

# Dodatak: Zbroj i rastav valova

Duje Jerić- Miloš

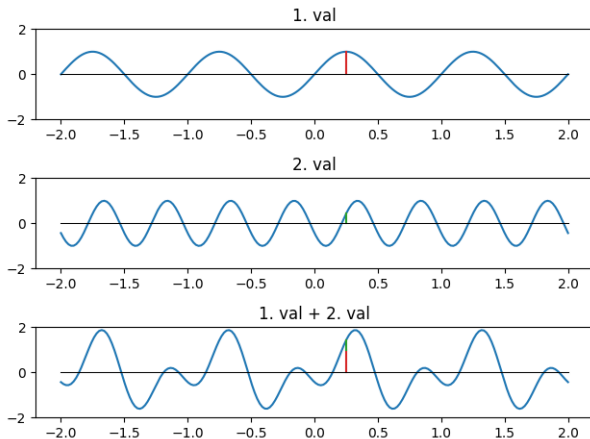
25. svibnja 2025.

# Zbroj valova

- ▶ Jedan val naiđe na drugi

# Zbroj valova

- ▶ Jedan val naiđe na drugi
- ▶ Visina novog vala je u svakoj točki zbroj visina izvornih valova:

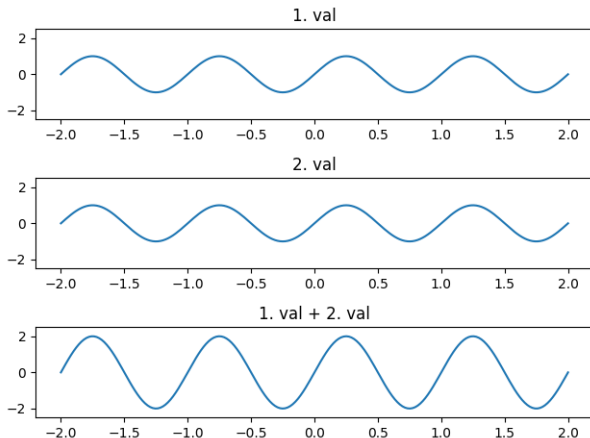


# Konstruktivna interferencija

- ▶ Brijeg nailazi na brijeg i dol na dol

# Konstruktivna interferencija

- ▶ Brijeg nailazi na brijeg i dol na dol
- ▶ Oba vala guraju medij u istom smjeru  $\Rightarrow$  Novi val ima još više brijegove i još dublje dolove:

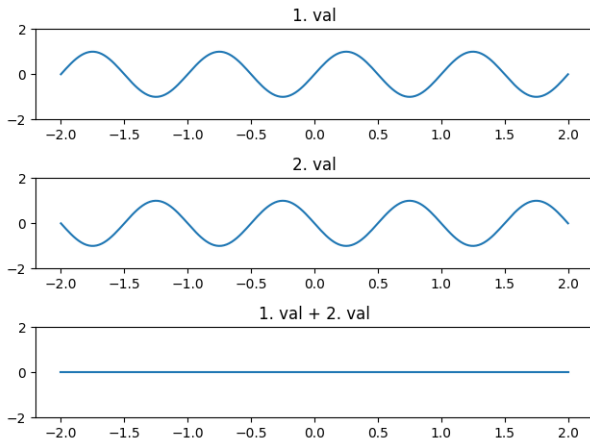


# Destruktivna interferencija

- ▶ Brijeg jednog vala nailazi na dol drugog

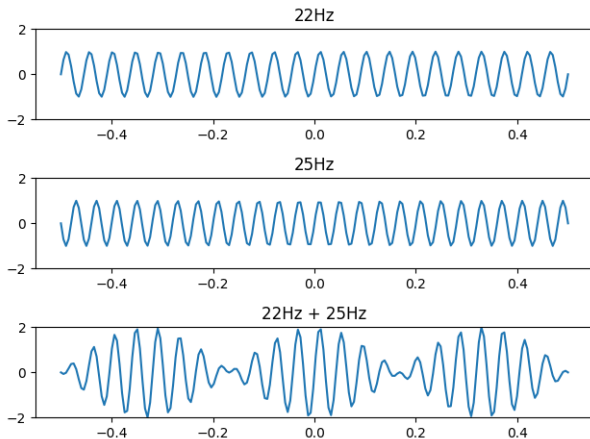
# Destruktivna interferencija

- ▶ Brijeg jednog vala nailazi na dol drugog
- ▶ Jedan val gura medij u jednom, a drugi u drugom smjeru  
⇒ novi val ima niže brijegove i pliće dolove



