第 2 章 行列式与矩阵的秩-小结

1、知识结构

- 行列式
  - 定义
    - 逆序数
    - 行列式定义
    - 子式、余子式、代数余子式
  - 性质
    - 6 个性质，3 个推论
  - 计算方法
    - 定义法
    - 目标行列式法
      - 九类可直接求出的行列式
    - 降阶法
    - 加边法
    - 拆分法
    - 递推法
    - 归纳法
    - 二类特殊行列式
      - “么”字形行列式
      - “爪”字形列式
  - 应用
    - Cramer 法则
- 秩与相抵
  - 定义
    - 矩阵秩的定义
    - 矩阵相抵的定义
  - 求矩阵秩
  - 相抵标准形
  - 应用
    - 利用秩判定线性方程组的解

2、行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

$$= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \quad \text{假设} i_1 i_2 \cdots i_n \text{是取定的某个} n \text{阶排列}$$

$$= \sum_{i_1 i_2 \cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)+\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n} \quad \text{假设} j_1 j_2 \cdots j_n \text{是取定的某个} n \text{阶排列}$$

二阶和三阶行列式的对角线法则

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

注意，三阶以上行列式不满足对角线法则.

3、行列式的性质

性质 1 $D = D^{\mathrm{T}}$（行列互换，行列式的值不变）

性质 2 如果行列式中两行(列)互换，行列式的值只改变一个符号.

$$\begin{array}{c|c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a_{k1}} & \boldsymbol{a_{k2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{kn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ k\text{行} \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \xlongequal{R_{ik}} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a_{k1}} & \boldsymbol{a_{k2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{kn}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{a_{i1}} & \boldsymbol{a_{i2}} & \cdots & \boldsymbol{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 1 行列式若有两行(列)对应元素全相等，则行列式为零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ i\text{行} \\ \\ t\text{行} \\ \\ \\ \end{array} = 0$$

性质 3 提取行列式行(列)公因子

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 2 若行列式中有一行(列)的元素全为零，则行列式为零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质 4 若行列式中有两行(列)元素对应成比例，则行列式为零.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

性质 5 分行(列)相加性

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 3 分多个行(列)相加.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1}+\cdots+h_{i1} & b_{i2}+c_{i2}+\cdots+h_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in}+\cdots+h_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{i1} & h_{i2} & \cdots & h_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

性质 6 行列式的某一行（列）元素加上另一行（列）对应元素的l倍，行列式不变，即$i \neq t$时

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+la_{t1} & a_{i2}+la_{t2} & \cdots & a_{in}+la_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i\text{行} \\ \\ t\text{行} \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4、行列式按行(列)展开

4.1 行列式按某一行(列)展开

行列式按某一行(列)展开

$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1,2,\cdots,n) \qquad$ 按第i行展开

$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1,2,\cdots,n) \qquad$ 按第j列展开

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{matrix} A_{11} & \cdots & A_{1j} & \cdots & A_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{i1} & \cdots & A_{ij} & \cdots & A_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nj} & \cdots & A_{nn} \end{matrix}, \quad \begin{matrix} \text{其中}A_{ij}\text{为}a_{ij}\text{的代数余子式} \\ i,j = 1,2,\cdots,n \end{matrix}$$

注意，通常在下面情况下使用该公式：

1、当某一行(列)只有一个元素或二个元素不为零时，按该行(列)展开；

2、当某一行(列)的所有代数余子式都比较容易计算时，按该行(列)展开. 参看后面例 5.10.2.

3、已知一个展开式，写出它对应的行列式，再通过求该行列式的值来求该展开式的值. 参看例 4.1.1.

行列式某一行(列)的各元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零

$a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \cdots + a_{kn}A_{in} = 0 \qquad (i \neq k)$

$a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \cdots + a_{nk}A_{nj} = 0 \qquad (j \neq k)$

例 4.1.1 已知

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

若记M_{ij}, A_{ij}分别为D中元素a_{ij}的余子式和代数余子式，计算$2A_{11} + 3M_{12} + 2M_{13} - A_{14}$.

解

$2A_{11} + 3M_{12} + 2M_{13} - A_{14} = 2A_{11} - 3A_{12} + 2A_{13} - A_{14}$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{C_{12}}{=\!=} - \begin{vmatrix} -1 & -3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \times (-1) \times 1 \times 1 \times 4 = 4$$

4.2 行列式按多行(列)展开-拉普拉斯(Laplace)定理

设$|A|$为n阶行列式，任取定其中k行(列)$(1 \le k < n)$，则由这k行(列)构成的一切k阶子式与它们所对应的代数余子式乘积之和等于$|A|$，即

$$|A| = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n} D\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \dots j_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \dots j_k \end{pmatrix}$$

其中$1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n$. (按第$i_1, i_2, \cdots, i_k$行展开)

或

$$|A| = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} D\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \dots j_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \dots j_k \end{pmatrix}$$

其中$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$. (按第$j_1, j_2, \cdots, j_k$列展开)

例如，四阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

第 1 行和第 2 行组成的所有 2 阶子式和代数余子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}, \quad (-1)^{(1+2)+(1+4)} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}, \quad (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix}, \quad (-1)^{(1+2)+(2+4)} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}, \quad (-1)^{(1+2)+(3+4)} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \times (-1)^{(1+2)+(1+2)} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \times (-1)^{(1+2)+(1+3)} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{34} \\ a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} \times (-1)^{(1+2)+(1+4)} \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \times (-1)^{(1+2)+(2+3)} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{14} \\ a_{22} & a_{24} \end{vmatrix} \times (-1)^{(1+2)+(2+4)} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{33} \\ a_{41} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \times (-1)^{(1+2)+(3+4)} \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}$$

注意，通常在下面情况下使用该公式：

1、当某$i_1,i_2,\cdots,i_k$行(列)不为零的子式只有一个或二个时，按这k行(列)展开；

2、当某$i_1,i_2,\cdots,i_k$行(列)的所有子式和代数余子式都比较容易计算时，按这k行(列)展开.

例 4.2.1(1) 计算 4 阶行列式——按第 1,2 行(列)展开

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\times(-1)^{(1+2)+(1+2)}\begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(a_{33}a_{44}-a_{34}a_{43})$$

例 4.2.1(2) 计算 4 阶行列式——按第 1,3 行(或第 1,2 列)展开

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}\times(-1)^{(1+3)+(1+2)}\begin{vmatrix} a_{23} & a_{24} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=-(a_{11}a_{32}-a_{12}a_{31})(a_{23}a_{44}-a_{24}a_{43})$$

例 4.2.1(3) 计算 4 阶行列式——按第 1,4 行(列)展开

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}\times(-1)^{1+4+1+4}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}a_{44}-a_{14}a_{41})(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$$

或按第 2,3 行(列)展开

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}\times(-1)^{2+3+2+3}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{41} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=(a_{11}a_{44}-a_{14}a_{41})(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$$

教材例 11 P29

证明$$D=\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\ b_{11} & \cdots & b_{1s} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} & c_{s1} & \cdots & c_{sr} \end{vmatrix}_{r+s}=(-1)^{rs}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}$$

证 $$D=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&a_{11}&\cdots&a_{1r}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&a_{r1}&\cdots&a_{rr}\\ b_{11}&\cdots&b_{1s}&c_{11}&\cdots&c_{1r}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ b_{s1}&\cdots&b_{ss}&c_{s1}&\cdots&c_{sr}\end{vmatrix}_{r+s}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{r1}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix}\times(-1)^{(1+2+\cdots+r)+\left((s+1)+(s+2)+\cdots+(s+r)\right)}\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1s}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{s1}&\cdots&b_{ss}\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{rs}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{r1}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1s}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{s1}&\cdots&b_{ss}\end{vmatrix}$$

同理可证

$$\begin{vmatrix}c_{11}&\cdots&c_{1s}&a_{11}&\cdots&a_{1r}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ c_{r1}&\cdots&c_{rs}&a_{r1}&\cdots&a_{rr}\\ b_{11}&\cdots&b_{1s}&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ b_{s1}&\cdots&b_{ss}&0&\cdots&0\end{vmatrix}=(-1)^{rs}\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1r}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{r1}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}b_{11}&\cdots&b_{1s}\\ \vdots&&\vdots\\ b_{s1}&\cdots&b_{ss}\end{vmatrix}$$

例 4.2.2 计算$2n$阶行列式

$$D_{2n}=\begin{vmatrix}a&&&&&&b\\ &a&&&&b&\\ &&\ddots&&⋰&&\\ &&&a\;\;b&&&\\ &&&b\;\;a&&&\\ &&⋰&&\ddots&&\\ &b&&&&a&\\ b&&&&&&a\end{vmatrix}_{2n}\quad\text{(未标明处为零)}$$

解

利用拉普拉斯定理，按第 1 行和第 $2n$行展开：

$$D_{2n}=\begin{vmatrix}a&b\\ b&a\end{vmatrix}D_{2n-2}=(a^2-b^2)D_{2n-2}\overset{\text{递推}}{=\!=\!=}(a^2-b^2)^2D_{2n-4}=\cdots$$

$$=(a^2-b^2)^{n-1}\begin{vmatrix}a&b\\ b&a\end{vmatrix}=(a^2-b^2)^n$$

5、行列式的计算方法

上面介绍了行列式按一行(列)或多行(列)展开，这是行列式的一种计算方法，它常常与递推方法结合使用，下面介绍其它的计算方法.

5.1 具体阶数的数字行列式

这里所说的“具体阶数的数字行列式”是指只由具体的数字组成，不含字母，且阶数是确定的数字，而不是n阶.

这类行列式是最容易计算的行列式，只要利用行列式的性质，将它化为上三角行列式，即可计算出它的值.

例 5.1.1 计算行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{vmatrix}$$

解一

$$|A|\xlongequal[R_4-R_1]{\substack{R_2-R_1\\R_3-R_1}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&2&2\\0&1&2&3\end{vmatrix}\xlongequal[R_4-R_2]{R_3-R_2}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&2\end{vmatrix}\xlongequal{R_4-R_3}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$$

解二

$$|A|\xlongequal[R_2-R_1]{\substack{R_4-R_3\\R_3-R_2}}\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{vmatrix}=1$$

注意，在求解过程中，如果方法使用得当，会简化求解过程.

