Teorija relativnosti

Duje Jerić- Miloš

29. kolovoza 2025.

1 Uvod

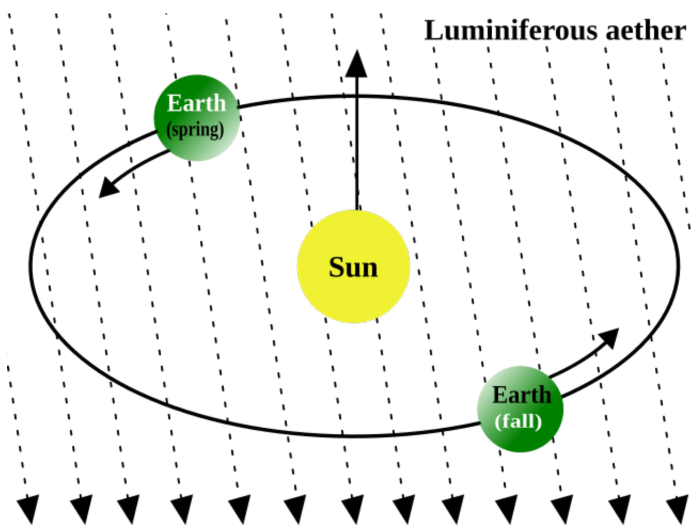
Specijalna teorija relativnosti je, u osnovi, zasnovana na tzv. **principu relativnosti**. On tvrdi da bi fizikalni zakoni trebali biti isti za sve inercijalne promatrače, hoće reći za one promatrače koji ne ubrzavaju. Zamislimo, primjerice, osobu u kabini nekog broda koji se giba savršeno jednoliko (za ovo bi i more trebalo biti savršeno mirno). Ako su svi prozori prekriveni tako da osoba ne vidi vani, onda ne postoji eksperiment koji bi ta osoba mogla napraviti da odredi giba li se brod ili ne. Ovo možemo u određenoj mjeri iskusiti kada brod tek kreće - ponekad nije jasno krećemo li mi ili pak pristaje susjedni brod.

Bitno je navesti da općenito ne možemo govoriti o *apsolutnom gibanju*, već samo gibanju u odnosu na nešto. Zamislimo, primjerice, da smo daleko od svega u crnilu svemira. U jednom trenutku pokraj nas prozuji neki astronaut. Tko se u tom slučaju giba, a tko miruje? Iz naše perspektive, naravno, astronaut se giba, a mi mirujemo. Ako pak pitamo astronauta, on će tvrditi da je ON taj koji miruje, a mi se gibamo. U konačnici, obje tvrdnje su valjane i bolje bi bilo reći da se mi i astronaut gibamo jedno u odnosu na drugog. Kada smo na Zemlji onda imamo tlo i razne druge predmete i objekte (kuće, stabla i sl.) koji miruju u odnosu na tlo. Zato u svakodnevnom životu možemo reći da se brod "giba" ako se giba u odnosu na kopno (luku), a "miruje" ako miruje u odnosu na kopno.

Ovaj princip, u osnovi, nije u Einsteinovo vrijeme bio ništa novo - već je bio poznat i u Galilejevo vrijeme te se koristio u kontekstu mehanike. Einsteinova ideja je bila da taj princip primijeni i na (u to vrijeme novu) teoriju elektromagnetizma. Konkretno, Maxwellove jednadžbe, koje modeliraju ponašanje elektriciteta, magnetizma i svjetlosti, bi trebale imati isti oblik za sve inercijalne promatrače.

Ovo je bilo u sukobu s drugim viđenjem u to vrijeme prema kojem je postojao određeni "povlašteni" sustav u kojem Maxwellove jednadžbe imaju uobičajeni oblik. Naime, mnogi fizičari su tada vjerovali da postoji određena tvar *eter* koja ispunjava sav prostor i omogućuje širenje svjetlosti. Dakle, vjerovali su da se i svjetlosni valovi šire nekim medijem na isti način kao zvuk ili potres ili, u konačnici, valovi na vodi. Ovo bi značilo da, ako se gibamo u odnosu na taj medij, primjerice ususret svjetlosnom valu, mjerimo veću brzinu svjetlosti nego kada se gibamo od vala.

Ovo nas dovodi i do eksperimenta koji je pobio teoriju etera, a potvrdio princip relativnosti. Bez da ulazimo u detaljan opis eksperimenta, reći ćemo samo da su Michelson i Morley uspjeli usporediti brzinu svjetlosti u smjeru kretanja Zemlje sa brzinom svjetlosti okomitom na taj smjer.



Slika 1: Zemlja se giba kroz eter. Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:AetherWind.svg`

Dobili su da su te dvije brzine (do na eksperimentalnu grešku) *iste*. Zaključak koji moramo izvesti iz ovog (i još mnogih drugih eksperimenata) je sljedeći:

1. Svjetlost se ne širi nikakvim eterom, već može prolaziti i kroz vakuum.

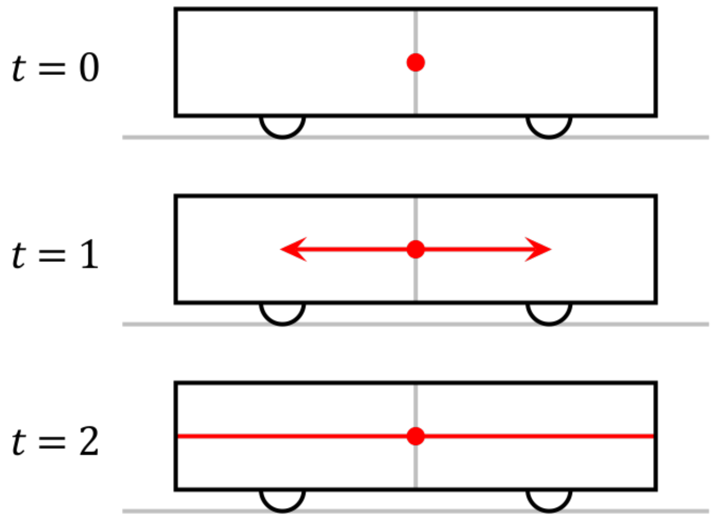
Svjetlosni val nije pobuda u nekakvom mediju nego samo predstavlja titranje električnog i magnetskog polja.

2. Svjetlost se za sve inercijalne promatrače giba istom brzinom, koja u vakuumu iznosi $c = 299\ 792\ 458 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ (otprilike $300\ 000 \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$).

Da je brzina svjetlosti za sve (inercijalne) promatrače ista je vrlo bitan zaključak i polazišna točka specijalne teorije relativnosti. Taj zaključak (dobiven eksperimentom!) je izvor više-manje svih čudnovatosti specijalne teorije relativnosti. Primjerice, zamislimo da se nalazimo u vlaku koji juri stalnom brzinom $0.5c$ (pola brzine svjetlosti) u odnosu na stanicu u koju pristiže. Zamislimo da sada u tom vlaku upalimo laser u smjeru kretanja vlaka. Kojom brzinom se giba laserska zraka za nekog promatrača na stanici u koju taj vlak pristiže? Naivni odgovor bi bio brzina vlaka + brzina svjetlosti, dakle $0.5c + 1c = 1.5c$. Naravno, ovo nije točno jer brzina svjetlosti za sve inercijalne promatrače mora biti c. Dakle, odmah vidimo da "zdravorazumsko" zbrajanje brzina nije točno i da imamo puno interesantnije ponašanje.

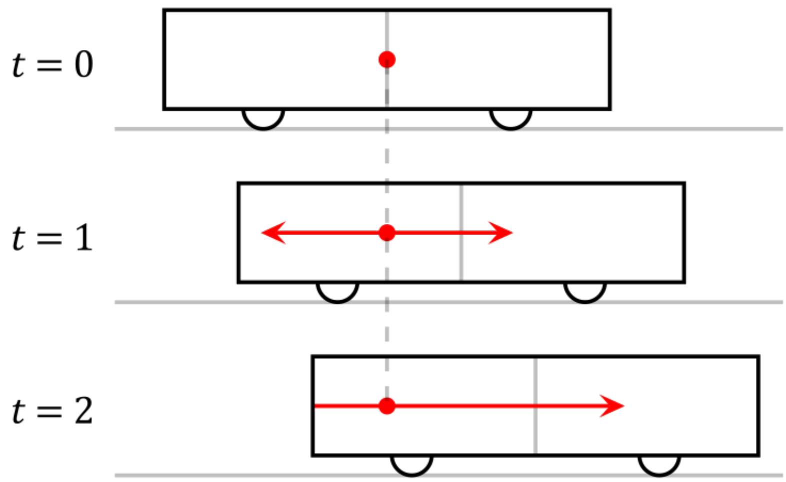
2 Istovremenost nije ista za sve promatrače

Ključna činjenica koja bi se valjala što prije usvojiti je sljedeća: **događaji koji su istovremeni za jednog promatrača neće nužno biti istovremeni za promatrača koji se giba u odnosu na njega**. Promotrimo, recimo, situaciju gdje imamo lampu u središtu nekog vagona. Za osobu koja sjedi u vagonu, lampa se upali i nakon malo vremena svjetlost istovremeno dođe do oba kraja vagona:



Slika 2: Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Traincar_Relativity1.svg`

Za osobu koja sjedi vani na stanici i za koju se vagon giba, lampa se upali, no svjetlost prvo dođe do stražnjeg dijela vagona (jer on putuje ususret svjetlosti), a tek onda dođe do prednjeg dijela vagona:



Slika 3: Crveno je točka u kojoj je nastao impuls svjetla (ta točka je fiksna za promatrača na stanici). Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Traincar_Relativity2.svg`

Tko je u pravu? Kako ne možemo govoriti o apsolutnom gibanju moramo zaključiti da su *oba* promatrača u pravu - situacija je samo opisana iz dvije različite perspektive. Naime, oba promatrača se slažu da imamo dva događaja:

1. Svjetlost udari o stražnji dio vagona
2. Svjetlost udari o prednji dio vagona

Oba promatrača se, doduše, *neće* složiti oko toga jesu li ti događaji istovremeni, niti oko toga koji se dogodio prije, a koji kasnije. Tako za automobil koji pretječe vagon (pa se za njega vagon giba u suprotnom smjeru nego za promatrača koji sjedi vani), svjetlost prvo udari o prednji dio vagona, a tek onda o stražnji.

Dakle, općenito možemo zaključiti sljedeće. *Događaji* (nešto što se dogodilo na nekom mjestu u nekom trenutku) su apsolutni, npr. svi promatrači će se složiti oko toga jesu li se neke dvije čestice sudarile. S druge strane, kronološke relacije među tim događajima (koji događaj je raniji, a koji kasniji) nisu.

3 Sinkronizacija satova

U prethodnoj sekciji smo vidjeli da je pojam *istovremenosti* problematičan (nije isti za sve promatrače). Uz ovo je usko vezana činjenica da **signale možemo mjeriti samo kada dođu do nas**. Dakle, **određivanje vremena za događaje koji su se dogodili negdje daleko od nas je problematično**. Primjerice, kada se svjetlost sudari sa vagonom, mi to nećemo odmah znati. Izmjerit ćemo nešto tek onda kada se ta svjetlost odbije od vagona i odbijena svjetlost dođe do nas. Izmjerili smo *posljedicu* sudara svjetlosti s vagonom, a ne sami sudar. Zapravo, ono što mjerimo je sudar odbijene svjetlosti s našim mjernim instrumentom.

Općenito, svaki mjerni uređaj može mjeriti samo u svojoj neposrednoj blizini (lokalno). Primjerice, kod sluha, naše uši samo mogu mjeriti razlike u tlaku u njihovoj neposrednoj blizini. Prvo, zvučnik stvara zvuk (gura zrak) negdje daleko od nas. Te izmjene u gustoći i tlaku zraka zatim dolaze do nas (brzinom zvuka) i guraju naše bubnjiće. Konačno, titranje naših bubnjića se prenosi u živčane impulse i osjet sluha. Isto tako i kod vida - stanice u našim očima reagiraju samo na elektromagnetsko polje u njihovoj neposrednoj blizini. Kao i kod zvuka, izmjenama u tom polju treba vremena da od izvora stignu do nas.

Kako, dakle, za daleke događaje odrediti vremenske i prostorne koordinate? Primjerice, na nebu uočimo supernovu koja je udaljena 1000 svjetlosnih godina od Zemlje. To znači da je supernova nastala prije 1000 godina (još u srednjem vijeku), no svjetlost je tek sada došla do Zemlje. Slično tome, i Sunce vidimo kojih 8 minuta u prošlosti - dakle kada bi Sunce sada iznenada nestalo, ništa ne bismo primijetili prvih 8 minuta. Tek nakon 8 minuta bi se elektromagnetsko polje u blizini Zemlje ažuriralo i postalo bi jasno da Sunca više nema. Isto tako i kada šaljemo signale na Mjesec (npr. poruku nekom astronautu). Signalu treba otprilike 1s sekunda da od Zemlje dođe do Mjeseca, stoga će astronaut tek nakon 1s moći odgovoriti, a odgovoru će opet tako trebati 1s da dođe do Zemlje.

