7. razred - Rad i energija (dodatak)

Duje Jerić- Miloš

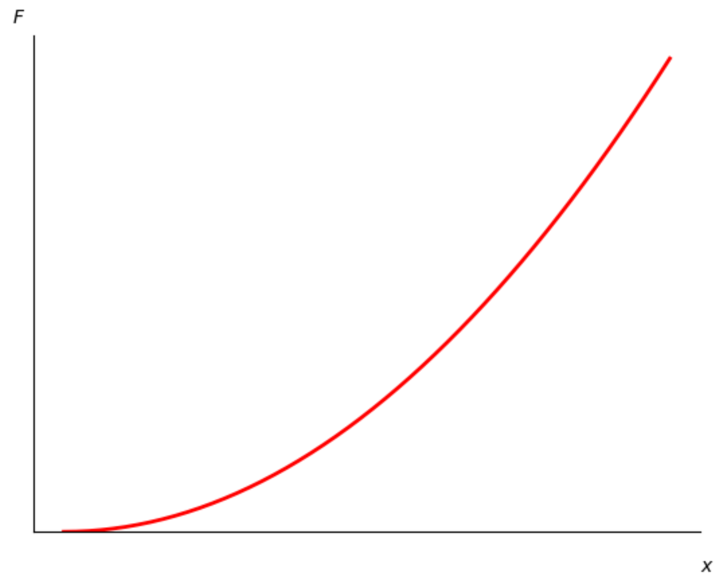
9. travnja 2025.

1 Kako izračunati rad kada se sila mijenja

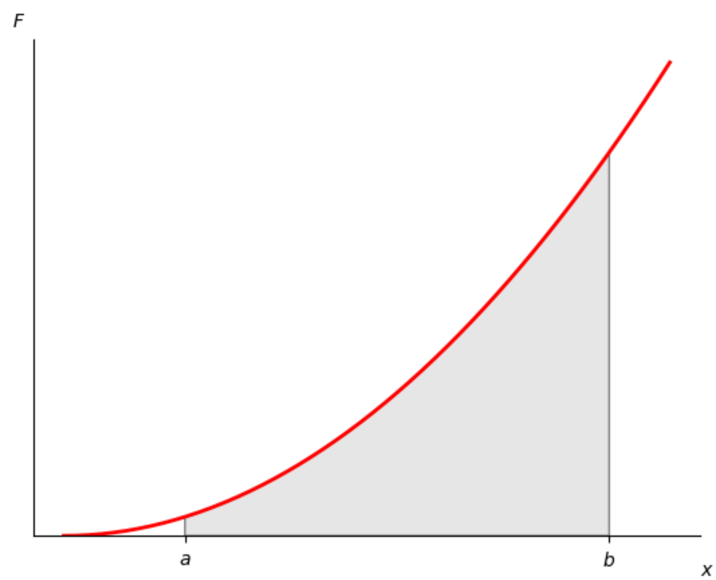
Kada je sila koja gura tijelo cijelo vrijeme stalnog iznosa, onda rad W možemo izračunati kao $W = F \cdot d$, gdje je F iznos sile, a d prijeđeni put. Kada se sila mijenja, ovo više nije valjana formula. Primjerice, rastezanjem opruge sila se sve više i više povećava. U tom slučaju moramo put isjeći na sitne komadiće na kojima se sila ne mijenja znatno. Recimo da smo put isjekli na milijun jednakih komadića $\delta x = \frac{d}{1\ 000\ 000}$. Ukoliko nismo zadovoljni, tj. sila se još uvijek nezanemarivo mijenja na nekom komadiću, slobodno možemo podijeliti na još manje komadiće. Općenito, podijelimo na N komadića $\delta x = \frac{d}{N}$ za neki veliki broj N. Sada je na svakom komadiću sila približno konstantna pa je rad na prvom komadiću $W_1 = F_1 \delta x$, na drugom $W_2 = F_2 \delta x$,... na posljednjem $W_N = F_N \delta x$. Ukupni rad je onda samo zbroj:

$$W = W_1 + W_2 + ...W_N = F_1 \delta x + F_2 \delta x + ...F_N \delta x.$$

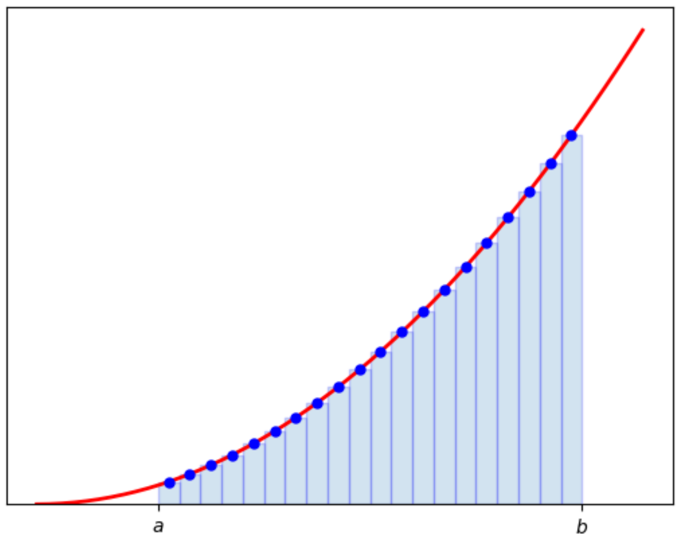
Postoji lijepi način da grafički interpretiramo ovo. Recimo da nam se duž neke ravne putanje sila mijenja, onda možemo promotriti ovisnost sile F o položaju x:



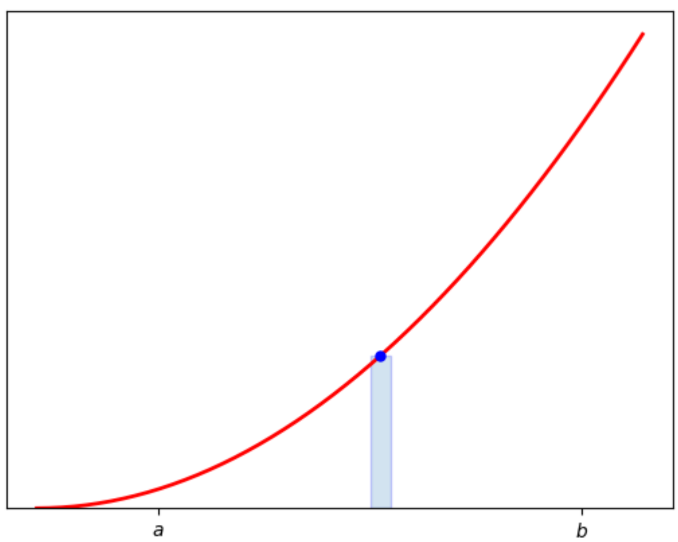
Tvrdimo da je rad koji će ta sila obaviti ako tijelo pomaknemo s udaljenosti $x = a$ na udaljenost $x = b$ jednak površini ispod grafa između a i b:



Naime, površinu približno možemo izračunati tako je podijelimo na uske pravokutne trakice:



Pravokutnici su zgodni jer njihovu površinu možemo izračunati samo kao umnožak širine i visine. Ovo nije baš skroz jednako površini ispod grafa, ali što su trakice uže, to će zbroj površina svih pravokutnika biti bliži površini ispod grafa. Promotrimo površinu jedne trakice:



Recimo da smo put od a do b $d = b - a$ podijelili na N jednakih komada $\delta x = \frac{d}{N}$. U tom slučaju je širina svake trakice jednaka δx, a visina je jednaka iznosu sile na tom sitnom putu. Dakle, površina tog malog pravokutnika je rad $W = F \cdot \delta x$ koji sila obavi na sitnom putu δx. Kada zbrojimo površine svih trakica dobijemo ukupni rad.

2 Elastična potencijalna energija

Za primjer možemo izračunati rad elastične sile kada oprugu iz labavog (nerastegnutog) stanja rastegnemo do nekog produljenja x. Ovo je po definiciji *elastična potencijalna energija* koju smo rastezanjem pohranili u opruzi. U tom slučaju podijelimo ukupni pomak x na velik broj sitnih komadića $\delta x = \frac{x}{N}$. Elastična sila ima izraz $F = k\Delta l$, gdje je Δl produljenje opruge. U našem slučaju na prvom komadiću opruga se produljila za δx pa možemo uzeti da je sila na čitavom prvom komadiću $F_1 = k \cdot \delta x$ (pretpostavljamo da se sila unutar svakog komadića zanemarivo malo mijenja). Na drugom se komadiću opruga produljila za još δx pa je ukupno produljenje $2\delta x$. Sila se stoga povećala na $F_2 = k \cdot 2\delta x$. Naravno, na trećem komadiću se opruga produljila za ukupno $3\delta x$, a sila porasla na $F_3 = k \cdot 3\delta x$. Na posljednjem komadiću je produljenje opruge $x = N\delta x$, a sila je porasla na $F_N = k \cdot N\delta x = kx$. Ukupni rad je stoga:

$$W = F_1\delta x + F_2\delta x + ...F_N\delta x = (k \cdot \delta x)\delta x + (k \cdot 2\delta x)\delta x + ...(k \cdot N\delta x)\delta x$$

$$W = k \cdot (\delta x)^2 + k \cdot 2(\delta x)^2 + ...k \cdot N(\delta x)^2 = k(\delta x)^2 + 2k(\delta x)^2 + ... + Nk(\delta x)^2$$

