8. razred - Gibanje (dodatak)

Duje Jerić- Miloš

12. listopada 2024.

1 Kako iz sile do pomaka

Ako se gibamo stalnom brzinom v, a proteklo je Δt vremena, prijeđeni put Δx ćemo pronaći formulom $\Delta x = v\Delta t$. Primjerice, ako se gibamo brzinom od 100km/h dva sata, prešli smo ukupno $100\text{km/h} \cdot 2\text{h} = 200\text{km/h}$.

Ako se brzina mijenja, onda ukupno vrijeme možemo podijeliti na toliko male komadiće da je brzina približno konstantna na svakom komadiću (ako se promijeni, promijeni se zanemarivo malo). Podijelimo ukupno vrijeme Δt na N sitnih komadića $\delta t = \frac{\Delta t}{N}$ [1]. Primjerice, ako u konkretnom problemu treba razmatrati gibanje u trajanju od 2s, ali se brzina kroz to vrijeme znatno mijenja, onda možemo isjeckati te 2s na, recimo, 1 000 000 jednakih komadića $\delta t = \frac{2\text{s}}{1\ 000\ 000}$. Ako δt nije dovoljno malen (smatramo da se brzina još uvijek značajno mijenja dok prođe δt vremena), onda možemo ukupno vrijeme isjeckati na još veći broj komadića (npr. bilijun).

U svakom slučaju, sada na svakom komadiću imamo neku (približno konstantnu) brzinu. Označimo s v_1 brzinu za prvi komadić, v_2 za drugi,... v_N za N-ti i posljednji komadić. Napomenimo da se brzina naravno mijenja pa nije ista na svakom komadiću. Ipak, unutar svakoga komadića brzina se zanemarivo malo mijenja pa možemo pomak pronaći formulom za konstantnu brzinu. Dakle, sitni pomak na prvom komadiću je $\delta x_1 = v_1 \delta t$, pomak na drugom komadiću je $\delta x_2 = v_2 \delta t$...pomak na posljednjem je $\delta x_N = v_N \delta t$. Ukupni pomak je sada naravno zbroj svih sitnih pomaka:

$$\Delta x = \delta x_1 + \delta x_2 + ... + \delta x_N = v_1 \delta t + v_2 \delta t + ... + v_N \delta t$$

[1] Promotrimo da je ovdje δ malo, a Δ veliko grčko slovo "delta". Njima označavamo mali i veliki pomak.

Ista analiza vrijedi kada govorimo o brzini i akceleraciji (ubrzanju). Ako se gibamo stalnom akceleracijom a, a proteklo je Δt vremena, promjenu u brzini ćemo pronaći formulom $\Delta v = a\Delta t$. Primjerice, ako ubrzavamo akceleracijom od $10\frac{m}{\mathrm{s}^2}$ dvije sekunde, brzina nam se promijenila ukupno za $10\frac{m}{\mathrm{s}^2} \cdot 2\mathrm{s} = 20\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Može se dogoditi da se akceleracija mijenja. U tom slučaju moramo ukupno vrijeme Δt podijeliti velik broj (N) malih komadića $\delta t = \frac{\Delta t}{N}$. Ti komadići moraju biti toliko sitni da se na svakom akceleracija mijenja zanemarivo malo. U tom slučaju, označimo s a_1 akceleraciju na prvom komadiću, a_2 akceleraciju na drugom,...,a_N akceleraciju na N-tom i posljednjem komadiću. Promjenu brzine na svakom komadiću sada izračunamo formulom $\delta v = a\delta t$. Dakle, na prvom komadiću imamo $\delta v_1 = a_1\delta t$, na drugom imamo $\delta v_2 = a_2\delta t$,...,na posljednjem imamo $\delta v_N = a_N\delta t$.

S druge strane, ako s v_0 označimo početnu brzinu, onda je brzina nakon prvog vremenskog komadića dana s $v_1 = v_0 + \delta v_1 = v_0 + a_1\delta t$. Na početku drugog komadića je dakle brzina v_1, stoga je na kraju drugog komadića brzina $v_2 = v_1 + \delta v_2 = v_0 + a_1\delta t + a_2\delta t$ (brzina se samo uvećala za još $\delta v_2 = a_2\delta t$). Na kraju trećeg komadića brzina se još uvećala za $\delta v_3 = a_3\delta t$ pa je dana izrazom $v_3 = v_2 + \delta v_3 = v_0 + a_1\delta t + a_2\delta t + a_3\delta t$. Brzina nakon posljednjeg komadića je naravno $v_N = v_0 + a_1\delta t + a_2\delta t + ... + a_N\delta t$. Ukupna promjena u brzini je $\Delta v = v_N - v_0 = \delta v_1 + \delta v_2 + ... + \delta v_N$ (zbroj svih malih promjena).