Dakle, naivno se čini da problem možemo riješiti na sljedeći način. Ako poznajemo udaljenost događaja od Zemlje d i brzinu svjetlosti c, onda možemo izračunati vrijeme koje će trebati svjetlosnom signalu da dođe do Zemlje $T = \frac{d}{c}$. Sada, ako na našem satu piše t u trenutku primanja signala, onda možemo reći da se signal odaslao u $t - T$.

Razmislimo ipak malo bolje. Prvo, udaljenost između dva tijela koja međusobno miruju u principu možemo mjeriti tako da tu udaljenost usporedimo s nekom poznatom duljinom (recimo štap duljine 1m). Primjerice, ako između dva tijela stane 5 takvih štapova, udaljenost je 5m.

Veći je problem mjeriti brzinu svjetlosti. Ne bismo li odredili brzinu, trebaju nam udaljenost i vrijeme. Konkretno, treba nam prostorna udaljenost između Zemlje i događaja "signal je odaslan" i vrijeme koje je potrebno signalu da stigne do Zemlje - upravo ono što pokušavamo odrediti.

Recimo da se na Mjesecu nalazi neki astronaut. Mi sa Zemlje šaljemo svjetlosni signal i možemo mjeriti samo trenutak u kojem je svjetlost odaslana - recimo da na našem satu piše 12:00:00 (točno podne). Astronaut isto tako može na svom satu zabilježiti samo trenutak u kojem je on primio signal - recimo na njegovom satu piše 06:00:01 (6 sati i 1 sekunda). Astronaut nam nekakvim signalom može dojaviti vrijeme koje je on zabilježio, no nemamo načina da direktno usporedimo naše vrijeme s astronautovim - ni mi ni on ne znamo što je na njegovom satu pisalo kada je na našem pisalo 12:00:00 (kada smo odaslali signal).

Tek kada smo satove sinkronizirali tako da znamo da naše 12:00:00 odgovara njegovom 06:00:00 [1], možemo reći da je svjetlost putovala 1s od Zemlje do Mjeseca. Očito pitanje je: kako onda sinkronizirati satove? Naivno, mogli bismo, *dok je astronaut na Zemlji*, usporediti satove i naštimati ih tako da pokazuju istu vrijednost. Ipak, da bi astronaut došao do Mjeseca, on mora ubrzati, što će (kao što ćemo kasnije vidjeti) poremetiti sinkronizaciju satova. Zaključujemo da *ne možemo direktno mjeriti brzinu svjetlosti u jednom smjeru.* Brzina koju dobijemo ovisi o sinkronizaciji satova.

Bolja metoda je stoga sljedeća. Na Mjesec postavimo zrcalo. Pošaljemo svjetlosnu zraku, ona se reflektira o zrcalo i vrati do nas. Sada na svom satu zapišemo trenutak u kojem smo odaslali zraku i trenutak u kojem se zraka vratila. Recimo da zraku odašiljemo kada na štoperici piše 0s, a ona se vrati kada piše 2 sekunde. Pitamo se: kada se zraka reflektirala na Mjesecu? *Po dogovoru* uzimamo da je to kada na štoperici piše 1s. Onda (i samo onda) možemo reći da svjetlost 1s putuje prema Mjesecu, reflektira se, potom 1s putuje natrag prema Zemlji. Općenito:

Definicija 1. Ako pošaljemo svjetlosni signal kada na našoj štoperici piše 0s, a signal se negdje daleko reflektira i reflektirana zraka vrati do nas kada

[1] Astronaut je u ovom slučaju svoj sat uskladio sa vremenskom zonom Cape Kennedyja UTC -5, a ne Europe UTC+1.

na štoperici piše T, onda je događaj "refleksija zrake" istovremen s time kada na štoperici piše $T/2$.

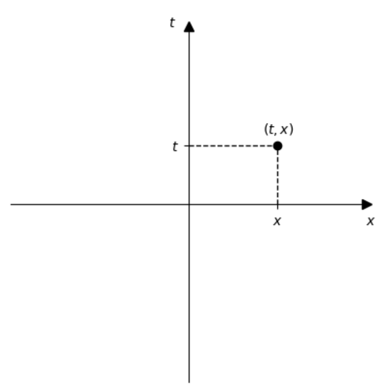
Kako brzinu svjetlosti ne možemo mjeriti u jednom smjeru, ovo je samo *konvencija*. Ovim smo, u osnovi, definirali istovremenost za prostorno udaljene događaje te sada možemo sinkronizirati svoj sat s onim na Mjesecu. Svi promatrači mogu mjeriti samo ovakvu "dvosmjernu" brzinu svjetlosti i njen iznos je za sve promatrače isti.

Naravno, mogli smo se dogovoriti da se refleksija dogodila u trenutku 1.9s. U tom slučaju bi svjetlost putovala 1.9s od nas, a 0.1s prema nama - i takva teorija bi bila potpuno konzistentna (iako pomalo čudna jer bi svjetlost uvijek išla brže prema nama nego od nas). O ovoj temi govori i sljedeći video: `https://www.youtube.com/watch?v=pTn6Ewhb27k`

4 Prostorno-vremenski dijagrami

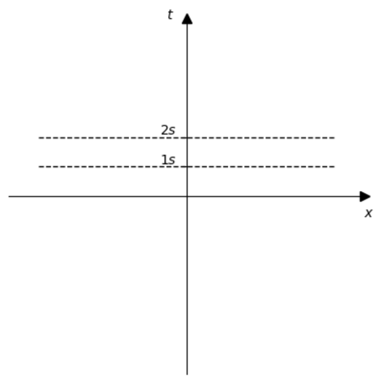
Svi promatrači se slažu oko toga koji *događaji* su se dogodili, stoga crtamo dijagrame na kojima jedna točka predstavlja jedan događaj. Taj prostor događaja se češće zove **prostor-vrijeme** (jer je događaj nešto što se dogodilo u nekom trenutku na nekom mjestu). Ipak, ovo pretpostavlja da smo prostor događaja isjekli na prostor i vrijeme zasebno, a to će ovisiti o promatraču.

Za početak nacrtajmo dvije međusobno okomite osi i točkama (događajima) pridružimo koordinate na sljedeći način:

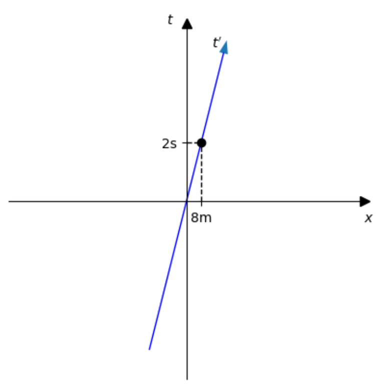


Specijalna teorija relativnosti je pomalo naopaka sa svojim dijagramima. Prvo, događaje ćemo označavati kao (t, x) (prvo vrijeme pa položaj), no uobičajeno je na *vertikalnoj osi* označiti vrijeme, a na horizonatlnoj udaljenost (za razliku od praktički svih drugih disciplina).

Ove koordinate opisuju situaciju iz perspektive promatrača koji miruje u ishodištu ($x = 0$), odnosno koji svojim postojanjem zauzima skup događaja koji se nalaze na t-osi. Za ovog promatrača skupovi događaja koji su se dogodili u prvoj sekundi $t = 1$s, drugoj sekundi $t = 2$s, itd. izgledaju kao:

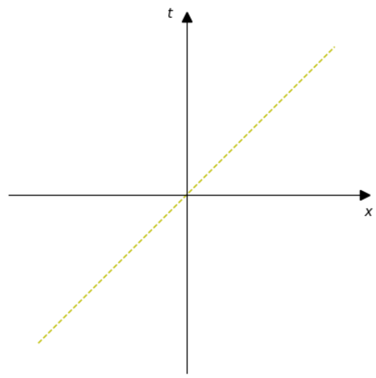


Na dijagramu gibanje tijela prikazujemo isto na uobičajen način. Primjerice, sljedeće tijelo se giba stalnom brzinom od 4m/s u pozitivnom smjeru (udesno) jer je u 2s prešlo 8m:

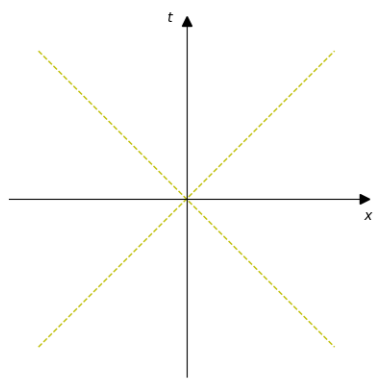


Ovo nije ništa drugo nego standardni x-t dijagram gibanja kojemu smo zamijenili osi (t-os crtamo vertikalno). Skup događaja (na dijagramu plavo) koje tijelo okupira možemo shvatiti kao njegovu vremensku os t'. Formalizam specijalne teorije relativnosti će nam omogućiti da se prebacimo u koordinatni sustav tog tijela (t', x') i događaje opišemo iz njegove perspektive.

Svjetlost se giba brzinom od 299 792 458m/s, stoga bi na dijagramu gibanje svjetlosti izgledalo kao pravac koji je jako priljubljen uz x os (prijeđe vrlo veliku udaljenost u vrlo malo vremena). Stoga, da bi dijagram bio jasniji, ne koristimo metre i sekunde, već druge mjerne jedinice. Primjerice, ako udaljenost mjerimo u svjetlosnim sekundama, onda u 1s svjetlost prijeđe 1 svjetlosnu sekundu i graf izgleda kao pravac pod nagibom od 45 stupnjeva:

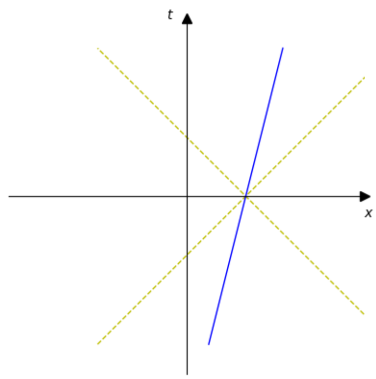


Ako nacrtamo dvije zrake - jednu koja se giba ulijevo, a druga udesno, onda dobijemo tzv. svjetlosni konus:

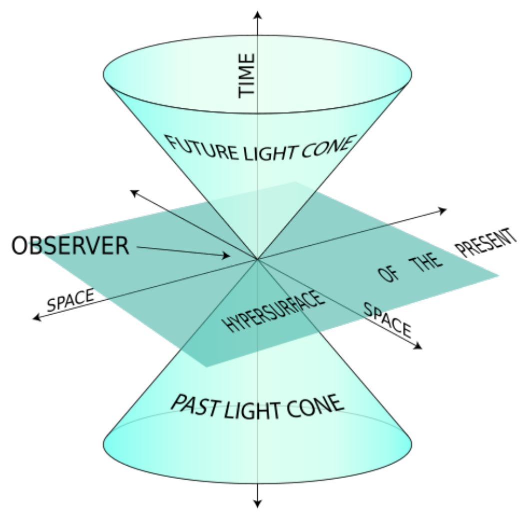


Obično se, doduše, i udaljenost i vrijeme mjere u metrima, gdje je vremenski period od 1m onaj u kojem svjetlost prijeđe 1m. Ako je t iskazan u sekundama, a c je brzina svjetlosti, onda je ct u metrima. Primjerice, za $ct = 1$m imamo $t = \frac{1}{299792458}$s. Ako je t vrijeme u sekundama, a x udaljenost u metrima, onda brzinu dobijemo kao $v = \frac{x}{t}$. Dakle, $\frac{v}{c} = \frac{x}{ct}$ pa vidimo da je, kada vrijeme mjerimo u metrima (kao ct), brzina iskazana kao udio brzine svjetlosti.

Od sada pretpostavljamo da je vrijeme iskazano u metrima. Brzina svjetlosti je sada 1 (ona prijeđe točno 1m u jedinici vremena), a brzina od 0.5 znači samo da se tijelo giba 50% brzine svjetlosti. Tvrdnja da se tijela ne mogu gibati brže od svjetlosti se svede na to da nagib pravca koji predstavlja gibanje tijela ne može biti veći od 45 stupnjeva, odnosno da pravac leži unutar svjetlosnog konusa:



Ako se gibanje tijela ne odvija samo po pravcu, već npr. po ravnini, onda za prostore $t = 1$, $t = 2$, itd. valja crtati čitave ravnine. Impuls svjetla koji smo u trenutku $t = 0$ odaslali iz ishodišta se širi u svim smjerovima kružno (u $t = 0$ je točka, u $t = 1$ je mala kružnica u $t = 2$ je malo veća kružnica, itd.). Dakle taj impuls svjetla na dijagramu postane stvarno konus (stožac):

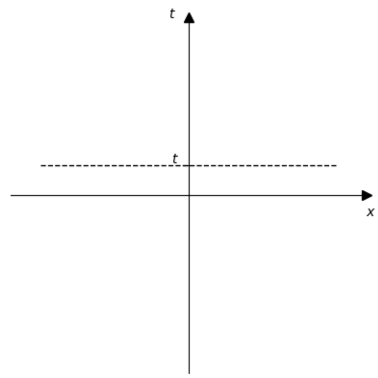


Slika 4: Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:World_line.svg`

Sliku otprije (jednodimenzionalni slučaj) dobijemo kada se ograničimo duž nekog pravca kroz ishodište ravnine.

