前言

本文记录 Introduction to Linear Algebra, 4th 中每节的要点，组织方式与教材同步，每条要点会适当配置例子或证明，方便后续回顾与分享。

1: Introduction to Vectors(向量介绍)

1.1 Vector and Linear Combinations(向量与线性组合)

要点 1：二维向量有两个成分

要点 2：向量相加等于对应成分相加，标量与向量相乘等于标量与每个成分相乘，得到结果与原来的向量**共线**

要点 3：三个向量的**线性组合**形式为 c***v***+d***u***+e***w***

要点 4：在三维空间 R^3 中，通常一个向量的线性组合为线，两个向量的线性组合为面，三个向量的线性组合为 R^3

1.2 Lengths and Dot Products(向量长度与点积)

要点 1：两个向量点积为每个组件相乘后求和

要点 2：向量长度为**向量自身点积**后开方

要点 3：单位向量为 $\boldsymbol{v}/\|v\|$，长度为 1

要点 4：若 ***v*** 和 ***u*** 点积为 0，那么 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{u}$(证明:定义,极坐标和三角变换)

要点 5：余弦公式

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{v}\cdot\mathrm{w}}{\|\mathrm{v}\|\|\mathrm{w}\|}\text{，推导 }\mathrm{v}\cdot\mathrm{w}\le\|\mathrm{v}\|\|\mathrm{w}\|\text{，继续推导}\|\mathrm{v}+\mathrm{w}\|\le\|\mathrm{v}\|+\|\mathrm{w}\|$$

P.S.:余弦定理用作图和垂直来推导，余弦值小于等于 1 推导第一个不等式，平方推导第二个不等式。

1.3 Matrices(矩阵)

要点 1：矩阵乘向量（A***x***）可以理解为矩阵列向量的线性组合。

要点 2：当 A 可逆时，A***x***=***b*** 总有解，解为 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$。

要点 3：差矩阵的逆是和矩阵，一个正向效果，一个逆向效果，最后没有效果。

$$\text{减矩阵}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\text{；加矩阵}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

要点 4：循环矩阵不可逆，三列在一个平面上，三条列相加为 0，C***x***=***0*** 有无数解。

要点 5：本章节有部分概念超前，会在后面的章节总给出具体讲解。

2: Solving Linear Equations(求解线性方程组)

2.1 Vector and Linear Equations(向量和线性方程组)

本章主要需要了重行，列两种视角理解线性方程组。

要点 1：向量基本运算是代数乘法 k***v*** 和向量相加 ***v***+***w***
要点 2：向量基本运算组合起来就是**线性组合** c***v*** + d***w***
要点 3：矩阵向量乘法可以通过行向量点乘计算，但是需被理解为 A 列向量的**线性组合**。
要点 4：列视图，A***x***=***b*** 要求找到一种线性组合 ***x***，使得 A 的列变成 ***b***(将 2.2 节列子写成下面的形式)

$$[x_1\boldsymbol{a_1}\ x_2\boldsymbol{a_2}\ \dots\ x_n\boldsymbol{a_n}]=\boldsymbol{b}$$

要点 5：行视图，每一行的等式是线(n=2)，平面(n=3)或超平面(n>3),交集就是解 ***x***。
Ax+By+Cz=d,R^3 空间中的平面公式，随便绘制三个平面，得到交集解。

2.2 消元思想(The Idea of Elimination)

主要需要了解消元得到上三角，然后回带求解；然后需要了解无数解和无解的成因。
要点 1：Ax=b 经过消元后，变成 Ux=d, U 是上三角矩阵。

原方程组$\begin{cases} 2x+4y-2z=2 \\ 4x+9y-3z=8 \\ -2x-3y+7z=10 \end{cases}$ => 上三角形式$\begin{cases} 2x+4y-2z=2 \\ \quad\ \ 1y-1z=4 \\ \qquad\quad\ 4z=8 \end{cases}$

要点 2：消元的具体方法，i 行等式乘以某个值然后被 j 行减掉，用于消除 j 行对应元素
要点 3：上面提到的某个值=j 行元素大小/i 行阀值。（通过例子比较直观）
要点 4：阀值位置上出现 0，如果下面的行有不为 0，可以行交换来修复
要点 5：上三角形式的线性方程组可以从底部回带来解

要点 6：若无法转成上三角，要么无解，要么无限解

无限解$\begin{cases} \mathrm{x}-2\mathrm{y}=11 \\ 3\mathrm{x}-6\mathrm{y}=33 \end{cases}$；行视图：相同平面或共线；列视图：线性依赖

