

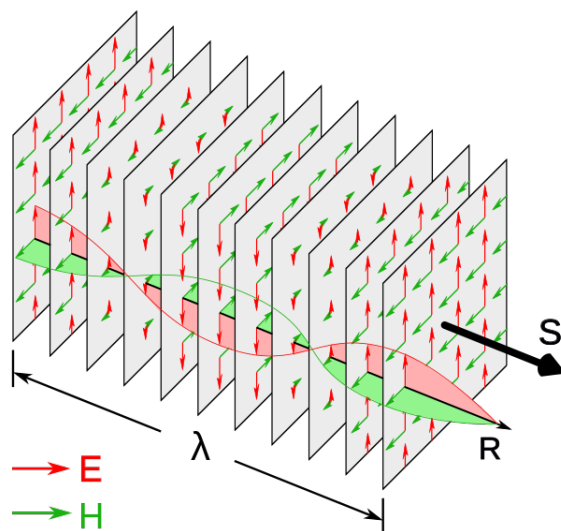
8. razred - Geometrijska optika

Duje Jerić- Miloš

26. veljače 2025.

1 Uvod

Svjetlost je elektromagnetski val, odnosno titranje električnog i magnetskog polja. Slikovito, strelice električnog i magnetskog polja u danoj prostornoj točki se povećavaju i tako dolaze do svoje najveće vrijednosti, potom smanjuju i dolaze do 0, a onda povećavaju u suprotnom smjeru. Ravni elektromagnetski val prostorno izgleda kao:



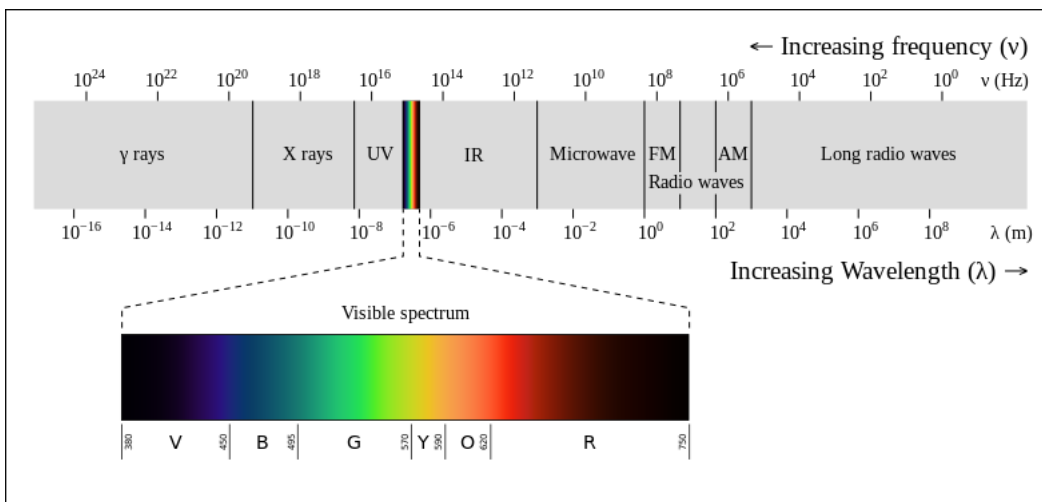
Slika 1: Ravni elektromagnetski val. E i H predstavljaju smjer električnog i magnetskog polja. S je smjer širenja vala (tj. smjer širenja energije), tzv. Poyntingov vektor. Izvor: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Plane_electromagnetic_wave.svg

Izvor elektromagnetskog vala može biti nekakav naboj koji ubrzava (čime stvara promjene u električnom i magnetskom polju koje se onda šire kroz prostor). Elektromagnetski valovi su daleko od izvora transverzalni (električno i magnetsko polje titraju okomito na smjer širenja vala), no blizu izvora mogu imati longitudinalnu komponentu. Vidi animaciju (npr. oko 8:55) <https://www.youtube.com/watch?v=aXRTczANuIs>

Dvije osnovne karakteristike svjetlosnih valova (i valova općenito) su:

- **frekvencija** - određuje **boju** svjetlosti
- **amplituda** - određuje **svjetlinu** (blještavost)

Doduše, ljudsko oko je osjetljivo samo na neke frekvencije (slično kao i sluh). Vid se javlja kada titranje električnog i magnetskog zračenja u blizini naših očiju pobudi određene stanice u njima.



Slika 2: Boja vidljive svjetlosti ovisi o njejoj frekvenciji. Plava svjetlost je više frekvencije, crvena svjetlost je niže frekvencije. Bijelu svjetlost dobijemo kada iskombiniramo velik broj različitih frekvencija (slično kao šum za zvuk). Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:EM_spectrum_updated.svg

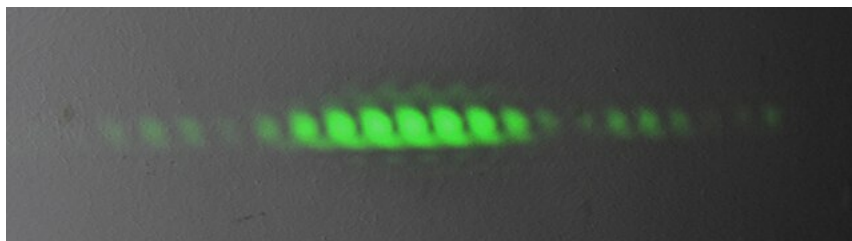
Neki drugi fenomeni (radiovalovi, wifi, bluetooth, mikrovalno zračenje mikrovalne pećnice, infracrveno zračenje koje isijavaju ugrijani predmeti, X-zrake koje koriste neki medicinski uređaji, visokoenergične gama zrake koje

dolaze iz svemira ili koje mogu stvoriti nuklearne eksplozije, itd.) su, u osnovi, *ista stvar* (titranje elektromagnetskog polja), no ljudsko oko nije osjetljivo u tom režimu pa ih ne percipiramo kao svjetlost.

Kako je svjetlost val imamo uobičajene pojave (koje ćemo detaljnije obraditi u nastavku):

- refleksiju - npr. kada gledamo u ogledalo.
- transmisiju - npr. kada gledamo kroz prozor.
- raspršenje - npr. kada gledamo kroz maglu (ili oblake) ili kada se svjetlost difuzno reflektira o nepravilnu površinu.

Osim ovih, imamo i pojavu koja je možda najkarakterističnija za valove - interferenciju:



Slika 3: Kada pustimo svjetlost kroz dvostruki prorez, na zaslonu iza proreza se na tamnim mjestima val poništava (destruktivna interferencija), a na svijetlim mjestima val pojačava (konstruktivna interferencija). Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Young%27s_slits.jpg

Kada govorimo o **brzini svjetlosti** treba razlikovati dvije stvari:

1. Fazna brzina svjetlosti $v = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$ koju smo ranije definirali za sve valove.
2. Brzina kojom se elektromagnetsko polje "ažurira", tj. brzina kojom se giba kratki puls svjetla.

U vakuumu su obje brzine iste i iznose $c = 299\,792\,458\text{m/s}$ (uobičajeno je ovu konstantu označiti slovom c - lat. *celeritas*). Ovo je ujedno i najveća brzina kojom se materija (ili energija) može prenositi s jednog mjesta na drugo,

tj. svojevrsno kozmičko "ograničenje brzine". Doduše, u nekim materijalima, fazna brzina elektromagnetskog vala može *nadmašiti* brzinu svjetlosti u vakuumu. Primjerice, fazna brzina X-zraka u ionosferi je često veća od brzine svjetlosti u vakuumu. Ovo NIJE problem - gibanje brijegova vala je samo prividno (slično kao gibanje sjene po podu). Brijegovi se unutar elektromagnetskog zračenja mogu gibati brže od "ograničenja brzine" jer to nije fizičko gibanje čestica niti energije.

Kako se u vakuumu svjetlost svih frekvencija jednako brzo giba, iz $c = \frac{\lambda}{T} = \lambda f$ vidimo da svjetlost **veće frekvencije** mora imati **manju valnu duljinu**.

Ključna stvar je da svjetlost, isto kao i zvuk, može ubrzati ili usporiti (faznu brzinu) kada mijenja medij - primjerice ako iz vakuuma ulazi u zrak (ili iz zraka u staklo). Kada svjetlost **ulazi iz vakuuma u neki drugi medij, ona obično usporava** (ali ne uvijek - npr. ionosfera).

Ovo nećemo detaljno objasniti (za to vidi napredno o valnoj optici), no ugrubo imamo sljedeću sliku. Elektromagnetski val u mediju pobudi atome, koji se onda sinkronizirano gibaju i tako stvaraju novi elektromagnetski val. Kombinacija (zbroj) izvornog vala i tog novog vala u mediju se (generalno) giba sporije nego izvorni val u vakuumu.

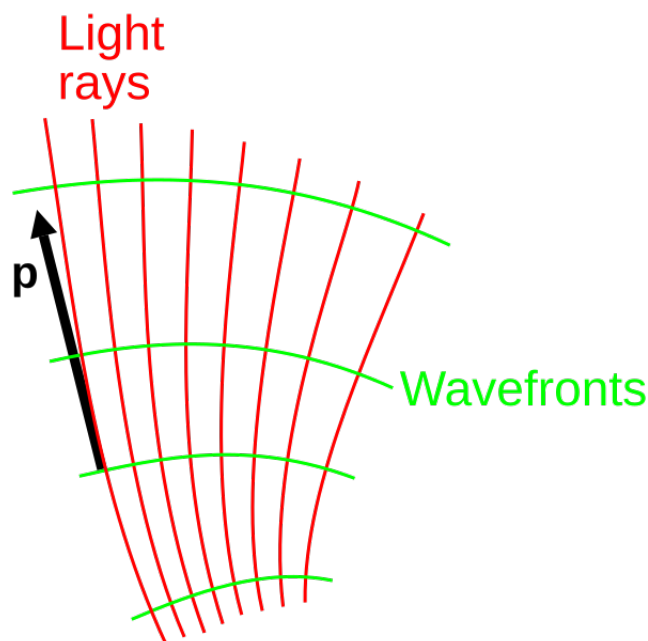
Naravno, u medijima se može dogoditi i raspršenje, onda atomi ne titraju sinkronizirano kao u slučaju prozirnog (tj. *transparentnog*) medija, već svaki na svoju stranu.

Zapravo, većina predmeta oko nas svjetlost propuštaju samo do površinskog sloja (unutar takvog predmeta električno i magnetsko polje vala vrlo brzo trne u 0). Takvi predmeti su **neprozirni** i iza sebe stvaraju **sjenu**.

Ovo su bitna valna svojstva svjetlosti koja treba držati na umu kroz čitavu diskusiju. Ipak, kako je puni valni opis relativno matematički zahtijevan, odmah ćemo se ograničiti samo na tzv. geometrijsku teoriju.

2 Pretpostavka geometrijske optike

Geometrijska optika ne pokušava opisati val u cijelosti, već samo opisuje **svjetlosne zrake**. Ukratko, zraka je linija okomita na valne fronte (brijegove vala) - ona predstavlja smjer širenja vala.



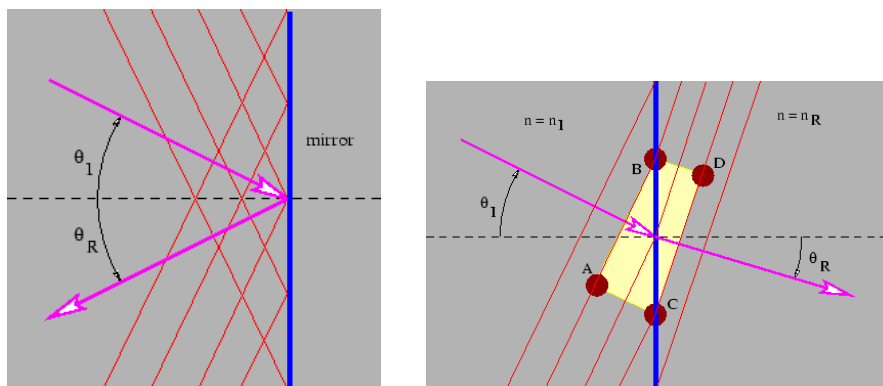
Slika 4: Valne fronte su zeleno. Svjetlosne zrake su okomite na njima (crveno). Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Hamiltonian_Optics-Rays_and_Wavefronts.svg

Gdje su zrake gušće, amplituda vala je, generalno govoreći, veća. Drugim riječima, fokusiranje zraka stvara svijetlu točku - gustoća energije na tom mjestu raste. Ipak, treba imati na umu da zbog valne prirode svjetlosti možemo imati i destruktivnu interferenciju pa gustoća energije može varirati od točke do točke - manja je na mjestu gdje val destruktivno interferira, a veća tamo gdje konstruktivno interferira.