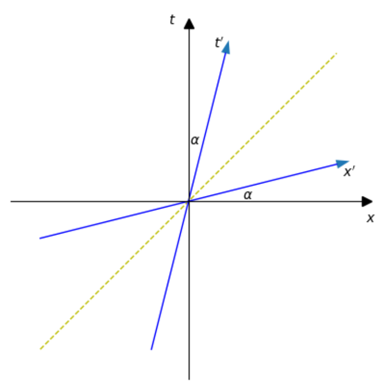
5 Prostor istovremenosti

Skup svih događaja koji su za nekog promatrača istovremeni s trenutkom t na njegovoj štoperici zovemo **prostorom istovremenosti** (ili jednostavno **prostorom**) u trenutku t za tog promatrača. To je sve ono što promatrač tvrdi da se dogodilo u trenutku t. Za promatrača koji na dijagramu miruje ovo su samo horizontalni pravci (ili u 2D slučaju ravnine):

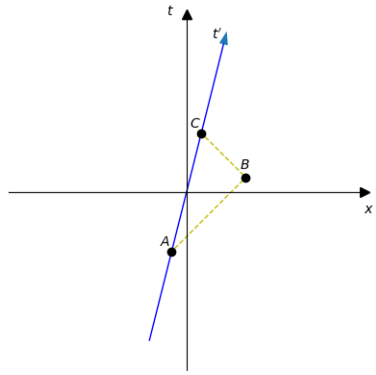


Vidjeli smo da promatrač koji se giba u odnosu na ovoga neće za iste događaje tvrditi da su istovremeni. Dakle, želimo pronaći prostor istovremenosti i za promatrača koji se giba.

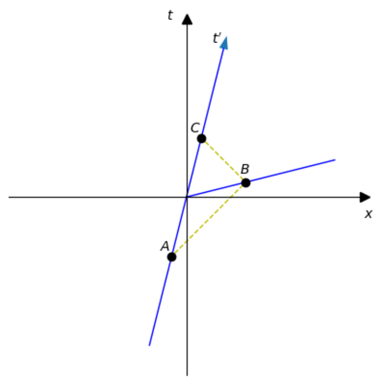
Teorem 2. *Pretpostavimo da vremenska os* t' *promatrača (koji se giba u odnosu na nas) sa našom osi* t *zatvara kut* α. *Prostor istovremenosti tog promatrača koji sadrži ishodište* $(0, 0)$ *(tj. njegova os* x'*) je pravac koji sa našom* x*-osi zatvara kut* α. *Drugim riječima, osi* t' *i* x' *su simetrične s obzirom na pravac pod* $45°$.



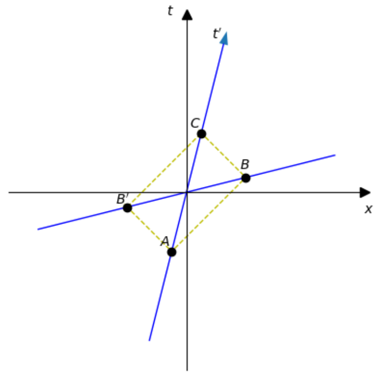
Dokaz. Prvo, promatrač odašilja svjetlosni signal udesno (događaj A). Taj signal se daleko od promatrača reflektira (događaj B), potom vrati do promatrača (događaj C). Prema definiciji istovremenosti, događaj B je istovremen s polovištem dužine koja veže A i C - odaberimo da je to O (ishodište) našeg (t, x) koordinatnog sustava:



Dalje, nacrtajmo polupravac s početkom u ishodištu koji prolazi kroz događaj B:

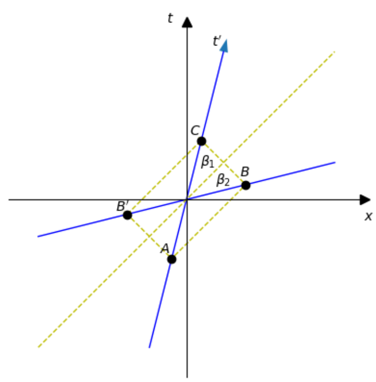


Sada napravimo istu stvar odašiljanjem signala ulijevo. Opet iz događaja A signal putuje dok se ne reflektira (događaj B') i stigne natrag do promatrača (događaj C):



Kako su su svi kutovi između svjetlosnih linija pravi, one tvore pravokutnik čiji su vrhovi događaji A, B, C i B'. Dužina CA je dijagonala tog pravokutnika. S druge strane, imamo polupravac koji prolazi kroz vrh B i ishodište te polupravac koji prolazi kroz nasuprotni vrh B' i ishodište. Trenutno ne znamo lome li se ta dva polupravca u ishodištu ili zajedno tvore ravnu liniju. Da uistinu tvore ravnu liniju vidimo npr. na sljedeći način. Ishodište je polovište dijagonale CA, a znamo da dijagonala pravokutnika BB' (ravna dužina) isto mora prolaziti kroz polovište. Dakle, ta dva polupravca prate ravnu liniju (dijagoalu BB') do ishodišta, potom od ishodišta opet prate tu istu ravnu liniju.

Presijecimo taj pravokutnik na dva jednaka dijela kao na slici:



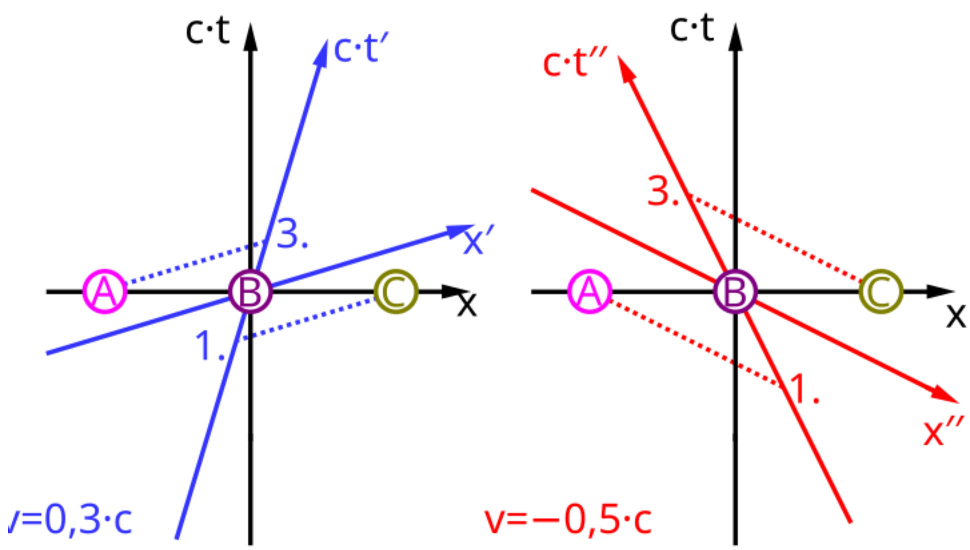
Pravac koji presijeca pravokutnik ujedno i dijeli kut COB na dva dijela - označimo ih sa β_1 i β_2. Kut između t i t' osi označimo s α_1, a kut između x i x' osi s α_2. Kako je kut između dijagonalnog svjetlosnog pravca koji raspolavlja pravokutnik i x osi 45°, imamo da je $\alpha_1 + \beta_1 = 45$ i $\alpha_2 + \beta_2 = 45$

Trokut s vrhovima u ishodištu O, C i B je jednakokračan (jer su mu krakovi OC i OB jednakih duljina jer se dijagonale pravokutnika raspolavljaju). Dakle, automatski i $\beta_1 = \beta_2$ (visina jednakokračnog trokuta mu dijeli kut na dva jednaka dijela). Iz ovoga automatski imamo i $\alpha_1 = \alpha_2$.

Nadalje, da su A i C bile razmještene bliže ili dalje od ishodišta, onda bi točka B i dalje ležala na istom pravcu. Naime, B mora biti pod istim kutom u odnosu na x os kao točka C u odnosu na t os (i isto tako mora biti jednako udaljena od ishodišta kao točka C). Dakle, prostor istovremenosti je zaista pravac.

□

Kako sada znamo crtati prostore istovremenosti za različite promatrače, promotrimo sljedeća dva dijagrama:



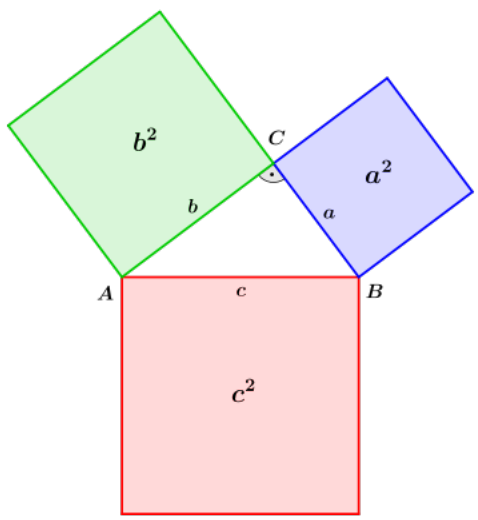
Slika 5: Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Minkowski-diagram-simultaneity.svg`

Za (t, x) promatrača su se događaji A, B i C dogodili istovremeno (na različitim udaljenostima) u trenutku $t = 0$. Za promatrača (t', x'), koji se u odnosu na (t, x) giba udesno, dogodio se prvo događaj C, potom B pa A. Za promatrača (t'', x''), koji se giba ulijevo, dogodio se prvo A, potom B pa C.

6 Pitagorin poučak

Rekli smo sve što se može reći koristeći isključivo pojam istovremenosti. Sada želimo shvatiti što se događa s **prostornim udaljenostima** i **vremenskim intervalima** kada fenomene opisujemo iz perspektive različitih promatrača. Treba nam, dakle, odgovarajući matematički alat koji možemo koristiti za izračun udaljenosti. To je ni više ni manje nego već (preko) 3000 godina poznat **Pitagorin poučak** [2]

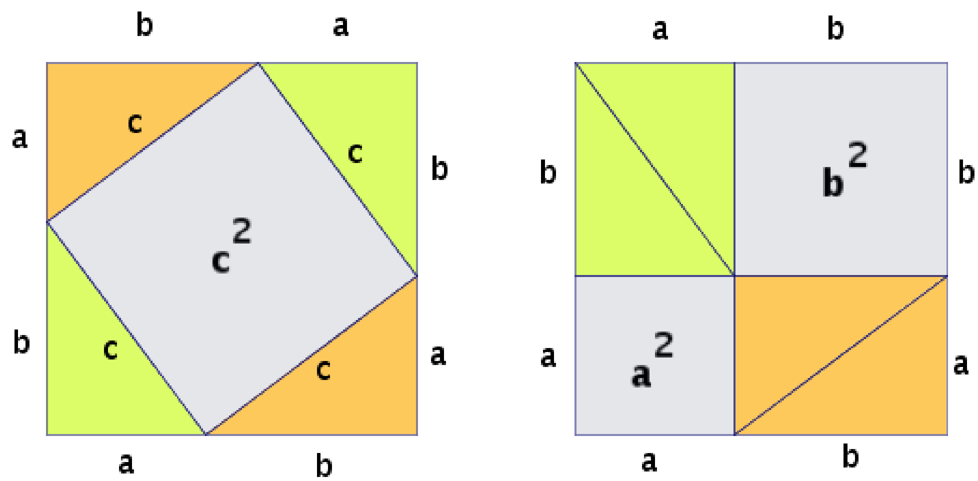
Teorem 3 (Pitagorin poučak)**.** *Neka je zadan pravokutni trokut s pravim kutem u vrhu C (kao na slici). Označimo duljine njegovih stranica s a, b i c, gdje je c duljina najdulje stranice (hipotenuze). Onda vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$, tj. površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka je zbroju površina kvadrata nad preostale dvije stranice:*



Slika 6: Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:01-Rechtwinkliges_Dreieck-Pythagoras.svg`

Dokaz. Ovisno o polazišnoj točki, dokaza ima puno, no meni je osobno sljedeći dokaz vizualno najjasniji i najuvjerljiviji:

[2] Iako je ime dobio po grčkom matematičaru, ovaj rezultat je bio poznat još i Egipćanima i Babiloncima.

