

---

# 上海大学 2019~2020 学年冬季学期研究生课程考试 课程报告

课程名称： 计算机视觉基础与模式识别

课程编号： 3XS071013

报告题目： 单目摄像机标定

研究生姓名： 邓杰                      学 号： 19721187

论文评语：

成 绩： \_\_\_\_\_                      任课教师： 曾丹

评阅日期： \_\_\_\_\_

---

## 目 录

一、 项目简介.....	3
二、 运行环境.....	3
三、 原理介绍.....	3
(一) 四大坐标系.....	3
1) 世界坐标系.....	3
2) 摄像机坐标系.....	3
3) 图像坐标系.....	3
4) 像素坐标系.....	4
(二) 坐标系转换.....	4
1) 从世界坐标系到相机坐标系.....	4
2) 从相机坐标系到理想图像坐标系.....	5
3) 从理想图像坐标系到实际图像坐标系.....	5
4) 从实际图像坐标系到像素坐标系.....	6
(三) 张正友标定法.....	6
1) 单应性变换.....	6
2) 计算单应性矩阵.....	7
3) 求相机内外参数.....	8
四、 使用 Opencv 实现张正友法相机标定.....	10
(一) 目的与操作流程.....	10
(二) 使用 opencv 实现.....	10
(三) 结果展示.....	12
1) 绘制角点.....	12
2) 畸变矫正.....	13
3) 参数求解.....	14
五、 代码部分.....	14

## 一、项目简介

本次项目是该课程的第一个项目—单目摄像机标定，本报告采用“张正友标定”法。“张正友标定”，又称“张氏标定”，是指张正友教授于 1998 年提出的单平面棋盘格的摄像机标定方法。张氏标定法已经作为工具箱或封装好的函数被广泛应用。张氏标定的原文为“A Flexible New Technique for Camera Calibration”。此文中所提到的方法，为相机标定提供了很大便利，并且具有很高的精度。从此标定可以不需要特殊的标定物，只需要一张打印出来的棋盘格。相机标定的主要目的是建立成像几何模型，即建立物体从三维世界到成像平面上各坐标点的对应关系以及矫正透镜畸变。标定在整个基于标定摄像机的三维重建的几何过程中占有最重要最核心的地位。标定得到的内参、外参和畸变系数，是双目视觉进行图片矫正，摄像机校正和 3D 恢复的基础。

## 二、运行环境

Ubuntu18.04+Opencv4.1.0+cmake3.10

运行步骤：

```
sudo cmake .
```

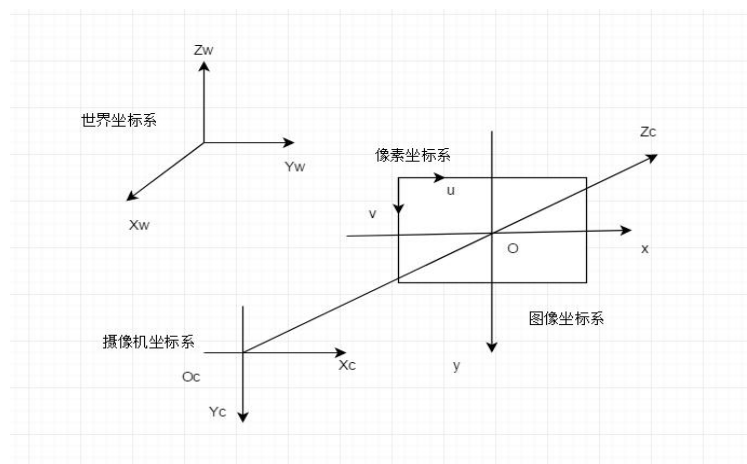
```
sudo make
```

```
./call
```

## 三、原理介绍

### （一）四大坐标系

图 1 为四大坐标系的简单示意图：



图一 四大坐标系

#### 1) 世界坐标系( $X_w, Y_w, Z_w$ )

用户定义的三维世界的坐标系，为了描述目标物在真实世界里的位置而被引入。单位为  $mm$ 。

#### 2) 摄像机坐标系( $X_c, Y_c, Z_c$ )

在相机上建立的坐标系，为了从相机的角度描述物体位置而定义，作为沟通世界坐标系和图像/像素坐标系的中间一环。单位为  $mm$ 。

#### 3) 图像坐标系( $x, y$ )

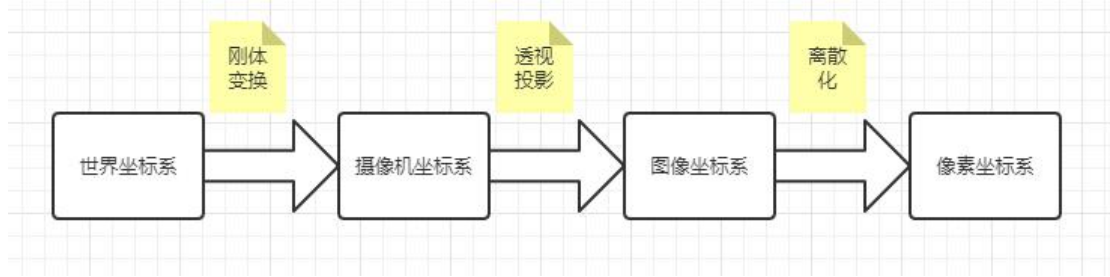
为了描述成像过程中物体从摄像机坐标系到图像坐标系的投影透射关系而引入，方便进一步得到像素坐标系下的坐标，原点位于摄像机光轴与成像平面的交点  $O$  上。单位为  $mm$ 。