Ovdje zbrajamo jedan $k(\delta x)^2$ s dva $k(\delta x)^2$ pa opet s tri $k(\delta x)^2$, itd. Dakle, tih $k(\delta x)^2$ imamo ukupno $1 + 2 + 3... + N$, odnosno:

$$W = (1 + 2 + 3 + ... + N) \cdot k(\delta x)^2$$

Zbroj prvih 100 brojeva je 5050, ali kako doći do ovog rezultata na razuman način (bez da zbrajamo $1 + 2 = 3$, $3 + 3 = 6$, $6 + 4 = 10$, itd.)? Naime, $S = 1+2+3+...+100$ možemo zapisati i kao $S = 100+99+98+...+2+1$, onda je $S + S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (100 + 1)$. Ali ovo je samo $2S = 101 + 101 + ... + 101$ (i tako 100 puta), odnosno $2S = 100 \cdot 101$

pa $S = \frac{100 \cdot 101}{2}$. Općenito, umjesto 100 bismo imali neki proizvoljni broj N, što bi dalo: $1 + 2 + 3 ... + N = \frac{N(N+1)}{2}$.

Dakle

$$W = (1 + 2 + 3 + ... + N) \cdot k(\delta x)^2 = \frac{N(N+1)}{2} \cdot k(\delta x)^2$$

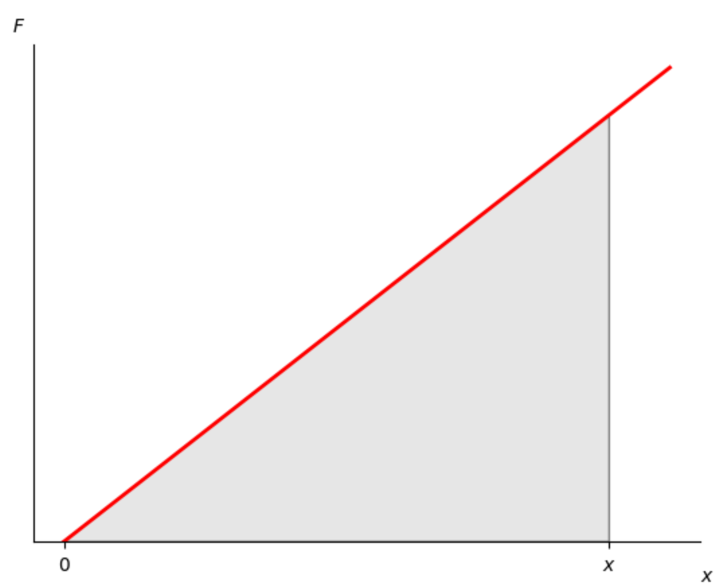
Kako je $\delta x = \frac{x}{N}$, imamo $(\delta x)^2 = \delta x \cdot \delta x = \frac{x}{N} \cdot \frac{x}{N} = \frac{x^2}{N \cdot N}$:

$$W = \frac{N(N+1)}{2} \cdot k \frac{x^2}{N \cdot N} = \frac{N+1}{N} \cdot \frac{1}{2} k x^2$$

Primijetimo da za veliki N imamo približno $\frac{N+1}{N} = 1$, a što je N veći, to je $\frac{N+1}{N}$ bliži broju 1 (promotrimo npr. $\frac{1\ 001}{1\ 000}$ i $\frac{1\ 000\ 001}{1\ 000\ 000}$). Dakle, pod pretpostavkom da smo put isjekli na dovoljno sitne komadiće, tj. da je broj komadića N dovoljno velik, možemo reći samo:

$$W = \frac{N+1}{N} \cdot \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k x^2.$$

U ovom slučaju smo rad mogli izračunati i grafički. Sila F o putu x ovisi linearno $F = kx$, a rad je površina ispod grafa:



Vidimo da zbog linearne ovisnosti sile o putu imamo vrlo jednostavnu situaciju. Zapravo, samo tražimo površinu pravokutnog trokuta, što je $\frac{\text{visina}\cdot\text{širina}}{2}$. Konkretno, širina je x (produljenje opruge kada je ona u potpunosti rastegnuta), a visina je vrijednost sile kada je opruga u potpunosti rastegnuta, tj. $F = kx$. Rad je stoga $W = \frac{kx\cdot x}{2} = \frac{1}{2}kx^2$

