前言

本文记录 Introduction to Linear Algebra, 4th 中每节的要点，组织方式与教材同步，每条要点会适当配置例子或证明，方便后续回顾与分享。

1: Introduction to Vectors(向量介绍)

1.1 Vector and Linear Combinations(向量与线性组合)

要点 1：二维向量有两个成分

要点 2：向量相加等于对应成分相加，标量与向量相乘等于标量与每个成分相乘，得到结果与原来的向量**共线**

要点 3：三个向量的**线性组合**形式为 c***v***+d***u***+e***w***

要点 4：在三维空间 R^3 中，通常一个向量的线性组合为线，两个向量的线性组合为面，三个向量的线性组合为 R^3

1.2 Lengths and Dot Products(向量长度与点积)

要点 1：两个向量点积为每个组件相乘后求和

要点 2：向量长度为**向量自身点积**后开方

要点 3：单位向量为 ***v***/$\|v\|$，长度为 1

要点 4：若 ***v*** 和 ***u*** 点积为 0，那么 ***v***⊥***u***(证明:定义,极坐标和三角变换)

要点 5：余弦公式

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{v}\cdot\mathrm{w}}{\|\mathrm{v}\|\|\mathrm{w}\|}，推导\ \mathrm{v}\cdot\mathrm{w} \le \|\mathrm{v}\|\|\mathrm{w}\|，继续推导\|\mathrm{v}+\mathrm{w}\| \le \|\mathrm{v}\|+\|\mathrm{w}\|$$

P.S.:余弦定理用作图和垂直来推导，余弦值小于等于 1 推导第一个不等式，平方推导第二个不等式。

1.3 Matrices(矩阵)

要点 1：矩阵乘向量（A***x***）可以理解为矩阵列向量的线性组合。

要点 2：当 A 可逆时，A***x***=***b*** 总有解，解为 ***x***=A^{-1}***b***。

要点 3：差矩阵的逆是和矩阵，一个正向效果，一个逆向效果，最后没有效果。

$$减矩阵 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}；加矩阵 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

要点 4：循环矩阵不可逆，三列在一个平面上，三条列相加为 0，C***x***=***0*** 有无数解。

要点 5：本章节有部分概念超前，会在后面的章节总给出具体讲解。

2: Solving Linear Equations(求解线性方程组)

2.1 Vector and Linear Equations(向量和线性方程组)

本章主要需要了重行，列两种视角理解线性方程组。

要点 1：向量基本运算是代数乘法 k***v*** 和向量相加 ***v***+***w***
要点 2：向量基本运算组合起来就是**线性组合** c***v*** + d***w***
要点 3：矩阵向量乘法可以通过行向量点乘计算，但是需被理解为 A 列向量的**线性组合**。
要点 4：列视图，A***x***=***b*** 要求找到一种线性组合 ***x***，使得 A 的列变成 ***b***(将 2.2 节列子写成下面的形式)

$$[x_1\boldsymbol{a_1}\ x_2\boldsymbol{a_2}\ \dots\ x_n\boldsymbol{a_n}]=\boldsymbol{b}$$

要点 5：行视图，每一行的等式是线(n=2)，平面(n=3)或超平面(n>3),交集就是解 ***x***。
Ax+By+Cz=d,R^3 空间中的平面公式，随便绘制三个平面，得到交集解。

2.2 消元思想(The Idea of Elimination)

主要需要了解消元得到上三角，然后回带求解；然后需要了解无数解和无解的成因。
要点 1：Ax=b 经过消元后，变成 Ux=d, U 是上三角矩阵。

原方程组$\begin{cases} 2x+4y-2z=2 \\ 4x+9y-3z=8 \\ -2x-3y+7z=10 \end{cases}$ => 上三角形式$\begin{cases} 2x+4y-2z=2 \\ \quad\ \ 1y-1z=4 \\ \qquad\quad\ \ 4z=8 \end{cases}$

要点 2：消元的具体方法，i 行等式乘以某个值然后被 j 行减掉，用于消除 j 行对应元素
要点 3：上面提到的某个值=j 行元素大小/i 行阀值。（通过例子比较直观）
要点 4：阀值位置上出现 0，如果下面的行有不为 0，可以行交换来修复
要点 5：上三角形式的线性方程组可以从底部回带来解

要点 6：若无法转成上三角，要么无解，要么无限解

无限解$\begin{cases} \mathrm{x}-2\mathrm{y}=11 \\ 3\mathrm{x}-6\mathrm{y}=33 \end{cases}$；行视图：相同平面或共线；列视图：线性依赖

无解：$\begin{cases} \mathrm{x}-2\mathrm{y}=11 \\ 3\mathrm{x}-6\mathrm{y}=8 \end{cases}$；行视图：平行无交集；列视图：线性独立

2.3 矩阵消元(Elimination Using Matrices)

消元的数学描述，使用矩阵。
要点 1：Ax=x_1*列 1+ …… +x_n*列 n,即$(\mathrm{Ax})_\mathrm{i}=\sum_\mathrm{j}^\mathrm{n}\mathrm{a}_\mathrm{ij}\,\mathrm{x}_\mathrm{j}$
要点 2：单位矩阵 I（什么都不做），消元矩阵=E_{ij} 使用系数 l_{ij},排列矩阵=P_{ij}（单位矩阵变换），除法矩阵 D_i。

