

7. razred - Rad i energija

Duje Jerić- Miloš

5. srpnja 2024.

1 Rad

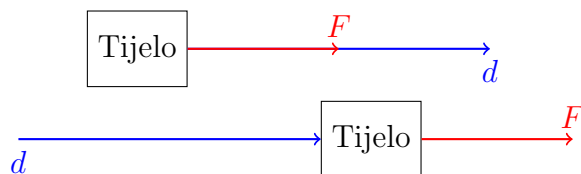
Rad možemo definirati kao djelovanje sile po putu. Što veća sila djeluje to je rad veći i što sila djeluje duž većeg puta to je rad veći. Matematički, ako sila F (eng. *force*) djeluje duž puta d (eng. *distance*), onda je rad W (eng. *work*) definiran formulom: $W = F \cdot d$. Na početku gibanja:



Na kraju gibanja tijelo je prošlo udaljenost d :



Cijelim putem je djelovala ista sila F :

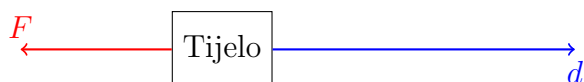


Rad mjerimo u jouleima (J), a $1\text{J}=1\text{Nm}$. Rad od 1J ćemo obaviti ako guramo neko tijelo silom od 1N duž puta od 1m (ili naravno silom od 0.5N duž puta od 2m ili silom od 2N duž puta od 0.5m itd.). Naravno, valjane mjerne

jedinice za rad su i Ncm (Newton-centimetri, =cJ), Nkm (=kJ), kNm (=kJ) itd., no standardno i uobičajeno je koristiti J, kJ (kilojoule) MJ (megajoule) itd.

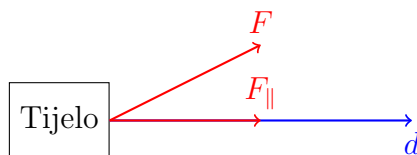
Jedino u kontekstu kemije ponekad iskazujemo rad u kalorijima (cal), a u kontekstu čestične fizike ili u elektronvoltima (eV). Pritom valja imati na umu da $1\text{cal}=4.184\text{J}$, što je otprilike rad koji je potrebno obaviti da se 1g vode zagrije za 1°C , a 1eV je rad potreban da se jedan elektron gurne duž razlike u naponu od 1V te od 2019. iznosi točno $1.602176634 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Ako sila djeluje u smjeru puta, rad je pozitivan, no ako sila djeluje suprotno od smjera puta (smjera gibanja), rad je negativan:

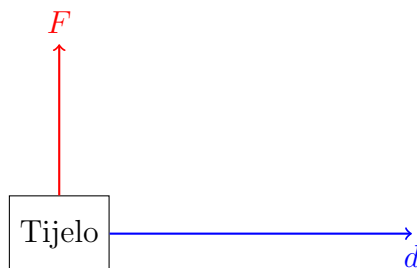


Ova se situacija javlja ako, recimo, tijelo klizi prema nama i mi ga zaustavljamo. Pozitivan rad, s druge strane, obavljam ako guram tijelo, a ono se giba u smjeru u kojem ga guramo. Primjerice, ako silom od 1N zaustavljamo tijelo duž 2m, obavili smo -2J rada.

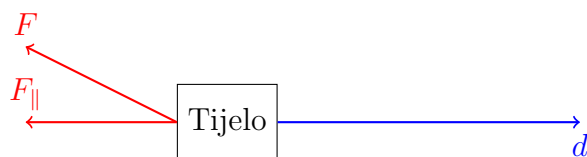
Kada sila djeluje pod nekim kutom, gledamo samo dio sile koji ide duž puta, tj. gledamo projekciju sile duž puta (odnosno *komponentu* sile duž puta), stoga je bolja formula: $W = F_{\parallel} \cdot d$:



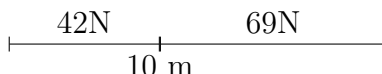
Ovo znači da je rad sile koja djeluje okomito na smjer gibanja uvijek 0 (jer je duljina njene projekcije onda 0):



Sila koja djeluje okomito na smjer gibanja je granični slučaj. U sljedećem primjeru je rad negativan (jer je projekcija sile u suprotnom smjeru od pomaka):



Što ako se sila mijenja duž puta? Recimo, ako sila gura teret duž puta od 25m, no pritom promijeni iznos nakon 10m kao na slici:



U tom slučaju samo izračunamo rad na svakom od dijelova zasebno (rad na prvom dijelu je $10\text{m} \cdot 42\text{N} = 420\text{J}$, a na drugom dijelu je $15\text{m} \cdot 69\text{N} = 1035\text{J}$). Ukupni rad je zbroj ta dva (1455J) jer smo prvo obavili rad na prvom dijelu potom smo još obavili rad i na drugom dijelu puta.

Što kada se sila neprestano mijenja? Recimo, ako imamo oprugu, onda dok rastežemo oprugu elastična sila postaje sve veća (oprugu je sve teže i teže rastegnuti). U tom slučaju put razbijemo na sitne komadiće na kojima se sila praktički ne mijenja (tj. jako malo mijenja) te primijenimo prethodnu ideju - izračunamo rad na svakom malom komadiću i zbrojimo. Ovo ugrubo opisuje ideju tzv. Riemannovog integrala.

Konačno, što ako je put zakrivljena putanja? Opet se poslužimo istom idejom - razbijemo put na male komadiće koji su približno ravni te izračunamo rad na tim komadićima. Ako se pritom i sila mijenja, onda moramo odabrati toliko male komadiće da su oni približno ravni i da se sila mijenja jako malo na svakom komadiću. Ovo ugrubo opisuje ideju iz tzv. krivuljnog integrala 2. vrste.

