Tema 1. ÁRBOLES GENERALES y BINARIOS

Estructuras de Datos y Algoritmos II
Grado en Ingeniería Informática

M José Polo Martín

mjpolo@usal.es

Universidad de Salamanca

curso 2022-2023

Contenido

1 Definiciones y conceptos básicos

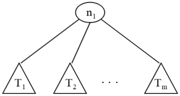
Árbol

Colección de elementos llamados nodos, uno de los cuales se distingue como **raíz**, con una relación entre ellos que impone una estructura **jerárquica**

Definición formal

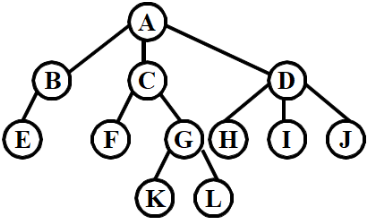
Un **árbol** T es un conjunto finito de cero o más nodos $\{n_1, n_2, ..., n_i\}$ de tal forma que

1. Hay un nodo especialmente designado llamado raíz ($n_1 = raíz(T)$)
2. Los nodos restantes $\{n_2, n_3, ..., n_i\}$ se dividen en **m** conjuntos disjuntos $T_1, T_2, ..., T_m$ ($m \geq 0$), llamados **subárboles** de la raíz, tales que cada T_j es, por sí mismo, un árbol



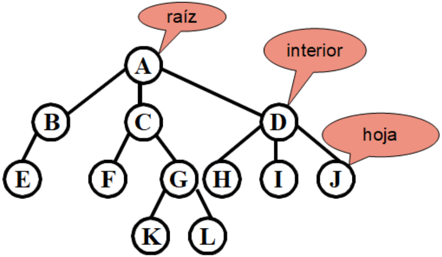
Características y propiedades

- **Recursión** característica inherente de los árboles
- Un árbol sin nodos es un **árbol vacío** o **nulo**
- Todo árbol que no es vacío tiene un **único** nodo **raíz**
- Un nodo X es **descendiente directo** de un nodo Y si existe una arista del nodo Y al nodo X (X "es hijo" de Y)
- Un nodo Z es **antecesor directo** de un nodo V si existe una arista del nodo Z al nodo V (Z "es padre" de V)
- Todos los nodos que son descendientes directos (hijos) de un mismo nodo (padre) se designan como **hermanos**
- Cada nodo puede tener un número arbitrario de descendientes directos, incluso cero



Definciones

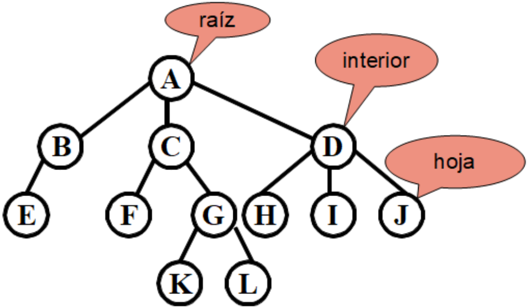
- Todos los nodos que no tienen descendientes directos se denominan nodos **hoja** o **terminales**
- Todo nodo con descendientes, es decir, que no es hoja, se designa como nodo **interno**
- **Grado de un nodo:** número de sus descendientes directos
- **Grado del árbol:** grado máximo de todos los nodos del árbol



Definiciones

- **Camino** de un nodo n_i a otro nodo n_k: secuencia de nodos $n_i, n_{i+1}, \ldots, n_k$ tal que n_j es el padre de n_{j+1} para $i \leq j < k$
  - **Longitud de un camino:** número de aristas que lo forman (k-1)
  - En un árbol hay exactamente un camino de la raíz a cada nodo
- Si existe un camino de un nodo n_i a otro nodo n_j, entonces n_j es **descendiente** de n_i y n_i es **antecesor** de n_j
- **Profundidad de un nodo:** número de aristas en el camino único que permite acceder a él desde la raíz. La raíz tiene profundidad cero
- **Altura de un nodo:** número de aristas en el camino más largo desde el nodo en cuestión hasta una hoja. Todos los nodos hoja tienen altura 0
- **Altura de un árbol** es igual a la altura de la raíz

Ejemplo

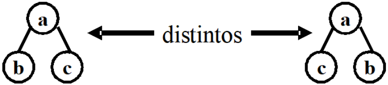


grado(A) = 3	profundidad(A) = 0	altura(A) = 3
grado(C) = 2	profundidad(C) = 1	altura(C) = 2
...	...	...
grado(K) = 0	profundidad(K) = 3	altura(K) = 0