Ključna pretpostavka geometrijske optike je sljedeća: **valna duljina svjetlosti je kratka u odnosu na prepreke na koje svjetlost nailazi.** Ovo generalno vrijedi za vidljivu svjetlost (valna duljina vidljive svjetlosti je otprilike u rasponu od 400 do 700 nanometara).

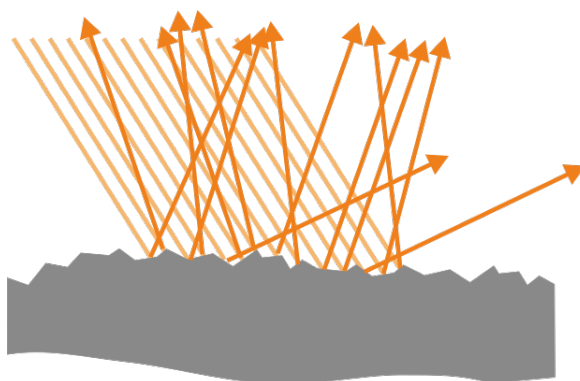
Ipak, ova pretpostavka znači da ne možemo točno opisati raspršenje svjetlosti na vrlo sitnim česticama (npr. atomima i molekulama ili vrlo sitnim kapljicama u oblacima ili magli). Nadalje, ne možemo modelirati difrakciju (ogib) i interferenciju - ovo je domena *valne optike*.

Prisjetimo se da je ovo upravo pretpostavka koja nam je trebala za zakon refleksije i transmisije (koje smo izveli za proizvoljni val):



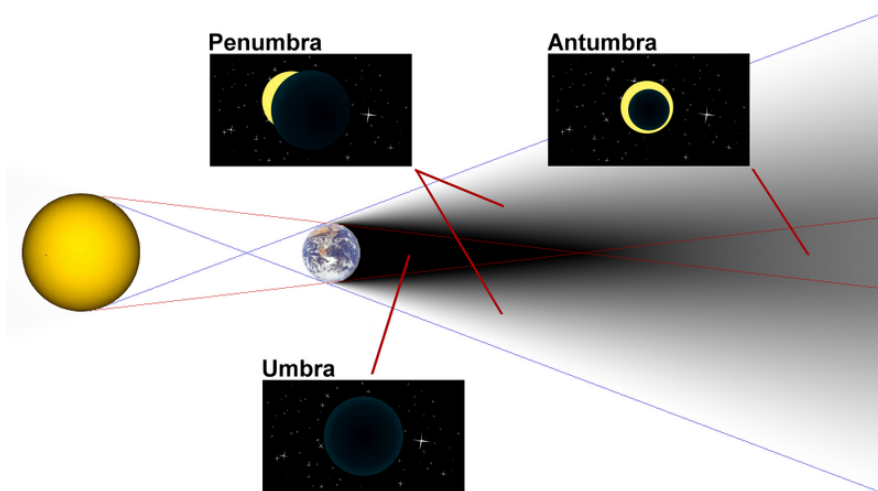
Slika 5: Pri refleksiji su ulazni i izlazni kutevi jednaki. Kod transmisije se zraka lomi (refrakcija) - ako val uspori (manja valna duljina), zraka se okrene prema okomici. Izvori: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Introductory_Physics_fig_3.1.png i https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Introductory_Physics_fig_3.2.png

Zakoni refleksije i transmisije su glavno oruđe u geometrijskoj optici. Kada imamo nepravilnu podlogu (čije nepravilnosti su male u odnosu na valnu duljinu), zakon refleksije je isti - upadni kut i kut refleksije za svaku pojedinu zraku su jednaki. Sada se, doduše, susjedne zrake mogu reflektirati pod različitim kutovima:



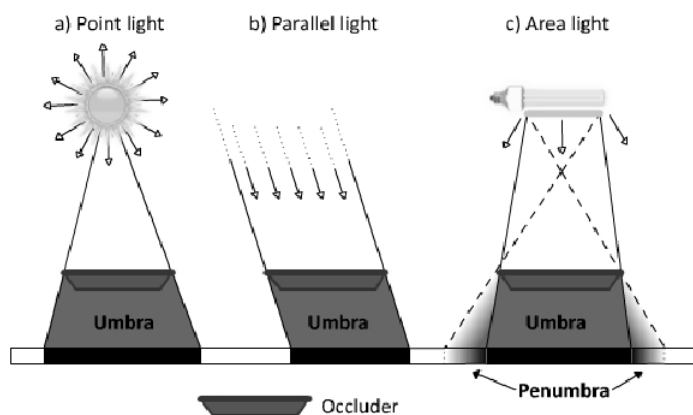
Slika 6: Difuzna refleksija. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:DiffuseReflection_microstructure.svg

Sjene isto imaju jednostavan opis pomoću zraka: to je područje koje neprozirni predmet blokira (mjesto do kojeg zrake svjetlosti ne mogu doći).



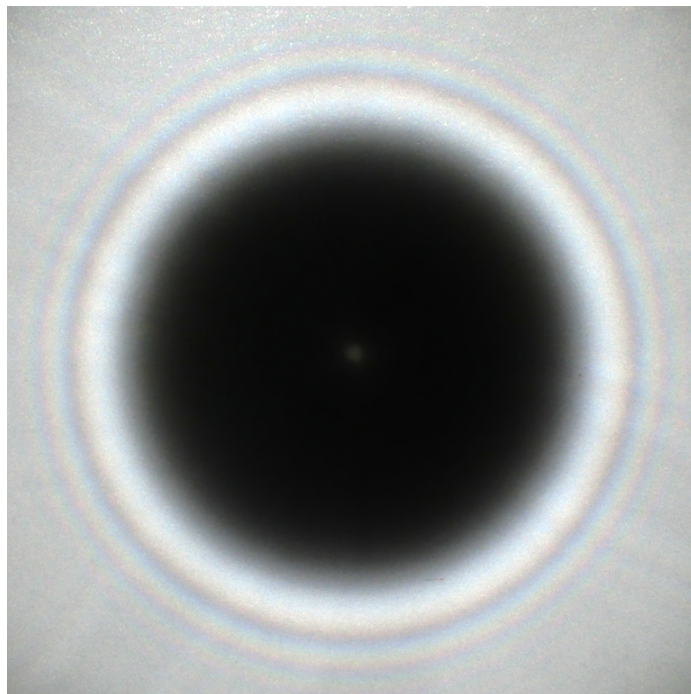
Slika 7: Dijelovi sjene. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagram_of_umbra,_penumbra_%26_antumbra.png

Kada je izvor svjetlosti jako daleko, odnosno kada nema protežnost (kada je točka), onda je sjena "oštra" (penumbra i umbra se poklapaju):



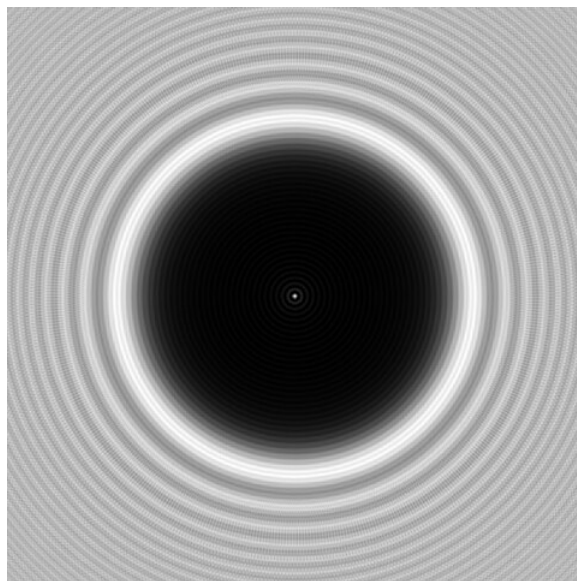
Slika 8: Sjena točkastog izvora, izvora koji je jako daleko (pa su mu zrake paralelne) i izvora koji ima protežnost. Izvor: https://www.researchgate.net/figure/a-Hard-shadow-caused-by-point-and-spot-light-sources-b-hard-shadow-caused-by-par-fig3_261295750

Recimo da imamo savršenu kuglu koja blokira daleki izvori svjetlosti. Prema opisu geometrijske optike, očekivali bismo da je u centru sjene mrak. Ipak, to nije točno! Kada svjetlost opišemo valno (uključimo difrakciju i interferenciju), onda se pokaže da je u centru sjene svijetla (iako blijeda) točka:



Slika 9: Svijetla točka u centru sjene (fotografija). Nju je prvi predvidio Poisson, koji ju je potom odbacio kao apsurd (i dokaz protiv valne teorije svjetla). Rezultat je eksperimentalno potvrdio Arago. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:A_photograph_of_the_Arago_spot.png

Rezultat je lakše uočiti na sljedećoj simulaciji:



Slika 10: Simulacija Poissonove točke. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Poissonspot_simulation_d4mm.jpg

3 Dodatak: Fermatov princip

Kompletna geometrijska optika (tj. ponašanje zraka u kratkovalnoj aproksimaciji) zapravo slijedi iz jednog jedinog postulata - **Fermatovog principa**. On glasi:

Kada zraka svjetlosti polazi iz točke A i stiže u točku B , ona prati onu putanju **po kojoj je ukupno vrijeme gibanja od A do B najmanje**.

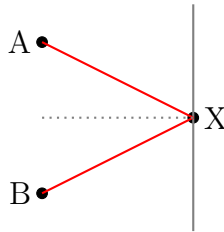
Pokazat ćemo da iz Fermatovog principa slijede sljedeće činjenice:

1. Svjetlost se giba po pravcu, tj. po ravnoj crti (u savršeno homogenom mediju duž kojeg brzina svjetlosti ne varira)
2. Zakon refleksije: upadni kut i kut refleksije su jednaki
3. Zakon refrakcije (Snellov zakon): zraka svjetlosti se pri prelasku u drugi medij lomi, a kut loma ovisi o brzini.

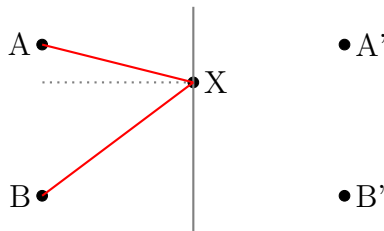
Ovo su glavni zakoni geometrijske optike (koje smo već pokazali za valove), što nam daje razloga da vjerujemo u točnost Fermatovog principa¹

Prvo, kada se brzina svjetlosti u danom mediju ne mijenja, onda je jasno da je put minimalnog vremena ujedno i put minimalne udaljenosti. Najkraća udaljenost između dvije točke je ravna crta, čime smo pokazali 1.