无解：$\begin{cases} \mathrm{x}-2\mathrm{y}=11 \\ 3\mathrm{x}-6\mathrm{y}=8 \end{cases}$；行视图：平行无交集；列视图：线性独立

2.3 矩阵消元(Elimination Using Matrices)

消元的数学描述，使用矩阵。
要点 1：Ax=x_1*列 1+ …… +x_n*列 n,即$(\mathrm{Ax})_\mathrm{i}=\sum_\mathrm{j}^\mathrm{n}\mathrm{a_{ij}}\,\mathrm{x_j}$
要点 2：单位矩阵 I（什么都不做），消元矩阵=E_{ij} 使用系数 l_{ij},排列矩阵=P_{ij}（单位矩阵变换），除法矩阵 D_i。

除法矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\\5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5\\2.5 & 0.5\end{bmatrix}$

排列矩阵 $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\\5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 1\\4 & 5\end{bmatrix}$

减法矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\-5/4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\\5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5\\0 & -21/4\end{bmatrix}$

总结：基础变换矩阵左边作用于行，右边作用与列，都是基于单位矩阵进行变换得到。
例子：将 2.2 节中的例子，用矩阵过程表示
要点 3：Ax=b 乘以消元矩阵 E_{21} 的过程等价于第二行减去 l_{21} 乘以第一行，用-l_{21} 取代单位矩

阵行 2 列 1 的位置，得到消元矩阵 E_{21}。（举个例子比较形象）

要点 4：对于增广矩阵[A b],上面的消元过程得到[$E_{21}A$ $E_{21}b$]。（这里初次涉及到块矩阵）
解线性方程组，其实就是对增广矩阵同步进行线性变化，当左边变成 I，右边就代表解。

要点 5：矩阵 A 乘 B，可以理解为 A 与 B 每一列相乘，也可以使用行角度解释。（使用块矩阵计算解释）

列视图：$AB=A[b_1\ b_2\ \dots\ b_n]=[Ab_1\ Ab_2\ \dots\ Ab_3]$

行视图：$AB=[\boldsymbol{a_1}\ \dots\ \boldsymbol{a_n}]\begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{bmatrix} = \boldsymbol{a_1}b_1^T + \dots + \boldsymbol{a_n}b_n^T +$

2.4 矩阵运算规则(Rules for Matrix Operations)

矩阵运算的形式化定义，主要理解矩阵乘法和乘法结合律。

要点 1：AB 的(i,j)元素是 A 第 i 行与 B 第 j 列点积。

要点 2：一个 m 乘 n 矩阵与一个 n 乘 p 矩阵相乘需要 mnp 次乘法计算。

要点 3：A(BC)=(AB)C，非常重要，很多证明都是动过乘法连锁率进行变换的。

要点 4：AB 的另一种解释，所有矩阵之和，这些矩阵有 A 的列与 B 的行相乘得到。（矩阵块乘法，兼容即可乘）

$$AB = [a_1 \quad \cdots \quad a_n]\begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_2^T \end{bmatrix} = a_1 b_1^T + \cdots + a_n b_2^T$$

要点 5：若矩阵块兼容，可以通过块相乘计算矩阵乘法，乘法位置不能变，可以简化乘法，方便分析。（可以用分块 I 举例子）。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

要点 6：块矩阵舒尔补(Schur Complement)，有点类似 d-cb/a

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

块矩阵消元

需要回忆

1 基础矩阵，三类：消元，排列和除法，并且这三类矩阵均可逆。

2 阀值和 Row Reduced Echelon Form 简化的行梯形式

2.5 逆矩阵(Inverse of Matrices)

逆矩阵的定义，性质与计算。

要点 1：逆矩阵必须满足，$AA^{-1}=I$ 和 $A^{-1}A=I$(满足一个叫左逆或右逆)
要点 2：A 可逆当且仅当 A 有 n 个轴（pivot），允许行交换
左=>右：A 可逆，$Ax=b$ 必有解，有 $x=A^{-1}b$,可到阀值形式
右=>左：n 个阀值，$E_{low}A=U$,进而有 $E_{up}E_{low}A=I, A^{-1}=E_{up}E_{down}$

要点 3：若 $Ax=0$,存在非 0 向量解，那么 A 不可逆。（反正法）
若 A 可逆，$A^{-1}Ax=0 \Rightarrow x=0$,矛盾
列线性依赖

