

# Численное интегрирование

Предмет: Вычислительная математика

Преподаватель: Парамонов А.А.

# Содержание

- Основные понятия
- Метод трапеций
- Метод Симпсона
- Метод Гаусса

# Основные понятия

Поскольку функция  $f(x)$  в задаче аналитического решения интеграла вида

$$I = \int_a^b f(x) dx \text{ на } [a, b].$$

не всегда представима в виде элементарных функций, то вычисления аналитическими методами становятся трудно выполнимыми.

Для подобного типа задач используются численные методы интегрирования.

# Метод трапеций

**Принцип метода:** отрезок  $[a;b]$

разбивается на  $n$  равных интервалов длины  $h$ , т.е.  $h = \frac{b-a}{n}$ , а узлы вычисляются по формуле:  $x_i = a + i \cdot h$ , тогда интеграл (I) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} h \\ &= \frac{h}{2} (f(a) + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)) \end{aligned}$$

# Метод Симпсона

**Принцип метода:** отрезок  $[a;b]$  разбивается на  $2n$  (чётное количество) равных интервалов длины  $h$ , т.е.  $h = \frac{b-a}{2n}$ , тогда интеграл (I) представим в следующем виде:

$$I = \frac{h}{3} (f(a) + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4 * \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) + f(b))$$

# Метод Гаусса

**Принцип метода:** основан на полиномах Лежандра  $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n}{d^n x} (x^2 - 1)^n -$

полином степени  $n$ ,  $x \in [-1, 1]$ . Тогда в общем виде, решение исходного интеграла представляется в следующем виде:

$$\int_{-1}^1 f(t) \cdot dt = \sum_{i=1}^n A_i \cdot f(t_i)$$

# Решение методом Гаусса

Для исходного интеграла берётся замена  $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i$ , которая переводит заданный отрезок  $[a;b]$  в отрезок  $[-1;1]$ . Тогда интеграл решается следующим образом:

$I = \frac{b-a}{2} * \sum_{i=1}^n A_i f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t_i\right)$ , где  $A_i$  - коэффициенты квадратурной формулы.

# Оформление домашнего задания

По вариантам:

- 1) Рассчитываете интеграл по трём методам, для трёх различных  $n$ .
- 2) Строите графики сходимости для КАЖДОГО метода ( 3 метода  $\Rightarrow$  3 графика)

Максимальный балл – 4.



# Контакты

Решения делать рукописные, сканируете решения, преобразуете в pdf. Готовые работы собирает староста (!) и в день следующего занятия (или по готовности) высылает их на почту: [paramonov\\_a@mirea.ru](mailto:paramonov_a@mirea.ru)

Домашнее задание по третьей теме выслать сегодня через старосту до конца рабочего дня.

Напоминаю, что сегодня последний день приёма домашнего задания по второй теме.