ZÁPOČTOVÝ PROJEKT 1

$\|A\|_2 := \max\limits_{v \in \mathbb{R}^n} \dfrac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \max \sigma$, σ je singulární číslo A

$Ax = b$

$\varkappa(A) := \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2$ číslo podmíněnosti

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A1 : $\varepsilon \approx 1$ vypracovala ze zadání hy

$$A_\theta = \begin{pmatrix} 1+\theta & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = 1+\theta \approx 1, \quad \theta \approx 0, \quad \theta \geq 0$$

a) $\varkappa(A_\theta) = \|A\|_2 \, \|A^{-1}\|_2 = \dfrac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$, $\lambda_{max}, \lambda_{min}$ MAX a MIN vl. čísla A

pro A symetrické, poz. definitní

$$A^T = \begin{pmatrix} 1+\theta & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A \qquad \text{symetrická } \checkmark$$

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 1+\theta-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1+\theta-\lambda)(1-\lambda) - 1 =$$

$$= \cancel{1} - \lambda + \theta - \theta\lambda - \lambda + \lambda^2 \cancel{-1} = \lambda^2 - 2\lambda - \theta\lambda + \theta =$$

$$= \lambda^2 + (-2-\theta)\lambda + \theta = 0$$

$$D = (2+\theta)^2 - 4\theta = 4 + 4\theta + \theta^2 - 4\theta = \theta^2 + 4$$

$$\lambda = \frac{2+\theta \pm \sqrt{\theta^2+4}}{2}$$

pozitivní definitnost $\iff$ znaménka vl. čísel

$$\left.\begin{aligned} \text{MIN} \quad \lambda_1 &= \tfrac{1}{2}\left(2+\theta - \sqrt{\theta^2+4}\right) > 0 \\ \text{MAX} \quad \lambda_2 &= \tfrac{1}{2}\left(2+\theta + \sqrt{\theta^2+4}\right) > 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{PD} \checkmark$$

$$\varkappa(A_\theta) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}} = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}}{\cancel{\frac{1}{2}}} \frac{2+\theta-\sqrt{\theta^2+4}}{2+\theta+\sqrt{\theta^2+4}} =$$

$$= \frac{2+\theta}{2+\theta} \frac{1-\frac{\sqrt{\theta^2+4}}{2+\theta}}{1+\frac{\sqrt{\theta^2+4}}{2+\theta}} =$$

pro θ malinké : $\sqrt{\theta^2+4} = 2\sqrt{1+\frac{\theta^4}{4}} = 2\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{\theta^2}{4} + \mathcal{O}(\theta^4)\right)$

$$\varkappa(A_\theta) = \left(\frac{2+\theta-\left(2+\frac{\theta^2}{4}\right)+\mathcal{O}(\theta^4)}{2+\theta+\left(2+\frac{\theta^2}{4}\right)+\mathcal{O}(\theta^4)}\right)^{-1} \approx \left(\frac{\theta-\frac{\theta^2}{4}}{4+\theta+\frac{\theta^2}{4}}\right)^{-1} = \underline{\underline{\frac{16+4\theta+\theta^2}{4\theta-\theta^2}}}$$

b) $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$x_1 = \frac{\det A_{\theta 1}}{\det A_\theta} = 0 , \qquad x_2 = \frac{\det A_{\theta 2}}{\det A_\theta} = 1$$

$$\det A_{\theta 1} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad \det A_{\theta 2} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon - 1$$

$$\det A_\theta = \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon - 1$$

c) $\begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 1+\beta \end{pmatrix}}_{:=\tilde{b}}$

$$\det A_{\theta 1} = \begin{vmatrix} 1+\alpha & 1 \\ 1+\beta & 1 \end{vmatrix} = 1+\alpha-1-\beta = \alpha-\beta$$

$$\det A_{\theta 2} = \begin{vmatrix} \varepsilon & 1+\alpha \\ 1 & 1+\beta \end{vmatrix} = \varepsilon+\varepsilon\beta-1-\alpha = 1+\theta+\beta+\theta\beta-1-\alpha =$$
$$= \theta+\beta+\theta\beta-\alpha$$

