

## Лабораторная работа 1.2.4.

# Определение главных моментов инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний

Калинин Даниил, Б01-110

25 октября 2021 г.

**Цель работы:** Измерить периоды крутильных колебаний рамки при различных положениях закрепленного в ней тела, проверить теоретическую зависимость между периодами крутильных колебаний тела относительно различных осей для каждого тела, по ним найти главные моменты инерции тел и построить эллипсоид инерции.

**В работе используются:** установка для получения крутильных колебаний, набор исследуемых тел, секундомер.

### Теоритическая справка:

Инерциальные свойства твердого тела при вращении определяет не только величина его массы, но и ее пространственное распределение. Последнее характеризует физическая величина, которая называется тензором инерции. Тензор инерции твердого тела может быть представлен симметричной матрицей, которая полностью определяется заданием 6 элементов. Если для какой-либо системы координат известны все 6 элементов матрицы, то момент инерции тела относительно произвольной оси может быть вычислен по следующей формуле:

$$I = I_{11}s_1^2 + I_{22}s_2^2 + I_{33}s_3^2 + 2I_{12}s_1s_2 + 2I_{23}s_2s_3 + 2I_{31}s_3s_1, \quad (1)$$

где  $s$  – единичный вектор, а  $x_i$  – компоненты радиус-вектора и:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \int (x_2^2 + x_3^2) dm, & I_{12} &= - \int x_1x_2 dm \\ I_{22} &= \int (x_3^2 + x_1^2) dm, & I_{23} &= - \int x_2x_3 dm \\ I_{33} &= \int (x_1^2 + x_2^2) dm, & I_{31} &= - \int x_3x_1 dm \end{aligned} \quad (2)$$

Как и всякая симметричная матрица, тензор инерции может быть представлен в диагональном виде. Диагональные элементы  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$  которого называются главными моментами инерции тела. Геометрическим представлением тензора инерции является эллипсоид инерции, уравнение которого в главных осях имеет вид:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1. \quad (3)$$

Если начало координат совпадает с центром масс тела, то эллипсоид называется центральным.

Знание эллипсоида инерции позволяет найти момент инерции тела относительно любой оси проходящей через центр тела. Для этого необходимо провести вдоль выбранной оси радиус-вектор  $\vec{r}$  до пересечения с поверхностью эллипсоида. Длина  $r$  будет определять момент инерции тела относительно этой оси:

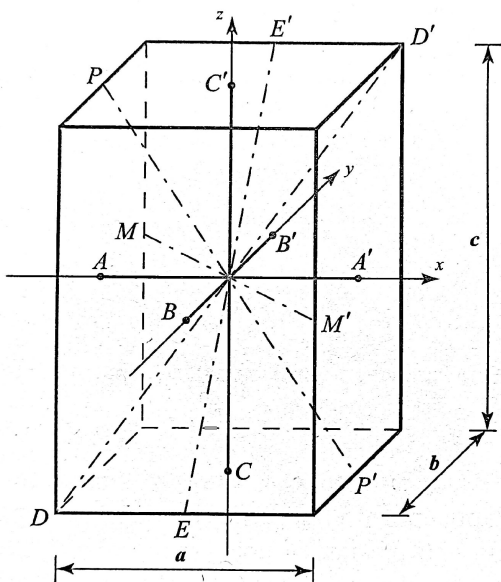
$$I = \frac{1}{r^2}. \quad (4)$$

Период крутильных колебаний рамки с телом определяется формулой:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I + I_p}{f}} \quad (5)$$

Где  $I$ ,  $I_p$  – моменты инерции тела и рамки относительно оси вращения,  $f$  – модуль кручения проволоки.

На рисунке 1 показано, как проходят оси вращения в параллелепипеде. Оси  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  являются главными осями данного тела.



Моменты инерции относительно этих осей обозначим  $I_x$ ,  $I_y$ ,  $I_z$ . Ось  $DD'$  составляет с главными осями такие же углы, как и с ребрами  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Косинусы этих углов, соответственно,  $\frac{a}{d}$ ,  $\frac{b}{d}$  и  $\frac{c}{d}$ , где  $d$  – длина диагонали:  $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ .

Тогда момент инерции  $I_d$  вращения вокруг  $DD'$  выражается через главные моменты с помощью следующей формулы:

$$I_d = I_x \frac{a^2}{d^2} + I_y \frac{b^2}{d^2} + I_z \frac{c^2}{d^2} \quad (6)$$

Отсюда получаем соотношение:

$$(a^2 + b^2 + c^2)I_d = a^2 I_x + b^2 I_y + c^2 I_z \quad (7)$$

Используя связь момента инерции с периодом крутильных колебаний (5), получаем соотношение:

$$(a^2 + b^2 + c^2)T_d^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2 \quad (8)$$

Из этой формулы следуют также выражения, связывающие моменты инерции относительно осей  $EE'$ ,  $MM'$  и  $PP'$  с главными моментами инерции. С помощью формулы (5) и для этих осей получаем выражения для периодов крутильных колебаний:

$$(b^2 + c^2)T_E^2 = b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2 \quad (9)$$

$$(a^2 + c^2)T_P^2 = a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2 \quad (10)$$

$$(a^2 + b^2)T_M^2 = a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 \quad (11)$$

### Ход работы:

Измерим периоды колебаний куба относительно главных осей, главной диагонали и диагонали, соединяющей противоположные ребра противоположных граней. Результаты занесем в таблицу 1. Для куба была выбрана амплитуда колебаний в  $21.5^\circ \pm 0.05^\circ$ .

№ опыта	Кол-во колебаний $N$	Полное время, сек	Расчитанный период, сек
главная ось			
1	10	52.6	5.26
2	10	52.42	5.242
3	10	52.22	5.22
4	10	53.57	5.357
5	10	52.32	5.232
среднее значение для главной оси: $5.262 \pm 0.099$ сек.			
главная диагональ			
1	10	52.55	5.255
2	10	51.89	5.189
3	10	52.54	5.254
4	10	52.57	5.257
5	10	52.26	5.226
среднее значение для главной диагонали: $5.236 \pm 0.099$ сек.			
дополнительная диагональ			
1	10	52.21	5.221
2	10	53.02	5.302
3	10	52.10	5.21
4	10	52.73	5.273
5	10	52.32	5.232
среднее значение для дополнительной диагонали: $5.2476 \pm 0.1$ сек.			

Таблица 1. Результаты измерения времени 10 крутильных колебаний для разных осей куба

**Измерим длину ребра куба:** Длину ребра куба  $a$  измерим штангенциркулем. Получим:  $a = 9.27 \pm 0.05$  см. Проверим справедливость формул (9), (10) и (11).

**Найдем соответствующие формулы для куба:** Для начала заметим, что косинусы углов между главной диагональю куба и каждой из основных осей равны в силу симметрии друг другу и равны  $\cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

Тогда для периода крутильных колебаний относительно главной диагонали куба получим формулу

$$T_d = \sqrt{\frac{a^2 T_x^2 + a^2 T_y^2 + a^2 T_z^2}{3a^2}} \quad (12)$$

Подставляя значения из таблицы в формулу выше получим, что  $T_{d_{расчит.}} \approx 5.262 \pm 0.087$ . Полученное экспериментально значение  $T_{d_{эспер.}} \approx 5.236 \pm 0.099$ , что хорошо соотносится с экспериментом.

Аналогичным образом получим формулу для дополнительной оси:

$$T_{dd} = \sqrt{\frac{a^2 T_y^2 + a^2 T_z^2}{2a^2}} \quad (13)$$

Подставляя значения из таблицы в формулу выше получим, что  $T_{dd_{расчит.}} \approx 5.248 \pm 0.09$ . Полученное экспериментально значение  $T_{dd_{эспер.}} \approx 5.2476 \pm 0.09$ , что еще лучше соотносится с экспериментом.

**Перейдем к параллелепипеду:** Измерим параметры параллелепипеда и рассчитаем длину его диагонали. Результат занесем в таблицу 2.

a	$10.03 \pm 0.05$ см.
b	$5.03 \pm 0.05$ см.
c	$15.03 \pm 0.05$ см.
d	$18.75 \pm 0.005$ см.

