Семинарский лист 2.5

Анастасия Григорьева
Telegram

Денис Козлов
Telegram

Елизавета Орешонок
Telegram

Ира Голобородько
Telegram

Версия от 05.12.2020 12:00

Задайте в полярных координатах множество D, заданное неравенствами в декартовых координатах. Предполагая функцию f непрерывной на D, преобразуйте интеграл в полярных координатах к повторному.

Задача 1

$$x^2 + y^2 \leq 2x$$

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D := r^2 \leq 2\,r\cos\varphi \Leftrightarrow r(r - 2\cos\varphi) \leq 0 \Leftrightarrow r \in [0; 2\cos\varphi]\,, \cos\varphi \geq 0$$

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\,dr = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr =$$

$$\left\{ r^2 \leq 2\,r\cos\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi \geq \frac{r}{2} \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\arccos\frac{r}{2}; \arccos\frac{r}{2}\right] \right\}$$

$$= \int\limits_0^2 r\,dr \int\limits_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi$$

Задача 2

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 \geq 1$$

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D := \left\{ \begin{array}{rcl} r^2 & \leq & 2\,r\cos\varphi, \\ r^2 & \geq & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r & \in & [0; 2\cos\varphi]\,, \\ \cos\varphi & \geq & 0, \\ r & \geq & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r & \in & [1; 2\cos\varphi]\,, \\ \cos\varphi & \geq & 1/2, \end{array} \right.$$

$$\cos\varphi \geq 1/2 \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi\, dr = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{1}^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr =$$

$$\left\{ r^2 \leq 2\,r\cos\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi \geq \frac{r}{2} \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\arccos\frac{r}{2}; \arccos\frac{r}{2}\right] \right\}$$

$$= \int\limits_{1}^{2} r\, dr \int\limits_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi$$

Задача 3

$(x^2+y^2)^2 \leqslant 4xy$. Перепишем неравенство в полярных координатах:

$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 \leqslant 4r^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi \iff r^2 \leqslant 2\sin 2\varphi.\ \circledast$

Делаем вывод, что $2\sin 2\varphi \geqslant 0 \iff 2\varphi \in [2n\pi, (2n+1)\pi] \implies \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

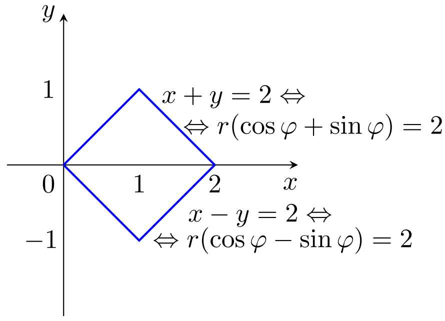
$\circledast \rightarrow\ r \leqslant \sqrt{2\sin 2\varphi}$.

Рисунок тут даже не требуется, можно сразу записать интеграл.

$$\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2\sin 2\varphi}} f\cdot r\; dr + \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2\sin 2\varphi}} f\cdot r\; dr.$$

Задача 4

$|x-1|+|y| \leq 1$



Область представляет собой ромб с центром в точке $(1,0)$
Из рисунка видно, что угол φ лежит в пределах $[-\pi/4;\pi/4]$
Можно определить и отрезки для r :

$$r \in \begin{cases} \left[0; \dfrac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}\right], & \varphi \geq 0 \\ \left[0; \dfrac{2}{\cos\varphi-\sin\varphi}\right], & \varphi < 0 \end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi\, d\varphi\, dr = \int\limits_{-\pi/4}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{2}{\cos\varphi-\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr + \int\limits_{0}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr =$$

$$= \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{2}{\cos\varphi+|\sin\varphi|}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr$$

При $r \in [0;\sqrt{2}]$ все углы от $-\pi/4$ до $\pi/4$ лежит в нужной области

При $r \in (\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$ необходимо $2 \geq r(\cos\varphi + |\sin\varphi|)$
Так как относительно Oy все симметрично, найдем границу при $\varphi > 0$:
из геометрии рисунка (треугольников и всего такого)
$r\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{r} \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4} - \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{r}$
Повторный интеграл с найденными границами:

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} r\, dr \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} r\, dr \int\limits_{\arccos\frac{\sqrt{2}}{r}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{r}{\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi$$

Задача 5

D – множество, лежащее в круге $x^2+y^2 \leqslant 1$ вне кривой $r = \cos 3\varphi$.

Для начала простое. $x^2+y^2 \leqslant \iff r \leqslant 1 \implies r \in [0,1]$.

Теперь разберёмся с кривой $r = \cos 3\varphi$.