Pretpostavimo sada da je zraka prošla kroz točku A , reflektirala se negdje na ravnoj površini (u točki X), potom prošla kroz točku B (koja je na istoj udaljenosti od površine). Pokazat ćemo da je put minimalnog vremena od A do B (koji dira reflektirajući površinu) upravo onaj koji zadovoljava zakon refleksije. Dovoljno je pokazati da točka X mora biti na pola puta između A i B (tj. da je trokut ABX jednakokrani):

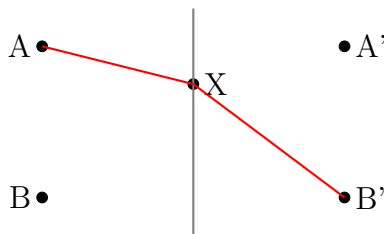


Moramo dakle pokazati da je udaljenost od A do X jednaka udaljenosti od B do X . Zamislimo da sa druge strane reflektirajuće površine na istoj udaljenosti imamo točke A' i B' i odaberimo točku X (za početak) proizvoljno:

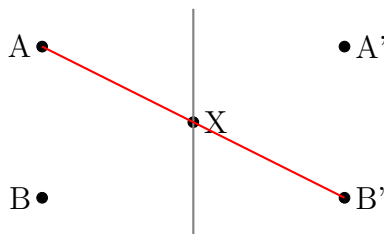


Sada umjesto putanje $A \rightarrow X \rightarrow B$ promotrimo putanju $A \rightarrow X \rightarrow B'$:

¹Matematički bismo mogli krenuti od Maxwellovih jednažbi koje daju puno valno ponašanje svjetla, potom napraviti kratkovalnu aproksimaciju. Ovo nas nakon kraćeg izračuna dovede to tzv. eikonalne jednažbe iz koje Fermatov princip odmah slijedi. Vidi npr. <https://physics.stackexchange.com/questions/43711/>



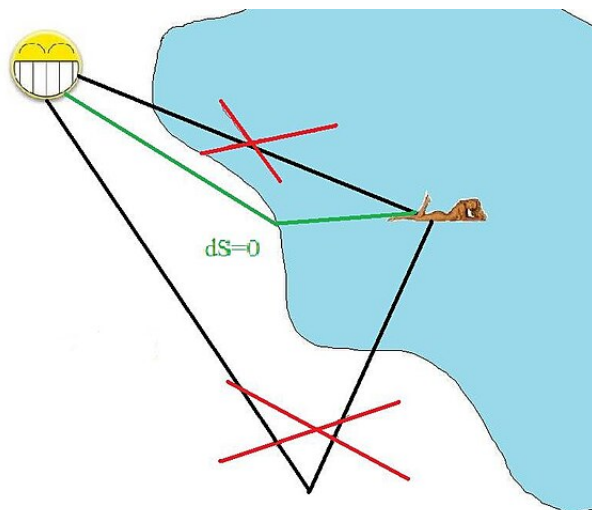
Po konstrukciji točaka A' i B' , ova putanja je iste duljine kao putanja $A \rightarrow X \rightarrow B$ po kojoj putuje zraka. Kako je brzina svjetlosti cijelo vrijeme ista (svjetlost se giba istom brzinom i prije i nakon refleksije), putanja najkraćeg vremena je zapravo samo putanja najkraće udaljenosti, ali najkraća udaljenost od A do B' je ravna linija. Dakle, prava točka X mora biti točno na sjecištu te linije s reflektirajućom površinom:



Kako su po pretpostavci točke A i B jednako udaljene od reflektirajuće površine, tako su i točke A i B' jednako udaljene od površine. Dakle, površina siječe dužinu AB' na pola. Ovo znači da je dužina AX jednaka dužini XB' , što je pak po konstrukciji jednako dužini XB . Time je dokazan zakon refleksije iz Fermatovog principa.

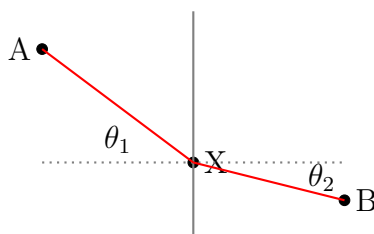
Konačno, moramo pokazati da u slučaju transmisije put najkraćeg vremena zadovoljava Snellov zakon. Prvo objasnimo zašto se zraka mora slomiti kada prelazi iz jednog medija u drugi (i mijenja brzinu). Recimo da smo na plaži i neka osoba se utapa² Kako što prije stići do te osobe? Svakako brže trčimo nego plivamo, stoga nećemo ići po ravnoj liniji (najkraća udaljenost). Idealna putanja će biti malo duža na kopnu (gdje smo brži), a malo kraća u moru (gdje smo sporiji):

²Čitatelj može zamisliti kakvu zgodnu plavušu ili brinetu.



Slika 11: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dileme_nageur.jpg

Ovo svakako miriše na Snellov zakon, a precizni matematički rezultat možemo jednostavno izvesti na sljedeći način (ala Mark Levi, vidi https://www.youtube.com/watch?v=Iq1a_KJTWJ8). Zraka svjetlosti iz točke A u jednom mediju dođe do točke B u drugom mediju. Tražimo točku X na granici između dva medija koje će učiniti vrijeme putanje minimalnim:

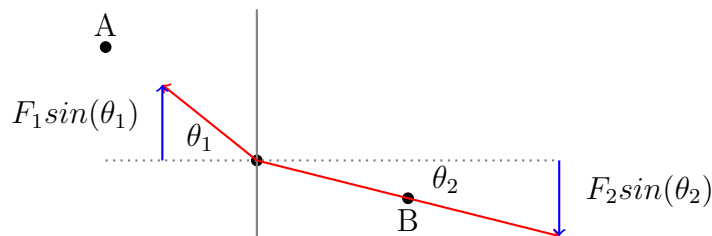


Zamislamo da umjesto ovog problema rješavamo sljedeći. Imamo dvije opruge koje su nakačene na prsten X koji se slobodno može gibati po vertikalnoj šipki. Drugi kraj jedne opruge je fiksiran u točki A , a drugi kraj druge u točki B . Kada pustimo sustav, on će pokušati umanjiti napetost obje opruge, odnosno pokušat će umanjiti elastičnu potencijalnu energiju opruga.

Problem će biti isti ukoliko uspijemo namjestiti da potencijalna energija opruge (kada je rastegnemo npr. od A do X) bude jednaka vremenu koje

treba svjetlosti da prijeđe istu udaljenost. Ovo je lagano: samo uzmemo "čarobne" (čitaj: potpuno nefizikalne) opruge čija sila ne ovisi o produljenju, već je konstantna i iznosi $F = \frac{1}{v}$, gdje je v brzina svjetlosti u odgovarajućem mediju. Ako je udaljenost od A do X jednaka d , onda je rad koji obavimo kada oprugu rastegnemo od A do X jednak $F \cdot d = \frac{d}{v}$, što je samo vrijeme potrebno da svjetlost dođe od A do X . Fizikalno takve opruge nemaju smisla, ali matematički nemamo nikakvih problema (uostalom, opruge su ovdje samo metalno pomagalo).

Ovo je zgodno jer, osim što je u ravnoteži elastična potencijalna energija minimalna, znamo da i vektorski zbroj sila (kojima jedna i druga opruga djeluju) na prsten mora biti 0. Iz jednakosti sila sada lagano izvedemo Snellov zakon.



Sile kojima opruge djeluju na prsten su predstavljene crvenim strelicama. Da bi prsten mirovao vertikalna komponenta obje sile (plavo) mora biti ista, što daje:

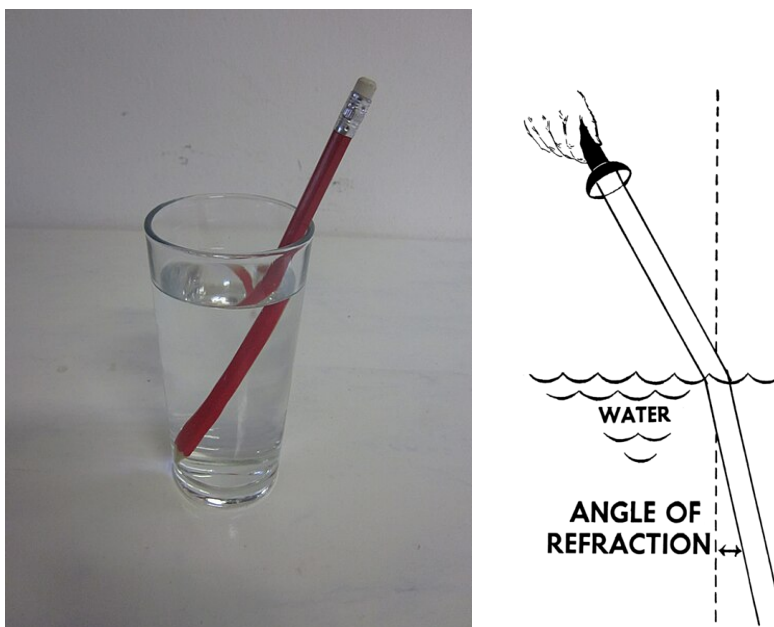
$$F_1 \sin(\theta_1) = F_2 \sin(\theta_2)$$

Kako $F = \frac{1}{v}$, ovo je samo:

$$\frac{\sin(\theta_1)}{v_1} = \frac{\sin(\theta_2)}{v_2}$$

4 Refrakcija i njene posljedice

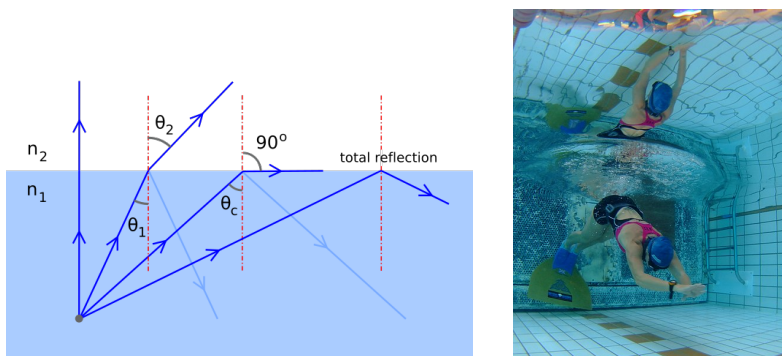
Pri prelasku iz jednog medija u drugi, zraka svjetlosti se lomi (refraktira). Ovo dovodi do poznatih nam svakodnevnih pojava:



Slika 12: Lom svjetlosti na površini vode. Izvor https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Pencil_in_glass_of_water_showing_refraction.JPG i https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Internal_reflection,_Anna.jpg

Kada val usporava, onda mu je kut loma (kut refrakcije) manji od upadnog, tj. zraka se lomi prema okomici između dva medija. Dakle, kada svjetlost ulazi iz zraka (gdje se giba brže) u vodu (gdje se giba sporije), zraka se lomi prema vertikali (kao na slici).

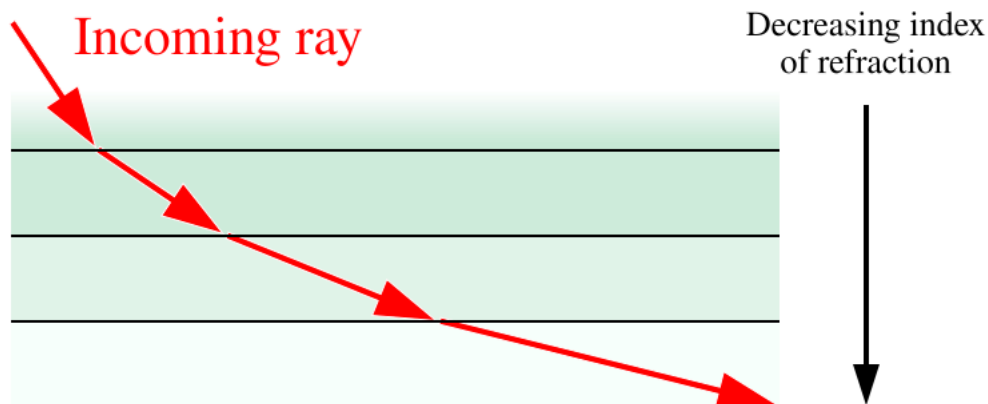
Ali ovo znači da je, u slučaju prelaska iz vode u zrak, kut loma *veći* od upadnog kuta. Dakle, u tom slučaju, za dovoljno velike upadne kutove, kut loma može biti i veći od 90° ! Onda se sva svjetlost reflektira natrag u vodu (nema transmisije) - ovo je tzv. **potpuna refleksija**:



Slika 13: Potpuna refleksija. Izvor https://commons.wikimedia.org/wiki/File:ReflexionTotal_en.svg i https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Internal_reflection,_Anna.jpg

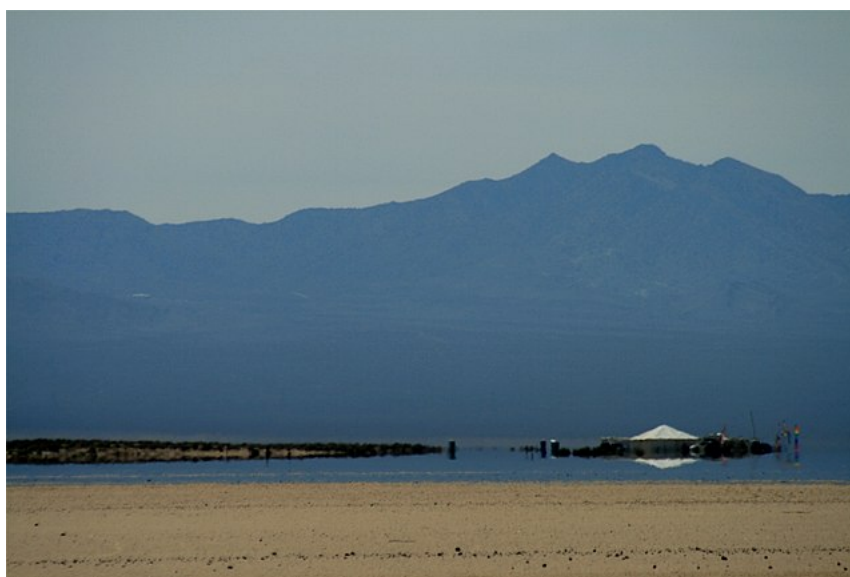
Ovu pojavu koriste npr. optički kabeli - na taj način bez transmisij-skih gubitaka možemo prenijeti svjetlosni signal s jednog mjesta na drugo. Općenito, ovakve uređaje zovemo valovodi (eng. *waveguide*).