Таблица 2. Результаты измерения параметров параллелепипеда

**Проведем серию экспериментов по расчету времени крутильных колебаний относительно нескольких осей параллелепипеда:** Для параллелепипеда была выбрана амплитуда колебаний в  $31.5^\circ \pm 0.05^\circ$ . Результат занесем в таблицу 3.

**Проверим верность формул:** Используя значения из таблицы, а также измеренные размеры параллелепипеда, проверим справедливость формул (9), (10) и (11).

Расчитаем период крутильных колебаний для каждой из осей:  $MM'$ ,  $EE'$ ,  $PP'$  и  $DD'$ :

$$T_E = \sqrt{\frac{(b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2)}{(b^2 + c^2)}} \quad (14)$$

$$T_P = \sqrt{\frac{(a^2 T_x^2 + c^2 T_z^2)}{(a^2 + c^2)}} \quad (15)$$

$$T_M = \sqrt{\frac{(a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2)}{(a^2 + b^2)}} \quad (16)$$

$$T_D = \sqrt{\frac{(a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)}} \quad (17)$$

Подставим значения из таблицы и получим:

$$T_E = 5.659 \text{ с.} \pm 0.23$$

$$T_P = 5.788 \text{ с.} \pm 0.11$$

$$T_M = 6.286 \text{ с.} \pm 0.117$$

$$T_D = 5.836 \text{ с.} \pm 0.57$$

Как видно, рассчитанные значения с высокой точностью сходятся со значениями из таблицы. Это подтверждает верность формул, приведенных выше.

**Построим проекции эллипсоида инерции для параллелепипеда:** Чтобы построить проекции эллипсоида на главные плоскости, воспользуемся фактом, что величина  $r = \frac{1}{\sqrt{T^2 - T_p^2}}$  пропорциональна расстоянию от центра масс тела до точки пересечения эллипсоида с данной осью. Рассчитаем данную величину для каждой из главных осей:

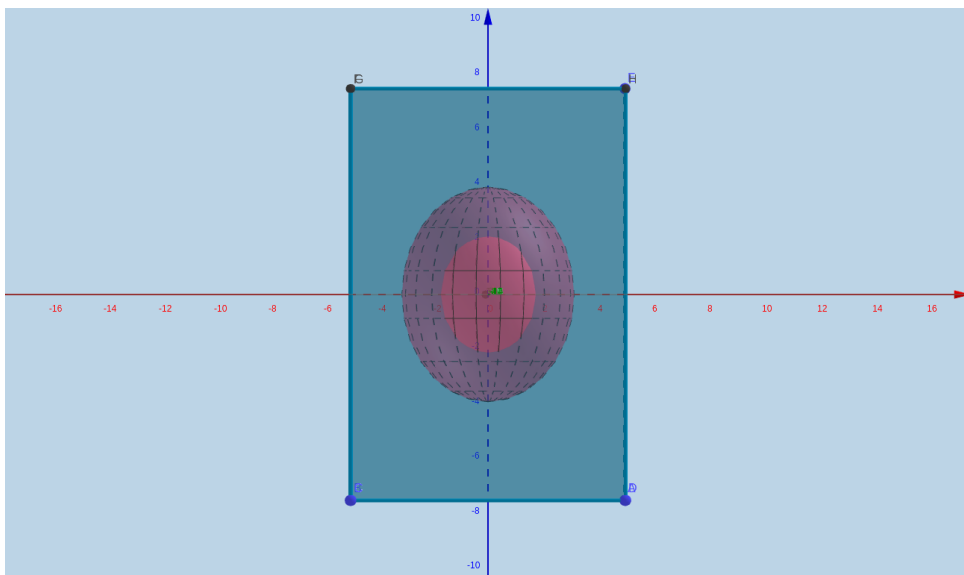
$$r_x = 0.209 \pm 0.001$$

$$r_y = 0.200 \pm 0.001$$

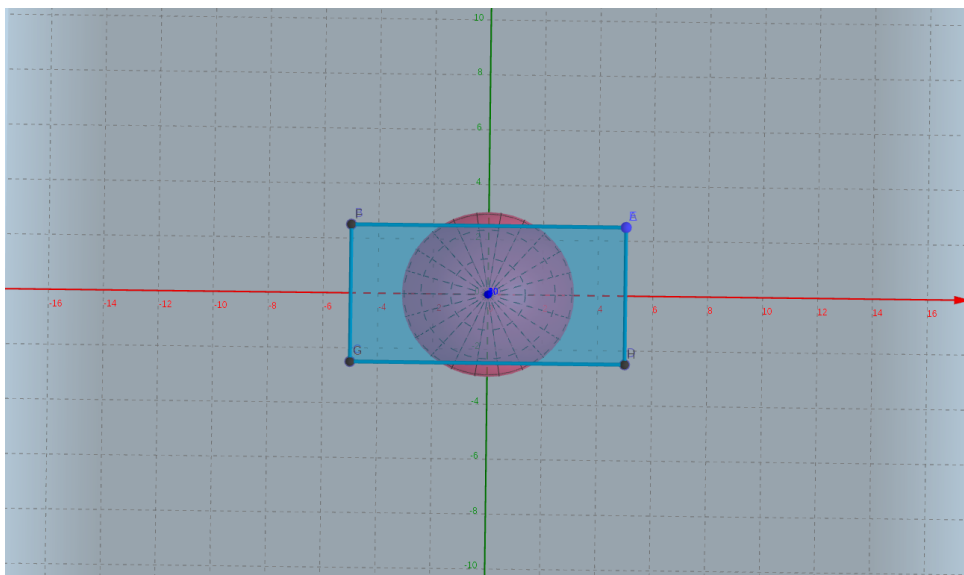
$$r_z = 0.261 \pm 0.001$$

Поскольку данные коэффициенты только пропорциональны полуосям эллипса, для наглядности чертежа домножим каждый из них на 15.

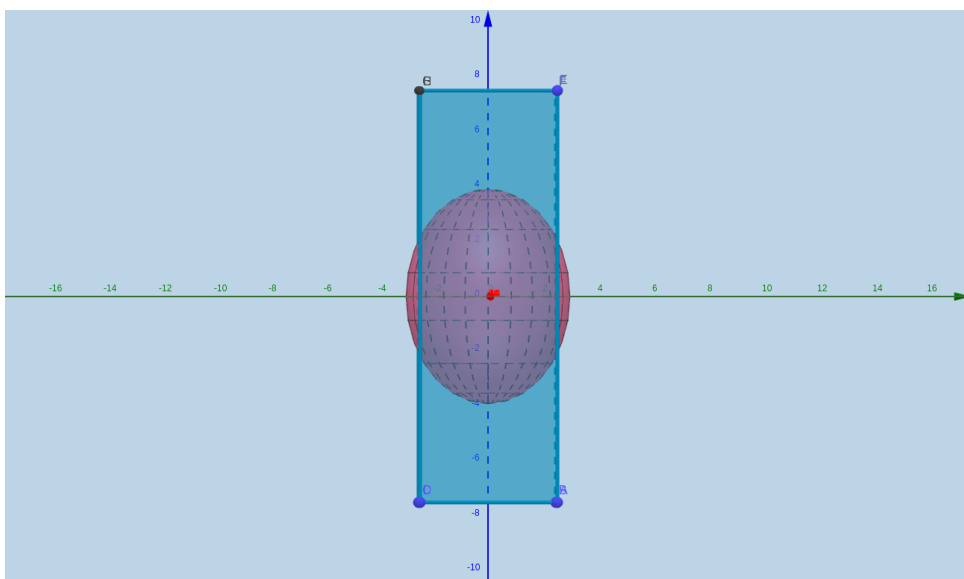
Построим эллипсоид инерции в разных сечениях.



