四旋翼无人机的建模与控制

孙琦

摘　要：本文对四旋翼无人机的建模与控制进行了较为详细的讲解。本文在第二节中详细介绍了无人机的动力学模型，在第三节中讲解了四旋翼无人机的拉力模型。针对位置控制和姿态控制，本文在第五节和第六节中分别介绍了基于欧拉角和旋转矩阵的 PID 位置控制器和 PID 姿态控制器，并对基于欧拉角的位置和姿态控制器进行了仿真，取得了较为满意的结果。

关键词：四旋翼；建模；PID 控制

1 引言

采用地球系和机体系两种坐标系，其关系如下图：

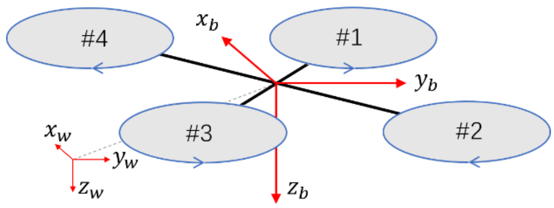

图 1-1 地球系和机体系

为方便建模，作如下设定：

（1）无人机是刚体。

（2）无人机的质量和转动惯量不变。

（3）无人机的几何中心与重心一致。

（4）无人机受到的重力沿 $\boldsymbol{z}_e$ 方向，螺旋桨拉力沿 $\mathbf{z}_b$ 负方向。

（5）无人机奇数号桨逆时针转动，偶数号桨顺时针转动，如图 1 所示。

2 无人机动力学模型

已知，位置与速度有如下关系：

$$\dot{\boldsymbol{p}}_e = \boldsymbol{v}_e \tag{2.1}$$

基于无人机姿态的 3 种表示方法，可以建立相应的 3 种刚体运动学模型：欧拉角模型、旋转矩阵模型和四元数模型。

欧拉角模型：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{p}}_e = \boldsymbol{v}_e \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}} = \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{\omega}_b\end{cases} \tag{2.2}$$

旋转矩阵模型：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{p}}_e = \boldsymbol{v}_e \\ \dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}[\boldsymbol{\omega}_b]_\times\end{cases} \tag{2.3}$$

其中 **R** 为旋转矩阵，具体表示为

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\psi s\theta s\phi - s\psi c\phi & c\psi s\theta c\phi + s\psi s\phi \\ c\theta s\psi & s\psi s\theta s\phi + c\psi c\phi & s\psi s\theta c\phi - c\psi s\phi \\ -s\theta & s\phi c\theta & c\phi c\theta \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

篇幅限制，这里将 sin 简写为 s，cos 简写为 c。

四元数模型：

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{p}}_e = \boldsymbol{v}_e \\ \dot{q}_0 = -\dfrac{1}{2}\boldsymbol{q}_v^T\cdot\boldsymbol{\omega}_b \\ \dot{\boldsymbol{q}}_v = \dfrac{1}{2}(q_0\boldsymbol{I}_3 + [\boldsymbol{q}_v]_\times)\cdot\boldsymbol{\omega}_b\end{cases} \tag{2.5}$$

接着建立无人机的动力学模型。对无人机进行受力分析，有

$$\dot{\boldsymbol{v}}_e = g\boldsymbol{z}_e - \frac{f}{m}\boldsymbol{z}_{b,e} \tag{2.6}$$

无人机机体坐标系和地球系之间可以通过旋转矩阵转换，有$\boldsymbol{z}_{b,e} = \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{z}_e$，代入式 2.6，得到无人机的位置动力学模型：

$$\dot{v}_e = gz_e - \frac{f}{m}\boldsymbol{R}z_e + \boldsymbol{f}_{disturb} \tag{2.7}$$

其中$\boldsymbol{f}_{disturb}$为扰动所产生的三轴的力。

根据欧拉方程，基于假设（1）~（3），可以建立如下姿态动力学方程：

$$\boldsymbol{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -\boldsymbol{\omega}_b\times(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}_b) + \boldsymbol{G}_a + \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{disturb} \tag{2.8}$$

其中，$\boldsymbol{\tau} = [\tau_x \quad \tau_y \quad \tau_z]^T$是螺旋桨在机体上产生的力矩，J 表示无人机的转动惯量，$\boldsymbol{G}_a$表示陀螺力矩，$\boldsymbol{\tau}_{disturb}$为扰动所产生的三轴力矩。陀螺力矩的符号与螺旋桨的旋转方向有关。单个螺旋桨产生的陀螺力矩可表示为：

$$\boldsymbol{G}_{a,k} = J_{RP}(\boldsymbol{\omega}_b\times\boldsymbol{z}_e)(-1^{k+1})\varpi_k \tag{2.9}$$

