Pripreme za natjecanje iz fizike

Duje Jerić-Miloš

19. ožujka 2025.

1 Školsko natjecanje 2023/2024

1.1 Zadatak 1

Zadatak 1. Čovjek mase 80kg uspinje se stepeništem visine 15m koje ima N stepenica jednakih visina. Ako se čovjek uspne za jednu stepenicu, gravitacijska potencijalna energija poveća mu se za 120J.

1. Ako je snaga čovjeka pri penjanju 600W, odredi ukupno vrijeme penjanja, visinu pojedine stepenice te ukupan broj stepenica.

2. Ako bi čovjek nosio torbu mase 10kg sa sobom pri penjanju tim stepenicama, koliko bi iznosilo njegovo vrijeme penjanja kad bi njegova snaga uspinjanja i dalje bila 600W? Pretpostavi da je proces penjanja proces stopostotne korisnosti.

Prije rješavanja odaberite oznake (ali nemojte potrošiti puno vremena na ovo - ako vidite logičan način da označite sve veličine super, inače barem odaberite oznake za ono što se traži).

- Radi jasnijeg zapisa možemo uvesti sljedeće oznake: visina stepenice h, visina stubišta H, vrijeme potrebno da se popnemo na jednu stepenicu t, vrijeme potrebno da se popnemo na vrh stubišta T, rad koji ćemo obaviti kada se popenjemo na jednu stepenicu w, rad koji ćemo obaviti kada se popenjemo na stubišta W.

- Naravno ovo je samo jedan odabir oznaka, još jedna logična (ali ružnija) mogućnost je jednostavno pisati $t_{\text{stepenica}}$, $t_{\text{stubište}}$, $h_{\text{stepenica}}$, $h_{\text{stepenica}}$,

$W_{\text{stepenica}}$, $W_{\text{stubište}}$. Nešto ljepše bi bilo pisati npr. h, t, W za veličine koje se odnose na stubište, a h_1, t_1 W_1 veličine koje se odnose na *jednu* stepenicu.

- Vrijeme i rad kada čovjek nosi torbu označimo s W', w', T', t', masu čovjeka s torbom isto tako označimo s m'.

Osim ako oznake nisu očite (npr. $h_{\text{stubište}}$) uvijek je potrebno navesti što koja oznaka znači ili barem nacrtati skicu iz koje se može iščitati što koja oznaka znači.

Popišimo prvo što se traži u zadatku i dajmo oznake tim veličinama:

1. Visina pojedine stepenice (h)
2. Ukupan broj stepenica (N)
3. Ukupno vrijeme penjanja kada ne nosi torbu (T)
4. Ukupno vrijeme penjanja kada nosi torbu (T')

Razmislite kako biste pronašli svaku od tih veličina.
SPOILERS:

1. Koristeći rad koji se obavi kada se tijelo popne na stepenicu možemo izračunati visinu stepenice ($W = F \cdot d$). Koristeći naše oznake, to je $w = F_g \cdot h = mgh$.

   Visinu stepenice možemo izračunati i ako znamo broj stepenica i visinu stubišta (jer je visina stepenice pomnožena s brojem stepenica jednaka visini stubišta $H = N \cdot h$).

2. Ako znamo visinu svake stepenice i visinu stubišta, onda lagano nađemo broj stepenica (visina stepenice puta broj stepenica mora biti visina stubišta). $H = N \cdot h$

   Broj stepenica možemo izračunati i tako da pronađemo ukupni rad koji će čovjek obaviti kada se popenje na vrh stubišta $W = mgH$, onda je ukupni rad jednak broj stepenica puta rad za jednu stepenicu $W = N \cdot w$.

3. Ukupno vrijeme T penjanja možemo pronaći tako da pronađemo vrijeme t potrebno da se popnemo na jednu stepenicu potom pomnožimo s brojem stepenica $T = N \cdot t$. Vrijeme penjanja za jednu stepenicu dobijemo pak iz snage: $P = 600$W znači da ćemo svake sekunde obaviti 600J rada. Pitamo se koliko vremena mora proći da obavimo $w = 120$J rada. $P = \frac{w}{t}$

   Ukupno vrijeme penjanja možemo pronaći pak i na sljedeći način: Izračunamo ukupni rad koji će čovjek obaviti kada se popne na vrh stubišta $W = mgH$, potom iz snage $P = 600$W izračunamo koliko će vremena T trebati da obavi taj rad $P = \frac{W}{T}$.

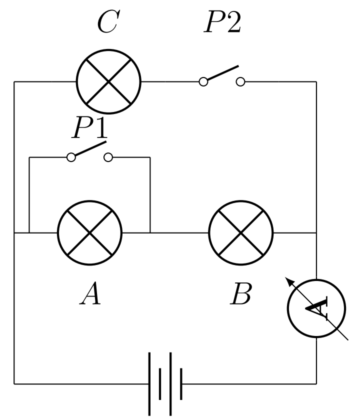
4. Kada čovjek nosi torbu više ne troši samo 120J kada se popne na stepenicu (troši više). Dakle, sada treba izračunati koliko obavi rada $w' = m'gh$ kada se popenje na jednu stepenicu, iz toga odrediti vrijeme penjanja na jednu stepenicu t', a iz toga ukupno vrijeme T'.

   Jednostavnije je, doduše, samo izračunati koliko će obaviti rada da se popenje na vrh stubišta $W' = m'gH$, potom iz snage $P = 600$W odrediti koliko vremena T' treba da bi se taj rad obavio.

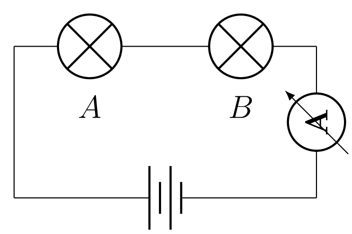
Koristeći gornju pomoć izračunajte sve potrebne veličine.

1.2 Zadatak 2

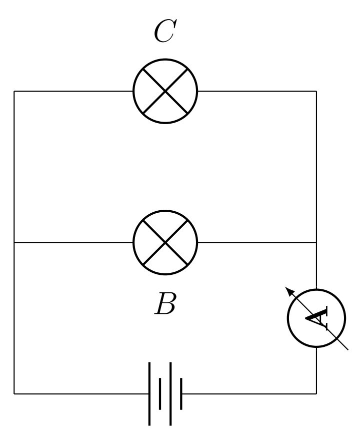
Zadatak 2. U strujni krug spojene su tri žaruljice, A, B i C, te dva prekidača, P1 i P2, kao što je prikazano na slici. Žaruljice A i B imaju međusobno jednak otpor koji iznosi 15Ω. Ako su oba prekidača otvorena, jakost struje koju mjeri ampermetar iznosi 150mA. Ako su oba prekidača zatvorena, jakost struje koju mjeri ampermetar iznosi 360mA. Odredi otpor žaruljice C!



Kada su oba prekidača otvorena, struja ne prolazi kroz lampicu C (tu je prekid u strujnom krugu). Dakle, u suštini imamo sljedeći strujni krug:



Kada su oba prekidača zatvorena, onda struja preskače lampicu A (jer smo stvorili put bez otpora preko prekidača P1 pa sva struja ide idealnom žicom preko P1). Dakle, imamo sljedeći strujni krug:



U prvom slučaju (prekidači su otvoreni) imamo samo serijski spoj lampica A i B. Iz toga možemo lagano izračunati ukupni (efektivni) otpor serijskog spoja kao $R_{\text{ser}} = R_A + R_B$, a onda i voltažu baterije. Naime, kada imamo otpor spoja i struju kroz spoj, možemo izračunati i voltažu na krajevima spoja koristeći $V = IR_{\text{ser}}$. S druge strane, voltaža na krajevima spoja je upravo voltaža na krajevima baterije (uzimamo da je ampermetar idealan, tj. da nema otpor).