Sila i akceleracija su po drugom Newtonovom zakonu vezane formulom $F = ma$. Prebacimo li masu tijela čije gibanje analiziramo na drugu stranu vidimo da je akceleracija dana s $a = \frac{F}{m}$. Dakle, ako s F_1, F_2,...,F_N označimo silu na svakom malom komadiću, onda možemo reći da je $a_1 = \frac{F_1}{m}$, $a_2 = \frac{F_2}{m}$,...,$a_N = \frac{F_N}{m}$.

Treba imati na umu da će često sila ovisiti o položaju tijela. Primjerice, ako je tijelo na opruzi onda veća sila djeluje na tijelo kada je opruga sabijena ili razvučena u odnosu na to kada je labava. Dakle, da bismo odredili sile u svim trenutcima, morat ćemo pratiti i kako se mijenja položaj.

Imajući ove sve ovo na umu, vidimo da gibanje možemo izračunati tako da:

1. Ukupno vrijeme Δt isjeckamo na velik broj N sitnih komadića $\delta t = \frac{\Delta t}{N}$.

2. Koristeći položaj tijela na trenutnom vremenskom komadiću možemo izračunati trenutnu silu F odgovarajućom formulom (koja zapravo definira konkretni fizikalni problem). Primjerice, ako je tijelo okačeno na

oprugu, na njega djeluje elastična sila dana izrazom $F = k\Delta l$, gdje je Δl pomak tijela od ravnotežnog položaja (gdje je opruga opuštena). U ovom slučaju je položaj x najbolje mjeriti od ravnotežnog položaja tako da sila postane $F = kx$ (položaj može biti negativan jer se opruga može skupiti i rastegnuti). Dakle, ako smo izračunali položaj tijela na kraju petog vremenskog komadića x_5, sila koja će djelovati na tijelo na početku šestog vremenskog komadića je onda $F_6 = kx_5$. Kako su komadići toliko maleni da se sila unutar svakog komadića zanemarivo malo mijenja, ovo je sila koja će djelovati na tijelo duž čitavog šestog komadića.

3. Poznavajući silu na danom komadiću, akceleraciju pronađemo formulom $a = \frac{F}{m}$.

4. Poznavajući brzinu na početku danog komadiću, brzinu na kraju tog komadića (tj. na početku sljedećeg komadića) pronađemo dodavajući odgovarajuću promjenu $a\delta t = \frac{F}{m}\delta t$. Primjerice, ako poznajemo da je na početku šestog (tj. kraju petog) komadića brzina v_5, onda je na kraju šestog (tj. početku sedmog) $v_6 = v_5 + \frac{F_6}{m}\delta t$. Kako uzimamo da su vremenski intervali toliko maleni da se brzina približno ne mijenja, ovo je brzina koju ćemo koristiti za čitav sedmi komadić.

5. Poznavajući položaj na početku danog komadića, položaj na početku sljedećeg dobijemo dodavanjem odgovarajuće promjene $v\delta t$. Primjerice, ako znamo da je na šestom komadiću brzina v_5 i da je na kraju petog (dakle na početku šestog) komadića tijelo na udaljenosti x_5, onda je na kraju šestog komadića tijelo na udaljenosti $x_6 = x_5 + v_5\delta t$.

Zaključimo. Poznavajući početni položaj x_0 i početnu brzinu v_0 tijela mase m, položaj i brzinu tijela u svim kasnijim trenutcima možemo izračunati po gornjem receptu **za bilo koji problem**. Samo je potrebno da je oblik sile zadan (kako sila ovisi o položaju i/ili brzini). Gornji recept nije pretjerano lagano koristiti "pješice" (papir-olovka) zbog potencijalno ogromnog broja vremenskih intervala (N), stoga ćemo uglavnom koristiti računala, odnosno pisat ćemo računalne simulacije.

Ipak, da pokažemo na primjeru kako recept funkcionira, izračunat ćemo ovisnost položaja o vremenu za najjednostavniji slučaj ubrzanog gibanja - za jednoliko ubrzano tijelo.

2 Pomak jednoliko ubrzanog tijela

Pretpostavimo dakle da tijelo jednoliko ubrzava, odnosno da mu je akceleracija a konstantna. Podijelimo kao inače ukupni vremenski pomak Δt na N sitnih komadića $\delta t = \frac{\Delta t}{N}$. U tom slučaju je ukupni pomak

$$\Delta x = \delta x_1 + \delta x_2 + ... + \delta x_N = v_1\delta t + v_2\delta t + ... + v_N\delta t.$$

Kako je akceleracija konstantna, na svakom sitnom intervalu se brzina promijeni za istu vrijednost $\delta v = a\delta t$.

