7. razred - Sile

Duje Jerić- Miloš

6. listopada 2024.

1 Ishodi i gradivo

Izvor: `https://mzom.gov.hr/UserDocsImages/dokumenti/Obrazovanje/NacionalniKurikulum/PredmetniKurikulumi/Fizika,%20prosinac%202017..pdf`

B. 7. 2: Analizira međudjelovanje tijela te primjenjuje koncept sile.

- DOVOLJAN: Razlikuje pojmove unutarnja energija, toplina i temperatura. Opisuje zračenje, vođenje i strujanje topline. Opisuje primjenu toplinskih vodiča i izolatora pri štednji energije.
- DOBAR: Određuje rezultantnu silu na pravcu (grafički i računski). Povezuje produljenje opruge s težinom ovješenog utega. Opisuje elastičnu silu i svojstvo elastičnosti na primjerima. Uspoređuje iznose sila u svakodnevnom životu.
- VRLO DOBAR: Analizira ovisnost produljenja opruge i težine ovješenog utega. Grafički određuje rezultantnu silu u ravnini. Opisuje uzgon na primjerima. Prepoznaje silu i protusilu na primjerima.
- ODLICAN: Opisuje gravitacijsku silu. Objašnjava bestežinsko stanje. Objašnjava silu težu. Navodi i objašnjava gdje se primjenjuje mjerenje sile.

B. 7. 3: Interpretira silu trenja i njezine učinke.

- DOVOLJAN: Prepoznaje silu trenja na primjerima iz života. Navodi veličine o kojima sila trenja ovisi. Uspoređuje trenje kotrljanja i trenje klizanja na primjerima. Prepoznaje korisne i nepoželjne učinke sile trenja.

- DOBAR: Opisuje ovisnost sile trenja o vrsti dodirnih ploha i pritisnoj sili. Objašnjava načine na koje se trenje može povećati i smanjiti te navodi primjene.

- VRLO DOBAR: Povezuje faktor trenja s vrstom podloge. Razlikuje pritisnu silu od težine tijela na primjerima. Opisuje kako bi izgledao život bez trenja.

- ODLICAN: Tumači primjere izrazito velikih i izrazito malih faktora trenja. Objašnjava zašto sila trenja, ovisi o sili okomitoj na površinu.

B. 7. 4: Analizira uvjete ravnoteže tijela i zakonitost poluge.

- DOVOLJAN: Prepoznaje ravnotežni položaj, težište i oslonac (ovjesište) tijela. Opisuje dvokraku polugu i njezinu primjenu. Opisuje težište pravilnog tijela.

- DOBAR: Tumači zakonitost ravnoteže poluge. Objašnjava primjene poluge. Opisuje težište ploče nepravilnog oblika. Razlikuje stabilno od nestabilnog tijela.

- VRLO DOBAR: Opisuje uvjete stabilnosti tijela i primjene. Prepoznaje primjere poluge kod živih bića. Povezuje položaj težišta i oslonca (ovjesišta) za različite vrste ravnoteže.

- ODLICAN: Razmatra odnos težine i sile podloge (ovjesa) u ravnoteži. Povezuje težište s gravitacijskim međudjelovanjem.

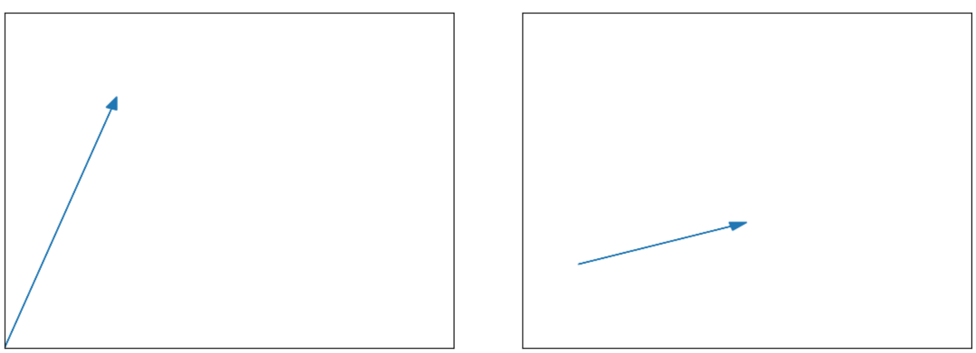
B. 7.5: Analizira utjecaj tlaka.

- DOVOLJAN: Opisuje na primjerima pojam tlaka i njegovu vezu sa silom i površinom. Kvalitativno opisuje tlak u tekućini. Prepoznaje uređaje za mjerenje tlaka. Prepoznaje pribor i alate kod kojih se primjenjuje veliki tlak (igla, nož...).

- DOBAR: Prepoznaje primjere tlakova iz svakodnevice (krvni tlak, atmosferski tlak,tlak u gumama,tlak u fluidima...).
- VRLO DOBAR: Kvalitativno tumači podrijetlo hidrostatskog i atmosferskog tlaka. Objašnjava zašto ne osjećamo djelovanje atmosferskog tlaka. Opisuje učinke tlačnih sila u fluidima.
- ODLICAN: Analizira utjecaj tlaka na primjerima. (fakiri, ronioci, podmornice, brane, putnici u zrakoplovima i astronauti).

2 Uvodno o silama

Kada neko tijelo guramo ili povlačimo, onda na to tijelo djelujemo **silom**. Da bismo u potpunosti odredili silu, bitno je navesti u kojem smjeru guramo tijelo i koliko jako. Zato kažemo da je sila *vektorska veličina* (ima iznos i smjer). Vektorske veličine obično prikazujemo strelicom koja pokazuje u istom smjeru kao veličina i čija duljina odgovara iznosu veličine. Vektori mogu imati i drukčija *hvatišta* (početak strelice).



Što se događa kada na tijelo ne djelujemo nikakvom silom? Na prvu ruku bi se činilo da sva tijela teže mirovanju - gurnemo li neki predmet po podu, on će se u konačnici zaustaviti (tako je mislio Aristotel u svojoj Phusike akroasis). Kasnije, se pokazalo da to nije točno, već je ovakvo ponašanje posljedica sile trenja (koju ćemo upoznati kasnije).

Činjenica je da, ukoliko na tijelo ne djelujemo silom, tijelo koje miruje će nastaviti mirovati, a tijelo koje se giba određenom brzinom (u određenom smjeru) će se nastaviti gibati tom istom brzinom (i neće mijenjati smjer gibanja). Jako rijetko možemo svjedočiti ovakvom ponašanju (to je i razlog zašto je Aristotel mislio drukčije).

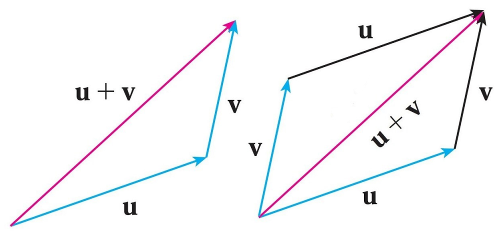
Ipak, od 20.st čovjek je u mogućnosti da ode u svemir i tamo može obaviti eksperimente koji potvrđuju da, ukoliko nema dodatnih sila koje djeluju na tijelo, ono će se nastaviti gibati po pravcu cijelo vrijeme istom brzinom - ovo se obično zove Newtonov 1. zakon[1]: vidi `https://www.youtube.com/watch?v=-luKN6mad5w`

Dakle, silu bismo mogli definirati kao utjecaj na tijelo koji mijenja brzinu tog tijela (bilo iznos te brzine ili njen smjer, tj. smjer gibanja). Drugim riječima, kao utjecaj koji *ubrzava* (ili usporava) tijelo. Silu mjerimo u **newtonima** (N) te obično označavamo slovom F (prvo slovo engleske riječi za silu - *Force*). Iz 2. Newtonovog zakona (vidi dodatak) slijedi da $N = \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$

3 Vektorske veličine

Primijetimo da na tijelo može istovremeno djelovati više sila. Ako tijelo na jednu stranu vuče sila, a na suprotnu ga stranu vuče sila iste jačine kažemo da je ukupna sila 0. Za ukupnu silu još ponekad koristimo izraz *rezultantna sila*. Ukupna sila je ono što u konačnici ubrzava tijelo (pa ako je ukupna sila 0 to tijelo neće ubrzavati, tj. opet imamo isti slučaj kao da na to tijelo uopće ni ne djeluje sila). Ukupna sila se dobije tako da sve sile na tijelo zbrojimo vektorski metodom trokuta ili paralelograma (te dvije "metode" su samo dva različita načina kako slikovito vizualizirati operaciju vektorskog zbrajanja):

[1]Eksperiment bi se, striktno govoreći, trebao provesti daleko od bilo kojeg planeta/zvijezde, jer i planeti/zvijezde djeluju gravitacijskom silom na sva tijela. Ovo se očituje tako što, ako gurnemo lopticu dok smo u orbiti oko Zemlje, ta bi se loptica u početku naizgled udaljavala od nas po pravcu, ali kasnije (kada je loptica više udaljena) bismo shvatitli da smo i mi i loptica u orbiti te se gibamo po elipsama oko Zemlje. Dakle, ta loptica će se, ako dovoljno dugo čekamo, vratiti do nas. Znači eksperiment na ISS-u je valjan samo kada nam je loptica relativno blizu (npr. i mi i loptica smo unutar istog modula svemirske stanice).

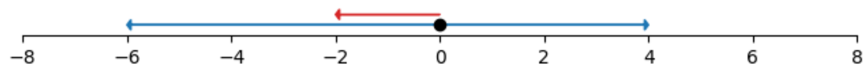


Slika 2: Vektorsko zbrajanje: početak jedne strelice (hvatište) stavimo na kraj druge; zbroj je strelica koja veže početak prve i kraj druge.

Jasno je da ako su dvije sile u približno istim smjerovima, njihov zbroj će isto biti u približno istom smjeru, a iznos će biti veći (npr. dvije osobe vuku teret zajedno). S druge strane, ukoliko jedna sila djeluje u suprotnom smjeru od druge:

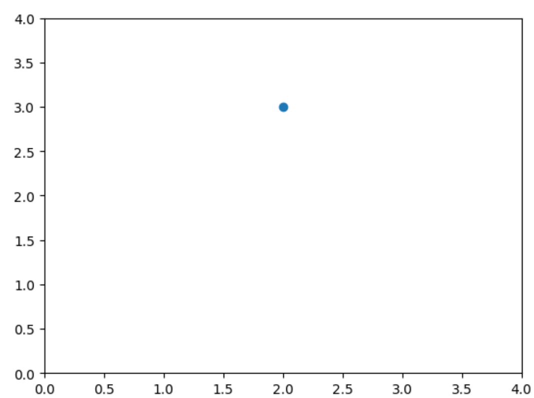
zbroj sila će pokazivati u smjeru jače. Primjerice, ako dijete i odrasla osoba guraju teret s različitih strana, naravno da će se teret pokrenuti u smjeru u kojem ga gura odrasla, snažnija, osoba. Iznos snažnije sile je u ovom slučaju umanjen za iznos slabije (odrasla osoba gura teret, ali mu dijete svejedno otežava posao pa se teret neće ubrzati toliko snažno kao da djeteta nema).