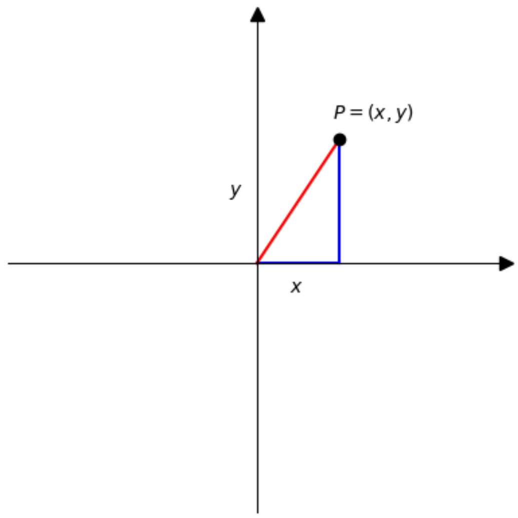


Slika 7: Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Diagram_of_Pythagoras_Theorem.png`

Napravimo više kopija početnog trokuta kao na lijevoj slici, potom ih translatiramo kao na desnoj slici. U oba slučaja imamo veliki kvadrat (stranice duljine $a + b$). Njegova površina je zbroj površina obojanih područja (trokuta) i sivog područja (ostatak). Pomicanjem obojanih trokuta površina sivog područja se neće mijenjati (jer ne mijenjamo veličinu trokuta, trokuti se ne preklapaju itd.).

Koristeći činjenicu da je zbroj kuteva u trokutu 180° (i da je obojanim trokutima jedan kut 90°), može se provjeriti da je na lijevoj slici sivo područje kvadrat (a ne npr. romb), tj. da sivo područje ima sve kuteve 90°. Kako je duljina stranice tog kvadrata c, ovo znači da mu je površina c^2. Isto tako, na desnoj slici se provjeri da su dva siva područja kvadrati pa imaju površine a^2 i b^2. Kako je nakon pomicanja obojanih trokuta površina sivog područja neizmjenjena, jasno je da $c^2 = a^2 + b^2$. $\square$

Pitagorin poučak je koristan kada iz koordinata treba izračunati udaljenost:



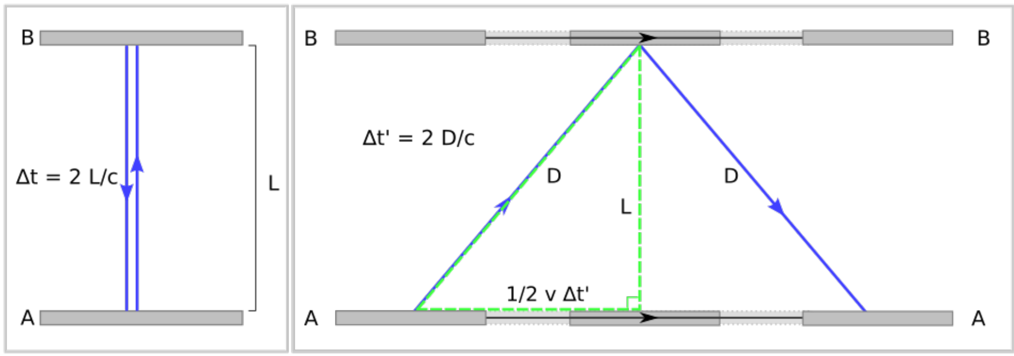
Želimo izračunati duljinu d crvene linije koja veže ishodište s nekom točkom P u ravnini. Crvenu liniju možemo shvatiti kao hipotenuzu trokuta, a x i y koordinate točke kao duljine preostale dvije stranice tog trokuta. Pitagorin poučak onda daje duljinu d crvene stranice: $d^2 = x^2 + y^2$.

7 Dilatacija vremena

Pretpostavimo da se nalazimo na stanici i promatramo sat u vlaku koji se giba velikom brzinom u odnosu na nas. Recimo da, za osobu koja se nalazi u vlaku (i miruje u odnosu na sat), sat **otkucava jednom svake sekunde**. U ovoj sekciji ćemo pokazati da, za nas na stanici, jedan otkucaj tog sata traje **malo više od 1s**. Točno trajanje će ovisiti o brzini vlaka. Ovu pojavu zovemo **dilatacija vremena**.

Nadalje, recimo da imamo još jedan takav sat (identičan prvome) na stanici. Dakle, sat na stanici otkuca jednom svake sekunde za nas koji sjedimo na stanici i mirujemo u odnosu na njega. S druge strane, osoba koja je u vlaku tvrdi da jedan otkucaj sata na stanici traje malo duže od 1s. Dakle, mi tvrdimo da je sat u vlaku usporen, a putnik u vlaku tvrdi da je sat na stanici usporen. Kako je to moguće?

Ova čudna situacija slijedi direktno iz činjenice da svi promatrači mjere istu brzinu svjetlosti, što možemo vidjeti na sljedeći način. Prvo, sat zamijenimo paralelnim zrcalima između kojih se reflektira zraka svjetlosti. Jedan "otkucaj" ovakvog svjetlosnog sata je puni put koji zraka prijeđe kada krene od donjeg zrcala, odbije se od gornjeg i vrati natrag odakle je krenula.



Slika 8: Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Time-dilation-002-mod.svg`

Kada mirujemo u odnosu na sat (lijeva slika) vidimo da zraka u jednom otkucaju prijeđe manju udaljenost nego kada se gibamo u odnosu na sat (desna slika). Da bi brzina svjetlosti u oba slučaja bila ista, otkucaj mora trajati malo duže kada se sat giba. Primjerice, ako je put duplo duži i vrijeme trajanja mora biti duplo veće da bi omjer te dvije veličine (brzina zrake) bila ista.

Konkretnije, imamo sljedeći rezultat:

Teorem 4 (Dilatacija vremena)**.** *Označimo brzinu svjetlosti s c, a brzinu sata s v. Nadalje, označimo trajanje otkucaja za promatrača u odnosu na kojeg sat miruje s Δt, a s $\Delta t'$ trajanje otkucaja sata za promatrača koji se giba u odnosu na sat. Onda vrijedi*

$$\Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t.$$

Dokaz. Neka je L udaljenost između dva zrcala. Δt je vrijeme potrebno da zraka prijeđe put $2L$ pa formula za brzinu daje $c = \frac{2L}{\Delta t}$, što pak postane $\Delta t = 2\frac{L}{c}$.

Neka je D udaljenost koju svjetlosna zraka prijeđe kada se sat giba. $\Delta t'$ je trajanje otkucaja kada se sat giba (vrijeme potrebno da zraka prijeđe udaljenost $2D$) pa, kao i prije, imamo $c = \frac{2D}{\Delta t'}$, odnosno $\Delta t' = 2\frac{D}{c}$.

Pitagorin poučak nam daje vezu između L i D, što nam pak daje željenu vezu između Δt i $\Delta t'$. Prvo, iz definicije istovremenosti imamo da se sudar zrake s gornjim zrcalom dogodio na pola otkucaja $\frac{1}{2}\Delta t'$. Za to vrijeme se vlak pomaknuo za $\frac{v\Delta t'}{2}$ te imamo pravokutni trokut (kao na desnoj slici). Pitagorin poučak onda daje:

$$D^2 = \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2 + L^2.$$

Kako je $D = \frac{c\Delta t'}{2}$, a $L = \frac{c\Delta t}{2}$, imamo:

$$\left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 = \left(\frac{v\Delta t'}{2}\right)^2 + \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2.$$

Pomnožimo li obje strane s $2^2 = 4$ gornja jednakost postane:

$$(c\Delta t')^2 = (v\Delta t')^2 + (c\Delta t)^2.$$

Prebacimo li sve $\Delta t'$ na lijevu stranu, dobijemo:

$$c^2(\Delta t')^2 - v^2(\Delta t')^2 + (c\Delta t)^2.$$

Iz ovoga pak:

$$(c^2 - v^2)(\Delta t')^2 = c^2\Delta t^2,$$

odnosno:

$$(\Delta t')^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2}\Delta t^2.$$

Pomnožimo li nazivnik i brojnik na desnoj strani s $\frac{1}{c^2}$, dobijemo

$$(\Delta t')^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\Delta t^2$$

Konačno, željeni izraz za $\Delta t'$ promađemo korjenovanjem obje strane jednakosti.

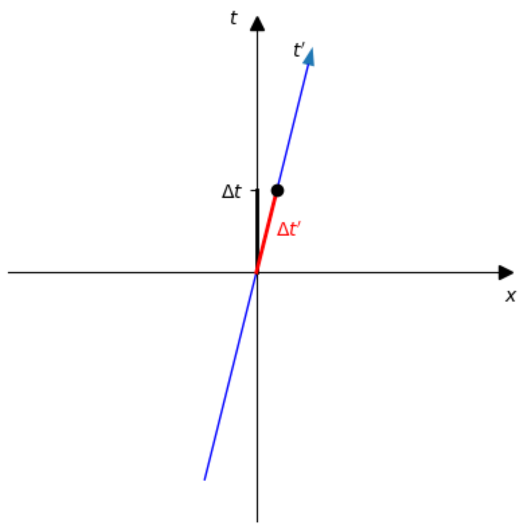
$\square$

Radi jednostavnijeg zapisa definiramo tzv. gama-faktor γ:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \implies \Delta t' = \gamma\Delta t.$$

Generalno $0 \leq \frac{v}{c} \leq 1$, stoga $\gamma \geq 1$ (vrijeme je dilatirano, tj. produljeno). Konkretno, kada $v = 0$ (sat miruje), onda $\gamma = 1$ pa $\Delta t' = \Delta t$. Kada je brzina sata v vrlo blizu brzini svjetlosti c, onda je $\frac{v}{c}$ vrlo blizu (ali malo manji od) 1, stoga u nazivniku imamo vrlo mali (ali pozitivni) broj, npr. $\frac{1}{0.0000001}$ pa dobijemo vrlo veliki rezultat (jer 0.0000001 može stati veliki broj puta u 1).

Nacrtajmo prostorno-vremenski dijagram. Mi stojimo na stanici i bilježimo svoje vrijeme na t-osi. Drugi promatrač drži sat i nalazi se u vlaku te svoje vrijeme bilježi na t' osi. Sat prvi put otkuca taman kada nas vlak prelazi (udaljenost sata od nas je 0), a drugi put otkuca na nekoj udaljenosti od nas (crna točka na dijagramu). Promatrač u vlaku miruje u odnosu na sat te tvrdi da je između dva otkucaja prošlo $\Delta t'$ vremena, no mi, koji se u odnosu na sat gibamo, tvrdimo da je prošlo malo više vremena $\Delta t = \gamma \Delta t'$.



Slika 9: Za promatrača u vlaku je proteklo vrijeme (skup događaja koje on okupira između dva otkucaja) označeno crvenom bojom, a za nas na stanici je naše vrijeme između dva otkucaja označeno crnom bojom.

Dilatacija vremena nam govori da je crna linija na dijagramu *vremenski dulja* od crvene [3].

[3] Naravno, ako uzmete ravnalo i izmjerite ih (ili ako koristite Pitagorin poučak da biste izračunali njihove duljine), dobit ćete ono što se vidi i prostim okom - crna linija je *kraća*. Ovo nam govori da vremensko trajanje dužine na nekoj vremenskoj osi *nije* dobro predstavljeno njenom duljinom na papiru. O ovome više kasnije.

8 Kontrakcija duljina

U prošloj sekciji smo vidjeli da je vrijeme dilatirano (produljeno). U ovoj sekciji ćemo pokazati da su duljine kontraktirane (skraćene). Recimo da imamo štap čija je duljina (dok štap miruje u odnosu na nas) 1m. Promatrač koji se giba u odnosu na štap tvrdi da je njegova duljina manja od 1m. Da bismo razumjeli ovaj fenomen, prvo moramo osmisliti način mjerenja duljine predmeta koji se giba.

Kako, primjerice, mjeriti duljinu vlaka u pokretu? Ne možemo usporediti duljinu tog vlaka sa duljinom nekog poznatog štapa. Moramo koristiti štopericu. Stojimo na mjestu i čekamo da nas prednji dio vlaka prođe te upalimo štopericu. Kada nas kraj posljednjeg vagona prođe, štopericu izgasimo. Vrijeme koje štoperica pokazuje Δt je vrijeme koje je trebalo čitavom vlaku da nas prođe. Ako znamo brzinu vlaka v, sada mu možemo izračunati duljinu kao: $l = v\Delta t$

S druge strane, osoba unutar vlaka može metrom izmjeriti njegovu duljinu l_0 - ovo je "stvarna" duljina vlaka kada on nije u pokretu. Doduše, osoba na vlaku isto može mjeriti njegovu duljinu štopericom. Postavimo dva promatrača sa sinkroniziranim štopericama na prednji i stražnji kraj vlaka. Kada prednji dio vlaka prođe pokraj nas koji stojimo vani, prednji promatrač zabilježi vrijeme na štoperici, a kada nas stražnji dio vlaka prođe, stražnji promatrač zabilježi vrijeme. Kako su dva promatrača sinkronizirala štoperice, iz ta dva mjerenja imamo vremenski interval $\Delta t'$ - vrijeme koje je trebalo vlaku da prođe pokraj nas vani. Znamo da je vlak prošao točno svoju duljinu l_0, stoga imamo $l_0 = v\Delta t'$.