除法矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5 \\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5 \\ 2.5 & 0.5\end{bmatrix}$

排列矩阵 $\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5 \\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 1 \\ 4 & 5\end{bmatrix}$

减法矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0 \\ -5/4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 5 \\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 5 \\ 0 & -21/4\end{bmatrix}$

总结：基础变换矩阵左边作用于行，右边作用与列，都是基于单位矩阵进行变换得到。
例子：将 2.2 节中的例子，用矩阵过程表示
要点 3：Ax=b 乘以消元矩阵 E_{21} 的过程等价于第二行减去 l_{21} 乘以第一行，用-l_{21} 取代单位矩

阵行 2 列 1 的位置，得到消元矩阵 E_{21}。（举个例子比较形象）

要点 4：对于增广矩阵[A b],上面的消元过程得到[$E_{21}A$ $E_{21}b$]。（这里初次涉及到块矩阵）
解线性方程组，其实就是对增广矩阵同步进行线性变化，当左边变成 I，右边就代表解。

要点 5：矩阵 A 乘 B，可以理解为 A 与 B 每一列相乘，也可以使用行角度解释。（使用块矩阵计算解释）
列视图：$AB=A[b_1\ b_2\ \dots\ b_n]=[Ab_1\ Ab_2\ \dots\ Ab_3]$
行视图：$AB=[\boldsymbol{a_1} \dots \boldsymbol{a_n}]\begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_n^T \end{bmatrix}= \boldsymbol{a_1}b_1^T+\dots+\boldsymbol{a_n}b_n^T+$

2.4 矩阵运算规则(Rules for Matrix Operations)

矩阵运算的形式化定义，主要理解矩阵乘法和乘法结合律。
要点 1：AB 的(i,j)元素是 A 第 i 行与 B 第 j 列点积。
要点 2：一个 m 乘 n 矩阵与一个 n 乘 p 矩阵相乘需要 mnp 次乘法计算。
要点 3：A(BC)=(AB)C，非常重要，很多证明都是动过乘法连锁率进行变换的。
要点 4：AB 的另一种解释，所有矩阵之和，这些矩阵有 A 的列与 B 的行相乘得到。（矩阵块乘法，兼容即可乘）

$$AB = [a_1 \quad \cdots \quad a_n]\begin{bmatrix} b_1^T \\ \vdots \\ b_2^T \end{bmatrix} = a_1b_1^T + \cdots + a_nb_2^T$$

要点 5：若矩阵块兼容，可以通过块相乘计算矩阵乘法，乘法位置不能变，可以简化乘法，方便分析。（可以用分块 I 举例子）。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \\ 3 & 1 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

要点 6：块矩阵舒尔补(Schur Complement)，有点类似 d-cb/a

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}$$

块矩阵消元

需要回忆
1 基础矩阵，三类：消元，排列和除法，并且这三类矩阵均可逆。
2 阀值和 Row Reduced Echelon Form 简化的行梯形式

2.5 逆矩阵(Inverse of Matrices)

逆矩阵的定义，性质与计算。

要点 1：逆矩阵必须满足，$AA^{-1}=I$ 和 $A^{-1}A=I$(满足一个叫左逆或右逆)
要点 2：A 可逆当且仅当 A 有 n 个轴（pivot），允许行交换
左=>右：A 可逆，Ax=b 必有解，有 $x=A^{-1}b$,可到阀值形式
右=>左：n 个阀值，$E_{low}A=U$,进而有 $E_{up}E_{low}A=I, A^{-1}=E_{up}E_{down}$

要点 3：若 Ax=0,存在非 0 向量解，那么 A 不可逆。（反正法）
若 A 可逆，$A^{-1}Ax=0 \Rightarrow x=0$,矛盾
列线性依赖

要点 4：$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$,$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$,其中 A，B，C 可逆
$AB(AB)^{-1}=ABB^{-1}A^{-1}= A(BB^{-1})A^{-1}=I$
$(AB)^{-1} AB= B^{-1}A^{-1}AB= I$

要点 5：高斯乔丹法求逆，即通过块矩阵[A I] => [I A^{-1}]求逆

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\2 & 7 & 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 3 & 1 & 0\\0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 7 & -3\\0 & 1 & -2 & 1\end{bmatrix}$$

先讲课程，最后统一讲习题
练习：消元通用形式，课后 41 题

41 Suppose E_1, E_2, E_3 are 4 by 4 identity matrices, except E_1 has a, b, c in column 1 and E_2 has d, e in column 2 and E_3 has f in column 3 (below the 1's). Multiply $L = E_1E_2E_3$ to show that all these nonzeros are copied into L.

$E_1E_2E_3$ is in the *opposite* order from elimination (because E_3 is acting first). But $E_1E_2E_3 = L$ is in the *correct* order to invert elimination and recover A.

