

Лабораторная работа 1.2.5

Измерение прецессии уравновешенного гироскопа

Калинин Даниил, Б01-110

29 ноября 2021 г.

Цель работы: Исследовать вынужденную прецессию гироскопа, установить зависимость скорости вынужденной прецессии от момента сил, действующих на ось гироскопа, определить скорость вращения ротора гироскопа и сравнить ее со скоростью, рассчитанной по скорости прецессии.

В работе используются: гироскоп в кардановом подвесе, секундомер, набор грузов, отдельный ротор гироскопа, цилиндр известной массы, крутильный маятник, штангенциркуль, линейка.

Теоритическая справка:

Основные уравнения движения твердого тела можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad (2)$$

Формула (1) выражает закон движения центра масс, а формула (2) – уравнение моментов, действующих на тело. Двух данных уравнений достаточно для описания состояния твердого тела.

Если сила \vec{F} не зависит от угловой скорости вращения тела, а момент \vec{M} от скорости поступательного движения тела, то уравнения (1) и (2) можно рассматривать независимо друг от друга. В данной работе рассматривается только задача о вращении твердого тела.

Момент импульса твердого тела можно вычислить, используя формулу:

$$\vec{L} = \vec{i}I_x\omega_x + \vec{j}I_y\omega_y + \vec{k}I_z\omega_z, \quad (3)$$

где I_x, I_y, I_z – главные моменты инерции тела, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – компоненты вектора угловой скорости $\vec{\omega}$.

Быстро вращающееся тело, для которого:

$$I_z\omega_z \gg I_x\omega_x, I_y\omega_y$$

принято называть *гироскопом*. Гироскоп называется уравновешенным, если его центр масс неподвижен.

В силу (2), приращение момента импульса определяется интегралом:

$$\Delta\vec{L} = \int \vec{M}, dt \quad (4)$$

Если момент внешних сил действует в течение короткого промежутка времени, из формулы (4) следует, что приращение \vec{L} момента импульса значительно меньше самого момента импульса, т.е:

$$|\Delta \vec{L}| \ll |\vec{L}|. \quad (5)$$

Благодаря этому, гироскоп приобретает очень большую устойчивость, вызванную его быстрым вращением.

Если гироскоп уравновешен, то суммарный момент сил, действующих на него, равен 0. В таком случае, гироскоп не будет изменять своего положения в пространстве. Если на гироскоп в течение длительного времени будет действовать некоторый момент сил, отличный от нуля, то, согласно (2) гироскоп придет в движение. Мы не будем рассматривать действие моментов сил, которые вызовут ускорение или замедление гироскопа (т.е. моментов сил, которые не изменяют положения оси вращения гироскопа). Рассмотрим действия моментов сил, которые изменяют положение оси вращения гироскопа.

Рассмотрим маховик, вращающийся вокруг оси z . (Рис. 1). Будем считать, что

$$\omega_z = \omega_0, \quad \omega_x = \omega_y = 0.$$

Пусть ось вращения повернулась в плоскости zx по направлению в оси x на бесконечно малый угол $d\varphi$. Такой поворот означает добавочное вращение маховика вокруг оси y , так что

$$d\varphi = \Omega dt,$$

где Ω – угловая скорость такого вращения. Будем предполагать, что

$$L_\Omega \ll L_{\omega_0} \quad (6)$$

Это означает, что момент импульса маховика, равный $I_z \omega_0$ до приложения внешних сил, только повернется в плоскости zx по направлению к оси x не изменяя своей величины. Таким образом,

$$|d\vec{L}| = L d\varphi = I \Omega dt \quad (7)$$

Записывая выражение (7) в виде векторного произведения, получаем:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (8)$$

Окончательно, используя (2), получаем:

$$\vec{M} = \vec{\Omega} \times \vec{L} \quad (9)$$

Формула (9) справедлива, если выполнено условие (6). Данная формула позволяет определить, момент сил \vec{M} , который нужно приложить к маховику, чтобы вызвать вращение маховика с угловой скоростью $\vec{\Omega}$.

Под действием момента внешних сил \vec{M} ось гироскопа медленно вращается вокруг оси y с угловой скоростью $\vec{\Omega}$. Такое движение называют *прецессией гироскопа*.