2 Energija

Rad obavljen na nekom tijelu generalno možemo iskazati kao promjenu neke skalarne veličine, koju zovemo **energija**. Energiju stoga isto mjerimo u joule-

ima (J). O energiji razmišljamo kao o "svojstvu tijela" - tijelo ima određenu energiju, a ako neka sila obavi rad na tom tijelu može mu povećati ili smanjiti energiju. Energija tijela se može javiti u više oblika te prijeći iz jednog oblika u drugi.

Primjerice, tijelo koje se giba određenom brzinom v (eng. *velocity*) ima **kinetičku energiju** $KE = \frac{1}{2}mv^2$, a tijelo koje stoji na nekoj visini h (eng. *height*) ima **gravitacijsku potencijalnu energiju** $PE = mgh$. Kada tijelo koje ima neku gravitacijsku potencijalnu energiju počne padati, potencijalna energija prelazi u kinetičku (tijelo je imalo "potencijala" za gibanje, tj. "kinetiku", a sada taj potencijal ostvaruje).

Isto tako energija može prijeći s jednog tijela na drugo. Kada se dvije biljarske kugle sudare, jedna prenese energiju na drugu jer se prva kugla zaustavi (ili u najmanju ruku uspori), a druga se počne gibati.

Prokomentirajmo pozitivni i negativni rad u kontekstu energije. Recimo da dižemo teret od 1kg na visinu od 1m, potom ga spuštamo. Kada dižemo teret obavljamo 10J rada, stoga predajemo 10J utegu jer je uteg mirovao na visini od 0m, a sada miruje na visini od 1m (pa ima veću potencijalnu energiju). Kada spuštamo uteg, onda obavljamo $-10J$ rada (odnosno oduzimamo utegu 10J energije) jer na početku uteg miruje na visini od 1m, a nakon našeg djelovanja miruje na visini od 0m. Dakle, iz perspektive utega ništa se nije dogodilo (ukupni rad obavljen na utegu je 0; uteg ima istu energiju na kraju kao i na početku).

Da smo podigli uteg i onda ga samo ispustili, potencijalna energija koju smo mu podizanjem dali bi prešla u kinetičku (uteg bi se spustio na 0m, ali ne bi mirovao). S druge strane, budući da polaganim spuštanjem teret aktivno usporavamo, oduzimamo mu energiju.

Sada je pitanje koliko smo mi potrošili energije - vidimo da u jednom slučaju sila kojom djelujemo vrši 10J, a u drugom $-10J$ rada. Ukupni rad naše sile je stoga 0J - matematički ispada da se nismo ni umorili! Još apsurdniji rezultat možemo dobiti ako mirno držimo uteg od 100kg - teret se ne miče pa ne obavljamo nikakav rad. Ipak, čovjek je kompliciran sustav, a naši mišići troše energiju čak i kada nešto držimo nepomično u ruci (teret jest nepomičan, ali mišićna vlakna, stanice nisu).

Da smo mjesto organizma imali mehanički stroj, on bi morao uložiti energiju da podigne teret, ali bi mogao iskoristiti pad tereta da spremi njegovu energiju u neki drugi oblik. Primjerice, uže tom prenesemo pad tereta na rotaciju kakvog diska (ovo uspori teret, ali pokrene disk), a rotirajući disk

kasnije možemo iskoristiti za dizanje kakvog drugog tereta.

Primijetimo da točni iznos energije (gravitacijske potencijalne i kinetičke) ovisi o promatraču. Tijelo se može jedino gibati *u odnosu na nešto*, stoga će, recimo, vlak imati određenu kinetičku energiju iz perspektive promatrača na stanici, ali neće imati kinetičku energiju iz perspektive putnika koji sjedi u vlaku (i giba se zajedno s vlakom).

Isto tako ćemo mjeriti i veću potencijalnu energiju ako visinu mjerimo iz niže točke. Primjerice, ako imamo predmet iznad stola, onda visinu h na kojoj se predmet nalazi možemo mjeriti od stola (pa je vrijednost potencijalne energije manja) ili od poda (pa je vrijednost potencijalne energije veća). Konkretno, visinu ima smisla mjeriti od one točke koju smatramo da tijelo neće prijeći. Npr. ako znamo da tijelo ne može pasti na pod te da mu je najniža moguća točka na stolu, potencijalnu energiju ima smisla mjeriti od razine stola. Ako tijelo pak može pasti na pod, a mi visinu mjerimo od stola, onda bi na podu tijelo imalo "negativnu" visinu (visina tijela je sada ispod 0 - stol je na 0, a tijelo je ispod stola).

Iako apsolutni iznos energije ovisi o promatraču, promjene u energiji se očituju kao obavljeni rad te se svi promatrači slažu za koliko se energija promijenila (tj. slažu se oko iznosa obavljenog rada).

2.1 Gravitacijska potencijalna energija

Izračunajmo rad koji gravitacija obavi na tijelu kada se ono vertikalno pomiče s visine h_1 na visinu h_2 . Pritom držimo na umu da, ako je prva visina h_1 veća od druge h_2 , tijelo se gibalo prema dolje i rad koji gravitacija obavi je pozitivan (jer i sila gravitacije gleda prema dolje). Ako je prva visina manja od druge, rad koji gravitacija obavi je negativan.

Težina tijela (sila kojom ga Zemlja privlači prema svom središtu) je $F_g = mg$. Ako uzmemo da se tijelo giba prema dolje tako da $h_1 > h_2$, onda je prijeđeni put d samo razlika u visini $h_1 - h_2$. Dakle, obavljeni rad je:

$$W = F_g(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2.$$

Ovaj izraz $PE = mgh$ zovemo gravitacijskom potencijalnom energijom. Dakle, što se tijelo nalazi na većoj visini h , to ima veću gravitacijsku potencijalnu energiju. Isto tako, što je tijelo veće mase (ili veće težine) gravitacijska potencijalna energija je veća. Jednostavno rečeno, što se više namučimo da tijelo podignemo na njegovu trenutnu visinu (pod pretpostavkom da je

početna visina $h = 0$), to je gravitacijska potencijalna energija veća. Poanta je sljedeća: **rad koji obavi sila teža jednak je promjeni potencijalne energije.**

2.2 Potencijalna energija općenito

Osim gravitacijske potencijalne energije, postoji još i *elastična potencijalna energija* koju dobijemo tako da izračunamo rad elastične sile dok sabijamo ili rastežemo elastičnu oprugu. Ovo je malo teže izvesti nego gravitacijsku potencijalnu energiju (jer se sila dok sabijamo oprugu neprestano mijenja). Ako je konstanta elastičnosti k , a opuštenu oprugu smo sabili (ili rastegnuli) za duljinu x , onda je elastična potencijalna energija opruge dana izrazom $\frac{1}{2}kx^2$.