Na granici između dva medija brzina svjetlosti (tj. indeks refrakcije) se skokovito mijenja, ali može se dogoditi da se ona i kontinuirano mijenja:



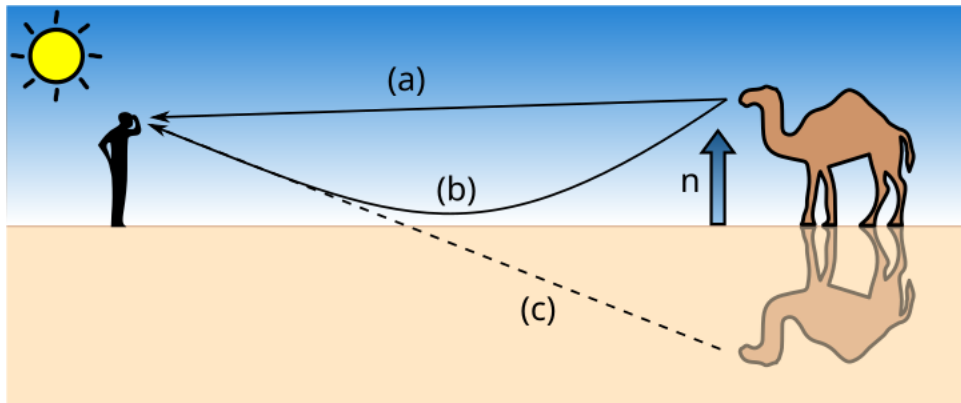
Slika 14: Zraka prolazi kroz tanke slojeve različitih indeksa refrakcije. Brzina svjetlosti v je veća na donjim slojevima (dakle indeks refrakcije $n = \frac{c}{v}$ je manji). Izvor: <https://physics.stackexchange.com/questions/43711/optics-derivation-of-vec-nabla-n-hat-u-ds/151488#151488>

Primjerice, kada se na vrući ljetni dan tlo užari, onda je zrak blizu tla nešto topliji i tu je brzina svjetlosti veća. Ovo dovede do *miraža* (eng. *mirage*):



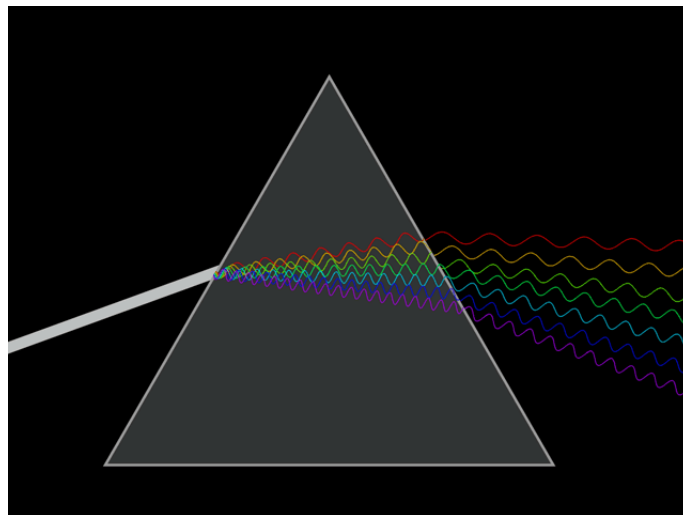
Slika 15: Miraž u Mojave pustinji. Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Desertmirage.jpg>

Shematski, miraž funkcionira po sljedećem principu:



Slika 16: Zraka svjetlosti (a) putuje kroz zrak u kojem je brzina svjetlosti konstantna. Zraka (b) putuje kroz zrak u kojem se brzina svjetlosti mijenja (pa je putanja najkraćeg vremena zakrivljena). Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mirage-diagram.svg>

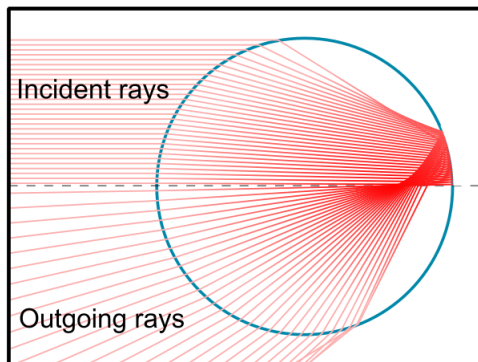
U nekim materijalima ne uspore sve frekvencije svjetla jednako (javlja se disperzija). U tom slučaju se svjetlost razlaže na boje:



Slika 17: Shema loma svjetlosti na prizmi. Najviše se lomi (i najviše uspori) ljubičasta svjetlost, a najmanje crvena. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Light_dispersion_conceptual_waves.gif

Ovo je i osnovni mehanizam iza nastanka duge, no puna priča je dosta

komplikiranija. Prvo, treba imati na umu da dugu vidimo samo onda kada gledamo u kapljice kiše, a Sunce nam je sleđa. Na kapljicama se boje razlažu kao i na prizmi, no onu svetlost koja prođe kroz kapljicu ne vidimo. Dio razložene svetlosti se reflektira o drugi kraj kapljice i vrati u našem smjeru:

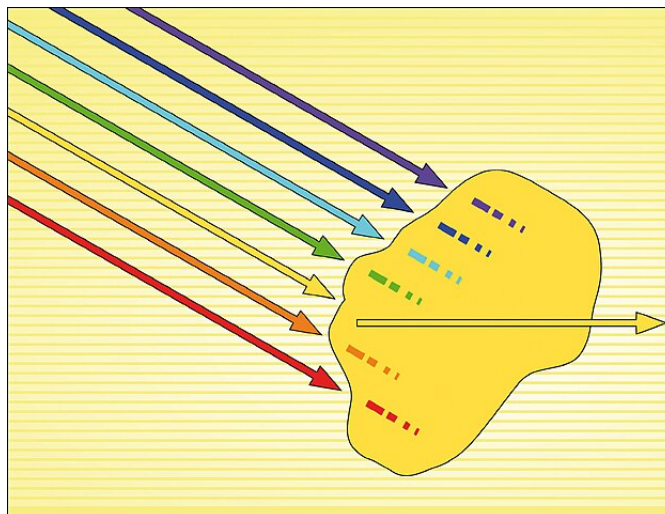


Slika 18: Dvostruka refleksija na sfernoj kapljici kiše. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rainbow_single_reflection.svg

Sada, na mnogim mjestima se reflektirane zrake različitih valnih duljina ponovno miješaju, stoga uglavnom opet imamo bijelu svetlost. Ipak, izvan kapljice, na uskom pojasu prema nama, će se zrake npr. crvene svetlosti fokusirati, a to će mjesto biti drukčije od onog na kojem se fokusiraju zrake plave, zelene ili žute svetlosti. Na tom pojasu vidimo boje - tamo gdje su reflektirane zrake npr. plave svetlosti fokusirane ćemo vidjeti plavu boju na nebu. Više informacija o nastanku duge možete pronaći u sljedećem videu <https://www.youtube.com/watch?v=24GfgNtnjXc>.

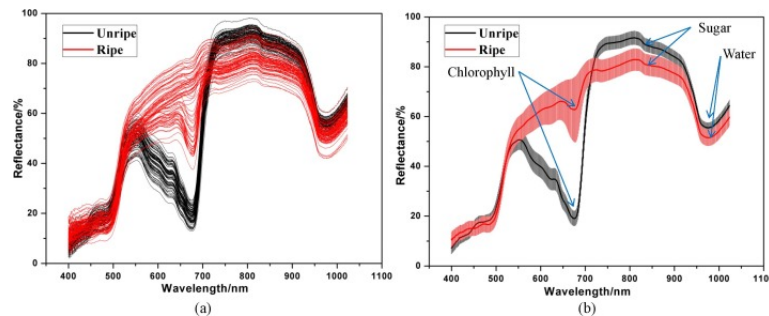
5 Boje: apsorpcija, raspršenje, interferencija

Zašto je banana žuta, i zašto, kada sagnjije, postane smeđa? Puni odgovor na ovo pitanje leži u kvantnoj mehanici, no nećemo ulaziti u detaljnu diskusiju (za to vidi napredni dodatak o valnoj optici). Ugrubo, sa Sunca dolazi bijela svetlost koja pada na razne predmete. Ti predmeti (ovisno o njihovoj strukturi i molekulskom/atomskom sastavu) mogu **upiti** (apsorbirati) svetlost određenih valnih duljina. Tu upijenu svetlost onda neće reflektirati prema našim očima. Dakle, žuti predmeti su žuti jer dobro *reflektiraju* svetlost žutih valnih duljina (a upijaju svetlost drugih valnih duljina).



Slika 19: Žuti predmeti reflektiraju svjetlost žutih valnih duljina, a upijaju druge valne duljine. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Absorpci%C3%B3n-amarillo_-I%C3%Blaki_Otsoa._CC._By_ShA_%24no-.jpg

Zašto je onda banana žuta? Zato što dobro upija crvene valne duljine, a reflektira uglavnom žute. Zašto je gnjila banana smeđa? Zato što se kemijski sastav banane onda mijenja, a novi spojevi slabije upijaju crvenu svjetlost pa se i ona reflektira:



Slika 20: Ovisnost reflektirane svjetlosti o valnoj duljini za različite banane (zrele su crvene, a nezrele crne). Primijetimo šiljak na 600-ak nanometara (valna duljina koja odgovara žutoj svjetlosti). Kako banana sazrijeva, tako postaje smeđa, što znači da se crvene frekvencije manje upijaju, odnosno više reflektiraju. Link na rad: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0308814617317181>

Ovo nije potpuno objašnjenje. Naime, ako gledate u ekran i na njemu vidite žutu boju, u toj svjetlosti NEMA žutih valnih duljina. Kada pomiješamo crvenu i zelenu boju, vidjet ćemo žuto - unatoč tome što fizički nema žute svjetlosti. Ovdje je riječ o varljivosti ljudskih osjetila, no to je dobra stvar. Pomoću samo tri boje - crvene, zelene i plave - možemo dočarati sve druge. Ovo je razlog zašto možemo imati televizor u boji (svaki piksel ima male 3 LED lampice - crvenu, zelenu i plavu).

Zašto je nebo plavo? Odgovor na ovo pitanje NE leži u apsorpciji (nebo ne upija sve boje osim plave). Razlog je **raspršenje**. Naime, kada bijela svjetlost naiđe na vrlo sitne čestice (npr. molekule dušika i kisika u atmosferi), onda će se najjače raspršiti plave valne duljine, a slabije crvene (tzv. Rayleighjevo raspršenje):



Slika 21: Plava svjetlost se rasprši u mediju više nego crvena, koja prođe više-manje nesmetano na drugu stranu. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Why_is_the_sky_blue.jpg

Ovo je razlog i zašto su Sunce izgleda žuto, tj. zašto su zalasci Sunca crveni - kada svjetlost ogolimo od plavih valnih duljina, ono što ostaje je crvenkasto.

Na većim česticama se druge valne duljine isto jače rasprše pa je raspršena svjetlost bijela, a ne plava. Ovo je razlog zašto su oblaci (i magla) bijeli. Više o raspršenju možete pronaći u naprednim materijalima o valnoj optici.

Zašto je more plavo? Naivni odgovor bi možda bio "zato što je nebo plavo", no to nije točno. Istina je da refleksija neba utječe na boju mora (more je crveno kada Sunce zalazi), no čak i u zatvorenom prostoru možemo vidjeti da je voda u bazenima plava. Boja vode se javlja zbog apsorpcije. Zaista, možete provjeriti da je na većim dobinama Sunčeva svjetlost plavkasta (znači da se druge boje upiju). Doduše, voda je vrlo transparentna, stoga da bismo uopće vidjeli boju vode (da bi se dovoljno svjetlosti upilo), trebamo je imati u velikim količinama.