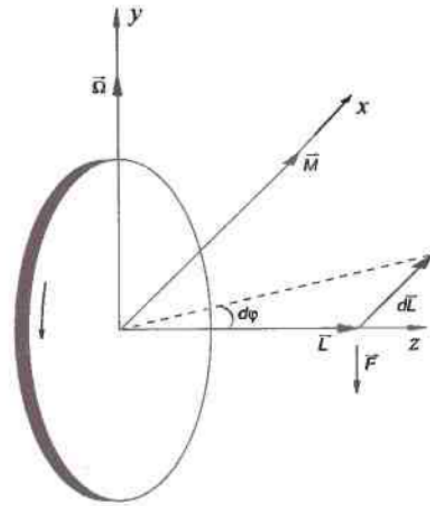


Рис. 1. Маховик.

Для изучения регулярной прецессии уравновешенного гироскопа к его оси подвешивают дополнительные грузы. Это смещает общий центр масс и создает момент сил тяжести, вызывающий прецессию. Скорость прецессии в этом случае может быть найдена по формуле:

$$\Omega = \frac{mgl}{I_z \omega_0}, \quad (10)$$

где m – масса груза, l – расстояние от центра карданова подвеса до точки крепления груза на оси гироскопа. (Рис. 2(б))

Для выполнения работы используется гироскоп (Рис. 2(б)), закрепленный в карданном подвесе (Рис. 2(а)).

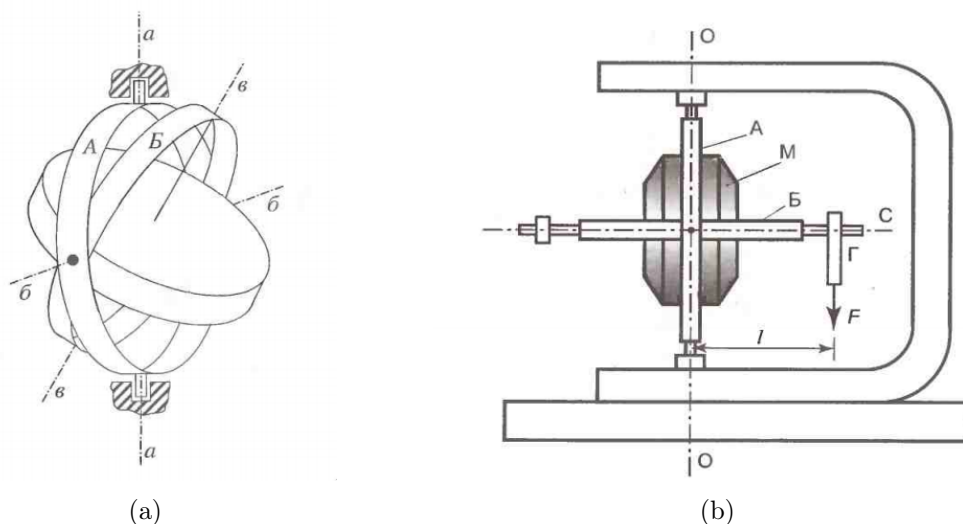


Рис. 2. а) Гироскоп, закрепленный в карданном подвесе. б) Схема устройства гироскопа.

Ротором гироскопа (Рис. 2(б)) является ротор электромотора М. Кожух мотора скреплен с кольцом Б (Рис. 2(а)). Мотор с кольцом Б может вращаться в кольце А вокруг горизонтальной оси бб, которое может вращаться относительно оси аа. Рычаг С направлен по оси симметрии ротора. на рычаг подвешивают грузы Г.

Ход работы:

1. Запишем погрешности измерительных приборов в таблицу 1.

	Прибор	Погрешность
1	Линейка	$\sigma = 0.5$ мм.
2	Штангенциркуль	$\sigma = 0.05$ мм.
3	Секундомер	$\sigma = 0.5$ с.