Konkretno, vektorsko zbrajanje po pravcu je isto kao zbrajanje brojeva. Naime, svaki pravac možemo označiti brojevima (i dobiti tzv. *brojevni pravac*) - svakoj točki na pravcu pridružimo jedinstveni (pozitivni ili negativni) broj koji je određuje. Sada uzmemo da svi vektori počinju iz ishodišta (0) te pokazuju do različitih brojeva:

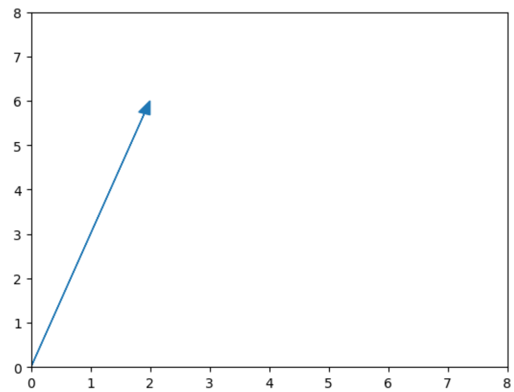


Dakle, vektor koji pokazuje od 0 do -6 možemo jednostavno poistovjetiti s brojem -6. S druge strane, vektor od 0 do 4 možemo poistovjetiti s 4. Zbroj ta dva vektora je onda jednostavno $-6 + 4 = -2$ (što možemo poistovjetiti s vektorom od 0 do -2).

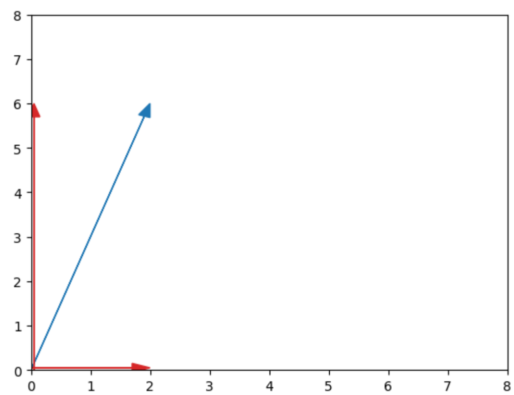
Na ravnini zbrajanje vektora isto možemo svesti na zbrajanje brojeva i to na sljedeći način. U ravnini možemo nacrtati horizontalni brojevni pravac (tzv. x os) i vertikalni brojevni pravac (tzv. y os). Točki koja je iznad broja 2 na x osi i sa strane broja 3 na y osi pridružimo par brojeva $(2, 3)$. Na ovaj način svakoj točki na ravnini je pridružen jedinstven par brojeva (x, y), gdje x govori kako je točka smještena lijevo-desno, a y govori kako je smještena gore-dolje:



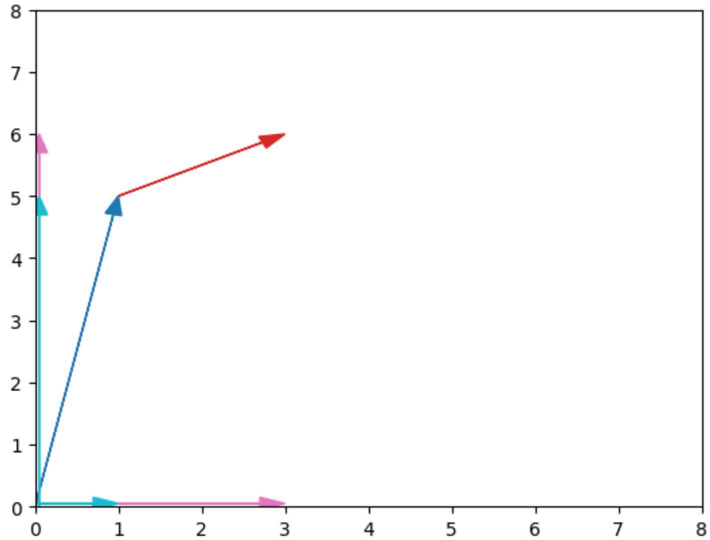
Vektore sada možemo poistovjetiti sa strelicama koje počinju u ishodištu $(0, 0)$. Primjerice, sljedeći vektor je određen točkom $(2, 6)$:



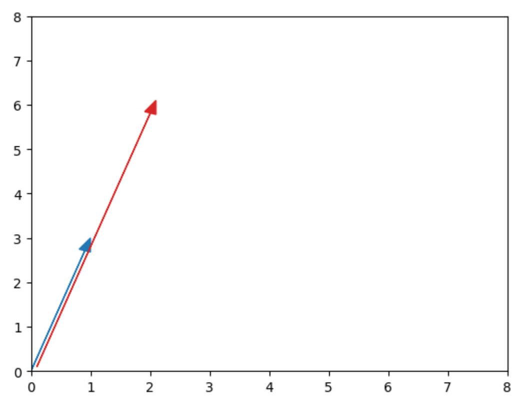
Primijetimo da vektor $(2, 6)$ možemo dobiti zbrajanjem vektora $(2, 0)$ i $(0, 6)$ (ta dva vektora još zovemo x i y komponentom vektora $(2, 6)$). Dakle, možemo *dekompozirati* vektor na njegov horizontalni (x) i vertikalni (y) dio:



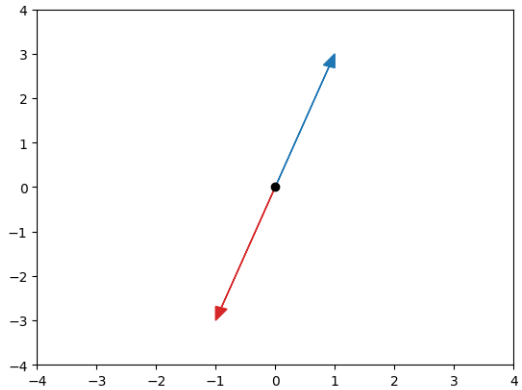
Ako sada želimo zbrojiti neka dva vektora, možemo ih rastaviti na x i y komponentu te im samo zbrojiti komponente. Iz ovoga slijedi npr. da $(1, 5) + (2, 1) = (1 + 2, 5 + 1)$. Općenito, $(x, y) + (a, b) = (x + a, y + b)$.



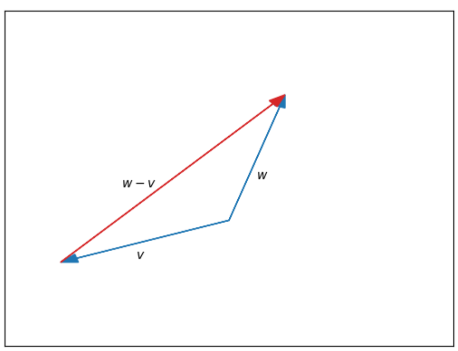
Za kraj bi još valjalo napomenuti da se vektori mogu i *skalirati*. Ova operacija samo produlji strelicu duž pravca na kojem ona leži. Tako recimo $2 \cdot (3, 1) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 1) = (6, 2)$:

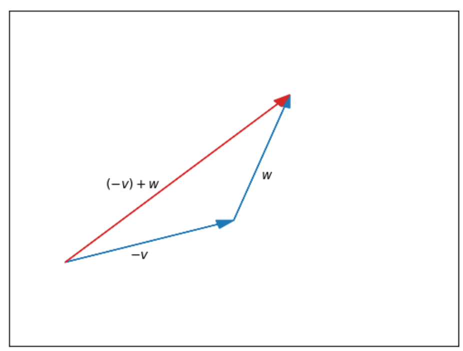


Općenito $c \cdot (x, y) = (c \cdot x, c \cdot y)$. Jedino u slučaju da je broj negativan, strelica će pokazivati u suprotnom smjeru. Primjerice $-1 \cdot (1, 3) = (-1, -3)$:



Pišemo još $-v = -1 \cdot v$ za vektor koji je iste duljine, ali suprotnog smjera od v. Oduzimanje vektora vršimo na sljedeći način: $w - v = w + (-v)$ (zbrojimo vektor suprotnog smjera):





4 Formule

Gradivo 7. razreda koje se tiče sila može se obuhvatiti s 5 formula. To su redom:

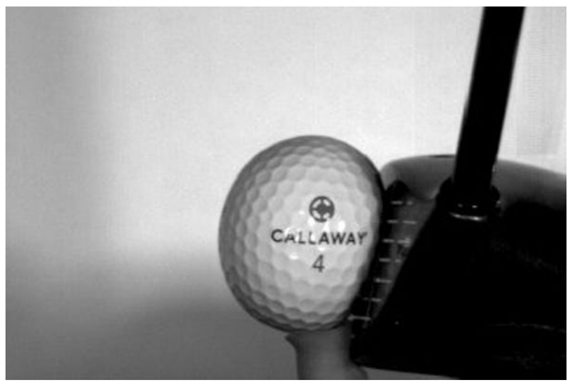
1. Izraz za elastičnu silu (Hookeov zakon): $F_{el} = k\Delta l$
2. Izraz za silu težu/težinu: $F_g = mg$
3. Izraz za silu trenja na vodoravnoj podlozi: $F_{tr} = \mu F_g$
4. Izraz za moment sile: $M = Fk$

5. Izraz za tlak: $P = \frac{F}{A}$

U nastavku ćemo objasniti svaku od ovih formula, potom će slijediti niz teorijskih pitanja na kojima možete provjeriti svoje znanje.

5 Elastična sila - Hookeov zakon

Kada na tijela djelujemo silom, ona se mogu deformirati:



Slika 4: Deformacija golf loptice pri udaru palicom

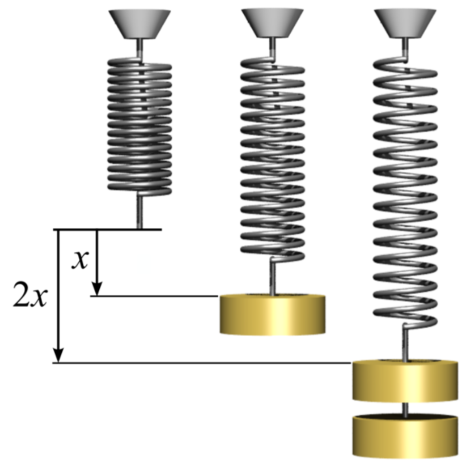
Ako se tijelo vrati u početni oblik, kažemo da je deformacija **elastična**. U suprotnom, ako tijelo ostaje deformirano, kažemo da je deformacija **plastična**. Konkretno:

- Kada oprugu lagano rastegnemo ona se vraća u početni oblik. Ovo je *elastično* ponašanje.
- Ako oprugu previše rastegnemo ona se ne vraća u početni oblik nego ostaje deformirana. Ovo je *plastično* ponašanje[2].