例 5.1.2 计算行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\-2&5&-1&3\\3&-1&5&-5\\2&8&-7&-10\end{vmatrix}$$

解

$$|A|\xlongequal[R_4-2R_1]{\substack{R_2+2R_1\\R_3-3R_1}}\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\0&-13&25&17\\0&26&-34&-26\\0&26&-33&-24\end{vmatrix}\xlongequal[R_4+2R_2]{R_3-R_4}\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\0&-13&25&17\\0&0&-1&-2\\0&0&17&10\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{R_4+17R_3}\begin{vmatrix}1&-9&13&7\\0&-13&25&17\\0&0&-1&-2\\0&0&0&-24\end{vmatrix}=1\times(-13)\times(-1)\times(-24)=-312$$

例 5.1.3 计算行列式

$$|A|=\begin{vmatrix}2&-1&3&4&-5\\4&-2&7&8&-7\\-6&4&-9&-2&3\\3&-2&4&1&-2\\-2&6&5&4&-3\end{vmatrix}$$

解

$$|A|=\begin{vmatrix}2&-1&3&4&-5\\4&-2&7&8&-7\\-6&4&-9&-2&3\\3&-2&4&1&-2\\-2&6&5&4&-3\end{vmatrix}\xlongequal[C_4+4C_2]{C_1+2C_2}\begin{vmatrix}0&-1&3&0&-5\\0&-2&7&0&-7\\2&4&-9&14&3\\-1&-2&4&-7&-2\\10&6&5&28&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{R_3+2R_4}\begin{vmatrix}0&-1&3&0&-5\\0&-2&7&0&-7\\0&0&-1&0&-1\\-1&-2&4&-7&-2\\10&6&5&28&-3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第 4 列展开}]{\text{按第 1 列和}}(-1)^{4+5+1+4}\begin{vmatrix}-1&-7\\10&28\end{vmatrix}\begin{vmatrix}-1&3&-5\\-2&7&-7\\0&-1&-1\end{vmatrix}$$

$$=42\begin{vmatrix}-1&3&-5\\-2&7&-7\\0&-1&-1\end{vmatrix}\xlongequal{C_2-C_3}42\begin{vmatrix}-1&8&-5\\-2&14&-7\\0&0&-1\end{vmatrix}=-42\begin{vmatrix}-1&8\\-2&14\end{vmatrix}=-84$$

注意，这个解法使用 Laplace 定理通过降阶来求解，也可以像前面的例子那样，利用行列式性质将它化为上三角行列式求解，但这样求解过程比较繁琐，容易出错.

5.2 字母行列式

例 5.2 计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1&2+a_1&\cdots&n+a_1\\1+a_2&2+a_2&\cdots&n+a_2\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1+a_n&2+a_n&\cdots&n+a_n\end{vmatrix}$$

解

1）当$n=1$时，

$D_n=|1+a_1|=1+a_1$

2）当$n=2$时，

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 2+a_1\\ 1+a_2 & 2+a_2\end{vmatrix}\xlongequal{C_2-C_1}\begin{vmatrix}1+a_1 & 1\\ 1+a_2 & 1\end{vmatrix}=a_1-a_2$$

3）当$n>2$时，

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 2+a_1 & \cdots & n+a_1\\ 1+a_2 & 2+a_2 & \cdots & n+a_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1+a_n & 2+a_n & \cdots & n+a_n\end{vmatrix}\xlongequal[C_3-C_1]{C_2-C_1}\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & n+a_1\\ 1+a_2 & 1 & 1 & \cdots & n+a_2\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1+a_n & 1 & 1 & \cdots & n+a_n\end{vmatrix}=0$$

5.3 定义法

教材例 4 P19 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=(-1)^{\tau(12\cdots(n-1)n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

能够采用定义法求解的行列式是一些比较特殊的行列式，大部分行列式都无法采用定义法求解.

5.4 目标行列式法-九类可直接求出的行列式

根据行列式的性质，将行列式化为特殊的行列式(三角行列式、范德蒙德行列式等，共有九类).

(1) $$D=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(2) $$D=\begin{vmatrix}a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{12} & a_{22} & 0 & \cdots & 0\\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

(3) $$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n-2,3} & \cdots & a_{n-2,n-1} & a_{n-2,n} \\ 0 & a_{n-1,2} & a_{n-1,3} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

(4) $$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2,1} & a_{n-2,2} & a_{n-2,3} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n-1,2}a_{n1}$$

(5) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1r} & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sr} & b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}$$

(6) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} & c_{s1} & \cdots & c_{sr} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}$$

(7) $$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\ b_{11} & \cdots & b_{1s} & c_{11} & \cdots & c_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} & c_{s1} & \cdots & c_{sr} \end{vmatrix}=(-1)^{rs}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}$$

(8) $$\begin{vmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1r} & a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{s1} & \cdots & c_{sr} & a_{r1} & \cdots & a_{rr} \\ b_{11} & \cdots & b_{1s} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{rs}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{ss} \end{vmatrix}$$

(9) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

例 5.4.1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 2^5-2 & 2^4-2 & 2^3-2 & 2^2-2 \\ 3^5-3 & 3^4-3 & 3^3-3 & 3^2-3 \\ 4^5-4 & 4^4-4 & 4^3-4 & 4^2-4 \\ 5^5-5 & 5^4-5 & 5^3-5 & 5^2-5 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 2^5-2 & 2^4-2 & 2^3-2 & 2^2-2 \\ 3^5-3 & 3^4-3 & 3^3-3 & 3^2-3 \\ 4^5-4 & 4^4-4 & 4^3-4 & 4^2-4 \\ 5^5-5 & 5^4-5 & 5^3-5 & 5^2-5 \end{vmatrix} \xlongequal[C_3-C_4]{\substack{C_1-C_2 \\ C_2-C_3}} \begin{vmatrix} 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2 \\ 2\cdot 3^4 & 2\cdot 3^3 & 2\cdot 3^2 & 2\cdot 3 \\ 3\cdot 4^4 & 3\cdot 4^3 & 3\cdot 4^2 & 3\cdot 4 \\ 4\cdot 5^4 & 4\cdot 5^3 & 4\cdot 5^2 & 4\cdot 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \begin{vmatrix} 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \\ 4^3 & 4^2 & 4 & 1 \\ 5^3 & 5^2 & 5 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[C_{23}]{C_{14}} 2880 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2^2 & 2^3 \\ 1 & 3 & 3^2 & 3^3 \\ 1 & 4 & 4^2 & 4^3 \\ 1 & 5 & 5^2 & 5^3 \end{vmatrix}$$

$$= 2880\cdot(5-4)\cdot(5-3)\cdot(5-2)\cdot(4-3)\cdot(4-2)\cdot(3-2) = 34560$$

例 5.4.2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} \xlongequal{R_3+R_1} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{公因子}]{\text{提取}} (a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{R_{23}} -(a+b+c)\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{R_{12}} (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$$

例 5.4.2 计算行列式

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} a & a^2 & bc \\ b & b^2 & ac \\ c & c^2 & ab \end{vmatrix} \xlongequal{C_3+(a+b+c)C_1} \begin{vmatrix} a & a^2 & a^2+ab+bc+ac \\ b & b^2 & b^2+ab+bc+ac \\ c & c^2 & c^2+ab+bc+ac \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_3-C_2}\begin{vmatrix} a & a^2 & ab+bc+ac \\ b & b^2 & ab+bc+ac \\ c & c^2 & ab+bc+ac \end{vmatrix} \xlongequal[\text{公因子}]{\text{提取}} (ab+bc+ac)\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_{23}} -(ab+bc+ac)\begin{vmatrix} a & 1 & a^2 \\ b & 1 & b^2 \\ c & 1 & c^2 \end{vmatrix} \xlongequal{C_{12}} (ab+bc+ac)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=(ab+bc+ac)(b-a)(c-a)(c-b)$$

5.5 降阶法

根据行列式展开定理将行列式降阶. 参看例 5.1.3.

5.6 加边法

根据行列式的特点，把原行列式加上一行一列再进行计算.

例 5.6.1 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}, a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix} \xlongequal{\text{加边}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[R_{n+1}-R_1]{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1 \\ \vdots}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{n+1} \xlongequal{C_1+\sum_{i=2}^{n+1}\frac{C_i}{a_{i-1}}} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=a_1\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

例 5.6.2 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}, x_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{加边}}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ 0 & a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[R_{n+1}-a_nR_1]{\substack{R_2-a_1R_1 \\ R_3-a_2R_1 \\ \vdots}}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ -a_1 & x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_3 & 0 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal{C_1+\sum_{i=2}^{n+1}\frac{1}{x_{i-1}}a_{i-1}C_i}\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x_i} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x_i}\right)\prod_{j=1}^{n}x_j$$

例 5.6.3 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}, x_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{加边}}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ 0 & a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ R_{n+1}-R_1}]{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}}\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}_{n+1}$$

$$\xlongequal{\text{再加边}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & -1 & a_2 & -a_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -1 & a_n & a_n & \cdots & -a_n \end{vmatrix}_{n+2}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ C_{n+2}-C_1}]{\substack{C_3-C_1 \\ C_4-C_1}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & -1 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & -1 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & -1 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}_{n+2}$$

$$\xlongequal[C_2-\sum_{\iota=3}^{n+2}\frac{1}{2a_{\iota-2}}C_\iota]{C_1+\sum_{i=3}^{n+2}\frac{1}{2}C_i}\begin{vmatrix} 1-\dfrac{n}{2} & \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{a_i} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}a_i & 1-\dfrac{n}{2} & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{vmatrix}_{n+2}$$

$$=(-2)^n a_1a_2\cdots a_n\left[\left(1-\frac{n}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right)\right]$$

5.7 拆分法

将行列式适当地拆分成若干行列式的和，然后再计算.

