主定理简单证明：

$$T(n) = aT(n/b) + f(n), \quad n = b^k \quad T(1) = C_0 \quad f(n) = n^d, \quad k = \log_b n$$

$$= a\{aT(n/b^2) + (\tfrac{n}{b})^d\} + n^d$$

$$= a^2T(n/b^2) + a(n/b)^d + n^d$$

$$= a^kT(n/b^k) + a^{k-1}(n/b^{k-1})^d + \cdots + a^1(n/b^1)^d + a^0(n/b^0)^d$$

$$= C_0a^k + n^d \underbrace{\{(a/b^d)^{k-1} + \cdots + (a/b^d)^1 + (a/b^d)^0\}}_{\text{等比数列，记为}Q}$$

如果 $a = b^d$: $T(n) = C_0a^k + kn^d = C_0a^{\log_b n} + \log_b n\, n^d$

$$= C_0 n^{\log_b a} + n^d \log_b n = C_0 n^d + n^d \log_b n \in \Theta(n^d \log_b n)$$

如果 $a \neq b^d$: 需要讨论 Q 的复杂度.

✓ 分析一般的等比数列： $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = m$

if $a > 1$ $\quad m \in \Theta(a^n)$

if $a < 1$ $\quad m \in \Theta(1)$

> 比如 $1 + 10 + 10^2 + 10^3 = 1111$
> 为 10^3 的级别
> $1 + 0.1 + 0.1^2 + 0.1^3 = 1.111$
> 为 1.0 的级别

✓ 为了便于理解上述结论，也可视等比数列的各项为函数 $f(0) \cdots f(n)$ 即 $m = f(0) + \cdots + f(n)$

m 的增长次数由 $f(0) \cdots f(n)$ 中增长最快的决定.

因此： if $a > b^d$ $\quad Q \in \Theta((a/b^d)^{k-1}) \in \Theta(\underbrace{\tfrac{b^d}{a}}_{\text{常数}}(a/b^d)^k) = \Theta((a/b^d)^k)$

$$T(n) \in \Theta(C_0a^k + n^d(a/b^d)^k)$$

$$\in \Theta(a^k + (\tfrac{n}{b^k})^d \cdot a^k)$$

$$= \Theta(a^k)$$

$$= \Theta(a^{\log_b n}) = \Theta(n^{\log_b a})$$

if $a < b^d$ $\quad Q \in \Theta(1)$

$$T(n) \in \Theta(C_0a^k + n^d)$$

$$\in \Theta(a^k + n^d)$$

$$= \Theta(n^{\log_b a} + n^d)$$

$$\in \Theta(n^d)$$

> $\because a < b^d$
> $\therefore \log_b a < \log_b b^d$
> 即 $\log_b a < d$

注：整个证明过程和利用等比数列求和公式证明方法（课堂上讲的）没有实质性的差别。