Općenito, mnoga međudjelovanja se mogu opisati tzv. *konzervativnim silama*. To su sile čiji je rad jednak promjeni neke skalarne veličine U koja ovisi samo o položaju tijela (na kojem obavljamo rad). Tu skalarnu veličinu U općenito zovemo **potencijalna energija**. Rad konzervativnih sila dakle ne ovisi o putanji duž koje smo vršili rad, već samo o krajnjim točkama te putanje, a tijela imaju potencijalnu energiju jer se nalaze na određenom položaju. Nisu sve sile ovakve - sila trenja očito ovisi o putanji. Zamislimo primjerice da želimo prenijeti teret s jedne strane zaleđenog jezera do druge, onda očigledno možemo gurati po najkraćoj putanji preko jezera (još k tome po ledu pa je lakše gurati) ili okolo duž obale. U oba slučaja imamo istu polazišnu i krajnju točku, ali je rad u prvom slučaju očigledno manji.

Pretpostavimo da imamo dvije čestice koje međudjeluju. Kažemo da je međudjelovanje konzervativno ukoliko je sila na jednu česticu konzervativna dok smo drugu česticu *fiksirali na mjesto*. Naime, može se dogoditi da, kako mičemo našu česticu na kojoj obavljamo rad, druga čestica mijenja svoj položaj (pa rad zapravo ovisi o putanji). Ipak, ukoliko dvije čestice međudjeluju konzervativnom silom, onda za svaki fiksni položaj x_2 druge čestice možemo napisati potencijalnu energiju za prvu (u ovisnosti o njenom položaju x_1) pa možemo govoriti o dobro definiranom izrazu za potencijalnu energiju koja ovisi samo o položajima tih dviju čestica $U(x_1, x_2)$.

Isto vrijedi i za veći broj čestica. U tom je slučaju ukupna sila na jednu jednaka zbroju sila zbog preostalih čestica. Dakle, ako je F_2 sila na česticu 1 zbog čestice 2, F_3 sila na česticu 1 zbog čestice 3, itd., onda je ukupna sila na česticu 1 dana izrazom $F_2 + F_3 + F_4 \dots$. Ukoliko su sile

za sve parove čestica konzervativne, onda je ukupna potencijalna energija prve čestice jednaka zbroju potencijalnih energija zbog svih preostalih čestica $U_2(x_1, x_2) + U_3(x_1, x_3) + U_4(x_1, x_4) \dots$ pa ovisi samo o položajima svih čestica.

Većina međudjelovanja (gravitacija, električna sila, međudjelovanje između molekula, itd.) se mogu opisati konzervativnim silama. Dakle, nekonzervativnost trenja možemo shvatiti kao posljedicu našeg grubog makroskopskog opisa. S druge strane, magnetska sila suštinski nije konzervativna. Ipak, isto kao što nekakva skalarna funkcija U (skalarni potencijal) opisuje konzervativne sile, magnetsku silu opisuje određena vektorska funkcija A (tzv. vektorski potencijal). Sve fundamentalne sile čestične fizike imaju ovakav opis (koristeći neke potencijale čije vrijednosti žive u određenim baždarnim grupama).

2.3 Kinetička energija

Nije baš jasno zašto izraz za kinetičku energiju mora biti $\frac{1}{2}mv^2$. Jasno je da izraz mora sadržavati masu jer je teže pokrenuti masivnije tijelo. Isto tako, jasno je da mora sadržavati brzinu jer govorimo o *energiji gibanja* (pa tijelo veće brzine mora imati veću energiju). Nije doduše jasno zašto imamo $\frac{1}{2}$ ispred ili zašto je brzina (a ne masa) kvadrirana ili zašto uopće imamo kvadrat, a ne kub (ili neku višu potenciju), itd.¹

Sjetimo se da je zbroj svih sila na neko tijelo (rezultantna sila) zaslužan za ubrzavanje tijela (promjenu njegove brzine). Dakle, očekujemo da rad rezultantne sile na neko tijelo mijenja "energiju gibanja" tog tijela. Primjerice, rezultantna sila može tijelo koje miruje ubrzati tako da tijelo koje prije nije imalo "energiju gibanja" sada istu ima. Matematički izraz za kinetičku energiju ("energiju gibanja") je zapravo definiran sljedećim važnim rezultatom.

Teorem o radu i energiji nam kaže da će za tijelo mase m na kojem je ukupna (tj. rezultantna sila) obavila rad W , a koje je na početku obavljanja

¹Da potencija brzine (a ne mase) mora biti kvadrat možemo ugrubo vidjeti na sljedeći način. Standardna mjerna jedinica za brzinu je m/s (koliko metara smo prešli u sekundi) jer je standardna mjerna jedinica za udaljenost m, a za vrijeme s. Dakle, mv^2 za mjernu jedinicu ima $\text{kg} \cdot (\frac{\text{m}}{\text{s}})^2$. Kako je $N = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, što slijedi iz newtonovog 2. zakona, imamo da $J = Nm = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} m = \text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$, što je oblika masa puta brzina na kvadrat. Dakle, da bi uopće mjerne jedinice imale smisla (da bi kinetička energija bila mjerena u jouleima) potencija nad masom mora biti 1, a nad brzinom 2. Ovakav argument se zove dimenzijska analiza (analiza mjernih jedinica).

rada imalo brzinu v_1 , a na kraju v_2 vrijediti:

$$W = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Ovu veličinu $KE = \frac{1}{2}mv^2$ onda nazovemo kinetičkom energijom. Teorem sada jednostavnije kaže da se **kinetička energija promijeni za iznos rada koji resultantna (tj. ukupna) sila obavi**.