Hookeov zakon nam daje izraz za elastičnu silu koja vraća oprugu u početni oblik. Ovo vrijedi samo za oprugu koju nismo previše rastegnuli (tj. vrijedi samo za opruge koje rastežemo u njihovom elastičnom režimu).

[2]Gotovo svaki materijal ima svoj plastični i elastični režim, tj. ako materijal jako lagano rastegnemo vraća se u početni oblik, a ako ga jako rastegnemo trajno gubi oblik. Neki materijali su *elastičniji* od drugih (npr. neke tipove guma možemo jako puno rastegnuti prije nego guma trajno izgubi svoj oblik). Slično tome, neki materijali su *plastičniji* od drugih (npr. plastelin i kod najmanjeg preoblikovanja čuva svoj oblik).

Zakon kaže da će sila biti veća što je opruga više rastegnuta. Konkretno, ako smo oprugu dvostruko više rastegnuli i sila će biti dvostruko veća (dakle veza između rastegnutosti i sile je linearna).



Matematički, ako smo oprugu rastegnuli za duljinu x (često ovu duljinu označavamo i s Δl - "**D**ifference in **L**ength"), onda je sila dana izrazom:

$$\boxed{F_{el} = kx} \tag{1}$$

Pritom treba voditi računa da sila djeluje u suprotnom smjeru od promjene duljine opruge:

- Ako oprugu rastežemo sila će djelovati tako da oprugu sabije.
- Ako oprugu sabijamo sila će djelovati tako da oprugu rastegne

k je tzv. **konstanta opruge**, a mjeri se u N/m jer imamo $k = \frac{F_{el}}{x}$ pa dijelimo newtone i metre. Svaka opruga može imati drukčiju vrijednost konstante. Ako je $k = 100\text{N/m}$, to znači da treba djelovati silom od 100N da bi se opruga rastegnula za 1m. Ako je konstanta opruge pak iskazana u cm, npr. 20N/cm, to znači da treba djelovati silom od 20N da bi se opruga rastegnula za 1cm.

Što je k veći broj to je opruga "kruća", tj. teže se rasteže (treba djelovati većom silom da bi se opruga rastegnula 1m). Obratno što je k manji broj to je opruga labavija i lakše se rasteže (primjerice, igračka "slinky" ima jako mali k).

Dinamometar je instrument za mjerenje sile. To je najčešće obična opruga čije produljenje (pomoću Hookeovog zakona) možemo preračunati u silu. Za ovo je potrebno poznavati konstantu opruge, a sila se onda izračuna pomoću izraza za elastičnu silu ($F_{el} = kx$).

6 Težina i masa tijela

Masa (ili tromost) je svojstvo tijela da se odupire ubrzanju (akceleraciji) kada na njega djeluje sila.

Primjera radi, zamislimo miša i slona na ledu (tako da zanemarimo efekte sile trenja o kojoj ćemo kasnije nešto reći). Puno ćemo lakše ubrzati miša do neke brzine, dok je za pokrenuti slona potrebna ozbiljna mašinerija. Možemo zamisliti i ping-pong lopticu te tešku kuglu za kuglanje na biljarskom stolu. Opet je lakše biljarskim štapom ubrzati ping-pong lopticu nego kuglu za kuglanje. Masu mjerimo u kilogramima (kg). Dakle, miš i ping-pong loptica imaju manju masu pa se manje odupiru ubrzavanju, a slon i kugla za kuglanje imaju veću masu pa se više odupiru ubrzavanju. **Masa je karakteristična za dano tijelo i ne ovisi o tome gdje se tijelo nalazi** (npr. Mjesecu ili Zemlji) - uvijek je ista. Zaista, ponesemo li biljarski stol na Mjesec, vidjet ćemo da je jednako teško ubrzati kuglu za kuglanje kao na Zemlji.

Zamislimo sada knjigu na stolu. Ta knjiga stol pritišće određenom silom jer se nalazimo na Zemlji koja sve gravitacijom privlači sve predmete prema svome središtu. Štoviše, sila kojom Zemlja vuče knjigu prema svom središtu jednaka je po iznosu (a i po smjeru) sili kojom knjiga djeluje na podlogu. Naime, zamislimo da predmeti padaju na pod jer ih demoni nekim nevidljivim konopcem vuku prema središtu Zemlje[3]. Sada je valjda jasno da, kada knjiga "zapne" o stol, na stol djeluje točno onom silom kojom je demon povlači.

Silu kojom predmeti pritišću podloge na kojoj se nalaze zovemo težina. Iz prethodnog vidimo da je težina također jednaka sili kojom Zemlja vuče sve predmete prema svom središtu. Dakle, težinu mjerimo u Newtonima (a ne u kg).

Poznajemo li masu tijela, težinu možemo izračunati formulom:

[3] Naravno da u stvarnosti nema nikakvih demona ni konopca, ali opis koji fizika daje je gotovo jednako mističan: imamo "djelovanje na daljinu" (action at a distance) koje je kao da netko na daljinu povlači to tijelo konopcem. Newtonov opis gravitacije preko djelovanja na daljinu je u njegovo vrijeme bio dosta kontroverzan, ali daje predviđanja koja se dobro slažu s eksperimentom i to je, u konačnici, jedino mjerilo točnosti fizikalne teorije.

$$\boxed{F_g = mg} \tag{2}$$

Ovdje je g **gravitacijska akceleracija** (gravitacijsko ubrzanje). Primijetimo da je $g = \frac{F_g}{m}$ pa se mjeri u N/kg. Na površini Zemlje je g približno 10N/kg. Dakle, tijelo mase 10kg će na Zemlji pritiskati podlogu silom od 100N. Obratno, tijelo koje na Zemlji pritišće podlogu silom od 200N ima masu 20kg.

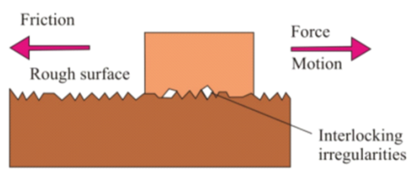
Na Mjesecu je otprilike $g = 1.5$N/kg, što znači da će na Mjesecu tijelo od 20kg podlogu pritiskati silom od $20\text{kg} \cdot 1.5\text{N/kg} = 30\text{N}$ (a ne 200N kao na Zemlji). Što je g veći, to planet privlači tijela prema svom središtu jače, odnosno to je težina tijela na tom planetu veća.

Napomenimo da vaga mjeri težinu (a ne masu) unatoč tome što nam vraća/ispisuje kilograme. Naravno, vagom možemo *pronaći* masu tijela tako da težinu podijelimo s g, ali vaga direktno masu ne mjeri.

Slika 5: Vaga mjeri težinu

Primjerice, Mjesec slabije privlači tijela prema svome središtu. Ako ponesemo vagu na Mjesec, ona će pokazivati da imamo manje "kilograma", što ne znači da imamo manju masu (masa je svugdje ista!) nego da vagu pritišćemo manjom silom. Također, možete i rukom pritiskati vagu, a ona će vraćati kilograme. U tom slučaju ne dobijete masu ama baš ničega nego samo dobijete pritisnu silu iskazanu u kilogramima (silu u newtonima podijeljenu s 10).

7 Sila trenja



Kada povlačimo predmete po podlozi, svi smo osjetili određenu silu koja se odupire povlačenju. To je **trenje**. Znamo da, što je težina tijela veća, to ga je teže pomaknuti. Nadalje, znamo da je predmet generalno lakše micati po glatkoj nego hrapavoj podlozi. **Smjer sile trenja se uvijek odupire gibanju**. tj. ako se tijelo giba udesno sila trenja će biti ulijevo te će ga ona nastojati zaustaviti.

Trenje se javlja zbog mikroskopskih nepravilnosti koje su prisutne na samoj površini predmeta i podloge po kojoj povlačimo predmet. Te nepravilnosti zapinju jedna o drugu i na taj način otežavaju pomicanje. Što ima više nepravilnosti (na predmetu i podlozi) to je predmet teže pomaknuti, a što je predmet teži, to zbog težine tijela nepravilnosti više zaglave jedna u drugu pa je opet tijelo teže pomaknuti.

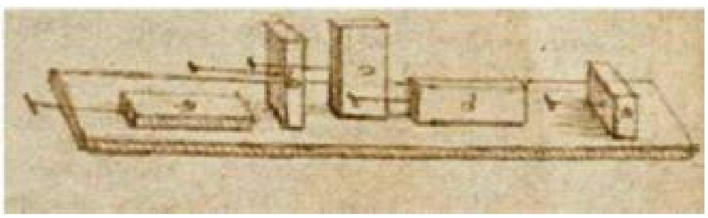
Mikroskopska slika je dosta komplicirana pa je ni ne pokušavamo u cijelosti obuhvatiti. Stoga, nepravilnosti na površini predmeta i podloge opisujemo jednim brojem, tzv. **faktorom trenja**. Ako povlačimo predmet težine $F_g = mg$ po horizontalnoj podlozi, trenje je dano izrazom:

$$\boxed{F_{tr} = \mu F_g,} \tag{3}$$

gdje je μ faktor trenja i ovisi točno o kojem predmetu i kojoj podlozi se radi. μ se **uvijek mjeri za parove materijala**, npr. "drvo-drvo" ili "drvo-pločice"). μ nam govori koliko predmet i podloga zapinju jedno o drugo. Primijetimo da je μ običan broj (nema mjernu jedinicu) jer ga možemo dobiti kao količnik sile trenja i težine (a obje sile mjerimo u newtonima): $\mu = \frac{F_{tr}}{F_g}$. Što je μ veći, to predmet i podloga više zapinju jedno o drugo (imaju više nepravilnosti na površini) pa je sila trenja veća. Također, kao što smo već napomenuli, što je i težina predmeta veća, to je trenje isto veće.

Konačno, primijetimo da je obično $\mu < 1$. Naime, ako je $\mu = 1$, onda imamo $F_{tr} = F_g$, što znači da je jednako teško podignuti teret u zrak (F_g je sila kojom moramo podignuti teret) i gurati teret po podlozi (F_{tr} je sila kojom moramo gurati teret po podlozi). Životno iskustvo nas uči da je obično lakše gurati nego dignuti teret, stoga za većinu materijala očekujemo $\mu < 1$ (tako da $F_{tr} < F_g$). Napomenimo da nam, recimo, $\mu = 0.6$ samo govori da je za guranje tereta po podlozi dovoljno djelovati silom koja je 60% težine (sile kojom moramo djelovati da bismo podignuli teret).

