Algebra za osnovnoškolsku fiziku

Duje Jerić- Miloš

26. rujna 2024.

1 O algebri

Do sada smo valjda naučili raditi s brojevima. Broj 5 označava 5 "nečega". To može biti 5 jabuka, 5 auta, 5 grla stoke, 5 eura... konkretno o čemu je riječ nije bitno. Brojevi stoga *apstrahiraju*[1] pojam "količine" - bitno je samo koliko "nečega" imamo, a ne o čemu je riječ. Tu količinu označavamo određenim simbolima. U slučaju broja "pet" to je 5 (arapska znamenka), ali kroz povijest i u različitim kulturama su korišteni i drugi simboli, npr. V (Rim), 五 (Kina), itd.

Algebra pokušava odrediti svojstva koja brojevi zadovoljavaju. Nju stoga često ne zanima konkretno o kojem je broju riječ, već samo koja svojstva taj broj zadovoljava. Algebra apstrahira sam broj, tj. "konkretnu količinu" (nečeg) i govori o "nekoj količini" (nečeg). Dakle, nije bitno je li 5 nečega ili 6 nečega, bitno je samo da je riječ o nekom broju nečega. Proizvoljni broj ne možemo stoga označiti njegovim "imenom" (arapskim znamenkama), već za to koristimo neke druge simbole, što su najčešće slova latinične (a,b,c...), ali ponekad i grčke abecede (α, β, γ...).

Tako, recimo, činjenicu da "nije bitan redoslijed zbrajanja" možemo iskazati davanjem nekoliko primjera, npr. $5 + 3 = 3 + 5$ ili $4 + 6 = 6 + 4$ ili $2 + 3 = 3 + 2$, itd. Ipak, u ovom slučaju smo tvrdnju iskazali samo za neke konkretne slučajeve, tj. parove brojeva. Bolje bi bilo reći: "za svaka dva broja a i b vrijedi $a + b = b + a$". Ovo obuhvaća sve slučajeve.

[1] Apstrahiranje ugrubo možemo definirati kao zanemarivanje detalja (zanemarivanjem detalja nešto činimo apstraktnijim - fokusiramo se samo na najnužnija svojstva). Suprotno značenje bi bilo *konkretiziranje*, odnosno dodavanje detalja (jer dodavanjem detalja nešto činimo konkretnijim).

Nadalje, može se dogoditi da broj ne poznajemo direktno, već samo po nekoj relaciji koju on zadovoljava. Primjerice, imamo određene novce (ali nismo točno izbrojali koliko). Kada platimo 15 eura ostane nam 30 eura. Sada možemo početnu svotu novca označiti sa, recimo, x. Relacija koju x zadovoljava je $x - 15 = 30$. Naravno, početna svota novca je 45 (jer $45 - 15 = 30$), što možemo zapisati kao $x = 45$. Taj nepoznati broj (koji smo označili slovom, a koji zadovoljava neku relaciju) često zovemo *nepoznanica*. Ponekad neku relaciju zadovoljava više brojeva. Recimo, $(x-1)(x-2) = 0$ će vrijediti kada $x = 1$ (onda je $(1-1)\cdot(1-2) = 0$) ili kada $x = 2$ (onda je $(2-1)\cdot(2-2) = 0$).

Ovdje smo koristili simbol "=" (jednako) pa bi bilo dobro objasniti i što on znači. Vrlo jednostavno, = znači da su brojevi sa obje strane jednaki. Dakle, sljedeće tvrdnje su istinite $5 = 5$ ili $2 + 3 = 5$ ili $10 - 2 = 8$, itd. Sljedeće tvrdnje nisu istinite: $6 = 5$ ili $2 + 2 = 5$ ili $3 + 4 = 10$, itd. Ovdje napomenimo da je 2+3 isto broj - broj koji dobijemo kada izvrvšimo operaciju zbrajanja.