Ako s v_0 označimo početnu brzinu, onda je brzina na kraju prvog intervala $v_1 = v_0 + a\delta t$. Brzina na kraju drugog intervala je isto tako $v_2 = v_1 + \delta v = v_0 + a\delta t + a\delta t = v_0 + 2a\delta t$, a brzina na kraju trećeg je $v_3 = v_2 + \delta v = v_0 + a\delta t + a\delta t + a\delta t = v_0 + 3a\delta t$, itd. Brzina na kraju posljednjeg intervala je $v_N = v_0 + a\delta t + ... + a\delta t = v_0 + Na\delta t$.

Dakle, ukupni pomak je

$$\Delta x = v_1\delta t + v_2\delta t + ... + v_N\delta t = (v_0 + a\delta t)\delta t + (v_0 + 2a\delta t)\delta t + ... + (v_0 + Na\delta t)\delta t.$$

Korištenjem distributivnost, odnosno svojstva brojeva koje kaže da npr. $7 \cdot 5 + 10 \cdot 5 = (10 + 7) \cdot 5$, dobijemo:

$$\Delta x = v_0\delta t + a\delta t \cdot \delta t + v_0\delta t + 2a\delta t \cdot \delta t + ... + v_0\delta t + Na\delta t \cdot \delta t.$$

Drugim riječima (razdvojimo li v_0 od ostatka)

$$\Delta x = v_0\delta t + v_0\delta t + ... + v_0\delta t + a\delta t^2 + 2a\delta t^2 + ... + Na\delta t^2.$$

Kako zbrajamo N istih brojeva ($v_0\delta t$) ovo je samo:

$$\Delta x = Nv_0\delta t + 1a\delta t^2 + 2a\delta t^2 + ... + Na\delta t^2.$$

Distributivnost onda daje:

$$\Delta x = Nv_0\delta t + (1 + 2 + ... + N)a\delta t^2.$$

Kako vrijedi da $1 + 2 + ... + N = \frac{N(N+1)}{2}$[2], vidimo da:

$$\Delta x = Nv_0\delta t + \frac{N(N+1)}{2}a\delta t^2.$$

[2] Ovo možemo vidjeti na sljedeći način. Recimo, primjerice, da želimo izračunati broj $S = 1 + 2 + ... + 99 + 100$. Ovaj zbroj možemo zapisati i kao $S = 100 + 99 + ... + 2 + 1$.

Sada iz definicije $\delta t = \frac{\Delta t}{N}$ imamo da:

$$\Delta x = N v_0 \frac{\Delta t}{N} + \frac{N(N+1)}{2} a \left(\frac{\Delta t}{N}\right)^2 = v_0 \Delta t + \frac{N(N+1)}{2} a \frac{\Delta t^2}{N^2}.$$

Kada pokratimo N, ovo je samo

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{(N+1)}{N} \cdot \frac{1}{2} a \Delta t^2.$$

Što su nam intervali δt manji, odnosno što je broj tih intervala N veći, to je $\frac{N+1}{N}$ bliži jedinici 1. Promotrimo npr. $\frac{1001}{1000}$ i $\frac{1\ 000\ 001}{1\ 000\ 000}$. Dakle, ako je N dovoljno velik, možemo uzeti da je $\frac{N+1}{N}$ približno 1. Drugim riječima:

$$\Delta x = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2.$$

Sada ako zbrojimo $S + S = (1+100) + (2+99) + ... + (99+2) + (100+1)$, onda je jasno da $2S = 101 + 101 + ... + 101 + 101 = 100 \cdot 101 = 10100$. Dakle ako $2S = 10100$, onda je $S = 5050$.