其中，J_{RP}表示整个电机转子和螺旋桨绕转轴的总转动惯量，ϖ_k表示第 k 个螺旋桨的角速度。

联立式 2.2、式 2.7 和式 2.8 可以得到无人机的欧拉角刚体模型：

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{p}}_e = \boldsymbol{v}_e \\
\dot{\boldsymbol{v}}_e = g\boldsymbol{z}_e - \dfrac{f}{m}\boldsymbol{R}\boldsymbol{z}_e + \boldsymbol{f}_{disturb} \\
\dot{\boldsymbol{\Theta}} = \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{\omega}_b \\
\boldsymbol{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -\boldsymbol{\omega}_b \times (\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}_b) + \boldsymbol{G}_a + \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{disturb}
\end{cases} \tag{2.10}
$$

联立式 2.3、式 2.7 和式 2.8 可以得到无人机的旋转矩阵刚体模型：

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{p}}_e = \boldsymbol{v}_e \\
\dot{\boldsymbol{v}}_e = g\boldsymbol{z}_e - \dfrac{f}{m}\boldsymbol{R}\boldsymbol{z}_e + \boldsymbol{f}_{disturb} \\
\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}[\boldsymbol{\omega}_b]_\times \\
\boldsymbol{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -\boldsymbol{\omega}_b \times (\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}_b) + \boldsymbol{G}_a + \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{disturb}
\end{cases} \tag{2.11}
$$

联立式 2.5、式 2.7 和式 2.8 可以得到无人机的四元数刚体模型：

$$
\begin{cases}
\dot{\boldsymbol{p}}_e = \boldsymbol{v}_e \\
\dot{\boldsymbol{v}}_e = g\boldsymbol{z}_e - \dfrac{f}{m}\boldsymbol{R}\boldsymbol{z}_e + \boldsymbol{f}_{disturb} \\
\dot{q}_0 = -\dfrac{1}{2}\boldsymbol{q}_v^T\cdot\boldsymbol{\omega}_b \\
\dot{\boldsymbol{q}}_v = \dfrac{1}{2}(q_0\boldsymbol{I}_3 + [\boldsymbol{q}_v]_\times)\cdot\boldsymbol{\omega}_b \\
\boldsymbol{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = -\boldsymbol{\omega}_b \times (\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}_b) + \boldsymbol{G}_a + \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_{disturb}
\end{cases} \tag{2.12}
$$

3 无人机拉力模型

当知道螺旋桨转速时，可以通过控制效率模型计算出拉力和力矩。其逆过程称为控制分配模型，当控制器计算出期望的拉力和力矩时，可以通过控制分配模型计算出所需的螺旋桨速度。

单个螺旋桨的拉力可由下式表示

$$T_i = c_T\varpi_i^2 \tag{3.1}$$

其中，$c_T = 1/4\pi^2\cdot\rho D_p^4 C_T$。$D_p$螺旋桨直径；$C_T$为电机的拉力系数，可以通过实验测得；$\rho$为飞行环境空气密度，可由下式计算得出

$$\rho = \frac{273\rho_0}{273+T_t}\left(1-0.0065\frac{h}{273+T_t}\right)^{5.2561} \tag{3.2}$$

其中，$\rho_0 = 1.293kg/m^3$为标准大气密度，T_t为当前温度，h为飞行海拔高度。

单个螺旋桨反扭矩的静态模型表示为

$$M_i = c_M\varpi_i^2 \tag{3.3}$$

其中，$c_M = 1/4\pi^2\cdot\rho D_p^5 C_M$，$C_M$也通过实验确定。其动态模型为

$$J_{RP}\dot{\varpi}_i = -c_M\varpi_i^2 + \tau_i \tag{3.4}$$

其中，τ_i表示作用在螺旋桨 i 上的，根据牛顿第三定律，其反扭力矩与作用在螺旋桨上的力矩大小相等，即$\tau_i = M_i$，所以

$$M_i = c_M\varpi_i^2 + J_{RP}\dot{\varpi}_i \tag{3.5}$$

四旋翼无人机的总拉力可表示为

$$f = \sum_{i=1}^{4} T_i = c_T(\varpi_1^2 + \varpi_2^2 + \varpi_3^2 + \varpi_4^2) \tag{3.6}$$

其螺旋桨产生的力矩为

$$
\begin{cases}
\tau_x = dc_T\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varpi_1^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\varpi_2^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\varpi_3^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\varpi_4^2\right) \\
\tau_y = dc_T\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\varpi_1^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\varpi_2^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\varpi_3^2 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\varpi_4^2\right) \\
\tau_z = c_M(\varpi_1^2 - \varpi_2^2 + \varpi_3^2 - \varpi_4^2)
\end{cases} \tag{3.7}
$$