例 5.7.1 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}, x_i\neq 0, i=1,2,\cdots,n$$

解

$$\begin{vmatrix} x_1+a_1^2 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3a_1 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第 1 列}]{\text{拆分}} a_1\begin{vmatrix} a_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ a_2 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ a_3 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} x_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ 0 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$=a_1\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & a_1a_2 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & x_2+a_2^2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ 0 & a_3a_2 & x_3+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_na_2 & a_na_3 & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{行列式的第 2 列}]{\text{拆分第 2 个}} a_1\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} x_1 & 0 & a_1a_3 & \cdots & a_1a_n \\ 0 & x_2 & a_2a_3 & \cdots & a_2a_n \\ 0 & 0 & x_3+a_3^2 & \cdots & a_3a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a_na_3 & \cdots & x_n+a_n^2 \end{vmatrix}$$

$$=\cdots$$

$$\xlongequal[\text{行列式的第 }3,\cdots,n\text{列}]{\text{依次拆分第 3 个}} a_1\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_n & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}+\cdots$$

$$+a_n\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & a_2 \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{按第 }1,2,\cdots,n\text{行展开}]{\text{前面}n\text{个行列式分别}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}x_j+\prod_{j=1}^{n}x_j=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{x_i}\right)\prod_{j=1}^{n}x_j$$

例 5.7.2 设

$$D_n=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

A_{ij}为D_n中元素a_{ij}在D_n中的代数余子式，证明：

$$\begin{vmatrix}a_{11}+x_1&a_{12}+x_2&\cdots&a_{1n}+x_n\\a_{21}+x_1&a_{22}+x_2&\cdots&a_{2n}+x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}+x_1&a_{n2}+x_2&\cdots&a_{nn}+x_n\end{vmatrix}=D_n+\sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{n}A_{ij}$$

证

$$\begin{vmatrix}a_{11}+x_1&a_{12}+x_2&\cdots&a_{1n}+x_n\\a_{21}+x_1&a_{22}+x_2&\cdots&a_{2n}+x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}+x_1&a_{n2}+x_2&\cdots&a_{nn}+x_n\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{第 1 列}]{\text{拆分}}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}+x_2&\cdots&a_{1n}+x_n\\a_{21}&a_{22}+x_2&\cdots&a_{2n}+x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}+x_2&\cdots&a_{nn}+x_n\end{vmatrix}+x_1\begin{vmatrix}1&a_{12}+x_2&\cdots&a_{1n}+x_n\\1&a_{22}+x_2&\cdots&a_{2n}+x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&a_{n2}+x_2&\cdots&a_{nn}+x_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}+x_2&\cdots&a_{1n}+x_n\\a_{21}&a_{22}+x_2&\cdots&a_{2n}+x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}+x_2&\cdots&a_{nn}+x_n\end{vmatrix}+x_1\begin{vmatrix}1&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\1&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}+x_2&\cdots&a_{1n}+x_n\\a_{21}&a_{22}+x_2&\cdots&a_{2n}+x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}+x_2&\cdots&a_{nn}+x_n\end{vmatrix}+x_1\sum_{i=1}^{n}A_{i1}$$

$$\xlongequal[\text{行列式的第 2 列}]{\text{拆分第 1 个}}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}+x_n\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}+x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}+x_n\end{vmatrix}+x_2\begin{vmatrix}a_{11}&1&\cdots&a_{1n}+x_n\\a_{21}&1&\cdots&a_{2n}+x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&1&\cdots&a_{nn}+x_n\end{vmatrix}+x_1\sum_{i=1}^{n}A_{i1}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}+x_n\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}+x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}+x_n\end{vmatrix}+x_2\begin{vmatrix}a_{11}&1&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&1&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&1&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}+x_1\sum_{i=1}^{n}A_{i1}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}+x_n\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}+x_n\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}+x_n\end{vmatrix}+x_2\sum_{i=1}^{n}A_{i2}+x_1\sum_{i=1}^{n}A_{i1}$$

$$= \cdots$$

$$= D_n + \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{n} A_{ij}$$

5.8 递推法

通常将行列式按某行或某列展开，得到一递推公式，然后再进行计算.

教材例 8 (P25)范德蒙德行列式

证明当$n \geq 2$时

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}_n = \prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)$$

证

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \end{vmatrix}_n \xlongequal[\substack{R_{n-1} - a_n R_{n-2} \\ \vdots \\ R_2 - a_n R_1}]{R_n - a_n R_{n-1}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 - a_n & a_2 - a_n & \cdots & a_{n-1} - a_n & 0 \\ a_1^2 - a_1 a_n & a_2^2 - a_2 a_n & \cdots & a_{n-1}^2 - a_{n-1} a_n & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-2} - a_1^{n-3} a_n & a_2^{n-2} - a_2^{n-3} a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-2} - a_{n-1}^{n-3} a_n & 0 \\ a_1^{n-1} - a_1^{n-2} a_n & a_2^{n-1} - a_2^{n-2} a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-1} - a_{n-1}^{n-2} a_n & 0 \end{vmatrix}_n$$

按第n列展开

$$= (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} a_1 - a_n & a_2 - a_n & \cdots & a_{n-1} - a_n \\ a_1^2 - a_1 a_n & a_2^2 - a_2 a_n & \cdots & a_{n-1}^2 - a_{n-1} a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} - a_1^{n-3} a_n & a_2^{n-2} - a_2^{n-3} a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-2} - a_{n-1}^{n-3} a_n \\ a_1^{n-1} - a_1^{n-2} a_n & a_2^{n-1} - a_2^{n-2} a_n & \cdots & a_{n-1}^{n-1} - a_{n-1}^{n-2} a_n \end{vmatrix}_{n-1}$$

再提取公因子得

$$= (-1)^{1+n} (a_1 - a_n)(a_2 - a_n) \cdots (a_{n-1} - a_n)$$

$$\times\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1})D_{n-1}$$

从而有

$$D_n = (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-1})D_{n-1}$$

$$D_{n-1} = (a_{n-1} - a_1)(a_{n-1} - a_2)\cdots(a_{n-1} - a_{n-2})D_{n-2}$$

…………………

$$D_3 = (a_3 - a_1)(a_3 - a_2)D_2$$

$$D_2 = (a_2 - a_1)$$

因此

$$\begin{aligned} D_n = {} & (a_n - a_1)(a_n - a_2)\cdots(a_n - a_{n-2})(a_n - a_{n-1}) \\ & \cdot (a_{n-1} - a_1)\cdots(a_{n-1} - a_{n-3})(a_{n-1} - a_{n-2}) \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & \cdot (a_3 - a_1)(a_3 - a_2) \\ & \cdot (a_2 - a_1) \end{aligned}$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n}(a_j - a_i)$$

教材例 9（P26） 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & a \\ a & a & \cdots & a & a+x_n \end{vmatrix}_n$$

解

$$D_n = \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & a \\ a & a+x_2 & \cdots & a & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & a & \cdots & a+x_{n-1} & a \\ a & a & \cdots & a & a+x_n \end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ R_n - R_1}]{\substack{R_2 - R_1 \\ R_3 - R_1}} \begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a & a \\ -x_1 & x_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -x_1 & 0 & \cdots & x_{n-1} & 0 \\ -x_1 & 0 & \cdots & 0 & x_n \end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal[\text{一列展开}]{\text{按最后}} a\times(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -x_1 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_1 & 0 & \cdots & x_{n-1} \\ -x_1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} + (-1)^{n+n}x_n\begin{vmatrix} a+x_1 & a & \cdots & a \\ -x_1 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -x_1 & 0 & \cdots & x_{n-1} \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[\text{按最后一行展开}]{\text{第一个行列式}}(-1)^{n+1}a\times(-x_1)\times(-1)^{n-1+1}\begin{vmatrix} x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & x_{n-1} \end{vmatrix}_{n-2}+x_nD_{n-1}$$

$= x_1x_2\cdots x_{n-1}a + x_nD_{n-1}$

由此可得

$D_n = x_1x_2\cdots x_{n-1}a + x_nD_{n-1}$

$D_{n-1} = x_1x_2\cdots x_{n-2}a + x_{n-1}D_{n-2}$

$D_{n-2} = x_1x_2\cdots x_{n-3}a + x_{n-2}D_{n-3}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$D_2 = x_1a + x_2D_1$

$D_1 = a + x_1$

因此

$D_n = x_1x_2\cdots x_{n-1}a + x_nD_{n-1}$

$= x_1x_2\cdots x_{n-1}a + x_n(x_1x_2\cdots x_{n-2}a + x_{n-1}D_{n-2})$

$= x_1x_2\cdots x_{n-1}a + x_1x_2\cdots x_{n-2}ax_n + x_{n-1}x_nD_{n-2}$

$\cdots\cdots\cdots\cdots$

$= x_1x_2\cdots x_{n-1}a + x_1x_2\cdots x_{n-2}ax_n + \cdots + x_1a\cdots x_{n-1}x_n + x_2\cdots x_nD_1$

$= x_1x_2\cdots x_{n-1}a + x_1x_2\cdots x_{n-2}ax_n + \cdots + x_1a\cdots x_{n-1}x_n + x_2\cdots x_n(a + x_1)$

$= x_1x_2\cdots x_n + x_1x_2\cdots x_{n-1}a + x_1x_2\cdots x_{n-2}ax_n + \cdots + x_1a\cdots x_{n-1}x_n + ax_2\cdots x_n$

$$= \prod_{i=1}^{n}x_i + a\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}x_j$$

例 5.8.1 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}_n \text{，其中}\alpha\neq\beta$$

解一

$$D_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal[\text{一行展开}]{\text{按最后}}(-1)^{n+n}(\alpha+\beta)\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+(-1)^{n+n-1}\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha+\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha\beta \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[\text{按最后一列展开}]{\text{第二个行列式}}(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$

由此可得

$$D_n=(\alpha+\beta)D_{n-1}-\alpha\beta D_{n-2}$$
$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta(D_{n-1}-\alpha D_{n-2})=\cdots=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)$$

因为

$$D_2=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}=\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$$
$$D_1=|\,\alpha+\beta\,|=\alpha+\beta$$

则

$$D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^{n-2}(D_2-\alpha D_1)=\beta^n \quad (1)$$
$$D_n-\beta D_{n-1}=\alpha(D_{n-1}-\beta D_{n-2})=\cdots=\alpha^{n-2}(D_2-\beta D_1)=\alpha^n \quad (2)$$

由(1)和(2)两式组成如下方程组

$$\begin{cases} D_n-\alpha D_{n-1}=\beta^n \\ D_n-\beta D_{n-1}=\alpha^n \end{cases}$$

因为$\alpha\neq\beta$，解上面的方程组得

注意这种解法

$$D_n=\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}$$

解二

在解一中得到(1)递推公式后按下面方法计算：

$$\begin{aligned} D_n&=\alpha D_{n-1}+\beta^n \\ &=\alpha(\alpha D_{n-2}+\beta^{n-1})+\beta^n \\ &=\alpha^2D_{n-2}+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n \\ &=\cdots \\ &=\alpha^{n-1}D_1+\beta^2\alpha^{n-2}+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n \\ &=\alpha^{n-1}(\alpha+\beta)+\beta^2\alpha^{n-2}+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n \\ &=\alpha^n+\beta\alpha^{n-1}+\cdots+\alpha\beta^{n-1}+\beta^n \end{aligned}$$

这种做法不需要$\alpha\neq\beta$条件

例 5.8.2 关于递推公式$D_n=aD_{n-1}+bD_{n-2}$的求解方法

这部分内容选读

解

① 当$b=0$时，则

$$D_n=aD_{n-1}=a^2D_{n-1}\cdots=a^{n-1}D_1$$

② 当$b\neq 0$时，则

$$D_n-aD_{n-1}-bD_{n-2}=0$$

考虑特征方程：

$$x^2-ax-b=0 \quad \cdots\cdots\cdots \ (1)$$

令$\Delta=a^2+4b$

（i）当$\Delta\neq 0$时，(1)式有两个不相等的根u_1和u_2，

$$u_1+u_2=a，\ u_1u_2=-b$$

所以

$$D_n-(u_1+u_2)D_{n-1}+u_1u_2D_{n-2}=0$$

$$D_n-u_1D_{n-1}=u_2(D_{n-1}-u_1D_{n-2})=\cdots={u_2}^{n-2}(D_2-u_1D_1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