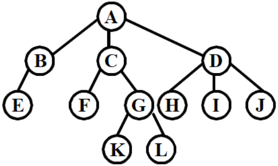
grado(árbol) = 3	altura(árbol) = 3

Árboles ordenados

- Árboles en los que los hijos de cada nodo se ordenan de izquierda a derecha

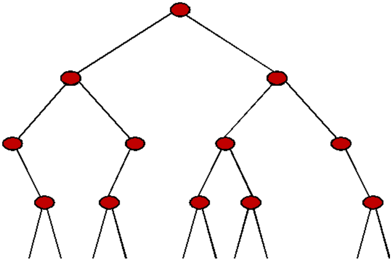


- El orden de izquierda a derecha entre nodos hermanos puede extenderse para comparar dos nodos cualesquiera con el siguiente criterio: “ si **b** y **c** son hermanos y **b** está a la izquierda de **c**, entonces todos los descendientes de **b** están a la izquierda de todos los descendientes de **c**".



2 Árboles Binarios

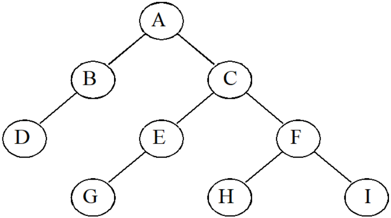
- **Definición 1:** conjunto finito de nodos que puede ser vacío o puede distribuirse en una raíz y un par de árboles binarios llamados subárboles izquierdo y derecho de la raíz, los cuales pueden también estar vacíos
- **Definición 2:** árbol ordenado de grado dos



2.1 Representación mediante Memoria Contigua

Matrices

- Los nodos se almacenan en las celdas contiguas de una matriz
- Cada celda de la matriz almacenará la información del nodo y dos enteros que indicarán los índices de la matriz donde se encuentran sus descendientes directos izquierdo y derecho (el valor 0 indicará ausencia de hijo)

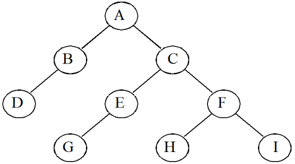


1	A	2	3
2	B	4	0
3	C	5	6
4	D	0	0
5	E	7	0
6	F	8	9
7	G	0	0
8	H	0	0
9	I	0	0
10			
11			
	...		
N-2			
N-1			
N			

Declaraciones Básicas

Consideraciones:

- Utilización de un matriz suficientemente grande para almacenar el número máximo de nodos que pueda tener el árbol
- Necesidad de una lista de disponibilidad para manejar el espacio en la matriz y un entero para indicar el índice de la matriz donde se encuentra la raíz



x.raíz → 1	A	2	3
2	B	4	0
3	C	5	6
4	D	0	0
5	E	7	0
6	F	8	9
7	G	0	0
8	H	0	0
9	I	0	0
x.disponible → 10			11
11			12
	...		
N-2			n-1
N-1			n
N			0

Algorithm declaraciones básicas

constantes
  $N = 100$
tipos
tipoNodo = **registro**
  información : *tipoIformación*
  izq, *der* : *entero*
fin registro
tipoÁrbol = **registro**
  nodos : *matriz*[1, . . . , *N*] de tipoNodo
  raíz : *entero*
  disponible : *entero*
fin registro

Ejemplo variable x:tipoÁrbol

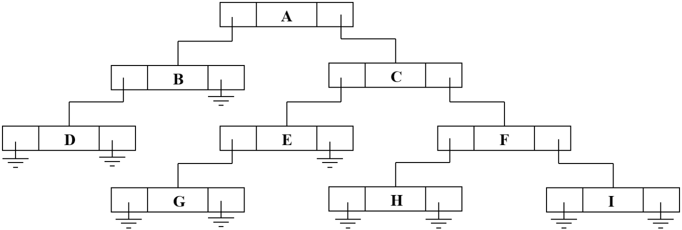
Para todo nodo situado en la celda i:

- Hijo izquierdo ⇒ $x.nodos[i].izq$
- Hijo derecho ⇒ $x.nodos[j].der$

2.2 Representación mediante Memoria Dispersa

Memoria dinámica (punteros)

- Cada celda se enlaza, a lo sumo, con otras dos siguiendo la estructura del árbol que representa
- Cada celda almacenará la información del nodo y dos apuntadores para enlazar con las raíces de los subárboles izquierdo y derecho del nodo
- Los nodos se almacenan en celdas que no tienen por qué ocupar posiciones consecutivas en memoria