Ovdje smo koristili sljedeću činjenicu. Recimo da se vlak iz naše perspektive giba brzinom v udesno, onda promatrači na vlaku (za koje vlak miruje) tvrde smo mi ti koji se gibamo (ulijevo) i da je naša brzina isti broj v [4].

U opisanoj situaciji svi promatrači mjere vrijeme između ista dva događaja: "pokraj nas prođe prednji dio vlaka" i "pokraj nas prođe stražnji dio vlaka". Za nas vani su se ta dva događaja dogodila na istom mjestu (ovo je slučaj kao kada promatrač miruje u odnosu na neki sat i promatra njegove otkucaje)

Za dva promatrača u vlaku jedan se događaj dogodio na njihovom mjestu, no drugi događaj se dogodio daleko od njih (ovo je slučaj kao kada promatrač

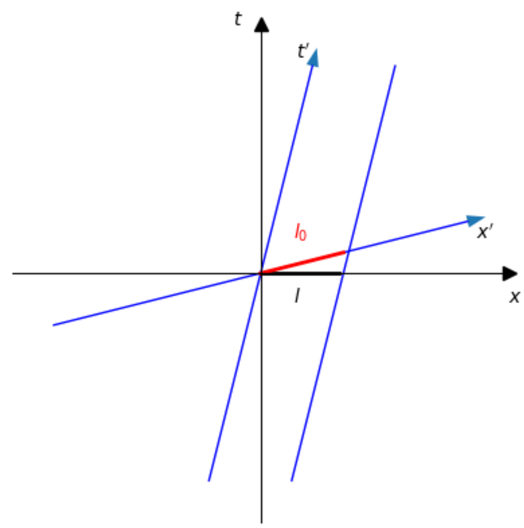
[4] Naime, u sustav vlaka uđemo ako ubrzamo udesno za v. Dakle, da bismo se vratili natrag u početni sustav treba iz sustava vlaka ubrzati ulijevo za istu vrijednost v.

promatra otkucaje nekog sata koji se giba). Dakle, oni mjere dilatirano vrijeme $\Delta t' = \gamma \Delta t$. Sada iz dilatacije vremena dobijemo kontrakciju duljina:

$$l = v\Delta t = v\frac{\Delta t'}{\gamma} = \frac{l_0}{\gamma}.$$

Ako je npr. brzina vlaka v takva da je za nekog promatrača vrijeme duplo dilatirano, onda je za tog promatrača i duljina vlaka duplo kraća.

Ovdje valja razumijeti da svatko mjeri udaljenost između dva kraja vlaka *na svom prostoru istovremenosti*. Promotrimo sljedeći dijagram:

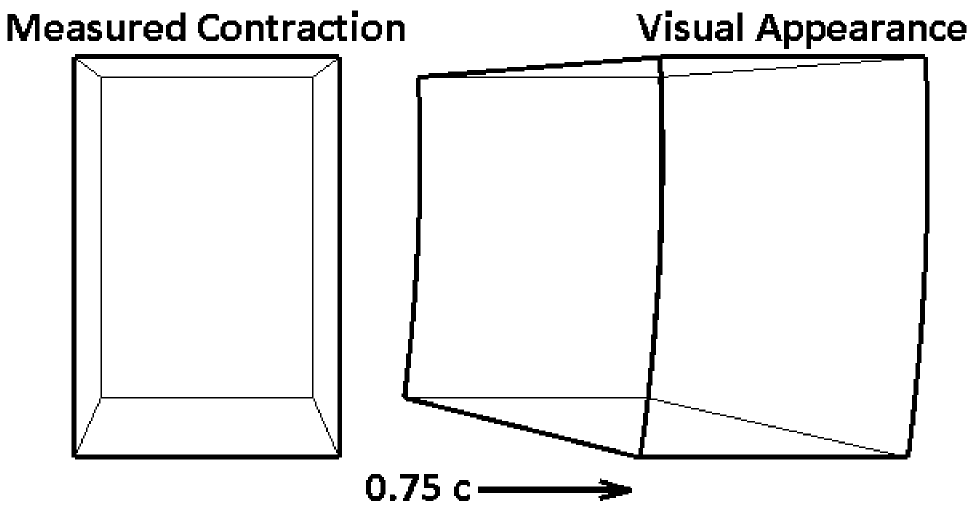


Slika 10: Nacrtane su t'-os i x'-os za promatrača u stražnjem vagonu. Plavom bojom (bez strelice) je nacrtana i vremenska os promatrača u prednjem vagonu. Skup događaja koji vlak okupira u trenutku $t = 0$ (na našem satu vani) je označen crnom bojom. Skup događaja koji vlak okupira u trenutku $t' = 0$ za promatrače u vlaku je označen crvenom bojom.

Bitno je napomenuti da kontrakcija duljina NE govori kako će vlak izgledati za promatrača koji stoji na stanici, odnosno kako će izgledati uslikan na fotografiji. Kontrakcija nam samo govori kolika je duljina predmeta na prostoru istovremenosti, tj. kolika je duljina predmeta mjerena štopericom. Konkretno, vrlo brzi predmeti na slici nisu samo "spljošteni kao palačinka" kao što se nekada zna čuti.

Da bismo dobili izgled predmeta moramo izračunati kako će se zrake svjetlosti reflektirati od predmeta i stići do senzora (fotoreceptora u našim očima ili kakvoj kameri). Senzor bilježi zrake koje su stigle u isto vrijeme, no te zrake nisu nužno emitirane u isto vrijeme - zrake koje se odbiju od daljih točaka na predmetu su emitirane ranije. Brzi predmet izgleda deformirano jer se nalazio na različitim mjestima kada su zrake emitirane.

Primjerice, stražnji dio kocke je zaklonjen jer zrake svjetlosti, koje se odbiju od stražnjeg dijela, udaraju o kocku a ne o naš senzor. Ako se sada ista kocka giba velikom brzinom, onda ona izmiče pred zrakama pa će stražnji dio kocke postati vidljiv (kao da se kocka zarotirala). Ovo je tzv. Penrose-Terrellov efekt:



Slika 11: Vidi animaciju https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Animated_Terrell_Rotation_-_Cube.gif

9 Paradoksi

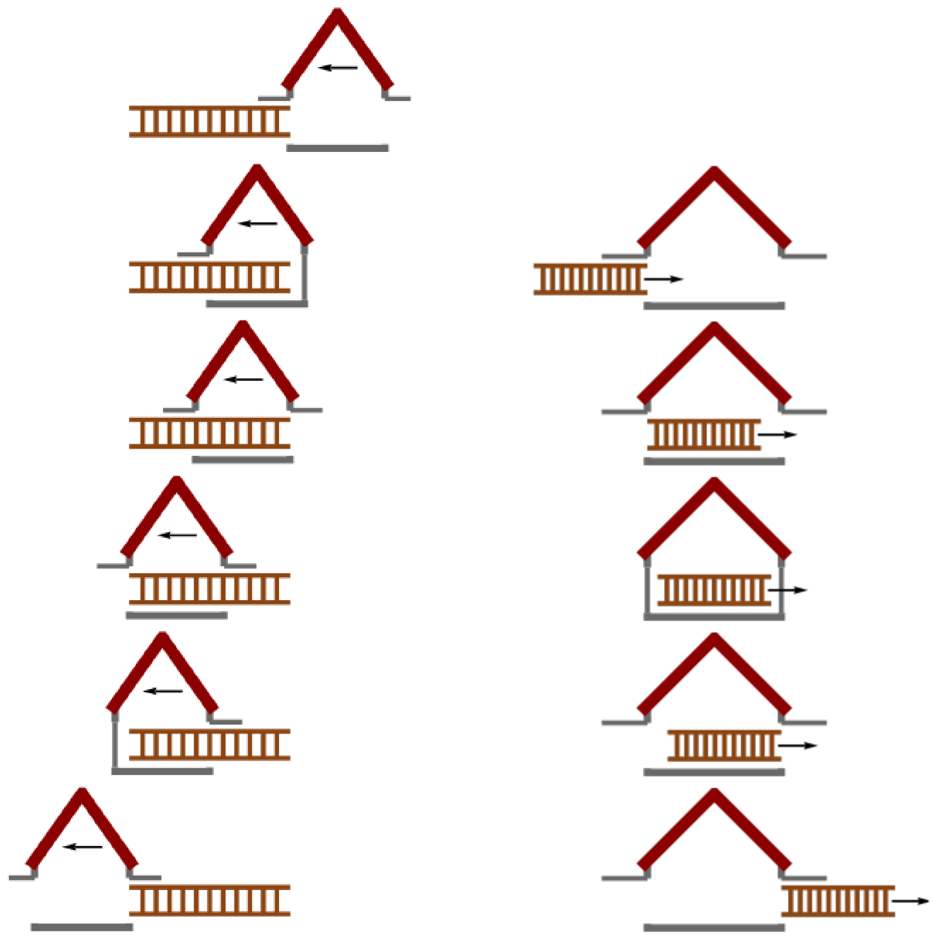
Naivno shvaćanje teorije relativnosti može dovesti do naizgled nemogućih predviđanja (paradoksa).

9.1 Ljestve i štala

Imamo ljestve koje pokušavamo ubaciti u štalu. Štala ima vrata na prednjoj i stražnjoj strani koja se vrlo brzo (instantno) mogu otvoriti i zatvoriti. Ljestve su preduge da bi stale u štalu, no padne nam na pamet kontrakcija duljina. Dakle, ako ljestve dovoljno ubrzamo, one će postati kraće te će stati u štalu. Sada možemo vrlo brzo zatvoriti i odmah otvoriti vrata, čime smo uspješno riješili problem - ljestve su (na vrlo kratko vrijeme) bile u zatvorenoj štali.

Do sada je sve bilo opisano iz perspektive štale. Paradoks se javi kada situaciju pokušamo opisati iz perspektive ljestvi. Naime, onda su ljestve u svojoj izvornoj duljini i ne stanu u štalu. Štoviše, sada je štala ta koja je kontraktirana, stoga ljestve još teže stanu u štalu. Kako pomiriti ove dvije perspektive?

Odgovor je u istovremenosti! Vrata štale su se istovremeno otvorila i zatvorila za promatrača koji miruje u štali, ali ne i za promatrača koji se giba s ljestvama. Za njega se prvo zatvore stražnja vrata, potom se otvore ta ista vrata tako da ljestve mogu proći. Tek kada su ljestve prošle se zatvore stražnja vrata.

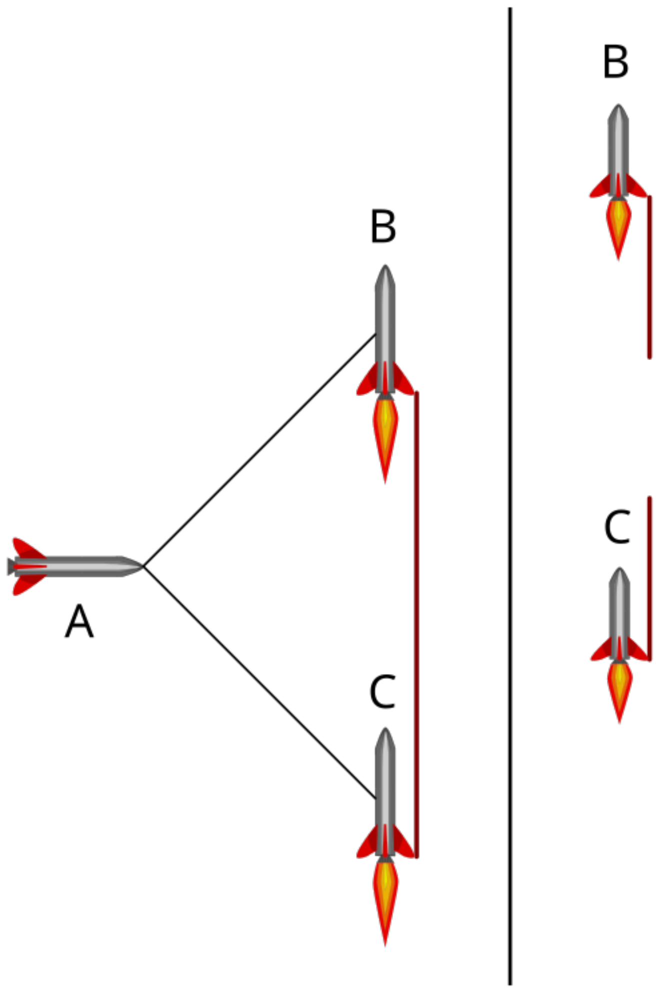


Slika 12: Paradoks s ljestvama i štalom. Na lijevoj slici je situacija opisana iz perspektive u kojoj ljestve miruju, a na desnoj iz perspektive u kojoj štala miruje. Izvor `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ladder_Paradox_GarageScenario.svg` i `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Ladder_Paradox_LadderScenario.svg`

9.2 Bellov paradoks

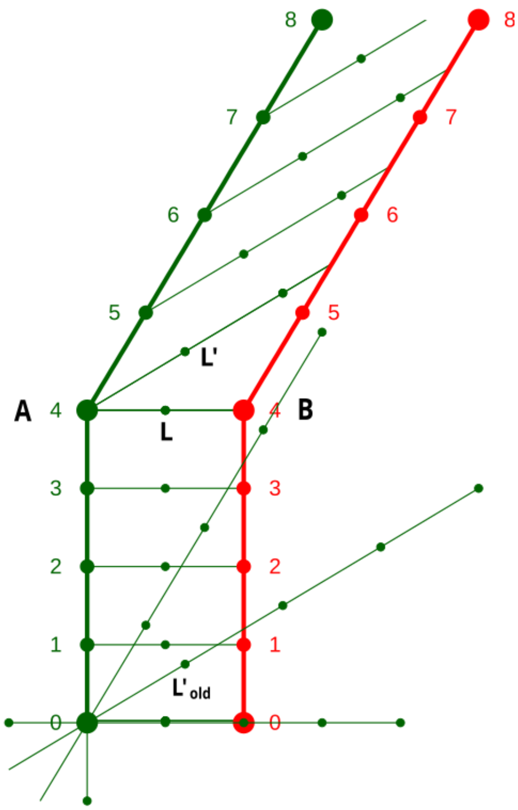
U ovom primjeru imamo dva svemirska broda (na slici B i C) povezana konopcem. Iz trećeg broda A pošaljemo signal koji istovremeno stigne do dva broda i oni istovremeno naglo ubrzaju do neke velike brzine v. Hoće li konopac puknuti? Prvo se možda čini da neće jer možda naivno očekujemo da se udaljenost između brodova i duljina konopca zajedno kontraktiraju. Ovo, doduše, nije točno.