Sada, koristeći voltažu baterije analiziramo drugu situaciju (prekidači su zatvoreni) u kojoj imamo paralelni spoj žaruljica B i C. Iz svega poznatog nije teško izračunati otpor žaruljice C. Naime, imamo struju kroz paralelni spoj te imamo voltažu baterije - iz ovoga slijedi ukupni (efektivni) otpor paralelnog spoja $R_{\text{par}} = \frac{V}{I}$. Kako sada poznajemo ukupni otpor i otpor žaruljice B, lagano pronađemo i otpor žaruljice C koristeći formulu za otpor paralelnog spoja $\frac{1}{R_{\text{par}}} = \frac{1}{R_B} + \frac{1}{R_C}$.

1.3 Zadatak 3

Zadatak 3. Kad se na oprugu konstante elastičnosti $50\frac{\text{N}}{\text{m}}$ ovjesi uteg težine 1N, njezina duljina iznosi ukupno 16cm. Ako bismo istom tom oprugom po horizontalnoj podlozi faktora trenja 0,5 stalnom brzinom vukli drvenu kocku mase 0,8kg, koliko bi u tome slučaju iznosila duljina te opruge?

Problem valja nacrtati radi jasnije slike. Prvo uvedimo oznake. Označimo duljinu opruge bez opterećenja s l_0, njenu duljinu pod opterećenjem $F_1 = 1N$ u prvom slučaju ($1N$) s l_1, a njenu duljinu pod opterećenjem F_2 u drugom slučaju s l_2 (ovo tražimo).

Sada razmislimo što možemo izračunati iz prve situacije, a što iz druge:

1. Kako je u prvom slučaju poznata konstanta elastičnosti k i opterećenje F_1, iz Hookeovog zakona $F_1 = k\Delta l_1$ možemo izračunati produljenje $\Delta l_1 = l_1 - l_0$. Iz toga pak možemo izračunati početnu duljinu opruge l_0.

2. U drugom slučaju isto tako, iz $F_2 = k\Delta l_2$, možemo izračunati produljenje $\Delta l_2 = l_2 - l_0$, ali moramo poznavati opterećenje oprguge F_2. Kako iz prvog slučaja znamo početnu duljinu opruge l_0, duljinu pod opterećenjem l_2 jednostavno dobijemo tako da na početnu duljinu dodamo produljenje Δl_2.

3. Dakle, još jedino moramo odrediti silu F_2 kojom povlačimo oprugu (opterećenje) u drugom slučaju. U drugom slučaju vučemo tijelo mase 0.8kg (dakle tijelo težine 8N) po horizontalnoj podlozi istom oprugom jednoliko. Zbog jednolikog gibanja ukupna sila na tijelo je 0. Sada razmislimo koje sve sile djeluju na tijelo. Elastična sila opruge povlači tijelo unaprijed, no sila trenja ga vuče unatrag. Kako su sile ujednačene, elastična sila (opterećenje oprgue) je u ovom slučaju jednaka sili trenja $F_2 = \mu F_g$, što se može izračunati iz podataka koji su zadani.

1.4 Zadatak 4

Zadatak 4. Lana i Tina pronašle su čvrstu homogenu drvenu dasku duljine 4 metra u spremištu vrtića koji pohađaju. Dasku su balansirale na osloncu od jedne cigle, vrlo blizu tla, tako da je daska poduprta u svojemu težištu. Kad je svaka od njih stala na sam kraj suprotnih dijelova daske, daska se nagnula na stranu na kojoj je Lana.

Ravnotežni položaj pronašle su tek kad se Lana primakla osloncu za polovinu svoje početne udaljenosti od oslonca dok je Tina ostala na istome mjestu kao i maloprije.

Kroz prozor ih je vidjela njihova mlađa sestra Mila, mase 10 kilograma, koja se poželjela igrati s njima. Kako bi uravnotežile dasku dok sve tri stoje na njoj, Lana se primaknula osloncu tako da je njezina udaljenost od oslonca sada četvrtina početne udaljenosti od oslonca, a Mila je stala na dasku tako da je udaljena od Lane 1 metar. Tina se pritom nije pomicala.

Odredi masu Lane i masu Tine!

Ovaj zadatak se uglavnom svede na vizualizaciju/dešifriranje ove kratke pripovjetke. Prije svega uvedimo oznake: Neka su težina Lane, Tine i Mile G_L, G_T, G_M. Položaje na daski (krakove sile) u prvom slučaju (kada su prisutne samo Lana i Tina) kada je daska u ravnoteži označimo s K_L i K_T. Krakove sile u drugom slučaju, kada su postigle ravnotežu, označimo s k_L, k_T i k_M.

Sada razmislimo što se može izračunati iz prvog, a što iz drugog slučaja.

1. Prvo, iz $G = mg$ je jasno da masu možemo dobiti iz težine. Dakle, moramo izračunati težinu Tine i Lane. S druge strane, iz mase Mile isto tako možemo dobiti njenu težinu.

2. Oslonac je na pola daske jer je daska jednolika (dakle na svakoj strani imamo 2m) pa kako se Tina u prvom slučaju nalazi na rubu daske, $K_T = 2\text{m}$. Lana se u prvom slučaju na svojoj strani nalazi na pola puta od ruba do oslonca, stoga $K_L = 1\text{m}$. Sada momenti sile zbog Lane i Tine su $M_L = G_L K_L$ i $M_T = G_T K_T$, a kako se daska ne rotira ova dva momenta moraju biti jednaka. Dakle, $M_L = M_T$, odnosno $G_L K_L = G_T K_T$. Iz ovoga dobijemo omjere težina. Zaista, kako je Tina dvostruko dalje od oslonca, njena težina mora biti dvostruko manja.

3. U drugom slučaju, Tina je još uvijek na rubu daske $k_T = 2\text{m}$, a na drugom strani se sada nalaze dvije osobe. Lanin krak sile je sada upola manji nego je bio (prije je bila na polovini od 2m, tj. na 1m, a sada je na četvrtini, odnosno na 0.5m) pa $k_L = 0.5\text{m}$. Mila je udaljena od lane za 1m pa $k_M = 1.5\text{m}$. Dakle na jednu stranu daske djeluje moment sile $M_T = G_T k_T$, a na drugu djeluju dva momenta $M_L = G_L k_L$ i $M_M = G_M k_M$. Daska je u ravnoteži pa je ukupni moment s jedne strane jednak ukupnom momentu s druge (tj. vektorski zbroj svih momentata je 0): $M_T = M_L + M_M$, tj. $G_T k_T = G_L k_L + G_M k_M$.

4. Dalje je problem matematički. Milin moment $G_M k_M$ možemo izračunati jer imamo njenu masu i krak sile $G_M k_M = 100\text{N} \cdot 1.5\text{m}$. Znamo da je težina Lane dvaput veća od težine Tine, što daje sustav dvije jednadžbe s dvije nepoznanice koji moramo riješiti: $G_L = 2G_T$ i $G_T \cdot 2\text{m} = G_L \cdot 0.5\text{m} + 100\text{N} \cdot 1.5\text{m}$.

   Uvrštavanjem prve relacije u drugu imamo $G_T \cdot 2\text{m} = 2G_T \cdot 0.5\text{m} + 100\text{N} \cdot 1.5\text{m}$, iz čega se lagano izračuna G_T, a G_L je onda samo duplo veći broj.