$E= E^{-1}{}_3E^{-1}{}_2E^{-1}{}_1= E^{-1}{}_{43}\, E^{-1}{}_{33}\, E^{-1}{}_{32}E^{-1}{}_{21}\, E^{-1}{}_{31}\, E^{-1}{}_{41}$
基础消元矩阵与逆的关系

2.6 消元=矩阵分解：A=LU (Elimination = Factorization : A=LU)

消元过程是一个矩阵分解，有 A=LU,更近一步，A=LDU，L 下三角，U 上三角，D 对角，L，U 对角全为 1 或 0.求逆复杂度非常高($O(n^3)$,消元过程)，还好实际应用组一般不会对太大的矩阵求逆。
要点 1：高斯消元（无排列），**可以将分解 A=LU**
EA=U,其中 E（基础矩阵）可逆，$L=E^{-1}$,单位消元矩阵可逆，那么及必然可逆。例子如下

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}$$

要点 2：LU 其实是一个逆过程（需要举例子）
主要是将左边的 E 如何到右边 E 的过程，在上面的例子中可以一并讲解。

要点 3：根据 LU 分解，现在求解线性方程组就是计算两个三角矩阵
A=LU 且 $L=E^{-1}$，那么 Ax=b =>EAx=Eb => Ux=Eb=c。即，**先计算 E，然后 Eb 得到 c 与 EA 得到**

U，然后代入 Ux=c，U 是一个上三角矩阵，可以轻松求解。

要点 4：分解过程有(n^3-n)/3 基础计算（加减乘除），复杂度 O(n^3)

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{3} n(n+1)(n+\frac{1}{2})$$

要点 5：求逆复杂度 O(n^3)
n 个 n^2 操作

要点 6：对于带状矩阵，复杂度有所减小，w 为带的宽度，O(n^3)变为 O(nw^2),O(n^2)变为 O(nw)，一般 w 很小，基本上变成线性了。

练习：A=LDU 的唯一性，L，U 为对角线全部为 1 的三角矩阵，L 下，U 上。D 为对角矩阵。参见习题 18 与相关解答

18 If $A = LDU$ and also $A = L_1D_1U_1$ with all factors invertible, then $L = L_1$ and $D = D_1$ and $U = U_1$. *"The three factors are unique."*
Derive the equation $L_1^{-1}LD = D_1U_1U^{-1}$. Are the two sides triangular or diagonal? Deduce $L = L_1$ and $U = U_1$ (they all have diagonal 1's). Then $D = D_1$.

主要是 L，U 的对角为 1，所以 $L_1^{-1}L=I$，$U_1^{-1}U=I$

2.7 转置矩阵和排列矩阵(Transposes and Permutations)

理解转置矩阵和排列矩阵的定义与性质。
要点 1：转置定义，$(A^T)_{ji}=A_{ij}$
要点 2：$(AB)^T=B^TA^T$,$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

$(Ax)^T=x^TA^T$,扩展到 AB：AB=[Ab_1 … Ab_n],$(AB)^T = \begin{bmatrix}(Ab_1)^T \\ \vdots \\ (Ab_n)^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1^TA^T \\ \vdots \\ b_n^TA^T\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}b_1^T \\ \vdots \\ b_n^T\end{bmatrix} A^T = B^TA^T$

$(A^{-1}A)^T=A^T(A^{-1})^T=I$,根据可逆定义:**利用上面的推论**
上面可以结合 2.5.4 推论，逆与转置的结合律。

要点 3：$x*y=x^Ty$,那么 $Ax*y=(Ax)^Ty=x^T(A^Ty)$
点乘的矩阵乘表示，有很多证明使用此技巧

要点 4：对称矩阵 $A=A^T$,可得到 LDU 分解 $A=LDL^T$（需要讲解 LDU 分解，在上一节）
$L=U^T$ 可以得到上面的等式。**唯一性(在 2.6 习题中证明)**，得到 $U^T=L$

要点 5：排列矩阵 P 每一行只有一个 1，其余为 0，$P^{-1}=P^T$
基础排列矩阵是单位矩阵通过一步排列得到的矩阵。
$P=P^{-1}$：单一行列交换，在操作一次得到原来的结果
$P^{-1}=P^T$：P 是方块矩阵，**P 与 P^T 对应的"1"总是匹配**（I_4 的例子），所以 $PP^T=I$。
所以，$P=P^{-1}= P^T$。

要点 6：大小为 n 的矩阵，有 n!个排列矩阵，一半奇数，一半偶数。
要点 7：若 A 可逆，PA=LU
在定义排列矩阵后，得到了消元分解的完整形式。

举个例子：$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} => \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$,此时需要排列

练习：逆与转置相同的矩阵，习题 40

40 Suppose Q^{T} *equals* Q^{-1} (transpose equals inverse, so $Q^{\mathrm{T}}Q = I$).

(a) Show that the columns $q_1, \ldots, q_n$ are unit vectors: $\|\boldsymbol{q}_i\|^2 = 1$.

(b) Show that every two columns of Q are perpendicular: $\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_2 = 0$.

(c) Find a 2 by 2 example with first entry $q_{11} = \cos\theta$.