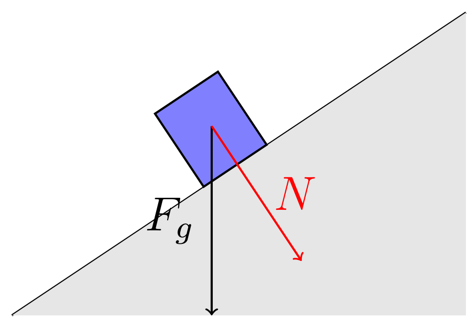
Interesantno je da trenje ne ovisi o površini samog predmeta (očekivali bismo možda da više dodirne površine dovodi do većeg trenja). Ovo je zapazio već i Leonardo da Vinci:



Razlog je sljedeći. Jednostavno sročeno, kada je predmet okrenut tako da leži većom površinom na podlozi, onda ujedno djeluje i manjom silom po jedinici površine (tlak). Naime, kada je predmet bočno položen, onda se iznad svake točke na podlozi nalazi manja količina materijala od koje je predmet građen (pa samim time i manje težine), stoga je pritisna sila nad svakom točkom manja te svaka točka manje zapinje. Ovo znači da je nad JEDNOM (proizvoljnom) točkom sila trenja MANJA. S druge strane, činjenica da imamo više dodirnih točaka koje zapinju nadomjesti razliku.

Faktor trenja između neke dvije površine se može smanjiti korištenjem lubrikanata. Primjerice, ako između tijela i podloge stavimo malo ulja, tijelo će puno lakše kliziti (odmakli smo površine koje zapinju). Lubrikanti su posebno korisni kod pokretnih djelova strojeva. Na taj način umanjujemo usporavanje zbog trenja te istrošenost zbog enventualnog struganja jednog dijela o drugi. Trenje ipak nije uvijek beskorisno. Primjerice, bez trenja (ili s malim trenjem) bi kolo od auta proklizalo. Stoga u slučaju obilne kiše ili snijega koristimo zimske gume koje povećavaju trenje. Ideja je napravimo dublje brazde u gumi tako da voda ili snijeg ima gdje proći i tako da se ne stvori tanki sloj vode (tzv. vodeni klin) po kojem bi guma klizila.

Što kada tijelo klizi po kosini? U tom slučaju bitna je samo ona komponenta težine koja je okomita (normlna) na podlogu N. Ta okomita komponenta je ono što pritišće tijelo uz kosinu. Dakle, u tom je slučaju sila trenja jednaka $F_{tr} = \mu N$.



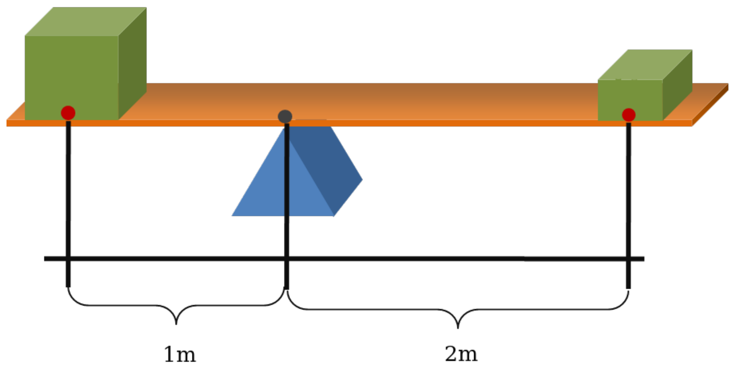
8 Poluga i moment sile

Pokušajte vrata otvoriti na sljedeća dva načina: prvo normalno, za kvaku, potom u blizini šarke (oko kojih se vrata okreću). Vrata je puno lakše otvoriti kada ih guramo što dalje od mjesta oko kojeg se vrata okreću. Razlog je što nam je **krak sile** u tom slučaju veći. Koliko brzo se vrata okreću ovisi o dvjema veličinama:

1. kraku sile k, tj. udaljenosti od oslonca oko kojeg se vrata rotiraju
2. samoj jačini sile F.

Što je krak sile veći, to možemo djelovati manjom silom, a da se vrata pritom jednako brzo otvaraju.

Zamislimo polugu (obični komad daske) koji balansiramo na nekom osloncu:



Kada je oslonac točno na sredini poluge, onda će poluga biti u ravnoteži samo onda kada su utezi istih težina. Ovako, recimo, funkcioniraju tradicionalne vage. One uspoređuju nepoznatu težinu nekog predmeta s težinama nekih poznatih standardnih utega.

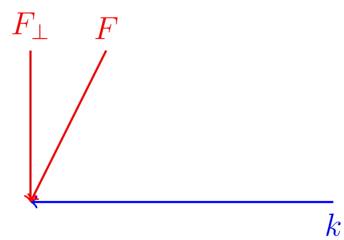
Ako oslonac nije na sredini (kao na slici), onda da bi poluga bila u ravnoteži, uteg na kraćem dijelu poluge (s kraćim krakom sile) mora biti veće težine (kao na slici). Naime, uteg s dužim krakom sile lakše rotira polugu (sjetimo se slučaja vrata), a uteg s kraćim krakom sile teže rotira polugu. Precizno, definiramo **moment sile** (M) kao umnožak sile i pripadnog joj kraka sile:

$$\boxed{M = F \cdot k} \tag{4}$$

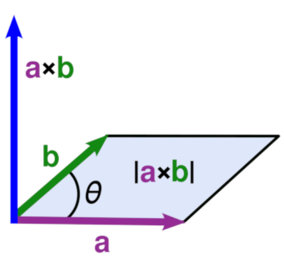
Poluga će se okrenuti na onu stranu na kojoj je moment sile veći. Recimo, neka na lijevoj strani djeluje sila od 3N na udaljenosti 5m od oslonca, a na desnoj strani sila od 2N na udaljenosti 7m od oslonca. Onda je na lijevoj strani moment sile $M_1 = F_1 \cdot k_1 = 3\text{N} \cdot 5\text{m} = 15\text{Nm}$, a na desnoj $M_2 = F_2 \cdot k_2 = 2\text{N} \cdot 7\text{m} = 14\text{Nm}$. Dakle, na lijevoj strani je moment sile veći pa će se poluga okrenuti na lijevu stranu.

Poluga je u ravnoteži ako je moment sile s lijeve strane jednak momentu sile s desne $M_1 = M_2$. Drugim riječima, ako: $F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2$. Primjerice, ako je jedan krak sile dvaput veći od drugog (kao na slici), onda na kraći kraj moramo staviti uteg koji je dvaput teži. Ovo je lagano zapamtiti: **koliko je puta krak sile veći na jednoj strani, toliko puta težina mora biti veća na drugoj**.

Napomenimo da se kod problema s polugom podrazumijeva da sila djeluje okomito na polugu, odnosno sila i krak sile su okomiti. U tom slučaju je moment sile dan običnim umnoškom $F \cdot k$. Kada sila djeluje pod nekim kutom na krak sile (koji nije 90), onda očekujemo da dio sile paralelan s polugom ne doprinosi rotaciji poluge, stoga ga možemo zanemariti. Dakle, gledamo samo dio sile (tj. komponentu sile) okomitu na krak, $F_\perp$. Moment sile je onda dan izrazom $M = F_\perp \cdot k$.



Kad smo već okrenuli diskusiju u ovom smjeru, napomenimo za kraj da možemo definirati i vektor momenta sile tako da uzmemo tzv. vektorski umnožak $\vec{k} \times \vec{F}$. Ovdje je $\vec{k}$ vektor koji pokazuje od oslonca do mjesta na koje djeluje sila. Veličina ovog vektorskog umnoška je $F_\perp \cdot k$, a smjer mu je okomit i na $\vec{F}$ i na $\vec{k}$ te je dan tzv. pravilom desne ruke:



Slika 6: Promotrimo kut između početnih vektora a i b. Promatramo manji kut između ta dva vektora, odnosno neki $\theta < 180°$. Valja zapamtiti da je općenito u matematici rotacija ↺ (suprotno od kazaljke na satu) pozitivan smjer, a ↻ (u smjeru kazaljke na satu) negativan smjer. Ako krenuvši od prvog vektora u umnošku $a \times b$ (dakle a) ovaj kut prebrišemo u pozitivnom smjeru ↺, onda je umnožak prema gore (kao na slici); u suprotnom je prema dolje.

Valja i primijetiti da je iznos $F_\perp \cdot k$ samo površina paralelograma kojeg razapinju vektori F i k. Zgodna posljedica ove definicije je da moment $M = k \times F$ na polugu gleda prema vani (van papira; prema čitatelju) kada polugu rotira u pozitivnom smjeru ↻, a prema unutra kada polugu rotira u negativnom smjeru ↻. Dakle, moment sile na lijevu stranu poluge gleda van papira, a moment na desnu stranu poluge gleda u suprotnom smjeru (unutar papira). Poluga je u ravnoteži kada je ukupni moment na polugu 0, tj. kada su ta dva momenta jednaka (kada je njihov vektorski zbroj 0).

Općenito, tijelo će biti u rotacijskoj ravnoteži, odnosno neće se okretati (s obzirom na neki oslonac) ako je vektorski zbroj svih momenata na njega 0. Usporedimo ovo s Newtonovim 1. zakonom: tijelo će mirovati (bit će u translacijskoj ravnoteži) ako je vektorski zbroj svih sila koje djeluju na to tijelo 0. Naravno, može se dogoditi da se tijelo već giba nekom brzinom. Ako je u tom slučaju zbroj svih sila na tijelo 0, onda će tijelo nastaviti svoje gibanje neizmjenjeno (ne mijenja svoju brzinu). Isto tako se može dogoditi i da se tijelo već okreće oko svoje osi (npr. kolo na nekoj osovini). Ako je u tom slučaju zbroj svih momenata 0, onda će se tijelo nastaviti okretati istom brzinom (neće ubrzavati svoju rotaciju).

9 Težište

Kada želimo opisati samo položaj i/ili brzinu tijela, nije potrebno razmatrati oblik tijela niti prostor koji tijelo zauzima. Zapravo, ako je tijelo kruto (fiksnog oblika), možemo jednostavno odabrati neku točku na tijelu i opisati njen položaj i brzinu. Dakle, tijelo možemo opisati kao **materijalnu točku**, tj. **točkastu masu**. Materijalne točke nemaju protežnost (ne zauzimaju volumen), no imaju konačnu i dobro definiranu masu. Dakle, kada sila djeluje na materijalnu točku, ona će ubrzati u ovisnosti o njenoj masi.