其中，d 为机体中心与电机中心的距离。由式 3.6 和式 3.7 可以得到无人机的拉力和力矩模型

$$
\begin{bmatrix} f \\ \tau_x \\ \tau_y \\ \tau_z \end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
c_T & c_T & c_T & c_T \\
\dfrac{\sqrt{2}}{2}dc_T & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}dc_T & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}dc_T 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2}dc_T \\
\dfrac{\sqrt{2}}{2}dc_T & \dfrac{\sqrt{2}}{2}dc_T & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}dc_T & -\dfrac{\sqrt{2}}{2}dc_T \\
c_M & -c_M & c_M & -c_M
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varpi_1^2 \\ \varpi_2^2 \\ \varpi_3^2 \\ \varpi_4^2 \end{bmatrix} \tag{3.8}
$$

书(6.24)

4 无人机位置控制

无人机的底层飞行控制分为四个层次， 分别为位置控制、姿态控制、控制分配和电机控制，如图 4-1 所示。

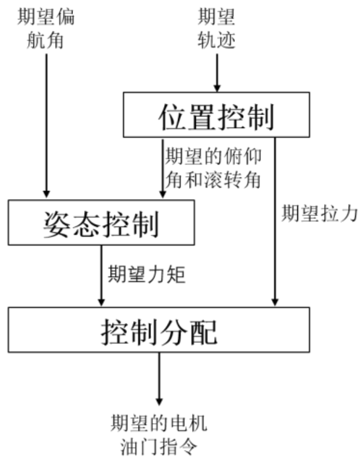

图 4-1 无人机飞行控制框架

4.1 方法一：欧拉角作为输出的 PID 控制

欧拉角作为输出时，无人机的闭环控制框架如图 4-2 所示。

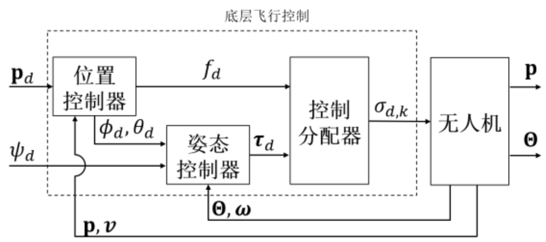

图 4-2 欧拉角作为输出的无人机闭环控制框图

简化式 2.10 表示的模型，忽略$-\boldsymbol{\omega}_b \times (\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{\omega}_b) + \boldsymbol{G}_a$项，得到如下简化模型：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{p}}_e = \boldsymbol{v}_e \\ \dot{\boldsymbol{v}}_e = g\boldsymbol{z}_e - \dfrac{f}{m}R\boldsymbol{z}_e \\ \dot{\boldsymbol{\Theta}} = \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{\omega}_b \\ \boldsymbol{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = \boldsymbol{\tau} \end{cases} \tag{4.1}$$

对其进行小角度简化，可以得到三个线性模型，即水平位置通道模型、高度通道模型和姿态模型。

水平位置通道模型：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{p}}_h = \boldsymbol{v}_h \\ \dot{\boldsymbol{v}}_h = -g\boldsymbol{A}_\psi\boldsymbol{\Theta}_h \end{cases} \tag{4.2}$$

其中，$\boldsymbol{p}_h = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{R}_\psi = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}_\psi = \boldsymbol{R}_\psi \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\Theta}_h = \begin{bmatrix} \phi \\ \theta \end{bmatrix}$。

高度通道模型：

$$\begin{cases} \dot{p}_z = v_z \\ \dot{v}_z = g - \dfrac{f}{m} \end{cases} \tag{4.3}$$

姿态模型：

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{\Theta}}_h = \boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{J}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_b = \boldsymbol{\tau} \end{cases} \tag{4.4}$$

（1）传统 PID 控制器

欧拉角作为输出，最终需要产生期望的欧拉角ϕ_d、θ_d和拉力f_d。

针对水平通道模型 4.2，设计期望角度$\boldsymbol{\Theta}_{hd} = [\phi_d \quad \theta_d]^T$，误差定义为

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}_h} \triangleq \boldsymbol{p}_h - \boldsymbol{p}_{hd} \tag{4.5}$$

期望的过度过程如下：

$$\ddot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}_h} = -\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{p}_h d}\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}_h} - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{p}_h p}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}_h} \tag{4.6}$$

将式 4.5 求二阶导代入 4.6，得到

$$\ddot{\boldsymbol{p}}_h = \ddot{\boldsymbol{p}}_{hd} - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{p}_h d}\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}_h} - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{p}_h p}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}_h} \tag{4.7}$$

联立式 4.2 和 4.7，可得

$$-g\boldsymbol{A}_\psi\boldsymbol{\Theta}_{hd} = \ddot{\boldsymbol{p}}_{hd} - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{p}_h d}\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}_h} - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{p}_h p}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}_h} \tag{4.8}$$

