ZÁPOČTOVÝ PROJEKT 1

$$\|A\|_2 := \max_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \max \sigma$$

σ je singulární číslo A

$$Ax = b$$

$$\varkappa(A) := \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2 \qquad \text{číslo podmíněnosti}$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A1 : $\varepsilon \approx 1$

vypracovala Le Xuan My

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1+\theta & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 1+\theta \approx 1, \quad \theta \approx 0, \quad \theta \geq 0$$

a) $\varkappa(A_\theta) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2 = \dfrac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$, $\lambda_{max}, \lambda_{min}$ MAX a MIN vl. čísla A

pro A symetrické, poz. definitní

$$A^T = \begin{pmatrix} 1+\theta & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \qquad \text{symetrická ✓}$$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1+\theta-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1+\theta-\lambda)(1-\lambda) - 1 =$$

$$= \cancel{1} - \lambda + \theta - \theta\lambda - \lambda + \lambda^2 \cancel{-1} = \lambda^2 - 2\lambda - \theta\lambda + \theta =$$

$$= \lambda^2 + (-2-\theta)\lambda + \theta = 0$$

$$D = (2+\theta)^2 - 4\theta = 4 + 4\theta + \theta^2 - 4\theta = \theta^2 + 4$$

$$\lambda = \frac{2+\theta \pm \sqrt{\theta^2+4}}{2}$$

pozitivní definitnost $\Leftrightarrow$ znaménka vl. čísel

$$\left.\begin{aligned} \text{MIN} \quad \lambda_1 &= \tfrac{1}{2}\left(2+\theta - \sqrt{\theta^2+4}\right) > 0 \\ \text{MAX} \quad \lambda_2 &= \tfrac{1}{2}\left(2+\theta + \sqrt{\theta^2+4}\right) > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{PD ✓}$$

$$\varkappa(A_\theta) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2+\theta-\sqrt{\theta^2+4}}{2+\theta+\sqrt{\theta^2+4}} =$$

$$= \frac{2+\theta}{2+\theta} \cdot \frac{1-\frac{\sqrt{\theta^2+4}}{2+\theta}}{1+\frac{\sqrt{\theta^2+4}}{2+\theta}} =$$

pro θ malinké : $\sqrt{\theta^2+4} = 2\sqrt{1+\frac{\theta^4}{4}} = 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^2}{4} + \mathcal{O}(\theta^4)\right)$

$$\varkappa(A_\theta) = \left(\frac{2+\theta-\left(2+\frac{\theta^2}{4}\right)+\mathcal{O}(\theta^4)}{2+\theta+\left(2+\frac{\theta^2}{4}\right)+\mathcal{O}(\theta^4)}\right)^{-1} \approx \left(\frac{\theta-\frac{\theta^2}{4}}{4+\theta+\frac{\theta^2}{4}}\right)^{-1} = \underline{\underline{\frac{16+4\theta+\theta^2}{4\theta-\theta^2}}}$$

b) $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x_1 = \frac{\det A_{\theta 1}}{\det A_\theta} = 0 \quad , \quad x_2 = \frac{\det A_{\theta 2}}{\det A_\theta} = 1$$

$$\det A_{\theta 1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det A_{\theta 2} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon - 1$$

$$\det A_\theta = \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon - 1$$

c) $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 1+\beta \end{pmatrix}}_{:=\tilde{b}}$

$$\det A_{\theta 1} = \begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 \\ 1+\beta & 1 \end{vmatrix} = 1+\alpha-1-\beta = \alpha-\beta$$

$$\det A_{\theta 2} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 1+\alpha \\ 1 & 1+\beta \end{vmatrix} = \varepsilon+\varepsilon\beta-1-\alpha = 1+\theta+\beta+\theta\beta-1-\alpha =$$
$$= \theta+\beta+\theta\beta-\alpha$$

$$\det A_\theta = \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon-1 = 1+\theta-1 = \theta$$

$$x_1 = \frac{\alpha-\beta}{\theta} \qquad x_2 = 1+\beta-\frac{\alpha-\beta}{\theta}$$

d) $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha-\beta}{\theta} \\ 1+\beta-\frac{\alpha-\beta}{\theta} \end{pmatrix} = x + \begin{pmatrix} \frac{\alpha-\beta}{\theta} \\ \beta-\frac{\alpha-\beta}{\theta} \end{pmatrix}$

$A_\theta x = b$

$$A_\theta \tilde{x} = \tilde{b} = b + \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = A_0 x + \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{x} = x + A_\theta^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

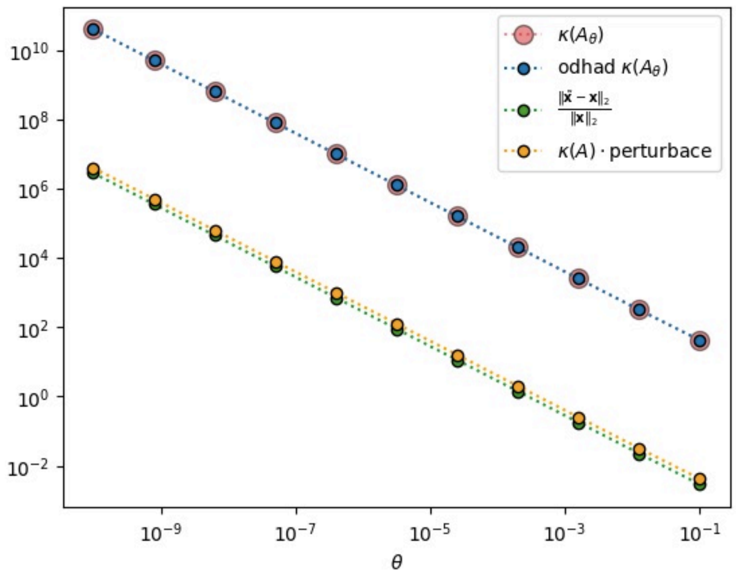
$$A_\theta^{-1} = \begin{pmatrix}1+\theta & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\theta}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1+\theta\end{pmatrix}$$

Tedy celkově $\underline{\underline{\tilde{x} = x + \frac{1}{\theta}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1+\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}}}$.