#### 4) 像素坐标系( $u,v$ )

为了描述物体成像后的像点在数字图像上（相片）的坐标而引入，是我们真正从相机内读取到的信息所在的坐标系，原点一般位于图片的左上角。单位为个（像素数目）。

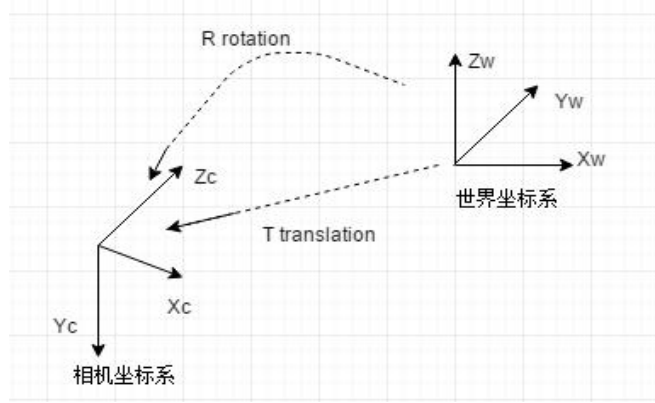
### （二）坐标系转换

#### 1) 从世界坐标系到相机坐标系（刚体变换）



图一 坐标变换示意图

刚体变换(rigid body transformation):三维空间中，当物体不发生形变时，对一个几何物体作旋转、平移的运动，称之为刚体变换。因为世界坐标系和摄像机坐标都是右手坐标系，所以其不会发生形变。我们想把世界坐标系下的坐标转换到摄像机坐标下的坐标，可以通过刚体变换的方式，如下图所示：



图二 刚体变换

二者之间刚体变换的数学表达为

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

对应的齐次表达式为：

$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & t \\ 0_3^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} = [r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad 1] \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

其中， $R$  为旋转矩阵， $t$  为平移向量，假定在世界坐标系中物点所在平面过世界坐标系原点且与 $Z_w$ 轴垂（也即棋盘平面与 $X_w - Y_w$ 平面重合，目的在于方便后续计算），所以 $Z_w = 0$ ，可直接转换成式（2）的形式。其中变换矩阵：

$$\begin{bmatrix} R & t \\ 0_3^T & 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

即我们常说的外参矩阵。之所称之为外参矩阵，可以理解为只与相机外部参数有关，且外参矩阵随刚体位置的变化而变化。

## 2) 从相机坐标系到理想图像坐标系（透视投影）

这一过程进行了从三维坐标到二维坐标的转换，也即投影透视过程（用中心投影法将物体投射到投影面上，从而获得的一种较为接近视觉效果的单面投影图，也就是使我们人眼看到景物近大远小的一种成像方式）。我们以针孔成像为例：

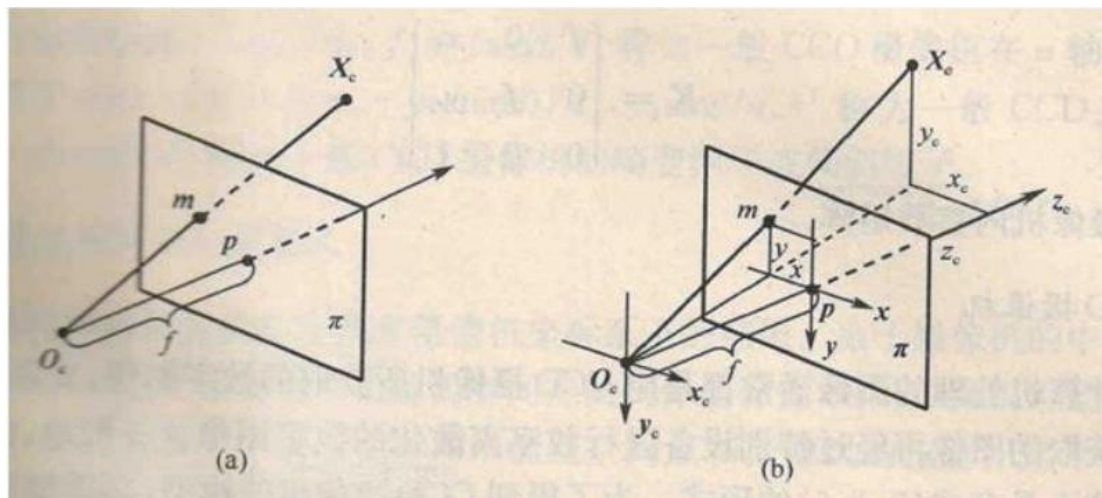


图3 基本针孔模型

上图是针孔摄像机的基本模型。平面 $\pi$ 称为摄像机的像平面，点 $O_c$ 称为摄像机中心（或光心）， $f$ 为摄像机的焦距，以 $O_c$ 为端点且垂直于像平面的射线成为光轴或主轴，主轴与像平面的交点 $p$ 是摄像机的主点。

如图所示，图像坐标系为 $o-xy$ ，摄像机坐标系 $O_c-x_cy_cz_c$ 为。记空间点 $X_c$ 在摄像机坐标系中的齐次坐标为：

$$X_c = (x_c \ y_c \ z_c \ 1)^T \quad (4)$$

它的像点 $m$ 在图像坐标系中的齐次坐标记为：

$$m = (x \ y \ 1)^T \quad (5)$$

根据三角形相似原理，可得：

$$\begin{cases} x = \frac{f \cdot x_c}{z_c} \\ y = \frac{f \cdot y_c}{z_c} \end{cases} \quad (6)$$