U općem slučaju imamo $S = 1 + 2 + ... + (N-1) + N$ pa

$$2S = (1+N) + (2 + [N-1]) + ... + ([N-1] + 2) + (N+1).$$

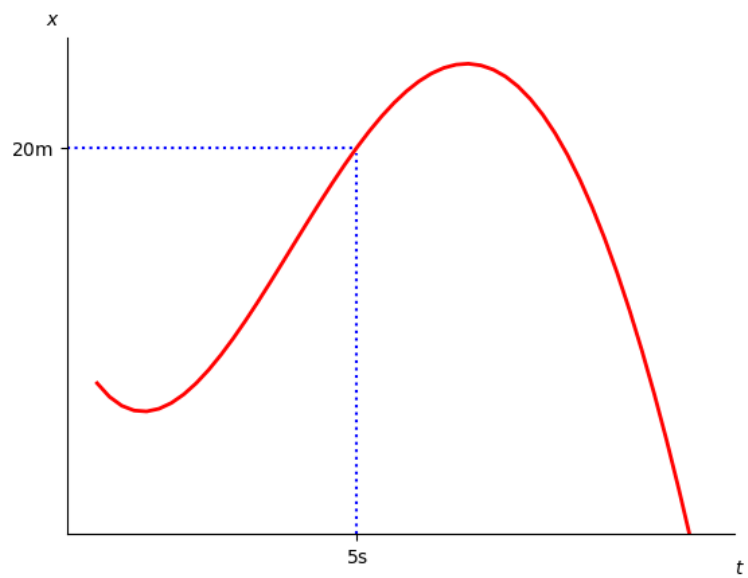
Ovo postane

$$2S = (N+1) + ... + (N+1) = N \cdot (N+1).$$

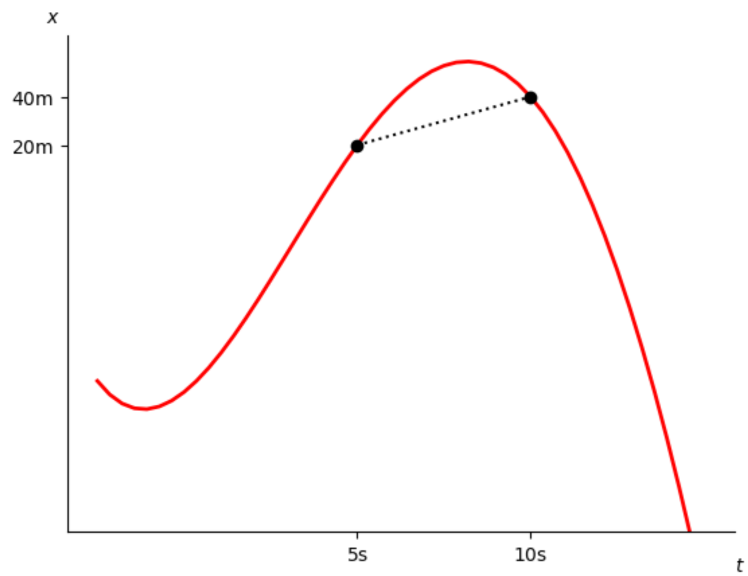
Drugim riječima, $S = \frac{N(N+1)}{2}$.

3 Grafički prikaz pomaka i brzine

Za kraj, želimo grafički objasniti prethodne formule za brzinu i položaj. Prvo, promotrimo graf položaja u odnosu na vrijeme. Graf crtamo u ravnini, pritom npr. točka $(x, y) = (5\text{s}, 20\text{m})$ znači da se u petoj sekundi tijelo nalazilo na udaljenosti od 20m. Kada nacrtamo za svako vrijeme njegov pripadni položaj, dobijemo graf ovisnosti položaja o vremenu:

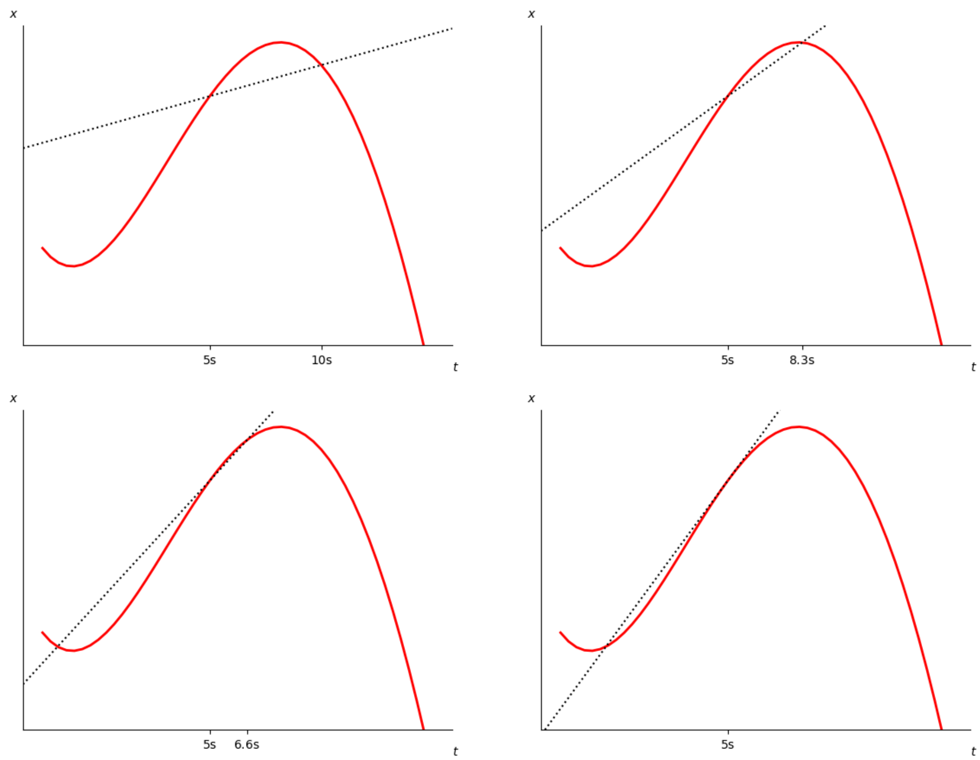


Ako se u trenutku $t = 5\text{s}$ tijelo nalazi na položaju $x = 20\text{m}$, a u trenutku $t = 10\text{s}$ na položaju $x = 40\text{m}$, onda bi prosječna brzina bila $\frac{40-20}{10-5}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Primijetimo da je ovo nagib pravca (tzv. *sekante*) koja siječe graf u točkama $(5\text{s}, 20\text{m})$ i $(10\text{s}, 40\text{m})$.



Naime, nagib pravca nam samo govori za koliko će se vrijednost pravca pomaknuti ako se njegov argument (u ovom slučaju vrijeme) pomakne za 1. Znamo da će se za taj pravac (sekantu) u 5s vrijednost promijeniti za 20m (sa 20m na 40m), stoga će se za 1s promijeniti za 4m.

Stvarnu ("trenutnu") brzinu u trenutku 5s dobijemo tako da promatramo srednju brzinu na sve manjim i manjim intervalima. Grafički, dobit ćemo nagib pravca (tzv. *tangente*) koji predstavlja nagib same funkcije u točki 5s:

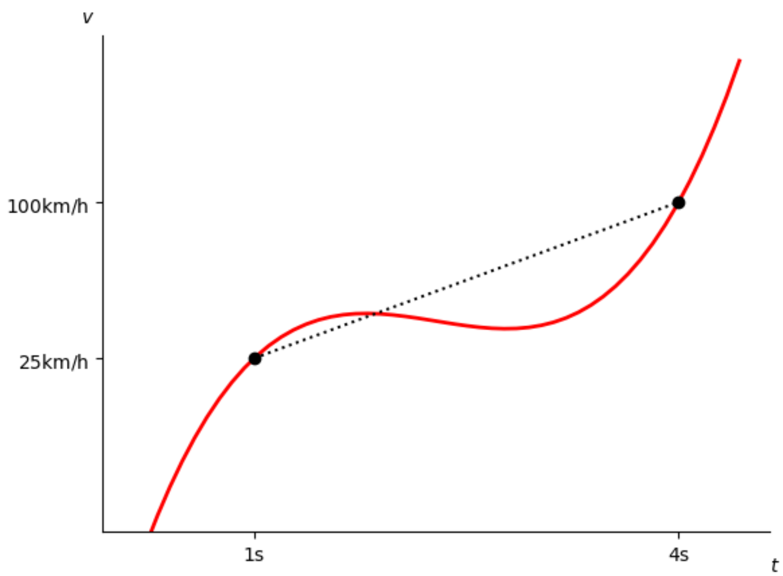


Slika 1: Nagib sekante za sve manje intervale (koji se sužavaju u trenutak 5s) postaje približno jednak nagibu tangente u 5s.

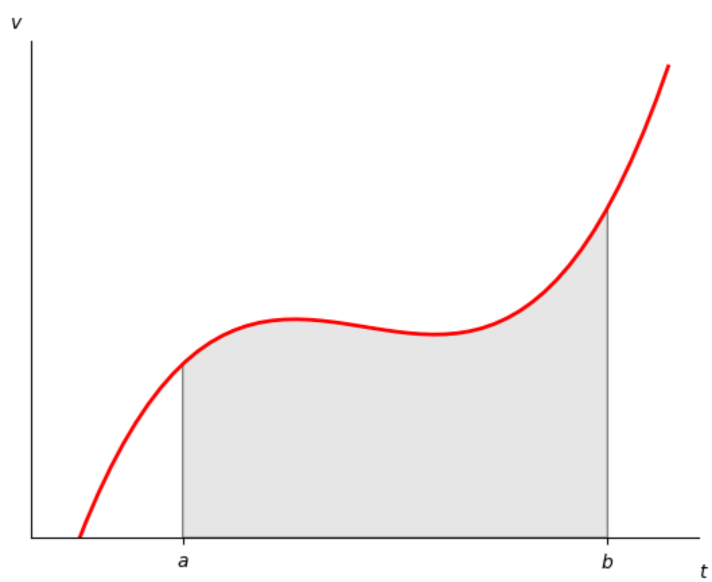
Matematički, nagib funkcije (tj. tangente na graf funkcije) f u točki 5 zovemo derivacijom te funkcije $f'(5)$. Kada pronađemo derivaciju za sve moguće vrijednosti argumenta, dobijemo novu funkciju $f' : t \mapsto f'(t)$.