Kako je sva materija građena od atoma, mogli bismo sve oko nas opisati kao kolekciju velikog broja točkastih masa. Posebno, **kruta tijela** možemo opisati kao kolekciju točkastih masa koje su na fiksnim udaljenostima jedna od druge. Ovo znači da će položaj i brzina jedne točkaste mase automatski odrediti položaj i brzine svih drugih. Budući da su sve točke međusobno vezane, kada sila djeluje na jednu, zapravo (kroz krute veze) djeluje na svih. Dakle, ako sila djeluje na točkastu masu m koja je dio krutog tijela ukupne mase M, onda će točkasta masa ubrzavati kao da ima masu M, a ne m (jer je usporavaju krute veze s drugim česticama). Ovo je naravno očito: ako imamo kamenčić mase 5g i zalijepimo ga na veliki kamen 5kg, onda gurajući mali kamenčić zapravo guramo cijeli kamen (svih 5kg + 5g).

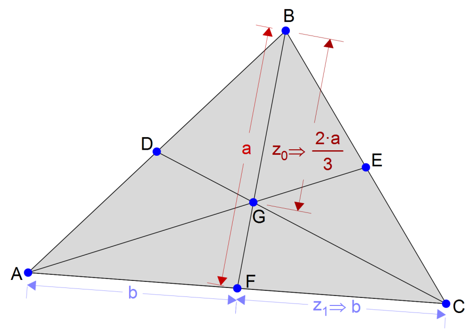
Težište (ili centar gravitacije) je točka u prostoru za koju vrijedi da se tijelo rotira kao da mu je sva masa sadržana u toj točki (tj. kao da gravitacija na tijelo djeluje u toj točki). Matematički, postavimo oslonac u ishodište te označimo s r_1 vektor koji iz oslonca pokazuje na prvu točkastu masu tijela, r_2 drugu, itd. Neka je F_1 gravitacijska sila na prvu česticu, F_2 gravitacijska sila na drugu, itd. i neka je $F = F_1 + F_2 + ...$ ukupna gravitacijska sila. R će biti težište ako je $R \times F$ jednak ukupnom momentu sile $r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + ...$ [4].

Primijetimo da, ukoliko je oslonac u težištu, vrijedi $R = 0$. Dakle, tijelo poduprto u težištu je u ravnoteži (ne rotira se). Težište za dvije mase m_1 i m_2 stoga možemo pronaći tako da uravnotežimo te dvije mase (nekom zamišljenom polugom). Drugim riječima, tražimo točku u koju moramo staviti oslonac da bi dvije mase na krajnjim rubovima poluge bile u ravnoteži. Kako već znamo uvjet za polugu u ravnoteži, ovo je riješen problem. Primjerice, ako imamo dvije iste mase, centar mase je točna na pola puta između njih. Ako je jedna masa duplo veća, centar mase je pomaknut prema njoj (i to tako da je njen krak sile, odnosno njena udaljenost od centra mase dvostruko manja od kraka sile druge mase).

Kada imamo više masa, onda možemo slijediti sljedeći postupak. Pretpostavimo da imamo 3 jednake kugle od $1kg$ u ravnini (vrhovi nekog trokuta). Budući da su sve kugle jednakih masa, težište bilo koje dvije kugle je polovište dužine koja ih veže (stranice trokuta). Kako se dvije kugle od 1kg ponašaju efektivno kao jedna kugla od 2kg smještena u polovište, možemo zamijeniti bilo koje dvije kugle jednom. Dakle, tražimo težište polovišta i nasuprotnog vrha, što je ujedno i težište izvorne 3 kugle. To težište leži negdje na dužini što veže polovište i nasuprotni vrh. Zapravo, leži točno na 2/3

[4]Koristeći ovaj uvjet možemo (u jednolikom gravitacijskom polju) pronaći izraz za težište. Ako postavimo osi tako da sila gravitacije gleda premo dolje (duž y osi), onda je moment sile $R \times F$ po iznosu XF (jer okomiti dio kraka samo udaljenost po x osi), a $r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + ...$ je po iznosu $x_1F_1 + x_2F_2 + ...$ Sile iznose $F_1 = m_1g$, $F_2 = m_2g$, $F = m_1g + m_2g + ... = (m_1 + m_2 + ...)g = Mg$. Dakle $XMg = x_1m_1g + x_2m_2g + ...$ Podijelimo li obje strane s g i M, dobijemo $X = \frac{1}{M}(x_1m_1 + x_2m_2 + ...)$. Okrenemo li tijelo, dobijemo istu stvar kao da gravitacija djeluje u nekom drugom smjeru. Dakle, sve koordinate (ne samo x koordinata) težišta R moraju zadovoljavati prethodnu relaciju, stoga imamo $R = \frac{1}{M}(r_1m_1 + r_2m_2 + ...)$. Ovaj izraz za R zovemo *centar mase*. Centar mase je u jednolikom gravitacijskom polju samo drugi naziv za težište. Ipak, ako zamislimo izuzetno veliko tijelo, onda će pri vrhu djelovati osjetno slabija gravitacija nego pri dnu tijela (g neće biti isti). Dakle, centar gravitacije (težište) i centar mase općenito neće biti ista stvar.

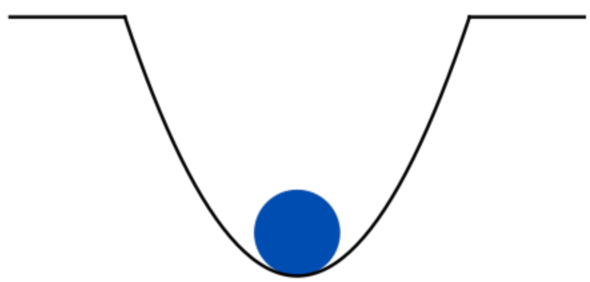
puta između polovišta i nasuprotnog vrha (pritom je bliže polovištu jer je ono masivnije). Ovo je upravo matematički pojam "težišta trokuta".



Slika 7: Težište trokuta

Konačno, možemo prokomentirati ravnotežu tijela. Rekli smo da je tijelo u rotacijskoj ravnoteži ako mu je zbroj momenata 0 i u translacijskoj ravnoteži ako je zbroj sila na tijelo 0. U ravnoteži se pritom može dogoditi:

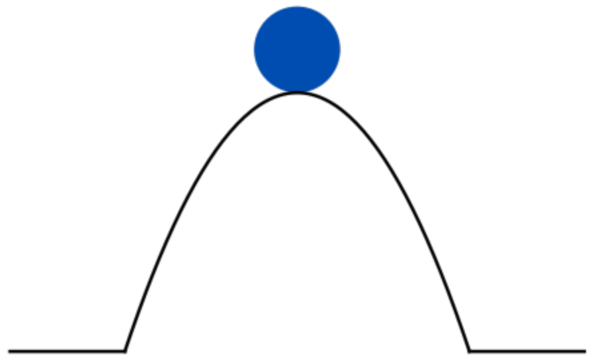
1. Tijelo se ako ga malo pomaknemo iz ravnotežnog položaja vraća natrag u isti. Ovako se ponaša kugla u zdjeli - ako je pomaknemo malo iz dna zdjele, vratit će se natrag u početni položaj. Ovo se naziva **stabilna ravnoteža**.



Slika 8: Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagram_of_a_ball_placed_in_a_stable_equilibrium.svg`

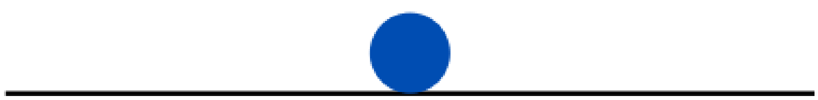
2. Malim pomakom iz ravnoteže, tijelo se pomiče daleko. Ovo je primjerice situacija s kuglom na brdu - kugla je pažljivo balansirana na vrhu

brda i najmanji pomak će je poslati nizbrdo. Ovo se zove **nestabilna ravnoteža**.



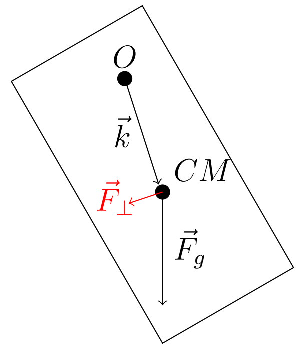
Slika 9: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagram_of_a_ball_placed_in_an_unstable_equilibrium.svg

3. Može se dogoditi da malim pomakom iz ravnotežnog položaja tijelo ostaje u ravnoteži (ali na drugom mjestu). Primjerice, kugla se nalazi na ravnoj podlozi. Ovo se zove **neutralna** (ili *indiferentna* ravnoteža).

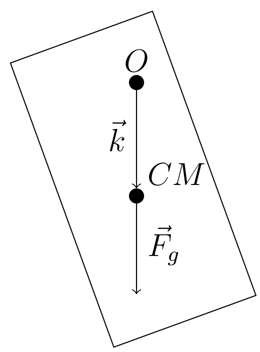


Slika 10: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagram_of_a_ball_placed_in_a_neutral_equilibrium.svg

Na tijelo gravitacija djeluje kao da je sadržana u težištu. Dakle, ako oslonac ili ovjesište (O) nije točno poravnato s težištem, (centrom mase CM) imat ćemo moment sile koji će okrenuti tijelo:

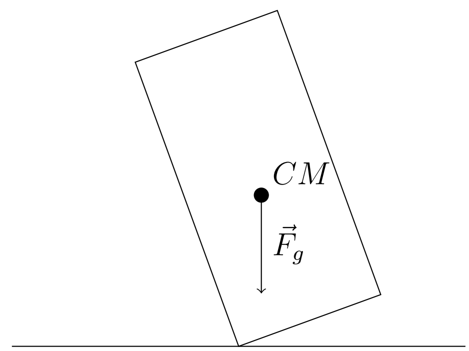


Vidimo da u ovom slučaju imamo komponentu sile teže koja je okomita na krak pa imamo neki moment sile (različit od 0). Kada je ovjesište točno ispod centra mase, onda su sila teža i krak paralelni, odnosno okomita komponenta sile teže je 0 ($F_\perp = 0$) pa nemamo moment sile i tijelo je u ravnoteži:

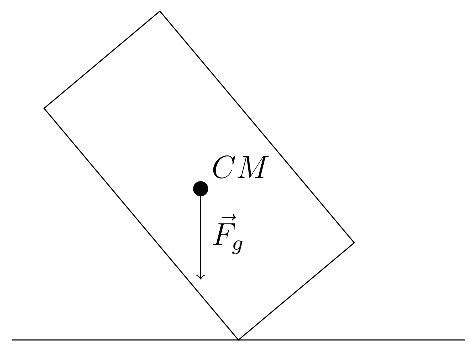


Kada je tijelo ovješeno na način da mu je težište ispod oslonca (ovjesišta), onda imamo stabilnu ravnotežu. Ako je pak težište iznad oslonca (što se dogodi npr. kada balansiramo štap na prstu), onda imamo nestabilnu ravnotežu. Da bi štap bio uspravan, treba mu održavati težište iznad oslonca. Ako je težište značajno po strani osloncu, na tijelo djeluje veliki moment sile i vjerojatno nećemo moći spriječiti pad.