可以得到：

$$z_c \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \\ 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

## 3) 从理想图像坐标系到实际图像坐标系(考虑畸变)

透镜的畸变主要分为径向畸变和切向畸变，还有薄透镜畸变等等，但都没有径向和切向畸变影响显著，所以我们在这里只考虑径向和切向畸变。

径向畸变是由于透镜形状的制造工艺导致，且越向透镜边缘移动径向畸变越严重。下图所示是径向畸变的两种类型：桶形畸变和枕形畸变。

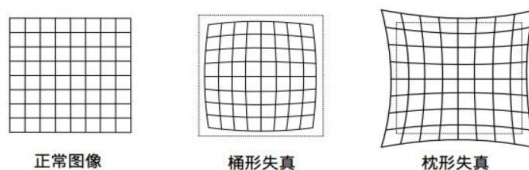


图4 畸变类型

畸变矫正，首先应该知道畸变系数，然后做与畸变相反的变换，消除畸变。

因为在实际情况下，径向畸变较小，所以其可以用主点(principle point)周围的泰勒级数展开的前几项进行描述。数学表达式如下：

$$\begin{cases} x_{r\text{corr}} = x_p(1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6) \\ y_{r\text{corr}} = y_p(1 + k_1r^2 + k_2r^4 + k_3r^6) \end{cases} \quad (8)$$

由此可知对于径向畸变，我们有 3 个畸变参数需要求解。

切向畸变是由于透镜和 CMOS 或者 CCD 的安装位置误差导致。因此，如果存在切向畸变，一个矩形被投影到成像平面上时，很可能会变成一个梯形。切向畸变需要两个额外的畸变参数来描述，矫正前后的坐标关系为：

$$\begin{cases} x_{t\text{corr}} = x_p + [2p_1x_py_p + p_2(r^2 + 2x_p^2)] \\ y_{t\text{corr}} = y_p + [2p_2x_py_p + p_1(r^2 + 2y_p^2)] \end{cases} \quad (9)$$

由此可知对于切向畸变，我们有 2 个畸变参数需要求解。

综上，我们一共需要 5 个畸变参数 ( $k_1$ 、 $k_2$ 、 $k_3$ 、 $p_1$ 和 $p_2$ ) 来描述透镜畸变。

#### 4) 从实际图像坐标系到像素坐标系

由于定义的像素坐标系原点与图像坐标系原点不重合，假设像素坐标系原点在图像坐标系下的坐标为( $u_0, v_0$ )，每个像素点在图像坐标系  $x$  轴、 $y$  轴方向的尺寸为： $d_x$ 、 $d_y$ ，且像点在实际图像坐标系下的坐标为( $x, y$ )，于是可得到像点在像素坐标系下的坐标为：

$$\begin{cases} u = \frac{x}{d_x} + u_0 \\ v = \frac{y}{d_y} + v_0 \end{cases} \quad (10)$$

化为齐次坐标表现形式可以得到：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_x} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{d_y} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

若暂不考虑透镜畸变，则将式 (7) 与式 (11) 的转换矩阵相乘即为内参矩阵  $M$ 。

综上，可得出一个矩阵  $P$ ：

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_x} & 0 & u_0 \\ 0 & \frac{1}{d_y} & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & T_x \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & T_y \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & T_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \end{bmatrix} \quad (12)$$

世界坐标系通过  $P$  矩阵的变化可以得到像素坐标系。

### (三) 张正友标定法

我们将像素坐标系和世界坐标系下的坐标映射关系写成如下形式：

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} f_x & \gamma & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (13)$$

其中， $u, v$  表示像素坐标系中的坐标， $s$  表示尺度因子， $f_x$ 、 $f_y$ 、 $u_0$ 、 $v_0$ 、 $\gamma$  (由于制造误差产生的两个坐标轴偏斜参数，通常很小) 表示 5 个相机内参， $R, t$  表示相机外参， $X_w, Y_w, Z_w$  (假设标定棋盘位于世界坐标系中  $Z_w = 0$  的平面) 表示世界坐标系中的坐标。

#### 1) 单应性变换(Homography)

单应性变换(Homography): 在计算机视觉中被定义为一个平面到另一个平面的投影映射。因为张氏标定是一种基于平面棋盘格的标定，所以首先应该从两个平面的单应性(homography)映射开始着手。同样也可以简单的理解为它用来描述物体在世界坐标系和像素

坐标系之间的位置映射关系。对应的变换矩阵称为单应性矩阵。在上述式子 (13) 中，单应性矩阵  $H$  定义为：

$$H = s \begin{bmatrix} f_x & \gamma & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [r_1 \ r_2 \ t] = sM[r_1 \ r_2 \ t] = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \quad (14)$$

其中， $M$  是内参矩阵

$$M = \begin{bmatrix} f_x & \gamma & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (15)$$

其中，在单应性矩阵  $H$  中添加约束条件，令  $h_{33}=1$  或者令  $\|H\|=1$ ，可知  $H$  有 8 个自由度，有如下关系：

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

若要求解 8 个未知数则至少需要 8 组方程， $(x',y')$ 和 $(x,y)$ 为世界坐标系与像素坐标系中一组对应的点，故至少需要 4 组这样对应的点才可以求解出单应性矩阵  $H$ 。在真实的应用场景中，我们计算的点对中都会包含噪声。比如点的位置偏差几个像素，甚至出现特征点对误匹配的现象，如果只使用 4 个点对来计算单应矩阵，那会出现很大的误差。因此，为了使得计算更精确，一般都会使用远大于 4 个点对来计算单应矩阵。另外采用直接线性解法解方程组通常很难得到最优解，所以实际使用中一般会用其他优化方法，如奇异值分解、Levenberg-Marquard ( $LM$ ) 算法等进行求解。