(a) Эллипсоид инерции в сечении  $yz$



(b) Эллипсоид инерции в сечении  $xy$



(c) Эллипсоид инерции в сечении  $xz$

Рис. 2. Эллипсоид инерции в различных сечениях

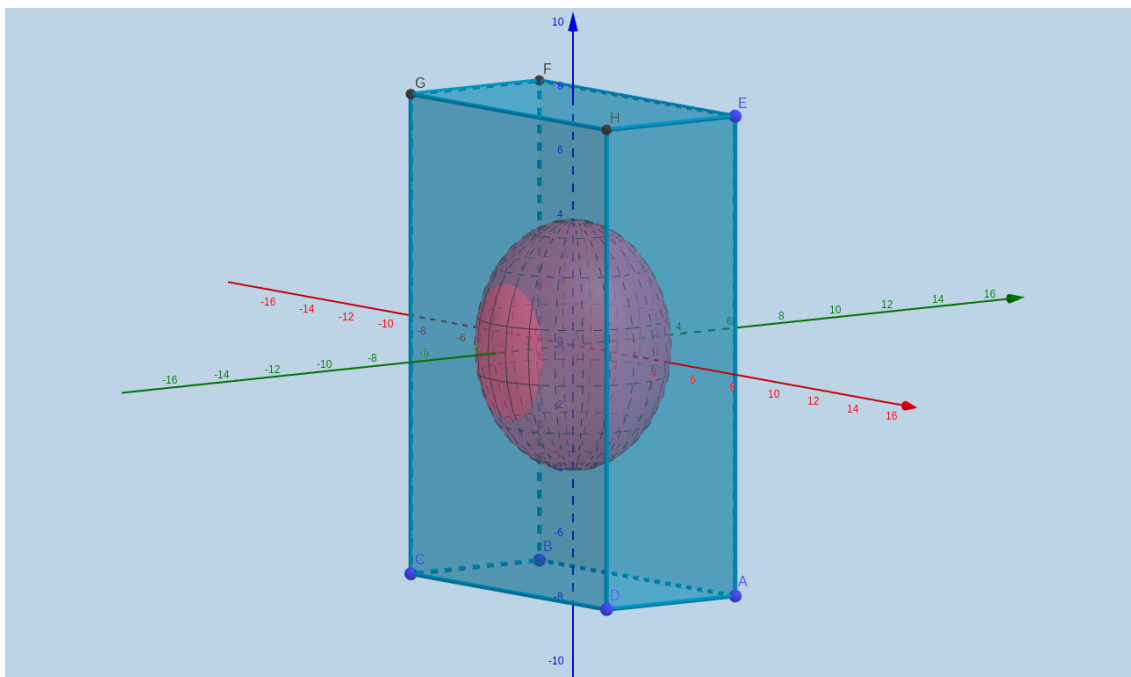


Рис. 3. Эллипсоид инерции в трехмерном формате

### Заключение:

В процессе лабораторной работы была экспериментально доказана верность формул, позволяющих рассчитывать момент инерции (а следовательно и период крутильных колебаний) относительно произвольной оси, проходящей через центр масс тела, используя только моменты инерций основных осей тела. Кроме того, был построен эллипсоид инерции для тела, моменты которого измерялись.

№ опыта	Кол-во колебаний $N$	Полное время, сек	Расчитанный период, сек
ось $AA'$			
1	10	62.35	6.235
2	10	62.82	6.282
3	10	62.33	6.233
4	10	62.68	6.268
среднее значение для оси: $6.2545 \pm 0.099$ сек.			
ось $BB'$			
1	10	64.11	6.411
2	10	64.04	6.404
3	10	64.14	6.414
4	10	64.27	6.427
среднее значение для оси $6.414 \pm 0.099$ сек.			
ось $CC'$			
1	10	56.05	5.605
2	10	55.77	5.577
3	10	55.72	5.572
4	10	55.23	5.523
среднее значение для оси $5.569 \pm 0.099$ сек.			
ось $DD'$			
1	10	59.85	5.985
2	10	59.64	5.964
3	10	60.12	6.012
4	10	59.32	5.932
среднее значение для оси $5.973 \pm 0.099$ сек.			
ось $EE'$			
1	10	57.43	5.743
2	10	57.45	5.745
3	10	58.29	5.829
4	10	57.58	5.758
среднее значение для оси $5.769 \pm 0.099$ сек.			
ось $PP'$			
1	10	58.20	5.820
2	10	58.23	5.823
3	10	58.05	5.805
4	10	58.25	5.825
среднее значение для оси $5.818 \pm 0.099$ сек.			
ось $MM'$			
1	10	59.32	5.932
2	10	59.47	5.947
3	10	59.29	5.929
4	10	59.01	5.901
среднее значение для оси $5.927 \pm 0.099$ сек.			

Таблица 3. Результаты измерения времени 10 крутильных колебаний для разных осей параллелепипеда