Konačno, i **interferencija** može stvoriti boje (u tom slučaju govorimo o *iridescenciji*). Primjerice, mikroskopska struktura predmeta može biti takva da destruktivno interferiraju sve valne duljine osim plavih - onda će predmet biti plave boje. Krila leptira boju dobivaju na ovaj način:



Slika 22: Izvor: https://en.wikipedia.org/wiki/File:Morpho_didius_Male_Dos_MHNT.jpg

Zapravo, plavi pigmenti u biljnom i životinjskom svijetu su relativno rijetki, stoga se plava boja javlja uglavnom na ovaj način. Iridescentni predmeti obično mijenjaju boju kada ih gledate pod različitim kutevima (tako su npr. leptirova krila s druge strane smeđe boje). Ova pojava se javlja i kod nekih školjki:



Slika 23: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Haliotis_iris_LC0283.jpg

Ali i na površini mjehurića:

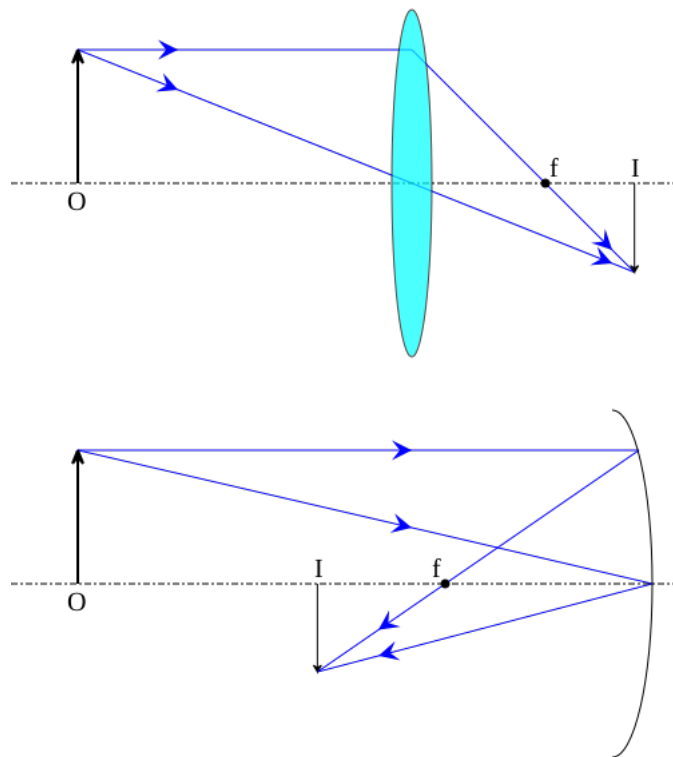


Slika 24: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Soap_Bubble_-_foliage_background_-_iridescent_colours_-_Traquair_040801.jpg

6 Slika

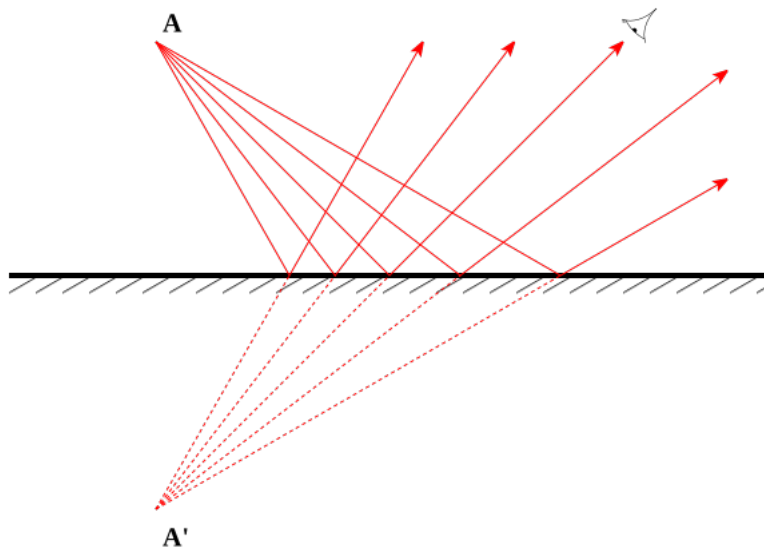
Slika predmeta će nastati tamo gdje se **zrake** (koje su se prethodno reflektirale od predmeta) **fokusiraju** (tj. sastaju, sabiru, konvergiraju). Sunčeva zraka prvo pada na neku točku predmeta, potom se difuzno reflektira (rasprši)³. Dio tih raspršenih zraka onda pada na kakvo zrcalo ili leću koje ih fokusiraju. Ako sada stavimo platno na mjesto gdje su se zrake fokusirale, vidjet ćemo svijetlu točku (sliku izvorne točke na predmetu). Ukoliko je izvorna točka predmeta bila npr. crvena, onda se fokusiraju zrake crvenih valnih duljina i očekujemo da će i na platnu točka biti crvena. I druga svjetlost pada na to mjesto na platnu, no fokusirane zrake najviše dolaze do izražaja (najveća amplituda).

³Jedna zraka je beskonačno tanka, stoga ako hoćete možete zamisliti tanki snop zraka.



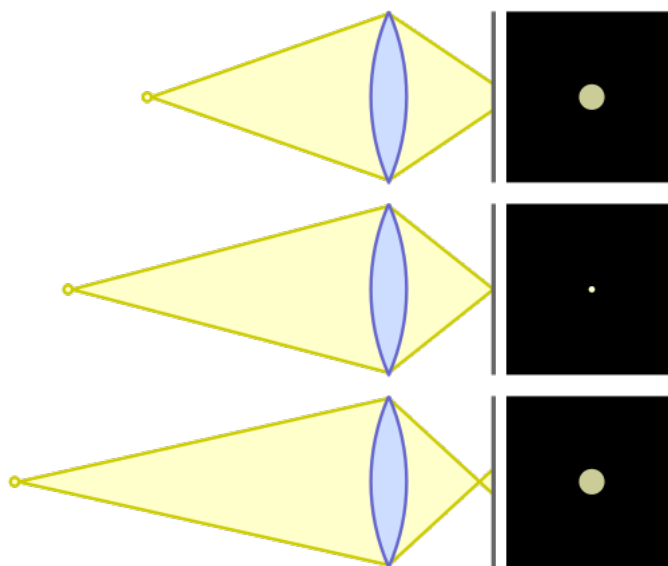
Slika 25: Slika koju stvaraju (konvergentna) leća i (konkavno) zrcalo. Leća propušta (i lomi) svjetlost, stoga je slika na suprotnoj strani leće od predmeta. Zrcalo reflektira svjetlost, stoga je slika na istoj strani na kojoj i predmet. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Real_image.svg

Često u optici govorimo i o "virtualnoj slici". Ovo je mjesto gdje se sastaju zrake produžene unatrag. Virtualna slika nije mjesto gdje se zrake stvarno fokusiraju, stoga ne stvara sliku na platnu.



Slika 26: Virtualna slika koju stvara ravno zrcalo. Osoba koja gleda virtualnu sliku ima dojam kao da je svjetlost došla direktno otuda (iako su to samo reflektirane zrake objekta koji je postrani). Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Plane_mirror.svg

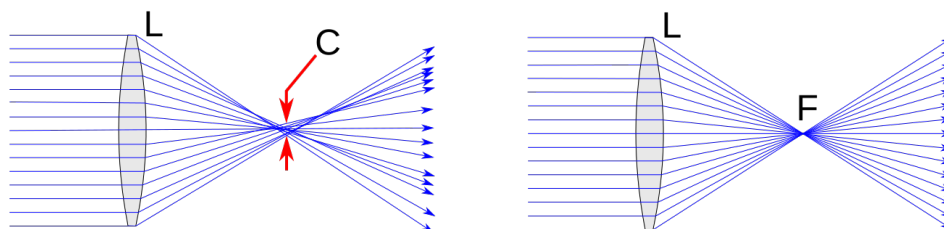
Recimo da sada imamo jednu točku i da ona reflektira svjetlost u neku leću:



Slika 27: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Circles_of_confusion_lens_diagram.svg

Ako je s druge strane leće svjetlost fokusirana u točku, tu će slika točke biti "oštra", ako se zrake pak ne fokusiraju u točku nego na platno padaju na malo veće područje, onda će slika biti "mutna".

U stvarnosti, zrake se ne fokusiraju točno u beskonačno malu točku, već samo u sitno područje. Ako je područje dovoljno maleno, to percipiramo kao "izoštreno".



Slika 28: Stvarna leća (lijevo) ne sabire zrake u točku, za razliku od idealne leće (desno). Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Convex_lens_-_circle_of_confusion.svg

Što ako sada imamo više točaka (koje npr. tvore neko tijelo)? Onda svaka

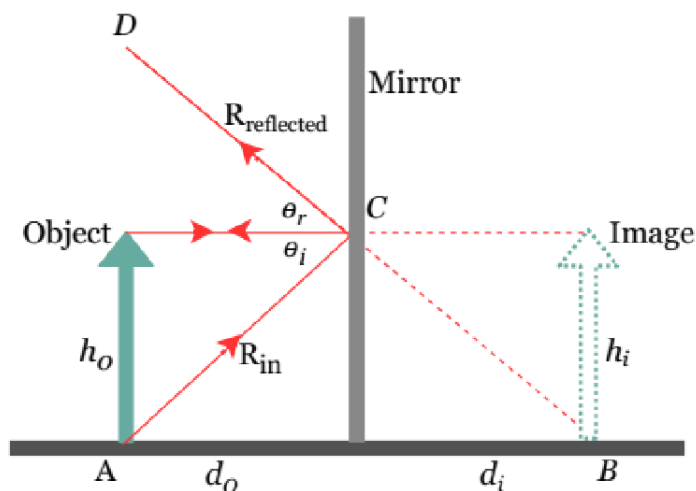
točka stvara svoj snop koji leća mora fokusirati. Ako je tijelo "izoštreno" to znači da je svaki snop fokusiran na dovoljno malo područje (tj. da se razumno bliske točke na tijelu preslikavaju u disjunktna⁴ područja na slici). U idealnom slučaju, snopovi jedne točke na tijelu su ponovno fokusirani u jednu točku na slici, stoga se točke na tijelu preslikavaju u točke na slici.

7 Zrcala

Zrcala imaju vrlo glatku površinu i spekularno reflektiraju gotovo svu upadnu svjetlost. Krećemo od najjednostavnijeg slučaja - ravnog zrcala.

7.1 Ravno zrcalo

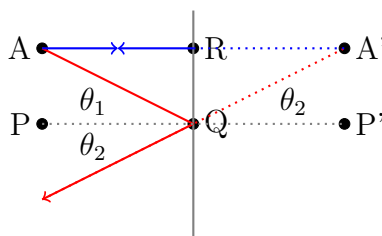
Ravno zrcalo stvara virtualnu sliku - zrake se ne fokusiraju:



Slika 29: Izvor: https://www.researchgate.net/figure/Plane-mirror-ray-diagram-and-image-formation-Geometric-ray-diagram-of-plane-mirror-fig8_348212745

Virtualna slika ravnog zrcala je iste veličine i nalazi se na istoj udaljenosti od zrcala kao predmet. Ovo možemo vidjeti relativno jednostavnim geometrijskim argumentom:

⁴Disjunktno (eng. *disjoint*) = nema preklapanja



Iz zakona refleksije vidimo da kutevi θ_1 i θ_2 moraju jednaki. Dakle, dva pravokutna trokuta APQ i $A'P'Q$ su slični (istog su *oblika*, tj. svi su im kutevi isti⁵). Doduše, možda ti trokuti nisu istih veličina - duljine stranica im se možda razlikuju. Sada ćemo pokazati da je to nemoguće. Naime, dužina AP mora biti jednaka dužini $A'P'$ jer su obje jednake dužini RQ . Ovo znači da su visine slike i predmeta iste (tj. slika je iste veličine kao i predmet). Sada, trokuti APQ i $A'P'Q$ su slični (što im fiksira oblik), a dijele stranicu iste dužine (ovo im fiksira veličinu), stoga im i ostale odgovarajuće stranice moraju biti istih dužina. Dakle, dužina QP jednaka je dužini QP' , što znači da se slika nalazi na istoj udaljenosti od zrcala kao i predmet.

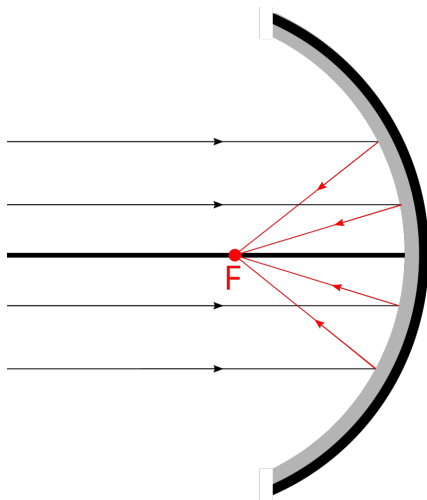
7.2 Sferno zrcalo

Razlikujemo 2 sferna zrcala - **konkavno** i **konveksno**. Kod konkavnog zrcala zrake se reflektiraju na unutrašnjosti sfere, a kod konveksnog na vanjskom dijelu sfere⁶. Svaka sfera ima svoj **centar** - to je točka koja je jednako udaljena od svih točaka na sferi.