整理可得

$$\boldsymbol{\Theta}_{hd} = -g^{-1}\boldsymbol{A}_\psi^{-1}(\ddot{\boldsymbol{p}}_{hd} - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{p}_h d}\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{p}_h} - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{p}_h p}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{p}_h}) \tag{4.9}$$

针对高度通道，定义误差为

$$e_{p_z} \triangleq p_z - p_{zd} \tag{4.10}$$

期望的过度过程如下：

$$\ddot{e}_{p_z} = -K_{p_z d}\dot{e}_{p_z} - K_{p_z p}e_{p_z} \tag{4.11}$$

与水平通道同理，可以得到拉力的控制器

$$f_d = mg - m(\ddot{p}_{zd} - k_{p_z d}\dot{e}_{p_z} - k_{p_z p}e_{p_z}) \tag{4.12}$$

（2）加饱和的 PID 控制器

水平通道：

针对$\dot{\boldsymbol{p}}_h = \boldsymbol{v}_h$，设计$\boldsymbol{v}_h$的期望值$\boldsymbol{v}_{hd}$，如下式所示

$$\boldsymbol{v}_{hd} = \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{p}_h}(\boldsymbol{p}_{hd} - \boldsymbol{p}_h) \tag{4.13}$$

于是定义$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}_h} \triangleq \boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_{hd}$，加上饱和函数，得

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}_h} = \mathrm{sat}_{\mathrm{gd}}(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_{hd}, a_1) \tag{4.14}$$

这里的$sat_{gd}()$为饱和函数，定义为：

$$\mathrm{sat}_{\mathrm{gd}}(\boldsymbol{u}, a) \triangleq \begin{cases} \boldsymbol{u}, & \|\boldsymbol{u}\|_\infty \le a \\ a\dfrac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|_\infty}, & \|\boldsymbol{u}\|_\infty > a \end{cases}$$

其中，$\|\boldsymbol{u}\|_\infty \triangleq \max(|u_1|, \cdots, |u_n|)$。

针对$\dot{\boldsymbol{v}}_h = -g\boldsymbol{A}_\psi\boldsymbol{\Theta}_h$，类似于式 4.8，采用如下 PID 控制器：

$$-g\boldsymbol{A}_\psi\boldsymbol{\Theta}_{hd} = -\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v}_h p}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}_h} - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v}_h i}\int \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}_h} - \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v}_h d}\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{v}_h} \tag{4.15}$$

可以推导期望的姿态角如下：

$$\boldsymbol{\Theta}_{hd} = g^{-1}\boldsymbol{A}_\psi^{-1}\left(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v}_h p}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}_h} + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v}_h i}\int \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}_h} + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v}_h d}\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{v}_h}\right) \tag{4.16}$$

加上饱和函数，得水平通道控制器：

$$\boldsymbol{\Theta}_{hd} = \mathrm{sat}_{\mathrm{gd}}\left(g^{-1}\boldsymbol{A}_\psi^{-1}\left(\boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v}_h p}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}_h} + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v}_h i}\int \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{v}_h} + \boldsymbol{K}_{\boldsymbol{v}_h d}\dot{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{v}_h}\right), a_2\right) \tag{4.17}$$

高度通道：

类似于水平通道，设计v_z期望值为

$$v_{zd} = -k_{p_z}(p_z - p_{zd}) \tag{4.18}$$

定义$e_{v_z} \triangleq v_z - v_{zd}$，加上饱和函数

$$e_{v_z} = \mathrm{sat}_{\mathrm{gd}}(v_z - v_{zd}, a_3) \tag{4.19}$$

对于期望的拉力，采用如下 PID 控制器：

$$g - \frac{f_d}{m} = -k_{v_z p}e_{v_z} - k_{v_z i}\int e_{v_z} - k_{v_z d}\dot{e}_{v_z} \tag{4.20}$$

整理得到期望的拉力如下：

$$f_d = m\left(g + k_{v_z p}e_{v_z} + k_{v_z i}\int e_{v_z} + k_{v_z d}\dot{e}_{v_z}\right) \tag{4.21}$$

加上饱和函数：

$$f_d = \mathrm{sat}_{\mathrm{gd}}\left(m\left(g + k_{v_z p}e_{v_z} + k_{v_z i}\int e_{v_z} + k_{v_z d}\dot{e}_{v_z}\right), a_4\right) \tag{4.22}$$

4.2 方法二：旋转矩阵作为输出的 PID 控制

旋转矩阵作为输出时，无人机的闭环控制框架如图 4-3 所示。

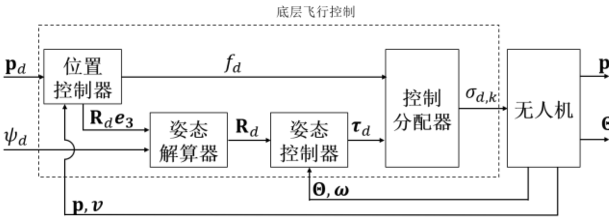

图 4-3 旋转矩阵作为输出的无人机闭环控制框图

旋转矩阵作为输出，最终产生期望的旋转矩阵$\boldsymbol{R}_d$和拉力f_d。

已知基于旋转矩阵描述的姿态运动学方程为

$$\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{R}[\boldsymbol{\omega}_b]_\times \tag{4.23}$$