要点 4：$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}, (ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$,其中 A，B，C 可逆
$AB(AB)^{-1}=ABB^{-1}A^{-1}= A(BB^{-1})A^{-1}=I$
$(AB)^{-1} AB= B^{-1}A^{-1}AB= I$

要点 5：高斯乔丹法求逆，即通过块矩阵[A I] => [I A^{-1}]求逆

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 7 & -3\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

先讲课程，最后统一讲习题
练习：消元通用形式，课后 41 题

41 Suppose E_1, E_2, E_3 are 4 by 4 identity matrices, except E_1 has a, b, c in column 1 and E_2 has d, e in column 2 and E_3 has f in column 3 (below the 1's). Multiply $L = E_1E_2E_3$ to show that all these nonzeros are copied into L.

$E_1E_2E_3$ is in the *opposite* order from elimination (because E_3 is acting first). But $E_1E_2E_3 = L$ is in the *correct* order to invert elimination and recover A.

$E= E^{-1}_3E^{-1}_2E^{-1}_1= E^{-1}_{43}\, E^{-1}_{33}\, E^{-1}_{32}E^{-1}_{21}\, E^{-1}_{31}\, E^{-1}_{41}$
基础消元矩阵与逆的关系

2.6 消元=矩阵分解：A=LU (Elimination = Factorization : A=LU)

消元过程是一个矩阵分解，有 A=LU,更近一步，A=LDU，L 下三角，U 上三角，D 对角，L，U 对角全为 1 或 0.求逆复杂度非常高($O(n^3)$,消元过程)，还好实际应用组一般不会对太大的矩阵求逆。
要点 1：高斯消元（无排列），**可以将分解 A=LU**
EA=U,其中 E（基础矩阵）可逆，$L=E^{-1}$,单位消元矩阵可逆，那么及必然可逆。例子如下

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

要点 2：LU 其实是一个逆过程（需要举例子）
主要是将左边的 E 如何到右边 E 的过程，在上面的例子中可以一并讲解。

要点 3：根据 LU 分解，现在求解线性方程组就是计算两个三角矩阵
A=LU 且 $L=E^{-1}$，那么 $Ax=b \Rightarrow EAx=Eb \Rightarrow Ux=Eb=c$。即，**先计算 E，然后 Eb 得到 c 与 EA 得到**

U，然后代入 Ux=c，U 是一个上三角矩阵，可以轻松求解。

要点 4：分解过程有$(n^3-n)/3$ 基础计算（加减乘除），复杂度 $O(n^3)$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

要点 5：求逆复杂度 $O(n^3)$
n 个 n^2 操作

要点 6：对于带状矩阵，复杂度有所减小，w 为带的宽度，$O(n^3)$变为 $O(nw^2)$,$O(n^2)$变为 $O(nw)$，一般 w 很小，基本上变成线性了。

练习：A=LDU 的唯一性，L，U 为对角线全部为 1 的三角矩阵，L 下，U 上。D 为对角矩阵。参见习题 18 与相关解答

18 If $A = LDU$ and also $A = L_1D_1U_1$ with all factors invertible, then $L = L_1$ and $D = D_1$ and $U = U_1$. *"The three factors are unique."*
Derive the equation $L_1^{-1}LD = D_1U_1U^{-1}$. Are the two sides triangular or diagonal?
Deduce $L = L_1$ and $U = U_1$ (they all have diagonal 1's). Then $D = D_1$.

主要是 L，U 的对角为 1，所以 $L_1^{-1}L=I$，$U_1^{-1}U=I$

2.7 转置矩阵和排列矩阵(Transposes and Permutations)

理解转置矩阵和排列矩阵的定义与性质。
要点 1：转置定义，$(A^T)_{ji}=A_{ij}$
要点 2：$(AB)^T=B^TA^T,(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

$(Ax)^T=x^TA^T$,扩展到 AB：AB=$[Ab_1 \ldots Ab_n]$,$(AB)^T = \begin{bmatrix} (Ab_1)^T \\ \vdots \\ (Ab_n)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^TA^T \\ \vdots \\ b_n^TA^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{bmatrix} A^T = B^TA^T$