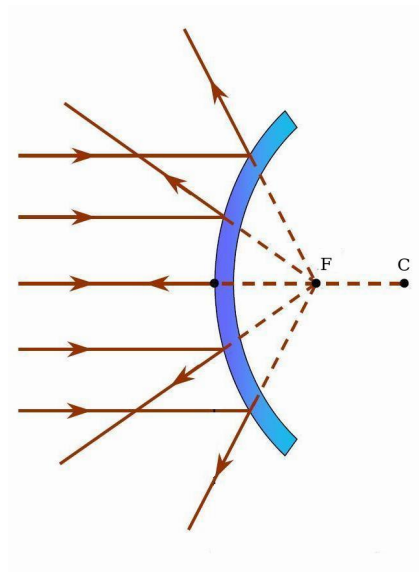
Geometrija je takva će konkavno zrcalo sabirati zrake. Točka u koju se paralelne zrake sabiru (fokusiraju) zovemo **fokus konkavnog zrcala**. Konveksno zrcalo pak paralelne zrake rasipa. Kada reflektirane zrake produžimo unatrag, one se sabiru u **fokusu konveksnog zrcala**:

⁵Svakako imaju dva kuta ista jedan kut im je 90° jer su oba pravokutna, a drugi kut im je isti jer $\theta_1 = \theta_2$. Dakle, i treći kut im je isti jer je zbroj kuteva u trokutu 180°

⁶Pamti: konkavno = udubljeno (japanski 凹); konveksno = ispupčeno (japanski: 凸).



(a) Konkavno zrcalo sabire zrake u fokus. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Law_of_reflection.svg

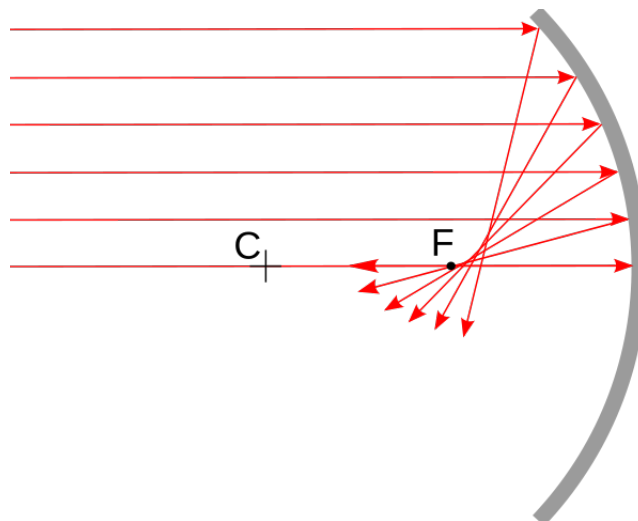


(b) Konveksno zrcalo rasipa zrake. Izgleda kao da one izlaze iz fokusa. Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mirror2.JPG>

Uzimamo da fokus leži na onom pravcu oko kojeg je zrcalo simetrično (tzv. optička os)⁷

Da smo pažljivo primijenili zakon refleksije, primijetili bismo da se zrake neće zapravo fokusirati u jednu točku. Zrcalo je sfera i zbog toga zrake koje se reflektiraju na dijelovima zrcala koji su dalje od središta (tj. optičke osi) odstupaju više od fokusa (ovo zovemo *sferna aberacija*):

⁷Bez ovog zahtjeva fokus ne bi bio jedinstveno definiran. Naime, ako promotrimo dva snopa paralelnih zraka koji se gibaju u različitim smjerovima, vidjet ćemo da se ta dva snopa fokusiraju u različitim točkama.



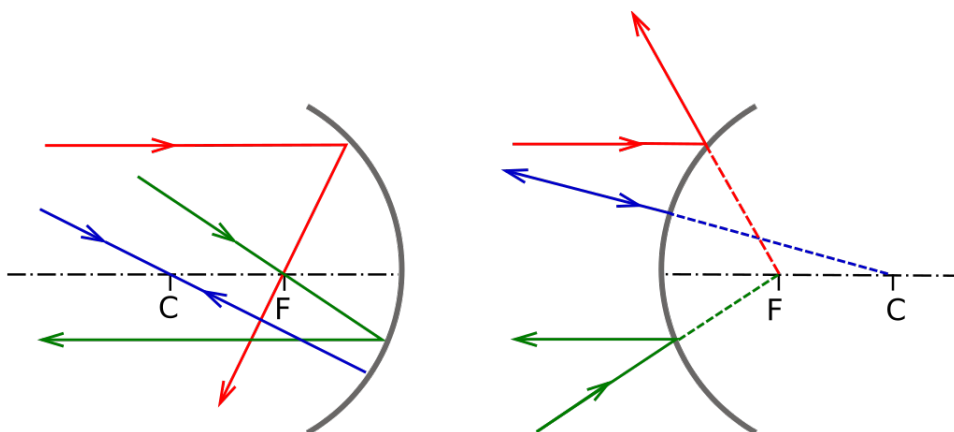
Slika 31: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aberration_de_sph%C3%A9ricit%C3%A9_d%27un_miroir_sph%C3%A9rique_concave.svg

Ako pretpostavimo da radimo samo sa zrakama koje su blizu središta sfere, onda će se sve zrake približno fokusirati u jednu točku (ovo je tzv. *paraksijalna aproksimacija*). Dakle, ukoliko je veličina sfernog zrcala malena u odnosu na radijus sfere (tj. zrcalo je samo sitni komadić neke velike sfere), onda će se približno sve zrake fokusirati u jednu točku (fokus).

Da bismo mogli analizirati i crtati slike koje stvaraju sferna zrcala, dovoljno je držati na umu da:

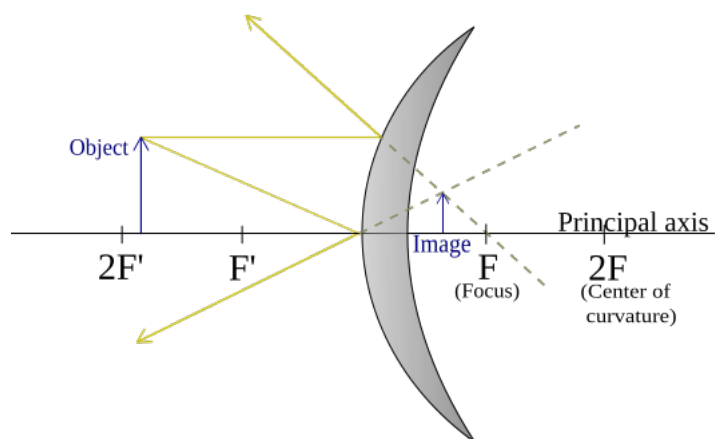
1. Zraka koja horizontalno (tj. paralelno s optičkom osi) pada na zrcalo se reflektira u fokus (prema definiciji fokusa)
2. Preokrenemo li zraku iz 1 u suprotnom smjeru, vidimo da se zraka koja prolazi kroz fokus mora reflektirati u horizontalnom smjeru.
3. Zraka kroz centar pada točno okomito na zrcalo, stoga se reflektira unatrag za 180°

Dijagramatski:



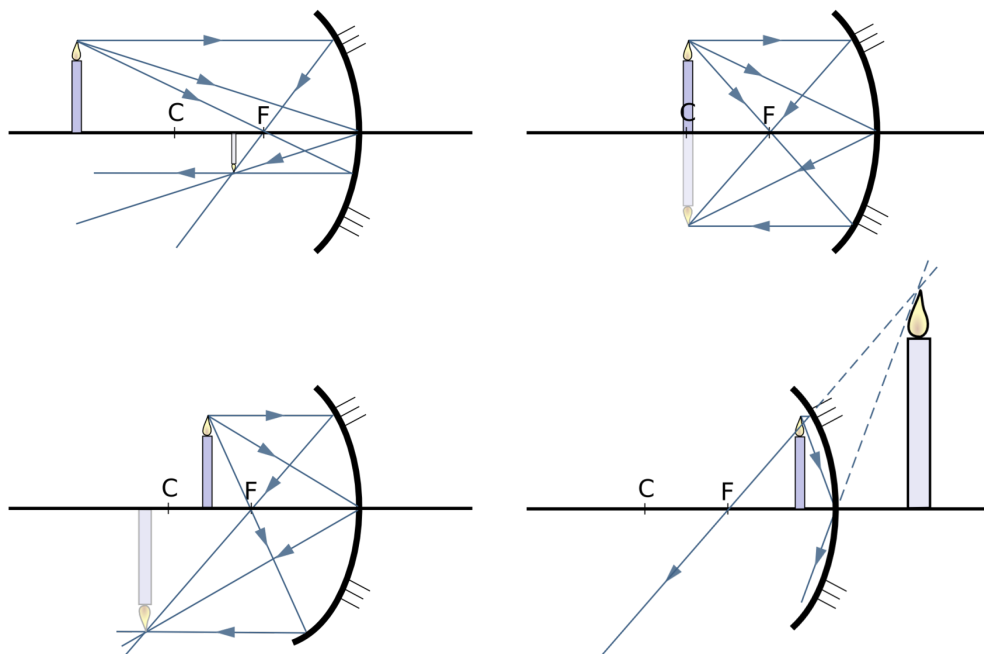
Slika 32: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Espejos_esfericos-rayos.svg

Konveksna zrcala rasipaju zrake, stoga će uvijek stvoriti virtualnu umanjenu sliku:



Slika 33: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Convexmirror_raydiagram.svg

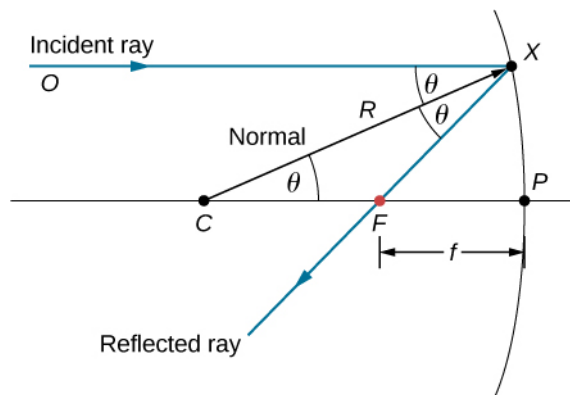
Konkavno zrcalo ima više slučajeva:



Slika 34: Formacija slike u konkavnim zrcalima. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Concavo_1.png

Za daleke predmete, konkavno zrcalo stvara realnu, umanjenu i preokrenutu sliku. Kako približavamo predmet fokusu, tako se slika uvećava - između centra i fokusa slika je uvećana. Kada prijeđemo fokus, slika više nije realna, već postane virtualna (i uvećana i uspravna).

Konačno, koristeći ovu geometriju (za zrake blizu optičkoj osi), možemo izvesti vezu između centra sfernog zrcala C i fokusa F : fokus F će se nalaziti na pola puta između centra i zrcala. Drugim riječima, ako udaljenost zrcala od centra (radijus sfere) označimo s R , a udaljenost fokusa od zrcala s f , onda imamo $f = \frac{R}{2}$. Koristeći ovu relaciju možemo konstruirati zrcalo sa željenom fokusnom udaljenosti f .



Slika 35: Izvor: [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/University_Physics_\(OpenStax\)/University_Physics_III_-_Optics_and_Modern_Physics_\(OpenStax\)/02%3A_Geometric_Optics_and_Image_Formation/2.03%3A_Spherical_Mirrors](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/University_Physics_(OpenStax)/University_Physics_III_-_Optics_and_Modern_Physics_(OpenStax)/02%3A_Geometric_Optics_and_Image_Formation/2.03%3A_Spherical_Mirrors)

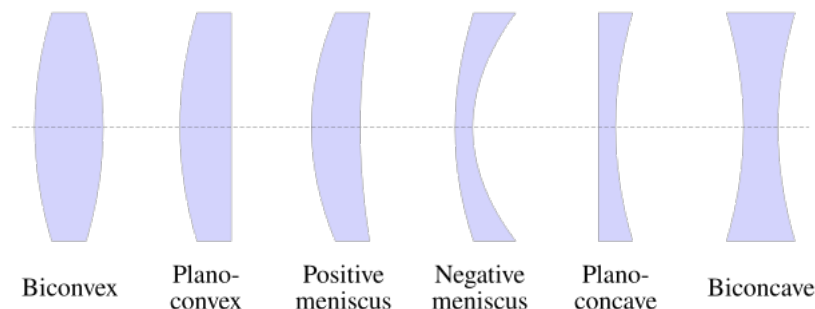
Promotrimo prvo trokut CXF . Kako taj trokut ima dva ista kuta, mora biti jednakokrakan. Dakle, krakovi CF i FX su istih duljina. Dužine FX i FP su približno jednake kada je upadna zraka blizu optičkoj osi, odnosno za male kutove θ (paraksijalna aproksimacija). Dakle, dužine CF i FP moraju biti približno jednake, odnosno F mora biti na približno pola puta između zrcala i centra C.

