Лабораторная работа 1.4.1
"Изучение физического маятника"

Калинин Данил, Б01-110

11 октября 2021 г.

Цель работы: исследовать зависимость периода колебаний физического маятника от момента его инерции.

В работе используются: физический маятник (однородный стальной стержень), опорная призма, математический маятник, счётчик числа колебаний, линейка, секундомер.

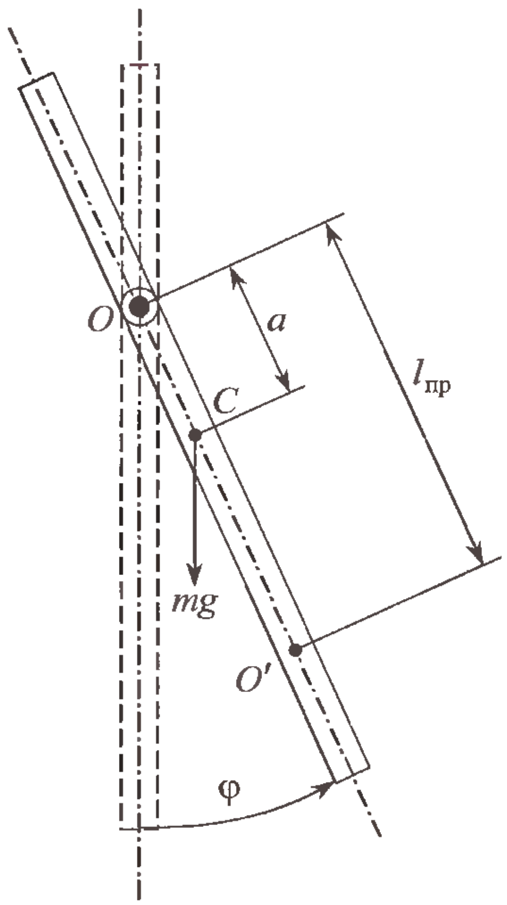

Рис. 1. Физический маятник

Теоритическая справка: Физическим маятником называют любое твердое тело, которое под действием силы тяжести может свободно качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Движение маятника описывается уравнением

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} = M, \tag{1}$$

где I – момент инерции маятника, φ – угол отклонения маятника от положения равновесия, t - время, M - момент сил, действующих на маятник.

В данной работе в качестве физического маятника (рис. 1) используется однородный стальной стержень длиной l. На стержне закрепляется опорная призма, острое ребро которой является осью качания маятника. Призму можно перемещать вдоль стержня, меняя таким образом расстояние OC от точки опоры маятника до его центра масс. Пусть это расстояние равно a. Тогда по теореме Гюйгенса-Штейнера момент инерции маятника

$$I = \frac{ml^2}{12} + ma^2, \tag{2}$$

где m – масса маятника. Момент силы тяжести, действующий на маятник,

$$M = -mga\sin\varphi. \tag{3}$$

Если угол φ мал, то $\sin\varphi \approx \varphi$, так что

$$M \approx -mga\varphi \tag{4}$$

В исправной установке маятник совершает несколько сот колебаний без заметного затухания. Поэтому моментом силы трения в первом приближении можно пренебречь. Подставляя выражение для I и M в (1), получим уравнение

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \tag{5}$$

где

$$\omega^2 = \frac{ga}{a^2 + \frac{l^2}{12}}. \tag{6}$$

Тогда период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{a^2 + \frac{l^2}{12}}{ag}} \tag{7}$$

Таким образом, период малых колебаний не зависит ни от начальной фазы, ни от амплитуды колебаний. Это утверждение (изохорность) справедливо для колебаний, подчиняющихся уравнению (5). Движение маятника описывается по этой формуле только для малых углов φ.

Период колебаний математического маятника определяется формулой

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{l'}{g}}, \tag{8}$$

где l' – длина математического маятника. Поэтому величину

$$l_{\text{пр}} = a + \frac{l^2}{12a} \tag{9}$$

называют приведённой длиной математического маятника. Поэтому точку O' (см. рис. 1), отстоящую от точки опоры на расстояние $l_{\text{пр}}$, называют центром качания физического маятника. Точка опоры и центр качания маятника обратимы, т.е. при качании маятника вокруг точки O' период будет таким же, как и при качании вокруг точки O.