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

3: Vector Spaces and Subspaces(向量空间和子空间)

之前讨论的都是向量，本章开始研究向量的“集合”（包括一定规则），称之为向量空间。讨论的范围组件扩大，从点，向量到向量空间。
向量空间：一系列向量的集合，这里的向量不仅仅是列向量，还包括矩阵，实函数等。
根据 R^n 这个例子讲解向量空间。

3.1 Space of Vectors (向量空间)

要点 1：R^n 是所有 n 个实数的列向量的集合。
比如 R^3 是三维列向量空间，R^2 是二维列平面。
向量空间条件，对任意向量 w,v,存在：

- w+v 在子空间中；
- cv 在子空间中，c 为任意数,特别是 C=0；

要点 2：**M**（2 乘 2 矩阵），**F**（所有实函数 f(x)）和 **Z**（单独的零向量）是向量子空间。
其他向量空间，加和乘得到的结果仍然在 **M**，**F** 和 **Z** 中。

要点 3：包含向量 w 和 v 的子空间必包含所有的线性组合 cv+dw

向量子空间是向量空间的子集，比如使用 2 独立向量组成的 3 维向量，就是 R^3 的子空间。
总结：特定向量的线性组合，组成了向量子空间。

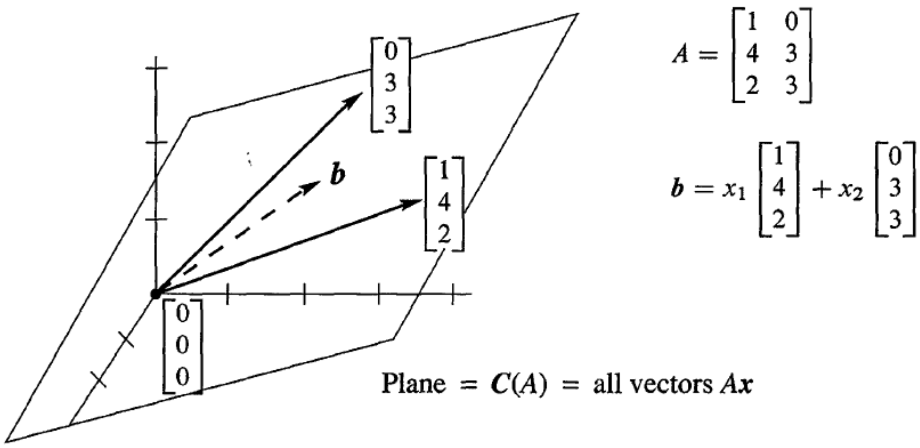
思考：S∪T 是向量子空间吗？反例，R^3 中 S 是直线，T 是面，S∪T 不是。
加法原则被破坏，因为 S 和 T 中各出一个向量，相加之后可能不在 S∪T 中

要点 4：矩阵 A 的列向量的线性组合组成的子空间称为 A 的列空间，记作 C(A)。即，列空间被 A 的列向量支撑。

要点 5：Ax=b 有解，说明 b 在 C(A)中。
无限解说明 A 的列向量有冗余，唯一解说明 A 的列向量线代独立。

Example 4

$$\boldsymbol{Ax} \quad \text{is} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{which is} \quad x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$



思考

32 Show that the matrices A and $\begin{bmatrix} A & AB \end{bmatrix}$ (with extra columns) have the same column space. But find a square matrix with $\boldsymbol{C}(A^2)$ smaller than $\boldsymbol{C}(A)$. Important point: An n by n matrix has $\boldsymbol{C}(A) = \mathbf{R}^n$ exactly when A is an _____ matrix.

C([A AB])与 C(A)的关系？

C(A^2)与 C(A)的关系?　　A^2 特殊的线性组合，例子 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A^2 = 0$

当矩阵 A 具有什么性质时，C(A)=R^n?　　另一种描述，Ax=b 总有解，那么 A 可逆。如果 Ax=b 不总有解，那么 C(A)是线性子空间。

3.2 Null Space of A: Solving Ax=0(零空间：Ax=0)

要点 1：A 的零空间是 Ax=0 中的所有 x 解，记作 N(A),他是一个子空间。
可以证明为什么是子空间
v,w∈N(A):加法，　Av=0, Aw=0, A(v+w) = Av+Aw=0；乘法，A(cv)=cAv=0
N(A)∈R^n, C(A)∈R^m,这一点需要强调，避免混淆两个空间

要点 2：向下消元可以得到梯形矩阵 U，然后通过向上消元和除法，得到得到 R，在 R 中可以找到轴变量和自由变量。
R=rref(A)，最简行梯形式 Reduced Row Echelon Form。A 先到 U（梯形式），然后到 R，通过下面过程演示。

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\1&2&3&5\\1&3&4&7\\1&4&5&9\end{bmatrix}=>\mathrm{U}=\begin{bmatrix}1&1&2&3\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}>\mathrm{R}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&1&2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Ax=0 与 Rx=0 等价。

要点 3：R 或 U 的每个自由变量可以得到一个特殊解，令当前的自由变量中的 x 为 1，其他的为 0，然后通过回带，可以得到 x。
特殊解，接上面的例子

$$s_1=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}，s_2=\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

上面提到特殊解

要点 4：Ax=0 的所有解是特殊解的线性组合。
A 化简为 R，然后将轴变量和自由变量分开，得到通解，仍然利用线性方程的思想，接上面的列子，R 的线性方程如下

$$\begin{cases}x_1+0+x_3+x_4=0\\0+x_2+x_3+2x_4=0\end{cases}$$

令 x_3=1,x_4=0，可得 x_1=-1,x_2=-1
令 x_3=0,x_4=1，可得 x_1=-1,x_2=-2
所以，通解如下，（强调轴变量和自由变量）

$$x=\begin{bmatrix}-x_3-2x_4\\-x_3-1x_4\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