同理可得

$$D_n-u_2D_{n-1}={u_1}^{n-2}(D_2-u_2D_1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

由(2)式和(3)式解得：

$$D_n=\frac{{u_1}^{n-1}(D_2-u_2D_1)-{u_2}^{n-1}(D_2-u_1D_1)}{u_1-u_2}$$

（ii）当$\Delta=0$时，(1)式有两个相等的根$u_1=u_2=u$，

$$u=u_1=\frac{a}{2}，\ u^2=u_1^2=-b$$

$$D_n-uD_{n-1}=u(D_{n-1}-uD_{n-2})=\cdots=u^{n-2}(D_2-uD_1) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots (4)$$

由此可得

$$D_n=uD_{n-1}+u^{n-2}(D_2-uD_1)$$

$$=u\big(uD_{n-2}+u^{n-3}(D_2-uD_1)\big)+u^{n-2}(D_2-uD_1)$$

$$=u^2D_{n-2}+2u^{n-2}(D_2-uD_1)$$

$$=\cdots$$

$$=u^{n-2}D_2+(n-2)u^{n-2}(D_2-uD_1)$$

$$=u^{n-2}\big((n-1)D_2-(n-2)uD_1\big)$$

5.9 归纳法

运用数学归纳法证明或计算.

教材例 8 (P25)范德蒙德行列式

证明当$n\geq 2$时

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}_n=\prod_{1\le i<j\le n}(a_j-a_i)$$

证 使用数学归纳法证明

1）当$n=2$时

$$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1$$

结论成立.

2）假设当$n=k-1$时结论成立，即

$$D_{k-1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1}\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{k-1}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{k-2} & a_2^{k-2} & \cdots & a_{k-1}^{k-2}\end{vmatrix}_{k-1}=\prod_{1\le i<j\le k-1}(a_j-a_i)$$

则当$n=k$时，

$$D_k=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{k-1}^2 & a_k^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_1^{k-2} & a_2^{k-2} & \cdots & a_{k-1}^{k-2} & a_k^{k-2}\\ a_1^{k-1} & a_2^{k-1} & \cdots & a_{k-1}^{k-1} & a_k^{k-1}\end{vmatrix}_k \xlongequal[\substack{\vdots\\ R_2-a_kR_1}]{\substack{R_k-a_kR_{k-1}\\ R_{k-1}-a_kR_{k-2}}}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ a_1-a_k & a_2-a_k & \cdots & a_{k-1}-a_k & 0\\ a_1^2-a_1a_k & a_2^2-a_2a_k & \cdots & a_{k-1}^2-a_{k-1}a_k & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_1^{k-2}-a_1^{k-3}a_k & a_2^{k-2}-a_2^{k-3}a_k & \cdots & a_{k-1}^{k-2}-a_{k-1}^{k-3}a_k & 0\\ a_1^{k-1}-a_1^{k-2}a_k & a_2^{k-1}-a_2^{k-2}a_k & \cdots & a_{k-1}^{k-1}-a_{k-1}^{k-2}a_k & 0\end{vmatrix}_k$$

按第k列展开

$$=(-1)^{1+k}\begin{vmatrix}a_1-a_k & a_2-a_k & \cdots & a_{k-1}-a_k\\ a_1^2-a_1a_k & a_2^2-a_2a_k & \cdots & a_{k-1}^2-a_{k-1}a_k\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{k-2}-a_1^{k-3}a_k & a_2^{k-2}-a_2^{k-3}a_k & \cdots & a_{k-1}^{k-2}-a_{k-1}^{k-3}a_k\\ a_1^{k-1}-a_1^{k-2}a_k & a_2^{k-1}-a_2^{k-2}a_k & \cdots & a_{k-1}^{k-1}-a_{k-1}^{k-2}a_k\end{vmatrix}_{k-1}$$

提取公因子得

$$=(-1)^{1+k}(a_1-a_k)(a_2-a_k)\cdots(a_{k-1}-a_k)$$

$$\times\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1}\\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_{k-1}^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1^{k-2} & a_2^{k-2} & \cdots & a_{k-1}^{k-2}\end{vmatrix}_{k-1}$$

$$=(a_k-a_1)(a_k-a_2)\cdots(a_k-a_{k-1})D_{k-1}$$

$$= (a_k - a_1)(a_k - a_2)\cdots(a_k - a_{k-1}) \prod_{1\le i<j\le k-1} (a_j - a_i)$$

$$= \prod_{1\le i<j\le k} (a_j - a_i)$$

结合 1) 和 2) 知，等式对一切的自然数$n \ge 1$都成立.

例 5.9.1 利用归纳法证明：

$$\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}_n = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}，\quad \sin\alpha \ne 0$$

证

i) $D_1 = 2\cos\alpha = \dfrac{2\cos\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin(1+1)\alpha}{\sin\alpha}$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 \\ 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = 4\cos^2\alpha - 1 = 2\cos^2\alpha + \cos 2\alpha$$

$$= \frac{2\cos^2\alpha\sin\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin(2+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

即当$n = 1,2$ 时，结论成立.

ii) 假设结论对$n \le k$时成立，即有

$$D_{k-1} = \frac{\sin(k-1+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

$$D_k = \frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha}$$

则

$$D_{k+1} = \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}_{k+1}$$

$$\xlongequal[\text{一行展开}]{\text{按最后}} 2\cos\,\alpha D_k - \begin{vmatrix} 2\cos\,\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\,\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\,\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\,\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_k$$

$$\xlongequal[\text{按最后一列展开}]{\text{第二个行列式}} 2\cos\,\alpha D_k - D_{k-1}$$

$$= 2\cos\,\alpha \frac{\sin(k+1)\,\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin(k-1+1)\,\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{2\cos\alpha\sin(k+1)\,\alpha - \sin(k-1+1)\,\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{2\cos\alpha\sin(k+1)\,\alpha - \sin(k+1-1)\,\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{2\cos\alpha\sin(k+1)\,\alpha - \sin(k+1)\,\alpha\cos\alpha + \cos(k+1)\,\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{\sin(k+1)\,\alpha\cos\alpha + \cos(k+1)\,\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}$$
$$= \frac{\sin(k+1+1)\,\alpha}{\sin\alpha}$$

这就证明了假设当$n=k-1,k$时原等式成立，则$n=k+1$时，等式也成立.

结合 i)和 ii)可得，等式对一切的自然数n都成立.

思考题

利用归纳法证明：

$$\begin{vmatrix} \cos\,\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\,\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\,\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\,\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\,\alpha \end{vmatrix}_n = \cos n\alpha$$

5.10 “么”字形行列式

下面行列式的形状像“么”字，故称它为“么”字形行列式.

$$\begin{vmatrix} & & & c_n & a_n \\ & & \iddots & \iddots & \\ & c_3 & a_3 & & \\ c_2 & a_2 & & & \\ a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_n & c_n & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & a_3 & c_3 & \\ & & & a_2 & c_2 \\ b_n & \cdots & b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & & \\ & c_3 & a_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & c_n & a_n \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} b_n & \cdots & b_3 & b_2 & a_1 \\ & & & a_2 & c_2 \\ & & a_3 & c_3 & \\ & \iddots & \iddots & & \\ a_n & c_n & & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} b_n & & & & a_n \\ \vdots & & & \iddots & c_n \\ b_3 & & a_3 & \iddots & \\ b_2 & a_2 & c_3 & & \\ a_1 & c_2 & & & \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_1 & c_2 & & & \\ b_2 & a_2 & c_3 & & \\ b_3 & & a_3 & \ddots & \\ & & & \ddots & c_n \\ b_n & & & & a_n \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_n & & & & b_n \\ c_n & \ddots & & & \vdots \\ & \ddots & a_3 & & b_3 \\ & & c_3 & a_2 & b_2 \\ & & & c_2 & a_1 \end{vmatrix},\begin{vmatrix} & & & c_2 & a_1 \\ & & c_3 & a_2 & b_2 \\ & \iddots & a_3 & & b_3 \\ c_n & \iddots & & & \vdots \\ a_n & & & & b_n \end{vmatrix}$$

对于这种行列式，可以利用“么”字的一个撇消去另一个撇，就可把行列式化成“三角形”行列式. 此方法称为“么”字两撇互消.

消去第一撇的方向是沿着“厶”的方向，从后向前，利用a_n消去c_n，然后再用a_{n-1}消去c_{n-1}，依次类推.

例 5.10.1 计算$n+1(n \geq 1)$阶行列式

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\vdots \\ C_n + C_{n-1}}]{\substack{C_2 + C_1 \\ C_3 + C_2}} \begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^n (n+1) a_1 a_2 \cdots a_n$$

采用“么”字两撇互消方法适合具有一定特殊性的“么”字形行列式，对于一般的“么”字形行列式,这种方法并不可行. 下面例子是一般的“么”字形行列式,对于这种一般的“么”字形行列式，可以按“么”字的底边展开，虽然这种方法有点麻烦，但它是一种普适的方法.