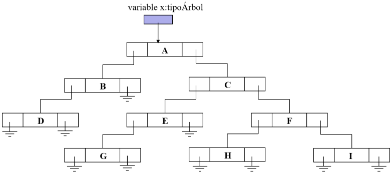
Declaraciones Básicas

Consideraciones:

- Desde la raíz de un árbol puede llegarse al resto de los nodos
- Para acceder a un árbol solo se necesita la dirección de memoria donde se almacena la raíz ⇒ **El árbol puede representarse por un puntero a un nodo de árbol binario**

Algorithm declaraciones básicas

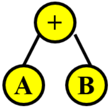
tipos
tipoNodo = **registro**
  izq :↑ *tipoNodo*
  información : *tipoIformación*
  der :↑ *tipoNodo*
fin registro
tipoÁrbol :↑ *tipoNodo*
punteroNodo :↑ *tipoNodo*

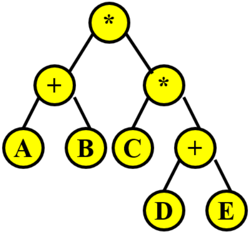


Este es el tipo de representación más común y la que utilizaremos en el resto del tema

Aplicaciones

- Numeración de capítulos y secciones de un libro
- Análisis de circuitos eléctricos
- Representación de expresiones aritméticas:





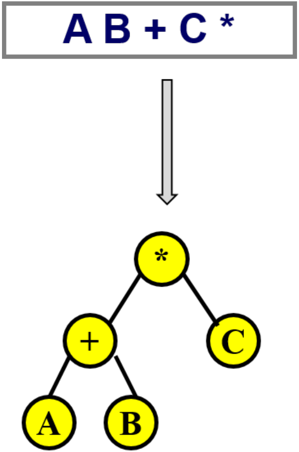
Prefija	Infija	Postfija
+AB	A+B	AB+
*+AB*C+DE	(A+B)*(C*(D+E))	AB+CDE+**

Ejemplo de aplicación: construcción de un árbol algebraico

Algorithm generaÁrbol(expresión:**cadena**):**tipoÁrbol**

Entrada: expresión algebraica en notación Postfija
Salida: árbol binario que reprensenta la expresión de entrada

```
a : tipoÁrbol
p : tipoPila
i : entero
símbolo : carácter
creaVacia(p)
símbolo ← expresión[1]
i ← 1
mientras símbolo ≠ FINEXPRESIÓN hacer
   casos símbolo en
     operando :
              a ← creaNodo(símbolo)
               inserta(a, p)
     operador:
              a ← creaNodo(símbolo)
              a↑.der ← suprime(p)
              a↑.izq ← suprime(p)
              inserta(a, p)
   fin casos
   i ← i + 1
   simbolo ← expresión[i]
fin mientras
devolver suprime(p)
```



Obsérvese la utilización del TAD pila en la implementación de este algoritmo

Especificación del TAD PILA utilizado en el ejemplo

- Pila cuyos elementos son punteros a nodos de árboles binarios
- Operaciones básicas:
  - **creaVacía(p):** inicia o crea la pila **p** como una pila vacía, sin ningún elemento
  - **vacía(p):** devuelve verdadero si la pila **p** está vacía, y falso en caso contrario
  - **inserta(x,p):** añade el elemento **x** a la pila **p** convirtiéndolo en el nuevo tope o cima de la pila
  - **suprime(p):** devuelve y elimina el elemento del tope o cima de la pila **p**

3 Recorridos en Árboles Binarios

- Recorrer un árbol: visitar todos sus nodos de forma sistemática, de tal manera que cada nodo sea visitado una sola vez
- Un nodo es visitado cuando se encuentra en el recorrido y en ese momento se puede efectuar cualquier proceso sobre su contenido
- Categorías básicas de recorridos:
    - en PROFUNDIDAD: basados en las relaciones padre-hijo de los nodos
    - en AMPLITUD o por NIVELES: basados en la distancia de cada nodo a la raíz

Recorridos en PROFUNDIDAD

- Existen tres métodos diferentes de efectuar el recorrido en profundidad, todos ellos de naturaleza recursiva, imponiendo un orden secuencial y lineal a los nodos del árbol
- Las actividades básicas a realizar son:
  - visitar la raíz
  - recorrer el subárbol izquierdo
  - recorrer el subárbol derecho
- Los tres métodos se diferencian en el orden en que se visite la raíz, dando lugar a los tres recorridos:
  - EN-ORDEN
  - PRE-ORDEN
  - POST-ORDEN