3 Kinetička energija

Brzina mjeri koliko će se tijelo pomaknuti u jedinici vremena (u jednom satu, u jednoj sekundi, itd.). Primjerice, ako se tijelo giba 100km/h, to znači da će se u jednom satu pomaknuti 100km. Ako se pak giba 20m/s, onda će se svake sekunde pomaknuti za 20m. Dakle, tijelo koje se giba 100km/h će se nakon 2h pomaknuti 200km, a nakon tri sata 300km. Općenito, ako se tijelo giba stalnom brzinom v, onda će se nakon vremena t pomaknuti za $x = vt$. Primijetimo da ovo vrijedi samo onda kada je brzina konstantna. Primjerice, ako se prvi sat tijelo giba 100km/h, a drugi sat 50km/h, a treći 20km/h onda nakon se nakon jednog sata nalazi na 100km, nakon dva na 150, a nakon tri na 170km. Gornja formula onda ne vrijedi, tj. vrijedi samo na svakoj maloj sekciji na kojoj je brzina konstantna.

Akceleracija (ubrzanje) nam pak govori koliko će se promijeniti brzina tijela u jedinici vremena. Primjerice, ako je ubrzanje tijela $20\frac{\text{km/h}}{\text{s}}$, to znači da će se brzina svake sekunde promijeniti za 20km/h. Ako je ubrzanje $10\frac{\text{m/s}}{\text{s}}$, onda će se brzina svake sekunde promijeniti za 10m/s. Dakle, tijelo koje ubrzava $20\frac{\text{km/h}}{\text{s}}$ će nakon dvije sekunde povećati brzinu za 40km/h, nakon tri sekunde 60km/h. Općenito, ako tijelo ubrzava stalnom akceleracijom a, onda će mu se nakon t vremena brzina promijeniti za $\Delta v = at$. Ovo opet vrijedi samo onda kada je akceleracija konstantna.

Ako na tijelo djeluje ukupna sila F, onda će tijelo (po 2. Newtonovom zakonu) dobiti akceleraciju $a = \frac{F}{m}$, tj. ukupna sila na tijelo je dana izrazom $F = ma$.

Sada pretpostavimo da neko tijelo cijelo vrijeme ubrzava ista sila, tj. da tijelo ima cijelo vrijeme istu akceleraciju. Pretpostavimo dalje da tijelo kreće iz stanja mirovanja i ubrzavamo ga do brzine v. Želimo izračunati rad koji će ta sila obaviti. To je po definiciji *kinetička energija* tijela.

Kako djeluje konstantna sila, rad je $W = F \cdot d$. Da bismo ovo izračunali moramo znati d, odnosno moramo znati koliki će put tijelo prijeći dok dođe do brzine v. Neka je trebalo t vremena da dođemo do brzine v (dakle $v = at$), onda moramo izračunati prijeđeni put nakon vremena t.

Ideja je isjeckati gibanje ne na male jednake prostorne komadiće (kao za oprugu), već na male jednake vremenske komadiće. U tom slučaju na svakom komadiću možemo izračunati mali prostorni pomak pomoću formule za brzinu (jer je brzina približno konstantna). Konačno, zbrajanjem svih malih komadića dobijemo ukupni prijeđeni put.

Dakle, isjeckajmo ukupno vrijeme t na N malih vremenskih komadića $\delta t = \frac{t}{N}$. Na prvom komadiću se brzina promijeni s 0 (tijelo miruje) na $a\delta t$. Kako se na svakom komadiću brzina mijenja zanemarivo malo, pomak na prvom vremenskom komadiću možemo izračunati tako da uzmemo da je brzina na čitavom prvom komadiću $v_1 = a\delta t$ pa je pomak $\delta x_1 = v_1 \delta t = (a\delta t)\delta t$. Na sljedećem komadiću se brzina povećala za još $a\delta t$, stoga možemo uzeti da je na čitavom drugom komadiću brzina $v_2 = 2a\delta t$. Dakle, pomak je $\delta x_2 = (2a\delta t) \cdot \delta t = 2a(\delta t)^2$. Sljedeći pomak je naravno samo $\delta x_3 = 3a(\delta t)^2$, a posljednji $\delta x_N = Na(\delta t)^2$.