1.5 Zadatak 5

Zadatak 5. Davor želi ugraditi bojler za grijanje tople vode na svojoj vikendici. Kupio je preko oglasa na internetu vrlo povoljan bojler zapremnine 300 litara, ali nepoznate snage. Nakon instalacije bojlera u kupaonicu napunio ga je vodom iz bunara temperature 12°C. Priključio je bojler na gradsku mrežu te se voda zagrijala na 50°C za 4,4 sata.

Pretpostavimo li da pri grijanju nije bilo gubitaka topline na okolinu, koliko ga je ovo probno grijanje vode došlo ako je cijena jednoga kWh električne energije 7 centa? Kolika je snaga grijača u tome bojleru?

Specifični toplinski kapacitet vode iznosi 4200J/kgK, a njezina gustoća iznosi $1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$.

Prvo uvedimo oznake. Volumen bojlera (njegovu zapremninu) označimo s $V = 300L$. Snagu bojlera označimo s P, a koliko vremena je bojler bio upaljen s $t = 4.4\mathrm{h}$. Ukupni rad koji je bojler odradio označimo s W tako da $P = \frac{W}{t}$.

Sada razmislimo što moramo pronaći.

1. Da bismo izračunali snagu $P = \frac{W}{t}$ treba nam ukupni rad. Ako rad iskažemo u kilowatsatima, a vrijeme ostavimo u satima, snaga će biti iskazana u kilowattima. Npr. ako $W = 100\mathrm{kWh}$, a $t = 2\mathrm{h}$, onda $P = \frac{100\mathrm{kWh}}{2\mathrm{h}} = 50\mathrm{kW}$.

2. Znamo cijenu jednog kilowatsada u centima $n = 7\mathrm{c}$[1]. Stoga, ako znamo ukupni rad u kilovatsatima, možemo pronaći ukupnu cijenu u centima $N = p \cdot W$ (pomnožimo cijenu jednog kilowatsata s brojem kilowatsati).

3. Dakle, jedino se moramo domoći rada u kilowatsatima. To ćemo dobiti tako da izračunamo koliko će topline grijač predati vodi kada ju zagrije s 12°C na 50°C (tj. kada ju zagrije za $\Delta T = 50 - 12 = 38$°C). Ovo pak lagano dobijemo iz toplinskog kapaciteta i ukupne mase vode. Kako je gustoća vode $1000\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$, litra vode ima masu 1kg. Dakle, ako u bojler stane 300L vode, to je ukupno 300kg vode. Predana toplina (obavljeni rad) u jouleima je stoga $Q = mc\Delta T$, što se lagano dobije iz svih poznatih podataka. Dalje samo rad treba prebaciti u kilowatsate, što dobijemo relacijom 1J=1Ws pa 1Wh=3600Ws=3600J, odnosno 1kWh=3 600 000J.

Isto tako znamo cijenu jednog kilowatsada u centima $p = 7\mathrm{c}$, stoga ako znamo ukupni rad u kilovatsatima možemo pronaći ukupnu cijenu u centima $P = p \cdot W$ (pomnožimo cijenu jednog kilowatsata s brojem kilowatsati).

[1] Englesko price p (i latinsko pretium) nije dobro jer P koristimo za snagu. Hrvatsko cijena c nije dobro jer c označava cent. Uzmimo stoga japansko *nedan* (値段) n...jer zašto ne.

2 Školsko natjecanje 2022/2023

2.1 Zadatak 1

Zadatak 6. U uredskoj kuhinji nalazi se aparat za vodu sa dvama spremnicima. U jednome je spremniku voda temperature 11°C, a u drugome voda temperature 88°C. Marija želi napuniti bočicu od pola litre vodom čija je temperatura 25°C. Aparat za vodu je pametan, što znači da postoji mogućnost upisivanja željenoga obujma vode pojedine temperature u litrama, što aparat zatim ispusti. Bočica je zanemarive mase, kao i prijenos topline na okolinu.

Odredi obujam vode od 11°C i obujam vode od 88°C koji Marija treba unijeti u aparat kako bi bočicu ispunila vodom željene temperature. Dobivene vrijednosti prikaži zaokružene na dva decimalna mjesta. Gustoća vode iznosi $1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a specifični toplinski kapacitet vode $4200\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$.

Moramo pretpostaviti (što nije izričito navedeno u zadatku) da se voda zanemarivo malo širi/skuplja kada se zagrijava/hladi. Ovo je zapravo skriveno u tvrdnji "Gustoća vode iznosi $1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$". U stvarnosti, masa litre vode pri 11°C je vrlo blizu 1kg, a pri 88°C je oko 9.66kg [2]. U blizini 20°C, koeficjent širenja vode je oko $207 \cdot 10^{-6}\frac{1}{\text{K}}$. Ovo znači da se za svaki Kelvin volumen vode proširi za $207 \cdot 10^{-6} = 0.207\%$ (dakle litra vode na 20°C postane litra + 0.002L na 21°C).

Zanemarit ćemo širenje vode pa obujam vode možemo odrediti tako da pronađemo masu vode (u kg) i uzmemo da 1L ima masu 1kg.

Označimo veličine koje se odnose na hladnu vodu s V_1, m_1, T_1, Q_1, a one koje se odnose na toplu vodu s V_2, m_2, T_2, Q_2. U oba slučaja imamo vodu pa ćemo za kapacitet samo pisati c ($c = c_1 = c_2$). Označimo ravnotežnu temperaturu s $T_0 = 25$°C. Sada razmislimo kako postaviti situaciju koja je opisana u zadatku.

1. Miješamo toplu i hladnu vodu. Ovo znači da će topla voda predati toplinu hladnoj. Navedeno je da možemo zanemariti gubitak topline u okolinu, stoga je toplina koju topla voda preda Q_2 jednaka toplini Q_1 koju hladna voda primi: $Q_1 = Q_2$. Kako je $Q = mc\Delta T$, imamo $m_1 c\Delta T_1 = m_2 c\Delta T_2$. Kako je c isti s obje strane, možemo obje strane podijeliti s c što daje $m_1\Delta T_1 = m_2\Delta T_2$.

[2] Vidi `https://www.internetchemistry.com/chemical-data/water-density-table.php`

Dalje, $\Delta T_1 = 25°\text{C} - 11°\text{C}$, a $\Delta T_2 = 88°\text{C} - 25°\text{C}$. Iz ovoga dobijemo omjer masa tople i hladne vode $m_1 = \frac{\Delta T_2}{\Delta T_1} m_2$.

2. Dalje, trebamo napuniti bocu od pola litre. Ovo znači da ukupna masa tople i hladne vode mora biti pola kilograma: $m_1 + m_2 = 0.5\text{kg}$.

3. Problem je dalje matematički, imamo koliko iznosi omjer masa i koliko iznosi njihov zbroj. Ovo su dvije jednadžbe s dvije nepoznanice iz kojih lagano pronađemo mase m_1 i m_2.

2.2 Zadatak 2

Zadatak 7. Mia je za rođendan dobila pribor za elektriku koji se sastojao od mnoštva žaruljica različitih boja, voltmetra, ampermetra, nekoliko baterija i mnoštva žica. Na svakoj žaruljici, bez obzira na boju, pisali su sljedeći podatci: 3 V, 0,06 W. Odlučila je napraviti svoje lampice za bor koristeći se dobivenim priborom.