Dakle, što je veća masa i brzina tijela, to je veća i kinetička energija. Jednostavno (ali ne baš potpuno precizno) sročeno, što bismo se više namučili da ubrzamo tijelo iz stanja mirovanja do njegove trenutne brzine, to je kinetička energija tijela veća.

U slučaju da imamo više tijela (s masama m_1, m_2, \dots i brzinama v_1, v_2, \dots), ukupna kinetička energija je zbroj kinetičkih energija svih tijela $KE = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \dots$. Sada imamo da je promjena ukupne kinetičke energije jednaka zbroju promjena svih pojedinačnih kinetičkih energija. Po teoremu o radu i energiji to je pak jednako zbroju radova svih resultantnih sila. Matematički, ako s ΔKE označimo promjenu ukupne kinetičke energije, a s W_1 rad resultantne sile na prvo tijelo, s W_2 rad resultantne sile na drugo, itd. onda imamo $\Delta KE = W_1 + W_2 + W_3 + \dots$.

Kada imamo samo jednu silu koja djeluje na neko tijelo, onda je rad te sile jednak promjeni kinetičke energije. Primjerice, kada tijelo slobodno pada s neke visine, rad koji obavi gravitacija jednak je promjeni kinetičke energije. Kada na vodoravnoj podlozi rastegnemo oprugu, a ona se pod utjecajem elastične sile sakupi, opet je rad elastične sile jednak promjeni kinetičke energije.

Treba razriješiti sljedeći potencijalni misterij, doduše. Kada dignemo neko tijelo sa stola na određenu visinu potom ga držimo nepomično, izvršili smo određeni rad nad tim tijelom. Zašto je onda kinetička energija 0 (tj. zašto se tijelo ne giba)? Razlog je, naravno, taj što naša sila nije jedina sila koja djeluje na to tijelo. Ovo za posljedicu ima da je ukupni rad (rad rezultante, tj. ukupne sile) jednak 0. Objasnimo ovo.

Kada tijelo stoji nepomično na stolu, ukupna sila na to tijelo je 0. Ovo je Newtonov 1. zakon - gravitacija privlači tijelo prema dolje, ali stol mu ne dopušta da propadne (a te dvije sile su jednake jer tijelo miruje). Kada podignemo tijelo i stalnom brzinom ga dižemo u zrak dogodi se sljedeća stvar. Naša sila kojom podižemo tijelo je prvo *jača* od gravitacije jer mora ubrzati

to tijelo iz nepomičnog stanja na stolu; dakle rad resultantne sile je pozitivan i očituje se kao promjena kinetičke energije (prije nismo imali brzinu, sada je imamo).

Kada tijelo neizmjenjenom brzinom (jednoliko) podižemo do željene visine, naša sila jednaka je sili gravitacije, što je opet posljedica newtonovog 1. zakona. Naime, da je gravitacija jača tijelo bi usporavalo, a da je naša sila jača tijelo bi ubrzavalo. Također, budući da tijelo podižemo cijelo vrijeme istom brzinom, i kinetička energija je isto neizmjenjena, odnosno promjena kinetičke energije je 0. Dakle, dok tijelo podižemo jednoliko, i rad resultantne sile i promjena kinetičke energije su 0.

Konačno, kada tijelo usporimo do željenog položaja, djelujemo slabijom silom od sile teže te je rad resultantne sile negativan. Zaista, resultantna sila sada gleda u smjeru gravitacije, tj. prema dolje, a tijelo se još uvijek giba prema gore (i usporava).

Vidimo da je ukupni rad resultantne sile na cijelom putu 0 (pozitivno + 0 + negativno), što je u suglasnosti s teoremom o radu i energiji.

2.4 Očuvanje energije

Kada tijelo pada (pod utjecajem gravitacije), onda se to očituje kao smanjenje gravitacijske potencijalne energije (smanjuje se visina h), a povećanje kinetičke energije (povećava se brzina v).

Štoviše, gravitacija je jedina sila koja djeluje na tijelo u slobodnom padu (ako zanemarimo otpor zraka), tj. sila teža jednaka je resultantnoj sili na tijelo. Teorem o radu i energiji nam sada kaže da rad koji obavi sila teža $W = mgh_1 - mgh_2$ mora biti jednak promjeni kinetičke energije:

$$mgh_1 - mgh_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Prebacimo li početne vrijednosti (v_1 , h_1) na jednu stranu, a konačne vrijednosti (h_2 , v_2) na drugu, imamo:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2.$$

Ovo nam govori da je ukupna energija tijela E (kinetička + potencijalna) na početku jednaka ukupnoj energiji na kraju, odnosno ukupna energija tijela je **sačuvana**. Matematički, mogli bismo pisati i $KE + PE = E = \text{const.}$ Naravno, kada uračunamo otpor zraka ili trenje, možemo imati "gubitke" u

energiji, ali to samo znači da se ta energija pretvorila u neke druge oblike energije (toplinu i sl.) koje ne možemo direktno mehanički iskoristiti.

Kada imamo više tijela koja međudjeluju (npr. planeti ili biljarske kugle pri sudaru), onda se može dogoditi da jedno tijelo izgubi energiju, ali pritom neko drugo mora dobiti energiju, stoga će ukupna energija čitavog sustava, odnosno zbroj kinetičkih i potencijalnih energija svih tijela koje sačinjavaju sustav biti sačuvan².

Da zaključimo, energija je sačuvana te se samo može prebacivati iz jednog oblika u drugi (npr. iz kinetičke u potencijalnu i obratno). Dobar primjer takve energetske konverzije je njihalo.