Ukupni pomak je onda

$$d = \delta x_1 + \delta x_2 + \delta x_3 + ... + \delta x_N = a(\delta t)^2 + 2a(\delta t)^2 + ... + Na(\delta t)^2.$$

Ovo je samo $d = (1 + 2 + ... + N)a(\delta t)^2$, a kako je $1 + 2 + ... + N = \frac{N(N+1)}{2}$, imamo

$$d = \frac{N(N+1)}{2} a(\delta t)^2.$$

Kako je $\delta t = \frac{t}{N}$, vrijedi $(\delta t)^2 = \frac{t}{N} \cdot \frac{t}{N} = \frac{t^2}{N \cdot N}$. Dakle,

$$d = \frac{N(N+1)}{2} \cdot a \frac{t^2}{N \cdot N} = \frac{N+1}{N} \cdot \frac{1}{2} at^2.$$

Kako za velike N imamo približno $\frac{N+1}{N} = 1$, vidimo da (ukoliko smo gibanje isjeckali na dovoljno sitne vremenske komadiće):

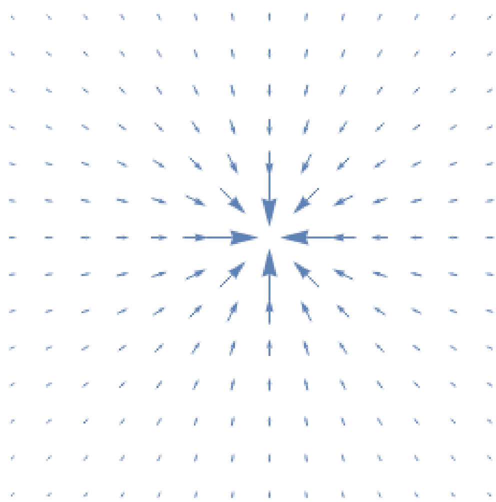
$$d = \frac{1}{2} at^2.$$

Rad je stoga $W = F \cdot d = ma \cdot \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} ma^2 t^2 = \frac{1}{2} m(at)^2$. Kako je konačna brzina samo $v = at$, slijedi da

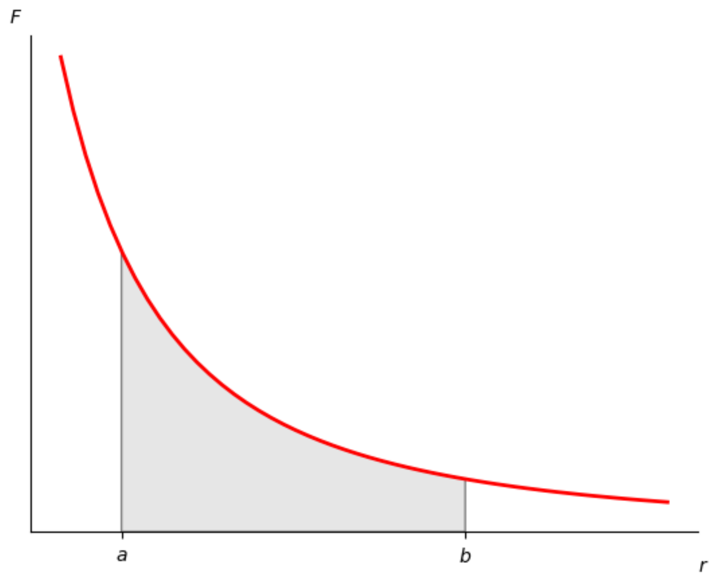
$$W = \frac{1}{2} mv^2.$$

4 Gravitacijska potencijalna energija (dodatak)

Tijela gravitacijski međudjeluju po Newtonovom zakonu gravitacije $F = G\frac{mM}{r^2}$. Ovdje je m masa jednog tijela, M masa drugog, $G = 6.67408 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kgs}^2}$ je obična konstanta, a r je udaljenost jednog tijela od drugog (uzimamo da su tijela točkaste mase). Ova sila gleda prema drugom tijelu duž pravca koji veže dva tijela. Zgodno je postaviti jedno tijelo u ishodište $(x, y) = (0, 0)$, a onda na različitim lokacijama ispitati jačinu i smjer sile na drugo tijelo. U tom slučaju dobijemo sljedeću ovisnost:



Sila, vidimo, gleda radijalno prema unutra (prema ishodištu). Dakle, kada računamo rad (po proizvoljnoj krivulji), na rezultat će utjecati samo radijalni pomaci (oni koji idu po pravcu koji veže dva tijela). Ovo znači da će rad ovisiti samo o početnoj i konačnoj radijalnoj udaljenosti (r) pa imamo konzervativnu silu. Izraz za potencijalnu energiju možemo pronaći tako tijelo mase m radijalno po ravnoj liniji sa neke početne udaljenosti $r = a$ pomaknemo na udaljenost $r = b$.