U tu je svrhu uzela određeni broj žaruljica te ih sve spojila u strujni krug na isti način, pazeći da sve žaruljice budu međusobno neovisne[3] i da na svakoj bude napon od 3 V.

U strujni krug, uz bateriju je vezala ampermetar i izmjerila jakost struje od 960 mA.

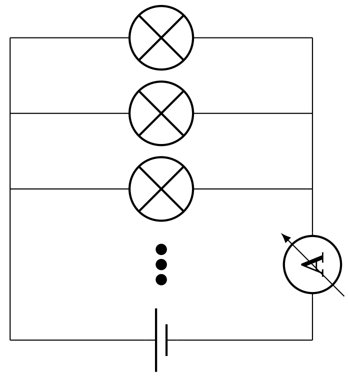
a) Koliko je ukupno žaruljica Mia vezala u strujni krug?

b) Odredi otpor svake žaruljice.

c) Koliko je puta veći serijski otpor svih tih žaruljica od paralelnog spoja svih tih žaruljica?

Žaruljice su spojene paralelno (ne znamo točno koliko ih ima):

[3] Ovo valjda znači "paralelno"



Idemo redom:

1. Imamo voltažu i snagu svake žaruljice (3V i 0.06W), iz čega možemo izračunati struju koja mora prolaziti kroz svaku žaruljicu $P = VI$.

   Struja na svakoj grani se potom spaja u veliku struju koja onda prolazi kroz ampermetar (i bateriju). Iz ovoga dobijemo ukupni broj žaruljica. Primjerice, ako je struja kroz svaku žaruljicu 0.5A, a ukupna struja je 4A, znamo da smo ukupno spojili 8 žaruljica.

2. Otpor žaruljice je lagano izračunati jer imamo voltažu na krajevima žaruljice (ovo je jednako voltaži baterije) i struju kroz žaruljicu. Otpor je samo $R = \frac{V}{I}$.

3. Sada nije teško izračunati ukupni otpor paralelnog spoja koristeći $\frac{1}{R_{\text{par}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} ...$, što za jednake otpore ($R_1 = R_2 = R_3 = ... = R$) postane $\frac{1}{R_{\text{par}}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} + ... = \frac{N}{R}$, gdje je N broj žaruljica.

   Isto tako dobijemo i otpor serijskog spoja $R_{\text{ser}} = R_1 + R_2 + R_3 ... = R + R + R ... = N \cdot R$.

   Konačno, samo izračunamo omjer ta dva otpora (veći/manji) da bismo dobili koliko je puta jedan veći od drugoga.

2.3 Zadatak 3

Zadatak 8. Na satu fizike, Stjepan i Valent su od plastičnoga ravnala napravili kosinu duljine 50cm. Novčić, mase 5g, položili bi na najviši mogući položaj na kosini i pustili ga da se giba iz stanja mirovanja. Izmjerili su da je novčić u početnome trenutku bio na visini od 15cm.

Novčić bi se, nakon što se spusti niz kosinu, nastavio gibati po drvenome stolu sve dok se ne bi zaustavio. S pomoću [sic] detektora gibanja utvrdili su da je kinetička energija novčića pri dnu kosine 28% manja od ukupne energije u početnome trenutku.

Zabilježili su da se novčić po ravnome stolu gibao pravocrtno i pritom prešao put od 22cm. Odredi faktor trenja između novčića i drvenoga stola.

Možemo jedino pretpostaviti da su pomoću detektora gibanja (lidara ili radara ili nešto sl.) izmjerili brzinu novčića, iz čega su mogli zaključiti energiju na dnu i usporediti je s energijom koju su dobili iz visine i mase. Autoru inače nije poznat instrument koji može direktno mjeriti smanjenje energije u odnosu na neku početnu potencijalnu energiju...

Označimo s PE njegovu potencijalnu energiju na početku i s KE njegovu kinetičku energiju na dnu rampe. Neka je sila trenja F_{tr} na stolu obavila W rada i time usporila tijelo do stanja mirovanja.

Razmislite kako sada doći do faktora trenja. Najjednostavnije je krenuti odstraga:

1. Prvo, kada izračunamo silu trenja, iz $F_{tr} = \mu \times F_g$ slijedi iznos faktora trenja μ (težina tijela je zadana jer imamo masu pa $F_g = mg$).

2. Silu trenja pak možemo dobiti iz rada koja je sila trenja obavila $W = F_{tr} \cdot d$. gdje je $d = 22$cm put koji je tijelo prešlo na stolu prije nego se zaustavilo.

3. Dalje, rad sile trenja će biti promjena energije tijela. Tijelo u početku (na dnu kosine) ima kinetičku energiju KE koja se smanjuje dok ne padne na 0. Dakle, $W = KE - 0 = KE$.

4. Konačno, kinetičku energiju na dnu kosine dobijemo kao određeni udio početne potencijalne energije $PE = mgh$ ($h = 15$cm). Kinetička energija je zbog gubitaka na kosini (trenja) tek $100\% - 28\% = 72\% = \frac{72}{100}$ početne potencijalne energije: $KE = \frac{72}{100} \cdot PE$.

2.4 Zadatak 4

Zadatak 9. Na nerastegnutu elastičnu oprugu, čija je duljina 16cm, ovjesimo uteg mase 50g. Njezina duljina u tome slučaju iznosi 17.6cm. Ne mičući prvi uteg na oprugu dodamo još jedan uteg. Opruga se pritom produlji za 0.4cm. Odredi konstantu te opruge i masu drugoga utega.

Nacrtajmo ovu situaciju. Označimo masu dva utega s $m_1 = 50$g i m_2, a konstantu opruge s k. Početnu duljinu opruge označimo s $l_0 = 16$cm, a duljinu opruge s jednim utegom označimo s $l_1 = 17.6$cm, a u s dva utega s l_2 (opruga se produlji za još 0.4cm pa $l_2 = 17.6 + 0.4 = 18$cm).

1. U prvom slučaju, dok je ovješen jedan uteg, opruga se produlji za $\Delta l_1 = 17.6 - 16$cm S druge strane, oprugu rasteže sila od $G_1 = m_1 g$ (pa je to jednako elastičnoj sili F_{el} jer opruga miruje). Konstantu opruge sada možemo izračunati iz Hookeovog zakona $G_1 = F_{el} = k\Delta l_1$.

2. Sada, poznavajući konstantu opruge i produljenje u drugom slučaju $\Delta l_2 = 18 - 16 = 2$cm, možemo izračunati silu koja rasteže oprugu $F_{el} = k\Delta l_2$. Ta sila jednaka je težini dva tijela koja su obješena na oprugu: $F_{el} = G_1 + G_2 = m_1 g + m_2 g$. Masa prvog tijela je zadana, stoga iz ovoga lagano izračunamo masu drugog tijela

2.5 Zadatak 5

Zadatak 10. Na mirnoj površini mora pluta drvena splav duljine 2,2m, širine 1,1m, i debljine 15cm. Do splavi doplivaju Katarina i Leon te se Katarina, čija je masa 50kg, popne na splav. Može li se i Leon, čija je masa 60kg, popeti na splav, tako da i on i Katarina ostanu iznad površine mora? Gustoća mora iznosi $1030\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a gustoća drveta $750\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$.

Ovaj zadatak je očito tanko prikriveni napad na Jamesa Camerona, stoga u nastavku Katarinu zovemo "Kate", a Leona "Leonardo".

Moramo izračunati može li drvo zadanih dimenzija stvoriti silu uzgona koja je dovoljno velika da podrži težinu samog drva, Kate i Leonarda.