定义旋转矩阵$\boldsymbol{R} \triangleq [\boldsymbol{r}_1 \quad \boldsymbol{r}_2 \quad \boldsymbol{r}_3]$，期望的旋转矩阵$\boldsymbol{R}_d \triangleq [\boldsymbol{r}_{1,d} \quad \boldsymbol{r}_{2,d} \quad \boldsymbol{r}_{2,d}]$。根据式 4.1 中的第一个和第二个式子，期望的$\boldsymbol{R}_d$和$f_d$需满足

$$g\boldsymbol{e}_3 - \frac{f_d}{m}\boldsymbol{r}_{3,d} = \boldsymbol{a}_d \tag{4.24}$$

其中，$\boldsymbol{a}_d$为期望的加速度，可由下式得到：

$$\boldsymbol{a}_d = \begin{bmatrix} \mathrm{sat_{gd}}\left(\left(-\boldsymbol{K}_{v_h p}\boldsymbol{e}_{v_h} - \boldsymbol{K}_{v_h i}\int \boldsymbol{e}_{v_h} - \boldsymbol{K}_{v_h d}\dot{\boldsymbol{e}}_{v_h}\right), a_5\right) \\ \mathrm{sat_{gd}}\left(\left(-k_{v_z p}e_{v_z} - k_{v_z i}\int e_{v_z} - k_{v_z d}\dot{e}_{v_z}\right), a_6\right) \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

其中，$\boldsymbol{e}_{v_h} = sat_{gd}(\boldsymbol{v}_h - \boldsymbol{v}_{hd}, a_7)$，$e_{v_z} = sat_{gd}(v_z - v_{zd}, a_8)$，$a_5, a_6, a_7, a_8 \in \mathbb{R}_+$。

由式 4.24 可得

$$\boldsymbol{r}_{3,d} = \frac{m(g\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{a}_d)}{f_d}$$

因为$\boldsymbol{r}_{3,d}$为正交矩阵的一列，故其满足$\boldsymbol{r}_{3,d}^T\boldsymbol{r}_{3,d} = 1$，所以

$$\boldsymbol{r}_{3,d} = \frac{g\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{a}_d}{\|g\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{a}_d\|} \tag{4.26}$$

此时，$\boldsymbol{r}_{3,d}$已经确定，为获取$\boldsymbol{R}_d$，可以有两种方法，一种基于小角度假设，一种适用于大角度。

（1）小角度情况

为获取$\boldsymbol{R}_d$，还需确定$\boldsymbol{r}_{1,d}$和$\boldsymbol{r}_{2,d}$中的一个。根据旋转矩阵定义

$$\boldsymbol{r}_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\psi \\ \cos\theta\sin\psi \\ \sin\theta \end{bmatrix} \tag{4.27}$$

基于小角度假设，对应的期望向量$\boldsymbol{r}_{1,d}$近似为

$$\boldsymbol{r}_{1,d} \approx \bar{\boldsymbol{r}}_{1,d} = \begin{bmatrix} \cos\psi_d \\ \sin\psi_d \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

通过$\bar{\boldsymbol{r}}_{1,d}$和$\boldsymbol{r}_{3,d}$，得到

$$\boldsymbol{r}_{2,d} = \frac{\boldsymbol{r}_{3,d} \times \bar{\boldsymbol{r}}_{1,d}}{\|\boldsymbol{r}_{3,d} \times \bar{\boldsymbol{r}}_{1,d}\|}$$

最后，定义$\boldsymbol{r}_{1,d} = \boldsymbol{r}_{2,d} \times \boldsymbol{r}_{3,d}$，可得

$$\boldsymbol{R}_d = [\boldsymbol{r}_{2,d} \times \boldsymbol{r}_{3,d} \quad \boldsymbol{r}_{2,d} \quad \boldsymbol{r}_{3,d}] \tag{4.29}$$

（2）大角度情况

根据式 2.4，向量$\boldsymbol{r}_{3,d}$表示为

$$\boldsymbol{r}_{3,d} = \begin{bmatrix} c\psi_d s\theta_d c\phi_d + s\psi_d s\phi_d \\ s\psi_d s\theta_d c\phi_d - c\psi_d s\phi_d \\ c\phi_d c\theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

整理式 4.30 可得

$$\begin{cases} s\phi_d = s\psi_d \cdot a_{11} - c\psi_d \cdot a_{12} \\ s\theta_d c\phi_d = c\psi_d \cdot a_{11} + s\psi_d \cdot a_{12} \\ c\phi_d c\theta_d = a_{13} \end{cases} \tag{4.31}$$