## 2) 计算单应性矩阵

根据打印的棋盘标定图和拍摄的照片来计算单应矩阵  $H$  的大致步骤为：

- 打印一张棋盘格标定图纸，将其贴在平面物体的表面。
- 拍摄一组不同方向棋盘格的图片，可以通过移动相机来实现，也可以移动标定图片来实现。
- 对于每张拍摄的棋盘图片，检测图片中所有棋盘格的特征点（角点，黑白棋盘交叉点，中间品红色的圆圈内就是一个角点）。我们定义打印的棋盘图纸位于世界坐标系  $Z_w = 0$  的平面上，世界坐标系的原点位于棋盘图纸的固定一角（比如下图中黄色点），像素坐标系原点位于图片左上角。

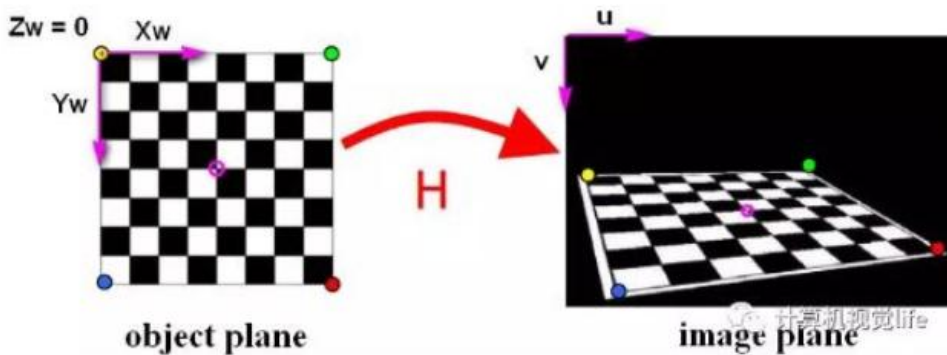


图 5 坐标示意图

- 因为棋盘标定图纸中所有角点的空间坐标是已知的，这些角点对应在拍摄的标定图片中的角点的像素坐标也是已知的，如果我们得到这样的  $N \geq 4$  个匹配点对（越多计算结果越鲁棒），就可以根据  $LM$  等优化方法得到其单应矩阵  $H$ 。

### 3) 求相机内外参数

$H$  是内参矩阵和外参矩阵的混合体，而我们想要最终分别获得内参和外参。先求解出内参，外参随之就会被解出。先不考虑镜头畸变，利用旋转向量的约束关系，先将单应性矩阵  $H$  化为 3 个列向量：

$$H = [h_1 \ h_2 \ h_3] = sM[r_1 \ r_2 \ t] \quad (17)$$

按元素对应关系可得：

$$\begin{aligned} h_1 &= sMr_1 \text{ 或 } r_1 = \lambda M^{-1}h_1 \\ h_2 &= sMr_2 \text{ 或 } r_2 = \lambda M^{-1}h_2 \\ h_3 &= sMt \text{ 或 } t = \lambda M^{-1}h_3 \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $\lambda = s^{-1}$

因为旋转向量在构造中是相互正交的，即  $r_1$  和  $r_2$  相互正交，由此我们就可以利用“正交”的两个含义，得出每个单应矩阵提供的两个约束条件：

**约束条件 1：** 旋转向量点积为 0（两垂直平面上的旋转向量互相垂直），即：

$$r_1^T r_2 = 0 \longrightarrow h_1^T (M^{-1})^T M^{-1} h_2 = 0 \quad (19)$$

**约束条件 2：** 旋转向量长度相等（旋转不改变尺度），即：

$$\|r_1\| = \|r_2\| = 1 \longrightarrow r_1^T r_1 = r_2^T r_2 \longrightarrow h_1^T (M^{-1})^T M^{-1} h_1 = h_2^T (M^{-1})^T M^{-1} h_2 \quad (20)$$

所以一个单应性矩阵  $H$  可以提供上述两个约束条件。由式（15）可知内参矩阵  $M$ ：

$$M = \begin{bmatrix} f_x & \gamma & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 故 } M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_x} & -\frac{\gamma}{f_x f_y} & \frac{v_0 \gamma - u_0 f_y}{f_x^2 f_y} \\ 0 & \frac{1}{f_y} & -\frac{v_0}{f_y} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

记

$$B = (M^{-1})^T M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_x^2} & -\frac{\gamma}{f_x^2 f_y} & \frac{v_0 \gamma - u_0 f_y}{f_x^2 f_y} \\ -\frac{\gamma}{f_x^2 f_y} & \frac{\gamma^2}{f_x^2 f_y^2} + \frac{1}{f_y^2} & -\frac{\gamma(v_0 \gamma - u_0 f_y)}{f_x^2 f_y^2} - \frac{v_0}{f_y^2} \\ \frac{v_0 \gamma - u_0 f_y}{f_x^2 f_y} & -\frac{\gamma(v_0 \gamma - u_0 f_y)}{f_x^2 f_y^2} - \frac{v_0}{f_y^2} & \frac{(v_0 \gamma - u_0 f_y)^2}{f_x^2 f_y^2} + \frac{v_0^2}{f_y^2} + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \quad (22)$$