Если $r \in [0,1]$, то $\cos 3\varphi \in [0,1] \implies 3\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right]$.

$$\begin{cases} n=0 \ \rightarrow \ \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]; \\ n=1 \ \rightarrow \ \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right]; \\ n=2 \ \rightarrow \ \left[\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Т.е. $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

[picture is coming soon]

Мы готовы записать интеграл, не забываем указывать якобиан!

$$\boxed{\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \int\limits_{\cos 3\varphi}^{1} r\cdot f\ dr + \int\limits_{\pi/2}^{5\pi/6} d\varphi \int\limits_{\cos 3\varphi}^{1} r\cdot f\ dr + \int\limits_{7\pi/6}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_{\cos 3\varphi}^{1} r\cdot f\ dr}$$

Задача 6

D — множество, лежащее вне окружности $x^2+y^2=1$ и внутри петель кривой $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$

Так как область лежит вне окружности $x^2+y^2=1$, в полярных координатах $r>1$.

Определим условия, необходимые и достаточные для того, чтобы координаты лежали внутри петель кривой:
$(x^2+y^2)^2=2\,(x^2-y^2)\Leftrightarrow r^4=2\,r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\Leftrightarrow r^2=2\cos 2\,\varphi$

Тогда точка с полярными координатами (r,φ) лежит внутри петель, если $r^2\le 2\cos 2\,\varphi\Leftrightarrow \cos 2\,\varphi\ge\dfrac{r^2}{2}\Leftrightarrow\varphi\in\left[-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{r^2}{2};\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{r^2}{2}\right]$

Повторный интеграл: $\displaystyle\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{2}} f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,d\varphi$

Перейдя к полярным координатам, вычислите интеграл.

Задача 7

$$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy,\ \ D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}.$$

D – круг с радиусом 2 $\implies$ $r\in[0,2]$.

$\varphi\in[0,2\pi)$, как и всегда.

$$\int\limits_0^2 dr\int\limits_0^{2\pi} r\cdot\ln(1+r^2)d\varphi=\int\limits_0^2 2\pi\cdot r\cdot\ln(1+r^2)dr=\pi\int\limits_0^2 2\cdot r\cdot\ln(1+r^2)dr.$$

Замена $\begin{cases} t=1+r^2;\\ dt=2r\,dr;\\ r\in[0,2]\implies t\in[1,5]\end{cases}$

$$\dots=\pi\int\limits_1^5 \ln(t)\,dt=\pi\cdot\left(t\ln t-t\Big|_1^5\right)=\pi\cdot(5\ln 5-5+1)=\boxed{\pi(5\ln 5-4)}\,.$$

Задача 8

$$\iint\limits_D \frac{xdxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \;\; D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 2x\}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow D = \{(r,\varphi)|r \leqslant 2\cos\varphi\}$$

$$\iint\limits_D \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{4-r^2}} r d\varphi dr = \int\limits_0^2 dr \int\limits_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} \frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{4-r^2}} d\varphi = \int\limits_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}} dr \int\limits_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} \cos\varphi d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}} dr \, \sin\varphi|_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} = \int\limits_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}} \sqrt{4-r^2} dr = \int_0^2 r^2 dr = \frac{8}{3}$$

Перейдите к переменным, в которых область интегрирования имеет вид прямоугольника, и вычислите интеграл.

Задача 9

$$\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{x} dxdy; \;\; D = \{(x,y) \mid 1-x \leqslant y \leqslant 3-x, \;\; \frac{x}{2} \leqslant y \leqslant 2x\}.$$

Область интегрирования имеет вид прямоугольника – значит, нам нужно, чтобы граница каждого интеграла изменялась от одной константы до другой константы.

$$\begin{cases} u := x+y \implies 1 \leqslant u \leqslant 3 \text{ из 1-го нер-ва.} \\ v := \dfrac{y}{x} \implies \dfrac{1}{2} \leqslant v \leqslant 2 \text{ из 2-го нер-ва.} \end{cases}$$

Т.е. с помощью подобной замены мы смогли выполнить поставленную задачу (обе координаты ограничены только константами и не зависят друг от друга).

Выражаем теперь, обратно, x и y через u и v.

$x = u - y$.

$$\begin{cases} y = v\cdot x = v\cdot(u-y) = v\cdot u - v\cdot y \implies y = \dfrac{v\cdot u}{1+v}; \\ x = u - \dfrac{v\cdot u}{1+v} = \dfrac{u+uv-uv}{1+v} = \dfrac{u}{1+v}. \end{cases}$$

Считаем якобиан. Для удобства взятия производной, лучше игрек перепишем как $y = \dfrac{v\cdot u}{1+v} = u - \dfrac{u}{1+v}$.

$$J = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\dfrac{u}{1+v}\right)_u & \left(u - \dfrac{u}{1+v}\right)_u \\ \left(\dfrac{u}{1+v}\right)_v & \left(u - \dfrac{u}{1+v}\right)_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+v} & \dfrac{v}{1+v} \\ \dfrac{-u}{(1+v)^2} & \dfrac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{u}{(1+v)^3} + \frac{uv}{(1+v)^3} = \frac{u(1+v)}{(1+v)^3} = \frac{u}{(1+v)^2} \ .$$

Теперь перепишем функцию в новых координатах.