由式 4.31 可以解出

$$\begin{cases} \theta_d = \theta_{d,0}\text{或}\theta_{d,1} \\ \phi_d = \phi_{d,0}\text{或}\phi_{d,1} \end{cases} \tag{4.32}$$

其中

$$\begin{cases} \theta_{d,0} = \mathrm{arctan2}(c\psi_d \cdot a_{11} + s\psi_d \cdot a_{12}, a_{13}) \\ \theta_{d,1} = \mathrm{arctan2}(-c\psi_d \cdot a_{11} - s\psi_d \cdot a_{12}, -a_{13}) \\ \phi_{d,0} = \arcsin(s\psi_d \cdot a_{11} - c\psi_d \cdot a_{11}) \\ \phi_{d,1} = \phi_{d,0} - \mathrm{sign}(\phi_{d,0})\pi \end{cases} \tag{4.33}$$

其中

$$\mathrm{arctan2}(y, x) = \begin{cases} \arctan(y/x), & x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi, & y \geq 0, x < 0 \\ \arctan(y/x) - \pi, & y < 0, x < 0 \\ \pi/2, & y > 0, x = 0 \\ -\pi/2, & y < 0, x = 0 \\ \text{未定义}, & y = 0, x = 0 \end{cases}$$

尽管θ_d和ϕ_d都有两个可能的取值，但大部分都可以由式 4.30 唯一确定。把θ_d、ϕ_d和ψ_d代入式 2.4 即可得到$\boldsymbol{R}_d$。

式 4.24 两边同时左乘$\boldsymbol{r}_{3,d}^T$，得到期望的拉力

$$f_d = m\boldsymbol{r}_{3,d}^T(g\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{a}_d) \tag{4.34}$$

若$f_d \in [f_{\min}, f_{\max}]$，则$f_d$相应地变为

$$f_d = \mathrm{sat_{gd}}\left(m\boldsymbol{r}_{3,d}^T(g\boldsymbol{e}_3 - \boldsymbol{a}_d) - \frac{f_{\min} + f_{\max}}{2}, \frac{f_{\max} - f_{\min}}{2}\right) + \frac{f_{\min} + f_{\max}}{2}$$

5 无人机姿态控制

由图 4-2 无人机的控制框图可以看出，姿态控制是无人机内环控制，位置控制水平通道的输出是姿态控制的期望值。对应位置控制水平通道的两种输出，这里将$\boldsymbol{\Theta}_{hd}$或$\boldsymbol{R}_d$作为期望。

5.1 基于欧拉角的姿态控制

姿态控制的目标是：已知姿态角期望$\boldsymbol{\Theta}_d =$

$[\boldsymbol{\Theta}_{hd}^T \quad \psi_d]^T$，设计控制器$\boldsymbol{\tau}$，使得$\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{e}_{\Theta}(t)\|=0$，其中$\boldsymbol{e}_{\Theta} \triangleq \boldsymbol{\Theta}-\boldsymbol{\Theta}_d$，$\boldsymbol{\Theta}_{hd}$由位置控制器给点，$\psi_d$由任务规划直接给定。已知

$$\dot{\boldsymbol{\Theta}}=\boldsymbol{\omega} \tag{5.1}$$

设计角速度的期望$\boldsymbol{\omega}_d$为

$$\boldsymbol{\omega}_d=-\boldsymbol{K}_{\Theta}\boldsymbol{e}_{\Theta} \tag{5.2}$$

式 5.1 和式 5.2 构成了角度控制环。定义角速度误差$\boldsymbol{e}_{\omega} \triangleq \boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_d$，已知

$$\boldsymbol{J}\dot{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{\tau} \tag{5.3}$$

设计期望力矩$\boldsymbol{\tau}_d$，使得$\lim\limits_{t\to\infty}\|\boldsymbol{e}_{\Theta}(t)\|=0$。设计 PID 控制器

$$\boldsymbol{\tau}_d=-\boldsymbol{K}_{\omega_p}\boldsymbol{e}_{\omega}-\boldsymbol{K}_{\omega_i}\int\boldsymbol{e}_{\omega}-\boldsymbol{K}_{\omega_d}\dot{\boldsymbol{e}}_{\omega} \tag{5.4}$$