Sjetimo se da je uzgon koji gura splav prema gore prenma svom iznosu jednak težini tekućine koju tijelo istisne. Volumen istisnute tekućine je pak jednak volumenu uronjenog dijela tijela. Dakle, najviše tekućine tijelo istisne kada je potpuno uronjeno u vodu pa je samim time i to najveći uzgon koji to tijelo može stvoriti.

Označimo volumen splavi s V, masu splavi s m te njenu gustoću (drvo) s ρ. Volumen istisnute tekućine, masu istisnute tekućine i njenu gustoću označimo s V_t, m_t i ρ_t. Masu Kate označimo s m_K, a masu Leonarda s m_L.

1. Kada je splav potpuno uronjena (i stvara najveći uzgon) imamo $V_t = V$, a volumen splavi V izračunamo iz dimenzija splavi koje su zadane u zadatku.

2. Masu istisnute tekućine m_t možemo dobiti preko gustoće tekućine $\rho_t = \frac{m_t}{V_t} = \frac{m_t}{V}$. Težina istisnute tekućine je onda $G_t = m_t g$. Ovo je najveća sila uzgona, odnosno najveća težina koju sila uzgona može održati na površini vode.

3. Masu splavi možemo pak izračunati preko gustoće $\rho = \frac{m}{V}$. Sila koja vuče splav prema dolje jednaka je težini splavi + težini eventualnog utega koji se nalazi na splavi. Dakle, ako se i Leonardo i Kate popnu na splav, težina koja vuče splav prema dolje jednaka je $mg + m_K g + m_L g$. Treba samo provjeriti je li ta ukupna težina veća od maksimalne sile uzgona (splav onda tone) ili je manja (splav pluta).

4. SPOILER: Leonardo umir....mislim splav može podržati oko 373kg težine na sebi (uključno s težinom same splavi koja iznosi 272kg).

Cameronov komentar o diskusije na ovu temu: `https://www.youtube.com/watch?v=JVgkvaDHmto`

Za vježbu izračunajte koliko će splav viriti van vode kada na njemu ne stoji nitko, potom koliko viri kada se popne Kate.

Dakle, tražimo koliki će biti volumen uronjenog dijela tijela V_u kada je sila uzgona $m_t g V_u$ jednaka težini splavi, odnosno kada je sila uzgona jednaka težini splavi+težini Kate. Iz volumena dobijemo kolika je visina uronjenog dijela tijela, odnosno kolika je visina dijela koji strši vani.

3 Školsko natjecanje 2021/2022

3.1 Zadatak 1

Zadatak 11. Svemirska letjelica slijeće na površinu nepoznatog planeta i ima zadatak skupiti kamenje za proučavanje. Sletjevši na površinu nepoznatog planeta, astronauti su mjerenjem odredili da je ubrzanje sile teže nepoznatog planeta za četvrtinu manje od ubrzanja Zemljine sile teže.

Svemirska letjelica je građena tako da na površini bilo kojeg planeta „stoji“ na tri noge, pri čemu svaka noga ima površinu 80 dm^2. Tlak koji letjelica s posadom stvara na Zemljinu površinu iznosi 63437.5Pa.

Na nepoznatom su planetu astronauti uzeli 130kg kamenja, koje su smjestili u posebnu komoru u letjelici. Koliki tlak na površinu nepoznatog planeta stvara letjelica s kamenjem i posadom?

Označimo gravitacijsko ubrzanje Zemlje s $g = 10\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, a gravitacijsko ubrzanje nepoznatog planeta s g_P. Označimo ukupnu površinu njenih nogu s A, označimo tlak letjelice s posadom na Zemlji s P, a tlak letjelice s posadom i kamenjem na nepoznatom planetu s P_P. Neka je m ukupna masa letjelice s posadom i uzorcima, m_{LP} neka je masa letjelice s posadom, a $m_K = 130\mathrm{kg}$ masa uzoraka (kamenja).

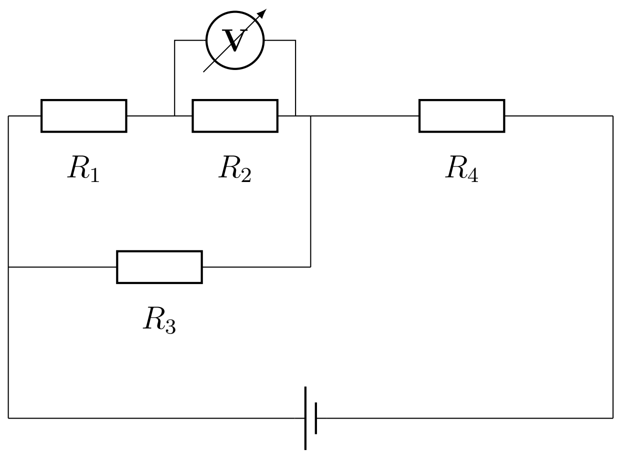
1. Tražimo tlak P_P koji letjelica stvara s posadom i uzorcima kamenja. To ćemo lagano izračunati ako pronađemo težinu letjelice (silu kojom ona pritišće tlo nepoznatog planeta). Naime, $P_P = \frac{F_P}{A}$, gdje je $A = 3\cdot 80\mathrm{dm}^2$ ukupna površina njene tri noge, a F_P težina letjelice sa posadom i uzorcima na nepoznatom planetu.

2. Težina letjelice se razlikuje od planeta do planeta, ali možemo je izračunati iz mase koja je svugdje ista. Dakle, $F_P = m\cdot g_P$, gdje je $m = m_{LP}+m_K$ ukupna masa. Gravitacijsko ubrzanje na nepoznatom planetu je za četvrtinu manje od Zemlje, stoga $g_P = g - \frac{1}{4}g = \frac{3}{4}g$.

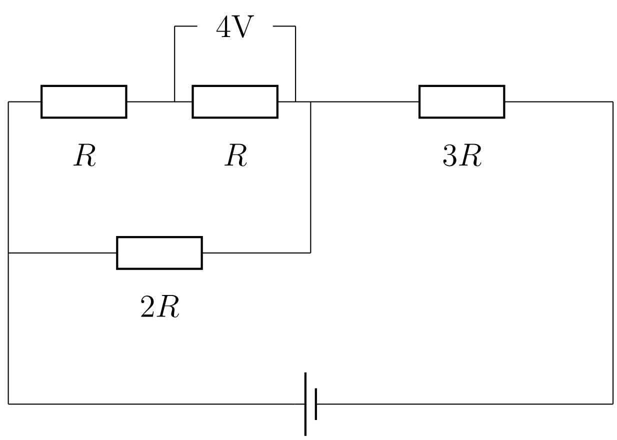
3. Konačno, masu letjelice s posadom m_{LP} možemo dobiti iz težine $F = m_{LP}g$ letjelice s posadom na Zemlji, a težinu pak možemo dobiti iz tlaka $P = 63437.5\mathrm{Pa}$ koji letjelica stvara na Zemlji: $P = \frac{F}{A}$. Treba paziti jer $1\mathrm{Pa} = \frac{1\mathrm{N}}{1\mathrm{m}^2}$, stoga da bismo iz paskala dobili newtone (i obratno), moramo koristiti m^2 za površinu.

3.2 Zadatak 2

Zadatak 12. Zadan je strujni krug kao na slici. Voltmetar na otporniku R2 mjeri napon od 4 V. Otpornici R1 i R2 međusobno su isti. Otpornik R3 ima dva puta veći otpor od R2, a otpornik R4 ima tri puta veći otpor od otpornika R2. Odredi napon idealnog izvora.