Pritom treba imati na umu da će rad gravitacijske sile biti negativan jer se udaljavamo od drugog tijela (tj. idemo radijalno prema vani) jer sila gleda u suprotnom smjeru (radijalno prema unutra). Isjeckajmo ukupnu udaljenost $d = b - a$ na N sitnih komadića $\epsilon = \frac{d}{N}$. Rad je sada

$$W = -(F_1\epsilon + F_2\epsilon + ... + F_N\epsilon) = -(\frac{GmM}{r_1^2}\epsilon + \frac{GmM}{r_2^2}\epsilon + ... + \frac{GmM}{r_N^2}\epsilon)$$

Dakle izdvojimo li zajednički faktor $GmM\epsilon$, rad postane:

$$W = -GmM\epsilon(\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + ... + \frac{1}{r_N^2})$$

Ovo se svede na puno ljepši oblik ako primijetimo da $\frac{1}{r^2}$ možemo zapisati kao razliku, tj. promjenu neke veličine Q. Naime, ukoliko zaista imamo da $\frac{1}{r^2} = \Delta Q = Q_{r+\epsilon} - Q_r$, tj. $\frac{1}{r_1^2} = Q_{r_1+\epsilon} - Q_{r_1} = Q_{r_2} - Q_{r_1}$ (promjena veličine Q od r_1 do r_2) te također $\frac{1}{r_2^2} = Q_{r_2+\epsilon} - Q_{r_2} = Q_{r_3} - Q_{r_2}$ (promjena veličine Q od r_2 do r_3), itd. Onda je zbroj svih $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + ... + \frac{1}{r_N^2}$ samo ukupna promjena $Q_b - Q_a$ (promjena veličine Q od $r = a$ do $r = b$).

Sada promotrimo $\Delta(\frac{1}{r}) = \frac{1}{r+\epsilon} - \frac{1}{r} = -\frac{\epsilon}{r(r+\epsilon)}$. Znači, $\frac{\Delta(\frac{1}{r})}{\epsilon} = -\frac{1}{r(r+\epsilon)}$, a za male ϵ ovo postane $\frac{\Delta(\frac{1}{r})}{\epsilon} = -\frac{1}{r^2}$.

Dakle, rad je sada:

$$W = -GmM\epsilon(\frac{-\Delta(\frac{1}{r_1})}{\epsilon} + \frac{-\Delta(\frac{1}{r_2})}{\epsilon} + ... + \frac{-\Delta(\frac{1}{r_N})}{\epsilon})$$

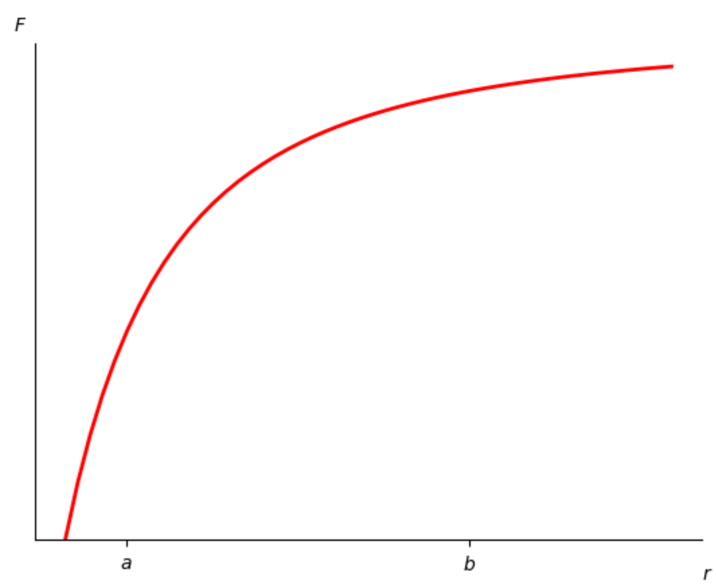
Odnosno:

$$W = GmM(\Delta(\frac{1}{r_1}) + \Delta(\frac{1}{r_2}) + ... + \Delta(\frac{1}{r_N}))$$

Kako zbrajamo male promjene u vrijednosti $\frac{1}{r}$, zagrada postane samo ukupna promjena u vrijednosti $\frac{1}{r}$, odnosno $\frac{1}{b} - \frac{1}{a}$:

$$W = GmM(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}) = \frac{GmM}{b} - \frac{GmM}{a}$$

Gravitacijska potencijalna energija na udaljenosti $r = a$ je rad koji gravitacijska sila obavi kada masu m pomaknemo u beskonačnost ($b = \infty$), što daje $W = -\frac{GmM}{a}$. Dakle, potencijalna energija U o udaljenosti r između dva tijela ovisi kao $U(r) = -\frac{GmM}{r}$. Vidimo da je negativna i raste (bliža je nuli) kako se dva tijela udaljavaju:



Rad $W = \frac{GmM}{b} - \frac{GmM}{a}$ je naravno samo promjena potencijalne energije $W = U(a) - U(b)$.