Kada se njihalo nalazi u svojoj najvišoj točki, energija njihala se nalazi u obliku gravitacijske potencijalne energije (u najvišoj točki njihalo nakratko stane pa mu je brzina, tj. kinetička energija 0). Kada se njihalo zaniže prema dolje, ta potencijalna energija prelazi u kinetičku, a u najnižoj točki najnižoj točki (kada je potencijalna energija najmanja) je brzina, tj. kinetička energija najveća. Kada njihalo prijeđe najnižu točku i krene se gibati prema gore, onda kinetička energija opet prelazi u potencijalnu energiju, a njihalo se ponovno penje do svoje najviše točke i zaustavlja. Vidi sljedeći eksperiment (pred kraj videa, oko 45:42): <https://www.youtube.com/watch?v=9gUdDM6LZGo>.

²Naime, u tom slučaju će rad rezultantne (konzervativne) sile na svako tijelo biti jednak promjeni neke potencijalne energije. Ovo je potencijalna energija zbog međudjelovanja i eventualno neke vanjske sile. Označimo potencijalnu energiju koje prvo tijelo ima zbog međudjelovanja sa svim drugim tijelima s U_1 (za 2. česticu isto tako U_2 , itd.). Možemo stoga govoriti o ukupnoj potencijalnoj energiji $U = U_1 + U_2 + U_3 + \dots$. Promjena ukupne potencijalne energije (kada su sve čestice na konačnim položajima u odnosu na to kada su sve čestice na početnim položajima) jednaka je zbroju promjena svih pojedinačnih potencijalnih energija i to tako da za svaku pojedinačnu česticu fiksiramo položaje preostalih čestica. Zaista, označimo li s x_1, x_2, x_3, \dots početne položaje čestica, a s x'_1, x'_2, x'_3, \dots konačne položaje, onda imamo:

$$U(x'_1, x'_2, x'_3, \dots) - U(x_1, x_2, x_3, \dots) = U_1(x'_1, x'_2, x'_3, \dots) - U_1(x_1, x_2, x_3, \dots) + \\ U_2(x_1, x'_2, x'_3, \dots) - U_2(x_1, x_2, x'_3, \dots) + \dots U(x_1, x_2, x_3, \dots)$$

jer se svi članovi osim krajnja dva pokrate (tzv. teleskopska suma). Ovo posljednje je pak jednako zbroju radova rezultantnih konzervativnih sila, što po teoremu o radu i energiji mora biti jednako promjeni ukupne kinetičke energije. Sada opet kao i za jednu česticu dobijemo da je zbroj ukupne kinetičke i ukupne potencijalne energije sačuvan.

Poanta je sljedeća. Ukoliko njihalo krene sa svojim gibanjem s neke visine (i ne damo mu dodatni potisak), onda će se na drugoj strani popeti na istu visinu (ili malo manju visinu zbog otpora zraka i sl.) te kada se vrati će opet doći do iste visine. Ovo je demonstracija sačuvanja energije. Njihalo se ne može popeti na veću visinu na drugoj strani. Naime, kada je njihalo u svom najvišem položaju (na visini h_{max}), brzina i kinetička energija su 0 pa je ukupna energija samo jednaka gravitacijskoj potencijalnoj mgh_{max} . Dakle, maksimalna visina h_{max} je određena ukupnom energijom njihala. Ako njihalo dođe do veće visine, to znači da je netko izvana djelovao na njega tako da ga je, recimo, gurnuo, što rezultira većom ukupnom energijom.

Za kraj, moramo napomenuti da u kozmologiji (koja izučava svemir koji se širi) ukupna energija NIJE očuvana. Promotrimo što se događa s energijom svemira koji sadrži samo fotone (čestice svjetla). Energija fotona je veća što je valna duljina manja (tj. frekvencija veća). Kako se svemir širi, tako valna duljina svjetlosti raste, stoga se energija smanjuje. Ključna činjenica je da svemir koji se širi nema vremensku simetriju (nije isti za sva vremena), a sustav koji nema vremensku simetriju nema očuvanu energiju ³.

3 Snaga

Snaga nam govori koliko rada smo obavili u jedinici vremena. Ako stroj u 1s obavi 1J rada, kažemo stroj ima snagu od 1W (1 watt). Ako, primjerice, stroj obavi 10J rada u 2s, onda obavi 5J rada u 1s, stoga mu je snaga 5W (watt nam govori koliko rada u J obavimo u jednoj sekundi). Općenito, ako nam je za obavljanje rada W trebalo t vremena, izraz za snagu P (eng. *power*) je

$$P = \frac{W}{t}.$$

Pritom valja biti pažljiv i ne pomiješati oznaku za rad (W) i mjernu jedinicu za snagu (W, watt).

Ako stroj ima snagu 10W, to znači da svake sekunde obavi 10J rada. Ako je isti stroj uključen 2s, obavio je 20J rada. Ako je uključen 3s, obavio je 30J, itd. Rad koji je stroj obavio dobijemo tako da pomnožimo snagu stroja

³U žargonu opće teorije relativnosti, mogli bismo reći da ne postoji vremenolika Killingovo polje (to je vektorsko polje duž čijih se vektora metrika, tj. pojam udaljenosti ne mijenja).

i vrijeme (koliko je dugo stroj bio uključen), tj. $W = Pt$. Primijetimo da je 1J samo 1Ws (wattsekunda) jer je watt J/s. Dakle, Wh je samo 3600Ws, tj. 3600J. Kada govorimo o potrošnji energije u kućanstvima, obično se koriste kWh (kilowattsati, 3 600 000J). kWh je mjerna jedinica rada i energije, a ne snage (ima watt u nazivu, ali taj watt množi jedinicu vremena).