$$\det A_\theta = \begin{vmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \varepsilon - 1 = 1+\theta-1 = \theta$$

$$x_1 = \frac{\alpha-\beta}{\theta} \qquad x_2 = 1+\beta-\frac{\alpha-\beta}{\theta}$$

d) $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha-\beta}{\theta} \\ 1+\beta-\frac{\alpha-\beta}{\theta} \end{pmatrix} = x + \begin{pmatrix} \frac{\alpha-\beta}{\theta} \\ \beta-\frac{\alpha-\beta}{\theta} \end{pmatrix}$

$$A_\theta x = b$$

$$A_\theta \tilde{x} = \tilde{b} = b + \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = A_\theta x + \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{x} = x + A_\theta^{-1}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$

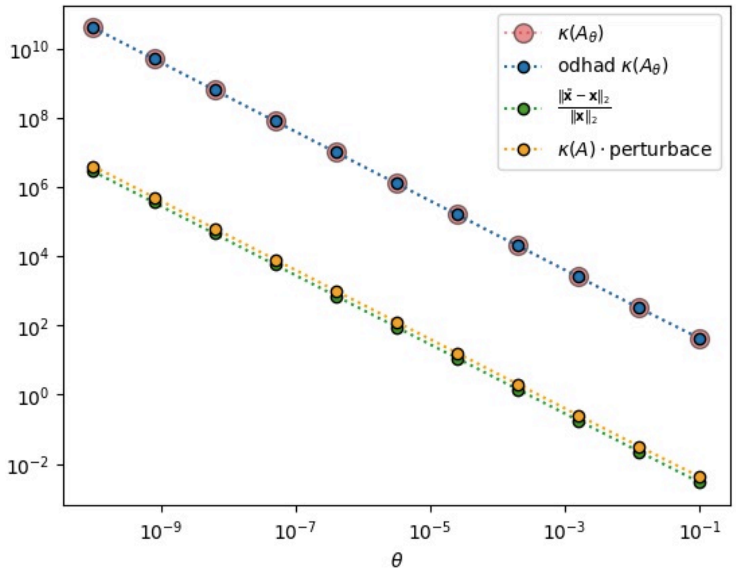
$$A_\theta^{-1} = \begin{pmatrix}1+\theta & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\theta}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1+\theta\end{pmatrix}$$

Tedy celkově $\underline{\underline{\tilde{x} = x + \frac{1}{\theta}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1+\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}}}$.

POZNÁMKY KE KÓDU:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \underbrace{\|A\|\,\|A^{-1}\|}_{\varkappa(A_\theta)} \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

$$\Delta x = \tilde{x} - x, \quad \Delta b = \tilde{b} - b = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$$



- „více" singulární matice A_θ (tzn. menší θ)
  $\Rightarrow$ větší číslo podmíněnosti $\Rightarrow$ větší rel. chyba řešení
- závislosti jsou lineární
- graficky jsme ověřili teorii lineární závislosti $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \le \varkappa(A_\theta)\frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$
  (žlutý ● graf nad zeleným ●)

A1: případ $\theta \to 0$ (ZU) pro $\theta \to 0$ označme $A_\theta \equiv A_0$

a) $\varkappa(A_0) = \lim\limits_{\theta\to 0+} \varkappa(A_\theta) = \lim\limits_{\theta\to 0+} \frac{16+4\theta+\theta^2}{4\theta-\theta^2} = {}$ „$\frac{16}{0+}$" $= \underline{\underline{+\infty}}$

b) $$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A_0} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{b}$$

A_0 je singulární $\Rightarrow$ $\nexists\ A_0^{-1}$ $\Rightarrow$ $\varkappa(A_0) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$ nelze spočítat „klasicky".

Z a) víme, že $\varkappa(A_0) = \infty$ $\Rightarrow$ problém je extrémně špatně podmíněný; malé změny b mohou znamenat velkou rel. chybu řešení (nebo řešení $\nexists$?)