Prvo, iz perspektive broda A (sa kojeg šaljemo signal) oba broda ubrzaju istovremeno, što (po definiciji) znači da održavaju međusobnu udaljenost. Ipak, nakon ubrzavanja se konopac giba nekom brzinom pa je njegova duljina je kontraktirana, tj. nije dovoljna da premosti udaljenost između dva broda, stoga konopac puca.



Slika 13: Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dewan-Beran-Bell-Paradox2.svg`

Što se onda događa iz perspektive konopca? Njegova duljina se onda ne mijenja. Ali ako konopac puca, to znači da se udaljenost između brodova mora povećati. Zaista, ubrzanje brodova je istovremeno za promatrača A, ali ne i za promatrača koji se prema gore giba brzinom v u odnosu na A. Za njega prvo motore upali prednji brod, potom stražnji. To znači da se udaljenost između dva broda poveća i opet zaključujemo da konopac mora puknuti. Promotrimo prostorno-vremenski dijagram:

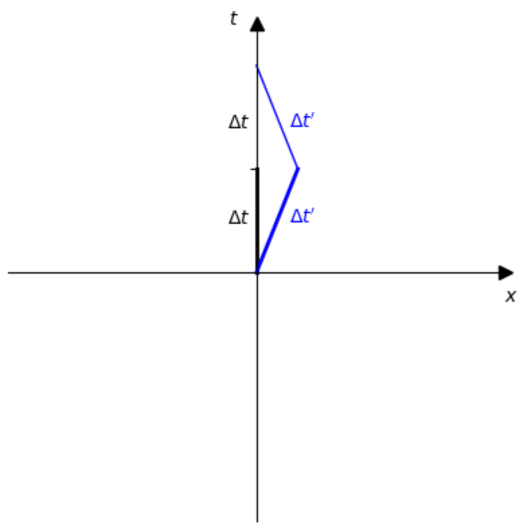


Slika 14: Na horizontalnim prostorima istovremenosti je paljenje motora (događaji A i B) istovremeno, no na nakošenim prostorima nije (prvo se dogodi B, potom A). Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Minkowski-DewanBeranBell.svg`

9.3 Paradoks blizanaca

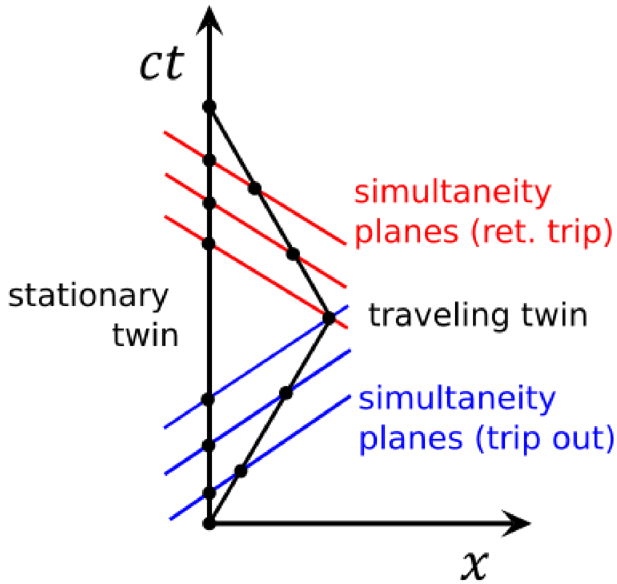
Rješenje prethodna dva paradoksa je ležalo u činjenici da je istovremenost različita za različite promatrače. Sljedeći primjer je nešto drugačiji. Imamo dva identična blizanca. Jedan ostane na Zemlji, a drugi svemirskim brodom ode daleko i vrati se natrag. Dok se blizanci gibaju jedan u odnosu na drugog, svaki za drugog tvrdi da njegovo vrijeme teče sporije. U jednom trenutku će se dva blizanca susresti i moći usporediti satove - tko će onda biti stariji, a tko mlađi?

Dok se blizanci gibaju jednoliko jedan u odnosu na drugog, nema povlaštene perspektive - svaki tvrdi da je sat onog drugog usporen. Ipak, blizanac u svemirskom brodu u jednom trenutku mora ubrzati da bi se vratio na Zemlju. To narušava simetriju problema. Nacrtajmo dijagram gibanja svemirskog broda iz perspektive blizanca na Zemlji:



Koristeći dilataciju vremena, vidimo da je vremensko trajanje plave podebljane linije manje nego vremensko trajanje crne podebljane linije: $\Delta t' < \Delta t$. Isto vrijedi i za gornji dio dijagrama (za povratni put). Dakle, plava linija je vremenski kraća od crne pa blizanac koji je putovao u raketi mora biti mlađi.

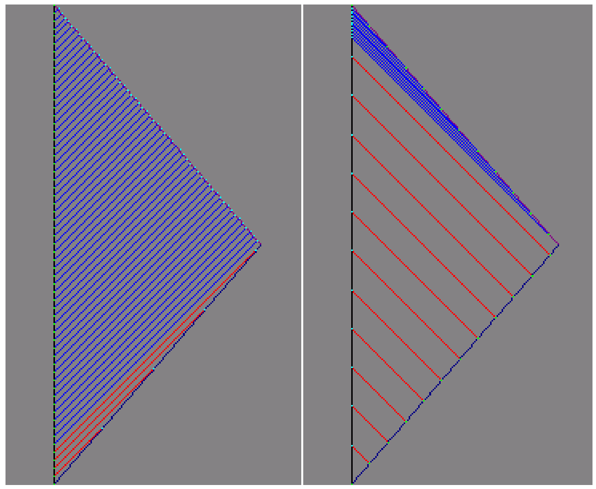
Zgodno je promotriti ravnine istovremenosti:



Slika 15: Paradoks blizanaca. Plave ravnine istovremenosti su prije ubrzavanja, crvene ravnine istovremenosti su nakon. Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Twin_Paradox_Minkowski_Diagram.svg`

Ravnine istovremenosti nam otkrivaju da, u trenutku ubrzavanja blizanac u raketi naglo preskoči značajan komad vremena na Zemlji. Prije ubrzavanja blizanac u raketi tvrdi da je istovremena verzija njegovog brata na Zemlji mlada, no nakon ubrzavanja tvrdi da mu je brat star.

Što ako blizanci svakog mjeseca razmijenjuju poruke? Kako će to izgledati na Zemlji, a kako na svemirskom brodu?

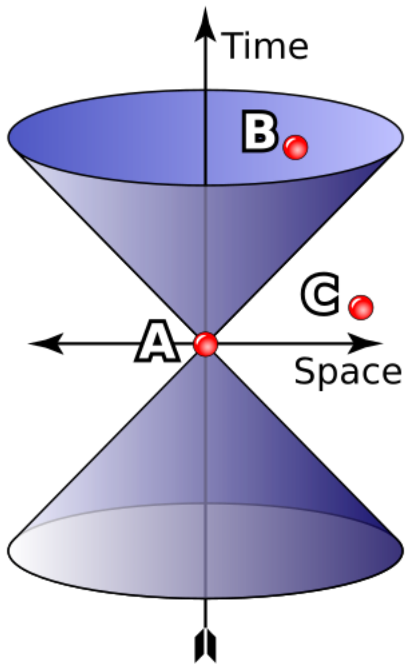


Slika 16: Lijeva slika predstavlja poruke poslane sa Zemlje - crveno su poruke koje brod primi prije ubrzavanja, a plavo nakon. Desna slika predstavlja poruke poslane sa Broda - crvene poruke su poslane prije ubrzavanja, a plave nakon. Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rstd4.gif`

Vidimo da sve poruke sa povratnog dijela puta blizanac na Zemlji primi na samom kraju. S druge strane, praktički samo prvih nekoliko poruka poslanih sa Zemlje stigne do broda prije njegovog ubrzavanja. Ovo znači da blizanac na brodu primi samo prvih nekoliko poruka na putu od Zemlje, a na povratku ubrzano dobija preostale poruke u pravilnim razmacima. Poruke koje možda dijele godine (npr. brat mu se oženi, dobije dijete, dijete mu krene u školu, itd.) blizanac na brodu može primiti u roku od nekoliko mjeseci ili čak dana (ovisno o brzini broda).

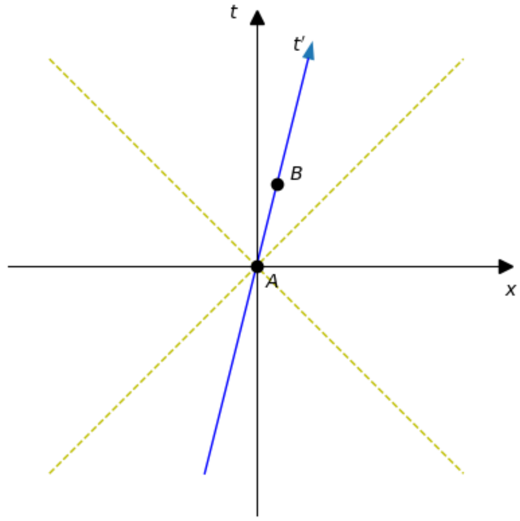
10 Podjela događaja

Recimo da imamo događaje A i B. Radi jednostavnosti pretpostavimo da su koordinate t i x tako odabrane da je događaj A u ishodištu. Nacrtajmo svjetlosni konus u A:

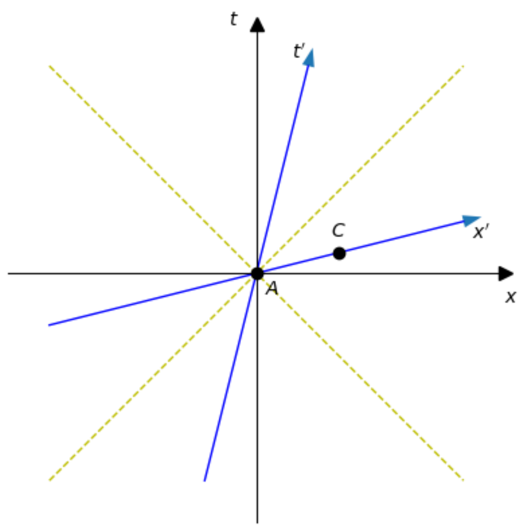


Slika 17: Izvor: `https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Light_cone.svg`

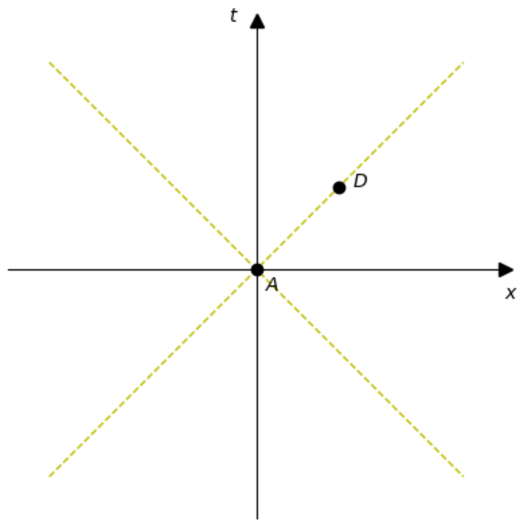
Ako je B unutar svjetlosnog konusa, to znači da pravac koji veže A i B možemo shvatiti kao vremensku os nekog promatrača (koji se giba sporije od svjetlosti). Taj promatrač doživi događaje A i B u sukcesiji (jedan iza drugog) u svom ishodištu. Kažemo da je B **vremenolik** (eng. **timelike**) u odnosnu na A.