可知  $B$  为对称矩阵，真正有用的元素只有 6 个（主对角线任意一侧的 6 个元素）。把  $B$  带入前面两个约束条件（19）和（20）后可转化为：

$$\begin{cases} h_1^T B h_2 = 0 \\ h_1^T B h_1 = h_2^T B h_2 \end{cases} \quad (23)$$

上面两约束中的式子均可写为通式  $h_i^T B h_j$  的形式，定义的单应矩阵  $H = [h_1 \ h_2 \ h_3]$  的第  $i$  列列向量  $h_i = [h_{i1} \ h_{i2} \ h_{i3}]$ ，则

$$h_i^T B h_j = [h_{i1} h_{j1} \ h_{i1} h_{j2} + h_{i2} h_{j1} \ h_{i2} h_{j2} \ h_{i3} h_{j1} + h_{i1} h_{j3} \ h_{i3} h_{j2} + h_{i2} h_{j3} \ h_{i3} h_{j3}] \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{12} \\ B_{22} \\ B_{13} \\ B_{23} \\ B_{33} \end{bmatrix} \quad (24)$$

令  $v_{ij} = [h_{i1} h_{j1} \ h_{i1} h_{j2} + h_{i2} h_{j1} \ h_{i2} h_{j2} \ h_{i3} h_{j1} + h_{i1} h_{j3} \ h_{i3} h_{j2} + h_{i2} h_{j3} \ h_{i3} h_{j3}]$ ，  
 $b = [B_{11} \ B_{12} \ B_{22} \ B_{13} \ B_{23} \ B_{33}]^T$ ，故有

$$h_i^T B h_j = v_{ij}^T b \quad (25)$$

由此，两约束条件最终可以转化为如下形式：

$$\begin{cases} v_{12}^T b = 0 \\ (v_{11}^T - v_{22}^T) b = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} v_{12}^T \\ v_{11}^T - v_{22}^T \end{bmatrix} b = 0 \quad (26)$$



如果我们拍摄了  $n$  张不同角度的标定图片，因为每张图片我们都可以得到一组（2 个）上述的等式。其中， $v_{11}, v_{12}, v_{22}$  可以通过前面已经计算好的单应矩阵得到，因此是已知的，而  $b$  中 6 个元素是待求的未知数。因此，至少需要保证图片数  $n \geq 3$ ，我们才能解出  $b$ 。

根据  $n$  张不同角度的标定图片，最终我们得到了一个矩阵集合  $Vb = 0$ ，其中  $V$  是一个  $(2n * 6)$  的矩阵。如果  $n \geq 3$ ，就可以得到唯一解  $b$ （带有一个比例因子）。

如果  $n = 2$ ，也就是只有两张标定图片，那么我们可以设置内参中的  $\gamma = 0$ （ $\gamma$  表示由于制造误差产生的两个坐标轴偏斜参数，通常很小，可忽略）， $\gamma = 0$  可以看到对应  $B_{12} = 0$ ，换句话说，就是增加了一个约束条件： $[0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]b = 0$ 。

如果  $n = 1$ ，只能假设  $u_0, v_0$  已知（位于图像中心）且  $\gamma = 0$ ，这样只能解出  $f_x, f_y$  两个参数。

$B$  中包含一个尺度因子  $\lambda$ ，即：

$$B = \lambda(M^{-1})^T M^{-1} \quad (27)$$

假设我们已经根据前面计算得到了矩阵  $B$  元素的值，那么根据已知的矩阵  $B$  很容易解出内参，如下：

$$\left\{ \begin{array}{l} f_x = \sqrt{\frac{\lambda}{B_{11}}} \\ f_y = \sqrt{\frac{\lambda B_{11}}{(B_{11}B_{22} - B_{12}^2)}} \\ u_0 = \frac{rv_0}{f_y} - \frac{B_{13}f_x^2}{\lambda} \\ v_0 = \frac{B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23}}{B_{11}B_{22} - B_{12}^2} \\ \gamma = \frac{B_{12}f_x^2 f_y}{\lambda} \\ \lambda = B_{33} - \frac{[B_{13}^2 + v_0(B_{12}B_{13} - B_{11}B_{23})]}{B_{11}} \end{array} \right. \quad (28)$$

得到内参数后，内参矩阵  $M$  也已知。单应矩阵  $H$  也已知，因此可继续求得外参数：

$$\begin{aligned} r_1 &= \lambda M^{-1} h_1, \quad r_2 = \lambda M^{-1} h_2 \\ r_3 &= r_1 \times r_2, t = \lambda M^{-1} h_3 \end{aligned} \quad (29)$$

其中又由旋转矩阵性质有

$$\|r_1\| = \|\lambda M^{-1} h_1\| = 1 \quad (30)$$

则可得

$$\lambda = \frac{1}{\|M^{-1} h_1\|} \quad (31)$$

实际情况下，数据中是存在噪音的，所以计算得到的旋转矩阵  $R$  并不一定能满足旋转矩阵的性质。所以通常根据奇异值分解来得到旋转矩阵  $R$ 。

上述的推导结果是基于理想情况下的解，从理论上证明了张氏标定算法的可行性。但在实际标定过程中，一般使用最大似然估计进行优化。假设我们拍摄了  $n$  张标定图片，每张图片里有  $m$  个棋盘格角点。三维空间点  $X$  在图片上对应的二维像素为  $x$ ，三维空间点经过相机内参  $M$ ，外参  $R, t$  变换后得到的二维像素为  $x'$ ，假设噪声是独立同分布的，我们通过最小化  $x, x'$  的位置来求解上述最大似然估计问题：