Ako $x = 5$, to znači da x sada predstavlja broj 5. Gdje god u nastavku vidimo broj x možemo ga zamijeniti s 5, a gdje god vidimo 5 možemo ga zamijeniti brojem x. Naravno, nebitno je pišemo li $x = 5$ ili $5 = x$ u oba slučaja tvrdimo isto: "x i 5 su jedno te isti broj", tj. "predstavljaju jedno te istu količinu". Naravno, 5 je "ime" te količine, a x je samo privremena oznaka koju smo koristili jer možda u početku nismo bili sigurni točno o kojoj količini je riječ.

2 Manipuliranje algebarskim izrazima

Kada imamo neku jednakost, npr. $5 = 5$, onda nam je dozvoljeno na obje strane jednakosti izvršiti istu operaciju. Recimo, ako na obje strane jednakosti dodamo isti broj, jednakost će još uvijek vrijediti: $5 + 2 = 5 + 2$. Mogli smo imati i izraz oblika $2 + 3 = 5$, onda dodavanjem 2 na obje strane dobijemo $2 + 3 + 2 = 5 + 2$.

Isto tako, možemo i množiti obje strane istim brojem: ako $5 = 5$, onda i $5 \cdot 2 = 5 \cdot 2$ (ili ako $2 + 3 = 5$, onda $(2 + 3) \cdot 2 = 5 \cdot 2$). Naravno, možemo i oduzeti isti broj ili podijeliti istim brojem obje strane, jednakost će vrijediti.

Ovo vrijedi i za mnoge druge operacije - dozvoljeno je korijenovati obje strane, dignuti obje strane na neki isti eksponent, logaritmirati obje strane, uzeti sinus, kosinus, tangens od obje strane, primijeniti hiperbolne funkcije, eliptičke funkcije, Riemannov zeta ili bilo koju drugu funkciju [2]. Ovo vrijedi ponoviti jer predstavlja centralnu ideju ovih bilješki, a možda i osnovnoškolske algebre uopće:

> Ako vrijedi neka jednakost, uvijek je dozvoljeno izvršiti istu operaciju na obje strane te jednakosti. Jednakost u tom slučaju vrijedi i za rezultat.

Jednakost možemo shvatiti kao uravnoteženu vagu. Ako napravimo istu stvar na obje strane vage (npr. dodamo isti uteg ili poduplamo postojeće utege, itd.) - ona će ostati u ravnoteži.

Ovaj zaključak postane puno korisniji kada ga koristimo s nepoznanicama. Neka vrijedi, kao prije, $x - 15 = 30$, tj. početna svota novca umanjena za 15 je 30 eura. U tom slučaju, možemo obje strane uvećati za 15. Naime, kada "početnu svotu umanjenu za 15" uvećamo za 15 dobit ćemo samo "početnu svotu". Dakle, iz $x - 15 = 30$ slijedi da $x - 15 + 15 = 30 + 15$, tj. vrijedi da $x + 0 = 45$, odnosno $x = 45$.

Naravno, mogli smo obje strane uvećati za bilo koji drugi broj, npr. $x - 15 + 2 = 30 + 2$, što bi dalo $x - 13 = 32$. Ovo je točna tvrdnja, ali ne pomaže odrediti x. Najbolje što možemo napraviti je dodati 15, jer onda s lijeve strane ostane samo x (nepoznanica, tj. početna svota).

Objasnimo ovo sistematično. Primijetimo da su zbrajanje i oduzimanje inverzne operacije. Ovo znači da kada nekom broju (npr. 5) dodamo neki drugi broj (npr. 2) potom taj isti broj (2) oduzmemo, dobit ćemo ponovno prvi broj (5). Drugim riječima vrijedi, $5 + 2 - 2 = 5$. Zbrajanje i oduzimanje istog broja ne mijenja početnu vrijednost.

