前言

本文记录 Introduction to Linear Algebra, 4th 中每节的要点，组织方式与教材同步，每条要点会适当配置例子或证明，方便后续回顾与分享。

1: Introduction to Vectors(向量介绍)

1.1 Vector and Linear Combinations(向量与线性组合)

要点 1：二维向量有两个成分

要点 2：向量相加等于对应成分相加，标量与向量相乘等于标量与每个成分相乘，得到结果与原来的向量**共线**

要点 3：三个向量的**线性组合**形式为 c***v***+d***u***+e***w***

要点 4：在三维空间 R^3 中，通常一个向量的线性组合为线，两个向量的线性组合为面，三个向量的线性组合为 R^3

1.2 Lengths and Dot Products(向量长度与点积)

要点 1：两个向量点积为每个组件相乘后求和

要点 2：向量长度为**向量自身点积**后开方

要点 3：单位向量为 $\boldsymbol{v}/\|v\|$，长度为 1

要点 4：若 ***v*** 和 ***u*** 点积为 0，那么 $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{u}$(证明:定义,极坐标和三角变换)

要点 5：余弦公式

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{v}\cdot\mathrm{w}}{\|\mathrm{v}\|\|\mathrm{w}\|}\text{，推导 }\mathrm{v}\cdot\mathrm{w}\le\|\mathrm{v}\|\|\mathrm{w}\|\text{，继续推导}\|\mathrm{v}+\mathrm{w}\|\le\|\mathrm{v}\|+\|\mathrm{w}\|$$

P.S.:余弦定理用作图和垂直来推导，余弦值小于等于 1 推导第一个不等式，平方推导第二个不等式。

1.3 Matrices(矩阵)

要点 1：矩阵乘向量（A***x***）可以理解为矩阵列向量的线性组合。

要点 2：当 A 可逆时，A***x***=***b*** 总有解，解为 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$。

要点 3：差矩阵的逆是和矩阵，一个正向效果，一个逆向效果，最后没有效果。

$$\text{减矩阵}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\0&-1&1\end{bmatrix}\text{；加矩阵}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

要点 4：循环矩阵不可逆，三列在一个平面上，三条列相加为 0，C***x***=***0*** 有无数解。

要点 5：本章节有部分概念超前，会在后面的章节总给出具体讲解。

2: Solving Linear Equations(求解线性方程组)

2.1 Vector and Linear Equations(向量和线性方程组)

本章主要需要了重行，列两种视角理解线性方程组。

要点 1：向量基本运算是代数乘法 k***v*** 和向量相加 ***v***+***w***
要点 2：向量基本运算组合起来就是**线性组合** c***v*** + d***w***
要点 3：矩阵向量乘法可以通过行向量点乘计算，但是需被理解为 A 列向量的**线性组合**。
要点 4：列视图，A***x***=***b*** 要求找到一种线性组合 ***x***，使得 A 的列变成 ***b*** (将 2.2 节列子写成下面的形式)

$$[x_1\boldsymbol{a_1}\ x_2\boldsymbol{a_2}\ \dots\ x_n\boldsymbol{a_n}]=\boldsymbol{b}$$

要点 5：行视图，每一行的等式是线(n=2)，平面(n=3)或超平面(n>3),交集就是解 ***x***。
Ax+By+Cz=d,R^3 空间中的平面公式，随便绘制三个平面，得到交集解。

2.2 消元思想(The Idea of Elimination)

主要需要了解消元得到上三角，然后回带求解；然后需要了解无数解和无解的成因。
要点 1：Ax=b 经过消元后，变成 Ux=d, U 是上三角矩阵。

原方程组$\begin{cases} 2x+4y-2z=2 \\ 4x+9y-3z=8 \\ -2x-3y+7z=10 \end{cases}$ => 上三角形式$\begin{cases} 2x+4y-2z=2 \\ \quad\quad 1y-1z=4 \\ \quad\quad\quad\quad 4z=8 \end{cases}$

要点 2：消元的具体方法，i 行等式乘以某个值然后被 j 行减掉，用于消除 j 行对应元素
要点 3：上面提到的某个值=j 行元素大小/i 行阀值。（通过例子比较直观）
要点 4：阀值位置上出现 0，如果下面的行有不为 0，可以行交换来修复
要点 5：上三角形式的线性方程组可以从底部回带来解

要点 6：若无法转成上三角，要么无解，要么无限解

无限解$\begin{cases} x-2y=11 \\ 3x-6y=33 \end{cases}$；行视图：相同平面或共线；列视图：线性依赖

无解：$\begin{cases} x-2y=11 \\ 3x-6y=8 \end{cases}$；行视图：平行无交集；列视图：线性独立

2.3 矩阵消元(Elimination Using Matrices)

消元的数学描述，使用矩阵。
要点 1：Ax=x_1*列 1+ …… +x_n*列 n,即$(\mathrm{Ax})_i=\sum_j^n a_{ij}\,x_j$
要点 2：单位矩阵 I（什么都不做），消元矩阵=E_{ij} 使用系数 l_{ij},排列矩阵=P_{ij}（单位矩阵变换），除法矩阵 D_i。