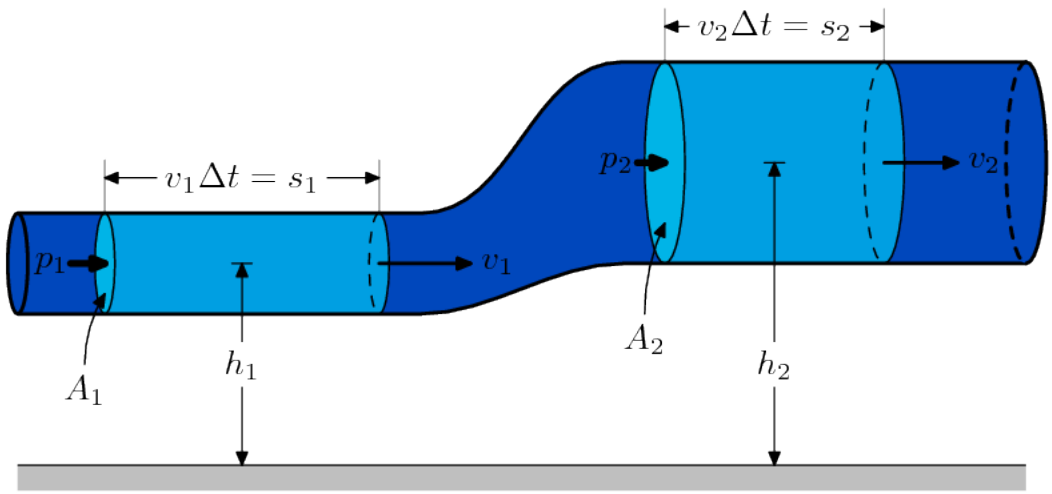
Zakon očuvanja energije nam sada daje $KE + PE = E = const$, odnosno $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = E = const$. Ovo znači da će satelit duž svoje orbitalne putanje imati veću brzinu kada je blizu planeta nego kada je daleko (daleko od planeta je PE velika pa KE, tj. brzina mora biti malena). Nadalje, poznavajući udaljenost i brzinu satelita u jednom trenutku možemo odrediti njegovu ukupnu energiju E. Ako pak poznajemo ukupnu energiju satelita, onda nam zakon očuvanja energije omogućuje da na bilo kojem položaju (bilo kojoj udaljenosti r od planeta) odredimo brzinu v satelita.

Ako satelit ispalimo dovoljnom brzinom sa Zemlje, on će biti u stanju pobjeći u beskonačnost, odnosno putovat će sve dalje i dalje te ga gravitacijsko privlačenje Zemlje neće biti u stanju vratiti natrag. Može se dogoditi da mu damo višak energije, što znači da će tijelo u beskonačnost doći s nekom kinetičkom energijom, odnosno da će jako daleko od Zemlje imati neku brzinu koju mu Zemlja svojim privlačenjem nije uspjela ubiti. **Druga kozmička brzina** (eng. *escape velocity*) je brzina koju treba dati tijelu da u beskonačnosti nema nikakav višak energije, odnosno da su mu u beskonačnosti i potencijalna i kinetička energija 0. Očuvanje energija onda daje $\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = 0$, odnosno $v^2 = \frac{2GM}{r}$.

Čisto informativno, **prva kozmička brzina** bi bila brzina koju je potrebno dati tijelu da bi sa površine Zemlje ušlo u (vrlo nisku) kružnu orbitu oko Zemlje.

5 Bernoullijev zakon

U dinamici fluida zakon očuvanja energije dovodi do bitnog principa - Bernoullijevog zakona. Promatramo tok *nekompresibilnog* fluida (volumen je neizmjenjen).



Komad fluida se nalazi između stranica A_1 i A_2 (pazi; na slici je taj komad obojan napola svijetlom i napola tamnom bojom). Taj se komad pomakne nizvodno (na slici udesno). Na prvi dio komada (kod A_1) djeluje tlak p_1, a na drugi dio kod A_2) djeluje tlak p_2; taj tlak gura komad nizvodno. Prvi dio (gdje je tok fluida uži) se pomakne za dužinu s_1, a drugi (gdje je tok fluida širi) za dužinu s_2.