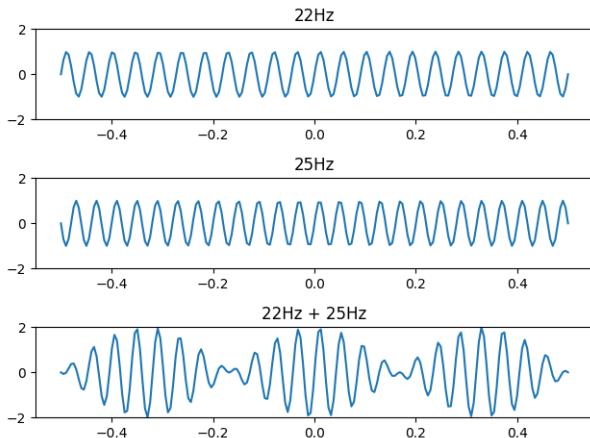
# Udari

- Što kada zbrajamo valove sličnih frekvencija?





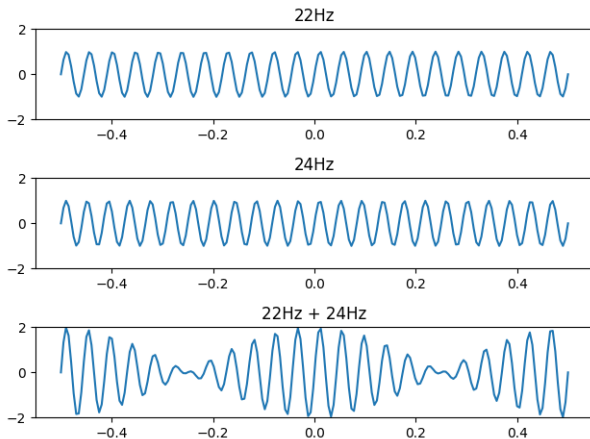
- ▶ Što kada zbrajamo valove sličnih frekvencija?



- ▶ Dobijemo signal koji periodički mijenja amplitudu (imamo omotač)

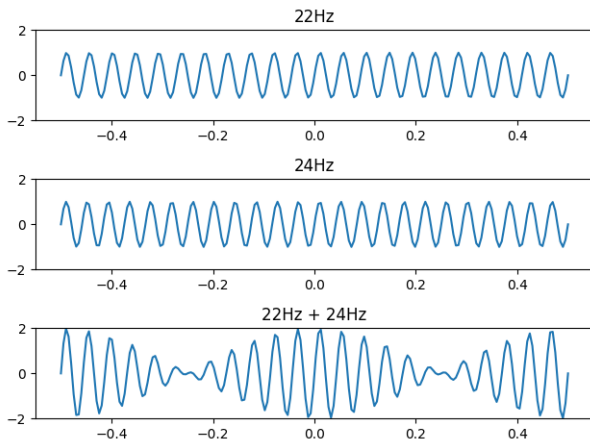
# Udari

- Amplituda se sporije mijenja što su frekvencije početnih signala bliže:



# Udari

- Amplituda se sporije mijenja što su frekvencije početnih signala bliže:



- <https://www.youtube.com/watch?v=hCFMbh2IsPQ>

# Grupna brzina

- ▶ Fazna brzina = brzina gibanja vrha brijega

# Grupna brzina

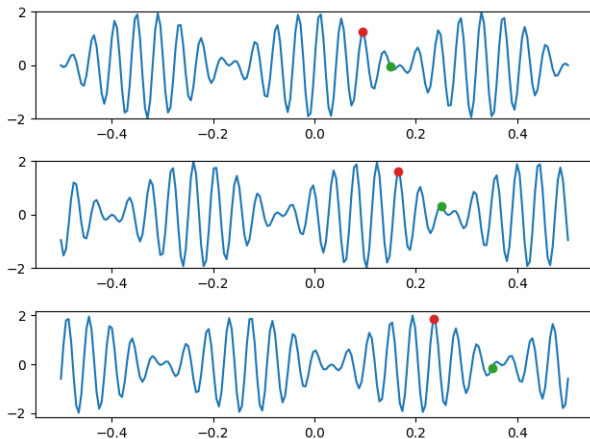
- ▶ Fazna brzina = brzina gibanja vrha brijega
- ▶ Grupna brzina = brzina gibanja (ruba) omotača

