima ćemo se susresti su oblika $a = b \cdot c$ ili $a = \frac{b}{c}$ te je potrebno iz formule za a izvesti formulu za b ili c.

3 Algebra u fizici

Demonstrirajmo ove principe na jednostavnom fizikalnom primjeru. Uzmimo jednadžbu koja opisuje elastičnu silu opruge. Rastežemo oprugu nekom silom

[3] Primijetimo da je zaključak gotovo identičan onome za zbrajanje i oduzimanje. Ovo nije slučajnost te se zaključak može iskazati potpuno općenito, ako je operacija invertibilna. Naime, ako za neku funkciju f imamo $f(x) = y$, onda pronađemo njoj inverznu funkciju f^{-1} pa će vrijediti $x = f^{-1}(y)$.

F, a ta sila je tolika da opruga miruje rastegnuta za neku vrijednost x (u odnosu na njenu duljinu kada na nju ne djelujemo nikakvom silom).

Hookeov zakon kaže da će sila biti jednaka $F = k \cdot x$, gdje je k neka konstanta koja ovisi o opruzi i govori koliko je opruga "kruta", tj. "labava" (veći k znači da je opruga kruća, tj. treba više sile da bismo je rastegnuli za istu duljinu).

Ako znamo da je konstanta opruge jednaka 100N/m (dakle treba 100N da bismo je rastegnuli za 1m), a da je opruga rastegnuta za 0.5m, onda lagano pronađemo silu tako da samo uvrstimo u formulu: $F = 100\text{N/m}\cdot 0.5\text{m} = 50\text{N}$.

Ukoliko je poznato da je opruga konstante 100N/m, a na nju djeluje sila od 20N, onda možemo pronaći koliko se opruga rastegnula na sljedeći način. Uvrstimo poznato $F = 20\text{N}$ i $k = 100\text{N/m}$ pa $20N = 100N/m \cdot x$. Iz ovoga prebacivanjem 100N/m na drugu stranu dobijemo: $\frac{20\text{N}}{100\text{N/m}} = x$, što daje $0.2\text{m} = x$.

Konačno, ukoliko djelujemo silom od $F = 20\text{N}$ na oprugu, a ona se produljila za $x = 0.5\text{m}$, možemo pronaći konstantu opruge na sljedeći način. Uvrstimo poznato: $20N = k \cdot 0.5\text{m}$, potom prebacimo 0.5m na drugu stranu, što daje $\frac{20\text{N}}{0.5\text{m}} = k$, tj. $40\text{N/m} = k$.

Algebra je korisna i kada pretvaramo mjerne jedinice. Recimo, ako znamo da je $1\text{m} = 100\text{cm}$ (1m i 100cm predstavljaju istu veličinu), onda je

$$1\text{m}^2 = 1\text{m} \cdot 1\text{m} = 100\text{cm} \cdot 100\text{cm} = 10\ 000\text{cm}^2.$$

Prebacivanjem 10 000 na drugu stranu, dobijemo $\frac{1}{10\ 000}\text{m}^2 = 1\text{cm}^2$, tj. 1 centimetar kvadratni je deset tisućiti dio metra kvadratnog.

Nadalje, ako znamo da je $1\text{cm} = \frac{1}{10}\text{dm}$ (centimetar je deseti dio decimetra, tj. u jednom decimetru ima 10 centimetara), onda

$$1\text{cm}^2 = 1\text{cm} \cdot 1\text{cm} = \frac{1}{10}\text{dm} \cdot \frac{1}{10}\text{dm} = \frac{1}{10 \cdot 10}\text{dm}^2 = \frac{1}{100}\text{dm}^2.$$

Drugim riječima, 1 centimetar kvadratni je stoti dio decimetra kvadratnog. Prebacimo li $\frac{1}{100}$ na drugu stranu, dobijemo $100\text{cm}^2 = 1\text{dm}^2$, tj. u jednom decimetru kvadratnom ima 100 centimetara kvadratnih.