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|x_{ij} - x'(M, R_i, t_i, X_j)\|^2 \quad (32)$$

现在我们来考虑透镜畸变的影响，由于径向畸变的影响相对较明显，所以主要考虑径向畸变参数，根据经验，通常只考虑径向畸变的前两个参数 $k_1, k_2$ 就可以（增加更多的参数会使得模型变的复杂且不稳定）。实际求解中，通常把 $k_1, k_2$ 也作为参数加入上述函数一起进行优化，待优化函数如下所示

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|x_{ij} - x'(M, k_1, k_2, R_i, t_i, X_j)\|^2 \quad (33)$$

## 四、使用 Opencv 实现张正友法相机标定

### （一）目的与操作流程

**相机标定的目的：**获取摄像机的内参和外参矩阵（同时也会得到每一幅标定图像的旋转和平移矩阵），内参和外参系数可以对之后相机拍摄的图像进行矫正，得到畸变相对很小的图像。

**相机标定的输入：**标定图像上所有内角点的图像坐标，标定板图像上所有内角点的空间三维坐标（一般情况下假定图像位于 $Z_w = 0$ 平面上）。

**相机标定的输出：**摄像机的内参、外参系数。

这三个基础的问题就决定了使用 Opencv 实现张正友法标定相机的标定流程、标定结果评价以及使用标定结果矫正原始图像的完整流程：

1. 准备标定图片；
2. 对每一张标定图片，提取角点信息；
3. 对每一张标定图片，进一步提取亚像素角点信息；
4. 在棋盘标定图上绘制找到的内角点（非必须，仅为了显示）；
5. 相机标定；
6. 对标定结果进行评价；
7. 查看标定效果--利用标定结果对棋盘图进行矫正。

### （二）使用 opencv 实现

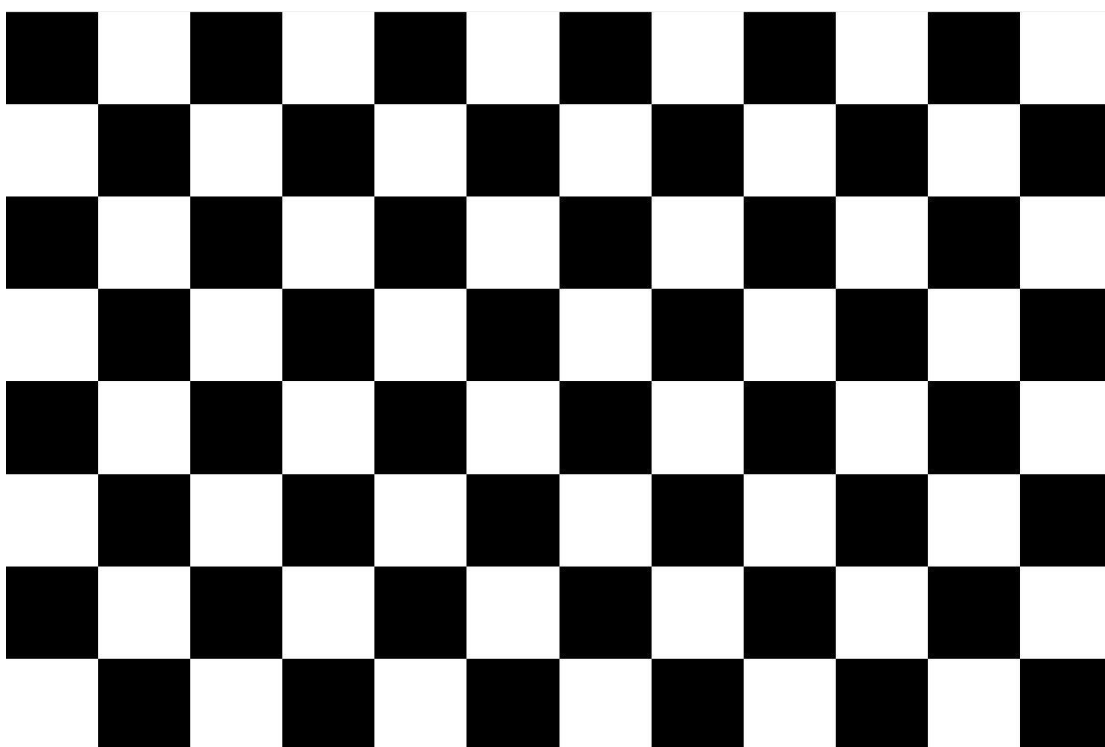
#### （1）标定图片准备--棋盘标定板

棋盘是一块由黑白方块间隔组成的标定板，我们用它作为相机标定的标定物（从真实世界映射到数字图像内的对象）。之所以我们用棋盘作为标定物是因为平面棋盘模式相对于复杂的三维物体更容易处理，但与此同时，二维物体相对于三维物体会缺少一部分信息，于是我们会多次改变棋盘的方位来捕捉图像，以求获得更丰富的坐标信息。可以在 opencv 官网下载标准棋盘格，下载地址为：<http://docs.opencv.org/2.4/downloads/pattern.png> 或是使用 matlab 生成一张棋盘格，程序如下：

```
J = (checkerboard(300,4,6)>0.5);
```

```
figure, imshow(J);
```

生成一张高度为 4 tiles 和宽度为 6 tiles，每个正方形的边长为 300 个像素的棋盘格。



图六 内角点为 11\*7 的棋盘格

打印棋盘格，并用手机拍摄一组尺寸为 640\*480 并带有畸变的棋盘图：



图七 手机拍摄的棋盘图

(2) 使用 `findChessboardCorners` 函数对每一张标定图片，提取角点信息。此函数输入为拍摄的棋盘 `Mat` 图像及每个棋盘图上内角点的行列数，输出为检测到的内角点图像坐标位置。