Promotrimo sada relaciju $x + 2 = 6$ - naravno jedini broj koji zadovoljava ovu relaciju je 4 (jer $4 + 2 = 6$). Ipak, čak i da nam to nije očito, možemo s obje strane oduzeti 2 (tako da na lijevoj strani ostane samo x). Ovo daje $x + 2 - 2 = 6 - 2$, tj. $x = 6 - 2$.

Da smo pak imali $x - 2 = 6$ (jedini broj x koji ovo zadovoljava je 8 jer $8 - 2 = 6$), onda bismo na obje strane dodali 2. Ovo daje $x - 2 + 2 = 6 + 2$, tj. $x = 6 + 2$.

Izvodimo sljedeći zaključak:

[2] Zapravo, sve navedene operacije su funkcije. Primjerice, "zbrajanje brojem 2" je funkcija koja svakom broju x pridruži broj $x+2$, korijenovanje pozitivnom broju x pridruži njegov korijen $\sqrt{x}$, itd. Općenito, princip sada kaže da, ako $x = y$, onda $f(x) = f(y)$.

> Kada na nepoznanicu dodajemo neki broj, taj broj možemo "prebaciti" na drugu stranu jednakosti, ali pritom on mijenja predznak. Drugim riječima, operacija $+$, prelazi u njoj inverznu operaciju $-$, odnosno operacija $-$ prelazi u $+$.

Dakle, $x + 2 = 6 \implies x = 6 - 2$, odnosno $x - 2 = 6 \implies x = 6 + 2$.

Množenje i dijeljenje su isto inverzne operacije. Ovo znači kada neki broj (npr. 5) pomnožimo nekim brojem (npr. 2) i opet podijelimo istim brojem (2), rezultat je prvi broj (5), tj. $5 \cdot 2 \div 2 = 5$, što možemo još zapisati i kao $\frac{5 \cdot 2}{2} = 5$.

Pretpostavimo da sada nepoznanicu množimo nekim brojem, npr. $2 \cdot x = 6$. U ovom slučaju, možemo podijeliti sa 2 obje strane jednakosti. Dobijemo $\frac{x \cdot 2}{2} = \frac{6}{2}$, tj. $x = \frac{6}{2}$. Naravno, $\frac{6}{2} = 3$ je ujedno i rezultat koji očekujemo jer znamo da ako dva x-a koštaju 6, onda jedan košta 3.

Obratno, da smo imali $\frac{x}{2} = 6$, možemo pomnožiti obje strane s 2. Ovo daje $2 \cdot \frac{x}{2} = 2 \cdot 6$, tj. $x = 2 \cdot 6$. Naravno, rezultat je 12 jer ako pola x-a košta 6, onda cijeli x košta 12. Izvodimo sljedeći zaključak:

> Kada nepoznanicu množimo nekim brojem, taj broj možemo "prebaciti" na drugu stranu jednakosti, ali pritom drugu stranu jednakosti dijelimo istim brojem. Drugim riječima, operacija množenja $\cdot$ prelazi u njoj inverznu operaciju dijeljenja $\div$, odnosno operacija dijeljenja $\div$ prelazi u njoj inverznu operaciju množenja $\cdot$. [3]

Dakle, $2x = 6 \implies x = \frac{6}{2}$, odnosno $\frac{x}{2} = 6 \implies x = 6 \cdot 2$.

Ovaj posljednji zaključak je posebno bitan za osnovnoškolsku fiziku. Naime, većina formula s kojima ćemo se susresti su oblika $a = b \cdot c$ ili $a = \frac{b}{c}$ te je potrebno iz formule za a izvesti formulu za b ili c. Veze između veličina a, b i c koje su ovakvog oblika zovemo *linearne relacije*.

