

Семинарский лист 2.6

Денис Козлов
[Telegram](#)

Елизавета Орешонок
[Telegram](#)

Версия от 12.12.2020 01:50

Переходя к полярным или обобщенным полярным координатам, вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой.

Задача 1

$$(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$$

В полярных координатах: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $|J| = r$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2x^3 \Leftrightarrow r^4 = 2r^3 \cos^3 \varphi \Leftrightarrow r = 2 \cos^3 \varphi \Leftrightarrow \cos \varphi = \sqrt[3]{\frac{r}{2}}$$

$$r \geq 0 \Rightarrow \cos \varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Площадь фигуры:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^6 \varphi d\varphi = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi = \frac{\cos^5 \varphi \sin \varphi}{3} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{5 \cos^3 \varphi \sin \varphi}{12} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{5 \cos \varphi \sin \varphi}{8} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{5\pi}{8} \end{aligned}$$

Задача 2

$$(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$$

- Используем пол. координаты: $\begin{cases} x = r \cos \varphi; \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$
- Кривая становится $r^6 = r^4 \cos^4 \varphi + r^4 \sin^4 \varphi \Leftrightarrow r^2 = \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2 - 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi =$
 $1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2} \Rightarrow r = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2}}.$

$$\bullet \quad S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{1-\sin^2 2\varphi/2}} \underbrace{r}_{\text{Якобиан}} dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 - \frac{(1/2 - 1/2 \cos 4\varphi)}{2} d\varphi = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{2} d\varphi =$$

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{16} \int_0^{8\pi} \cos \Theta d\Theta = \boxed{\frac{3\pi}{4}}.$$

Задача 3

$$(x^2 + y^2)^2 = xy$$

В полярных координатах: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

$$(x^2 + y^2)^2 = xy \Leftrightarrow r^4 = r^2 \sin \varphi \cos \varphi \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Leftrightarrow \sin 2\varphi = 2r^2$$

$$r^2 \geq 0 \Rightarrow \sin 2\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$$

Площадь фигуры:

$$S = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi \right) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\cos 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos 2\varphi \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \right) = -\frac{1}{4} (-1 - 1 - 1 - 1) = 1$$

Задача 5

$$(x^2 + y^2)^3 = x^4 y$$

В полярных координатах: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

$$(x^2 + y^2)^3 = x^4 y \Leftrightarrow r^6 = r^5 \sin \varphi \cos^4 \varphi \Leftrightarrow r = \sin \varphi \cos^4 \varphi$$

$$r \geq 0, \cos^4 \varphi \geq 0 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{r}{\cos^4 \varphi} \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [0; \pi]$$

Площадь фигуры:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos^8 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \varphi) \cos^8 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi \cos^8 \varphi d\varphi - \int_0^\pi \cos^{10} \varphi d\varphi \right) = \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi \cos^8 \varphi d\varphi - \frac{\cos^9 \varphi \sin \varphi}{10} \Big|_0^\pi - \frac{9}{10} \int_0^\pi \cos^8 \varphi d\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{20} \int_0^\pi \cos^8 \varphi d\varphi = \frac{1}{20} \left(\frac{\cos^7 \varphi \sin \varphi}{8} \Big|_0^\pi + \frac{7}{8} \int_0^\pi \cos^6 \varphi d\varphi \right) = \frac{7}{160} \left(\frac{\cos^5 \varphi \sin \varphi}{6} \Big|_0^\pi + \frac{5}{6} \int_0^\pi \cos^4 \varphi d\varphi \right) = \\ &= \frac{7}{192} \left(\frac{\cos^3 \varphi \sin \varphi}{4} \Big|_0^\pi + \frac{3}{4} \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi \right) = \frac{7}{256} \left(\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{2} \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi \varphi d\varphi \right) = \frac{7\pi}{512} \end{aligned}$$

Найдите объем тела, заданного неравенствами.

Задача 7

$$\underline{x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, x + y + z \leq 4}$$

- $x^2 + y^2 \leq 1 \Rightarrow x \in [-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]; y \in [-1, 1]$.
- $x + y + z \leq 4 \Rightarrow z \leq 4 - x - y$. Условие $x + y \leq 4$ при данных ограничениях выполнено всегда.

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^{4-x-y} dz = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (4-x-y) dx = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (4-y) dx - \underbrace{\int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x dx}_0 = \\ &= 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} \cdot (4-y) dy = 8 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy - 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} \cdot y dy. \end{aligned}$$

$$\text{Замена} \begin{cases} t = \arcsin y; \\ t \in [-\pi/2, \pi/2]; \\ dt = \frac{dy}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$$

$$\dots 8 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt - 2 \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \, dt}_0 = \boxed{8\pi}.$$

Задача 8

$$\underline{x^2 + y^2 \leq 1, \, z \geq 0, \, x + y + z \leq 1}$$

$$\bullet \, x^2 + y^2 \leq 1 \implies x \in [-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]; \, y \in [-1, 1].$$

$$\bullet \, x + y + z \leq 1 \implies z \leq 1 - x - y.$$

$$\bullet \, \text{Также необходимо условие } x + y \leq 1.$$

При $y \in [-1, 0]$ оно соблюдается, в ином случае x сверху придётся ограничить значением $1 - y$.

