1 Семинарский лист 2

Задача 1.1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}},\ a_n = \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 : \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}\ln n} = e^0 = 1 \implies a_n \sim \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ сходится } \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}} \text{ по признаку сравнения.}$$

Задача 1.2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-4)}{3^n \cdot n!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3(n+1)-4)\cdot 3^n \cdot n!}{3^{n+1}\cdot (n+1)!} = \frac{3(n+1)-4}{3(n+1)} = \frac{3n-1}{3n+3} = \frac{1-\frac{\frac{1}{3}}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \left(1-\frac{1}{3n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= 1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)-\frac{\frac{1}{3}}{n}+\frac{\frac{1}{3}}{n^2}-O\left(\frac{1}{3n^3}\right) = 1-\frac{\frac{4}{3}}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \implies \begin{cases} p = \frac{4}{3} \\ \delta = 1 \end{cases} \implies \text{ряд сходится по признаку Гаусса.}$$

Задача 1.3.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n},\ f(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

$$f'(x) = -\frac{\ln x + 1}{x^2\ln^2 x} = 0 \iff \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq 1 \\ x = \frac{1}{e} \end{cases} \implies f(x) \text{ монотонно убывает при } x > 1$$

$$f(n+t) \leqslant a_n \leqslant f((n-1)+t)$$

$$\int_n^{n+1} f(x)dx \leqslant a_n \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

$$\int_2^{N+1} f(x)dx \leqslant \sum_{n=2}^{N} a_n \leqslant \int_1^{N} f(x)dx$$

$$\int \frac{1}{x\ln x}dx = \begin{bmatrix} t = \ln x \\ e^t = x \\ dx = e^t dt \end{bmatrix} = \int \frac{e^t}{t\cdot e^t}dt = \int \frac{1}{t}dt = \ln t + C = \ln\ln x + C$$

$$\int_2^{N+1} f(x)dx = \ln\ln(N+1) - \ln\ln 2$$

$$\int_1^{N} f(x)dx = \ln\ln N - 0 = \ln\ln N$$

Ответ: $\ln\ln(N+1) - \ln\ln 2 \leqslant \sum\limits_{2}^{N} \frac{1}{n\ln n} \leqslant \ln\ln N$

Задача 1.4 (19).

$S_n = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}$— сходящийся ряд

$S_N \to S, N \to \infty$

Доказать: $S_N = S - \frac{1}{N} + o(\frac{1}{N}), N \to \infty$

Теорема Штольца: Пусть x_n и y_n обе сходится к нулю, причём $0 < y_n < y_{n-1}$ $\forall n$ т.е. $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right]$. Тогда, если $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - xn - 1}{y_n - y_{n-1}} = A$, то $\exists \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = A$.

Обозначим $x_n = S - S_n \to 0, y_n = \frac{1}{n} \to 0, \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \left[\frac{0}{0}\right]$

Расмотрим $\frac{x_n - xn - 1}{y_n - y_{n-1}} = \frac{S - S_n - (S - S_{n-1})}{\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}} = \frac{S_{n-1} - S_n}{\frac{n-1-n}{n(n-1)}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{\frac{1}{n(n-1)}} = \frac{1/n^2}{\frac{1}{n^2-n}} = \frac{n^2 - n}{n^2} = \frac{1 - \frac{1}{n}}{1} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

По т. Штольца $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, т.е. $\frac{x_n}{y_n} = 1 + o(1), x_n = y_n + o(y_n)$

$x_n = S - S_n = \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right) \implies S_n = S - \frac{1}{n} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, ч.т.д.

Задача 1.5.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} = S - \frac{1}{N2^N} + o\left(\frac{1}{N2^N}\right)$$

$$q_n = S - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n}, \quad p_n = \frac{1}{N2^N}$$

По теореме Штольца: $\lim_{n\to\infty} \frac{q_n}{p_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{q_n - q_{n-1}}{p_n - p_{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{S - S_n - S + S_{n-1}}{\frac{1}{N2^N} - \frac{1}{(N-1)2^{N-1}}} = \frac{-\frac{1}{N2^N} \cdot N(N-1)2^{2N-1}}{2^{N-1}(N-1-2N)} = 1,$

$\frac{q_n}{p_n} = 1 + o(1) \Rightarrow q_n = p_n + o(p_n) \Leftrightarrow S - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} = \frac{1}{N2^N} + o\left(\frac{1}{N2^N}\right) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n2^n} = S - \frac{1}{N2^N} \pm o\left(\frac{1}{N2^N}\right),$

что и требовалось доказать.

Задача 1.6 (23)**.**

$S = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$ - представить S в виде суммы ряда с общим членом $a_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

$b_n = \frac{1}{n(n+1)} \approx \frac{1}{n^2}$

$sin\frac{1}{n^2} = u_n \approx \frac{1}{n^2}$

$u_n - b_n = a_n \approx ?$

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots = 1$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} = S - 1 \implies S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n = u_n - b_n = \sin\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6}\frac{1}{n^6} - \frac{1}{n^2}\frac{1}{1+\frac{1}{n}} \approx \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6n^6} - \frac{1}{n^2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{6n^6} + \frac{1}{n^3} \approx \frac{1}{n^3}$$

$$\implies S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$