式 5.2 和式 5.4 就构成了基于欧拉角的姿态控制器。实际中，姿态控制同样需要考虑饱和，姿态控制器变为

$$\begin{cases}\boldsymbol{e}_{\omega}=\mathrm{sat_{gd}}(\boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{\omega}_d,a_9)\\ \boldsymbol{\tau}_d=\mathrm{sat_{gd}}\left(-\boldsymbol{K}_{\omega_p}\boldsymbol{e}_{\omega}-\boldsymbol{K}_{\omega_i}\int\boldsymbol{e}_{\omega}-\boldsymbol{K}_{\omega_d}\dot{\boldsymbol{e}}_{\omega},a_{10}\right)\end{cases} \tag{5.5}$$

a_9和a_{10}根据实际情况确定。

5. 2 基于旋转矩阵的姿态控制

根据旋转矩阵$\boldsymbol{R}$和期望旋转矩阵$\boldsymbol{R}_d$，定义姿态误差矩阵为

$$\tilde{\boldsymbol{R}} \triangleq \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_d \tag{5.6}$$

由上式可知，当且仅当$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_d$时，$\tilde{\boldsymbol{R}}=\mathrm{I}_3$，由此可得基于旋转矩阵的姿态控制目标为$\lim\limits_{t\to\infty}\left\|\tilde{\boldsymbol{R}}(t)-\mathrm{I}_3\right\|=0$。

针对姿态运动学方程（式 4.13）和姿态动力学方程（式 4.1 中最后一个式子）进行姿态控制器的设计。定义姿态误差为

$$\boldsymbol{e}_R \triangleq \frac{1}{2}\mathrm{vex}\left(\boldsymbol{R}_d^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}-\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{T}_d\right) \tag{5.7}$$

其中 vex 函数的定义为

$$\mathrm{vex}([\mathbf{x}]_\times) \triangleq \mathbf{x}$$

角速度误差为

$$\boldsymbol{e}_{\omega} \triangleq \boldsymbol{\omega}-\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_d\boldsymbol{\omega}_d \tag{5.8}$$

小角度假设下，$\boldsymbol{\omega}_d=\dot{\Theta}_d$为期望的角速度，一般情况下可以忽略，则$\boldsymbol{e}_{\omega}=\boldsymbol{\omega}$。基于以上定义，设计如下 PD 控制器：

$$\boldsymbol{\tau}_d=-\boldsymbol{K}_R\boldsymbol{e}_R-\boldsymbol{K}_{\omega}\boldsymbol{e}_{\omega} \tag{5.9}$$

上面的控制只能在悬停位置附近保证系统稳定，为获得更大范围的稳定性，通过引入误差校正项，设计如下非线性控制器：

$$\boldsymbol{\tau}_d=-\boldsymbol{K}_R\boldsymbol{e}_R-\boldsymbol{K}_{\omega}\boldsymbol{e}_{\omega}-\boldsymbol{J}([\boldsymbol{\omega}]_\times\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_d\boldsymbol{\omega}_d-\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{R}_d\dot{\boldsymbol{\omega}}_d) \tag{5.10}$$

6 仿真

基于模型式（2.10），使用位置控制器式（4.17）和式（4.22），使用姿态控制器式（5.5），使用 python 环境进行仿真实验，代码、参数设置见附录。仿真结果如下图所示：