Dakle, derivacija položaja (u ovisnosti o vremenu) je stvarna brzina $v(t) = x'(t)$.

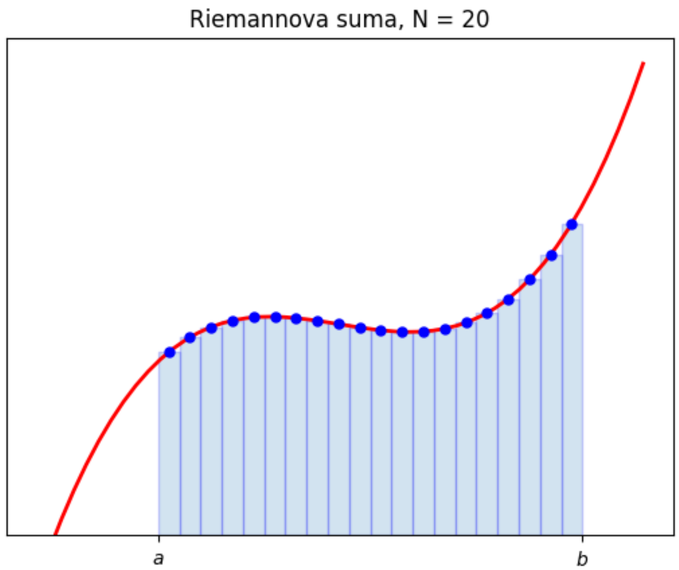
Na potpuno isti način, derivacija brzine (u ovisnosti) o vremenu je stvarna akceleracija $a(t) = v'(t)$. Naime, ako se automobil u trenutku 1s giba brzinom od 25km/h, a u trenutku 4s brzinom 100km/h, onda mu je srednje ubrzanje $\frac{4-1}{100-25}\frac{\text{km/h}}{\text{s}} = 4\frac{\text{km/h}}{\text{s}}$. Ovo je nagib sekante koja siječe graf brzine u točkama $(1\text{s}, 25\text{km/h})$ i $(4\text{s}, 100\text{km/h})$:



U slučaju brzine je možda interesantnije promotriti površinu ispod grafa između neka dva trenutka a i b:

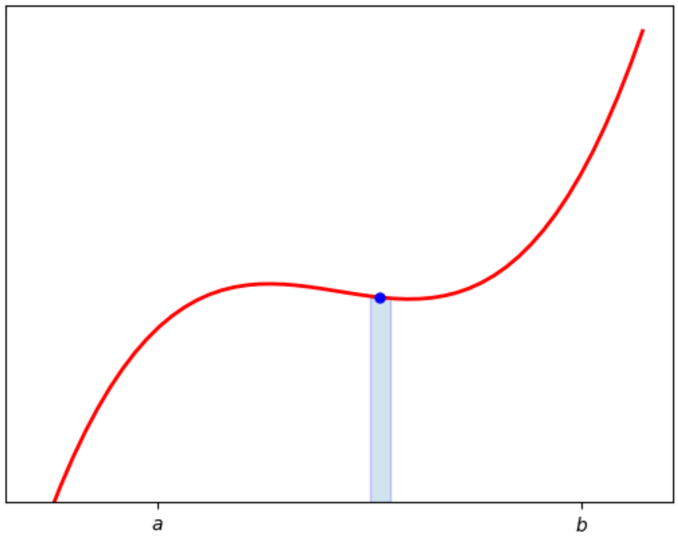


Površinu ispod grafa možemo dobiti tako područje ispod grafa isjeckamo na tanke trakice (pravokutnike) potom zbrojimo površinu svih tih pravokutnika:



Ovaj zbroj (sumu) zovemo Riemannova suma. Što smo područje isjeckali na tanje trakice, odnosno što je broj trakica veći, to će procjena površine biti točnija.