# Grupna brzina

- ▶ Fazna brzina = brzina gibanja vrha brijega
- ▶ Grupna brzina = brzina gibanja (ruba) omotača
- ▶ Kada brzine različitih frekvencija nisu iste, grupna i fazna brzina se mogu razlikovati (imamo tzv. disperzivni medij)

# Grupna brzina

Vidi [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wave\\_group.gif](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Wave_group.gif)  
Wave\_group.gif



# Rastav valova (Fourierov teorem)

- ▶ Zbrajanjem jednostavnih valova (npr. sinusoida) dobijemo periodički signal kompliciranijeg oblika.



# Rastav valova (Fourierov teorem)

- ▶ Zbrajanjem jednostavnih valova (npr. sinusoida) dobijemo periodički signal kompliciranijeg oblika.
- ▶ Možemo li signal kompliciranog oblika razbiti na zbroj jednostavnih valova (npr. sinusoide)?

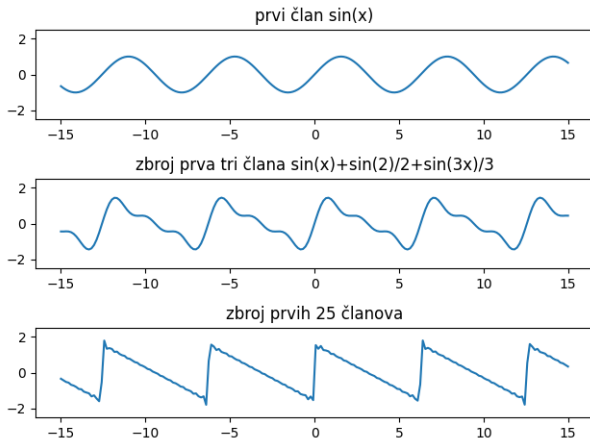
# Rastav valova (Fourierov teorem)

- ▶ Zbrajanjem jednostavnih valova (npr. sinusoida) dobijemo periodički signal kompliciranijeg oblika.
- ▶ Možemo li signal kompliciranog oblika razbiti na zbroj jednostavnih valova (npr. sinusoide)?
- ▶ Da! Zbrajanjem velikog broja jednostavnih valova možemo dobiti praktički bilo koji periodički signal. Ovo je prvi pokazao Joseph Fourier

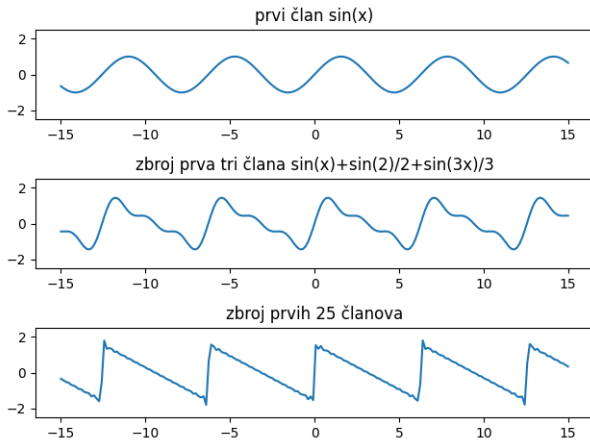
# Rastav valova (Fourierov teorem)

- ▶ Zbrajanjem jednostavnih valova (npr. sinusoida) dobijemo periodički signal kompliciranijeg oblika.
- ▶ Možemo li signal kompliciranog oblika razbiti na zbroj jednostavnih valova (npr. sinusoida)?
- ▶ Da! Zbrajanjem velikog broja jednostavnih valova možemo dobiti praktički bilo koji periodički signal. Ovo je prvi pokazao Joseph Fourier
- ▶ Npr. Sawtooth signal  $\text{saw}(x)$  se na ovaj način dobije koristeći sinusoida:  $\text{saw}(x) = \sin(x) + \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(4x) \dots$