Таблица 1. Погрешности

2. Измерим период прецессии оси гироскопа. Для этого будем отклонять ось гироскопа примерно на 5-6 градусов выше горизонтальной плоскости, вешать груз и, следя за тем, чтобы ось гироскопа опустилась ниже горизонтальной плоскости примерно на тот же угол, на который мы ее отклонили, измерим целое число периодов. Полученные значения, а также рассчитанные периоды прецессии занесем в таблицу 2

3. Усредним полученные для разных грузов периоды, рассчитаем погрешности измерений результат занесем в таблицу

Количество оборотов	Полное время, с.	Период прецессии, с.
$m = 142_{гр.}$		
3	221 ± 0.5	73.7
3	219 ± 0.5	73.0
3	220 ± 0.5	73.3
3	221 ± 0.5	73.7
$m = 179_{гр.}$		
3	174 ± 0.5	58.0
4	232 ± 0.5	58.0
4	232 ± 0.5	58.0
4	233 ± 0.5	58.25
$m = 220_{гр.}$		
5	236 ± 0.5	47.2
5	232 ± 0.5	46.4
5	235 ± 0.5	47.0
5	234 ± 0.5	46.8
$m = 274_{гр.}$		
6	262 ± 0.5	43.7
6	264 ± 0.5	44.0
6	266 ± 0.5	44.3
6	265 ± 0.5	44.2
$m = 342_{гр.}$		
8	242 ± 0.5	30.25
8	246 ± 0.5	30.75
8	245 ± 0.5	30.6
8	247 ± 0.5	30.9

Таблица 2. Результаты измерений периодов прецессии оси гироскопа

m_z , гр.	\bar{T} , с.	$\sigma_{сист.}$	$\sigma_{случ.}$	$\sigma_{\bar{T}}$	$\varepsilon_{\bar{T}}$
142	73.42	0.5	0.29	0.58	0.008
179	58.06	0.5	0.11	0.51	0.009
220	46.85	0.5	0.30	0.58	0.012
274	44.05	0.5	0.23	0.55	0.012
342	30.62	0.5	0.24	0.56	0.018

Таблица 3. Усредненное значение периода прецессии, а также погрешности измерения периода прецессии

Масса груза, г.	142	179	220	274	342
Скорость прецессии, рад / с.	0.0856	0.1082	0.1341	0.1426	0.2052

Таблица 4. Значения угловой скорости прецессии для различных грузов

Как можно заметить из таблицы 3, величина относительной погрешности измерения периода прецессии достаточно мала. определим по полученным данным величину Ω . Для этого воспользуемся формулой:

$$\Omega = \frac{2\pi n}{t_{\text{полн}}} \quad (11)$$

Применив формулу 11 к данным таблицы 3 и занесем результат в таблицу 4. На основе данных таблицы построим график, изображенный на рисунке 3.

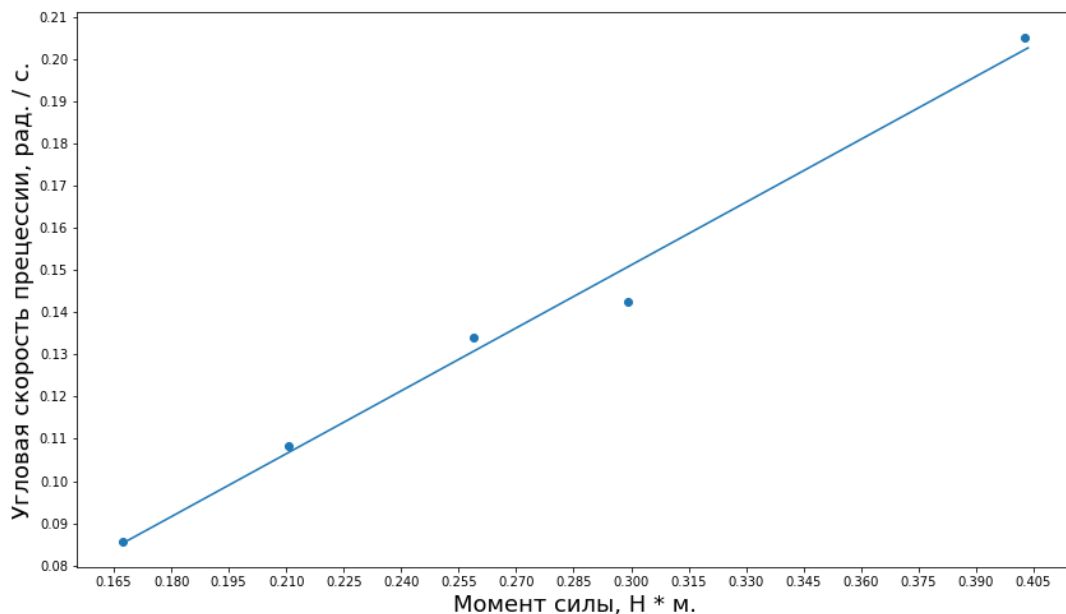


Рис. 3. График зависимости $\Omega(M)$

4. Теперь измерим момент инерции ротора гироскопа методом крутильных колебаний. Для определения момента инерции ротора гироскопа используем формулу:

$$I_{\text{ротора}} = I_{\text{ц}} \frac{T_{\text{ротора}}^2}{T_{\text{ц}}^2}, \quad (12)$$

где $I_{\text{ц}}$ – момент инерции цилиндра, $T_{\text{ротора}}$ – период крутильных колебаний ротора гироскопа, $T_{\text{ц}}$ – период крутильных колебаний цилиндра.

Произведем измерение данных величин. Измерения периодов колебаний будем проводить, отсчитывая 16 полных колебаний. Полученные результаты занесем в таблицу 5

Используя формулу 12 и данные таблицы 5 получим итоговые значения, занесенные в таблицу 6.

Величины $\varepsilon_T, \varepsilon_{I_{\text{ц}}}, \varepsilon_{I_0}$ рассчитываются по следующим формулам:

$$\varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{T} \quad (13)$$

Величина	значение	σ
$16T_0, \text{ с}$	51.7	0,1
$16T_{\text{ц}}, \text{ с}$	65.33	0,1
$M_{\text{ц}}, \text{ Г}$	1617,2	0,1
$R_{\text{ц}}, \text{ мм}$	40	0,25

Таблица 5. Результаты измерения периода колебаний ротора и цилиндра на крутильном маятнике

$$\varepsilon_{I_{\text{ц}}} = \left(\frac{\sigma_M}{M} \right) + 2 \left(\frac{\sigma_R}{R} \right) \quad (14)$$

$$\varepsilon_{I_0} = \varepsilon_{I_{\text{ц}}} + \varepsilon_{T_0} + \varepsilon_{T_{\text{ц}}} \quad (15)$$

Величина	Значение	σ	ε
$T_0, \text{ с}$	3,23	0,003	0,001
$T_{\text{ц}}, \text{ с}$	4,08	0,003	0,001
$I_{\text{ц}}, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2, \cdot 10^{-4}$	12,9	0,2	0,013
$I_0, \text{ кг} \cdot \text{ м}^2, \cdot 10^{-4}$	6,6	0,1	0,017

Таблица 6. Результаты измерений момента инерции ротора гироскопа

В итоге, полученное значение момента инерции ротора цилиндра:

$$I_0 = (6,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} \text{ Кг} \cdot \text{ м}^2 \quad (16)$$

Используя величину 16 и формулу 10 определим величины угловой скорости для каждого из грузов. Значения занесем в таблицу 7.

$\nu = 410 \text{ Гц}$					
m_z	142	179	220	274	342
$\Omega, \text{ рад/с}$	0.084	0.106	0.131	0.163	0.203

Таблица 7. Значение угловых скоростей прецессии оси гироскопа в зависимости от груза

5. Определим моменты сил трения в оси карданного подвеса.

Для определения скорости прецессии используем формулу:

$$\Omega_{\text{верт}} = \frac{2\alpha}{t_{\text{all}}} \quad (17)$$

где t_{all} – время, за которое произошло опускание, α – начальный угол, на который отклонена ось гироскопа от горизонтальной плоскости.

В качестве времени возьмем среднее значения времен, используемых для определения периодов регулярной прецессии. Кроме того, определим значения угла α , на который изначально отклонялась ось гироскопа при своем вращении.