Ход работы:

1. Отметим погрешности измерительных приборов:

Секундомер: $\Delta_c = 0.0001$ с
Линейка: $\Delta_{\text{лин}} = 0.05$ см
Штангенциркуль: $\Delta_{\text{штцр}} = 0.01$ см

2. Измерим параметры стержня

Результаты измерения параметров стержня занесем в таблицу 1.

Величина	Значение
Полная длина стержня	$L = 100 \pm 0.05$ см.
Диаметр стержня	$\sigma_t^{случ} = 1.62 \pm 0.01$ см.
Центр масс стержня	$x_{цм} = 50 \pm 0.05$ см.
Центр масс стержня с призмой	$x_{цм} = 51 \pm 0.05$ см.
Масса стержня	$m_{ст} = 1.6375$ кг.
Масса груза	$m_{гр} = 0.3487$ кг.
Масса призмы	$m_{пр} = 0.0439$ кг.
Расстояние от центра масс стержня до призмы	$x_{пр} = 24 \pm 0.05$ см.

Таблица 1. Результаты измерения параметров стержня.

3. Измерим период колебаний маятника без дополнительного груза. Результат измерения периода колебаний маятника без груза приведен в таблице 2.

№ опыта	**Кол-во колебаний N**	**Полное время, сек**	**Расчитанный период, сек**
1	30.62	20	1.531
2	30.62	20	1.531
3	30.62	20	1.531
4	30.63	20	1.5315
5	30.63	20	1.5315
6	30.63	20	1.5315
7	30.63	20	1.5315
8	30.63	20	1.5315
9	30.62	20	1.531
10	30.63	20	1.5315

Таблица 2. Результаты измерения времени 20 колебаний

По полученным данным были расчитанны среднее время $\bar{t}$ 20 полных колебаний, случайная ($\sigma_t^{случ}$), систематическая (($\sigma_t^{сист}$) и полная ($\sigma_t^{полн}$) погрешности измерения времени. Результаты сведены в таблицу 3.

Среднее время 20 колебаний	$\bar{t} = 30.626$ с.
Слуйчайная погрешность измерения	$\sigma_t^{случ} = 5 \cdot 10^{-3}$ с.
Систематическая погрешность измерения	$\sigma_t^{сист} = 1 \cdot 10^{-3}$ с.
Полная погрешность измерения	$\sigma_t^{сист} = 5.14 \cdot 10^{-3}$ с.

Таблица 3. Результаты измерения времени 20 колебаний.

4. Рассчитаем g.

По данной в описании работы формуле:

$$g = \frac{4\pi^2(\frac{l^2}{12} + a^2)}{T^2 a} \tag{10}$$

Таким образом получим: $g = 9.83$, $\varepsilon_g = 0.2\%$.

5. Проведем серию измерений, перемещая груз.

Результаты измерения занесем в таблицу 4.

№ Опыта	**Координата центра масс стержня, $x_ц$, м.**	**Расстояние от центра масс стержн до груза y, м.**	**Количество колебаний n**	**Полное время колебаний $t_п$, сек.**	**Период T, сек**
1	0.35	0.26	4	5.83	1.457
2	0.41	0.28	4	5.91	1.47
3	0.37	0.27	4	5.87	1.467
4	0.37	0.3	4	5.97	1.492
5	0.35	0.31	4	6.17	1.54

Таблица 4. Результаты измерения периода колебаний при переменном положении груза

Расчитаем J_0 – момент инерции маятника.

$$J_0 = \frac{m_c l^2}{12} + m_c a^2 \tag{11}$$

Где m_c – масса стержня с призмой, l – длина стержня, a – расстояние от центра масс стержня до точки подвеса.

Таким образом, получим $J_0 = 0.237$ кг $\cdot$ м^2.

6. Рассчитаем значения g. Из следующей формулы

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J_0 + m_г y^2}{g^2 M x_ц}} \tag{12}$$

Выведем следующую формулу для расчета g.

$$g = \frac{4\pi^2(J_0 + m_г y^2)}{T^2 M x_ц} \tag{13}$$

Где $m_г$ – масса груза, M – полная масса маятника.

По формуле расчитаем значения g, а также отосительные погрешности (с учетом $g_{ист} = 9.81$) для каждого из измерений, результаты занесем в таблицу 5.

№ Опыта	**Рассчитанное значение g $\frac{м}{с^2}$**	**Ошибка расчета ε_g, %**
1	9.50	3.262
2	9.85	0.44
3	9.52	2.95
4	8.95	9.52
5	9.37	4.68

Таблица 5. Результаты расчетов ускорения свободного падения.