Ako sada imamo događaj C koji leži van svjetlosnog konusa, onda postoji promatrač za kojeg su se A i C dogodili istovremeno (na različitim mjestima). Drugim riječima, postoji promatrač za kojeg događaji A i C leže na jedno te istom prostoru istovremenosti (npr. $t = 0$). Kažemo da je C **poprostoren** (eng. **spacelike**) u odnosu na A.

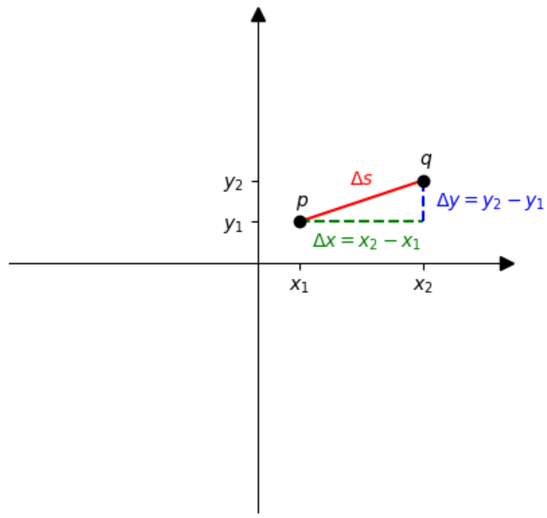


Naravno, ako događaj D leži točno na svjetlosnom konusu, onda pravac koji veže A i D predstavlja signal koji se giba brzinom svjetlosti. Kažemo da je taj događaj **svjetlolik** (eng. **lightlike**) u odnosu na A.

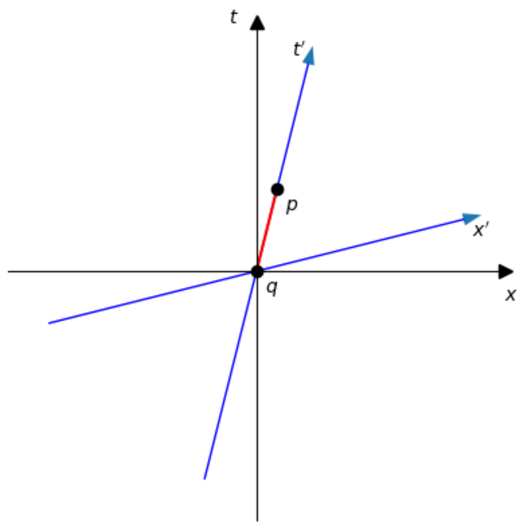


11 Minkowski metrika

Sada ćemo uvesti novi način mjerenja udaljenosti na ravnini - tzv. **Minkowski udaljenost** (ili **Minkowski metrika**). Na prostorno vremenskim dijagramima će ovaj novi način mjerenja udaljenosti biti poželjniji od uobičajenog (tzv. **euklidske udaljenosti** ili euklidske metrike). Prvo, uobičajeni način računanja udaljenosti Δs između dvije točke (ono što mjerimo ravnalom) dobijemo pomoću Pitagorinog poučka: $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$.



S druge strane, na prostorno-vremenskim dijagramima udaljenost definiramo na sljedeći način. Za vremenolike događaje p i q, definiramo da je **Minkowski udaljenost** Δs između p i q jednaka vlastitom vremenu (mjerenom u metrima) između p i q za promatrača koji veže p i q.

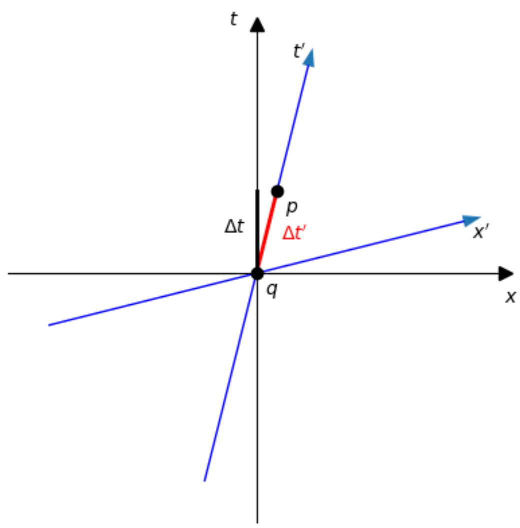


Teorem 5. *Neka su t i x koordinate tako odabrane da se događaj q nalazi u ishodištu i neka je p vremenolik u odnosu na q. Minkowski udaljenost udaljenost događaja p od q dana je izrazom:*

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 > 0$$

Minus koji se javlja u formuli je ključan. Da smo umjesto minusa stavili plus, dobili bismo običnu euklidsku udaljenost.

Dokaz. Promatrač koji p i q vidi u sukcesiji mjeri vrijeme $\Delta t'$ (crveno na dijagramu):



Ovo vrijeme možemo iskazati preko naših (t, x) koordinata pomoću formule za dilataciju vremena. Prvo, prostorno-vremenski interval je (po definiciji) svojom duljinom jednak $\Delta s = c\Delta t'$, a imamo

$$\Delta t = \gamma \Delta t' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t'.$$

Odavde slijedi:

$$\Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \Delta t'$$

pa kvadriranjem dobijemo:

$$\Delta t^2 - \left(\frac{v}{c}\right)^2 \Delta t^2 = (\Delta t')^2.$$

Pomnožimo li obje strane jednakosti sa c^2:

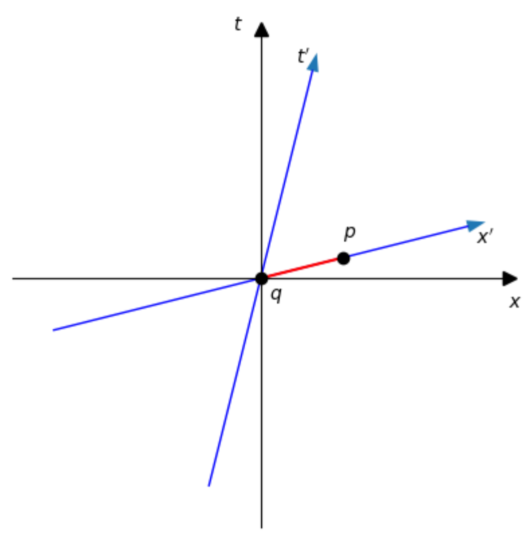
$$c^2\Delta t^2 - v^2\Delta t^2 = c^2(\Delta t')^2$$

v je brzina promatrača u odnosu na sustav (t, x) pa je $v\Delta t = \Delta x$ prijeđeni put (tj. x-koordinata događaja p). Dakle:

$$c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 = c^2(\Delta t')^2 = \Delta s^2,$$

što je i trebalo pokazati. □

Ukoliko je par p, q poprostoren, definiramo da je Minkowski udaljenost između p i q jednostavno prostorna udaljenost između p i q za onog promatrača koji ih vidi kao istovremene.

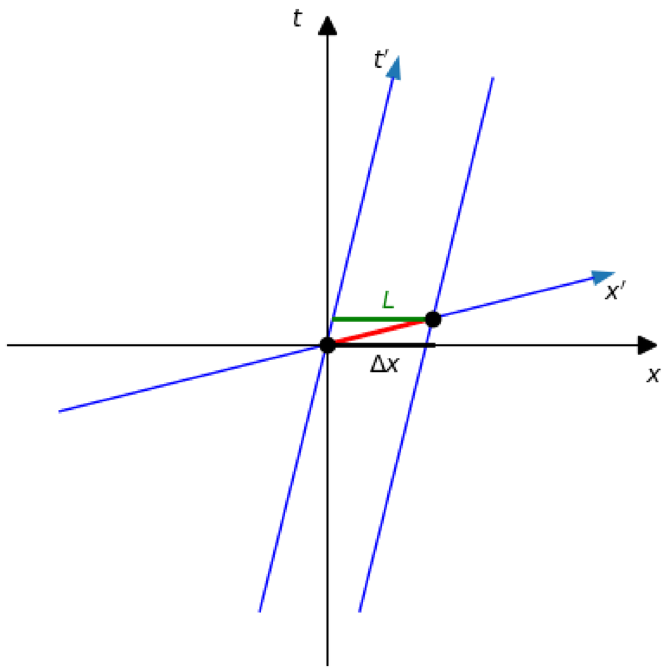


Teorem 6. *Neka su t i x koordinate tako odabrane da se događaj q nalazi u ishodištu i neka je p poprostoren u odnosu na q. Minkowski udaljenost udaljenost događaja p od q dana je izrazom:*

$$L_0^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2$$

Drugim riječima, $L_0 = -\Delta s^2$, gdje je $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 < 0$ sada za poprostorene događaje negativan.

Dokaz. Promotrimo sljedeći dijagram:



Udaljenost koju (t', x') promatrač mjeri između q i p je L_0 (na dijagramu crveno). Ovo pokušavamo iskazati u (t, x) koordinatama.

Zamislimo, dakle, štap duljine L_0 koji miruje u sustavu (t', x'), a giba se brzinom v u sustavu (t, x). Duljina koju dobijemo formulom za kontrakciju duljina je

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

(na dijagramu zeleno).

Podebljanom crnom crtom smo označili x koordinatu događaja p (ovo je položaj prednjeg dijela štapa). U početnom trenutku $t = 0$, prednji dio štapa se nalazi na položaju $x = L$. Događaj p se dogodio u trenutku $t = \Delta t$, a u to vrijeme se štap pomaknuo u odnosu na svoj početni položaj za $v\Delta t$. Dakle, prednji kraj štapa se nalazi na položaju "duljina štapa" + "pomak", odnosno vrijedi:

$$\Delta x = L + v\Delta t.$$

Konačno, nagib x' osi (u odnosu na x os) je dan s $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ (omjer koordinata događaja p u (t, x) sustavu). Dalje, t' os (u odnosu na t os) mora imati isti nagib, a njen nagib je upravo dan brzinom štapa v. Dakle, $\frac{\Delta t}{\Delta x} = v$. Ovdje smo uzeli da vrijeme mjerimo u metrima (tj. da $c = 1$). Ako vratimo ovisnost o brzini svjetlosti c, onda imamo:

$$\frac{c\Delta t}{\Delta x} = \frac{v}{c}$$

Koristeći gornje tri činjenice, dobijemo:

$$\Delta x = v\Delta t + L = v\left(\frac{v}{c^2}\Delta x\right) + \frac{L_0}{\gamma}$$

Pomnožimo li obje strane jednakosti s γ:

$$\gamma\Delta x = \gamma\frac{v^2}{c^2}\Delta x + L_0,$$

odnosno:

$$L_0 = \gamma\Delta x - \frac{v^2}{c^2}\gamma\Delta x = \gamma\Delta x\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$$

Kako je $1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2}$, dobijemo jednostavnu vezu između L_0 i Δx:

$$L_0 = \gamma\Delta x\frac{1}{\gamma^2} = \frac{\Delta x}{\gamma}$$

Kvadriramo li obje strane:

$$L_0^2 = \frac{1}{\gamma^2}\Delta x^2 = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\Delta x^2 = \Delta x^2 - \frac{v^2}{c^2}\Delta x^2$$

Kako je $\Delta t = \frac{v}{c^2}\Delta x$, imamo:

$$L_0^2 = \Delta x^2 - c^2 \cdot \frac{v^2}{c^4}\Delta x^2 = \Delta x^2 - c^2\Delta t^2,$$

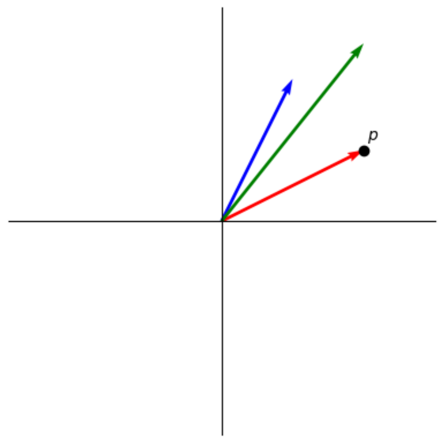
što je i trebalo pokazati. □

Vidimo da je **prostorno-vremenski interval** $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$ vrlo bitni broj koji je pozitivan za vremenolike događaje, a negativan za poprostorene. Naravno, za svjetlolike događaje imamo $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta^2 x = 0$, tj. $c\Delta t = \Delta x$ (što je očito jer je $c\Delta t$ upravo prijeđena udaljenost za svjetlost).