这里提到通解，其实特殊解就是通解的核心。

要点 5：如果 n>m（列大于行），A 列向量至少存在一个自由变量，也就至少存在一个特殊解，所以零空间中必然存在不为 0 的 x。

思考

35 If A is 4 by 4 and invertible, describe all vectors in the nullspace of the 4 by 8 matrix $B=[A\ \ A]$.

[I I]x=0，可以适当展开，B 的零空间不为空，为$\begin{bmatrix}-I\\I\end{bmatrix}$。

3.3 The Rank and the Row Reduced Form(秩与行简化形式)

矩阵不变的地方—秩，在消元中，秩不变，反映矩阵真实尺寸。

要点 1：矩阵的秩是轴的个数。也就是 R=rref(A)中左对角线中 1 的个数。

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&4\\1&2&2&5\\1&3&2&6\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

要点 2： A 与 R(=rref(A))的前 r 个轴列（pivcol）的位置相同。

R 的轴列可以轻松的观察到，由于 Rx=0 与 Ax=0 中的 x 相同(要点 5 剧透)，且 A 到 R 过程中没有列变换，所以两者的轴列位置相同。

要点 3：前 r 轴列不能是其前面的列向量的线性组合。

都是 0，所以无法线性组合。

要点 4：n-r 的自由变量是零空间的基。

零空间的快速计算方法，假设 rref(A)形式如下

$$rref(A)=R=\begin{bmatrix}I&F\\0&0\end{bmatrix},\mathrm{N(A)}=\mathrm{C}\left(\begin{bmatrix}-F\\I\end{bmatrix}\right)$$

从上面的形式，可以看出，N(A)的秩的数量 n-r

RN=0,N 称为零空间矩阵，有特殊解向量组成。

使用例子验证上面的公式。

要点 5：A 与 R 的零空间相同。Ax=ERx=0

思考

28 Suppose you allow elementary *column* operations on A as well as elementary row operations (which get to R). What is the "row-and-column reduced form" for an m by n matrix of rank r?

$\mathrm{EA}E'=\begin{bmatrix}I_r&F\\0&0\end{bmatrix}$

3.4 The Complete Solution to Ax=b(Ax=b 的完整解)

在求解 Ax=0 的过程时，我们没有关注等号右边，因为任何行变化，对 0 向量的作用均是 0 向量。但是 Ax=b 的求解过程必须关注等号右边了。

要点 1：秩等于轴的数量，最简行矩阵 R 有 m-r 个全是 0 的行

要点 2：Ax=b 有解 <=> 最后 m-r 等式化简为 0=0

最简化后，形式如下，假设无限列调整

$$Ax=b=>\begin{bmatrix}I&F\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}d\\0\end{bmatrix}$$

要点 3：特殊解 x_p 的计算方法是令所有的自由变量均为 0

Ax=b => Rx=d

令所有自由变量为 0，特殊解就全部来自于 d

例子

$$\begin{bmatrix}1&3&0&2\\0&0&1&4\\1&3&1&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\6\\7\end{bmatrix}\quad\text{has the augmented matrix}\quad\begin{bmatrix}1&3&0&2&\mathbf{1}\\0&0&1&4&\mathbf{6}\\1&3&1&6&\mathbf{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&\boldsymbol{b}\end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix}1&3&0&2\\0&0&1&4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\6\\0\end{bmatrix}\quad\text{has the augmented matrix}\quad\begin{bmatrix}1&3&0&2&\mathbf{1}\\0&0&1&4&\mathbf{6}\\0&0&0&0&\mathbf{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R&\boldsymbol{d}\end{bmatrix}.$$

$x_{\text{particular}}$	*The particular solution solves*	$Ax_p=b$
$x_{\text{nullspace}}$	*The $n-r$ special solutions solve*	$Ax_n=0$.

Complete solution
one x_p
many x_n

$$x=x_p+x_n=\begin{bmatrix}1\\0\\6\\0\end{bmatrix}+x_2\begin{bmatrix}-3\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_4\begin{bmatrix}-2\\0\\-4\\1\end{bmatrix}.$$

完整通解，可以参考“线代随笔 02-Ax=b 的完整解”。

要点 4：当自由变量 确定后，轴变量才能确定

要点 5：r=n(列)时，瘦长形，没有自由变量，要么有唯一解，要么无解

要点 6：r=m(行)，宽胖形；当 m=n 时，唯一解；当 m<n 时，无限解。

四种情况对应的四种 R，需要详细讲解，这是本质。

The four possibilities for linear equations depend on the rank r:

$r=m$	and	$r=n$	*Square and invertible*	$Ax=b$	has 1 solution
$r=m$	and	$r<n$	*Short and wide*	$Ax=b$	has ∞ solutions
$r<m$	and	$r=n$	*Tall and thin*	$Ax=b$	has 0 or 1 solution
$r<m$	and	$r<n$	*Not full rank*	$Ax=b$	has 0 or ∞ solutions

The reduced R will fall in the same category as the matrix A. In case the pivot columns happen to come first, we can display these four possibilities for R. For $Rx=d$ (and the original $Ax=b$) to be solvable, d must end in $m-r$ zeros.

