# Семинарский лист 2.6

Елизавета Орешонок
Telegram

Версия от 11.12.2020 23:19

Перейдя к полярным или обобщенным полярным координатам, вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой.

## Задача 1

$(x^2+y^2)^2 = 2x^3$
В полярных координатах: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $|J| = r$

$(x^2+y^2)^2 = 2x^3 \;\Leftrightarrow\; r^4 = 2r^3\cos^3\varphi \;\Leftrightarrow\; r = 2\cos^3\varphi \;\Leftrightarrow\; \cos\varphi = \sqrt[3]{\frac{r}{2}}$

$r \geq 0 \;\Rightarrow\; \cos\varphi \geq 0 \;\Rightarrow\; \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Площадь фигуры:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^6\varphi\,d\varphi = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi\,d\varphi = \frac{\cos^5\varphi\sin\varphi}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{5\cos^3\varphi\sin\varphi}{12}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{5\cos\varphi\sin\varphi}{8}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{8}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{5\pi}{8}$$

## Задача 2

$\underline{(x^2+y^2)^3 = x^4+y^4}$

- Используем пол. координаты: $\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

- Кривая становится $r^6 = r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi \iff r^2 = \cos^4\varphi + \sin^4\varphi = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 - 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi =$

$1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2} \implies r = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2}}$.

- $S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{1-\sin^2 2\varphi/2}} \underbrace{r}_{\text{Якобиан}}\,dr = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} 1 - \frac{(1/2 - 1/2\cos 4\varphi)}{2} = \frac{1}{4}\int\limits_0^{2\pi} \frac{3}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{2}\,d\varphi =$

$$\frac{3\pi}{4}+\frac{1}{16}\int\limits_0^{8\pi}\cos\Theta\,d\Theta=\boxed{\frac{3\pi}{4}}.$$

## Задача 3

$(x^2+y^2)^2=xy$

В полярных координатах: $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$

$$(x^2+y^2)^2=xy\ \Leftrightarrow\ r^4=r^2\sin\varphi\cos\varphi\ \Leftrightarrow\ r^2=\frac{1}{2}\sin2\varphi\ \Leftrightarrow\ \sin2\varphi=2r^2$$

$$r^2\geq0\ \Rightarrow\ \sin2\varphi\geq0\ \Rightarrow\ \varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$$

Площадь фигуры:

$$S=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}r^2(\varphi)\,d\varphi+\int\limits_\pi^{\frac{3\pi}{2}}r^2(\varphi)\,d\varphi\right)=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\varphi\,d\varphi+\int\limits_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\sin2\varphi\,d\varphi\right)=$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\cos2\varphi\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\cos2\varphi\,\Big|_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\right)=-\frac{1}{4}\left(-1-1-1-1\right)=1$$

## Задача 5

$(x^2+y^2)^3=x^4y$

В полярных координатах: $x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi$

$$(x^2+y^2)^3=x^4y\ \Leftrightarrow\ r^6=r^5\sin\varphi\cos^4\varphi\ \Leftrightarrow\ r=\sin\varphi\cos^4\varphi$$

$$r\geq0,\cos^4\varphi\geq0\ \Rightarrow\ \sin\varphi=\frac{r}{\cos^4\varphi}\geq0\ \Rightarrow\ \varphi\in[0;\pi]$$

Площадь фигуры:

$$S=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi r^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi\sin^2\varphi\cos^8\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi(1-\cos^2\varphi)\cos^8\varphi\,d\varphi=$$

$$\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\pi\cos^8\varphi\,d\varphi-\int\limits_0^\pi\cos^{10}\varphi\,d\varphi\right)=\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\pi\cos^8\varphi\,d\varphi-\frac{\cos^9\varphi\sin\varphi}{10}\,\Big|_0^\pi-\frac{9}{10}\int\limits_0^\pi\cos^8\varphi\,d\varphi\right)=$$

$$\frac{1}{20}\int\limits_0^\pi\cos^8\varphi\,d\varphi=\frac{1}{20}\left(\frac{\cos^7\varphi\sin\varphi}{8}\,\Big|_0^\pi+\frac{7}{8}\int\limits_0^\pi\cos^6\varphi\,d\varphi\right)=\frac{7}{160}\left(\frac{\cos^5\varphi\sin\varphi}{6}\,\Big|_0^\pi+\frac{5}{6}\int\limits_0^\pi\cos^4\varphi\,d\varphi\right)=$$

$$\frac{7}{192}\left(\frac{\cos^3\varphi\sin\varphi}{4}\,\Big|_0^\pi+\frac{3}{4}\int\limits_0^\pi\cos^2\varphi\,d\varphi\right)=\frac{7}{256}\left(\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{2}\,\Big|_0^\pi+\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi\varphi\,d\varphi\right)=\frac{7\pi}{512}$$