Kada tijelo stoji nakošeno na podlozi, onda će se vratiti u uspravni položaj ako mu težište nije prešlo rubni oslonac (jer ga moment sile povlači unatrag):



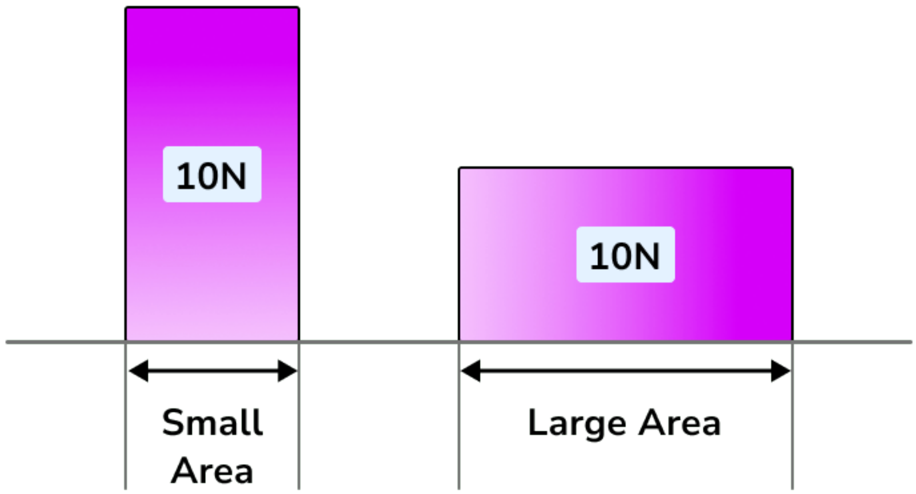
Kada težište prijeđe rubni oslonac, tijelo pada:



Iz ovoga zaključujemo da je tijelo stabilnije što su mu rubni oslonci šire postavljeni (što mu je baza, tj. dno veće), odnosno što mu je težište niže (jer visoko težište prijeđe rubni oslonac za manji kut).

10 Tlak

Zamislimo situaciju u kojoj imamo istu silu koja djeluje na dvije različite površine. Recimo, imamo uteg dane težine kojeg smo okrenuli na dva načina kao na slici:



Veći **tlak** se javlja kada je površina manja. Recimo, kada koristimo pribadaču, ne djelujemo posebno velikom silom, ali kako je glava pribadače izuzetno malena, sva ta sila je fokusirana na vrlo malu podlogu pa je tlak velik. To je razlog zašto je s pribadačom lagano probijemo različite materijale (tj. zašto se s pribadačoom lagano možemo ubosti).

Kao još jedan primjer nam može poslužiti i nož. Ako je nož oštar, onda ne treba djelovati posebno jakom silom kada nešto želimo prerezati. S druge strane, ako je nož tup, onda je ta sila raspoređena po većoj površini (tlak je manji) pa nož slabije reže i treba više uprijeti, tj. djelovati jačom silom.

Matematički, ako sila od 10N djeluje na 2m^2, onda će na svaki metar djelovati 5N. Tlak nam govori kolika sila djeluje po jedinici površine. Općenito, kada sila F ("Force") okomito djeluje na površinu A ("Area"), tlak p ("Pressure") računamo kao:

$$\boxed{p = \frac{F}{A}} \tag{5}$$

Primijeti da, ukoliko ista sila djeluje na dvostruko manju površinu, tlak je dvostruko veći. Isto tako, ako na istu površinu djelujemo dvostruko većom silom, tlak je opet dvostruko veći.

Standardna mjerna jedinica za tlak je pascal $\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$. Pascal nam govori koliko newtona sile djeluje na svakom metru kvadratnom. Tlak se može mjeriti i npr. u N/cm^2, a u tom slučaju bismo dobili kolika sila djeluje na svakom centimetru kvadratnom. Primjerice, 2N/cm^2 znači da na svaki kvadratić površine 1cm^2 djeluje 2N. Dakle, na tri takva kvadratića, tj. na 3cm^2

će djelovati 6N. Kako u metru kvadratnom imamo 10 000cm^2, na kvadratu površine 1m^2 će djelovati sila od 20 000N. Dakle, 2N/cm^2 iskazan u Pa je 20 000Pa = 20 000N/m^2 (na svakom kvadratu površine 1m^2 djeluje sila od 20 000N). Zaključujemo, prebacivanjem N/cm^2 u Pa dobijemo broj koji je 10 000 puta veći.

Napomenimo da tlak nema smjer (nije vektorska veličina) jer nas samo zanima dio sile koji je okomit na površinu (komponenta sile okomita na površinu).

Tlak se javlja i kada smo uronjeni u tekućine (ili plinove). Naime, dok smo uronjeni u tekućinu, sa svih strana nas udaraju čestice (molekule/atomi) koje sačinjavaju tekućinu. Na ovaj način po površini našeg tijela djeluju male sile. Kada izračunamo prosječnu silu koja djeluje po jedinici površine (metru kvadratnom), dobijemo tlak tekućine.

Interesantno je da za tekućinu (ili plin) u gravitacijskom polju vrijedi da je tlak kojim nas čestice tekućine bombardiraju jednak **težini stupca tekućine iznad nas**.

Primjerice, dok ronimo iznad naših glava se nalazi stupac vode koja nas odozgo pritišće svojom težinom. Što ronimo dublje to je težina vode iznad nas veća pa i tlak raste.

U atmosferi se javlja slična situacija. Mi smo zapravo uronjeni u "ocean plina" - Zemljinu atmosferu. Iznad naših glava je stupac zraka visok kojih stotinjak km (većina plina koji sačinjava atmosferu se može pronaći na visinama do 100km, što je Kármánova linija, tj. "početak svemira"). Taj stupac zraka ima određenu težinu i na isti način kao i voda izaziva tlak.

Budući da nije očito *zašto* tlak tekućine (srednja sila kojom nas bombardiraju čestice) mora biti jednak težini stupca te tekućine, valjalo bi ovo ukratko prokomentirati. Promotrimo uski stupac tekućine i isjeckajmo ga na tanke komadiće. U stanju **hidrostatske ravnoteže** svi ti komadići su nepomični (statični). Ovo znači da je ukupna sila na svakog od njih 0. Na svaki komadić djeluju 3 sile: sila zbog tlaka od komadića iznad (koja gura komadić prema dolje), sila zbog tlaka od komadića ispod (koja ga gura prema gore) te sila teža koja povlači komadić prema dolje. Tvrdnju dobijemo kada promotrimo čitav stupac od neke visine do njegovog vrha. U ovom slučaju nema ničeg iznad stupca pa u stanju hidrostatske ravnoteže na njega sada samo djeluje sila teža koja ga povlači prema dolje i sila zbog tlaka odozdo (prema gore).

Ako je površina poprečnog presjeka stupca A, a tlak ispod stupca je p, onda vrijedi da sila $F = pA$ (koja gura stupac prema gore) mora biti jednaka težini stupca (inače bi stupac potonuo). Dakle, tlak p možemo dobiti tako da težinu stupca podijelimo s površinom stupca A.

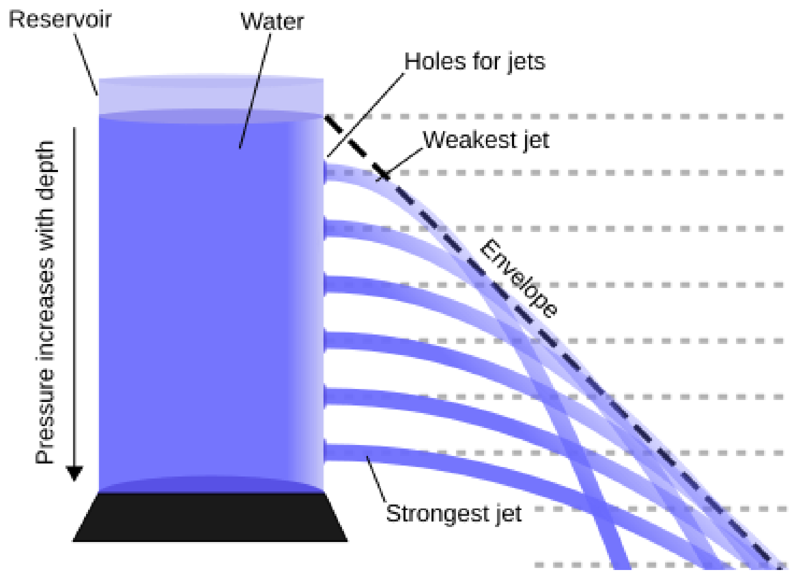
11 Hidrostatski tlak i uzgon

Možemo dati i formulu za hidrostatski tlak koji djeluje na tijelo uronjeno u tekućinu. Iz prethodne diskusije je jasno da upravo težina fluida iznad uronjenog tijela doprinosi tlaku. Težina fluida je mg, gdje je m masa fluida iznad uronjenog tijela. Ako je površina tijela A, onda stupac tekućine iznad tijela ima volumen $V = A \cdot h$. gdje je h visina stupca (za tekućinu to je dubina na kojoj se uronjeno tijelo nalazi). Prisjetimo se da nam gustoća govori koliko mase imamo u jedinici volumena, odnosno (srednja) gustoća je definirana izrazom $\rho = \frac{m}{V}$. Dakle, masa je dana izrazom $m = \rho V$. U našem slučaju, masa fluida iznad tijela je $m = \rho V = \rho A h$. Dakle, tlak na tijelo površine A je

$$p = \frac{mg}{A} = \frac{\rho A h g}{A} = \rho h g.$$

Valja držati na umu da su tekućine (približno) **nestlačive**, stoga im je gustoća više-manje ista kroz čitav stupac (ovo nije savršeno točno ali vrijedi do na veliku preciznost). Zrak, s druge strane, je gušći pri dnu stupca nego pri vrhu (gustoća zraka je mala na velikim visinama).