7. Расчитаем случайную погрешность:

$$\sigma_g^{случ} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(\bar{g} - g)^2} \tag{14}$$

Получим $sigm_g = 0.468\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Теперь расчитаем относительную погрешность всей серии измерений:

$$\varepsilon_g^{\text{серии}} = \frac{\sigma_g^{\text{случ}}}{\bar{g}} \cdot 100\% \tag{15}$$

Таким образом, $\varepsilon_g^{\text{серии}} = 4.97\%$. То есть ускорение свободного падения получено с хорошей точностью.

8. Построение графика зависимости периода колебаний от положения груза.

Заметим, что из формулы 12 можно получить следующее уравнение:

$$T^2 x_{\text{ц}} = \frac{4\pi^2}{gM} m_{\text{г}} y^2 + \frac{4\pi^2}{gM} J_0. \tag{16}$$

То есть величина $T^2 x_{\text{ц}}$ линейно зависит от y^2. Иначе говоря:

$$T^2 x_{\text{ц}} = ky^2 + b. \tag{17}$$

Где $k = \frac{4\pi^2}{gM} m_{\text{г}}$, а $b = \frac{4\pi^2}{gM} J_0$.

Найдем коэффициенты k и b методом наименьших квадратов:

$$k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 0.82\ \frac{\text{с}^2}{\text{м}} \tag{18}$$

$$b = \langle y \rangle - k\langle x \rangle \approx 0.4683\ \text{см} \cdot \text{с}^2 \tag{19}$$

где $x = y^2$, $y = x_{\text{ц}} T^2$.

Построим график зависимости $T^2 x_{\text{ц}}$ от y^2, пользуясь полученными коэффициентами. На графике отметим экспериментальные точки. График представлен на рисунке 2.

9. Расчитаем погрешности.

Погрешность расчёта y^2 найдём по следующей формуле:

$$\sigma_{y^2} = 2\Delta y, \tag{20}$$

где $\Delta y = \Delta_{\text{лин}} = 0.05$ см.

Погрешность вычисления $x_{\text{ц}} T^2$ можно найти по формуле:

$$\sigma_{x_{\text{ц}} T^2} = \sqrt{(\Delta_{\text{лин}})^2 + (2\Delta_{\text{сек}})^2}, \tag{21}$$

Случайные погрешности вычисления k и b можно найти по следующим формулам:

$$\sigma_k^{\text{сл}} = \sqrt{\frac{1}{N}\left(\frac{\langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2}{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} - k^2\right)} \approx 3.34 \cdot 10^{-2}\ \frac{\text{с}^2}{\text{м}}, \tag{22}$$

$$\sigma_b^{\text{сл}} = \sigma_k^{\text{сл}} \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \approx 7.67 \cdot 10^{-3}\ \text{м} \cdot \text{с}^2. \tag{23}$$

Относительная погрешность величины $T^2 x_{\text{ц}}$:

$$\varepsilon_{x_{\text{ц}} T^2} = \frac{\sigma_{x_{\text{ц}} T^2}}{\langle T^2 x_{\text{ц}} \rangle} \approx 2.3\% \tag{24}$$

Относительная погрешность величины y^2:

$$\varepsilon_{y^2} = \frac{\sigma_{y^2}}{\langle y^2 \rangle} \approx 0.51\% \tag{25}$$