Four types	$R=\begin{bmatrix}I\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}I&F\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}I\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}I&F\\0&0\end{bmatrix}$
Their ranks	$r=m=n$	$r=m<n$	$r=n<m$	$r<m, r<n$

思考题

34 Suppose you know that the 3 by 4 matrix A has the vector $s = (2,3,1,0)$ as the only special solution to $Ax = \mathbf{0}$.

(a) What is the *rank* of A and the complete solution to $Ax = \mathbf{0}$?

(b) What is the exact row reduced echelon form R of A?

(c) How do you know that $Ax = b$ can be solved for all b?

n=4, n-r=1,r=3, R(A)=[I F]

36 Suppose $Ax = b$ and $Cx = b$ have the same (complete) solutions for every b. Is it true that $A = C$?

(A-C)x=0,那么 x 属于 N(A-C)，或 A=C。两种可能。

3.5 Independences, Basis and Dimension (线性独立，基和维度)

子空间的真实尺寸。虽然有 n 列，但是列空间的维度不一定是 n。

要点 1：如果 x=0 是 Ax=0 的唯一解，A 的列线性独立
使用列向量来解释，就是

$$\text{若} x_1\overrightarrow{a_1} + \cdots + x_1\overrightarrow{a_1} = \vec{0} \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0$$

结论很简单，但是背后的思想不简单，向量之间不能互相表示，没有冗余，简洁的必经之路。

要点 2：$v_1,\ldots,v_r$ 的线性组合填充了整个空间，称为支撑了一个空间
支持（span）的正式定义，C(A)=span($\{\overrightarrow{a_1},\ldots,\overrightarrow{a_n}\}$)

要点 3：一组线性独立的向量支撑了一个空间，这组向量是这个空间的一组基。这个空间中的每一个向量可以有这组基唯一的线性组合表示。
唯一表示的证明:
见 blog，线代随笔 07-关于基的那些事

要点 4：对应一个固定的向量，所有的基的向量数量相同，向量的数目称为维度。
基数目固定的证明
见 blog，线代随笔 07-关于基的那些事

要点 5：轴列是 C(A)的基，维度为 r
始终最简行梯形式 rref 来证明，Ax=0 与 Rx=0 的 x 是一样的。

45 Inside $\mathbf{R}^n$, suppose dimension ($\mathbf{V}$) + dimension ($\mathbf{W}$) > n. Show that some nonzero vector is in both $\mathbf{V}$ and $\mathbf{W}$.

V,W 中的向量线性独立，n 个 span R^n ,剩下的必然被其他表示
这个可以添加到维度那个随笔中,参考随笔关于基的那些事

3.6 Dimensions of the Four Subspaces(四大子空间的维度)

要点 1：r 个轴行是 R（也是 A）的行空间的基
要点 2：r 个轴列是 A 的列空间的基
要点 3：n-r 个特殊解是 A（R）零空间的基
要点 4：单位矩阵 I 最后 m 行是 $N(R^T)$的基
要点 5：消元矩阵 E 最后 m 行是 $N(A^T)$的基

参考线代随笔 3-矩阵的 4 个线性子空间

32 Suppose the m by n matrices A and B have *the same four subspaces*. If they are both in row reduced echelon form, prove that F must equal G:

$$A = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

无论 F，G 等于什么，C(A)=C(B), N(A^T)=N(B^T),所以列空间和左零空间没有约束。从行空间观察。对任意行空间向量 x=[x_1 x_2], x_1 的系数根据 I 决定，由于系数相同，可以映射到 F 或 G 的行向量上，最后得到$\sum c_i(\vec{f_i} - \vec{g_i}) = 0$,对任意$c_i$横成立，所以$\vec{f_i} = \vec{g_i}$

较简单：根据相同的 row space，$\begin{bmatrix} I \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ G \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} Y \\ GY \end{bmatrix}$，那么 Y=I,那么 G=F，Y 是某种线性组合

4: Orthogonality

需要将上次遗留问题重新讲解，这里。

讲解的时候，先讲 4.2 节，后讲 4.1 节。

4.1 Orthogonality of the Four Subspaces

要点 1：如果每个 V 中的向量正交每个 W 中的向量，那么子空间 V 和 W 正交
例子 1：三维空间中，平面与垂直的直线。正例。
例子 2：两个平面垂直，但是不可能正交。反例。