Glavni zaključak koji možemo izvesti iz ove formule je da **na većim dubinama djeluje veći tlak**. Iz ovoga slijedi da će, ako probijemo rupice u posudi, kroz donju rupicu voda najbrže teći:



Slika 11: Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:TorricelliLawDiagram.svg`

Također, interesantno je prokomentirati i sljedeću situaciju:

Slika 12: Hidrostatski paradoks. Tlak dnu svih posuda je isti i iznosi $\rho g h$, gdje je h visina vode (mjerena od dna posude), a ρ gustoća vode. Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hydrostatisches_Paradoxon1.svg`

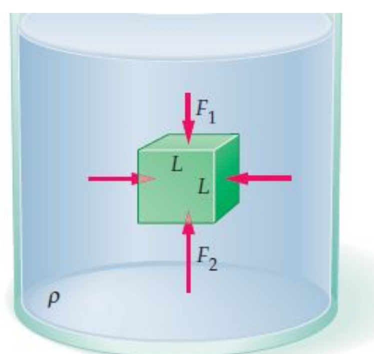
Na prvu ruku se čini da bi posude različitih oblika možda trebale imati različite tlakove. Usporedimo npr. treću i petu (posljednju) posudu. Očekivali bismo možda da je hidrostatski tlak na dnu treće posude veći nego na dnu pete (jer imamo istu težinu na manju površinu). Zaista, istina je da je tlak na *podlozi ispod* posude veći kod treće nego kod pete posude, ali hidrostatski tlak *unutar posude* je **isti** u oba slučaja. Paradoks nestane kada shvatimo da posuda isto djeluje na vodu (kroz sudare sa česticama vode). Dakle, treća posuda malo djeluje na vodu prema gore (i tako umanjuje ukupnu silu na dnu posude), a posljednja posuda djeluje malo na vodu prema dolje i tako uvećava ukupnu silu na dnu. Isto se događa i u vijugavoj posudi.

Općenito, oblik posude nije bitan jer tekućinu u hidrostatskoj ravnoteži možemo analizirati komadić po komadić. Na svaki sitni komadić vode hidrostatski tlak djeluje s svih strana. Da bi svaki komadić vode bio nepomičan, tlak slijeva mora biti jednak tlaku zdesna (tj. tlak na danoj visini mora biti jednolik). Nadalje, tlak iznad je malo veći nego tlak ispod zbog težine samog komadića. Iz ovoga bi trebalo biti jasno da nam ne treba ravni neprekinuti stupac od vrha do dna posude da bismo imali isti hidrostatski tlak (tlak je u konačnici posljedica sudara molekula vode sa stijenkama ili uronjenim predmetima).

Ovo je uostalom razlog zašto u učionici (kada je iznad nas strop) osjećamo isti tlak kao i vani (kada je iznad nas stupac zraka).

Imamo još jednu posljedicu hidrostatskog tlaka. Tlak nas, kada smo uronjeni u tekućinu, gura sa svih strana. Na danoj dubini je tlak slijeva jednak je onome zdesna, no tlak koji djeluje po našim nogama veći je od tlaka koji djeluje po našoj glavi. Dakle, tekućina nas pritišće odozgo prema dolje, ali isto tako nas gura odozdo prema gore i to većom silom. Ovaj fenomen zovemo **uzgon**.

Formulu za silu uzgona možemo izvesti na sljedeći način. Zamislimo kocku visine L čija je gornja i donja stranica površine $A = L^2$.



Odozgo djeluje sila jednaka $F_1 = p_1 \cdot A$, gdje $p_1 = \rho g h_1$ tlak na vrhu, a odozdo djeluje sila $F_2 = p_2 \cdot A$, gdje je $p_2 = \rho g h_2$ tlak na dnu tijela. Ukupna sila F je usmjerena premo gore te je po iznosu jednaka razlici ove dvije sile:

$$F = F_2 - F_1 = p_2 A - p_1 A = (\rho g h_2 - \rho g h_1) \cdot A = \rho g (h_2 - h_1) A = \rho g V$$

Ovdje je $V = A \cdot (h_2 - h_1) = A \cdot L = L^3$ volumen kocke - primijetimo da je $h_2 - h_1 = L$, tj. razlika u dubini gornje i donje stranice tijela je samo visina kocke L.

Kada tijelo nije u potpunosti uronjeno u tekućinu (gornja stranica strši van tekućine), onda tekućina djeluje samo odozdo pa je ukupna sila samo jednaka sili na donjoj stranici: $F = pA = \rho g h A = \rho g V_u$, gdje je $V_u = hA$ volumen uronjenog dijela tijela. Naime, h je dobina donje stranice, što je visina uronjenog dijela tijela.

Sve u svemu, vučemo sljedeći zaključak: kada uronimo tijelo u tekućinu, ono razmjesti točno onoliko tekućine koliki je volumen uronjenog dijela tijela (treba razmaknuti tekućinu i napraviti mjesta za tijelo). Težina te razmještene tekućine $mg = \rho V_u g$ jednaka je sili uzgona koje gura tijelo prema gore.

Ovo je razlog zašto tvari koje su manje guste od vode plutaju, a tvari koje su gušće od vode tonu. Naime, ako je težina razmještene vode veća od težine tijela, sila uzgona bit će veća od gravitacijske sile koja vuče tijelo prema dolje (i tjera ga da tone) pa tijelo pluta. Ako je pak težina tijela veća od težine razmještene tekućine, onda je gravitacijska sila veća od sile uzgona te će tijelo potonuti.

12 Provjerite teorijsko znanje

1. U kojoj mjernoj jedinici mjerimo silu (Hint: prezime jednog engleskog fizičara)? Koje slovo koristimo kao uobičajenu oznaku za silu (Hint: prvo slovo engleske riječi za silu)?

2. Hoće li se opruga koja je puno rastegnuta (van svog elastičnog režima) vratiti u prvobitni oblik?

3. Ako oprugu rastežemo umjereno (unutar elastičnog režima), kako elastična sila ovisi o produljenju opruge? Ako je produljenje opruge dvostruko veće, kolika je elastična sila koja tu oprugu vraća u prvobitni oblik (veća/manja i koliko puta)?

4. Kako koeficjent elastičnosti (k) utječe na krutost/labavost opruge?

5. Dinamometar je obična opruga čiju konstantu elastičnosti poznajemo (pa iz produljenja opruge možemo izračunati silu). Osmislite eksperiment koji bi odredio konstantu elastičnosti za danu oprugu (na raspolaganju imate uteg nepoznate težine, vagu za mjerenje težine i metar za mjerenje produljenja opruge).

6. Jesu li masa i težina isto? U kojim mj. jedinicama se mjere masa i težina?

7. Imamo li na Mjesecu istu masu kao i na Zemlji? Što je s težinom?

8. Što mjeri vaga (masu ili težinu)? Razmislite što će se dogoditi kada se izvažete na Mjesecu.

9. Svojim riječima objasni kako nastaje sila trenja kada vučemo neki teret po podlozi (mikroskopska slika)?

10. Ako "isključimo" silu trenja (zamislite situaciju gdje je sila trenja jednaka 0N), bismo li mogli hodati? Što bi se dogodilo s automobilskim gumama (hoće li se guma kotrljati po podu ili vrtjeti u mjestu)?

11. Vučemo knjigu po stolu. Je li sila trenja ista u slučaju kada je knjiga koju vučemo uspravna (pa manja površina knjige dira stol) u odnosu kada knjigu vučemo dok je položena na stol (pa veća površina dira stol)?

12. Kako sila trenja ovisi o koeficjentu trenja (što nam visoki koeficjent trenja govori o materijalima koji klize jedno niz drugo)?

13. Kako sila trenja ovisi o težini tereta koji vučemo?

14. Je li lakše vrata otvoriti dok ih gurate u blizini kvake ili dok ih gurate blizu šarke (mjesta oko kojeg se vrata okreću, eng. "door hinge")? Zašto?

15. Kako se pravilno koristi poluga - je li lakše teret dignuti ako polugu držite blizu oslonca ili daleko od oslonca?

16. Na igralištu se nalazi klackalica čiji oslonac (mjesto oko kojeg se klackalica okreće) nije na središtu. Jedno sjedalo je udaljeno 2m od oslonca, a drugo 3m. Ana i Bela obje imaju 40kg te sjedaju na klackalicu: Ana

sjeda na udaljeniji kraj (3m), a Bela na bliži kraj (2m). Je li klackalica u ravnoteži? Ukoliko nije, tko će biti u zraku, a tko na podu (na koju stranu će se klackalica okrenuti)?

17. Kako tlak ovisi o površini na koju sila djeluje? Hoće li tlak biti veći dok knjiga stoji uspravno na stolu ili dok je položena? Djelujete li većim tlakom na pod dok stojite na obje ili dok stojite samo na jednoj nozi?

18. Pristali ste na izazov. Imate sljedeće izbore: 1. leći na drveni krevet iz kojeg viri 10 čavala koji su tako raspoređeni da ih ne možete izbjeći ili 2. leći na drvani krevet iz kojeg viri 1 000 000 čavala. Objasnite svoj odabir.

19. Je li tlak zraka, viši u Rovinju ili na vrhu Mt. Everesta?

20. Tko osjeća veći tlak, ronioc koji roni na dah ili podmornica koja se nalazi na najdubljoj točki na Zemlji - na dnu Marijanske brazde?

13 Dodatak: Newtonov 2. zakonu (za one koji žele detaljno objašnjenje sile i težine)

Da bismo u potpunosti shvatili masu, akceleraciju i silu, moramo zaroniti u Newtonov 2. zakon (inače gradivo osmog razreda).

- Brzina nam govori kako tijelo mijenja svoj položaj. Recimo, ako se gibamo 100km/h, to znači da ćemo za 1h preći 100km. Naravno, za 2 sata bismo prešli 200km, a za pola sata 50km. Isto tako, brzina od $10\frac{m}{s}$ znači da ćemo za 1s preći 10m.
- Akceleracija, s druge strane, kaže kako tijelo mijenja svoju brzinu. Primjerice, akceleracija od $10\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{s}}$ znači da ćemo za jednu sekundu ići 10m/s brže nego se trenutno gibamo. Recimo da krenemo iz stanja mirovanja. nakon 1s ćemo se gibati 10m/s, nakon 2s ćemo se gibati 20m/s, itd. $\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{s}}$ je inače dvojni razlomak koji kada ga sredimo iznosi $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

Veza između mase (m), sile (F) i akceleracije (a) je dana tzv. **Newtonovim 2. zakonom** (koje ministarsvo obrazovanja u svoj svojoj mudrosti smatra da nije gradivo sedmog, već osmog razreda...smh).

$$F = ma$$

Dakle, Djelujemo li silom od 1N na neko tijelo mase 1kg, ono će ubrzati $1\mathrm{m/s}^2$. Ako je tijelo duplo veće mase (2kg) onda će tijelo ubrzati $0.5\mathrm{m/s}^2$.

Iz ove formule iščitavamo i da se jedinica newton može iskazati (zapravo definirati) kao $1N = 1\mathrm{kg}\cdot\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$. Riječima bismo mogli reći da je 1N sila potrebna da se masa od 1kg ubrza za $1\mathrm{m/s}^2$ (tako da se toj masi svake sekunde brzina mijenja za 1m/s).