Řešíme $x_1 + x_2 = 1$ $\Rightarrow$ <u>nekonečně mnoho řešení.</u>

Malá perturbace:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 1+\beta \end{pmatrix}$$

$$x_1 + x_2 = 1 + \alpha$$
$$x_1 + x_2 = 1 + \beta$$

$\Rightarrow$ pro $\alpha \neq \beta$ soustava <u>nemá řešení</u>

I velmi malá perturbace zničí řešitelnost soustavy, pokud je matice singulární.

c) LZ řádky matice $\Rightarrow$ det matice $= 0$, popis výše

Geometricky rovnice soustavy představují vzájemně rovnoběžné přímky v rovině.

- stejné rovnice $\Rightarrow$ stejné přímky $\Rightarrow$ ∞ mnoho průsečíků
- malá perturbace RHS $\Rightarrow$ různé rovnoběžné přímky $\Rightarrow$ $\emptyset$ průsečíků

d) $x_1 + x_2 = 1$ $\Rightarrow$ volme parametr x_1, pak x_2 lze dopočítat $\underline{\underline{x_2 = 1 - x_1}}$

B1: Wilkinsonův polynom

vypracovala Ze Xuan My

$$p_\delta(x) := \prod_{i=1}^{20} (x-i) - \delta x^{19} = \alpha_{20} x^{20} + (\alpha_{19} - \delta) x^{19} + \alpha_{18} x^{18} + \dots + \alpha_0$$

$$\underbrace{\prod_{i=1}^{20} (x-i) - \delta x^{19}}_{(x-20)(x-19)\cdots(x-1) - \delta x^{19}}$$

$$p_0(x) = \prod_{i=1}^{20} (x-i) = \alpha_{20} x^{20} + \alpha_{19} x^{19} + \dots + \alpha_0$$

a) $\alpha_{19} = ?$

Použijeme jeden z Viètových vzorců:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{20} = \frac{-\alpha_{19}}{\alpha_{20}} \quad \Rightarrow \quad \alpha_{19} = -\alpha_{20}(x_1 + \dots + x_{20})$$

$$\alpha_{20} = 1$$

$$x_1 + \dots + x_{20} = 1 + 2 + \dots + 20 = \frac{(1+20)\cdot 20}{2} = \frac{420}{2} = 210$$

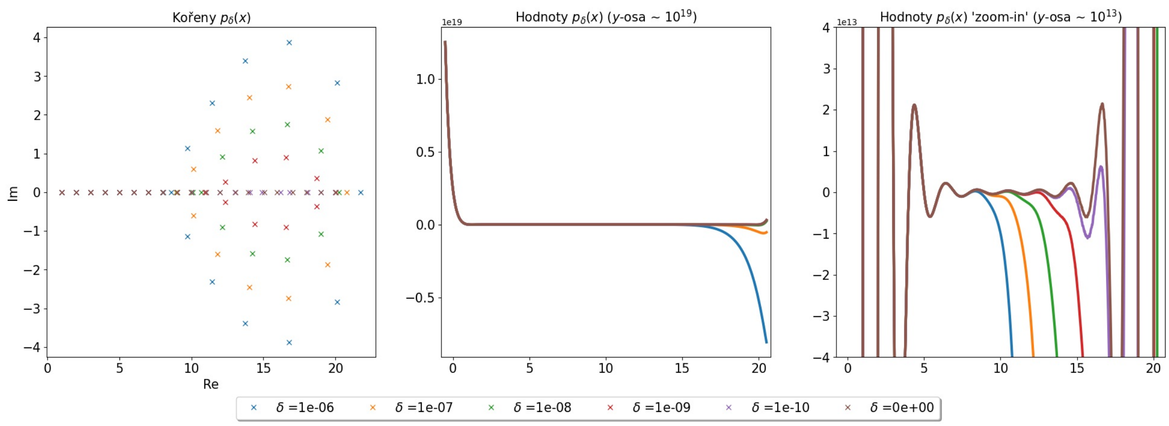
$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\alpha_{19} = -210}}$$

b) $\delta \approx |\alpha_{19}| \cdot \varepsilon_{mach} = 210 \cdot 10^{-9} = \underline{\underline{2{,}1 \cdot 10^{-7}}}$

c) Grafické řešení $(\delta = 10^{-7})$.