Nadalje, u svakodnevnom životu se osim watta, koriste i konjske snage (hp, eng. *horsepower*). Izvorno, konjske snage su osmišljene da se snaga parnih strojeva uspoređi sa snagom konja (koji su bili korišteni da pokreću različite strojeve). Izmjereno je da prosječni konj može okrenuti mlin 144 puta u 1h, pri čemu mlin povlači silom od 800N. Ako je mlin radijusa 3.7m (pa mu je opseg 23.25m), imamo sve što je potrebno da izračunamo snagu konja:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot d}{t} = \frac{800\text{N} \cdot 144 \cdot 23.25\text{m}}{1\text{h}} = \frac{800\text{N} \cdot 144 \cdot 23.25\text{m}}{3600\text{s}} = 744\text{W}.$$

Naravno, drugi će konj (ili isti konj kada je umorniji) dati drugi rezultat, no ovo je korisno kao gruba generalna metrika. Konjska snaga je kasnije standardizirana kao $1\text{hp} = 550 \frac{\text{lbf} \cdot \text{ft}}{\text{s}}$ (1lbf=pound force=4.448222N, 1ft=0.3048m), što je otprilike 745.7W.

Usporedimo definiciju snage u fizici, sa svakodnevnim značenjem riječi "snaga". Kada kažemo da je netko "snažan", obično se misli da ta osoba može djelovati velikom silom (npr. može dignuti veliki teret). Pitanje je u teretani obično: "Koliko dižeš na benchu", a ne "Koliko brzo dižeš na benchu".

Doduše, primijetimo da čak i osoba koja ne može djelovati dovoljno velikom silom da digne neki teret, recimo, 1m uvis, može taj isti teret dignuti uz pomoć poluge ili kolotura. Ovisno o tome kolikom silom osoba može djelovati (koliko je "slaba") će joj trebati više kolotura ili duža poluga. Što joj više kolotura, tj. duža poluga treba, to će osoba morati djelovati dužim putem da obavi isti rad (digne isti teret 1m uvis), za što će joj pak trebati više vremena. Naime, osoba može na polugu djelovati manjom silom, ali polugu mora gurati dužim putem, tj. mora povući više užeta kroz koloture. Dakle, vidimo da, kad su strojevi u pitanju, nije bitno "koliko benchaš" jer možeš dignuti proizvoljno teški teret ako koristiš odgovarajuću aparaturu, već "koliko brzo benchaš".

4 Oblici energije

Oblike energije koje u fizici imenujemo (npr. gravitacijska energija, elastična energija, kinetička energija...) uvijek imaju pripadni matematički izraz koji ih opisuje. Neki kompliciraniji fenomeni (npr. djelovanje mišića) nemaju takav izraz, stoga nećemo govoriti o "mišićnoj energiji".

Kada govorimo o izvorima energije, ponekad se spominju energija "mora", "vjetra" ili "sunca" ili pak "geotermalna" energija. U fizici nas zanimaju mehanizmi koji stvaraju vjetar, svjetlost i koji zagrijavaju Zemljinu unutrašnjost. Zato ćemo prvo pobrojati osnovne mehanizme koji upravljaju gotovo svim fenomenima koji nas okružuju, onda pak identificirati kojim od ovih mehanizama različiti fenomeni pripadaju.

U osnovi razlikujemo samo 4 fundamentalne "sile" (međudjelovanja) u prirodi:

1. gravitacijska
2. elektromagnetska
3. jaka nuklearna
4. slaba nuklearna

Dakle, razlikujemo (u osnovi) samo kinetičku energiju (energiju gibanja) i ove 4 različite energije međudjelovanja.

O gravitacijskoj (potencijalnoj) energiji smo već govorili. Ovdje nas najviše zanima elektromagnetska energija jer je upravo ona zadužena za većinu fenomena koji nas okružuju. **Elektromagnetska (EM) energija** se javlja zbog jačine električnog i magnetskog polja. Kada imamo nekakav naboj u prostoru, on generira električno polje. Kada se taj naboj giba, onda osim električnog generira i magnetsko polje. Ta polja sadrže energiju (da bismo do nekakvog pozitivnog naboja približili drugi pozitivni naboj, zbog odbijanja se moramo namučiti, tj. obaviti nekakav rad).

Električna i magnetska polja imaju sljedeće fantastično svojstvo: za stvoriti električno polje nije potreban naboj, električno polje možemo dobiti i iz *promjenjivog* magnetskog polja. Isto tako, promjenjivo električno polje stvara magnetsko polje. Dakle, ako neki naboj zatitra (zatrese se), to će stvoriti promjene u električnom i magnetskom polju oko tog naboja, a kako promjene

u el. polju mogu stvoriti mag. polje i obratno, te promjene se mogu same od sebe širiti prostorom. Ovo je tzv. elektromagnetski val (elektromagnetsko zračenje).

Sva svjetlost koju vidimo je elektromagnetsko zračenje koje prenosi elektromagnetsku energiju. Dakle "svjetlosna energija" nije ništa nego elektromagnetska energija. Štoviše, ljudsko oko je osjetljivo samo na jako mali dio spektra elektromagnetskog zračenja, stoga je i puno drugih fenomena isto EM zračenje. Tu su infracrveni valovi kojima svatko od nas zrači (i kojima užareni objekti zrače), što obično osjećamo samo kao toplinu. Tu su i mikrovalovi koje stvara mikrovalna pećnica, radio valovi koje hvatamo radioprijemnikom. Tu su i x-zrake koje koristimo u medicinskim uređajima (i za koje je Röntgen u dodijeljena Nobelova nagrada), opasne gamma zrake kojima zrače neki radioaktivni elementi i koje se stvaraju u nuklearnim eksplozijama (a ponekad dolaze i iz svemira).