3 Razlomci i decimalni brojevi

Razlomci predstavljaju udjele. Primjerice ako jedno cijelo (npr. tortu ili pizzu) podijelimo na 5 jednakih dijelova, reći ćemo da jedan dio predstavlja

[3]Primijetimo da je zaključak gotovo identičan onome za zbrajanje i oduzimanje. Ovo nije slučajnost te se zaključak može iskazati potpuno općenito, ako je operacija invertibilna. Naime, ako za neku funkciju f imamo $f(x) = y$, onda pronađemo njoj inverznu funkciju f^{-1} pa će vrijediti $x = f^{-1}(y)$.

$\frac{1}{5}$ (jednu petinu). Ako uzmemo dva dijela, onda su to $\frac{2}{5}$ (dvije petine). 5 zovemo nazivnik (jer on daje ime "petina"), a 2 brojnik (jer broji koliko petina imamo).

Naravno, pet petina tvori jedno cijelo $\frac{5}{5} = 1$. Isto tako deset petina bi tvorilo dva cijela $\frac{10}{5} = 2$, itd.

Ako 4 torte želimo podijeliti na 5 jednakih dijelova, možemo svaku tortu podijeliti na 5 dijelova i od svake uzeti po jedan komad. Dakle, imat ćemo $\frac{4}{5}$. Zaključujemo da petinu broja 4 (4 podijeljen na 5 jednakih dijelova) upravo predstavljaju četiri petine.

Što se zbrajanja tiče, očito imamo imamo, $\frac{2}{5} + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$ (kada dodamo na dvije petine još četiri petine imamo ukupno šest petina). Kako je $\frac{6}{5}$ veće od jednog cijelog ($\frac{5}{5}$), ovo još možemo pisati i kao $\frac{5}{5} + \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{5}$, tj. jedno cijelo i jedna petina. Naravno, $\frac{17}{5}$ bi bilo tri cijela i dvije petine (5 stane u 17 tri puta, ali ostatak je 2), tj. $\frac{15}{5} + \frac{2}{5} = 3 + \frac{2}{5}$.

Primijetimo da ako imamo dvije petine $\frac{2}{5}$ i svaku od te dvije petine podijelimo napola, onda imamo ukupno četiri desetine (što predstavlja isti udio) $\frac{2}{5} = \frac{4}{10}$. Mogli smo podijeliti i na bilo koji drugi broj komadića, stoga općenito vrijedi $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = \frac{6}{15} = \frac{8}{20}$... Drugim riječima, $\frac{2}{5} = \frac{2\cdot2}{5\cdot2} = \frac{2\cdot3}{5\cdot3} = \frac{2\cdot4}{5\cdot4}$... Vidimo da možemo "pokratiti" isti broj ako se javlja i u brojniku i nazivniku.

Ako želimo zbrojiti npr. $\frac{2}{5} + \frac{3}{10}$, onda moramo iskazati oba udjela s istom veličinom komadića (petine su veće od desetina - to je kao da zbrajamo dolare i eure; moramo prvo prebaciti sve u istu valutu, odnosno oba razlomka svesti na isti nazivnik). Najjednostavnije je podijeliti svaku petinu na dva komada i tako dobiti desetine. Dakle, $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{4}{10} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$.

Što ako pak želimo zbrojiti $\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$? U ovom slučaju ne možemo petine (veću valutu) prebaciti u cijeli broj sedmina (manju valutu), stoga moramo i petine i sedmine prebaciti u neku još manju treću valutu. Konkretno, svaku petinu možemo isjeckati na sedam komadića, a svaku sedminu na pet komadića. Ovako ćemo i petine i sedmine iskazati komadićima iste veličine (tridesetpetinama). Dakle, $\frac{2}{5} = \frac{2\cdot7}{5\cdot7} = \frac{14}{35}$, a $\frac{3}{7} = \frac{3\cdot5}{7\cdot5} = \frac{15}{35}$. Sada $\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{14}{35} + \frac{15}{35} = \frac{29}{35}$.