POZNÁMKY KE KÓDU:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \underbrace{\|A\|\,\|A^{-1}\|}_{\varkappa(A_\theta)} \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$$\Delta x = \tilde{x} - x, \quad \Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$



- „více" singulární matice A_θ (tzn. menší θ)
  $\Rightarrow$ větší číslo podmíněnosti $\Rightarrow$ větší rel. chyba řešení
- závislosti jsou lineární
- graficky jsme ověřili teorii lineární závislosti $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \varkappa(A_\theta)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$
  (žlutý • graf nad zeleným •)

A1: případ $\theta \to 0$ (ZH) pro $\theta \to 0$ označme $A_\theta \equiv A_0$

a) $$\varkappa(A_0) = \lim_{\theta\to 0+} \varkappa(A_\theta) = \lim_{\theta \to 0+} \frac{16 + 4\theta + \theta^2}{4\theta - \theta^2} = \text{„}\frac{16}{0+}\text{"} = \underline{\underline{+\infty}}$$

b) $$\underbrace{\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}}_{A_0}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}_{b}$$

A_0 je singulární $\Rightarrow$ $\nexists\ A_0^{-1}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{K}(A_0) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$ nelze spočítat „klasicky".

Z a) víme, že $\mathcal{K}(A_0) = \infty$ $\Rightarrow$ problém je extrémně špatně podmíněný; malé změny b mohou znamenat velkou rel. chybu řešení (nebo řešení $\nexists$?)

Řešíme $x_1 + x_2 = 1$ $\Rightarrow$ <u>nekonečně mnoho řešení.</u>

Malá perturbace:

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\alpha\\1+\beta\end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 1 + \alpha$$
$$x_1 + x_2 = 1 + \beta$$

$\Rightarrow$ pro $\alpha \neq \beta$ soustava <u>nemá řešení</u>

I velmi malá perturbace zničí řešitelnost soustavy, pokud je matice singulární.

c) LZ řádky matice $\Rightarrow$ det matice $= 0$, popis výše

Geometricky rovnice soustavy představují vzájemně rovnoběžné přímky v rovině.

- stejné rovnice $\Rightarrow$ stejné přímky $\Rightarrow$ ∞ mnoho průsečíků
- malá perturbace RHS $\Rightarrow$ různé rovnoběžné přímky $\Rightarrow$ $\emptyset$ průsečíků

d) $x_1 + x_2 = 1$ $\Rightarrow$ volme parametr x_1, pak x_2 lze dopočítat <u>$x_2 = 1 - x_1$</u>

B1: Wilkinsonův polynom

vypracováno ze Kuan my

$$p_\delta(x) := \underbrace{\prod_{i=1}^{20}(x-i) - \delta x^{19}}_{(x-20)(x-19)\cdots(x-1)-\delta x^{19}} = \alpha_{20}x^{20} + (\alpha_{19}-\delta)x^{19} + \alpha_{18}x^{18} + \dots + \alpha_0$$

$$p_0(x) = \prod_{i=1}^{20}(x-i) = \alpha_{20}x^{20} + \alpha_{19}x^{19} + \dots + \alpha_0$$

a) $\alpha_{19} = ?$

Použijeme jeden z Viètových vzorců:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = \frac{-\alpha_{19}}{\alpha_{20}} \Rightarrow \alpha_{19} = -\alpha_{20}(x_1 + \dots + x_{20})$$

$$\alpha_{20} = 1$$

$$x_1 + \dots + x_{20} = 1 + 2 + \dots + 20 = \frac{(1+20)\cdot 20}{2} = \frac{420}{2} = 210$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha_{19} = -210}}$$

b) $\delta \approx |\alpha_{19}| \cdot \varepsilon_{mach} = 210 \cdot 10^{-9} = \underline{\underline{2{,}1 \cdot 10^{-7}}}$

c) [illegible] barva $(\delta = 10^{-7})$.

Kořeny s malým indexem (1 až 5) vypadají vyrovnaně.

S větším indexem (10 až 20) se už dramaticky posunují,

dokonce se stávají komplexními.

ZÚ vypracovali David Jopek a Le Xuan Huy

a)

$$W_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$W_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \cdots & & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & 4 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & 2^{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

V každém kroku částečné pivotace se nesetkáme s nutností prohodit řádky (viz W_5). V pivotním sloupci jsou vždy 1 a -1 a platí $|1| = |-1|$.

b, c) V částečné pivotaci postupujeme následovně

- 1. řádek přičteme k 2., 3., ..., n-tému řádku, čímž se pod pivotem vynulují
- 2. řádek přičteme k 3., 4., ..., n-tému řádku, stejný efekt...

Tedy obecně: i-tý řádek přičteme k $(i+1)$-tému, ..., n-tému řádku pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$ v každém kroku částečné pivotace.