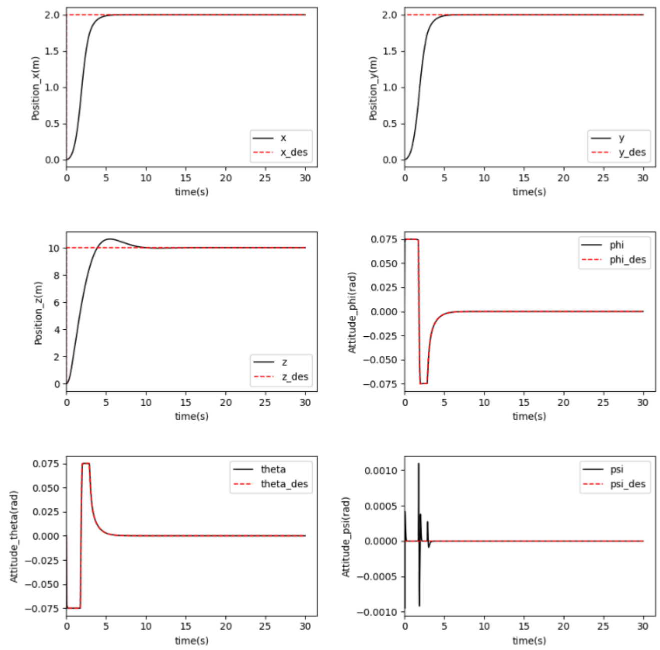

图 6.1 位置定点控制仿真结果

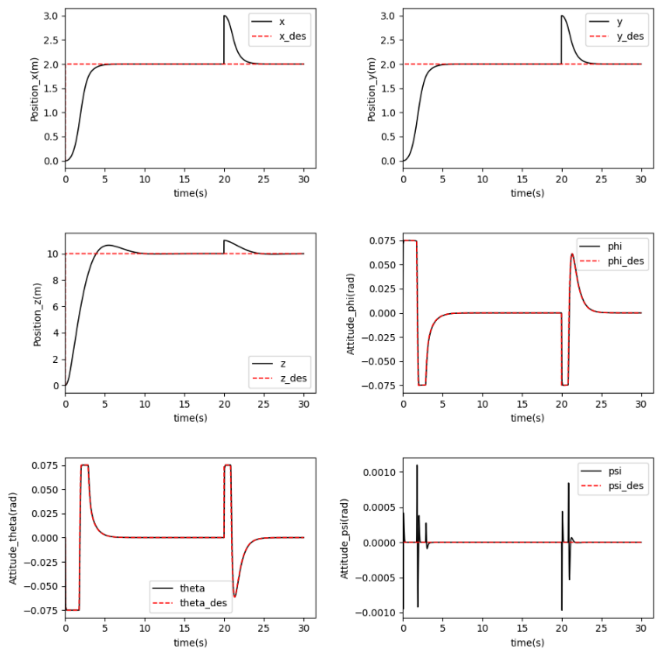

图 6.2 位置定点控制位置扰动仿真结果

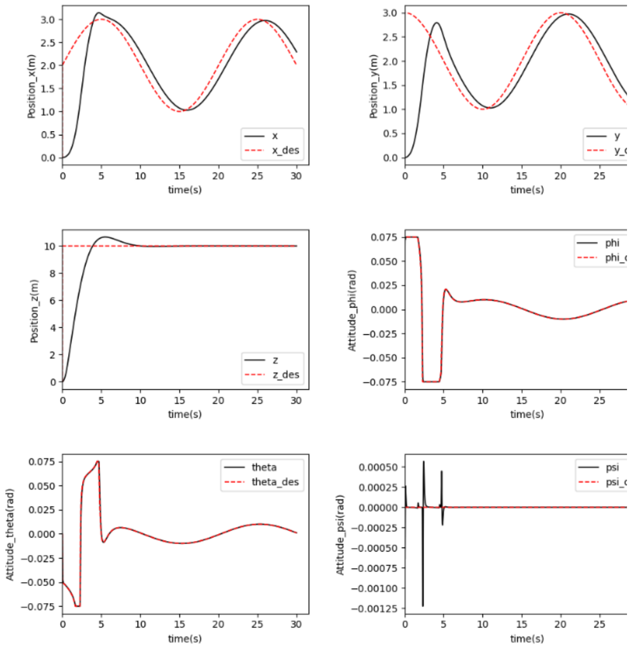

图 6.3 位置跟踪控制仿真结果

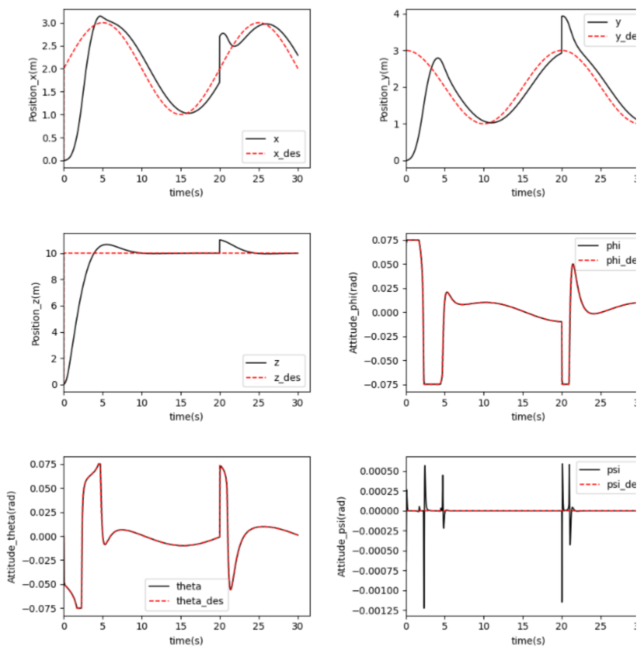

图 6.3 位置跟踪控制加位置扰动仿真结果

由仿真结果图可以看出，位置控制器响应速度快，控制精度高，满足要求可以进行实机实验。

参考文献

[1] 全权, 《多旋翼飞行器设计与控制》.

附录

无人机仿真所用模型参数：

质量(kg)	转动惯量矩阵$\boldsymbol{J}=\mathrm{diag}(J_{xx},J_{yy},J_{zz})$（kg*m^2）			
1.5	$J_{xx}=1.866e-2$、$J_{yy}=1.866e-2$、$J_{zz}=4.203e-2$			
轴距（m）	电机螺旋桨转动惯量（kg*m^2）	机身阻力系数 (N/(m/s)^2)	单桨综合拉力系数 (N/(rad/s)^2)	单桨综合力矩系数 (N·m/(rad/s)^2)
0.45	1.15e-5	6.579e-2	1.472e-6	1.421e-8