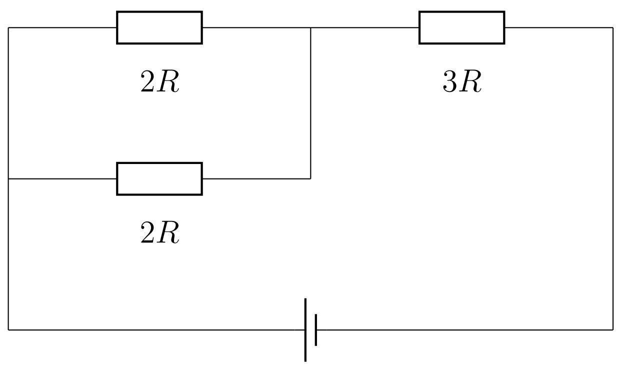
Možda je jednostavnije ako shemu strujnog kruga nacrtamo s poznatim omjerima otpora i voltažom. Označimo otpore $R_1 = R_2$ s R, onda:



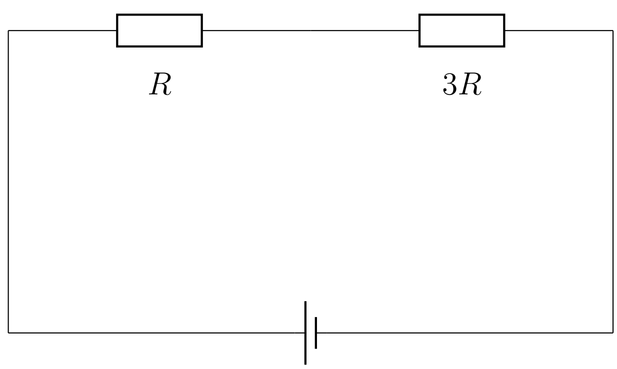
Kroz otpornike R_1 i R_2 prolazi ista struja jer su u seriji. Nadalje, ta dva otpornika imaju iste otpore, stoga i voltaža na krajevima oba otpornika $V = IR$ mora biti ista. Dakle, voltaža na krajevima otpornika R_1 je isto 4V.

Ovo pak znači da je voltaža na krajevima serijskog spoja 8V. Naime, kada 1C prijeđe jedan otpornik obavi 4J rada, potom prijeđe i drugi otpornik i obavi još 4J rada - ukupno 8J.

Kako su žice idealne, napon na krajevima otpornika R_3 je isti kao napon na kraju serijskog spoja $R_1 + R_2$. Sada možemo pojednostavniti strujni krug tako da serijski spoj tretiramo kao efektivno jedan otpornik otpora $R_1 + R_2 = R + R = 2R$.



Dobili smo paralelni spoj otpornika otpora $2R$. Ovo isto možemo pojednostavniti tako spoj zamijenimo jednim otporom efektivnog otpora danog izrazom: $\frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{2}{2R} = \frac{1}{R}$.



Na krajevima otpornika R je 8V (treba 8J da bismo prenijeli 1C naboja). Dakle, na krajevima otpornika $3R$ treba biti 3 puta veća voltaža $V = I \cdot 3R$ (24V), tj. treba uložiti triput više energije da bismo prenijeli 1C naboja kroz taj otpornik. Ukupna voltaža na krajevima serijskog spoja je stoga $8 + 24 = 32$V, što je ujedno i tražena voltaža na krajevima baterije.

3.3 Zadatak 3

Zadatak 13. Jack Sparrow našao se zarobljen iza teških metalnih vrata u potpalublju Letećeg Holandeza. Između poda i dna vrata bilo je malo mjesta, ali nedovoljno da se Jack provuče i oslobodi. Tri su mu prijatelja pristigla u pomoć. Uočili su da su vrata nasađena na šarke i da ih je potrebno samo podići kako bi Jack bio slobodan.

Pronašli su dasku u potpalublju čiji su jedan kraj postavili tik ispod vrata. Naslonili su dasku na oslonac i svom snagom pritisnuli drugi kraj daske, koji je od oslonca udaljen $\frac{3}{4}$ duljine daske. Digli su vrata i oslobodili Jacka Sparrowa tek kada je svaki prijatelj djelovao silom od 200N. Odredi masu metalnih vrata.

(Za potrebe ovog zadatka, zanemarimo masu daske.)

Označimo kraću udaljenost od oslonca (vrata-oslonac) s k_1, a dalju udaljenost od oslonca (oslonac-prijatelji) s k_2. Neka je ukupna sila kojom prijatelji djeluju na svoj kraj daske F_2, a težina vrata F_1. Označimo duljinu daske s l.

1. Riječ je o polugi u ravnoteži. S jedne strane poluge djeluje težina vrata F_1, a s druge strane djeluju 3 prijatelja $F_2 = 3 \cdot 200\text{N}$. Krak težine vrata je $k_1 = \frac{1}{4}l$, a krak sile za prijatelje koji djeluju na dasku je $k_2 = \frac{3}{4}l$ (pretpostavljamo da svi prijatelji djeluju na isto mjesto na daski).

2. Tek kada je moment sile $M = F \cdot k$ jednak na obje strane će se poluga okrenuti, odnosno vrata će se početi podizati. Dakle, $F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2$, odnosno $F_1 \cdot \frac{1}{4}l = F_2 \cdot \frac{3}{4}l$. Sama duljina poluge je nebitna jer sada možemo skratiti l s obje strane jednakosti pa $F_1 \cdot \frac{1}{4} = F_2 \cdot \frac{3}{4}$. Iz ovoga se lagano dobije F_1 (težina vrata), a $F_1 = mg$ pa lagano dobijemo i masu vrata m.

3.4 Zadatak 4

Zadatak 14. Dva brata, Ivan i Mihael, za vrijeme ljetnih praznika odlučili su iskušati bungee jumping s Masleničkog mosta, s visine od 55 metara iznad razine mora. Uže za skok je elastično i privezano za sam rub mosta s kojeg skakači skaču. Nerastegnuto uže ima duljinu od 30 metara.

Prvi je skočio Ivan, stariji brat, mase 70kg. Nakon nekog su se vremena uže i Ivan prestali njihati i postignuli su ravnotežu na 11 metara iznad površine mora. Mihael je skočio drugi. Na koliko su metara uže i Mihael postigli ravnotežu iznad površine mora, ako je Mihaelova masa 50 kg?

Označimo duljinu nerastegnutog užeta s $l_0 = 30\text{m}$. Označimo Ivanovu masu s $m_I = 70\text{kg}$, njegovu težinu s $G_I = m_I g$, a Mihaelovu masu s $m_M = 50\text{kg}$ te njegovu težinu s $G_M = m_M g$. Neka je Mihaelova visina iznad površine mora h.

1. Riječ je o užetu koje rastežemo u njegovom elastičnom režimu. Dakle, elastična sila koja sabija uže će biti jednaka $F_{el} = k \cdot \Delta l$, gdje je Δl produljenje užeta u odnosu na nerastegnuto uže.

2. Iz Ivanovog skoka možemo zaključiti k. Kada Ivan primiri, onda na njega djeluju dvije sile: elastična sila prema gore i Ivanova težina prema dolje. Kako Ivan miruje, te dvije sile su jednake pa $G_I = k\Delta l_I$.

   Ivanovu težinu lagano izračunamo iz mase, a rastegnuće užeta je $\Delta l_I = l_I - l_0$, gdje je l_I duljina rastegnutog užeta kada Ivan visi sa njega. Duljina rastegnutog užeta je pak samo $l_I = 55\text{m} - 11\text{m}$ (gornji kraj je na 55m od mora, a donji na 11m od mora).