除法矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 2.5 & 0.5\end{bmatrix}$

排列矩阵 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

减法矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ -5/4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 0 & -21/4\end{bmatrix}$

总结：基础变换矩阵左边作用于行，右边作用与列，都是基于单位矩阵进行变换得到。
例子：将 2.2 节中的例子，用矩阵过程表示
要点 3：Ax=b 乘以消元矩阵 E_{21} 的过程等价于第二行减去 l_{21} 乘以第一行，用-l_{21} 取代单位矩

阵行 2 列 1 的位置，得到消元矩阵 E_{21}。（举个例子比较形象）

要点 4：对于增广矩阵[A b],上面的消元过程得到[$E_{21}A$ $E_{21}b$]。（这里初次涉及到块矩阵）
解线性方程组，其实就是对增广矩阵同步进行线性变化，当左边变成 I，右边就代表解。

要点 5：矩阵 A 乘 B，可以理解为 A 与 B 每一列相乘，也可以使用行角度解释。（使用块矩阵计算解释）

列视图：$AB=A[b_1\ b_2\ \dots\ b_n]=[Ab_1\ Ab_2\ \dots\ Ab_3]$

行视图：$AB=[\boldsymbol{a_1}\dots\boldsymbol{a_n}]\begin{bmatrix}b_1^T\\ \vdots\\ b_n^T\end{bmatrix}=\boldsymbol{a_1}b_1^T+\dots+\boldsymbol{a_n}b_n^T+$

2.4 矩阵运算规则(Rules for Matrix Operations)

矩阵运算的形式化定义，主要理解矩阵乘法和乘法结合律。
要点 1：AB 的(i,j)元素是 A 第 i 行与 B 第 j 列点积。
要点 2：一个 m 乘 n 矩阵与一个 n 乘 p 矩阵相乘需要 mnp 次乘法计算。
要点 3：A(BC)=(AB)C，非常重要，很多证明都是动过乘法连锁率进行变换的。
要点 4：AB 的另一种解释，所有矩阵之和，这些矩阵有 A 的列与 B 的行相乘得到。（矩阵块乘法，兼容即可乘）

$$AB=[a_1\quad\cdots\quad a_n]\begin{bmatrix}b_1^T\\ \vdots\\ b_2^T\end{bmatrix}=a_1b_1^T+\cdots+a_nb_2^T$$

要点 5：若矩阵块兼容，可以通过块相乘计算矩阵乘法，乘法位置不能变，可以简化乘法，方便分析。（可以用分块 I 举例子）。

$$\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\ Y\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4\\2&4\\3&1\\3&4\\2&1\\4&3\end{bmatrix}$$

要点 6：块矩阵舒尔补(Schur Complement)，有点类似 d-cb/a

$$\begin{bmatrix}I & 0\\ -CA^{-1} & I\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{bmatrix}$$

块矩阵消元

需要回忆
1 基础矩阵，三类：消元，排列和除法，并且这三类矩阵均可逆。
2 阀值和 Row Reduced Echelon Form 简化的行梯形式

2.5 逆矩阵(Inverse of Matrices)

逆矩阵的定义，性质与计算。

要点 1：逆矩阵必须满足，$AA^{-1}=I$ 和 $A^{-1}A=I$(满足一个叫左逆或右逆)
要点 2：A 可逆当且仅当 A 有 n 个轴（pivot），允许行交换
左=>右：A 可逆，$Ax=b$ 必有解，有 $x=A^{-1}b$,可到阀值形式
右=>左：n 个阀值，$E_{low}A=U$,进而有 $E_{up}E_{low}A=I, A^{-1}=E_{up}E_{down}$

要点 3：若 $Ax=0$,存在非 0 向量解，那么 A 不可逆。（反正法）
若 A 可逆，$A^{-1}Ax=0 \Rightarrow x=0$,矛盾
列线性依赖

要点 4：$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}, (ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$,其中 A，B，C 可逆
$AB(AB)^{-1}=ABB^{-1}A^{-1}= A(BB^{-1})A^{-1}=I$
$(AB)^{-1} AB= B^{-1}A^{-1}AB= I$

要点 5：高斯乔丹法求逆，即通过块矩阵[A I] => [I A^{-1}]求逆

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 0 & 1\end{bmatrix} => \begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix} => \begin{bmatrix}1 & 0 & 7 & -3\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

先讲课程，最后统一讲习题
练习：消元通用形式，课后 41 题

41 Suppose E_1, E_2, E_3 are 4 by 4 identity matrices, except E_1 has a, b, c in column 1 and E_2 has d, e in column 2 and E_3 has f in column 3 (below the 1's). Multiply $L = E_1E_2E_3$ to show that all these nonzeros are copied into L.

$E_1E_2E_3$ is in the *opposite* order from elimination (because E_3 is acting first). But $E_1E_2E_3 = L$ is in the *correct* order to invert elimination and recover A.