例 5.10.2 计算$n(n > 1)$阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_n & c_n & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & a_3 & c_3 & \\ & & & a_2 & c_2 \\ b_n & \cdots & b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

解

$$D_n=\begin{vmatrix} a_n & c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & c_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 & c_2 \\ b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \cdots & b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}$$ 按最后一行展开

$$=(-1)^{n+1}b_n\begin{vmatrix} c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & c_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 & c_2 \end{vmatrix}_{n-1}$$ 这是下三角行列式

$$+(-1)^{n+2}b_{n-1}\begin{vmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{n-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 & c_2 \end{vmatrix}_{n-1}$$ 这是下三角行列式

$$+(-1)^{n+3}b_{n-2}\begin{vmatrix} a_n & c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 & c_2 \end{vmatrix}_{n-1}$$ 这是$\begin{vmatrix} A_2 & O \\ O & B_{n-3} \end{vmatrix}$类型的行列式

$$+(-1)^{n+4}b_{n-3}\begin{vmatrix} a_n & c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & c_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-2} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{n-3} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-4} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 & c_2 \end{vmatrix}_{n-1}$$ 这是$\begin{vmatrix} A_3 & O \\ O & B_{n-4} \end{vmatrix}$类型的行列式

$+\cdots$

$$+(-1)^{n+(n-1)}b_2\begin{vmatrix} a_n & c_n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & c_{n-1} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \end{vmatrix}_{n-1}$$ 这是上三角行列式

$$+(-1)^{n+n}a_1\begin{vmatrix} a_n & c_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-1} & c_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-2} & c_{n-2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{n-3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_3 & c_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_2 \end{vmatrix}_{n-1}$$ 这是上三角行列式

$=(-1)^{n+1}b_nc_2c_3\ldots c_n$

$+(-1)^{n+2}b_{n-1}c_2c_3\ldots c_{n-1}a_n$

$+(-1)^{n+3}b_{n-2}c_2c_3\ldots c_{n-2}a_{n-1}a_n$

$+(-1)^{n+3}b_{n-3}c_2c_3\dots c_{n-3}a_{n-2}a_{n-1}a_n$
$+\cdots$
$+(-1)^{n+(n-1)}b_2c_2a_3a_4\dots a_{n-1}a_n$
$+(-1)^{n+n}a_1a_2\dots a_{n-1}a_n$
$=a_1a_2\dots a_{n-1}a_n-b_2c_2a_3a_4\dots a_{n-1}a_n+\cdots+(-1)^{n-3}b_{n-2}c_2c_3\dots c_{n-2}a_{n-1}a_n$
$+(-1)^{n-2}b_{n-1}c_2c_3\dots c_{n-1}a_n+(-1)^{n-1}b_nc_2c_3\dots c_n$

例 5.10.3 计算$n(n>1)$阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} & & & c_n & a_n \\ & & ⋰ & ⋰ & \\ & c_3 & a_3 & & \\ c_2 & a_2 & & & \\ a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{vmatrix}$$

解 将该行列式的最后一列依次与相邻列互换，将它换到第 1 列，进行了$n-1$次互换. 再将新得到的行列式的最后一列依次与相邻列互换，将它换到第 2 列，进行了$n-2$次互换. 依次这样互换，最后可得到下面行列式

$$\begin{vmatrix} a_n & c_n & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & a_3 & c_3 & \\ & & & a_2 & c_2 \\ b_n & \cdots & b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

共互换了$1+2+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$次. 由此可得

$$D_n=\begin{vmatrix} & & & c_n & a_n \\ & & ⋰ & ⋰ & \\ & c_3 & a_3 & & \\ c_2 & a_2 & & & \\ a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_n & c_n & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & a_3 & c_3 & \\ & & & a_2 & c_2 \\ b_n & \cdots & b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(a_1a_2\dots a_{n-1}a_n-b_2c_2a_3a_4\dots a_{n-1}a_n+\cdots+(-1)^{n-3}b_{n-2}c_2c_3\dots c_{n-2}a_{n-1}a_n$$
$$+(-1)^{n-2}b_{n-1}c_2c_3\dots c_{n-1}a_n+(-1)^{n-1}b_nc_2c_3\dots c_n)$$

说明：在这个例子的解法中通过列互换，将行列式换成已知可求值的行列式. 要熟练掌握这种方法. 例如

$$\begin{vmatrix} a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{nn} & \cdots & a_{n2} & a_{n1} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{nn} & \cdots & a_{n2} & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{2n} & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ a_{1n} & \cdots & a_{12} & a_{11} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例 5.10.4 计算$n(n>1)$阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

说明：这是一个“么”型行列式，如果采用“么”字两撇互消方法，即消去x右边的-1，并不容易求解，但按最后一行展开是一种比较好的解法.

解

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}_n \quad \text{按最后一行展开}$$

$$=(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1} +(-1)^{n+2}a_{n-1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+(-1)^{n+3}a_{n-2}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1} +\cdots+(-1)^{2n}(x+a_1)\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=a_n+a_{n-1}x+x^2a_{n-2}+\cdots+a_2x^{n-2}+a_1x^{n-1}+x^n$$

5.11 “爪”字形行列式(或“箭”行列式)

下面行列式的形状像“爪”字，故称它为“爪”字形行列式.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ c_2 & a_2 & & & \\ c_3 & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ c_n & & & & a_n \end{vmatrix},\begin{vmatrix} b_n & \cdots & b_3 & b_2 & a_1 \\ & & & a_2 & c_2 \\ & & a_3 & & c_3 \\ & ⋰ & & & \vdots \\ a_n & & & & c_n \end{vmatrix},\begin{vmatrix} c_n & & & & a_n \\ \vdots & & & ⋰ & \\ c_3 & & a_3 & & \\ c_2 & a_2 & & & \\ a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n \end{vmatrix},\begin{vmatrix} a_n & & & & c_n \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & a_3 & & c_3 \\ & & & a_2 & c_2 \\ b_n & \cdots & b_3 & b_2 & a_1 \end{vmatrix}$$

对于这种行列式，可以利用对角线消去行列式中的“横线”或“竖线”，均可把行列式化成“三角形”行列式. 此方法称为“爪”字对角消横竖.

例 5.11.1 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a_2} & & & \\ 1 & & \boldsymbol{a_3} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & \boldsymbol{a_n} \end{vmatrix}$$

其中$a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$.

解

$$D_n=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a_2} & & & \\ 1 & & \boldsymbol{a_3} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & \boldsymbol{a_n} \end{vmatrix} \xlongequal{C_1-\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{1}{a_j}C_j} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a_2} & & & \\ 1 & & \boldsymbol{a_3} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 1 & & & & \boldsymbol{a_n} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a_1}-\sum\limits_{j=2}^{n}\frac{1}{a_j} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \boldsymbol{a_2} & & & \\ 0 & & \boldsymbol{a_3} & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & \boldsymbol{a_n} \end{vmatrix} = a_2a_3\cdots a_n\left(\boldsymbol{a_1}-\sum_{j=2}^{n}\frac{1}{a_j}\right)$$

例 5.11.2 计算n阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

解一 降阶递推法

$$D_n=\begin{vmatrix} a_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{一列展开}]{\text{按最后}}(-1)^{n+1}c_n\begin{vmatrix} b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} + a_nD_{n-1}$$

$$\xlongequal[\text{按最后一行展开}]{\text{第一个行列式}}(-1)^{n+1}\times(-1)^n b_nc_n\begin{vmatrix} a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{vmatrix}_{n-1} + a_nD_{n-1}$$

$$\xlongequal[\text{按最后一行展开}]{\text{第一个行列式}}a_nD_{n-1} - a_2a_3\cdots a_{n-1}(b_nc_n)$$

$$\begin{aligned}
&= a_n(a_{n-1}D_{n-2} - a_2a_3\cdots a_{n-2}(b_{n-1}c_{n-1})) - a_2a_3\cdots a_{n-1}(b_nc_n) \\
&= a_{n-1}a_nD_{n-2} - a_2a_3\cdots a_{n-2}(b_{n-1}c_{n-1})a_n - a_2a_3\cdots a_{n-1}(b_nc_n) \\
&= \cdots \\
&= a_2a_3\cdots a_nD_1 - (b_2c_2)a_3\cdots a_{n-1}a_n - \cdots - a_2\cdots a_{n-2}(b_{n-1}c_{n-1})a_n - a_2\cdots a_{n-1}(b_nc_n) \\
&= a_1a_2a_3\cdots a_n - (b_2c_2)a_3\cdots a_{n-1}a_n - \cdots - a_2\cdots a_{n-2}(b_{n-1}c_{n-1})a_n - a_2\cdots a_{n-1}(b_nc_n)
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \left(a_1 - \sum_{j=2}^{n}\frac{b_jc_j}{a_j}\right)a_2a_3\cdots a_n,\ a_i \neq 0,\ i = 2,\ 3,\ \cdots,\ n \\ -a_2\cdots a_{i-1}(b_ic_i)a_{i+1}\cdots a_n,\ a_i = 0\left(i\text{为整数且 } 2 \leq i \leq n\right) \\ 0,\ a_2, a_3, \cdots, a_n\text{中至少有两个为 } 0 \end{cases}$$

解二 按“横线”或“竖线”展开

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n \\ b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} \xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一列}}$$

$$+(-1)^{1+1}a_1\begin{vmatrix} a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{n-1} \qquad \text{这是对角形行列式}$$

$$+(-1)^{2+1}b_2\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ 0 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{n-1}$$ 这是上三角行列式

$$+(-1)^{3+1}b_3\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+(-1)^{4+1}b_4\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ a_2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}_{n-1}$$

$+\cdots$

$$+(-1)^{(n-1)+1}b_{n-1}\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-2} & c_{n-1} & c_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+(-1)^{n+1}b_n\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ a_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

第 1 个行列式$= a_2a_3\cdots a_n$

第 2 个行列式$= c_2a_3\cdots a_n$

第 3 个行列式按第 2 列展开$= c_3\times(-1)^{1+2}a_2a_4\cdots a_n = -a_2c_3a_4\cdots a_n$

第 4 个行列式按第 3 列展开$= c_4\times(-1)^{1+3}a_2a_3a_5\cdots a_n = a_2a_3c_4a_5\cdots a_n$

$+\cdots$

第$n-1$个行列式按第$n-2$列展开$= c_{n-1}\times(-1)^{1+(n-2)}a_2a_3\cdots a_n$

$= (-1)^{n-1}a_2a_3\cdots a_{n-2}c_{n-1}a_n$

第n个行列式按第$n-1$列展开$= c_n\times(-1)^{1+(n-1)}a_2a_3\cdots a_{n-1}$

$= (-1)^n a_2a_3\cdots a_{n-2}a_{n-1}c_n$

所以

D_n

$$=a_1a_2a_3\cdots a_n-(b_2c_2)a_3\cdots a_{n-1}a_n-\cdots-a_2\cdots a_{n-2}(b_{n-1}c_{n-1})a_n-a_2\cdots a_{n-1}(b_nc_n)$$

$$=\begin{cases}\left(a_1-\sum_{j=2}^{n}\frac{b_jc_j}{a_j}\right)a_2a_3\cdots a_n，a_i\neq 0，i=2，3，\cdots，n\\ -a_2\cdots a_{i-1}(b_ic_i)a_{i+1}\cdots a_n，a_i=0\left(i\text{为整数且 }2\leq i\leq n\right)\\ 0，a_2,a_3,\cdots,a_n\text{中至少有两个为 }0\end{cases}$$

解三 **消去**“横线”或“竖线”

当$a_i\neq 0$，$i=2$，3，$\cdots$，n时

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n\\ b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ b_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_n & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}\xlongequal{C_1-\sum_{j=2}^{n}\frac{b_jC_j}{a_j}}\begin{vmatrix} a_1-\sum_{j=2}^{n}\frac{b_jc_j}{a_j} & c_2 & c_3 & \cdots & c_n\\ 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}$$

$$=\left(a_1-\sum_{j=2}^{n}\frac{b_jc_j}{a_j}\right)a_2a_3\cdots a_n$$

当$a_2,a_3,\cdots,a_n$中至少有一个为 0 时，假设当$a_i=0$，$2\leq i\leq n$时，则

$$\begin{vmatrix} a_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{i-1} & c_i & c_{i+1} & \cdots & c_n\\ b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ b_3 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{i-1} & 0 & 0 & \cdots & a_{i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ b_i & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ b_{i+1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i+1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第}i\text{行}}(-1)^{i+1}b_i\begin{vmatrix} c_2 & c_3 & \cdots & c_{i-1} & c_i & c_{i+1} & \cdots & c_n\\ a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{i+1} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第}i-1\text{列}}(-1)^{i+1}b_i\times(-1)^{1+i-1}c_i\begin{vmatrix} a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{i-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$= -a_2\cdots a_{i-1}(b_i c_i)a_{i+1}\cdots a_n$$

当$a_2, a_3, \cdots, a_n$中至少有两个为 0 时，由上式可知，该行列式的值为 0.