3. Kada smo dobili k, lagano zaključimo koliko će se uže rastegnuti kada na njega djeluje Mihaelova težina $G_M = m_M g$. Opet imamo $G_M = k \cdot \Delta l_M$. Ovdje je $\Delta l_M = l_M - l_0$, a l_M je duljina rastegnutog užeta kada visi Mihael. Kada pronađemo l_M, lagano pronađemo i h, tj. na koliko metara od mora se Mihael zaustavio $l_M = 55m - h$.

3.5 Zadatak 5

Zadatak 15. Električnim grijačem zagrijavamo 8 decilitara vode od temperature 25°C do vrenja. Ako je grijač očišćen od kamenca, takvu vodu zagrijemo za 2 minute i 20 sekundi. No, ako je električni grijač obložen kamencem, njegova je efikasnost samo 75% u odnosu na čisti grijač. Odredi vrijeme potrebno da grijač obložen kamencem zagrije 12 decilitara vode od iste početne temperature do vrenja. Gustoća vode je $1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, a specifični toplinski kapacitet vode iznosi $4200\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$.

Označimo početnu temperaturu vode s $T_1 = 25°\text{C}$, a konačnu temperaturu s $T_2 = 100°\text{C}$. Označimo s W_0 rad koji je potreban da zagrijemo 8dL vode s T_1

na T_2, a vrijeme potrebno da grijač obavi taj rad kada je očišćen od kamenca s $t_0 = 2\text{min}20\text{s}$. Neka je snaga kojom čisti grijač djeluje na vodu P_0, a snaga kojom grijač obložen kamencem djeluje na vodu $P = 75\% \cdot P_0 = \frac{3}{4}P_0$. Označimo rad koji grijač s kamencem treba obaviti kada djeluje na 12dL vode s W, a vrijeme koje mu je potrebno da obavi taj rad s t. Označimo masu 8dL vode s m_0, a masu 12dL vode s m.

1. Rad koji grijač treba obaviti da zagrije vodu jednak je toplini koju moramo prenijeti na vodu da bi se ona zagrijala za $\Delta T = T_2 - T_1$. Dakle, $W_0 = Q_0 = m_0 c \Delta T$. Imamo 8dl = 0.8L vode, što je samo 0.8kg (1L vode je 1kg). Iz ovoga lagano dobijemo rad W_0, a iz toga i snagu čistog grijača $P_0 = \frac{W_0}{t_0}$.

2. Kada imamo snagu čistog grijača P_0, možemo lagano dobiti i snagu grijača s kamencem $P = \frac{3}{4}P_0$. Sada opet možemo lagano izračunati koliko rada grijač treba obaviti da bi zagrijao 12dL $= 1.2L$ vode (1.2kg vode) $W = Q = mc\Delta T$.

   Iz rada W i snage $P = \frac{W}{t}$, lagano dobijemo i vrijeme t.

4 Neki dodatni zadatci

Zadatak 16 (Zadatak 4, 2019/2020)**.** Od volframa učinimo dva otpornika u obliku valjka. Mase otpornika su jednake, ali je prvi dva puta dulji od drugog. Koliki je omjer otpora ovih otpornika?

Znamo da duljina i poprečni presjek vodiča utječu na njegov otpor. Ako je duljina duplo veća, i otpor je duplo veći, a ako je površina presjeka duplo veća, otpor je duplo manji. Konkretno, vrijedi $R = \rho\frac{l}{A}$.

Sada, oba otpornika su iste mase i od istog materijala (wolframa), što znači da oba otpornika moraju imati istu gustoću. Dakle, oba otpornika moraju imati i **isti volumen**. Ovo je ključ. Volumen tijela je površina njegove baze puta visina. U našem slučaju to je površina poprečnog presjeka puta duljina žice $V = A \cdot l$. Iz ovoga možemo zaključiti sljedeće: ako duljinu poduplamo, onda se površina poprečnog presjeka mora prepoloviti da bi volumen ostao isti. Zaista, uzmimo npr. da je duljina 2m, a površina poprečnog presjeka 0.04m^2, onda je volumen $V = 2\text{m} \cdot 0.04\text{m}^2$. Ako sada poduplamo duljinu na 4m, onda poprečni presjek mora opasti na 0.02m^2 da bi volumen bio isti broj: $2\text{m} \cdot 0.04\text{m}^2 = 4\text{m} \cdot 0.02\text{m}^2$.

Koristeći ovu činjenicu o poprečnom presjeku, zadatak lagano riješimo. Ako je prvi otpornik dva puta dulji od drugoga, njegov poprečni presjek isto tako mora biti dvaput manji (da bi volumen bio isti). Dakle, samo zbog dvaput veće duljine mu je otpor dvaput veći, ali još dodatno moramo uračunati i dvaput manji presjek (što dodatno povećava otpornost dva puta). Ukupno, otpor mu je četiri puta veći od drugog (debljeg i kraćeg) otpornika.

Matematički, ako je duljina kraćeg otpornika l i njegov poprečni presjek A, onda je njegov otpor $R = \rho\frac{l}{A}$, gdje je ρ otpornost wolframa. Drugi otpornik ima duljinu $2l$, a poprečni presjek $\frac{A}{2}$. Dakle, njegov otpor je $R = \rho\frac{2l}{A/2} = \rho\frac{4l}{A}$, što je, vidimo, 4 puta veće.

Zadatak 17 (Zadatak 4, županijsko 2022/2023)**.** Uteg težine 1N, ovješen na dinamometar, u potpunosti uronimo u vodu. Dinamometar u tome slučaju pokazuje silu od 0,8N. Taj isti uteg potom u potpunosti uronimo u mješavinu vode (gustoće 1000kg/m^3) i nepoznate druge tekućine (gustoće 750kg/m^3). Ako dinamometar u drugome slučaju pokazuje silu od 0,82N, odredite koliko je vode, a koliko druge tekućine u toj mješavini.

Kada uronimo uteg u vodu, na njega djeluju dvije sile: sila teža $F_g = mg$ prema dolje i uzgon $F_u = \rho V g$ (jednak težini razmještene tekućine) prema gore. U zraku ukupna sila koja poteže uteg prema dolje (težina) je 1N. U vodi ukupna sila je jednaka razlici između težine i uzgona te iznosi 0.8N. Dakle, sila uzgona u vodi mora biti 0.2N.

Kada pomiješamo dvije tekućine (tako da postanu homogena smjesa) gustoća smjese će biti negdje između izvornih tekućina. U ovom slučaju to znači da će gustoća biti malo manja od vode, stoga će i težina razmještene tekućine (sila uzgona) biti malo manja. Zaista, u tom slučaju je ukupna sila (razlika između težine i uzgona) 0.82N, što znači da je sila uzgona 0.18N.

U prvom slučaju imamo $1N - \rho_{voda} V_{uteg} g = 0.2N$. Iz ovoga možemo izračunati volumen utega. U drugom slučaju imamo $1N - \rho_{smjesa} V_{uteg} g = 0.18$. Koristeći volumen koji smo dobili u prethodnom koraku, iz ovoga sada možemo izračunati gustoću smjese. Dobije se $\rho_{smjesa} = 900\text{kg/m}^3$.