$E= E^{-1}{}_3E^{-1}{}_2E^{-1}{}_1= E^{-1}{}_{43}\ E^{-1}{}_{33}\ E^{-1}{}_{32}E^{-1}{}_{21}\ E^{-1}{}_{31}\ E^{-1}{}_{41}$
基础消元矩阵与逆的关系

2.6 消元=矩阵分解：A=LU (Elimination = Factorization : A=LU)

消元过程是一个矩阵分解，有 A=LU,更近一步，A=LDU，L 下三角，U 上三角，D 对角，L，U 对角全为 1 或 0.求逆复杂度非常高($O(n^3)$,消元过程)，还好实际应用组一般不会对太大的矩阵求逆。
要点 1：高斯消元（无排列），**可以将分解 A=LU**
EA=U,其中 E（基础矩阵）可逆，$L=E^{-1}$,单位消元矩阵可逆，那么及必然可逆。例子如下

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

要点 2：LU 其实是一个逆过程（需要举例子）
主要是将左边的 E 如何到右边 E 的过程，在上面的例子中可以一并讲解。

要点 3：根据 LU 分解，现在求解线性方程组就是计算两个三角矩阵
A=LU 且 $L=E^{-1}$，那么 $Ax=b \Rightarrow EAx=Eb \Rightarrow Ux=Eb=c$。即，**先计算 E，然后 Eb 得到 c 与 EA 得到**

U，然后代入 Ux=c，U 是一个上三角矩阵，可以轻松求解。

要点 4：分解过程有$(n^3-n)/3$基础计算（加减乘除），复杂度 $O(n^3)$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3}n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

要点 5：求逆复杂度 $O(n^3)$
n 个 n^2 操作

要点 6：对于带状矩阵，复杂度有所减小，w 为带的宽度，$O(n^3)$变为 $O(nw^2)$,$O(n^2)$变为
O(nw)，一般 w 很小，基本上变成线性了。

练习：A=LDU 的唯一性，L，U 为对角线全部为 1 的三角矩阵，L 下，U 上。D 为对角矩阵。参见习题 18 与相关解答

18 If $A = LDU$ and also $A = L_1D_1U_1$ with all factors invertible, then $L = L_1$ and $D = D_1$ and $U = U_1$. *"The three factors are unique."*
Derive the equation $L_1^{-1}LD = D_1U_1U^{-1}$. Are the two sides triangular or diagonal?
Deduce $L = L_1$ and $U = U_1$ (they all have diagonal 1's). Then $D = D_1$.

主要是 L，U 的对角为 1，所以 $L_1^{-1}L=I$，$U_1^{-1}U=I$

2.7 转置矩阵和排列矩阵(Transposes and Permutations)

理解转置矩阵和排列矩阵的定义与性质。
要点 1：转置定义，$(A^T)_{ji}=A_{ij}$
要点 2：$(AB)^T=B^TA^T,(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

$(Ax)^T=x^TA^T$,扩展到 AB：AB=[$Ab_1 \dots Ab_n$],$(AB)^T = \begin{bmatrix}(Ab_1)^T \\ \vdots \\ (Ab_n)^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1^TA^T \\ \vdots \\ b_n^TA^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1^T \\ \vdots \\ b_n^T\end{bmatrix}A^T = B^TA^T$

$(A^{-1}A)^T=A^T(A^{-1})^T=I$,根据可逆定义:**利用上面的推论**
上面可以结合 2.5.4 推论，逆与转置的结合律。

要点 3：$x*y=x^Ty$,那么 $Ax*y=(Ax)^Ty=x^T(A^Ty)$
点乘的矩阵乘表示，有很多证明使用此技巧

要点 4：对称矩阵 $A=A^T$,可得到 LDU 分解 $A=LDL^T$（需要讲解 LDU 分解，在上一节）
$L=U^T$ 可以得到上面的等式。**唯一性(在 2.6 习题中证明)**，得到 $U^T=L$

要点 5：排列矩阵 P 每一行只有一个 1，其余为 0，$P^{-1}=P^T$
基础排列矩阵是单位矩阵通过一步排列得到的矩阵。
$P=P^{-1}$：单一行列交换，在操作一次得到原来的结果
$P^{-1}=P^T$：P 是方块矩阵，**P 与 P^T 对应的"1"总是匹配**（I_4 的例子），所以 $PP^T=I$。
所以，$P=P^{-1}= P^T$。

要点 6：大小为 n 的矩阵，有 n!个排列矩阵，一半奇数，一半偶数。
要点 7：若 A 可逆，PA=LU
在定义排列矩阵后，得到了消元分解的完整形式。

举个例子：$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$,此时需要排列

练习：逆与转置相同的矩阵，习题 40

40 Suppose Q^{T} *equals* Q^{-1} (transpose equals inverse, so $Q^{\mathrm{T}}Q = I$).

(a) Show that the columns $q_1, \ldots, q_n$ are unit vectors: $\|\boldsymbol{q}_i\|^2 = 1$.

(b) Show that every two columns of Q are perpendicular: $\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_2 = 0$.

(c) Find a 2 by 2 example with first entry $q_{11} = \cos\theta$.

$$\mathrm{Q} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$