注意，这是最一般的“爪”字形行列式的求解方法，有些行列式在化简过程中会得到“爪”字形行列式，一旦化简到“爪”字形行列式，就可按上面的方法计算. 下面的例子就是这种情况.

例 5.11.3 计算n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & b & b & \cdots & b \\ b & \boldsymbol{a} & b & \cdots & b \\ b & b & \boldsymbol{a} & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}$$

解

$$D \xlongequal{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1 \\ \vdots \\ R_n-R_1}} \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_1+\sum_{j=2}^{n} C_j} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

思考题

1、计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1 & b & b & \cdots & b \\ b & a_2 & b & \cdots & b \\ b & b & a_3 & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a_n \end{vmatrix},\ a_i \neq b$$

5.12 综合

5.12.1 一题多解

例 5.12.1.1 计算$n(n>1)$阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

说明：关于行列式阶数记号

D_n的下标n表示D_n的阶数，D_k表示k阶行列式.

$$D_k=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_k & a_{k-1} & a_{k-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}_k ，k=1,2,\cdots,n-1,n$$

解一 按第一列展开

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$=x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}_{n-1} +(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$=xD_{n-1}+a_n$

这式子对任何都n成立，故有

$$\begin{aligned} D_n&=xD_{n-1}+a_n \\ &=x(xD_{n-2}+a_{n-1})+a_n \\ &=x^2D_{n-2}+a_{n-1}x+a_n \\ &=\cdots \\ &=x^{n-1}D_1+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \end{aligned}$$

因$D_1=x+a_1$，所以

$$D_n=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

递推法：此题的解题方法常称为**递推法**

递推公式：$D_n = xD_{n-1} + a_n$

关于此题的思考

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

是否可按第一行展开，或按最后一行展开，或按最后一列展开？

解二 可化为下三角形求得

$$D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\underline{\underline{C_1 + \sum_{i=2}^{n} x^{i-1} C_i}} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ y & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}_n$$

其中$y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$

再按第 1 列展开

$$D_n = (-1)^{n+1} y \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (-1)^{2n} y = y = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

解三

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_3 & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ C_1+xC_2}]{\substack{C_{n-1}+xC_n \\ C_{n-2}+xC_{n-1}}}\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ y_n & y_{n-1} & y_{n-2} & \cdots & y_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

其中：

$y_1=x+a_1$

$y_2=xy_1+a_2$

$y_3=xy_2+a_3$

$\cdots$

$y_n=xy_{n-1}+a_n$

$y_n=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

$$D_n=(-1)^{n+1}y_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$=(-1)^{n+1}\times y_n\times(-1)^{n-1}$

$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$

解四

$$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}_n \quad \text{按最后一行展开}$$

$$= (-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1} +(-1)^{n+2}a_{n-1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+(-1)^{n+3}a_{n-2}\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}_{n-1} + \cdots + (-1)^{2n}(x+a_1)\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= a_n + a_{n-1}x + x^2a_{n-2} + \cdots + a_2x^{n-2} + a_1x^{n-1} + x^n$$

例 5.2.1.2 计算$n(n>2)$阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-2} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}_n$$

注：这是一个三对角行列式.

解一 降阶递归法

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-2} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1-a_n \end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal[\text{一行展开}]{\text{按最后}} (-1)^{n+n}(1-a_n)\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_{n-1} \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$+(-1)^{n+n-1}\times(-1)\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & a_n \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[\text{按最后一列展开}]{\text{第二个行列式}}(1-a_n)D_{n-1}+a_nD_{n-2}$$

由此可得：

$$\begin{aligned} D_n-D_{n-1} &= -a_n(D_{n-1}-D_{n-2}) = a_na_{n-1}(D_{n-2}-D_{n-3}) = \cdots \\ &= (-1)^{n-2}a_na_{n-1}\cdots a_3(D_2-D_1) \end{aligned}$$

因为

$$D_2=\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 \\ -1 & 1-a_2 \end{vmatrix} = 1-a_1+a_1a_2$$

$$D_1=|1-a_1|=1-a_1$$

$$D_2-D_1=a_1a_2$$

从而

$$D_n-D_{n-1}=(-1)^na_na_{n-1}\cdots a_2a_1$$

$$\begin{aligned} D_n &= (-1)^na_na_{n-1}\cdots a_2a_1+D_{n-1} \\ &= (-1)^na_na_{n-1}\cdots a_2a_1+(-1)^{n-1}a_{n-1}\cdots a_2a_1+D_{n-2} \\ &= \cdots \\ &= (-1)^na_na_{n-1}\cdots a_2a_1+(-1)^{n-1}a_{n-1}\cdots a_2a_1+\cdots+(-1)^2a_2a_1+D_1 \\ &= (-1)^na_na_{n-1}\cdots a_2a_1+(-1)^{n-1}a_{n-1}\cdots a_2a_1+\cdots+a_2a_1-a_1+1 \end{aligned}$$

解二

$$D_n=\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0+0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0+0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0+0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-2} & a_{n-1} & 0+0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_{n-1} & 0+a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1+(-a_n) \end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal[\text{一列拆开}]{\text{按最后}}\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-2} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}_n$$

这种方法我们称为**拆分法**

$$+\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-2} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_{n-1} & a_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -a_n \end{vmatrix}_n$$

$$= A_n + B_n$$

$$A_n \xlongequal[\text{一列展开}]{\text{按最后}}\begin{vmatrix} 1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 1-a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-a_{n-2} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a_{n-1} \end{vmatrix}_{n-1} = D_{n-1}$$

$$B_n \xlongequal[\substack{\vdots \\ R_1+R_2}]{\substack{R_{n-1}+R_n \\ R_{n-2}+R_{n-1}}}\begin{vmatrix} -a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & -a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & -a_n \end{vmatrix}_n = (-1)^n a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1$$

由此可得：

$$D_n = A_n + B_n = D_{n-1} + (-1)^n a_n a_{n-1}\cdots a_2 a_1$$

接下来与解法一做法相同.

解三

$$
D_n \xlongequal[R_n+R_{n-1}]{\substack{R_2+R_1\\ R_3+R_2\\ \vdots}}
\begin{vmatrix}
1-a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
-a_1 & 1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
-a_1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots\\
-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} & 0\\
-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n\\
-a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}_n
$$

这是“么”字形行列式，按第 1 列展开

$$
=(1-a_1)\begin{vmatrix}
1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}_{n-1}
$$

这个行列式 = 1

$$
-(-a_1)\begin{vmatrix}
a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}_{n-1}
$$

这个行列式 = a_2

$$
+(-a_1)\begin{vmatrix}
a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}_{n-1}
$$

这个行列式 = a_2a_3

$+\cdots$

$$
+(-a_1)\begin{vmatrix}
a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
1 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\
\vdots & & & \vdots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{n-1} & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & a_n
\end{vmatrix}_{n-1}
$$

这个行列式 = $a_2a_3\cdots a_n$

$$
=(1-a_1)-(-a_1)a_2+(-a_1)a_2a_3+\cdots+(-1)^{n-1}(-a_1)a_2a_3\cdots a_n
$$
$$
=1-a_1+a_1a_2-a_1a_2a_3+\cdots+(-1)^n a_1a_2\cdots a_n
$$

这个解法的优点是不用递推就可得到结果

例 5.12.1.3 计算$(n>1)$阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$

解一

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

该行列式的特点是每行所有元素的和都相等

$$\xlongequal[\text{第 1 列并提取公因子}]{\text{将第 2 至}n\text{列加到}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ R_2-R_1}]{\substack{R_n-R_{n-1} \\ R_{n-1}-R_{n-2}}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一列}} \frac{n(n+1)}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ R_2-R_1}]{\substack{R_n-R_{n-1} \\ R_{n-1}-R_{n-2}}} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ C_n+C_{n-1}}]{\substack{C_2+C_1 \\ C_3+C_2}} \frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[\text{元素相乘}]{\text{辅对角线}} \frac{n(n+1)}{2}\times(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\times(-1)\times(-n)^{n-2}$$

$$=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\times(-1)^{n-1}\times\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$

解二

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ R_2-R_1}]{\substack{R_n-R_{n-1} \\ R_{n-1}-R_{n-2}}} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ C_n-C_1}]{\substack{C_2-C_1 \\ C_3-C_1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_1+\sum_{i=2}^{n}\frac{C_i}{n}}\begin{vmatrix} \frac{n+1}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一列}}\frac{n+1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[\text{元素相乘}]{\text{辅对角线}}\frac{n+1}{2}\times(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\times(-n)^{n-1}$$

$$=(-1)^{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}\times(-1)^{n-1}\times\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$$

例 5.12.1.4 计算$n(n>1)$阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

解一

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal[\text{并提取公因子}]{C_1+\sum_{j=2}^{n}C_j}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\1&1&2&\cdots&n-2&n-1\\1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&4&5&\cdots&1&2\\1&3&4&\cdots&n&1\end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots\\R_{n-1}-R_n}]{\substack{R_1-R_2\\R_2-R_3}}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}0&1&1&\cdots&1&1\\0&1-n&1&\cdots&1&1\\0&1&1-n&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&1&1&\cdots&1-n&1\\1&3&4&\cdots&n&1\end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal[\text{展开}]{\text{按第一列}}(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\1-n&1&\cdots&1&1\\1&1-n&\cdots&1&1\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\1&1&\cdots&1-n&1\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots\\R_n-R_1}]{\substack{R_2-R_1\\R_3-R_1}}(-1)^{n+1}\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\-n&0&\cdots&0&0\\0&-n&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&-n&0\end{vmatrix}_{n-1}$$

$$\xlongequal[\text{一列展开}]{\text{按最后}}(-1)^{n+1}\times\frac{n(n+1)}{2}\times(-1)^{1+n-1}\times\begin{vmatrix}-n&0&\cdots&0\\0&-n&\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&-n\end{vmatrix}_{n-2}$$

$$=(-1)\times\frac{n(n+1)}{2}\times(-n)^{n-2}=\frac{1}{2}(-n)^{n-1}(n+1)$$

解二

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}_n$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ R_{n-1}-R_n}]{\substack{R_1-R_2 \\ R_2-R_3}} \begin{vmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ C_{n-1}-C_n}]{\substack{C_1-C_n \\ C_2-C_n}} \begin{vmatrix} -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 1 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_n+\sum_{i=1}^{n-1}\frac{C_i}{n}} \begin{vmatrix} -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & \frac{n+1}{2} \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{一列展开}]{\text{按最后}} \frac{n+1}{2} \begin{vmatrix} -n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -n \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= \frac{n+1}{2}(-n)^{n-1} = \frac{1}{2}(-n)^{n-1}(n+1)$$