Razlomke množimo i dijelimo na sljedeći način. Prvo, jasno je da $2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{2+2}{5}$, iz čega je očito da $2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{2\cdot2}{5} = \frac{4}{5}$ (dva para po dvije petine su ukupno 4 petine). Naravno, $13 \cdot \frac{2}{5}$ bi predstavljalo $\frac{2}{5}$ zbrojene sa samim sobom 13 puta pa je to $\frac{13\cdot2}{5}$. Dakle, imamo i sljedeću očitu tvrdnju $\frac{4}{5} = 4 \cdot \frac{1}{5}$ (dijeljenje s 5 je samo množenje petinom).

Nadalje, $\frac{\frac{2}{5}}{2} = \frac{2}{2\cdot5} = \frac{2}{10}$ (polovicu od dvije petine dobijemo tako da od svake petine uzmemo pola, odnosno desetinu). Općenito, naravno imamo $\frac{\frac{2}{5}}{13} = \frac{2}{5 \cdot 13}$.

Primijetimo i da $\frac{2}{\frac{1}{5}} = 2 \cdot 5 = 10$ (pitamo se koliko petina stane u dva - u jedinicu ih stane 5 pa ih u dva stane 10).

Iz svega ovoga bi trebalo biti jasno da $\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} = \frac{\frac{1}{5}}{7} = \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{1}{35}$. Dakle, $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7} = 2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 3 \cdot \frac{1}{7} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{7} = (2 \cdot 3) \cdot \frac{1}{5 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7}$ (pomnoži nazivnik i nazivnik te brojnik i brojnik).

Razlomke dijelimo na sličan način. $\frac{\frac{2}{5}}{\frac{3}{7}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{3 \cdot \frac{1}{7}} = \frac{2}{\frac{1}{7}} \cdot \frac{\frac{1}{5}}{3} = 2 \cdot 7 \cdot \frac{1}{5 \cdot 3} = \frac{2 \cdot 7}{5 \cdot 3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{3}$ (dijeljenje je zapravo samo množenje gdje smo preokrenuli drugi razlomak, tj. uzeli njegovu recipročnu vrijednost).

Broj 357 (tri-sto pe-deset i sedam) ima značenje "tri stotice, ped desetica i sedam jedinica". Matematički, $357 = 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 1$. S druge strane 357.29 ima značenje "3 stotice, 5 desetice, 7 jedinica, 2 desetine i 9 stotina". Dakle, $357.29 = 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7 \cdot 1 + \frac{2}{10} + \frac{9}{100}$.

Primijetimo da kada dijelimo s 10, $\frac{357}{10} = \frac{350}{10} + \frac{7}{10} = 35 + \frac{7}{10} = 35.7$ decimalna točka se pomiče za jedno mjesto. Naravno, kada dijelimo sa 100 $\frac{357}{100} = \frac{300}{100} = \frac{50}{100} + \frac{7}{100} = 3 + \frac{5}{10} + \frac{7}{100} = 3.57$ decimalna točka se pomiče za dva mjesta.

Ukratko, kada dijelimo 279 s 1000 (1 s tri nule) jedinice (9 u ovom slučaju) će postati tisućice pa ćemo imati _ . _ _ 9, odnosno 9 će biti na trećem mjestu od decimalne točke. Ako dijelimo 279 s 100 000 (1 s pet nula), onda će jedinice (9) otići na peto mjesto od decimalne točke _ . _ _ _ _ 9, odnosno $\frac{279}{100000} = 0.00279$.

4 Algebra u fizici

Demonstrirajmo ove principe na jednostavnom fizikalnom primjeru. Promotrimo vezu između brzine, prijeđenog puta i vremena. Kada kažemo da se gibamo 100km/h, to znači da ćemo (ako nam je cijelo vrijeme brzina ista) nakon 1h prijeći 100km. Nakon 2h ćemo prijeći 200km, a nakon 0.5h 50km. Označimo li brzinu s v, vrijeme s t, a prijeđeni put s x, onda vidimo da $x = v \cdot t$.