$(A^{-1}A)^T=A^T(A^{-1})^T=I$,根据可逆定义:**利用上面的推论**
上面可以结合 2.5.4 推论，逆与转置的结合律。

要点 3：$x*y=x^Ty$,那么 $Ax*y=(Ax)^Ty=x^T(A^Ty)$
点乘的矩阵乘表示，有很多证明使用此技巧

要点 4：对称矩阵 $A=A^T$,可得到 LDU 分解 $A=LDL^T$（需要讲解 LDU 分解，在上一节）
$L=U^T$ 可以得到上面的等式。**唯一性(在 2.6 习题中证明)**，得到 $U^T=L$

要点 5：排列矩阵 P 每一行只有一个 1，其余为 0，$P^{-1}=P^T$
基础排列矩阵是单位矩阵通过一步排列得到的矩阵。
$P=P^{-1}$：单一行列交换，在操作一次得到原来的结果
$P^{-1}=P^T$：P 是方块矩阵，**P 与 P^T 对应的"1"总是匹配**（I_4 的例子），所以 $PP^T=I$。
所以，$P=P^{-1}= P^T$。

要点 6：大小为 n 的矩阵，有 n!个排列矩阵，一半奇数，一半偶数。
要点 7：若 A 可逆，PA=LU
在定义排列矩阵后，得到了消元分解的完整形式。

举个例子：$\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 4 & 1 & 2\end{bmatrix} => \begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -5 & 0\end{bmatrix}$,此时需要排列

练习：逆与转置相同的矩阵，习题 40

40 Suppose Q^{T} *equals* Q^{-1} (transpose equals inverse, so $Q^{\mathrm{T}}Q = I$).

(a) Show that the columns $q_1, \ldots, q_n$ are unit vectors: $\|\boldsymbol{q}_i\|^2 = 1$.

(b) Show that every two columns of Q are perpendicular: $\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_2 = 0$.

(c) Find a 2 by 2 example with first entry $q_{11} = \cos\theta$.

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

3: Vector Spaces and Subspaces(向量空间和子空间)

之前讨论的都是向量，本章开始研究向量的“集合”（包括一定规则），称之为向量空间。讨论的范围组件扩大，从点，向量到向量空间。
向量空间：一系列向量的集合，这里的向量不仅仅是列向量，还包括矩阵，实函数等。
根据 R^n 这个例子讲解向量空间。

3.1 Space of Vectors (向量空间)

要点 1：R^n 是所有 n 个实数的列向量的集合。
比如 R^3 是三维列向量空间，R^2 是二维列平面。
向量空间条件，对任意向量 w,v,存在：

- w+v 在子空间中；
- cv 在子空间中，c 为任意数,特别是 C=0；

要点 2：**M**（2 乘 2 矩阵），**F**（所有实函数 f(x)）和 **Z**（单独的零向量）是向量子空间。
其他向量空间，加和乘得到的结果仍然在 **M**，**F** 和 **Z** 中。

要点 3：包含向量 w 和 v 的子空间必包含所有的线性组合 cv+dw

向量子空间是向量空间的子集，比如使用 2 独立向量组成的 3 维向量，就是 R^3 的子空间。
总结：特定向量的线性组合，组成了向量子空间。

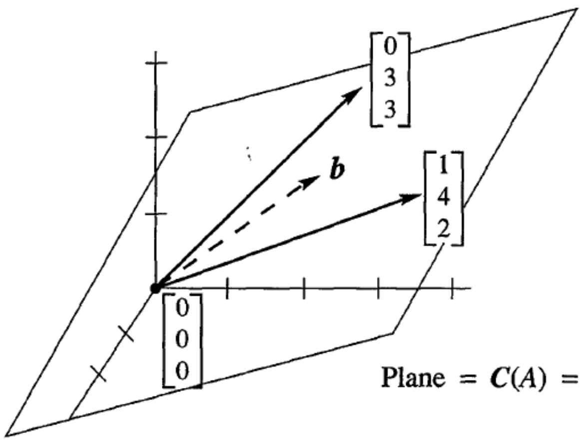
思考：S∪T 是向量子空间吗？反例，R^3 中 S 是直线，T 是面，S∪T 不是。
加法原则被破坏，因为 S 和 T 中各出一个向量，相加之后可能不在 S∪T 中

要点 4：矩阵 A 的列向量的线性组合组成的子空间称为 A 的列空间，记作 C(A)。即，列空间被 A 的列向量支撑。

要点 5：Ax=b 有解，说明 b 在 C(A)中。
无限解说明 A 的列向量有冗余，唯一解说明 A 的列向量线代独立。

Example 4

$$Ax \quad \text{is} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{which is} \quad x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$



$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$b = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Plane $= C(A) =$ all vectors Ax

思考

32 Show that the matrices A and $\begin{bmatrix} A & AB \end{bmatrix}$ (with extra columns) have the same column space. But find a square matrix with $C(A^2)$ smaller than $C(A)$. Important point: An n by n matrix has $C(A) = \mathbf{R}^n$ exactly when A is an _____ matrix.