5.12.2 所有行(列)元素和都相等的行列式

例 5.12.2.1 计算$n(n>1)$阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & b & b & \cdots & b \\ b & \boldsymbol{a} & b & \cdots & b \\ b & b & \boldsymbol{a} & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & \boldsymbol{a} \end{vmatrix}$$

解

$$D\xlongequal[\text{提取公因子}]{C_1+\sum_{j=2}^{n}C_j}(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{\vdots \\ R_n-R_1}]{\substack{R_2-R_1 \\ R_3-R_1}}(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$
$$=(a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}$$

例 5.12.2.2 求下面多项式的根

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

解

$$P(\lambda)=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ -2 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}\xlongequal{C_1+C_2+C_3}(\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 1 & \lambda-1 & -2 \\ 1 & -2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[R_3-R_1]{R_2-R_1}(\lambda-5)\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$
$$=(\lambda-5)(\lambda+1)^2$$

因此多项式$P(\lambda)$的根为$5,-1$(二重).

例 5.12.2.3 设α,β,γ是三次方程$x^3+px+q=0$的根，计算

$$D=\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \alpha \end{vmatrix}$$

解

$$D=\begin{vmatrix}\alpha&\beta&\gamma\\\gamma&\alpha&\beta\\\beta&\gamma&\alpha\end{vmatrix}\xlongequal{C_1+C_2+C_3}(\alpha+\beta+\gamma)\begin{vmatrix}1&\beta&\gamma\\1&\alpha&\beta\\1&\gamma&\alpha\end{vmatrix}$$

因为α,β,γ是方程$x^3+px+q=0$的根，由根与系数关系知$\alpha+\beta+\gamma=0$，因此$D=0$.

思考题

1、求下面多项式的根

$$P(x)=\begin{vmatrix}x&b&b&\cdots&b\\b&x&b&\cdots&b\\b&b&x&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&x\end{vmatrix}$$

2、计算行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}b&b&\cdots&b&a\\b&b&\cdots&a&b\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\b&a&\cdots&b&b\\a&b&\cdots&b&b\end{vmatrix}$$

5.12.3 其它

例 5.12.3.1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&4\\2&3-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

解一

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&4\\2&3-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal[R_2-2R_3]{R_1-(1-\lambda)R_3}\begin{vmatrix}0&\lambda-3&(3-\lambda)(1+\lambda)\\0&1-\lambda&2\lambda-1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-3)\begin{vmatrix}0&\mathbf{1}&-(1+\lambda)\\0&1-\lambda&2\lambda-1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+1}(\lambda-3)\begin{vmatrix}1&-(1+\lambda)\\1-\lambda&2\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)(2\lambda-1+1-\lambda^2)$$

$$=-\lambda(\lambda-3)(\lambda-2)$$

解二

$$D=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&4\\2&3-\lambda&1\\1&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{法则可得}]{\text{由对角线}}(1-\lambda)^2(3-\lambda)+8-2-4(3-\lambda)-(1-\lambda)+4(1-\lambda)$$

$$=(1-\lambda)^2(3-\lambda)-(3-\lambda)$$
$$=-\lambda(\lambda-3)(\lambda-2)$$

该方法由于展开后的式子比较复杂，容易算错．尽量不要使用该方法计算

例 5.12.3.2 计算$n(n>1)$阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

解

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 2 \\ n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[C_2-C_1]{\substack{C_n-C_{n-1} \\ C_{n-1}-C_{n-2} \\ \vdots}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ n & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[R_n+R_1]{\substack{R_2+R_1 \\ R_3+R_1 \\ \vdots}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ n+1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\text{一行展开}]{\text{按最后}}(-1)^{1+n}(n+1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{vmatrix}_{n-1} = (-1)^{1+n}(n+1)2^{n-2}$$

6、克拉默(Cramer)法则

克拉默(Cramer)法则

设线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

的系数行列$D \neq 0$，则该方程组有唯一解，其解为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}，\ x_2 = \frac{D_2}{D}，\ \cdots，\ x_n = \frac{D_n}{D}$$

其中：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若$a_{ij} \in \mathbb{P}(i,j = 1,2,\cdots,n)$，$\mathbb{P}$为某个数域，则解$x_1, x_2, \cdots, x_n$均属于$\mathbb{P}$.

例 6.1 求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -153 \neq 0$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & -2 \\ -6 & 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 153$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 2 & -6 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 153$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 & -2 \\ 2 & 3 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$D_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -1 & -6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = -153$$

由克拉默法则得：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = -1，\ x_2 = \frac{D_2}{D} = -1，\ x_3 = \frac{D_3}{D} = 0，\ x_4 = \frac{D_4}{D} = 1$$

说明：从这个例子的求解过程可以看出，使用 Cramer 法则求解比较麻烦，并不可取，可以采用 Gauss 消元法或对增广矩阵进行初等行变换化为行最简形的方法求解. 但它适合于一些特殊的线性方程组的求解. 例如下面的例子.

例 6.2 设$a_i \neq a_j (i \neq j,\ i,j = 1,2,\cdots,n)$求解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 & + & a_1x_2 & + & a_1^2x_3 & + & \cdots & + & a_1^{n-1}x_n & = & 1 \\ x_1 & + & a_2x_2 & + & a_2^2x_3 & + & \cdots & + & a_2^{n-1}x_n & = & 1 \\ x_1 & + & a_3x_2 & + & a_3^2x_3 & + & \cdots & + & a_3^{n-1}x_n & = & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & + & a_nx_2 & + & a_n^2x_3 & + & \cdots & + & a_n^{n-1}x_n & = & 1 \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (a_j - a_i) \neq 0$$

$D_1 = D$

$$D_j = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & 1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & 1 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & 1 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & 1 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = 0 \quad (j = 2,3,\cdots,n)$$

故方程组唯一解为：

$x_1 = \dfrac{D_1}{D} = 1$，$x_2 = \dfrac{D_2}{D} = 0$，$\cdots$，$x_n = \dfrac{D_n}{D} = 0$

例 6.3 设$x_1,x_2,\cdots,x_n$是n个互不相同的数，$b_1,b_2,\cdots,b_n$是任意一组给定的数. 证明存在唯一的多项式$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1}$，使得

$$f(x_i) = b_i, i = 1,2,\cdots,n$$

证 由题意知

$$\begin{cases} f(x_1) = a_0 + a_1x_1 + \cdots + a_{n-2}x_1^{n-2} + a_{n-1}x_1^{n-1} = b_1 \\ f(x_2) = a_0 + a_1x_2 + \cdots + a_{n-2}x_2^{n-2} + a_{n-1}x_2^{n-1} = b_2 \\ \qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(x_n) = a_0 + a_1x_n + \cdots + a_{n-2}x_n^{n-2} + a_{n-1}x_n^{n-1} = b_n \end{cases}$$

这是一个关于未知量$a_0,a_1,\cdots,a_{n-2},a_{n-1}$的非齐次线性方程组. 该线性方程组的系数矩阵行列式为

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

因为$x_1,x_2,\cdots,x_n$是n个互不相同的数，则$|A|\neq 0$，从而该线性方程组有唯一解，因此存在唯一的多项式$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-2}x^{n-2}+a_{n-1}x^{n-1}$，使得

$f(x_i)=b_i, i=1,2,\cdots,n$

例 6.4 问λ取何值时，线性方程组只有零解.

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2+\lambda x_3=0 \\ x_1+\lambda x_2+\ \ x_3=0 \\ \lambda x_1+\ \ x_2+\ \ x_3=0 \end{cases}$$

解一

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{R_2-R_1}{\underset{R_3-\lambda R_1}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{vmatrix} \overset{R_3+R_2}{=\!=\!=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(2+\lambda) \end{vmatrix}=-(\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

因为当$D\neq 0$时方程只有零解，所以当$\lambda\neq 1$，且$\lambda\neq -2$时方程只有零解.

7、矩阵的秩与线性方程组解的判断

解线性方程组常用的方法就是中学所学的消元法. 其原理是通过消元将线性方程组化为容易求解的阶梯形线性方程组，该阶梯形方程组与原方程组同解，解此阶梯形方程组即可得原方程组的解. 在第一章，我们引入矩阵的概念，将解线性方程组的消元过程转化为对线性方程组的增广矩阵的初等行变换，这样简化了线性方程组求解过程的表达方式. 这样的方式也使得我们可以方便地利用计算机实施线性方程组的求解. 同时我们也提出如下问题，消元法最后得到的阶梯形方程组中不为零的方程个数是否与消元过程(或矩阵初等变换过程)有关？或者，不为零的方程个数是否为消元过程(或矩阵初等变换过程)的不变量？在第 2 章引入矩阵秩的概念，证明了不为零的方程个数就是增广矩阵的秩，因而它不受消元过程影响.

7.1 秩的定义

矩阵的秩

一个矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$中不为 0 的子式的最大阶数称为这个**矩阵的秩**，记为$r(A)$.

等价定义

若矩阵$A=[a_{ij}]_{m\times n}$存在一个非零的r阶子式，而A的所有$r+1$阶子式(若有)全为零，则称r为这个**矩阵的秩**，记为$r(A)$.

7.2 秩有关的性质

定理 5 设$A \in \mathbb{P}^{m\times n}, 1 \le k \le \min\{m,n\}$，则

1）$r(A) \ge k \iff$ 矩阵A至少存在一个的非零的k阶子式

2）$r(A) \le k \iff A$的所有$k+1$阶子式(若有)全为零

$\iff A$的所有$s(s>k)$阶子式(若有)全为零

定理 6 矩阵的秩是矩阵初等变换的不变量.