Primijetimo, kada podijelimo ukupnu silu na neko tijelo i masu tog tijela, dobijemo ubrzanje tijela: $a = \frac{F}{m}$ pa se akceleracija može mjeriti i u N/kg.

Sada možemo shvatiti izraz $F_g = mg$ za težinu tijela. Zanemarimo otpor zraka (zamislimo da se nalazimo u vakuumskoj komori ili na Mjesecu). U tom slučaju sva tijela koja ispustimo padaju istim ubrzanjem prema Zemlji[5]. To

[5] Ovo bi možda valjalo malo opravdati. Jasno je da pero i čekić neće na tlo pasti u istom trenutku. No u vakumu (recimo na Mjesecu) hoće. Taj eksperiment je proveden na Apollo 15 misiji; video link: `https://www.youtube.com/watch?v=Oo8TaPVsn9Y`

ubrzanje je približno $a = 10\text{m/s}^2$ i zove se gravitacijska akceleracija, a češće je označavamo slovom g. Dakle, gravitacijska sila kojom Zemlja privlači ta tijela je $F_g = ma = mg$.

$F_g = mg$ je ujedno i sila kojom predmet gura podlogu na kojoj se nalazi. Precizno (bez demona i nevidljivih konopca), ovo možemo dokazati pomoću **Newtonovog 3. zakona**: kada dva tijela međudjeluju, sila kojom prvo tijelo djeluje na drugo je po iznosu jednaka sili kojom drugo tijelo djeluje na prvo (ali je u suprotnom smjeru). Primjerice, kada guramo zid, i zid gura nas istom silom (zato nam ruka ne prolazi kroz zid - zid je u tome sprječava).

Kada knjiga miruje na stolu, na nju moraju djelovati dvije sile: svakako je Zemlja privlači prema svom središtu, ali na knjigu djeluje i stol prema gore (te je sprječava da ne propadne). Kako knjiga miruje (po Newtonovom 1. zakonu) te su dvije sile jednakih iznosa (ali suprotnih smjerova); inače bi knjiga ubrzavala. Newtonov 3. zakon sada garantira da je sila kojom stol djeluje na knjigu (prema gore) jednaka po iznosu, ali suprotno usmjerena od sile kojom knjiga djeluje na stol. Dakle, sila kojom Zemlja vuče knjigu mora po iznosu biti jednaka sili kojom knjiga pritišće stol te su obje sile usmjerene prema dolje.

Ovdje bi bilo dobro napomenuti da iz nekog razloga autori knjiga za osnovnu školu na hrvatskom jeziku razlikuju pojmove "težina" (u smislu sila kojom tijelo tlači podlogu na kojoj se nalazi) i "sila teža" (u smislu sila koja vuče tijelo prema središtu Zemlje). Autori potom spominju nekakvo hvatište sile, ali to je sve promašena poanta. Naravno, jedno je sila kojom tijelo djeluje *na podlogu*, drugo je sila kojom Zemlja djeluje *na tijelo*. Ali razlikovati ih temeljem njihovog hvatišta je, prema mome mišljenju promašen slučaj (hvatište sile bi, recimo, bilo relevantno kada opisujemo kako se tijelo okreće - onda je bitno gdje točno na to tijelo djeluje sila, odnosno bio bi bitan krak sile). Kompletna diskusija tijela u padu ili tijela koje miruje na podlozi se može zamijeniti točkastim masama (zanemarimo protežnost tijela) i onda čitav argument o hvatištu sile pada u vodu. Na engleskom se koristi izraz "Weight" za oboje i ja se ne planiram udaljiti od te konvencije. U konačnici, obje sile su istog iznosa u istom smjeru te su matematički isto opisane. Ne dobijamo ništa korisno uvođenjem dodatne notacije i simbola (a uvodimo potencijalni sukob notacije i dodatnu kompleksnost).

Bitno je reći i da:

- Kada uključimo otpor zraka, onda tijelo ubrzava do određene brzine (tzv *terminalne* brzine) i nakon toga se giba stalnom brzinom. To je zato što se otpor zraka povećava s brzinom tijela. Dakle, u određenom trenutku sila gravitacije na tijelo (koja ubrzava tijelo) i sila otpora zraka (koja ga usporava) će se izjednačiti, a ukupna sila na tijelo bit će $0N$. Sva tijela u atmosferi padaju zapravo na ovaj način.

Padobranac, primjerice, ubrza samo do određene brzine dok nema otvoren padobran (ne ubrzava cijelo vrijeme dok pada). Kada otvori padobram, terminalna brzina mu se još više smanji te tako omogućuje sigurno slijetanje.

- Kada se značajno udaljimo od Zemlje, gravitacijska sila opada. Naravno gravitacijska sila je najjača kada smo blizu planeta/nebeskog tijela (Osoba na Zemlji pada prema Zemlji, astronaut na Mjesecu pada prema Mjesecu). Puni izraz za gravitacijsku akceleraciju (tzv. Newtonov opći zakon gravitacije) glasi

$$g = G\frac{M}{r^2}$$

Ovdje je $G = 6.67408 \cdot 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$ gravitacijska konstanta (i razlog zašto ja ne volim oznaku G za težinu), M je masa Zemlje (ili planeta prema kojem tijelo pada), a r je udaljenost tijela od središta planeta. Gravitacijska sila na tijelo je onda dana izrazom

$$F_g = mg = G\frac{mM}{r^2},$$

gdje je m masa tijela (a M Zemlje). Udaljenost od središta je kvadrirana, što znači da će sila na tijelo koje je dvostruko više udaljeno od središta planeta biti 4 puta manja (tijelo koje je 3 put više udaljeno od središta osjeća pak 9 puta manju silu itd.)

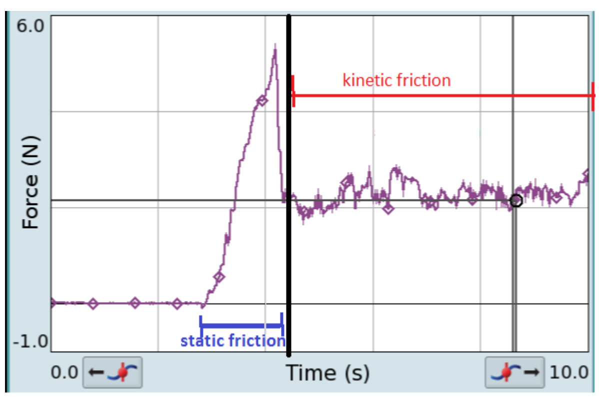
Za tijelo koje pada blizu površine Zemlje uvrštavamo $M = 5.972 \cdot 10^{24}\mathrm{kg}$ za masu Zemlje i $r = 6,371km$ (radijus Zemlje) za udaljenost tijela od središta Zemlje, što daje približno $g = 10\mathrm{m/s}$ (gravitacijska akceleracija na površini Zemlje).

14 Dodatak: Kritika udžbenika (za one koji žele znati više o trenju)

Prvo bi valjalo reći da razlikujemo dva tipa trenja: trenje dok tijelo miruje ili **statičko trenje** te trenje dok tijelo kliže (tj. giba se) ili **dinamičko trenje** (ili kinetičko trenje). Udžbenik (Otkrivamo fiziku, Fizika oko nas; školska knjiga) ova dva tipa trenja ne razlikuje nego govori uglavnom o dinamičkom trenju te ga zove "trenje klizanja", no onda u zadatcima i primjerima koristi i statičko trenje. Primjerice, trenje između automobilskih guma i ceste je statičko, a ne dinamičko ukoliko guma ne proklizuje (tj. ne vrti se u mjestu pa nemamo klizanje jedne površine niz drugu)[6].

Dok tijelo miruje, djeluje statičko trenje. Ako pokušamo gurnuti teret koji miruje, sila trenja će biti jednaka našoj sili kojom guramo (jer teret miruje) tek kada naša sila postane dovoljno velika će se teret pokrenuti. Ta maksimalna sila koja je potrebna da se tijelo pokrene je (maksimalna) statička sila trenja i ona je *veća* nego dinamička sila trenja, tj. sila kojom se tijelo odupire dok klizi, a mi ga vučemo (ili guramo).

Graf sile trenja koja djeluje na teretu kojeg iz stanja mirovanja pokušavamo gurnuti bi izgledao otprilike ovako:



Kako vrijeme prolazi (tj. kako po x osi idemo udesno) tako sve jače guramo teret. Jasno se vidi šiljak gdje sila postaje najjača potom sila opada jer se tijelo pokrenulo. Vidimo jasno da je sila potrebna za pokrenuti tijelo iz stanja mirovanja puno veća nego sila potrebna da se gibanje održi.

[6]Zapravo zbog deformacija same gume možemo imati efekt proklizivanja čak i ako se guma rotira, vidi (oko 8:10) `https://www.youtube.com/watch?v=nGhBHrr5CYQ`

Nadalje, udžbenik (Otkrivamo fiziku, Fizika oko nas; školska knjiga) razlikuje trenje klizanja od "trenja kotrljanja", što uopće nije trenje u smislu u kojem smo ga uveli na početku (zapinjanje mikroskopskih nepravilnosti). Svima je jasno da ako zakotrljamo kolo, ono će se zaustaviti nakon nekog vremena. To nije zato što površina kola zapinje o podlogu - to zapinjanje, tj. trenje jest prisutno i predstavlja razlog zašto se kolo ne rotira u mjestu nego se kotrlja po podu. Razlog zaustavljanja kola je činjenica da se kolo i tlo, kako se kolo rotira, elastično deformiraju (najviše pritom na mjestu kontakta). Te deformacije nisu savršeno elastične te polako oduzimaju energiju iz sustava (i time usporavaju kolo). U slučaju npr. čelik-čelik za vlakove na tračnicama ili guma-asfalt za auta na cesti dobar dio energije odlazi na zagrijavanje kola (ili podloge). U slučaju npr. kola na rahloj Zemlji ili pijesku je valjda jasno da imamo još veće gubitke jer se tlo očito neelastično deformira te ostaju tragovi (energija odlazi na deformiranje tla).

Dakle proces nije iste prirode kao statičko i dinamičko trenje i ne zaslužuje da ga zovemo istim imenom i analiziramo na isti način.

Jedino što je zajedničko objema fenomenima je da se mogu opisati istom jednostavnom relacijom: $F = \mu F_g$ jer su deformacije izraženije što je težina tijela veća. Ovdje je μ puno manji broj nego u slučaju (statičkog i dinamičkog trenja) jer će se, recimo, kolo puno duže kotrljati nego klizati (ako ga položimo na stranu i gurnemo).