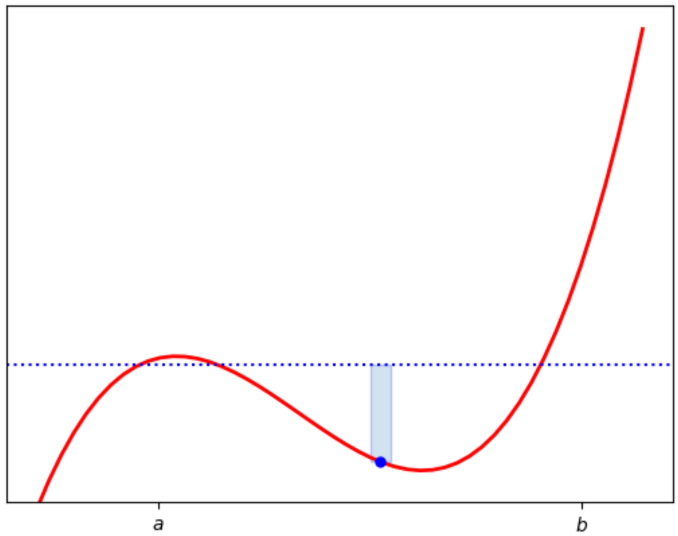
Promotrimo sada jednu konkretnu trakicu:



Širina trakice jednaka je trajanju nekog sitnog vremenskog intervala δt. Visina trakice je pak vrijednost brzine u nekoj točki unutar tog intervala. Ako je interval dovoljno malen, brzina se ne mijenja znatno pa čak nije ni bitno točno koju brzinu unutar intervala smo odabrali (možemo npr. odabrati onu točnu u sredini). Površina te trakice je dakle $v \cdot \delta t$, ali ovo je (ukoliko je vremenski interval dovoljno malen) samo pomak δx tijekom intervala δt. Dakle, površina svake trakice je približno jednaka pomak tijekom malog intervala pa je ukupna površina približno jednaka ukupnom pomaku $\Delta x = x(b) - x(a)$. Što su intervali manji (tj. trakice tanje), "približno" postaje sve točnije.

Zaključimo: **površina ispod grafa brzine (u ovisnosti o vremenu) u vremenskom intervalu od a do b predstavlja upravo egzaktni (stvarni) pomak tijela na tom intervalu**.

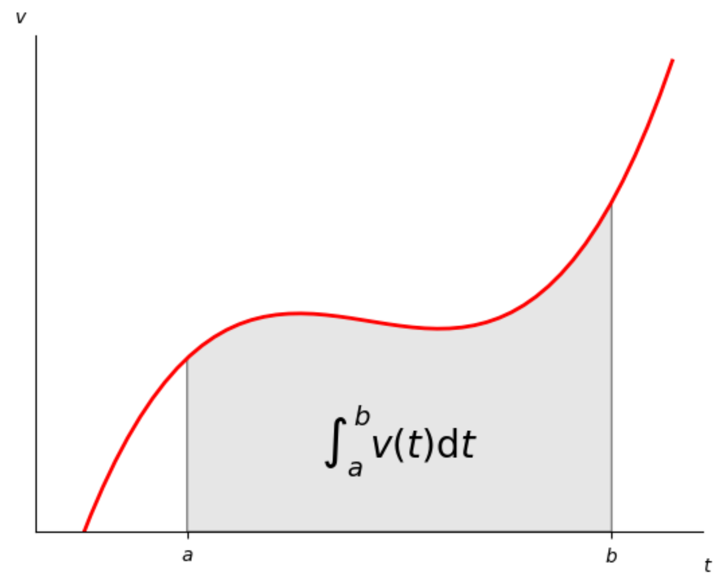
Napomenimo još jedino da se može dogoditi da graf brzine zalazi ispod x osi, odnosno da brzina postane negativna. U ovom slučaju je "površina" trakice $v\delta t$ negativna, a trakica zapravo leži iznad grafa funkcije (ali ispod x osi):



U slučaju negativne brzine, trakica doprinosi negativnu vrijednost ukupnoj površini, što i mora biti slučaj jer je pomak negativan (tijelo se giba unatrag). Dakle, komadi površine između x osi i grafa brzine su pozitivni na onim dijelovima na kojima je graf brzine iznad x osi, a negativni na onima na kojima je ispod.

Površinu ispod grafa funkcije (tj. točnije između grafa i x osi) još zovemo Riemannov interval. Pišemo $\int_a^b v(t)dt$[3] za integral funkcije $t \mapsto v(t)$ od a do b:

[3]Ovo valja shvatiti kao izduženo "S" (suma) koja zbraja (sumira) vrijednosti $v(t)dt$ za sitne intervale dt.