定理 7 设$A \in \mathbb{P}^{m\times n}$是任一非零矩阵，

1）均存在整数$1 \le r \le \min\{m,n\}$，使得

$$A \xrightarrow[\text{行变换}]{\text{有限次初等}} \begin{bmatrix} b_{1j_1} & \cdots & b_{1j_2} & \cdots & b_{1j_r} & \cdots & b_{1n} \\ & & b_{2j_2} & \cdots & b_{2j_r} & \cdots & b_{2n} \\ & & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ & & & & b_{rj_r} & \cdots & b_{rn} \\ & O & & & & & \end{bmatrix} \quad (2.5.1)$$

其中$1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$且$\prod_{i=1}^{r} b_{ij_i} \ne 0$. 注意在$j_1$列前面有可能全为 0.

2）当(2.5.1)成立时，$r(A) = r$.

3）矩阵A增加一行(列)，矩阵的秩不变或增加 1.

基于定理 7，我们可以采用下面方法对矩阵求秩.

例 7.2.1 讨论下面矩阵的秩.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2\lambda & \lambda+4 & 3 \end{bmatrix}$$

解

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 2\lambda & \lambda+4 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3-2R_1]{R_2-R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda+1) & \lambda+2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda+2 & 1 \end{bmatrix}$$

- 当$\lambda \ne -1$ 时，且$\lambda \ne -2$ 时，$r(A)=3$；
- 当$\lambda = -2$ 时，$r(A)=3$；
- 当$\lambda = -1$时，$r(A)=2$.

说明：这个例子采用矩阵初等行变换的方法将矩阵化为阶梯形，根据阶梯形矩阵中不为零的行数确定矩阵的秩. 由定理 6 知道，矩阵初等行变换和列变换，都不改变矩阵的秩，如果只是求矩阵的秩，我们不仅可以用矩阵初等行变换，也可以用矩阵初等列变换，因为这两种变换都不会改变矩阵的秩.

7.3 利用系数矩阵与增广矩阵的秩来判定线性方程组的解

在第 1 章 P6 的定理 2 给出了线性方程组解的判定定理. 这是一个非常重要的定理，要熟练掌握.

定理 2 对于任何一个形如(1.1.1)的线性方程组，若它可经有限次初等变换化为(1.2.1)，那么

1）线性方程组当且仅当$c_{r+1}=0$时有解，当且仅当$c_{r+1}\neq 0$时无解.

2）当线性方程组有解时，如果(1.2.1)又经有限次倍乘和倍加初等变换以及移项得到同解的方程(1.3.1)，那么该方程有通解为：

$$\begin{cases} x_{j_1} & = & d_1 & - & c_{1j_{r+1}}t_1 & - & c_{1j_{r+2}}t_2 & - & \cdots & - & c_{1j_n}t_{n-r} \\ x_{j_2} & = & d_2 & - & c_{2j_{r+1}}t_1 & - & c_{2j_{r+2}}t_2 & - & \cdots & - & c_{2j_n}t_{n-r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ x_{j_r} & = & d_r & - & c_{rj_{r+1}}t_1 & - & c_{2j_{r+2}}t_2 & - & \cdots & - & c_{rj_n}t_{n-r} \\ x_{j_{r+1}} & = & t_1 \\ x_{j_r+2} & = & t_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{j_n} & = & t_{n-r} \end{cases}$$

其中$t_1,t_2,\cdots,t_{n-r}\in \mathrm{P}$为任意数.

3）线性方程组有解时，线性方程组当且仅当$r=n$时有唯一解，当且仅当$r<n$时有无穷解.

在第 2 章给出秩的概念后，改成用系数矩阵与增广矩阵的秩来判定线性方程组的解，这就是下面的定理 8(P31).

定理 8 对于任意一个形如(1.1.1)的n元线性方程组，设A与$\overline{A}$分别表示线性方程组的系数矩阵和增广矩阵，则

1）线性方程组(1.1.1)有解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=r(\overline{A})$

线性方程组(1.1.1)无解 $\Leftrightarrow$ $r(A)<r(\overline{A})$，或$r(A)=r(\overline{A})-1$

2）当线性方程组(1.1.1)有解时

(i) (1.1.1)有唯一解 $\Leftrightarrow$ $r(A)=n$

(ii) (1.1.1)有无穷多个解 $\Leftrightarrow$ $r(A)<n$

对于线性方程组的求解，重点掌握系数和常数项中带参数的线性方程组的求解，对于参数的不同取值，会使线性方程组无解或有解，在有解的情况下有可能是唯一解，也有可能是无穷多解. 重点掌握下面例子的求解方法.

例 7.3.1 当λ为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ x_1 & + & \lambda x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2\lambda x_2 & + & (\lambda+4)x_3 & = & 3 \end{cases}$$

无解，有唯一解，有无穷多个解？在有解时，求出解.

解

方法一 采用初等行变换将增广矩阵变为阶梯形矩阵的方法求解

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & 1\\ 2 & 2\lambda & \lambda+4 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行变换可得}]{\text{经过初等}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & \lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda+2 & 1\end{bmatrix}$$

- 当$\lambda\neq-1$ 且$\lambda\neq-2$ 时，$r(\overline{A})=r(A)=3$，方程组有唯一解，同解的方程组为：

$$\begin{cases}x_1 - x_2 + x_3 = 0\\ (\lambda+1)x_2 = 0\\ (\lambda+2)x_3 = 1\end{cases}$$

方程组的解为：

$$\begin{cases}x_1 = \dfrac{\lambda+1}{\lambda+2}\\ x_2 = 0\\ x_3 = \dfrac{1}{\lambda+2}\end{cases}$$

- 当$\lambda=-2$ 时，$r(\overline{A})=3$，$r(A)=2$，$r(\overline{A})\neq r(A)$，方程组无解
- 当$\lambda=-1$时，$r(\overline{A})=r(A)=2$，方程组有无穷多解，同解的方程组为：

$$\begin{cases}x_1 - x_2 + x_3 = 1\\ x_3 = 1\end{cases}$$

方程组的通解为：

$$\begin{cases}x_1 = t\\ x_2 = t\\ x_3 = 1\end{cases}\quad \text{其中}t\text{为任意常数.}$$

方法二 因为方程的个数与未知量的个数相等，因此可采用克拉默法则来判断存在唯一解的情况.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 2 & 2\lambda & \lambda+4\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda+2)$$

- 当$\lambda\neq-1$ 且$\lambda\neq-2$ 时，$|A|\neq0$，由克拉默法则知方程组有唯一解，但用克拉默法则求方程组的解比较麻烦，还是用方法一比较简单.
- 当$\lambda=-2$ 时，方程组为

$$\begin{cases}x_1 - x_2 + x_3 = 1\\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1\\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 3\end{cases}$$

增广矩阵$\overline{A}$化为阶梯形矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & 1\\ 2 & -4 & 2 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行变换可得}]{\text{经过初等}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

由此可知$r(\overline{A})=3$，$r(A)=2$，$r(\overline{A})\neq r(A)$，方程组无解.

- 当$\lambda=-1$时，方程为

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

增广矩阵$\overline{A}$化为阶梯形矩阵

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3 & 3\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{行变换可得}]{\text{经过初等}}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

由此可知$r(\overline{A})=r(A)=2$，方程组有无穷多解，同解的方程组为：

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

方程组的通解为：

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \end{cases}\quad \text{其中}t\text{为任意常数.}$$

说明：方法二的求解方法只适合系数矩阵是方阵. 该方法根据系数行列式$|A|$是否为零来判断线性方程组是否有唯一解. 但从上面的解题过程中发现，在线性方程组有唯一解的情况下，由于采用 Cramer 求解比较麻烦，一般不采用，除非是线性方程组比较特殊. 通常情况下我们还是采用方法一的求解方法. 但如果线性方程组是齐次的，则方法二会比方法一简单，请看下面的例子.

例 7.3.2 当λ为何值时，线性方程组

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 + (3-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时求出它的解.

解

$$|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -3\\ 2 & 3-\lambda & -2\\ -2 & -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}\xlongequal{R_3+R_2}\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -3\\ 2 & 3-\lambda & -2\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -3\\ 2 & 3-\lambda & -2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{C_2-C_3}(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 5 & -3\\ 2 & 5-\lambda & -2\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda & 5\\ 2 & 5-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(\lambda^2-7\lambda)$$

$$=\lambda(1-\lambda)(\lambda-7)$$

（1）当$\lambda\neq 0,\lambda\neq 1,\lambda\neq 7$时，$|A|\neq 0$，该方程组有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

（2）当$\lambda=0$时，

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}2-\lambda & 2 & -3 & 0\\ 2 & 3-\lambda & -2 & 0\\ -2 & -2 & 3-\lambda & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -2 & 0\\ -2 & -2 & 3 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 2 & -3 & 0\\ 2 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 2 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 2 & -3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2 & 0 & -5 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，所以该方程组有无穷多解，通解为

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{5}{2}t\\ x_2=-t\\ x_3=t\end{cases}$$

其中t为任意常数.

(3) 当$\lambda=1$时，

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}2-\lambda & 2 & -3 & 0\\ 2 & 3-\lambda & -2 & 0\\ -2 & -2 & 3-\lambda & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 0\\ 2 & 2 & -2 & 0\\ -2 & -2 & 2 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 0\\ 2 & 2 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 2 & -3 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，所以该方程组有无穷多解，通解为

$$\begin{cases}x_1=-t\\ x_2=2t\\ x_3=t\end{cases}$$

(4) 当$\lambda=7$时，

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}2-\lambda & 2 & -3 & 0\\ 2 & 3-\lambda & -2 & 0\\ -2 & -2 & 3-\lambda & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & 2 & -3 & 0\\ 2 & -4 & -2 & 0\\ -2 & -2 & -4 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-5 & 2 & -3 & 0\\ 2 & -4 & -2 & 0\\ 0 & -6 & -6 & 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}-5 & 2 & -3 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0 & -8 & -8 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0 & -4 & -4 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0 & -4 & -4 & 0\\ 1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & -4 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$r(A)=r(\overline{A})=2<3$，所以该方程组有无穷多解，通解为

$$\begin{cases}x_1=-t\\ x_2=-t\\ x_3=t\end{cases}$$

思考

这个例子采用的方法是上面例子中的方法二，为什么这个例子使用方法二会比方法一简单？请同学针对这个例子使用方法一做一做.

说明：这个例子的方程组是齐次线性方程组，由于齐次线性方程组一定有零解，因此对齐次

线性方程组解的讨论分为只有零和非零解(有无穷多解)两种情况. 由于增广矩阵$\overline{A}$最后一列为零，在对增广矩阵$\overline{A}$进行初等行变换过程中最后一列始终为零，所以可以改成对系数矩阵A进行初等行变换.

7.4 矩阵相抵

矩阵相抵是重要的概念,在第3章有重要的应用. 我们将在第3章详细介绍相关的内容.