8 Leće

Leće propuštaju i lome (refraktiraju) svjetlost.

8.1 Sferne leće

Leće obično konstruiramo od materijala koji slama svjetlost (npr. staklo) i obično tako da kombiniramo sferne površine. Jednu stranu leće možemo izravnati, udubiti u obliku sfere (nekog radijusa) ili učiniti da je ispupčena u obliku sfere - ovo su tzv. **sferne leće**. Moguće kombinacije su prikazane na sljedećoj slici.



Slika 36: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lenses_en.svg

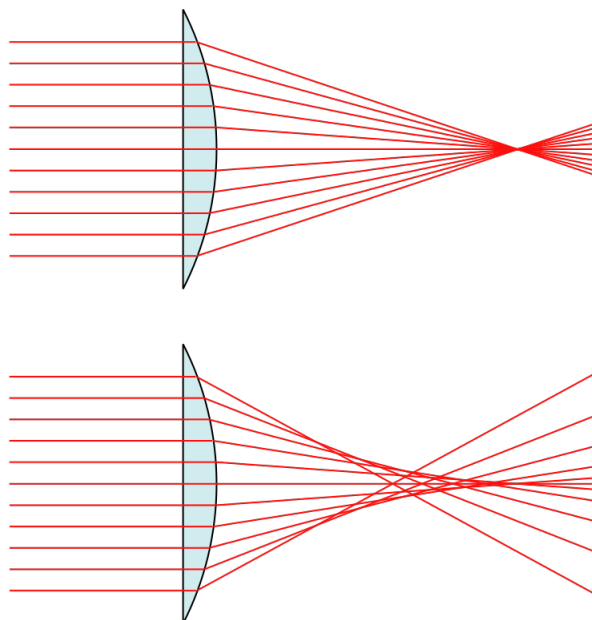
Jedini slučaj koji nije naveden je leća koja obje stranice ima ravne, no to je samo obični stakleni prozor. U tom slučaju paralelne zrake izlaze u paralelne zrake (nemamo fokusiranja ni rasipanja zraka).

Svaka leća dakle ima dva radijusa - radijus sfere koja definira lijevu stranicu i radijus sfere koja definira desnu stranicu. Ako je jedna stranica ravna, nju možemo shvatiti kao dio sfere jako velikog (beskonačnog) radijusa.

Radijusi tih dviju površina određuju lećino ponašanje. Generalno, leće možemo razbiti u dvije klase: **divergentne** (koje divergiraju, tj. rasipaju zrake) i **konvergentne** (koje konvergiraju, tj. fokusiraju zrake).

Bikonveksne leće (koje su ispupčene s obje strane) i planokonveksne će konvergirati zrake svjetla, a bikonkavne i planokonkavne (koje su udubljene s obje strane) će rasipati. Općenito, udaljenost fokusa od leće je karakteristika leće koja je određena radijusom zakrivljenosti njenih površina i dana je jednadžbom izrade leće (eng. *lensmaker's equation*) - vidi https://en.wikipedia.org/wiki/Lens#Lensmaker's_equation

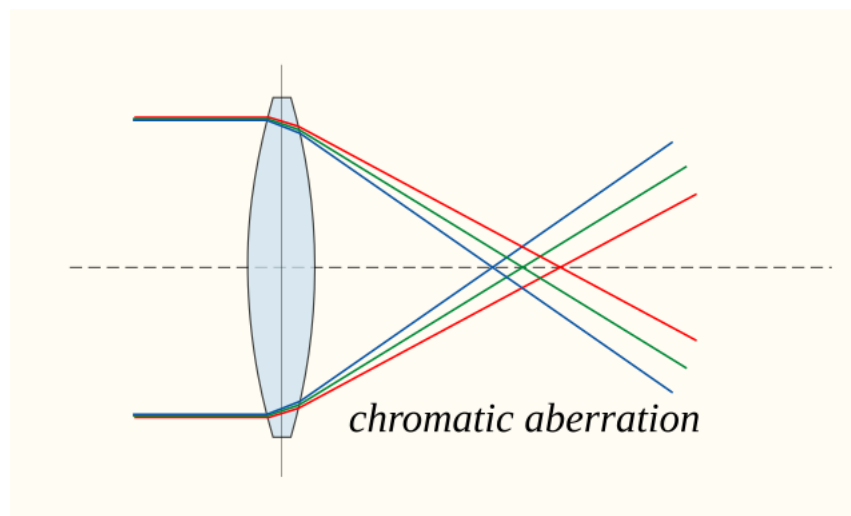
Kod sfernih leća (slično kao i kod sfernog zrcala) se javlja sferna aberacija:



Slika 37: Idealna leća fokusira sve paralelne zrake u točku. Stvarna sferna leća zrake uspije fokusirati samo na neko malo područje. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Spherical_aberration_2.svg

Što su zrake udaljenije od optičke osi, to je odstupanje veće. Dakle, u idealnom slučaju se sve zrake ponašaju kao one blizu optičke osi (paraksijalna aproksimacija).

Kako refrakcija može svjetlost rastaviti na boje, kod stvarnih leća se javlja i tzv. *kromatska aberacija*:



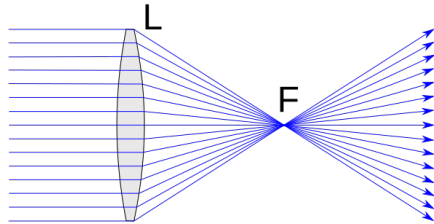
Slika 38: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Chromatic_aberration_lens_diagram.svg

Što je leća tanja, to je kromatska aberacija manje izražena.

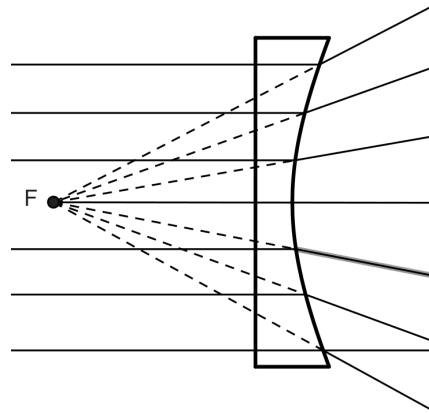
8.2 Idealne leće

U stvarnim lećama zraka se zakreće pri ulasku u leću i pri izlasku iz nje. Kako ne želimo deteljno analizirati svaku zraku koristeći Snellov zakon, prelazimo na slučaj idealne leće. Optička os je, kao prije, pravac koji prolazi kroz centar leće s obzirom na koji je leća simetrična.

Idealne leće su *tanke* - one efektivno zraku svjetlosti slome jednom (i nemaju kromatsku aberaciju). Fokus je definiran slično kao za zrcala. Idealna konvergentna leća snop zraka koje su paralelne s optičkom osi refraktira tako da se on na drugoj strani fokusira u jednu točku - ovo je **fokus konvergente leće** (stvarne leće imaju aberacije). Idealna divergentna leća snop paralelnih zraka rasipa, no ako slomljene zrake produžimo unatrag, izgleda kao da izviru iz jedne točke - ovo je **fokus divergentne leće**:



(a) Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Convex_lens_-_perfect.svg

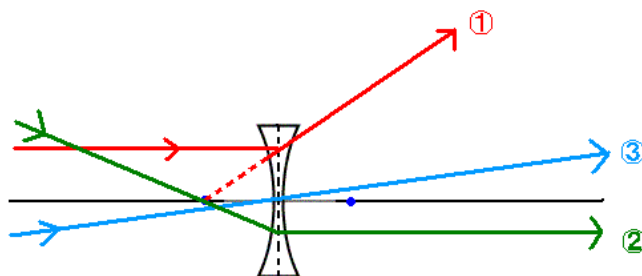


(b) Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:HyperboleLentille.svg>

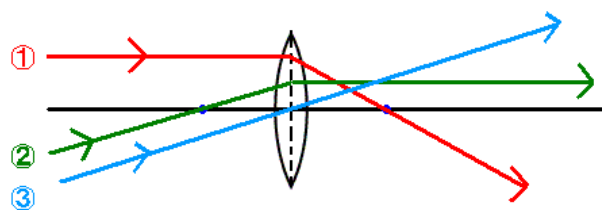
Da bismo mogli analizirati i crtati slike koje stvaraju tanke leće, dovoljno je držati na umu da:

1. Zraka koja horizontalno (tj. paralelno s optičkom osi) pada na leću se lomi prema fokusu (po definiciji).
2. Preokrenemo li zraku iz 2 u suprotnom smjeru, vidimo da se zraka koja prolazi kroz fokus mora lomiti prema horizontalnom smjeru.
3. Zraka koja prolazi kroz središte leće ne mijenja smjer. Ovo bi valjalo objasniti. Naime, blizu centra će dva kraja leće biti paralelni jedno drugome. Za tanku leću će zraka ući blizu centra i izaći blizu centra, stoga se zraka lomi na dvjema paralelnim granicama. Dakle, zraka se lomi prvo u jednom smjeru kada uđe iz zraka leću, potom se malo pomakne unutar leće i onda lomi u suprotnom smjeru (za isti kut) kada izlazi iz leće u zrak. Dakle ulazna i izlazna zraka su paralelne, ali izlazna zraka je pomaknuta malo u odnosu na ulaznu. Za tanku leću je pomak unutar leće je sitan, stoga možemo uzeti da ulazna i izlazna zraka leže na istom pravcu.

Dijagramatski:

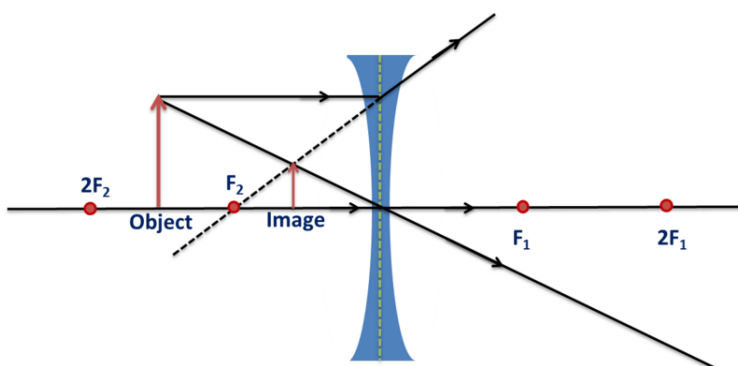


(a) Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Concave_lens_lights.PNG



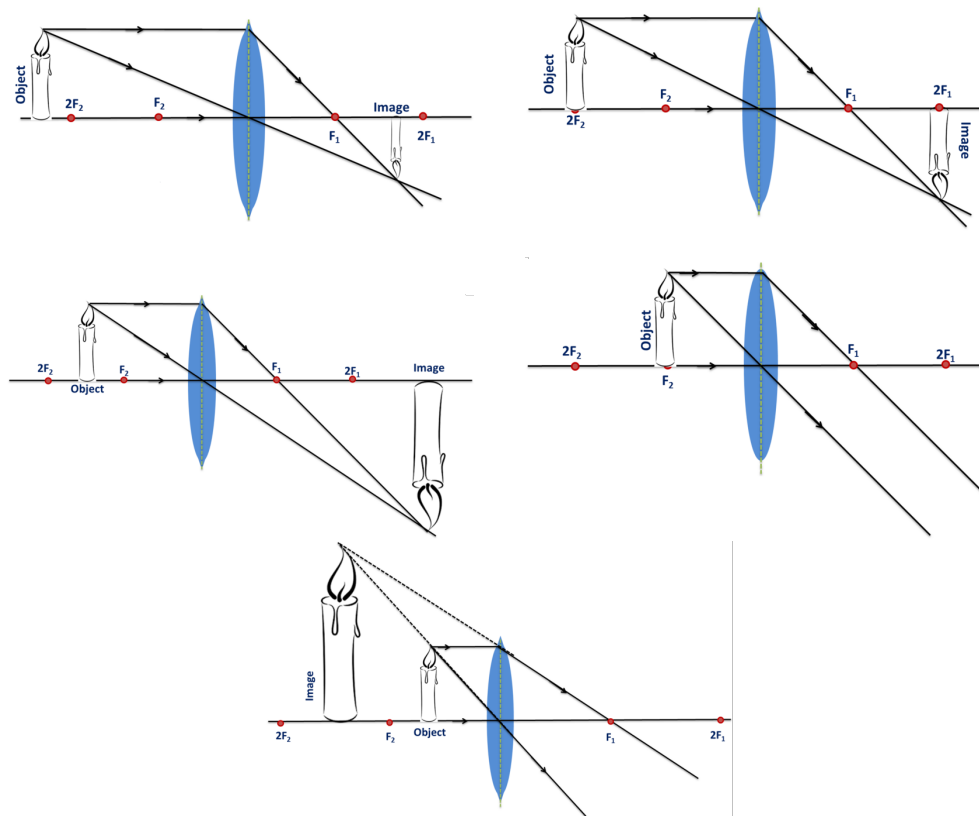
(b) Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Convex_lens_light.PNG