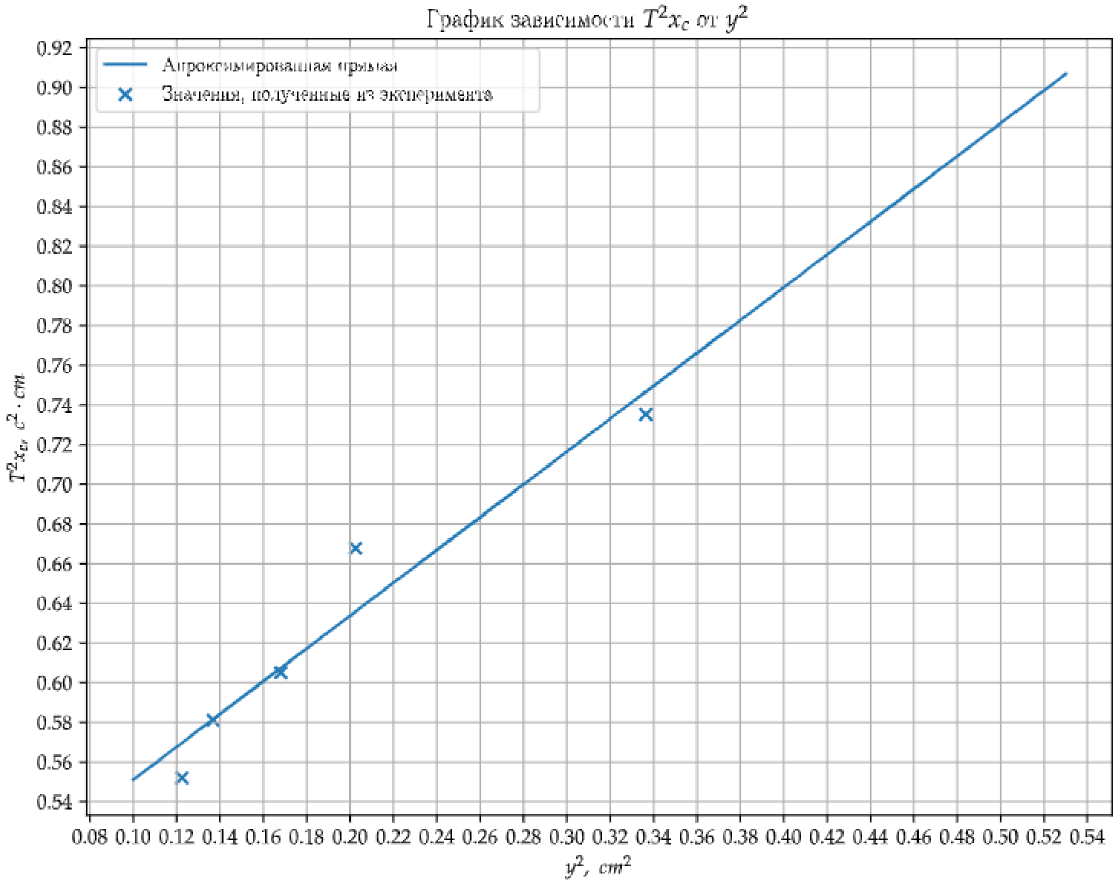

Рис. 2. график зависимости $T^2x_ц$ от y^2

Систематическая погрешность вычисления коэффициентов определяется следующим соотношением:

$$\sigma_k^{\text{сист}} = k\sqrt{\left(\varepsilon_{x_ц T^2}\right)^2 + \left(\varepsilon_{y^2}\right)^2} \approx 0.0047\ \frac{\text{с}^2}{\text{м}}, \tag{26}$$

$$\sigma_b^{\text{сист}} = b\sqrt{\left(\varepsilon_{x_ц T^2}\right)^2 + \left(\varepsilon_{y^2}\right)^2} \approx 0.0026\ \text{м} \cdot \text{с}^2. \tag{27}$$

Тогда полную погрешность вычисления коэффициентов подсчитываем по следующей формуле:

$$\sigma_k = \sqrt{(\sigma_k^{\text{сл}})^2 + (\sigma_k^{\text{сист}})^2} \approx 0.033\ \frac{\text{с}^2}{\text{м}}, \tag{28}$$

$$\sigma_b = \sqrt{(\sigma_b^{\text{сл}})^2 + (\sigma_b^{\text{сист}})^2} \approx 0.0081\ \text{м} \cdot \text{с}^2. \tag{29}$$

Таким образом, получаем:

- $k = (0.82 \pm 0.033)\ \frac{\text{с}^2}{\text{м}}$, $\varepsilon_k = 4.7\%$
- $b = (0.46 \pm 0.0081)\ \text{м} \cdot \text{с}^2$, $\varepsilon_b = 1.73\%$

Учитывая формулу 17 и 12, вычисляем g:

$$g = \frac{4\pi^2 m_г}{Mk} \approx 9.459\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \tag{30}$$

$$\sigma_g = g \cdot \varepsilon_k \approx 0.44\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}, \tag{31}$$

Таким образом получаем:
$g = (9,454 \pm 0,44)\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, $\varepsilon_g = 4.654\%$

Заключение:
В ходе работы был изучен физический маятник. С хорошей точностью было получено ускорение свободного падения для планеты Земля. Точность можно улучшить, если провести больше экспериментов и увеличить точность измерения расстояния от от груза и точки опоры до центра масс. До сих точность итоговых измерений ограничевается точностью линейки и штангенциркуля.