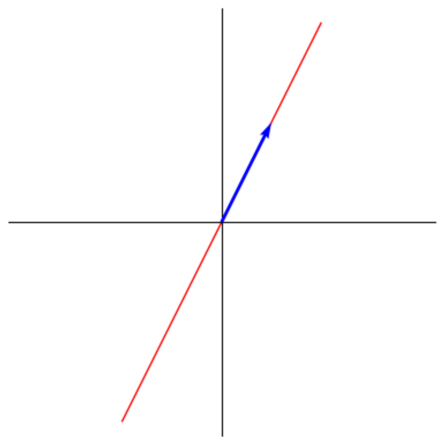
Ovaj broj - koji za neki konkretni par događaja svaki promatrač računa koristeći svoje koordinate t i x - je isti za sve promatrače. Drugim riječima, prostorno-vremenski interval je **invarijantan** na promjene sustava.

12 Minkowski skalarni umnožak

Točka u ravnini je određena sa svoje dvije koordinate $p = (x, y)$. Vektore u ravnini možemo shvatiti kao strelice koje vežu neke dvije točke. Konkretno, promotrimo strelice kojima je početak fiksiran u ishodištu:



Takve strelice su u potpunosti određene svojim vrhom, stoga možemo poistovjetiti vrh strelice (točku $p = (x, y)$) i samu strelicu. Prisjetimo se da vektore možemo zbrajati i skalirati. Ako su $v = (v_1, v_2)$ i $w = (w_1, w_2)$ neka dva vektora, imamo $v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2)$ i $cv = (cv_1, cv_2)$. Konkretno, $v + v = 2v$ je vektor koji pokazuje u istom smjeru kao v, ali je duplo duži. Skaliranje cv samo produlji (ili skrati) vektor v (a ne mijenja mu smjer). Dakle, skup $\{cv : c \in \mathbb{R}\}$, hoće reći skup svih mogućih produljenja (i skraćenja) vektora v, je pravac koji gleda duž vektora v:

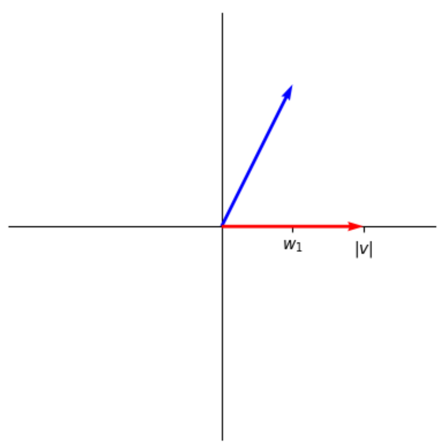


U običnoj (euklidskoj) ravnini duljina vektora (tj. udaljenost vrha strelice od ishodišta) dana je Pitagorinim poučkom $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$. Primjerice, za vektor $v = (v_1, v_2)$ imamo $|v|^2 = v_1^2 + v_2^2$. Definiramo još i tzv. **skalarni umnožak**. Neka su $v = (v_1, v_2)$ i $w = (w_1, w_2)$ neka dva vektora, onda

$$v \cdot w = v_1 w_1 + v_2 w_2.$$

Konkretno, imamo da $v \cdot v = |v|^2$.

Geometrijsko značenje ove operacije je sljedeće. Recimo da su koordinatne osi tako rotirane da vektor v leži duž x osi (u pozitivnom smjeru), onda $v_2 = 0$, a $v_1 = |v|$ je duljina vektora v. Dakle, umnožak izgleda kao $|v| w_1$, gdje je w_1 dio vektora w koji gleda duž x osi (tj. duž v).



Ovo je upravo operacija kojom smo računali rad iz sile i pomaka. Skalarni umnožak je 0 onda kada su vektori v i w međusobno okomiti (kada je dio od w koji gleda duž v jednak 0).

Slično tome definiramo i skalarni umnožak i za Minkowski metriku $\Delta s^2 = c^2\Delta t^2 - \Delta x^2$. Neka su $v = (v_1, v_2)$ i $w = (w_1, w_2)$ neka dva vektora u prostor-vremenu, onda je **Minkowski skalarni umnožak**:

$$v \cdot w = (cv_1)(cw_1) - v_2 w_2$$

Radi jednostavnosti možemo uzeti da $c = 1$ (vrijeme mjerimo u metrima), tako da $v \cdot w = v_1 w_1 - v_2 w_2$.

Prema Minkowski skalarnom umnošku, vektori $v = (v_1, v_2)$ i $w = (w_1, w_2)$ su okomiti kada $v_1 w_1 - v_2 w_2 = 0$. Iz ovoga slijedi:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{w_2}{w_1},$$

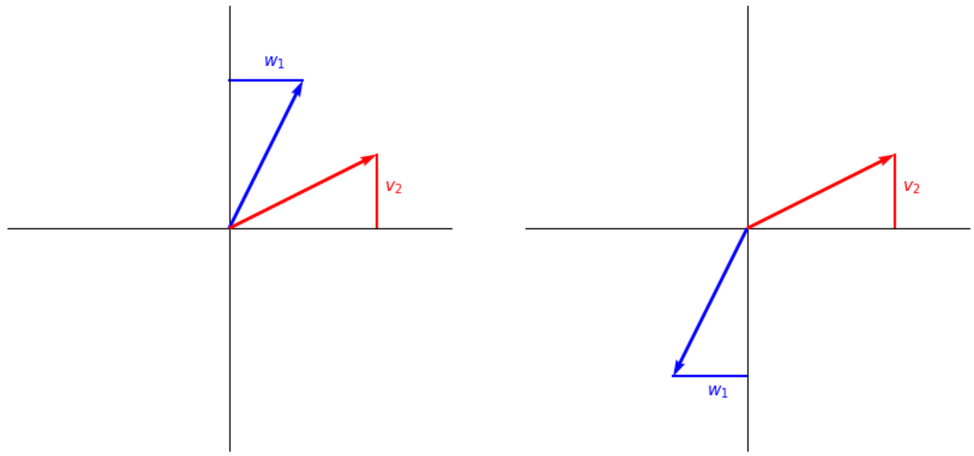
tj. vektori v i w su simetrični s obzirom na 45 stupnjeva. Ovo možemo možda malo bolje vidjeti ako radimo s vektorima koji su jedinični (u običnoj euklidskoj metrici): $v_1^2 + v_2^2 = 1$. Prvo, iz gornjeg omjera imamo:

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{w_2^2}{w_1^2}$$

Pribrajanjem 1 na obje strane jednakosti dobijemo:

$$\frac{v_1^2 + v_2^2}{v_2^2} = \frac{w_1^2 + w_2^2}{w_1^2}$$

Kako su v i w jedinični, slijedi $\frac{1}{v_2^2} = \frac{1}{w_1^2}$. Iz ovoga automatski $v_2^2 = w_1^2$, tj. duljina druge koordinate vektora v jednaka je duljini prve koordinate vektora w (koliko je v nakošen prema x osi, toliko je w nakošen prema t osi).



Na isti način se pokaže i da $v_1^2 = w_2^2$. Dalje, iz $\frac{v_1}{v_2} = \frac{w_2}{w_1}$ još vidimo da, ukoliko je v u prvom kvadrantu (hoće reći obje koordinate su mu pozitivne), onda i w ili $-w$ mora biti u prvom kvadrantu (kao na slici). Drugim riječima obje koordinate od w moraju biti pozitivne ili obje koordinate trebaju biti negativne. U svakom slučaju, w i $-w$ leže na istom pravcu, a taj pravac predstavlja skup svih vektora koji su u Minkowski metrici okomiti na v.

Zaključujemo da je prostor istovremenosti nekog promatrača skup svih događaja čiji su vektori (od ishodišta do tog događaja) okomiti na vremensku os tog promatrača - tzv. ortogonalni komplement. Ova definicija je ekvivalentna toj da se svjetlost giba pola vremena do zrcala i pola vremena natrag.

13 O matematičkoj strukturi teorije

Pitagorin poučak smo izvorno uveli kao teorem geometrije, tj. kao rezultat koji se može dokazati pomoću nekih drugih (jednostavnijih) geometrijskih tvrdnji. Međutim, geometriju možemo svesti na brojeve (na algebru): točke na ravnini su određene sa svoje dvije koordinate (x, y), stoga ravninu možemo shvatiti kao skup svih uređenih parova (x, y) (gdje su x i y realni brojevi). Ovo obično pišemo kao $\mathbb{R}^2$ (skup svih uređenih trojki (x, y, z) realnih brojeva bismo pisali kao $\mathbb{R}^3$, itd.).

Ovako definirana ravnina je samo kolekcija točaka; da bismo mogli nešto pametno reći o točkama u ravnini, treba nam nekakav način da mjerimo udaljenosti i kuteve.

Udaljenost među točkama (x_1, y_1) i (x_2, y_2) možemo *definirati* kao $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Ovako je Pitagorin poučak praktički postao definicija. Kada udaljenost definiramo preko prostorno-vremenskog intervala $\Delta s^2 = \Delta x^2 - \Delta y^2$, onda dobijemo drukčije odnose među točkama u ravnini (drukčiju geometriju). Striktno govoreći, prostorno vremenski interval može biti i negativan (onda za udaljenost uzmemo negativni prostorno vremenski interval). Treba napomenuti i da se ova dva pojma udaljenosti bitno razlikuju u dva ključna aspekta:

- Prvo, za euklidsku metriku vrijedi da udaljenost između dvije *različite* točke ne može biti 0. U Minkowski metrici udaljenost od ishodišta je 0 za sve svjetlolike događaje.
- Za euklidsku metriku vrijedi tzv. nejednakost trokuta: udaljenost između dvije točke ne možemo skratiti tako da idemo preko treće točke. Drugim riječima, duljina zalomljene linije koja veže dvije točke je uvijek duža nego duljina ravne linije koja veže iste dvije točke. Za Minkowski metriku pak imamo svojevrsni obrat (paradoks blizanaca): udaljenost, tj. proteklo vrijeme, je kraće za zalomljenu vremenoliku nego ravnu vremenoliku liniju.

Iz ovih razloga, "Minkowski metrika", nije, striktno govoreći, ono što matematičari obično zovu "metrika"[5], no o njoj svejedno razmišljamo kao o svojevrsnoj udaljenosti.

Kompletna matematička struktura specijalne teorije relativnosti može se obuhvatiti pomoću sljedeće definicije:

Definicija 7 (Minkowski prostor-vrijeme)**.** Minkowski prostor vrijeme je skup $\mathbb{R}^4$ (skup svih uređenih četvorki realnih brojeva $v = (t, x, y, z)$) na kojem je definiran skalarni umnožak $v_1 \cdot v_2 = t_1 t_2 - x_1 x_2 - y_1 y_2 - z_1 z_2$.

[5]Metrika mora svakom paru točaka (p, q) pridružiti realni broj $d(p, q)$ (udaljenost p od q) i pritom mora vrijediti:

1. $d(p, q) \geq 0$
2. $d(p, q) = d(q, p)$ (udaljenost p od q jednaka je udaljenosti q od p)
3. $d(p, q) = 0 \implies p = q$ (udaljenost različitih točaka ne smije biti 0)
4. $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$ (nejednakost trokuta)

Iz skalarnog umnoška dobijemo prostornovremenski interval kao

$$\Delta s^2 = |v|^2 = v \cdot v = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Ovo je interval između ishodišta $(0,0,0,0)$ i (t,x,y,z). Interval između nekih događaja $q = (t_1, x_1, y_1, z_1)$ i $p = (t_2, x_2, y_2, z_2)$ je duljina vektora $q - p$ koji veže q i p:

$$\Delta s^2 = |q - p|^2 = (t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2$$

Ostatak teorije odmah slijedi:

- Događaje možemo podijeliti s obzirom na predznak njihovog prostornovremenskog intervala na vremenolike, svjetlolike i poprostorene.
- Vremenoliki pravac[6] odgovara vremenskoj osi nekog inercijalnog promatrača.
- Prostori istovremenosti nekog promatrača se dobiju kao ortogonalni komplementi njegove vremenske osi (s obzirom na Minkowski skalarni umnožak).
- Vrijeme koje promatrač mjeri između neka događaja (na svojoj vremenskoj osi) dobijemo iz prostornovremenskog intervala kao $\sqrt{\Delta s^2}$.
- Udaljenost koju promatrač mjeri između neka dva istovremena događaja na svom prostoru istovremenosti dobijemo kao $\sqrt{-\Delta s^2}$
- Dilatacija vremena i kontrakcija duljina dobiju se uspoređivanjem prostornovremenskih intervala. Primjerice, vrijeme koje mi mjerimo između ishodišta $(0,0)$ i događaja $p = (t,x)$ je t. Promatrač koji se u odnosu na nas giba (tako da njegova vremenska os veže događaj p i ishodište) između ishodišta i događaja p mjeri vrijeme $t' = \sqrt{\Delta s^2} = \sqrt{t^2 - x^2}$. Ista algebra kao i prije pokaže da je $t = \gamma t'$.

[6] Pravac kojemu je interval između neke dvije (pa automatski svake dvije) točke vremenolik.