Dakle, pomiješali smo dvije tekućine gustoće 1000 i 750 u određenim omjerima i dobili tekućinu gustoće 900. Kako su tvari građene od atoma i molekula, može se dogoditi da atomi jedne tekućine se smjeste među atome druge tekućine kompaktnije nego bismo očekivali (kao što se zrna pijeska mogu smjestiti među krupniji šljunak). U tom slučaju će volumen smjese biti nešto manji od zbroja volumena početnih tekućina pa se efektivna gustoća smjese povećava. Pretpostavljamo da se to ne događa. Dakle, tražimo u kakvom omjeru moramo pomiješati brojeve 1000 i 750 da bismo dobili 900. Matematički:

$$a \cdot 1000 + b \cdot 750 = 900$$

gdje moramo još imati $a+b=1$ (zbroj omjera mora biti 100%). Matematičari ovakav izraz $a \cdot 1000 + b \cdot 750$ zovu *konveksnom kombinacijom* brojeva 1000 i 750 (a da nismo imali uvjet $a + b = 1$ izraz $a \cdot 1000 + b \cdot 750$ bismo onda zvali *linearna kombinacija*). Primjerice, ako stavimo 20% vode ($a = 0.2$) i 80% nepoznate tekućine, gustoća mješavine će biti:

$$0.2 \cdot 1000 + 0.8 \cdot 750 = 200 + 600 = 800$$

U našem slučaju:

$$a \cdot 1000 + (1 - a) \cdot 750 = 900$$

. Ovo se lagano riješi i dobijemo $a = \frac{150}{250} = 0.6$ i $b = 1 - a = 0.4$. Dakle, trebamo staviti 60% vode i 40% nepoznate tekućine.

Možda bi valjalo opravdati gornji postupak direktno iz očuvanja volumena i mase. Kako je masa očuvana imamo $m_{smjesa} = m_{voda} + m_{tekucina}$. Dakle:

$$\rho_{smjesa} V_{smjesa} = \rho_{voda} V_{voda} + \rho_{tekucina} V_{tekucina}$$

Podijelimo li s volumenom smjese:

$$\rho_{smjesa} = \rho_{voda} \frac{V_{voda}}{V_{smjesa}} + \rho_{tekucina} \frac{V_{tekucina}}{V_{smjesa}} = a \cdot \rho_{voda} + b \cdot \rho_{tekucina}$$

Ovdje smo uzeli $a = \frac{V_{voda}}{V_{smjesa}}$ i $b = \frac{V_{tekucina}}{V_{smjesa}}$.

Ako je volumen očuvan, imamo

$$V_{smjesa} = V_{voda} + V_{tekucina}.$$

Podijelimo li s volumenom smjese:

$$1 = \frac{V_{voda}}{V_{smjesa}} + \frac{V_{tekucina}}{V_{smjesa}} = a + b$$

Zadatak 18 (Zadatak 2, županijsko 2023/2024)**.** Luka i Ivan utrkivali su se na kružnoj stazi školskog igrališta. Luka je bio brži te je utrku istrčao 2.5 minute prije Ivana, kojemu su trebale 25 minute da završi utrku. Luka je trčao prosječnom brzinom od 8 km/h. Ako je svaki otrčao točno 12,5 jednakih krugova, odredi nakon koliko je minuta Luka prvi puta prestigao Ivana. Može li Luka prestići Ivana i drugi puta za vrijeme ove utrke?

Luka je istrčao utrku u $25 - 2.5 = 22.5\text{min} = 0.375\text{h}$. Pritom se gibao brzinom od $8\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Dakle, prešao je udaljenost od $x = v{\cdot}t = 8\frac{\text{km}}{\text{h}}{\cdot}0.375\text{h} = 3\text{km}$. Jedan krug je dakle dug $\frac{3\text{km}}{12.5} = 0.24\text{km} = 240\text{m}$.

Da bi Luka prestigao Ivana za jedan puni krug, to je kao da se na ravnoj stazi Luka udalji od Ivana za 240m. Dakle, zanima nas koliko će Luki trebati vremena da se od Ivana udalji za 240m. Najjednostavnije je postaviti se u sustav sporijeg (Ivana) i promatrati gibanje bržeg. Ivan je utrku (puna 3km) otrčao u $25\text{min} = \frac{25}{60}\text{h} = \frac{5}{12}\text{h}$. Dakle, giba brzinom od $\frac{3\text{km}}{5/12\text{h}} = \frac{36}{5}\frac{\text{km}}{\text{h}} = 7.2\text{km/h}$. Luka trči brzinom od 8km/h, a Ivan trči u istom smjeru brzinom od 7.2km/h. Dakle, iz Ivanove perspektive, izgleda kao da se Luka udaljava od njega brzinom od 0.8km/h. Dakle, nakon t vremena, Luka će biti na udaljenosti $240\text{m} = 0.24\text{km}$ od Ivana, što daje $0.8\text{km/h}\cdot t = 0.24\text{km}$, odnosno $t = \frac{0.24}{0.8} = 0.3\text{h} = 18\text{min}$.

Vidimo da neće biti dovoljno vremena da Luka Ivana prestigne još jednom prije kraja utrke (za što bi trebali $2 \cdot 18\text{min} = 36\text{min}$)

Zadatak 19 (Zadatak 5, županijsko 2022/2023). Čekajući let iz Pariza za Zagreb, Ana je kratila vrijeme proučavajući okolinu. Uočila je nekoliko ravnih pokretnih staza koje su prevozile putnike između pojedinih izlaza (engl. gate) i pomagale im da malo brže stignu do svojih letova. Zanimalo ju je koliko su te pokretne staze duge i koja je njihova brzina, pa je odlučila napraviti jedan eksperiment i zabilježila ove podatke:

a) ako hoda po stazi brzinom od 5km/h u smjeru gibanja pokretne staze, na drugi kraj staze dođe za 14.4s

b) vraćajući se, hoda brzinom od 5km/h u smjeru suprotnome od gibanja te pokretne staze, a za doći na drugi kraj staze treba joj 4 puta više vremena.

Kojom se brzinom giba pokretna staza i koliko je ona duga?

Postavimo jednadžbe koje nam daju prva i druga situacija. Recimo da se pokretna traka giba nekom brzinom v i da je njena duljina l. Kada se gibamo u istom smjeru kao i pokretna traka, naša brzina u odnosu na nepomičnu zgradu aerodroma je $5\text{km/h} + v$. Kako ćemo udaljenost l ćemo prijeći za 14.4s, vrijedi:

$$5\text{km/h} + v = \frac{l}{14.4\text{s}}$$

Kada se gibamo u suprotnom smjeru od pokretne trake, onda vrijedi:

$$5\text{km/h} - v = \frac{l}{4 \cdot 14.4\text{s}}$$

Ovdje valja imati na umu da je brzina trake sigurno manja od 5km/h (inače bismo mogli prijeći dužine pokretne trake kada idemo u suprotnom smjeru). Kako je $14.4\text{s} = \frac{14.4}{3600}\text{h} = 0.004\text{h}$, imamo (svi brojevi su iskazani preko km i h):

$$5 + v = \frac{l}{0.004}$$

$$5 - v = \frac{l}{0.016}$$

Dakle, imamo sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice, čije je rješenje sada samo pitanje matematike. Primjerice, ako zbrojimo obje jednadžbe (zbroj lijevih strana mora biti jednak zbroju desnih):

$$5 + v + (5 - v) = \frac{l}{0.004} + \frac{l}{0.016}$$

$$10 = \frac{4l}{0.016} + \frac{l}{0.016}$$

$$10 = \frac{5l}{0.016}$$

Dakle, $5l = 10 \cdot 0.016 = 0.16$, iz čega $l = 0.032\text{km} = 32\text{m}$. Brzina trake v je stoga $5 - v = \frac{0.032}{0.016} = 2$ Dakle, $v = 3\text{km/h}$.