Posljednje dvije nose zajednički naziv "nuklearna" jer se javljaju u procesima unutar jezgre (nukleusa) atoma. Ipak, zadužene su za različite stvari: slaba nuklearna je zadužena primjerice za beta raspad, a jaka nuklearna sila je ono što drži jezgru na okupu. Raspadi jezgara teških atoma (koji sadrže puno protona) su ono što zagrijava unutrašnjost Zemlje (geotermalna energija⁴) procesom koji zovemo **fisija**. Fisija je ujedno i način na koji nuklearne elektrane zagrijavaju vodu te stvaraju paru (koja onda pokreće nekakve turbine). S druge strane spajanjem jezgara lakih atoma se isto može osloboditi energija procesom **fuzije**, koja zagrijava unutrašnjost Sunca i stvara svjetlost. Fuzijom vodikovih jezgara možemo osloboditi puno više energije nego se stvara u tradicionalnim fisijskim nuklearnim reaktorima, ali za to moramo uložiti veliku početnu energiju. Nažalost, još uvijek nemamo fuzijski reaktor koji bi održao fuzijsku reakciju na životu toliko dugo da dobijemo više energije iz reakcije nego smo uložili za pokretanje reakcije

Osim ovih osnovnih energija, često govorimo još i o kemijskoj energiji te termalnoj energiji. **Termalna energija** je energija koju tvari imaju jer se čestice koje ih tvore gibaju nasumično, a osjećamo je kao toplinu. Ona dakle dolazi od kinetičkih energija čestica i potencijalnih energija njihovog međudjelovanja (koje u konačnici dolaze od elektromagnetske energije). **Kemijska energija** je pak energija koja proizlazi iz *kemijskih veza* koje drže atome na okupu i oslobađa se kada se stvaraju ili kidaju kemijske veze u

⁴Ovo je veći dio energije - manji dio planet ima od samog postanka (kada je bio užarena kugla). Mogli bismo reći da fisija ne dozvoljava Zemlji da se brže ohladi

kemijskim reakcijama. Nju isto možemo identificirati kao kinetičku i elektromagnetsku energiju. Specifično, ona dolazi uglavnom od kinetičke energije elektrona, kinetičke energije jezgara (koja je znatno manja - jezgre se malo gibaju u odnosu na elektrone), elektrostatskog privlačenja elektrona (-) i jezgara atoma (+) te elektrostatskog odbijanja među elektronima i elektrostatskog odbijanja među jezgrama⁵. Postoje još i magnetski efekti (spin-orbit coupling, spin-spin coupling), no oni su znatno slabiji⁶. Iako je bedasto govoriti o "mišićnoj energiji", možemo govoriti o "kemijskoj energiji mišića" (koju dobijemo cijepanjem fosfatne skupine na ATP molekuli).

Sve druge oblike energije možemo identificirati kao jedan od ovih. Primjerice, baterija kemijskim procesima održava stalnu voltažu na njenim krajevima. Drugim riječima, pretvara kemijsku energiju u električnu. Ta električna energija se može iskoristiti za pokretanje nekih naboja, odnosno za stvaranje struje (što se očituje kao kinetička energija). Ta struja može svojim gibanjem (kroz sudare) povećati termalnu energiju vodiča (zagrijati ga), a ona pak (kroz gibanje atoma i njihovih elektrona) može stvoriti elektromagnetske valove (svjetlost) - što vidimo kao užarenu nit neke žarulje.

Također, čak i elastična energija (koju smo spomenuli za opruge) se javlja zbog promjena udaljenosti među atomima koji grade tvar. Dakle, ono opet ima veze s elektromagnetizmom, tj. s kemijskom energijom među atomima.

Kod mehaničkih valova (zvuk, potresi, valovi na vodi itd.) općenito imamo kinetičku energiju (zbog gibanja) i potencijalnu energiju. Ta potencijalna energija se javlja obično zbog promjene udaljenosti među česticama (u osnovi onda možemo govoriti o elastičnoj potencijalnoj energiji), no kod površinskih valova na vodi komadići vode imaju uglavnom gravitacijsku potencijalnu energiju (a međudjelovanje komadića vode se očituje npr. kao površinska napetost). Puhanje vjetra je samo kinetička energija koju imaju komadići zraka, a vjetar puše jer postoji razlika u tlaku koja stvara rezultantnu silu na komadiće zraka. Energija koju tlak ima pak potječe od termalnog gibanja (čestice plina se nasumično gibaju i sudaraju s predmetima koji su uronjeni u plin). Mogli bismo nastaviti ali valjda je osnovna poanta jasna.

⁵Vidi https://en.wikipedia.org/wiki/Molecular_Hamiltonian

⁶Magnetski efekti zapravo dolaze iz Diracove jednačbe, što je relativistički popravak Schrodingerove jednačbe. Za dodatne članove energije koje daje Diracova jednačba vidi https://en.wikipedia.org/wiki/Fine_structure

5 Pitanja i zadatci

1. Koja je standardna mjerna jedinica za rad (i energiju)?
2. Dvije osobe guraju svaka svoj teret istim putem, no jedna osoba gura dvostruko jače (dvostruko jačom silom). Tko je izvršio veći rad i koliko puta je taj rad veći od rada druge osobe? Što zaključuješ, kako obavljeni rad ovisi o sili?
3. Dvije osobe guraju teret istom silom, no jedna osoba svoj teret gura dvostruko dužim putem. Tko je izvršio veći rad i koliko puta je taj rad veći od rada druge osobe? Što zaključuješ, kako obavljeni rad ovisi o putu?
4. Ako sila djeluje u suprotnom smjeru od pomaka, je li rad pozitivan ili negativan.
5. Ako sila djeluje okomito na pomak, koliki je rad?
6. Gurate teret silom od 100N po horizontalnoj podlozi duž puta od 10m. Koliki ste rad obavili?
7. Zaustavljate teret koji klizi prema vama. Pritom cijelo vrijeme gurate teret silom od 50N te se on zaustavio nakon 5m. Koliki ste rad obavili?
8. Tijelo se pomiče lijevo-desno (horizontalno). Koliki rad pritom obavlja gravitacija?
9. (Prisjeti se sile trenja) Gurate teret mase 100kg jednoliko po horizontalnoj podlozi duž puta od 15m. Ako je faktor trenja između tereta i podloge 0.8, koliki ste rad obavili?
10. Gurate teret prvo silom od 75N duž puta od 10m, potom gurate silom od 50N duž puta od 20m. Koliki ste rad obavili?
11. Zima je. Gurate sanjke na kojima je teret mase 50kg jednoliko po travnatoj podlozi 5m, potom jednoliko po ledu 50m. Ako je faktor trenja između sanjki i trave 0.65, a između sanjki i leda 0.05, izračunaj obavljeni rad.