Советую сделать сначала предыдущий номер, там подробно описана замена, которую я использую.

$$\begin{aligned} \bullet \, S &= \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^{1-x-y} dz + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} dz = 2 \int_{-1}^0 (1-y) \sqrt{1-y^2} \, dy - \underbrace{\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x \, dx}_0 \\ &= \int_0^1 (1-y) \left((1-y) + \sqrt{1-y^2} \right) dy - \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} x \, dx = 2 \int_{-1}^0 \sqrt{1-y^2} \, dy - 2 \int_{-1}^0 y \sqrt{1-y^2} \, dy + \\ &+ \int_0^1 (1-2y+y^2) \, dy + \int_0^1 (1-y) \sqrt{1-y^2} \, dy - \frac{1}{2} \int_0^1 1-2y+y^2-1+y^2 \, dy = 2 \int_{-\pi/2}^0 dt - 2 \int_{-\pi/2}^0 \sin t \, dt + \\ &+ \left(t - t^2 + \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 \right) + \int_0^1 \sqrt{1-y^2} \, dy - \int_0^1 y \sqrt{1-y^2} \, dy - \frac{1}{2} \int_0^1 -2y+2y^2 \, dy = \pi + -2 \left(-\cos t \Big|_{-\pi/2}^0 \right) + \frac{1}{3} + \\ &\int_0^{\pi/2} dt - \int_0^{\pi/2} \sin t \, dt + \int_0^1 y - y^2 \, dy = \pi + 2 + \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} + \left(\cos t \Big|_0^{\pi/2} \right) + \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \Big|_0^1 \right) = \frac{3\pi}{2} + 2 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Задача 10

$$\underline{x \leq x^2 + y^2 \leq 2x, \, 0 \leq z \leq x^2 y^2}$$

$$\bullet \, \text{Цилиндрические координаты: } \begin{cases} x = r \cos \varphi; \\ y = r \sin \varphi; \\ z = z \end{cases}$$

$$\bullet \, x \leq x^2 + y^2 \leq 2x \implies r \cos \varphi \leq r^2 \leq 2r \cos \varphi \implies \cos \varphi \leq r \leq 2 \cos \varphi \implies \cos \varphi \geq 0 \implies \varphi \in [-\pi/2, \pi/2].$$

$$\bullet \, 0 \leq z \leq x^2 y^2 = r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \frac{r^4}{4} \sin^2 2\varphi.$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} dr \int_0^{\frac{r^4}{4} \sin^2 2\varphi} r dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \frac{r^5}{4} \sin^2 2\varphi dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \frac{r^5}{4} dr = \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi \left(\frac{r^6}{6} \Big|_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \right) = \\
& = \frac{63}{24} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\varphi \cos^6 \varphi d\varphi = \frac{63}{24} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right)^3 d\varphi = \frac{63}{24} \cdot \frac{1}{16} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4\varphi) \cdot (1 + \cos 2\varphi)^3 d\varphi = \\
& \frac{63}{24} \cdot \frac{1}{16} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4\varphi) \left(1 + 3 \cos 2\varphi + 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) + \cos 2\varphi \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) \right) d\varphi = \\
& \frac{63}{24 \cdot 16} \left(\frac{5}{2} \cdot \pi - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \right) = \boxed{\frac{63}{24 \cdot 16} \cdot \frac{7}{4} \pi}.
\end{aligned}$$

Как мы это получили: воспользуемся периодичностью и поймём, что после подстановки все слагаемые обратятся

в 0, за исключением $1 + \frac{3}{2}$, что даёт вклад $\frac{5}{2}$; и $\frac{-3}{2} \cdot \cos^2 4\varphi = \frac{-3}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 8\varphi \right)$, что даёт вклад $\frac{-3}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

($\cos 8\varphi$ аналогично уходит по периодичности).

Задача 11

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, \quad x^2 + y^2 \leq 2z \Rightarrow r^2 \leq 3, \quad r^2 \cos^2 \theta \leq 2r \cos^2 \theta \Rightarrow r \leq 2 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}, r \leq \sqrt{3}$$

Хотим найти пересечение параболоида и сферы для интегрирования

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = x^2 + y^2 - 2z \Rightarrow z^2 + 2z - 3 = 0 \Rightarrow z = 1 \text{ отрицательные не подойдут} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta}} r^2 dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r^2 dr = \\
&= 2\pi \left(\int_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{8 \cos^3 \theta}{3 \sin^6 \theta} \sin \theta d\theta + \int_{\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3} \sin \theta d\theta \right) = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin \theta \\ \cos^2 \theta = 1 - t^2 \\ dt = \cos \theta d\theta \end{array} \right\} = \\
&= 2\pi \left(\frac{8}{3} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{1 - t^2}{t^5} dt + \sqrt{3} \left(0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \\
&= 2\pi \left(1 + \frac{8}{3} \left(-\frac{9}{16} + \frac{9}{16} \right) \right) = 2\pi
\end{aligned}$$

Задача 12

$$\underline{x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Цилиндрическая замена.

- $r^2 \leq z \leq r \implies r \in [0, 1]$.

- $$\int_0^1 r \, dr \int_{r^2}^r dz \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^1 r \, dr \int_{r^2}^r dz = 2\pi \int_0^1 r^2 - r^3 \, dr = 2\pi \int_0^1 r^2 - r^3 \, dr = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \bigg|_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{6}}.$$