(3) 使用 `cornerSubPix` 或者 `find4QuadCornerSubpix` 函数对每一张标定图片，进一步提取亚像素角点信息。函数输入为 `Mat` 矩阵，输出为亚像素坐标位置。

(4) 使用 `drawChessboardCorners` 函数在棋盘标定图上绘制找到的内角点。此函数输入为 `Mat` 矩阵及每个棋盘图上内角点的行列数，输出为亚像素坐标位置并找到图像中的角点。

(5) 使用 `calibrateCamera` 函数进行相机标定。此函数输入为世界坐标系中的三维点、每一个内角点对应的图像坐标点、图像的像素尺寸大小，输出为相机的内参矩阵

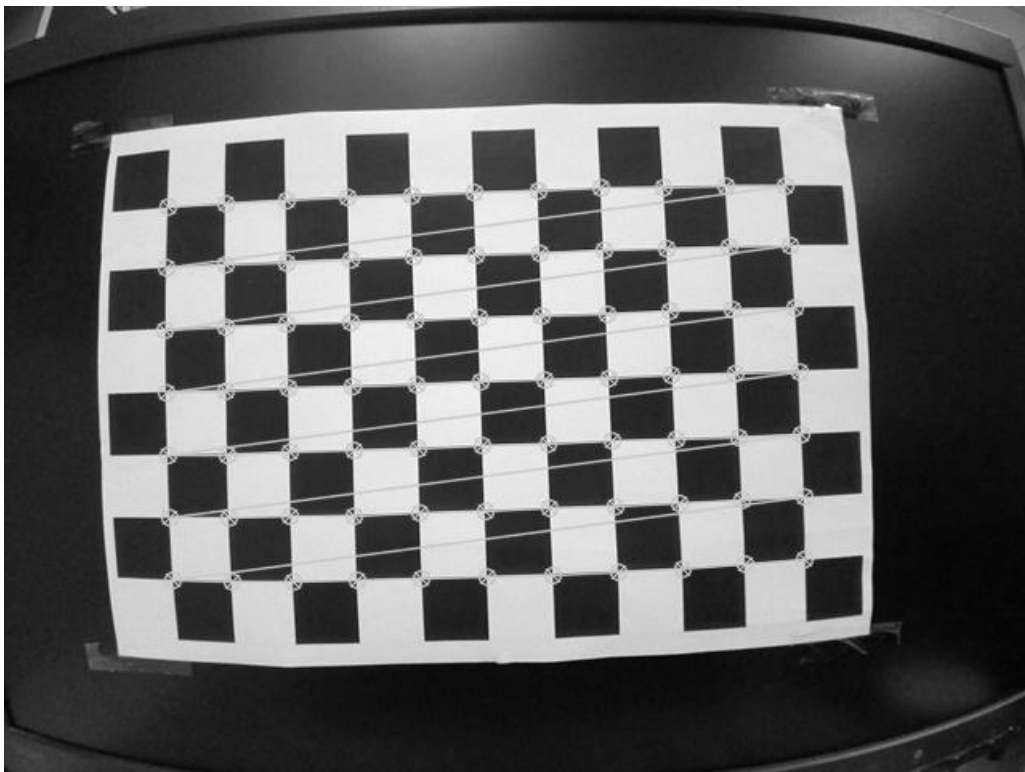
cameraMatrix、5 个畸变系数 distCoeffs、每张图像都会生成属于自己的平移向量和旋转向量。

(6) 使用 projectPoints 函数对空间三维坐标点进行反向投影，并计算投影坐标与原坐标的  $L_2$  范数来对标定结果进行评价。此函数输入为相机坐标系中的三维点坐标、旋转向量、位移向量、内参数矩阵、畸变矩阵，输出为反向投影后每一个内角点对应的图像上的坐标点。

(7) 使用 initUndistortRectifyMap 函数计算畸变映射，使用 remap 函数或者 undistort 函数把求得的映射应用到图像上以实现对图像的畸变的矫正。initUndistortRectifyMap 函数输入为相机的内参矩阵、畸变矩阵、校正后的  $3 \times 3$  摄像机矩阵，输出为  $X/Y$  坐标重映射参数。remap 函数输入为畸变的原始图像、 $X$  坐标和  $Y$  坐标的映射、插值方式，输出为矫正后的图像。undistort 函数输入为畸变的原始图像、相机的内参矩阵、畸变矩阵，输出为矫正后的图像。