Recorrido PRE-ORDEN

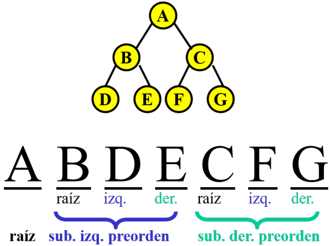
1. Visitar la raíz
2. Recorrer en PRE-ORDEN el subárbol izquierdo
3. Recorrer en PRE-ORDEN el subárbol derecho

Algorithm preOrden(a : tipoÁrbol)

Entrada: *a* dirección del nodo ráiz del árbol
Salida: procesa todos los nodos en preorden

si $a \neq NULO$ **entonces**
    $visitar(a \uparrow .información)$
    $preOrden(a \uparrow .izq)$
    $preOrden(a \uparrow .der)$
fin si

if { caso base (nada)
else (llama a la recursiva por izq o der)
y vuelve otra vez null



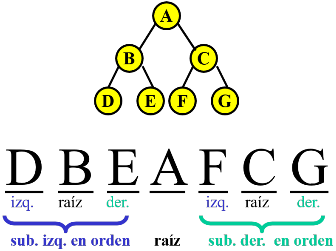
Recorrido EN-ORDEN

1. Recorrer en En-ORDEN el subárbol izquierdo
2. Visitar la raíz
3. Recorrer en EN-ORDEN el subárbol derecho

Algorithm enOrden(a : tipoÁrbol)

Entrada: *a* dirección del nodo ráiz del árbol
Salida: procesa todos los nodos en orden

si $a \neq NULO$ **entonces**
  $enOrden(a \uparrow .izq)$
  $visitar(a \uparrow .información)$
  $enOrden(a \uparrow .der)$
fin si



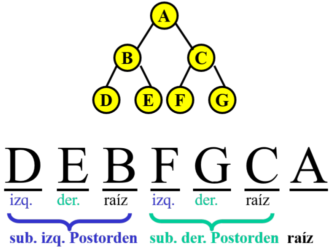
Recorrido POST-ORDEN

1. Recorrer en POST-ORDEN el subárbol izquierdo
2. Recorrer en POST-ORDEN el subárbol derecho
3. Visitar la raíz

Algorithm postOrden(a : tipoÁrbol)

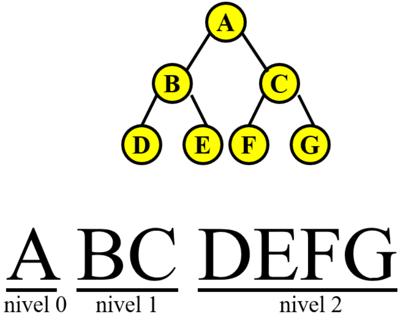
Entrada: *a* dirección del nodo raíz del árbol
Salida: procesa todos los nodos en postorden

si $a \neq NULO$ **entonces**
  $postOrden(a \uparrow .izq)$
  $postOrden(a \uparrow .der)$
  $visitar(a \uparrow .información)$
fin si



Recorrido en AMPLITUD o por NIVELES

- Consiste en visitar primero la raíz del árbol, después los nodos que se encuentran en siguiente nivel, etc.
- En este recorrido no importa tanto la estructura recursiva del árbol, si no la distribución de los nodos en los diferentes niveles
- Una posible implementación puede efectuarse utilizando una cola cuyos elementos son punteros a nodos del árbol

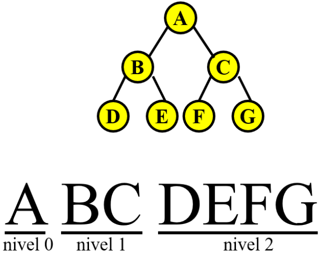


Algoritmo de recorrido en AMPLITUD

Algorithm niveles(a : tipoÁrbol)

Entrada: *a* dirección del nodo ráiz del árbol
Salida: procesa todos los nodos por niveles

```
nodo : punteroNodo
c : tipoCola
creaVacia(c)
si a ≠ NULO entonces
    inserta(a, c)
fin si
mientras NOT(vacia(c)) hacer
    nodo ← suprime(p)
    visitar(nodo ↑ .información)
    si nodo ↑ .izq ≠ NULO entonces
        inserta(nodo ↑ .izq, c)
    fin si
    si nodo ↑ .der ≠ NULO entonces
        inserta(nodo ↑ .der, c)
    fin si
fin mientras
```