Kořeny s malým indexem (1 až 5) vypadají nezměněně.

S větším indexem (10 až 20) se už dramaticky posunují, dokonce se stávají komplexními.



ZÚ vypracovali Dávid Jozef a Ze Xuan Ng

a)

$$W_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$W_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots \\ -1 & \cdots & & -1 & 1 & 1 \\ -1 & \cdots & & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & & \vdots & 2 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & 4 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 & 2^{n-2} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

V každém kroku částečné pivotace se nesetkáme s nutností prohodit řádky (viz W_5). V pivotním sloupci jsou vždy 1 a -1 a platí $|1| = |-1|$.

V částečné pivotaci postupujeme následovně

- 1. řádek přičteme ke 2., 3., …, n-tému řádku, čímž se pod pivotem vynulují
- 2 řádek přičteme ke 3., 4., …, n-tému řádku, stejný efekt…

Tedy obecně: i-tý řádek přičteme k $(i+1)$-tému, …, n-tému řádku pro $i \in \{1, \dots, n-1\}$ v každém kroku částečné pivotace.

Matici W_n tedy zleva násobíme maticemi odpovídající těmto ekvivalentním úpravám $R_1, \dots, R_{n-1}$, které jsou dolní trojúhelníkové. Součin dolních Δ matic je zase dolní Δ matice.

Výsledkem tohoto násobení je horní Δ matice, tedy

$$\underbrace{R_{n-1}\cdot \ldots \cdot R_1}_{\equiv L^{-1}} W_n = \underset{\text{horní } \Delta}{U} .$$

dolní Δ

$$W_n = LU$$

Inverze dolní Δ matice L^{-1} je opět dolní Δ matice $\equiv L$.

Celkově jsme takto sestavili LU rozklad W_n.

b) Nechť $W_n \equiv W$, jeho prvky ozn. w_{ij}. Chceme vynulovat prvky pod diagonálou, tedy w_{ij} pro $i > j$. Pivoty jsou w_{jj}.

Protože se žádné řádky nepohazují, pouze od každého řádku $i > j$ odečteme vhodný násobek řádku k, aby se vynuloval.

$$w_{ij} - \underset{\text{vhodný násobek}}{c_{ij}} \cdot w_{jj} = 0$$

$$c_{ij} = \frac{w_{ij}}{w_{jj}}$$

V Gaussově eliminaci $R_{n-1} \cdots R_1 W = U$ mají R_j tvar

$$R_j = I - C_j ,$$

kde C_j má nenulové prvky jen ve sloupci j pod diagonálou, konkrétně c_{ij}.

Z toho inverze je $R_j^{-1} = I + C_j$.

$$L = (R_{n-1} \cdots R_1)^{-1} = R_1^{-1} \cdots R_{n-1}^{-1}$$

Pro $j = 1$ platí $L = R_1^{-1} = I + M_1$, takže prvky pod diagonálou ve sloupci 1 jsou přesně m_{i1}.

Induktivně předpokládáme, že sloupce $1, \dots, j-1$ jsou správně a při vložení $R_j^{-1} = I + C_j$ se do j-tého sloupce přidají přesně multiplikátory c_{ij} pod diagonálou.

Součin dolních s maticí nepřepíše předchozí prvky, tedy po sloupcích $1, \dots, n-1$ platí

$$L_{ij} = c_{ij} \quad \forall\, i > j.$$

Dále platí $L_{ii} = 1$.