Divergentne leće rasipaju svjetlost, stoga je njihova slika uvijek imaginarna i umanjena (kao i za konveksno zrcalo):



Slika 41: Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Image_formation_in_biconcave_lens.png

Konvergentna leća (kao i konkavno zrcalo) ima više slučajeva:

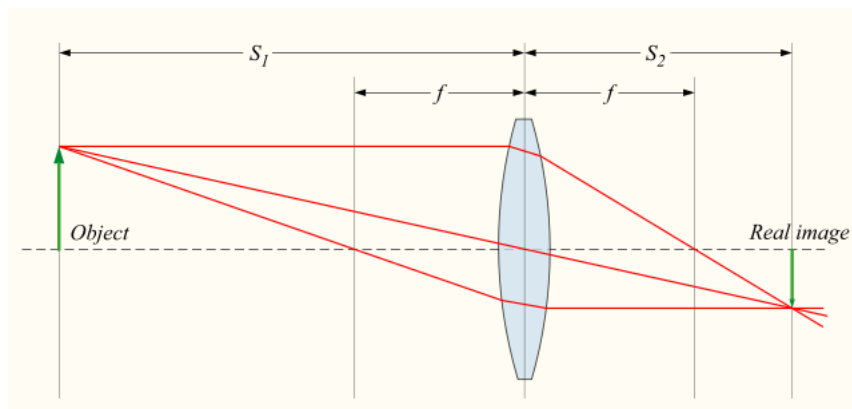


Slika 42: Formacija slike u konvergentnim lećama. Izvor: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Convex_lens_-_Object_at_beyond_the_Centre_of_curvature.png

Situacija je identična kao za konkavno zrcalo. Prvo, daleki predmet stvara realnu, umanjenu i preokrenutu sliku. Kako predmet približavamo leći, slika se povećava, a slika i predmet će biti iste veličine upravo ona kada su na istoj udaljenosti od leće (iz formule leće, koju smo izveli u dodatku, se odmah vidi da je ovo udaljenost $2f$). Ako dalje nastavimo približavati predmet, slika sada postane uvećana (a ostaje okrenuta). Kada predmet prijeđe fokus slika više nije realna, već virtualna (i uvećana i uspravna).

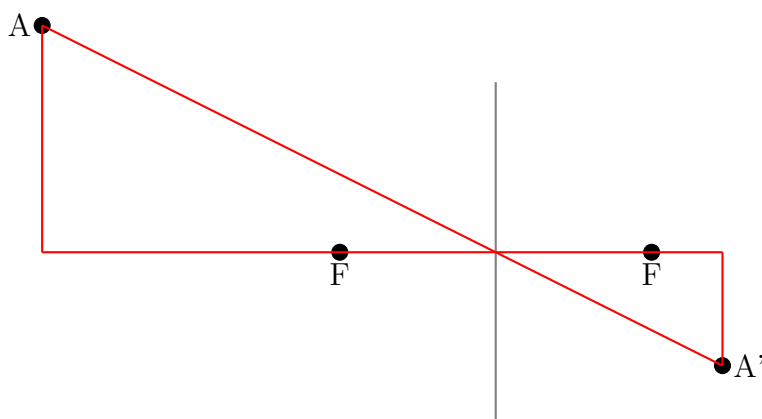
9 Dodatak: Optička formula

Pretpostavimo da imamo konvergentnu leći i nacrtajmo tri karakteristične zrake:



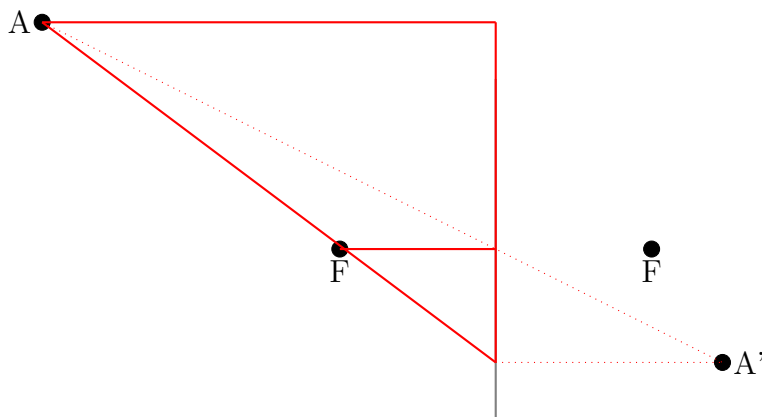
Slika 43: Izvor: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lens3.svg>

Prvo obratimo pažnju na sljedeća dva trokuta:



Točka A predstavlja vrh predmeta (objekt), a točka A' vrh (preokrenute) slike. Ovo su dva pravokutna trokuta, a kut uz leću ima je isti, stoga su to slični trokuti (svi kutevi su im isti). Slični trokuti su istog oblika (ali možda različitih veličina), stoga im odgovarajuće stranice moraju biti u istim omjerima. Primjerice, ako je nasuprotna kateta prvog duplo veća od nasuprotne katete drugog, onda i priležeća kateta prvog mora biti duplo veća

Sada obratimo pažnju na sljedeća dva trokuta:


$$\frac{d_o}{f} = \frac{h_o + h_i}{h_i} = \frac{h_o}{h_i} + 1 = \frac{d_o}{d_i} + 1$$

Podijelimo li obje strane s d_o , dobit ćemo tzv. formulu leće:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_o}$$

Primjerice, iz formule leće možemo zaključiti kada će slika i predmet biti na istoj udaljenosti od leće. Ako su i predmet i slika na istoj udaljenosti, onda $d_o = d_i = d$. Ovo znači da:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d} + \frac{1}{d} = \frac{2}{d} \Rightarrow f = \frac{d}{2} \Rightarrow d = 2f$$

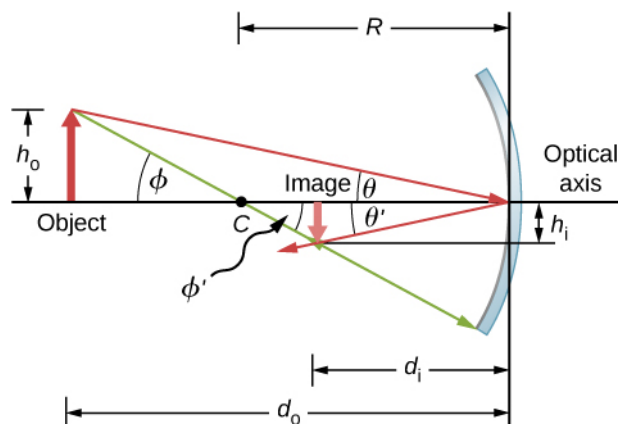
Općenito, formula leće nam omogućuje da iz udaljenosti fokusa (što je karakteristika leće) i položaja predmeta izračunamo položaj slike (a samim time i veličinu slike koristeći relaciju proporcionalnosti $\frac{h_i}{h_o} = \frac{d_i}{d_o}$).

Za divergentnu leću imamo gotovo identičnu situaciju, samo je slika uspravna (a ne preokrenuta) i virtualna, što za leće znači da se nalazi na istoj strani kao predmet. Dakle, ista formula $\frac{1}{f} = \frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_o}$ će vrijediti i za divergentnu leću ako se dogovorimo oko predznaka za d_i i f . Ukratko:

1. Ono što se nalazi na strani gdje zrake prolaze (odnosno na strani gdje bi nastala realna slika) je *pozitivno*. Za leće su d_i i f pozitivni na suprotnoj strani leće od predmeta (svjetlost prolazi kroz leću), a za zrcala na istoj strani gdje i objekt (svjetlost se reflektira o zrcalo).
2. Uvodimo i dogovor oko predznaka visine slike h_i . h_i je pozitivan za uspravnu sliku (ona koja je iznad optičke osi), a negativan za preokrenutu sliku.

Primijetimo da je sada magnifikacija $M = \frac{h_i}{h_o}$ negativna za preokrenutu sliku. Dakle, relacija $\frac{h_i}{h_o} = \frac{d_i}{d_o}$ više nije točna jer je d_i pozitivan za konvergentnu leću, a h_i je negativan (slika je preokrenuta). Točna formula je sada $M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}$.

Na isti način možemo izvesti i formulu za sferna zrcala.



Slika 44: Izvor: [https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/University_Physics_\(OpenStax\)/University_Physics_III_-_Optics_and_Modern_Physics_\(OpenStax\)/02%3A_Geometric_Optics_and_Image_Formation/2.03%3A_Spherical_Mirrors](https://phys.libretexts.org/Bookshelves/University_Physics/University_Physics_(OpenStax)/University_Physics_III_-_Optics_and_Modern_Physics_(OpenStax)/02%3A_Geometric_Optics_and_Image_Formation/2.03%3A_Spherical_Mirrors)

Promotrimo crvenu liniju koja ide od vrha predmeta (objekta) do sredine zrcala. Ona sa predmetom i optičkom osi zatvara pravokutni trokut. Refleksija te crvene zrake (manja crvena zraka od sredine zrcala do vrha slike) isto zatvara pravokutni trokut sa optičkom osi i slikom. Zbog zakona refleksije $\theta = \theta'$, stoga su ta dva trokuta slična. Dakle, kao i za leće, imamo $\frac{h_i}{h_o} = \frac{d_i}{d_o}$. U ovoj formuli je h_i pozitivan broj (duljina stranice trokuta, tj. veličina slike). No, slika je u ovom slučaju preokrenuta, stoga, ukoliko se želimo držati dogovora o predznaku, bolje bi bilo pisati $\frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}$.

Sada promotrimo zelenu liniju (od vrha predmeta preko središta zakrivljenosti C do zrcala). Ona sa optičkom osi, predmetom i slikom zatvara 2 pravokutna trokuta s vrhom u C . Ta dva trokuta u C imaju zajednički kut, stoga su slični. Interesantne su nam stranice koje leže na optičkoj osi. Za desni trokut ta stranica ide od centra C do slike pa joj je duljina $R - d_i$ (R je radijus zrcala, tj. udaljenost točke C od zrcala). Za lijevi trokut ta stranica ide od predmeta do centra pa joj je duljina $d_o - R$. Dakle, iz sličnosti imamo:

$$\frac{h_o}{h_i} = \frac{d_o - R}{R - d_i}$$

Drugim riječima:

$$\frac{d_o}{d_i} = \frac{d_o - R}{R - d_i}$$

Preostaje jedino algebarski srediti ovaj izraz. Pomnožimo li obje strane s d_i , a potom i s $R - d_i$, dobit ćemo:

$$d_o(R - d_i) = (d_o - R)d_i \implies d_oR - d_o d_i = d_o d_i - R d_i$$

Prebacimo li sve R na lijevu stranu, dobijemo:

$$d_oR + d_iR = d_o d_i + d_o d_i \implies (d_o + d_i)R = 2d_o d_i$$

Iz ovoga odmah vidimo da:

$$\frac{R}{2} = \frac{d_o d_i}{d_o + d_i}$$

Drugim riječima:

$$\frac{2}{R} = \frac{d_o + d_i}{d_o d_i} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i}$$

Za zrcala s vrlo velikim radijusom zakrivljenosti (paraksijalna aproksimacija) imamo $f = \frac{R}{2}$, stoga:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i}$$

Ista formula vrijedi i za konveksno zrcalo (divergentno zrcalo) ako prihvatimo dogovor oko predznaka za f i d_i : za konveksno zrcalo su f i d_i negativni (jer se nalaze na suprotnoj strani zrcala od predmeta, gdje zrake ne prolaze).

Dakle, jednom kada se dogovorimo oko predznaka, **u svim slučajevima** (i za leće i zrcala) **imamo jedno te istu formulu** (tzv. *optičku formulu*):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_o} + \frac{1}{d_i}$$

Osim ovoga imamo i formulu koja određuje magnifikaciju (uvećanje):

$$M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{d_i}{d_o}.$$