Obsérvese la utilización del TAD cola en la implementación de este algoritmo

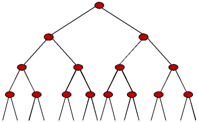
Especificación del TAD COLA utilizado en algoritmo amplitud

- Cola cuyos elementos son punteros a nodos de árboles binarios
- Operaciones básicas:
  - **creaVacía(c):** inicia o crea la cola c como una cola vacía, sin ningún elemento
  - **vacía(c):** devuelve verdadero si la cola c está vacía, y falso en caso contrario
  - **inserta(x,c):** añade el elemento x a la cola c convirtiéndolo en el último elemento de cola
  - **suprime(c):** devuelve y elimina el primer elemento la cola c

4 Árboles Binarios Completos y Casi-Completos

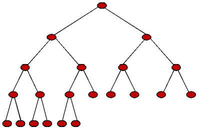
Árbol Binario Completo

Árbol binario que contiene el número máximo de nodos para su altura



Árbol Binario Casi-Completo

Árbol binario completamente lleno, con la posible excepción del nivel más bajo, el cual se llena de izquierda a derecha



Característica: tienen la altura mínima para su conjunto de nodos

Altura de un árbol binario de N nodos

- Altura máxima $\Rightarrow$ lista de nodos

$$H_{max} = N$$

- Altura mínima $\Rightarrow$ árbol binario casi-completo

$N = 1$	$H_{min} = 0$	$N_{min} = 1 = 2^0$	$N_{max} = 1 = 2^1 - 1$
$2 \leq N \leq 3$	$H_{min} = 1$	$N_{min} = 2 = 2^1$	$N_{max} = 3 = 2^2 - 1$
$4 \leq N \leq 7$	$H_{min} = 2$	$N_{min} = 4 = 2^2$	$N_{max} = 7 = 2^3 - 1$
$8 \leq N \leq 15$	$H_{min} = 3$	$N_{min} = 8 = 2^3$	$N_{max} = 15 = 2^4 - 1$
...	...	...	...
N	$H_{min} = h$	$N_{min} = 2^h$	$N_{max} = 2^{h+1} - 1$

$$H_{min} = h = [logN]$$

- Número de nodos de un a.b. casi-completo de altura h

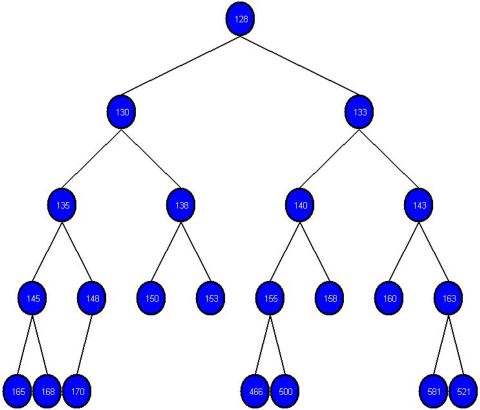
$$2^h \leq N \leq 2^{h+1} - 1$$

Más aplicaciones: Árboles de Búsqueda

- Los árboles binarios suelen utilizarse para estructurar una colección de datos de forma que faciliten la búsqueda de un elemento particular
- Conviene, por tanto, organizar los datos de forma que las longitudes de los caminos de búsqueda sean mínimas⇒Árboles binarios CASI-COMPLETOS y sus variantes
  - Árboles Binarios de Búsqueda y Balanceados, los estudiaremos en el tema 5
  - Árboles Multicamino: extensiones de los Árboles Balanceados que se utilizan para búsqueda de información en memoria secundaria, se estudiaran en el tema 7, dedicado a la Organización de Índices (Árboles B y Árboles B+)

Ejercicios sobre recorridos

1. Utilizando la aplicación RAED Representación de Algoritmos de Estructuras de Datos analizar el comportamiento de los algoritmos de recorridos sobre diferentes ejemplos. Se dejan dos ficheros creados con la aplicación raed que pueden descargarse para ser utilizados con la misma. Uno de ellos se corresponde con el árbol que muestra la siguiente figura y el otro es similar a los árboles presentados en las transparencias de recorridos.



Ejercicios sobre recorridos

enunciado 4 de las prácticas del Tema 1

2. Dibujar razonadamente un árbol binario sabiendo su recorrido en preorden y en orden:
   - Preorden: 1234. En orden: 1342
   - Preorden: 1234. En orden: 3421
   - Preorden: 4321. En orden: 3124
   - Preorden: 4321. En orden: 4213
   - Preorden: ESTRUCTURAS. En orden: RTUSECUTARS
   - Preorden: CRSETUTUARS. En orden: ESTRUCTURAS