12. Bodybuilder diže 100kg na benchu. Ako su mu ruke duge 1m, koliki rad obavi kada digne tih 100kg? Koliki rad obavi sila teža (bitan je predznak)?
13. Isti bodybuilder spušta tih 100kg. Koliki rad sada obavi bodybuilder a koliki gravitacija (bitan je predznak)?
14. Bodybuilder je napravio seriju od 10 ponavljanja gdje je digao 100kg 1m. Koliki je ukupni mehanički rad obavio? (pazi na predznak; uvjeri se da je odgovor 0!)
15. Ako je ukupni mehanički rad 0J, znači li to da bodybuilder nije potrošio energiju na benchu?
16. Ako zanemarite metaboličke procese (loša pretpostavka!), koliko bi puta bodybuilder morao benchati 100kg (dizanje) da potroši 420kcal (otprilike količina kalorija u 1L coca-cole)? Prisjeti se da $1\text{cal}=4.184\text{J}$, tj. da $1\text{kcal}=4184\text{J}$.
17. Čemu je jednak rad sile teže (promjeni koje energije)?
18. Čemu je jednak rad resultantne sile na neko tijelo (promjeni koje energije)?
19. Tko ima veću kinetičku energiju - vlak koji se giba 20km/h ili kamion koji se giba istom brzinom?
20. Tko ima veću gravitacijsku potencijalnu energiju kada se popne na visinu od 100m? Slim Shady mase 40kg ili Noam Chunky mase 170kg?
21. Tko ima veću gravitacijsku potencijalnu energiju - Slim Shady kada se popeo na 400m ili Noam Chunky kada se popeo na visinu od 50m? Tko je opasniji (za ljude ispod) kada se posklizne?
22. Držite olovku u ruci, potom je podižete jednolikom brzinom do određene visine te zaustavljate. Kakva je resultantna sila na svakom dijelu tog procesa, a kakav je njen rad. Objasni zašto je kinetička energija 0 i na početku i na kraju ako ste očledno obavili neki rad na tijelu.
23. Basejumper stoji na zgradi, potom skače u ponor. U kojem obliku mu se nalazi (mehanička) energija prije nego skoči, a u kojem prije

nego dotakne tlo. Opiši što se s energijom događa dok pada (pritom zanemari otpor zraka).

24. Opiši što se događa s energijom njihala dok se njiše (pretvorba energije). Ako njihalo na početku ispustimo bez dodatnog potiska, na koliku visinu će se njihalo popeti na suprotnoj strani (što ako zanemariš, a što ako NE zanemariš otpor zraka)?
25. Kugla mase 6kg pada sa 6. kata zgrade. Ako se 6. kat nalazi na visini od 26m od tla, izračunaj gravitacijsku potencijalnu energiju kugle prije nego počne padati. Koliku kinetičku energiju kugla ima tik prije nego udre o tlo (zanemari otpor zraka)? Kolika je kinetička energija kugle na pola puta (na 3. katu), a kolika potencijalna?
26. Koja je standardna mjerna jedinica za snagu?
27. Dva stroja su upaljena jednako dugo. Ako jedan stroj za to vrijeme obavi dvostruko veći rad od drugog stroja, koji stroj ima veću snagu? Što zaključuješ. kako snaga ovisi o obavljenom radu?
28. Dva stroja obave isti rad, ali je jedan upaljen dvostruko duže. Koji stroj ima veću snagu? Što zaključuješ, kako snaga ovisi o vremenu koje je potrebno da se rad obavi?
29. Koliko rada će obaviti stroj snage 200W ako je uključen 2h (rezultat iskaži u J)?
30. Kolika je snaga stroja koji obavi 200J rada u 1min (rezultat iskaži u W)?
31. Ako stroj može podignuti teret mase 1kg na visinu od 2m u 2s, kolika je snaga tog stroja?
32. Koliku masu može podignuti stroj snage 100W na visinu od 1m u roku od 5s?
33. Konj vuče teret mase 100kg jednoliko po podlozi 10m. Ako znate da je to napravio u 10s i ako znate da je faktor trenja između tereta i podloge 0.6, kolikom je snagom konj izvršio rad?
34. Koliku masu može podignuti konj (uz pomoć užeta) na visinu od 1m u roku od 5s (uzmite da je snaga konja 1hp, što je približno 750W).

35. Motor s unutarnjim izgaranjem funkcionira tako da sagorijeva gorivo (naftne derivate) i tako pokreće klipove, koji pak pokreću osovinu (i konačno kola na automobilu). Kada je motor uključen, očigledno se obavlja nekakav rad (troši nakakva energija). Ta energija očigledno dolazi od goriva (bez njega motor ne radi). Odakle pak gorivu energija? Kako tu energiju zovemo?
36. Objasni sve članove molekularnog hamiltonijana (uračunavajući i finu strukturu, tj. sve članove dobivene iz Diracove jednadžbe pri aproksimaciji 2. reda)... Ok I merely jest, možeš zanemariti finu strukturu, ali objasni ugrubo odakle molekulama energija (koristeći elektromagnetizam).
37. Spojili ste bateriju na žarulju sa žarnom niti. Koje će se sve energetske izmjene dogoditi, krenuvši s kemijskim reakcijama u bateriji, završavajući sa zagrijavanjem niti žarulje i oslobađanjem svjetla. (dio svjetlosne energije odlazi naunutar žarulje je vakuum btw - inače bi nit pregorila u prisutnosti kisika).
38. Opiši (u grubim crtama) energetske izmjene koje su potrebne da bi se, počevši s fuzijom dva protona u jezgri Sunca (dakle nuklearnim procesom), stvorila glukoza u nekoj biljci na dalekoj Zemlji (dakle kemijski spoj).