要点 2：如果 V 子空间拥有所垂直于 W 的向量，且 V 是 W 的正交空间，那么 V 是 W 的正交补。在空间R^n中，W 与 V 的维度之和为 n。

之前证明过，维度不可能有多的。

要点 3：零空间与行空间，列空间与左零空间都是正交补。

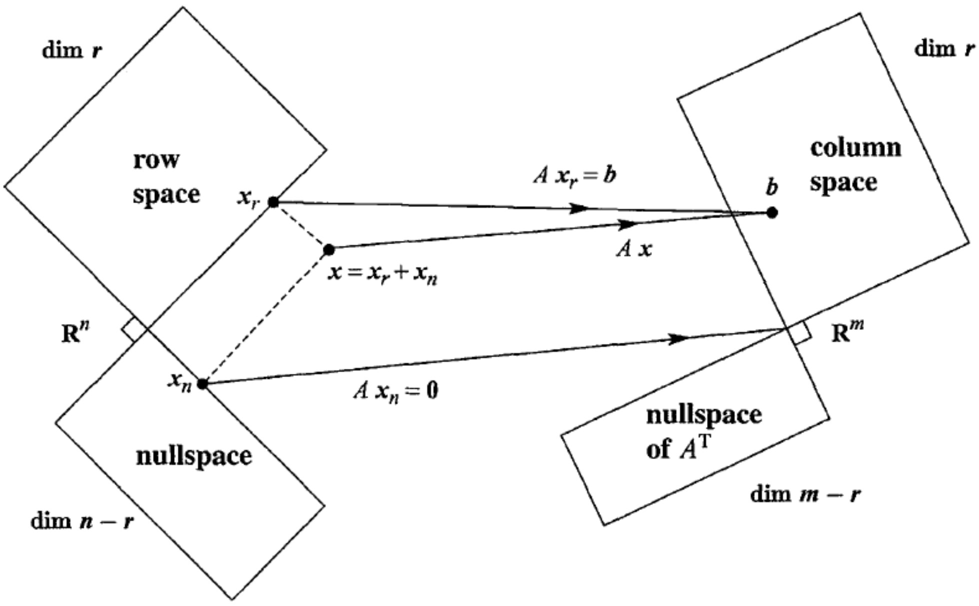
证明：$A^T y$是行空间任意向量，令 x 是零空间任意向量，那么 Ax=0

所以，$x^T(A^T y) = (Ax)^T y = 0^T y = 0$

要点 4：任何 n 个独立的向量 span 整个R^n

要点 5：R^n中的任意向量都有一部分在零空间，一部分在行空间中。

证明参考：后面的投影。



上面这幅图包含的意思

- 四大空间维度互补
- 四大空间有两对正交补空间
- 已 R^n 空间为例，任意 x 可以分为行空间与零空间，但是通过 A 映射后，零空间的那部分作用会消失。
- 每个列空间的 b 来自唯一的 x_r,证明如下：

in the row space. Proof: If $Ax_r = Ax'_r$, the difference $x_r - x'_r$ is in the nullspace. It is also in the row space, where x_r and x'_r came from. This difference must be the zero vector, because the nullspace and row space are perpendicular. Therefore $x_r = x'_r$.

问题 1

31 The command $N = \text{null}(A)$ will produce a basis for the nullspace of A. Then the command $B = \text{null}(N')$ will produce a basis for the _____ of A.

解答：A 的零空间的零空间是 A 的行空间，可以根据上面的基础图观察

问题 2

29 Find a matrix with $v = (1,2,3)$ in the row space and column space. Find another matrix with v in the nullspace and column space. Which pairs of subspaces can v *not* be in?

A=v^Tv 第一个 ok，第二个不可能，除非 v=0

问题 3

30 Suppose A is 3 by 4 and B is 4 by 5 and $AB = 0$. So $N(A)$ contains $C(B)$. Prove from the dimensions of $N(A)$ and $C(B)$ that $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \le 4$.

rank(A) + dim(N(A)) = 4; dim(N(A)) >= dim(C(B))=rank(B), 所以 rank(A)+rank(B) <=4

4.2 Projections 投影

讲解主要思路

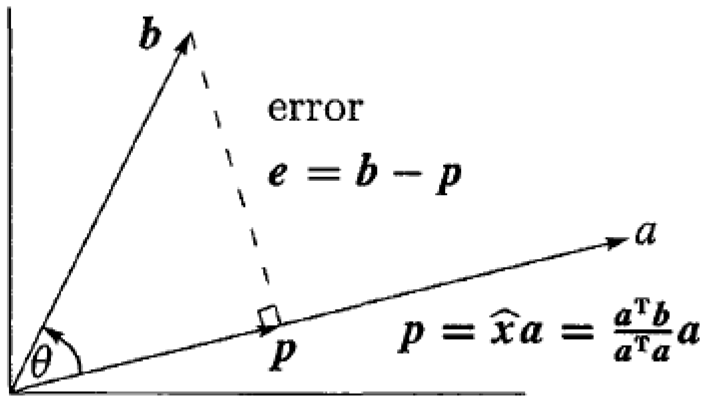
1 向量投影：要点 1,2

2 线性空间投影：要点 3

3 投影向量性质：要点 3,4,5

要点 1：向量 b 投影到单一向量$\mathrm{p} = \mathrm{a}\hat{x} = \mathrm{a}\frac{a^Tb}{a^Ta}$

对线的投影推导过程，也就是投影到维度为 1 的列空间中



计算$\mathrm{p} = \hat{x}\mathrm{a}$，关键是计算$\hat{x}$。

要点 2：根据单一向量投影公式，投影矩阵$\mathrm{P} = \frac{aa^T}{a^Ta}$

和与上面推导一并讨论

要点 3：将 b 投影到子空间 V，剩下的 e=b-p 将垂直 V

推导一般线性子空间的投影公式（要点 5），需要证明

1）[A^TA 可逆<=>A 列线性独立(需要证明两个定理)]()
2）[投影分解任意向量]()

要点 4：根据投影公式，当 A 满秩，那么 P=I,那么 p=b
满秩即可逆，那么括号内部可以打开，一般情况下是不能打开的。

要点 5：投影矩阵$P = A(A^TA)^{-1}A^T$,具有性质等幂性 $P = P^2$,对称性$P = P^T$

26 (***Rank of*** AB) If $AB = C$, the rows of C are combinations of the rows of _____. So the rank of C is not greater than the rank of _____. Since $B^TA^T = C^T$, the rank of C is also not greater than the rank of _____.

rank(AB) <= rank(B), rank(B^TA^T)<=rank(A^T)=rank(A)

34 **If A has r independent columns and B has r independent rows, AB is invertible.**

Proof: When A is m by r with independent columns, we know that A^TA is invertible. If B is r by n with independent rows, show that BB^T is invertible. (Take $A = B^T$.)