C([A AB])与 C(A)的关系？

C(A^2)与 C(A)的关系?　　A^2 特殊的线性组合，例子 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A^2 = 0$

当矩阵 A 具有什么性质时，C(A)=R^n?　　另一种描述，Ax=b 总有解，那么 A 可逆。如果 Ax=b 不总有解，那么 C(A)是线性子空间。

3.2 Null Space of A: Solving Ax=0(零空间：Ax=0)

要点 1：A 的零空间是 Ax=0 中的所有 x 解，记作 N(A),他是一个子空间。
可以证明为什么是子空间
v,w∈N(A):加法，　Av=0, Aw=0, A(v+w) = Av+Aw=0；乘法，A(cv)=cAv=0
N(A)∈R^n, C(A)∈R^m,这一点需要强调，避免混淆两个空间

要点 2：向下消元可以得到梯形矩阵 U，然后通过向上消元和除法，得到得到 R，在 R 中可以找到轴变量和自由变量。
R=rref(A)，最简行梯形式 Reduced Row Echelon Form。A 先到 U（梯形式），然后到 R，通过下面过程演示。

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\1&2&3&5\\1&3&4&7\\1&4&5&9\end{bmatrix}=>\mathrm{U}=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}>\mathrm{R}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Ax=0 与 Rx=0 等价。

要点 3：R 或 U 的每个自由变量可以得到一个特殊解，令当前的自由变量中的 x 为 1，其他的为 0，然后通过回带，可以得到 x。
特殊解，接上面的例子

$$s_1=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\ s_2=\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

上面提到特殊解

要点 4：Ax=0 的所有解是特殊解的线性组合。
A 化简为 R，然后将轴变量和自由变量分开，得到通解，仍然利用线性方程的思想，接上面的列子，R 的线性方程如下

$$\begin{cases}x_1+0+x_3+x_4=0\\0+x_2+x_3+2x_4=0\end{cases}$$

令 $x_3=1,x_4=0$，可得 $x_1=-1,x_2=-1$
令 $x_3=0,x_4=1$，可得 $x_1=-1,x_2=-2$
所以，通解如下，（强调轴变量和自由变量）

$$x=\begin{bmatrix}-x_3-2x_4\\-x_3-1x_4\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

这里提到通解，其实特殊解就是通解的核心。

要点 5：如果 n>m（列大于行），A 列向量至少存在一个自由变量，也就至少存在一个特殊解，所以零空间中必然存在不为 0 的 x。

思考

35 If A is 4 by 4 and invertible, describe all vectors in the nullspace of the 4 by 8 matrix $B=[A\ \ A]$.

[I I]x=0，可以适当展开，B 的零空间不为空，为$\begin{bmatrix}-I\\I\end{bmatrix}$。

3.3 The Rank and the Row Reduced Form(秩与行简化形式)

矩阵不变的地方—秩，在消元中，秩不变，反映矩阵真实尺寸。

要点 1：矩阵的秩是轴的个数。也就是 R=rref(A)中左对角线中 1 的个数。

$$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}1&1&2&4\\1&2&2&5\\1&3&2&6\end{bmatrix},\mathrm{R}=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

要点 2： A 与 R(=rref(A))的前 r 个轴列（pivcol）的位置相同。
R 的轴列可以轻松的观察到，由于 Rx=0 与 Ax=0 中的 x 相同(要点 5 剧透)，且 A 到 R 过程中没有列变换，所以两者的轴列位置相同。

要点 3：前 r 轴列不能是其前面的列向量的线性组合。
都是 0，所以无法线性组合。
要点 4：n-r 的自由变量是零空间的基。
零空间的快速计算方法，假设 rref(A)形式如下

$$rref(A)=R=\begin{bmatrix}I&F\\0&0\end{bmatrix},\mathrm{N(A)=C}\left(\begin{bmatrix}-F\\I\end{bmatrix}\right)$$

从上面的形式，可以看出，N(A)的秩的数量 n-r
RN=0,N 称为零空间矩阵，有特殊解向量组成。
使用例子验证上面的公式。

要点 5：A 与 R 的零空间相同。Ax=ERx=0

思考

28 Suppose you allow elementary *column* operations on A as well as elementary row operations (which get to R). What is the "row-and-column reduced form" for an m by n matrix of rank r?