Pretpostavimo da je zadano da se tijelo giba stalnom brzinom od 50km/h i da je prešlo 10km. Koliko dugo se tijelo gibalo? Očito ako treba 1h za 50km, onda u petini sata prijeđe 10km. Ovo možemo pronaći i na sljedeći način.

Zadano je da $v = 50\text{km/h}$, $x = 10\text{km}$. Uvrstimo li u formulu $x = vt$, dobijemo $10\text{km} = 50\text{km/h} \cdot t$. Prebacimo li 50km/h na lijevu stranu, imamo $\frac{10\text{km}}{50\text{km/h}} = t$, odnosno $\frac{10}{50}\frac{\text{km}}{\text{km/h}} = t$, što daje $\frac{1}{5}\text{h} = t$. Možda je pitanje zašto sati? Kako smo iz $\frac{\text{km}}{\text{km/h}}$ došli u h?. Prvo, očito je da vrijeme moramo mjeriti ili u satima ili u minutama, sekundama i sl. Kako su jedino u izrazu prisutni sati, vrijeme u ovom slučaju može jedino biti iskazano u satima. Matematički odgovor je da se mjerne jedinice mogu kratiti kao i obični brojevi, npr. $\frac{km \cdot h}{h} = km$. U našem slučaju $\frac{\text{km}}{\text{km/h}} = \frac{\frac{\text{km}}{1}}{\frac{\text{km}}{\text{h}}}$ je dvojni razlomak. Kada ga sredimo dobijemo $\frac{\frac{\text{km}}{1}}{\frac{\text{km}}{\text{h}}} = \frac{\text{km} \cdot \text{h}}{\text{km}} = \text{h}$.

Pretpostavimo da znamo da je tijelo u 5h prešlo 200km, kolika je brzina u km/h? Imamo koliko km je prevaljeno u 5h, ali km/h nam govore koliko u jedan sat prijeđemo kilometara. Očito u jedan sat moramo prijeći 40km (pet puta manje) pa se gibamo 40km/h. Matematički bismo mogli pisati $t = 5\text{h}$, $x = 200\text{km}$, a $x = v \cdot t$. Uvrštavanjem dobijemo $200\text{km} = v \cdot 5\text{h}$, a prebacivanjem 5h na drugu stranu dobijemo: $\frac{200\text{km}}{5\text{h}} = v$, tj. $40\frac{\text{km}}{\text{h}} = v$.

Algebra je korisna i kada pretvaramo mjerne jedinice. Recimo, ako znamo da je $1\text{m} = 100\text{cm}$ (1m i 100cm predstavljaju istu veličinu), onda je

$$1\text{m}^2 = 1\text{m} \cdot 1\text{m} = 100\text{cm} \cdot 100\text{cm} = 10\ 000\text{cm}^2.$$

Prebacivanjem 10 000 na drugu stranu, dobijemo $\frac{1}{10\ 000}\text{m}^2 = 1\text{cm}^2$, tj. 1 centimetar kvadratni je deset tisućiti dio metra kvadratnog.

Nadalje, ako znamo da je $1\text{cm} = \frac{1}{10}\text{dm}$ (centimetar je deseti dio decimetra, tj. u jednom decimetru ima 10 centimetara), onda

$$1\text{cm}^2 = 1\text{cm} \cdot 1\text{cm} = \frac{1}{10}\text{dm} \cdot \frac{1}{10}\text{dm} = \frac{1}{10 \cdot 10}\text{dm}^2 = \frac{1}{100}\text{dm}^2.$$

Drugim riječima, 1 centimetar kvadratni je stoti dio decimetra kvadratnog. Prebacimo li $\frac{1}{100}$ na drugu stranu, dobijemo $100\text{cm}^2 = 1\text{dm}^2$, tj. u jednom decimetru kvadratnom ima 100 centimetara kvadratnih.