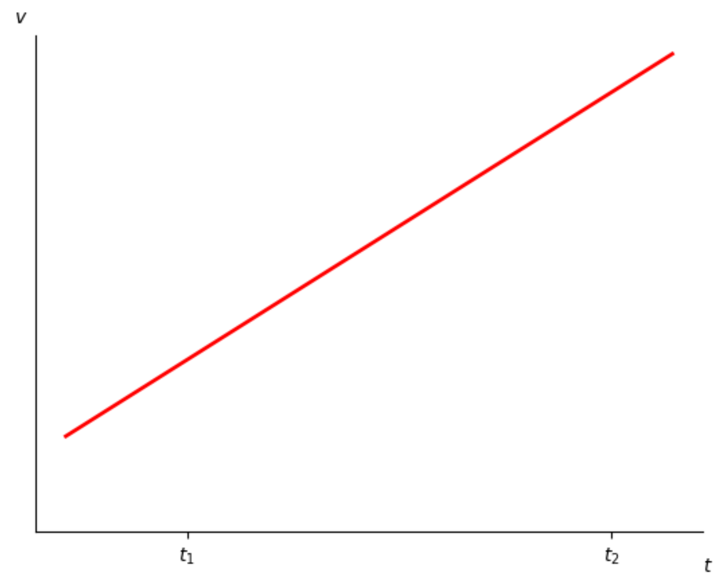
Dakle, Riemannov integral brzine (derivacije položaja) na intervalu a do b daje promjenu položaja na tom intervalu. Gornja diskusija je općenita (vrijedi za bilo koju funkciju), stoga imamo: Riemannov integral derivacije f' na intervalu od a do b daje promjenu izvorne funkcije:

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

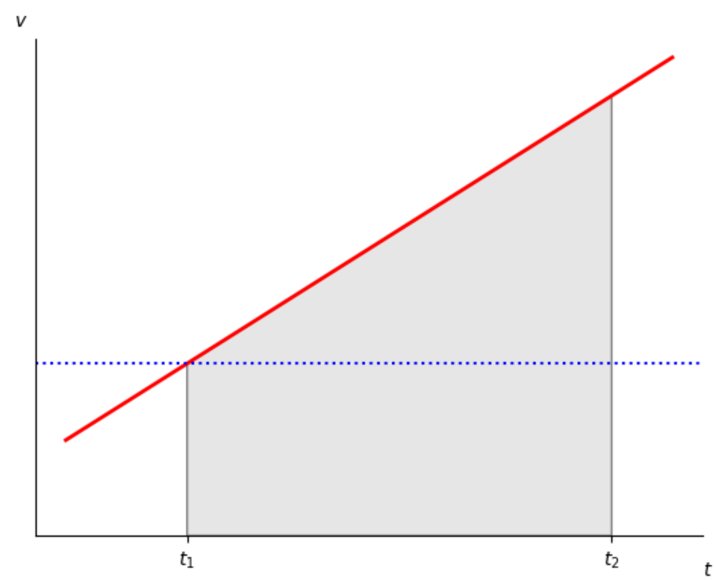
Ovo se ponekad zove još *Newton-Leibnizova formula*.

4 Grafički izvod formule za pomak jednoliko ubrzanog tijela

Promotrimo za kraj jednoliko ubrzano gibanje tijela. Neka tijelo ima početnu brzinu v_0 i ubrzava stalnom akceleracijom a. Onda je graf brzine u ovisnosti o vremenu dan pravcem $v(t) = v_0 + at$:



Izračunajmo površinu ispod grafa te funkcije:



Površinu možemo podijeliti na 2 komada. Prvi komad je pravokutnik širine $\Delta t = t_2 - t_1$ i visine v_0 (početna brzina, odsječak na y osi). Drugi komad je trokut širine $\Delta t = t_2 - t_1$, a visine $a\Delta t = a(t_2 - t_1)$ (ovo je upravo vrijednost za koju je tijelo ubrzalo na intervalu od t_1 do t_2). Površina pravokutnika je $v_0\Delta t$, a površina trokuta ($\frac{1}{2}\cdot$ visina $\cdot$ baza) je $\frac{1}{2}\cdot(a\Delta t)\cdot\Delta t$. Dakle, ukupna površina ispod grafa (ukupni pomak) je $\Delta x = v_0\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$.

Sada rezultat iz sekcije "pomak jednoliko ubrzanog tijela" možemo shvatiti kao dokaz da površina trokuta dobivena Riemannovom sumom (sjeckanjem trokuta na jako tanke trakice) zaista daje isti rezultat kao $\frac{1}{2}\cdot$visina$\cdot$baza.