### (三) 结果展示

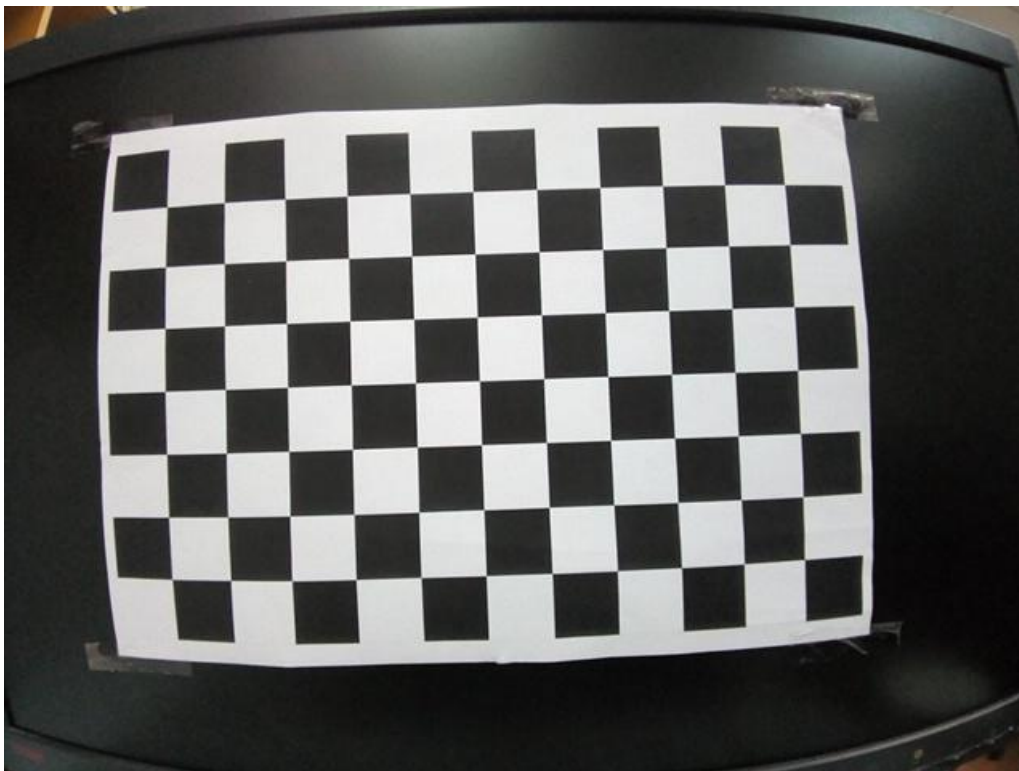
#### 1) 绘制角点



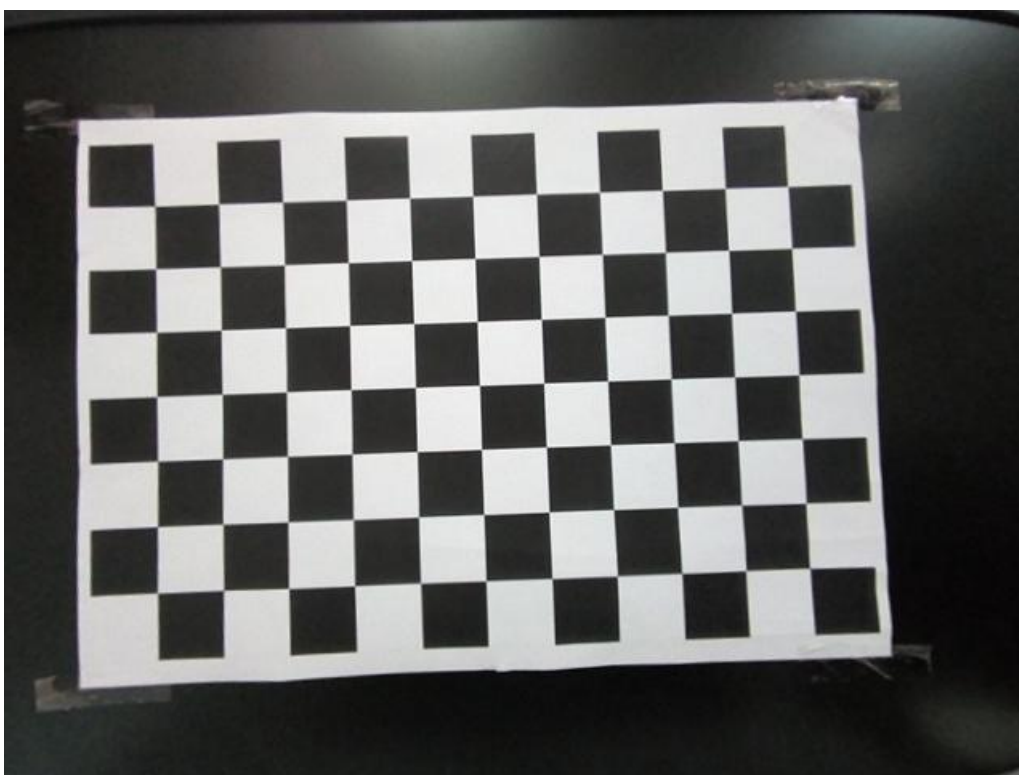
---

## 2) 畸变矫正

原图:



畸变校正后:



---

### 3) 参数求解

相机内参矩阵  $M$ :

$$\begin{bmatrix} 321.2477278505592 & 0 & 310.4175210809854 \\ 0 & 320.6135927610563 & 232.3449298862145 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

焦距  $f$  约为 320 个像素单位。

畸变系数  $(k_1, k_2, p_1, p_2, k_3)$ :

$$\begin{bmatrix} 0.0214990062591357 \\ -0.1679238249236407 \\ -0.001866504069680983 \\ 0.002824890670017659 \\ 0.06711848437289272 \end{bmatrix}^T$$

上图的旋转矩阵  $R$ :

$$\begin{bmatrix} -0.01018105156900517 & 0.9336162224159124 & -0.3581299979487774 \\ -0.5180054562489935 & -0.3112705827985842 & -0.7967314300192394 \\ -0.8553167211537617 & 0.1774017292082343 & 0.4867873591094031 \end{bmatrix}$$

平移向量  $t$ :

$$\begin{bmatrix} 2.233301615560218 \\ 2.157120613527446 \\ -0.03793890374384837 \end{bmatrix}^T$$

## 五、代码部分