$\mathrm{EA}E'=\begin{bmatrix}I_r&F\\0&0\end{bmatrix}$

3.4 The Complete Solution to Ax=b(Ax=b 的完整解)

在求解 Ax=0 的过程时，我们没有关注等号右边，因为任何行变化，对 0 向量的作用均是 0 向量。但是 Ax=b 的求解过程必须关注等号右边了。

要点 1：秩等于轴的数量，最简行矩阵 R 有 m-r 个全是 0 的行
要点 2：Ax=b 有解 <=> 最后 m-r 等式化简为 0=0

要点 3：特殊解 x_p 的计算方法是令所有的自由变量均为 0
Ax=b => Rx=d

令所有自由变量为 0，特殊解就全部来自于 d
例子

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{has the augmented matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \mathbf{6} \\ 1 & 3 & 1 & 6 & \mathbf{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \boldsymbol{b} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{has the augmented matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 1 & 4 & \mathbf{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & \boldsymbol{d} \end{bmatrix}.$$

$x_{\text{particular}}$	*The particular solution solves*	$Ax_p = b$
$x_{\text{nullspace}}$	*The $n - r$ special solutions solve*	$Ax_n = 0.$

Complete solution
one x_p
many x_n

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_p + \boldsymbol{x}_n = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

后面要将上面的图片文本化。

要点 4：当自由变量 确定后，轴变量才能确定
完整通解，可以参考“线代随笔 02-Ax=b 的完整解”。

要点 5：r=n(列)时，廋长形，没有自由变量，要么有唯一解，要么无解
要点 6：r=m(行)，宽胖形；当 m=n 时，唯一解；当 m<n 时，无限解。
四种情况对应的四种 R，需要详细讲解，这是本质。

The four possibilities for linear equations depend on the rank r:

$r = m$	and	$r = n$	*Square and invertible*	$Ax = b$	has 1 solution
$r = m$	and	$r < n$	*Short and wide*	$Ax = b$	has ∞ solutions
$r < m$	and	$r = n$	*Tall and thin*	$Ax = b$	has 0 or 1 solution
$r < m$	and	$r < n$	*Not full rank*	$Ax = b$	has 0 or ∞ solutions

The reduced R will fall in the same category as the matrix A. In case the pivot columns happen to come first, we can display these four possibilities for R. For $Rx = d$ (and the original $Ax = b$) to be solvable, d must end in $m - r$ zeros.

Four types	$R = \begin{bmatrix} I \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
Their ranks	$r = m = n$	$r = m < n$	$r = n < m$	$r < m, r < n$

思考题

34 Suppose you know that the 3 by 4 matrix A has the vector $s = (2,3,1,0)$ as the only special solution to $Ax = \mathbf{0}$.

(a) What is the *rank* of A and the complete solution to $Ax = \mathbf{0}$?

(b) What is the exact row reduced echelon form R of A?

(c) How do you know that $Ax = b$ can be solved for all b?

36 Suppose $Ax = b$ and $Cx = b$ have the same (complete) solutions for every b. Is it true that $A = C$?

3.5 Independences, Basis and Dimension (线性独立，基和维度)

子空间的真实尺寸。虽然有 n 列，但是列空间的维度不一定是 n。

要点 1：如果 x=0 是 Ax=0 的唯一解，A 的列线性独立
要点 2：$v_1,\ldots,v_r$ 的线性组合填充了整个空间，称为支撑了一个空间
要点 3：一组线性独立的向量支撑了一个空间，这组向量是这个空间的一组基。这个空间中的每一个向量可以有这组基唯一的线性组合表示。
要点 4：对应一个固定的向量，所有的基的向量数量相同，向量的数目称为维度。
要点 5：轴列是 C(A)的基，维度为 r

3.6 Dimensions of the Four Subspaces(四大子空间的维度)

要点 1：r 个轴行是 R（也是 A）的行空间的基
要点 2：r 个轴列是 A 的列空间的基
要点 3：n-r 个特殊解是 A（R）零空间的基
要点 4：单位矩阵 I 最后 m 行是 $N(R^T)$的基
要点 5：消元矩阵 E 最后 m 行是 $N(A^T)$的基

参考[线代随笔 3-矩阵的 4 个线性子空间]