Значение времени: $t = 254 \text{ с}$;

Величину момента сил трения можно определить по следующей формуле:

$$M_{F_{\text{трения}}} = 2\pi\Omega I_0\omega_z \quad (18)$$

Используя формулу 17, получаем:

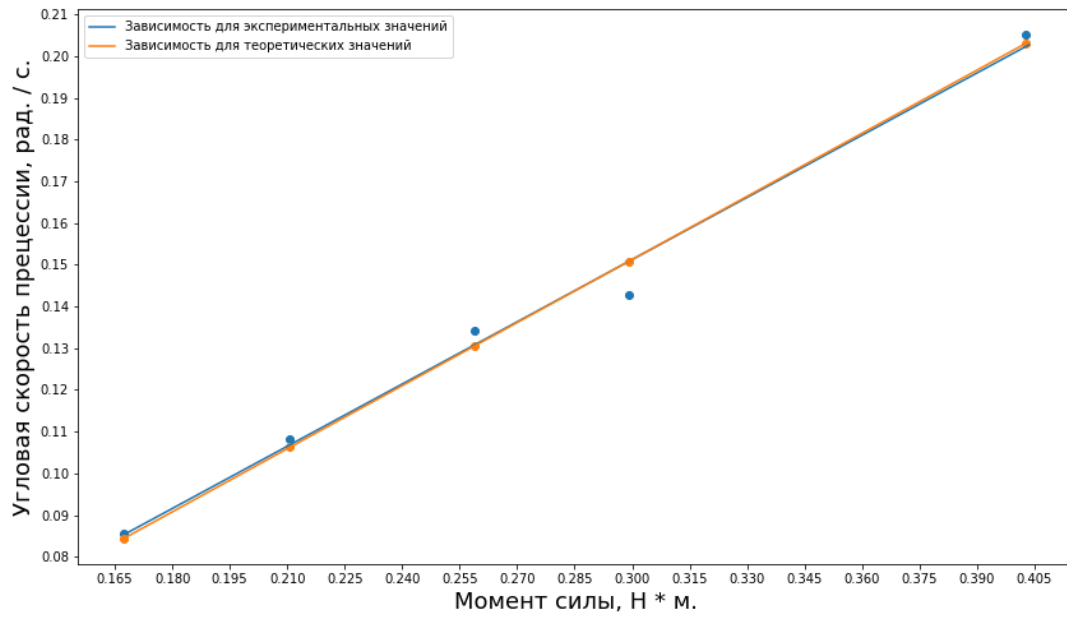


Рис. 4. Графики зависимости $\Omega(M)$ для различных данных

$$M_{F_{\text{трения}}} = \frac{4\pi I_0 \omega_z \arctan\left(\frac{\Delta h}{l}\right)}{t_{\text{полн}}} \quad (19)$$

Используя формулу 19 и полученные ранее значения входящих в нее величин, можем оценить величину момента сил трения, возникающих в оси карданного подвеса:

$$M_{F_{\text{трения}}} = 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \quad (20)$$

Определим погрешность полученного результата.

$$\sigma_M = \sqrt{\varepsilon_\alpha^2 + \varepsilon_{I_0}^2 + \varepsilon_{\omega_z}^2 + \varepsilon_{t_{\text{полн}}}^2} \quad (21)$$

$$\sigma_\alpha = \frac{\partial \alpha}{\partial \frac{\Delta h}{l}} = \frac{\sigma_{\frac{\Delta h}{l}}}{1 + \frac{\Delta h}{l}} \quad (22)$$

В итоге:

$$M = (2,2 \pm 0,3) \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м} \quad (23)$$

6. Сравним полученные результаты В итоге, в ходе выполнения работы были получены следующие результаты:

Значения Ω представлены в таблице 8;

Значение момента инерции ротора гироскопа: $I_0 = (6,6 \pm 0,1) \cdot 10^{-4} \text{ Кг} \cdot \text{м}^2$;

Значение момента сил трения в оси карданного подвеса : $M = (2,2 \pm 0,5) \cdot 10^{-4} \text{ Н} \cdot \text{м}$

Заключение:

В работе были определены величины, описывающие регулярную прецессию гироскопа, закрепленного в карданном подвесе. На практике были подтверждены зависимости, используемые в данной работе. Была достигнута приемлемая точность, $\varepsilon_{M_{F_{\text{трения}}}} = 0,14$)

$\Omega_{\text{теоретическая, рад/с}}$	$\Omega_{\text{экспериментальная, рад/с}}$
0.086	0.084
0.108	0.106
0.134	0.131
0.143	0.151
0.205	0.203

Таблица 8. Значения угловой скорости оси маятника во время прецессии определенные теоретически и экспериментально