# Rastav valova (Fourierov teorem)

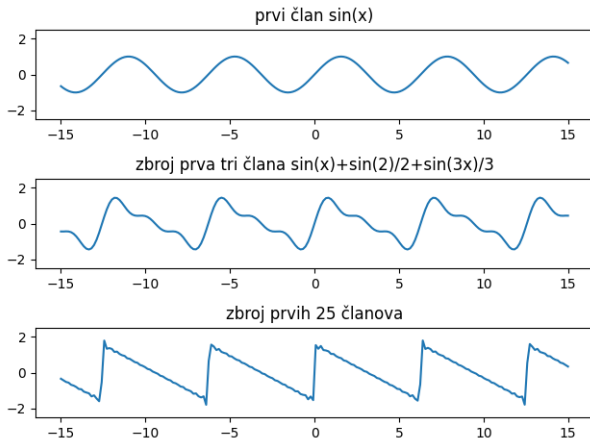


# Rastav valova (Fourierov teorem)



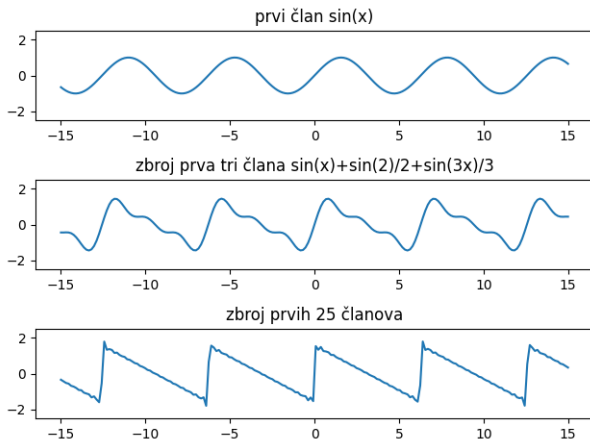
► Moramo li koristiti sinusoide?

# Rastav valova (Fourierov teorem)



► Moramo li koristiti sinusoide? NE!

# Rastav valova (Fourierov teorem)



- ▶ Moramo li koristiti sinusoide? NE!
- ▶ Početni signal se može razbiti i na druge tipove valova, npr. na square (tzv. Haar wavelet) i sl.

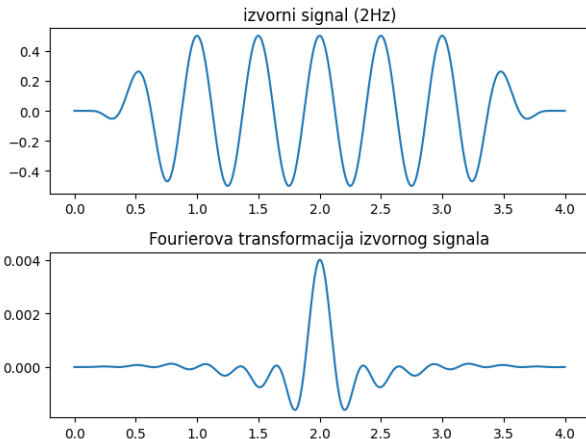
# Fourierov transformat

- ▶ Kako odrediti frekvencije (i amplitude) jednostavnijih valova od kojih je komplicirani val građen?



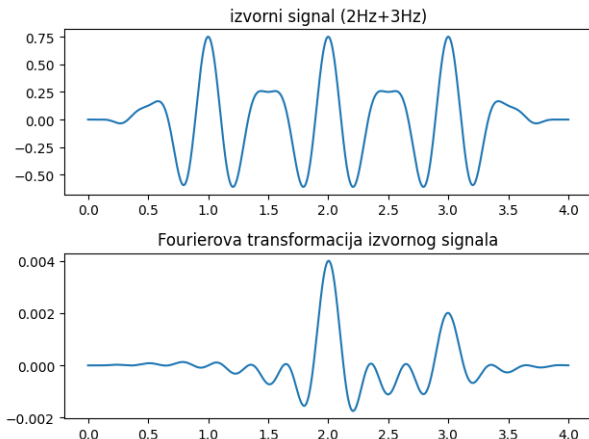
# Fourierov transformat

- ▶ Kako odrediti frekvencije (i amplitude) jednostavnijih valova od kojih je komplicirani val građen?
- ▶ Fourierovom transformacijom!



