Introduction to Linear Algebra – 第六章(4)：正定矩阵

bourneli

2016年11月

正定矩阵是一种特殊的对称的矩阵，很多应用中都会涉及正定矩阵的相关性质。正定矩阵比较有趣的一点是，它可以将线性代数中很多重要的概念串联起来 ，形成一个整体。本文主要描述正定矩阵的性质以及各性质之间的关系，并且给出相关证明。

正定矩阵性质

对称 矩阵A具有下面5个性质中的一个，那么它就具备了剩下的其他性质，并且被称之为正定矩阵：

1. 所有主元大于0
2. 所有左上行列式大于0
3. 所有特征值大于0
4. $x^TAx > 0, x \neq 0$
5. $A = R^TR$并且R的列线性独立

例子

已知矩阵$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$。计算主元，得到$rref(A) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$。可以轻松计算特征值，左上行列式。

二次形式展开 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 2(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = 2(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 + \frac{3}{2}x_2^2 > 0$

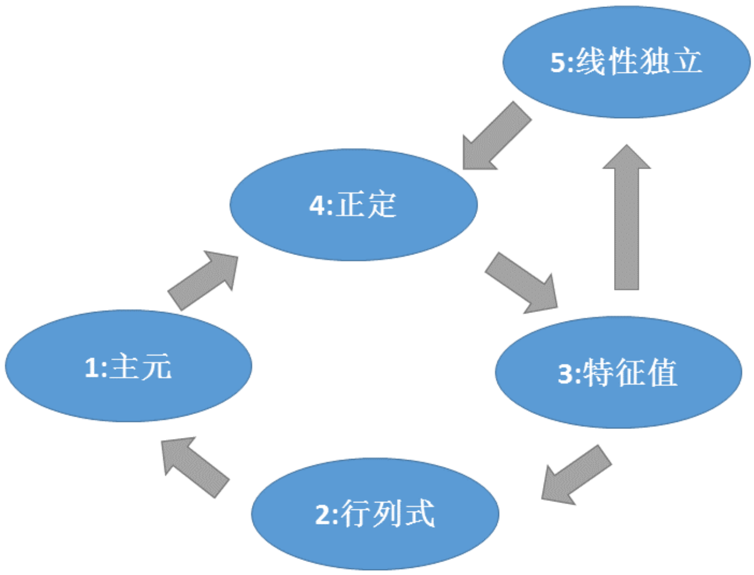
$A = LDL^T$ 分解,然后变成R

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2乘2矩阵，完全符合上面的性质。

正定矩阵性质证明

上面有5个性质，如果每两个互相证明，那么需要证明20个定理，非常繁琐。其实，可以用图的角度看待这个问题，将每个性质看作图的顶点，如果性质之间具有推导特性，看作一条有向边。只要任意一个点出发，都可以到达其他顶点，那么问题就解决了，并且需要证明的定理也不需要20个。经过观察，可以得到下面的推导图，



根据上面的推导图，现在只需要证明6个定理，即可达到目的，下面逐个证明。

证明：$4 \Rightarrow 3$

命题 若对称矩阵A有性质$x^TAx > 0, x \neq 0$，证明A的所有特征值均为正数。

证明

A对称，那么其必然可以对角化，有$A = Q\Lambda Q^T$,且将正定性质代入，具有$x^TQ\Lambda Q^Tx > 0$，其中Λ是对角矩阵，对角元素为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$。令$y = Q^Tx = [y_1 \quad \cdots \quad y_n]^T$。所以，最后有

$$y\Lambda y^T > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda y_i^2 > 0$$

上述不等式需要对任意不等于0向量的x成立，由于Q^T是标准正交矩阵，也就是对任意不等于0向量的y成立，所以$\lambda_i > 0$必须横成立。

证毕

证明：$3 \Rightarrow 5$

命题 若对称矩阵A所有特征值大于0，证明存在矩阵R，其列线性独立，且$A = R^TR$。

证明

A对称，所以有$A = Q\Lambda Q^T$，A的特征值全部为0$\lambda_i > 0$，所以有$A = Q\Lambda^{\frac{1}{2}}(\Lambda^{\frac{1}{2}})^TQ^T$，令$R = (Q\Lambda^{\frac{1}{2}})^T$，且$R^{-1} = Q\Lambda^{-\frac{1}{2}}$，那么有R可逆且$A = R^TR$。

证毕

证明: $5 \Rightarrow 4$

命题 对称矩阵A有$A = R^TR$并且R的列线性独立，证明 $x^TAx > 0, x \neq 0$

证明

因为R列线性独立，$x \neq 0$，所以$Rx \neq 0$。

直接按照条件展开$x^TAx = x^TR^TRx = (\|Rx\|)^2 > 0$恒成立。

证毕

证明：$3 \Rightarrow 2$

命题 对称矩阵A的所有特征值大于0，证明A的所有左上行列式大于0

证明

因为A所有特征值$\lambda_i > 0$，所以有$\|A\| = \prod_{i=1}^n \lambda_i > 0$。

假设A_k是矩阵A保留左上角k行和k列。因为对任意$x \neq 0$，均有$x^TAx > 0$,所以对于特殊形式的$x = (x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0) \neq 0, k = 1, 2, \cdots, n$仍然成立，则$A_k$与A有如下关系

$$\begin{aligned} 0 <&(x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)A(x_1, x_2, \cdots, x_k, 0, \cdots, 0)^T \\ =&(x_1, x_2, \cdots, x_k)A_k(x_1, x_2, \cdots, x_k) \end{aligned}$$

所以A_k正定，推出$\|A_k\| > 0$。

证毕

证明：$2 \Rightarrow 1$

命题 对称矩阵A所有左上行列式大于0,证明A的所有主元大于0

证明

因为$\|A_k\| > 0$，所以A可逆。那么，可以只通过基础消元（特征值不变），而不需要基础换行或基础乘法（这些导致特征值变化），将A化简为只有**主对角线**的矩阵，此时对角线上的元素就是主元p_i，并且此过程做上角行列式保持不变。所以有$\|A_k\| = \prod_{i=1}^k p_i, \|A_{k-1}\| = \prod_{i=1}^{k-1} p_i$,推导出$p_k = \frac{\|A_k\|}{\|A_{k-1}\|} > 0$。

证毕

证明：$1 \Rightarrow 4$

命题 对称矩阵A所有主元大于0，证明$x^TAx > 0, x \neq 0$

证明

使用LDU分解，由于A对称，所以$A = LDL^T$，其中D是对角矩阵，且每个元素p_i是A的主元。代入x，有x^TLDL^Tx。令$y = L^Tx = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$。所以$x^TLDL^Tx = y^TDy = \sum_{i=1}^n p_i y_i^2 > 0$。

证毕

至此，所以必要的定理已经证明完成，得到了完成的证明图，最终的问题得到了证实。

正定应用

- 假设C是正定，且A列线性独立，证明A^TCA正定，工程应用中的重要定理。

证明：$R = \Lambda^{\frac{1}{2}}QA$,易证明R线性独立。因为只有x=0时，$RX = 0$才成立，否则不行。

- 二元矩阵中，正定的二次型是椭圆形。
- 很多概率模型需要其中的矩阵正定。