Pro pivot platí $|w_{ij}| \le |w_{jj}|$. Celkově

$$|L_{ij}| = |c_{ij}| = \frac{|w_{ij}|}{|w_{jj}|} \le 1. \qquad \square$$

c) Protože pivot je vždy $w_{jj} = 1$, tak z toho vyplývá $c_{ij} = -1$ pro $i > j$.

Tedy

$$L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Z nodu a) víme

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & & \vdots & 2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & 4 \\ \vdots & & & 1 & 2^{n-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$$

d) verze 1:

$$W + \Delta W = LU \qquad \|M\| = \max_{ij} |M_{ij}|$$

$$\|\Delta W\| \leq 2n\, \varepsilon_{mach} \underbrace{\|L\|}_{1} \underbrace{\|U\|}_{2^{n-1}}$$

$$\|\Delta W\| \leq 2^n n\, \varepsilon_{mach}$$

? ?

chceme $\|\Delta W\| \leq 1$.

verze 2:

$$\|\Delta A\| \leq 2n\varepsilon_{mach} \|L\| \|U\| \quad ; \|L\| = 1,\ \|U\| = 2^{n-1}$$

$$\|\Delta A\| > 1 \Rightarrow \quad 2n\varepsilon_{mach} \|L\|\|U\| \geq \|\Delta A\| > 1$$

$$\Rightarrow 2n\varepsilon_{mach} 2^{n-1} > 1$$

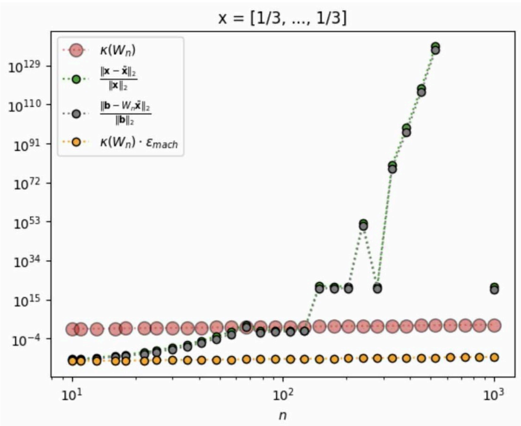
$$\Rightarrow \boxed{n 2^n > \frac{1}{\varepsilon_{mach}}}$$

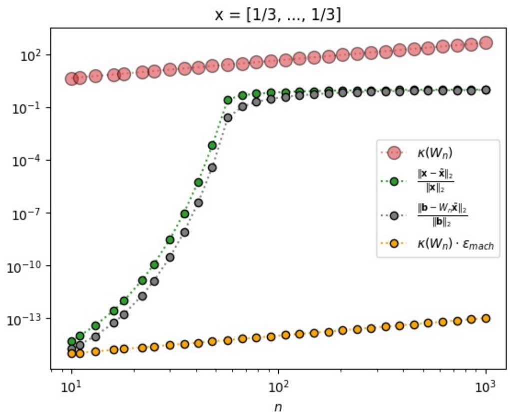
$$2^n \approx \frac{1}{\varepsilon_{mach}} \approx 10^{16}$$

$$n = \frac{\ln 10^{16}}{\ln 2} \approx 53$$

ZÚ: kód

Interpretácia výsledkov:
V časti "tužka papír" sme odvodili podmienku pre aké n veta zaručuje presnosť. Odhadom sme došli k približnému výsledku n=53. Na grafe pre všetky hodnoty x sa prejavila táto podmienka. Chyba narastala do daného n a potom sa ustálila na pomerne vysokej hodnote.
Pri spustení toho istého kódu na dvoch rôznych zariadeniach s dvoma rôznymi verziami Pythonu sme pozorovali rôzny vývoj chýb, najmä pri divergencii chyby pre x = [1/3,...,1/3] a x = [0.3,..,0.3]. Pravdepodobne tento výsledok len potvrdzuje, že pre hodnoty nad dané n výsledok nie je presný. Technickejšie vysvetlenie môže byť aj skutočnosť, ako rôzne procesory a verzie pythonu narábajú s danými hodnotami pri výpočte.





Různé výsledky pro stejný kód v různých Python prostředích.