# Fourierov transformat

- ▶ Ako je neka frekvencija više zastupljena (njena amplituda je u zbroju veća), i u transformaciji je ona više zastupljena (veća površina ispod vrha)

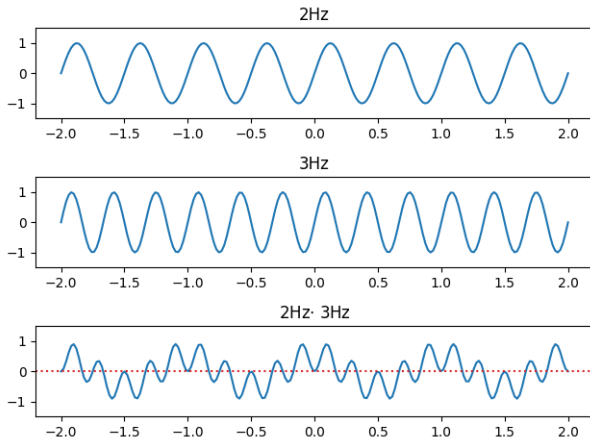


# Kako računati Fourierov transformat

- ▶ Kako odrediti je li neka frekvencija zastupljena u signalu?

# Kako računati Fourierov transformat

- ▶ Kako odrediti je li neka frekvencija zastupljena u signalu?
- ▶ Promotrimo umnožak dvaju sinusoida:

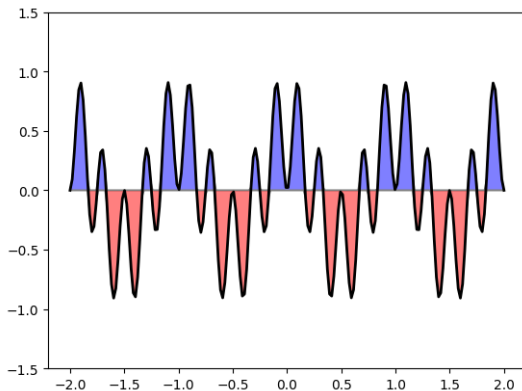


# Kako računati Fourierov transformat

- ▶ Vidimo da umnožak provodi jednako vremena ispod i iznad x osi

# Kako računati Fourierov transformat

- ▶ Vidimo da umnožak provodi jednako vremena ispod i iznad x osi
- ▶ Ukupna površina ispod grafa je 0 (površinu ispod x osi [crveno] računamo kao negativan broj):

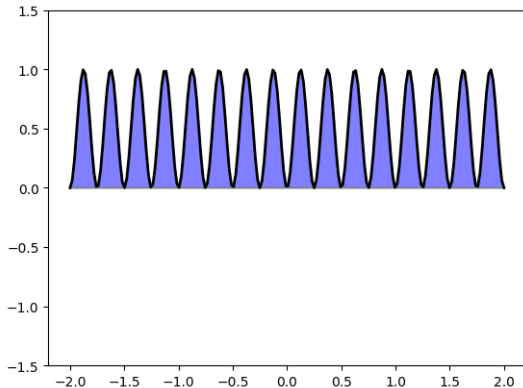


# Kako računati Fourierov transformat

- ▶ Ako pomnožimo dvije sinusoide iste frekvencije, nemamo ovo ponašanje

# Kako računati Fourierov transformat

- ▶ Ako pomnožimo dvije sinusoide iste frekvencije, nemamo ovo ponašanje
- ▶ Umnožak je pozitivan i ima samo pozitivnu površinu:





# Kako računati Fourierov transformat

- ▶ Dakle, početni signal  $g(x)$  (zbroj različitih sinusoida) pomnožimo sinusoidom frekvencije  $f$ :  $g(x) \cdot \sin(2\pi fx)$

# Kako računati Fourierov transformat

- ▶ Dakle, početni signal  $g(x)$  (zbroj različitih sinusoida) pomnožimo sinusoidom frekvencije  $f$ :  $g(x) \cdot \sin(2\pi fx)$
- ▶ Ako površina ispod grafa nije 0, ta frekvencija je zastupljena u početnom signalu

# Kako računati Fourierov transformat

- ▶ Dakle, početni signal  $g(x)$  (zbroj različitih sinusoida) pomnožimo sinusoidom frekvencije  $f$ :  $g(x) \cdot \sin(2\pi fx)$
- ▶ Ako površina ispod grafa nije 0, ta frekvencija je zastupljena u početnom signalu
- ▶ Površina ispod grafa duž jednog perioda je točno amplituda  $s$  kojom je ta frekvencija zastupljena u signalu.
- ▶ Kada nađemo sve frekvencije koje su zastupljene i njihove amplitude, izvorni komplicirani signal je samo zbroj  $A_1 \sin(2\pi f_1 x) + A_2 \sin(2\pi f_2 x) + \dots$