Kako fluid nije kompresibilan, tako volumen $\Delta V = A_1 s_1$ koji je istisnut iz prvog dijela (lijevo svijetlo obojano područje) mora biti jednak volumenu koji ulazi u drugi dio $\Delta V = A_2 s_2$ (desno svijetlo obojano područje), dakle $A_1 s_1 = A_2 s_2$. Posljedica ovoga je da u jedinici vremena imamo $A_1 \frac{s_1}{t} = A_2 \frac{s_2}{t}$, odnosno $A_1 v_1 = A_2 v_2$, gdje su v_1 i v_2 brzine fluida na odgovarajućim mjestima. Ovo je razlog zašto, kada pritisnemo (suzimo) crijevo kroz koje voda protječe, mlaz vode ubrza i voda se može dalje dobaciti (jer u jedinici vremena mora izaći ista količina vode, a poprečni presjek je manji).

Sada je ukupni rad tlaka na komadić fluida jednak:

$$W_p = F_1 s_1 - F_2 s_2 = p_1 A_1 s_1 - p_2 A_2 s_2 = p_1 \Delta V - p_2 \Delta V$$

Na prvom dijelu komadića fluid se giba brzinom v_1 i nalazi na visini h_1, a na drugom brzinom v_2 i nalazi se na visini h_2 kao na slici. Konačni ishod gibanja fluida je da se volumen fluida ΔV (tj. masa $m = \rho \Delta V$) prebacio s visine h_1 na visinu h_2, stoga je rad gravitacijske sile na komad fluida:

$$W_g = mgh_1 - mgh_2 = \rho \Delta V g h_1 - \rho \Delta V h_2$$

Primijetit ćemo da ovaj rad mora biti negativan jer je rad gravitacijske sile (koja pokazuje prema dolje) u suprotnom smjeru od pomaka (prema gore)

Konačno, rad rezultantne sile ($W_p + W_g$) jednak je promjeni kinetičke energije. Kako smo prebacili ΔV fluida iz prve regiju (gdje je brzina toka v_1) u drugu regiju (gdje je brzina toka v_2), promjena kinetičke energije komada fluida je:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\Delta V v_1^2$$

Dakle, imamo:

$$p_1\Delta V - p_2\Delta V + \rho\Delta V g h_1 - \rho\Delta V g h_2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V v_2^2 - \frac{1}{2}\rho\Delta V v_1^2$$

Prebacimo li početne vrijednosti (1) na lijevu, a konačne vrijednosti (2) na desnu stranu, dobijemo:

$$p_1\Delta V + \rho\Delta V g h_1 + \frac{1}{2}\rho\Delta V v_1^2 = p_2\Delta V + \rho\Delta V g h_2 + \frac{1}{2}\rho\Delta V v_2^2$$

Podijelimo li s ΔV, dobijemo:

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Dakle vidimo da imamo očuvanu veličinu:

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}$$

p je statički tlak fluida, $\rho g h$ je hidrostatički tlak koji djeluje zbog težine fluida, a $\frac{1}{2}\rho v^2$ je dinamički tlak (zbog gibanja fluida). Bernoullijev princip onda samo kaže da je ukupni tlak očuvan. Ako nemamo promjene visine (promjena gravitacijske potencijalne energije je 0), onda je očuvana sljedeća veličina:

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{const}$$

Bernoullijev princip pretpostavlja da:

1. Fluid se giba ”lijepo”. Ovo znači da na danoj lokaciji je brzina fluida stalna (eng. *steady flow*). Ako pratimo vektore brzine fluida, dobijemo liniju - tzv. *strujnicu* (eng. *streamline*), a ukoliko pratimo snop takvih linija, dobijemo tubu (cijev). Za stalni tok se materija fizički giba duž strujnica. Zato smo mogli provesti raniju analizu.

2. Okolni fluid ne djeluje na fluid u cijevi, tj. isključili smo viskoznost (trenje između susjednih slojeva fluida).

3. Fluid je nekompresibilan (ovo je možda OK pretpostavka za tekućine, ali plinovi nipošto nisu nekompresibilni)

Princip ne mora vrijediti kada se brzina fluida na fiksnim točkama mijenja (*unsteady flow*) ili kada imamo kompresibilni fluid ili kada uključimo viskoznost u priču.

Matematički, princip vrijedi za nekompresibilni fluid koji se giba ”lijepo” i opisan je Eulerovom jednadžbom (koja isključuje viskoznost). Stvarni fluidi su puno bolje opisani kompliciranijom Navier-Stokesovom jednadžbom (koja uključuje viskoznost) i stvarni fluidi ne moraju teći ”lijepo” (možemo imati turbulentno gibanje i sl.).