Now show that AB has rank r. Hint: Why does A^TABB^T have rank r? That matrix multiplication by A^T and B^T cannot increase the rank of AB, by Problem 3.6:26.

r = rank(A^TABB^T) <= rank(ABB^T)<= rank(AB)<=rank(B)=r
也可以参考这里 http://bourneli.github.io/linear-algebra/2016/04/17/linear-algebra-09-BTA-inverse.html

4.3 Least Squares Approximation 最小二乘近似

使用矩阵微积分推导，可以参考《机器学习基石》相关章节。

要点 1：最小二乘的解法就是找到 x，使得$\|Ax - b\|^2$最小化。
推导过程，参考[矩阵推导]()与[向量求导]()

要点 2：根据上面的思想，最好的 x 可以根据$A^TAx = A^Tb$计算
要点 3：如果需要计算一条二维直线 b=C+Dt，上面计算的到 x 就是 C 与 D
要点 4：投影即是 p，错误是 A 的补空间的投影
要点 5：如果解 n<m（瘦长）的方程，Ax=b 大都数情况时无解的，但是$A^TAx = A^Tb$有解，且是最小二乘解。

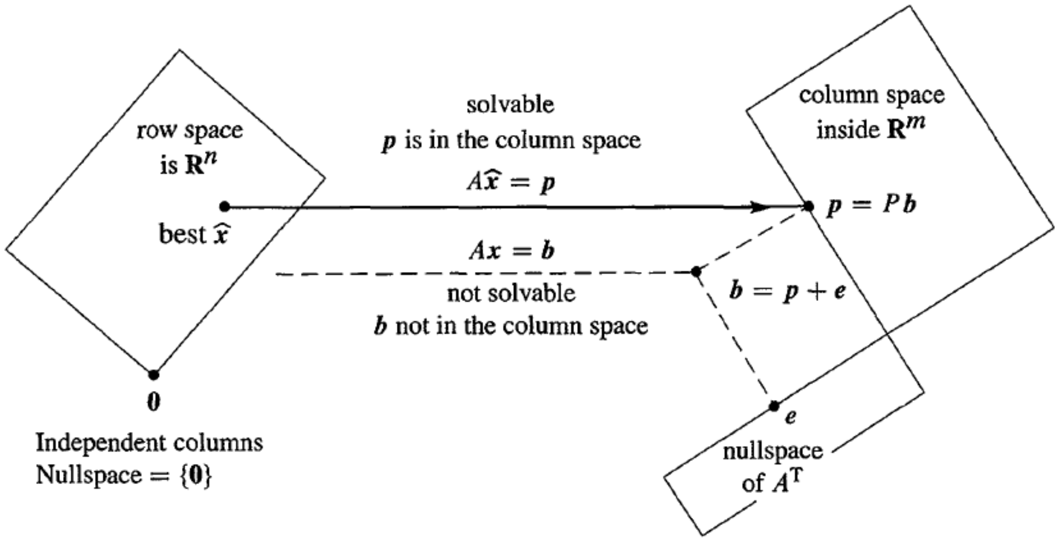


Figure 4.7: The projection $p = A\widehat{x}$ is closest to b, so $\widehat{x}$ minimizes $E = \|b - Ax\|^2$.

练习

28 Suppose the columns of A are not independent. How could you find a matrix B so that $P = B(B^{\mathrm{T}}B)^{-1}B^{\mathrm{T}}$ does give the projection onto the column space of A? (The usual formula will fail when $A^{\mathrm{T}}A$ is not invertible.)

如果 A 的列线性相关，怎么办？

4.4 Orthogonal Bases and Gram-Schmidt

要点 1：正交矩阵转置与逆相同

要点 2：同上

要点 3：正交矩阵转换 x 不改变 x 的长度：$\|Qx\| = \|x\|$

要点 4：投影到正交矩阵 Q 上，投影公式可以化简：$P = QQ^T$

要点 5：如果 Q 是方正，P=I，任意向量$b = q_1(q_1^Tb) + \cdots + q_n(q_n^Tb)$，将上面的展开

要点 6：Gram-Schmidt 方法生成过程就是 QR 分解。

计算过程，参考 QR 分解与 Gram-Schmidt 方法

37 We know that $P = QQ^{\mathrm{T}}$ is the projection onto the column space of Q(m by n). Now add another column a to produce $A = [Q \quad a]$. What is the new orthonormal vector q from Gram-Schmidt: start with a, subtract _____, divide by _____.

构建过程，参考上面的文章。