$$f = \frac{(x+y)^2}{x} = \frac{u^2}{u/(1+v)} = u(1+v).$$

Всё, теперь мы готовы брать интеграл.

$$\int\limits_{1/2}^{2} dv \int\limits_{1}^{3} (1+v) \cdot u \cdot \left| \frac{u}{(1+v)^2} \right| du = [\text{помним, что } u - \text{положительный}] =$$

$$\int\limits_{1/2}^{2} \frac{1}{1+v} \int\limits_{1}^{3} u^2\, du = \int\limits_{1/2}^{2} \frac{1}{1+v} \cdot \left(\frac{u^3}{3} \ \Bigg|_1^3 \right) =$$

$$= \int\limits_{1/2}^{2} \frac{1}{1+v} \cdot \frac{26}{3} dv = \frac{26}{3} \ \int\limits_{1/2}^{2} \frac{1}{1+v} dv.$$

Замена $\begin{cases} t = 1+v; \\ dt = dv; \\ v \in [1/2,\ 2] \implies t \in [3/2,\ 3] \end{cases}$

$$\dots = \frac{26}{3} \int\limits_{3/2}^{3} \frac{1}{t} = \frac{26}{3} \left(\ln t \ \Bigg|_{3/2}^{3} \right) = \frac{26}{3} \cdot (\ln 3 - \ln(3/2)) = \boxed{\frac{26}{3} \ln 2}\ .$$

Задача 10

$$\iint\limits_D xy(x+y)dxdy, \qquad D = \left\{(x,y)\middle| -1 \leqslant x-y \leqslant 1, \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant \frac{2}{x}\right\}$$

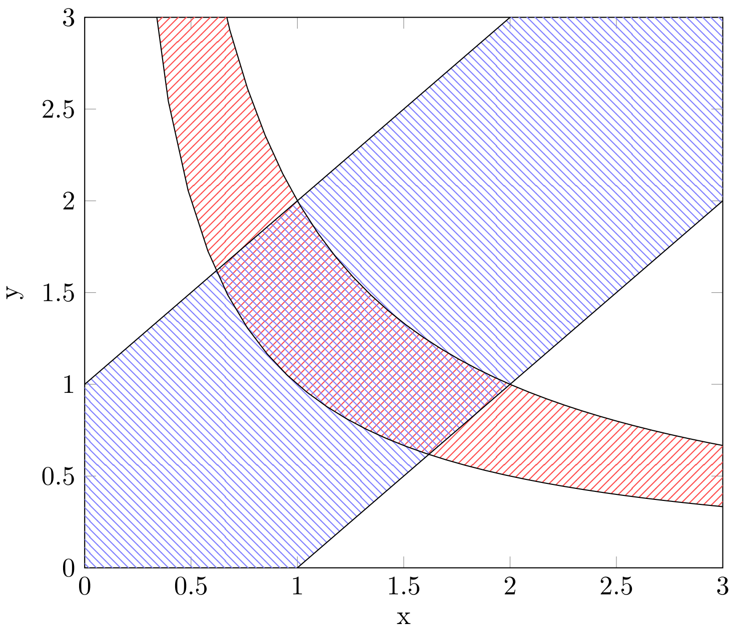
$$\begin{cases} u = x-y & u \in [-1,1] \\ v = xy & v \in [1,2] \end{cases} \Rightarrow x = u+y \Rightarrow v = uy + y^2 \Rightarrow y = \frac{-u \pm \sqrt{u^2+4v}}{2}$$

$u^2 + 4v \geqslant 4 \Rightarrow \sqrt{u^2+4v} \geqslant 2 \Rightarrow y_- \leqslant \dfrac{-u-2}{2} \Rightarrow y_- < 0$. По картинке $y > 0 \Rightarrow y = y_+ = \dfrac{-u+\sqrt{u^2+4v}}{2}$

$$x = u + y = u + \frac{-u+\sqrt{u^2+4v}}{2} = \frac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2} \\ y = \dfrac{-u+\sqrt{u^2+4v}}{2} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} + \dfrac{u}{2\sqrt{u^2+4v}} & \dfrac{1}{\sqrt{u^2+4v}} \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{u}{2\sqrt{u^2+4v}} & \dfrac{1}{\sqrt{u^2+4v}} \end{pmatrix} \qquad |J| = \frac{1}{\sqrt{u^2+4v}}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{1}^{2} v \left(\frac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2} + \frac{-u+\sqrt{u^2+4v}}{2} \right) |J| dv = \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{1}^{2} v \frac{\sqrt{u^2+4v}}{\sqrt{u^2+4v}} dv = \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{1}^{2} v dv = 3$$



Задача 11

$$\iint\limits_D xy \; dxdy; \quad D = \{(x,y) \mid x^3 \leqslant y \leqslant 2x^3, \; 2x \leqslant y^2 \leqslant 3x\}.$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^3} \implies 1 \leqslant u \leqslant 2; \\ v = \dfrac{y^2}{x} \implies 2 \leqslant v \leqslant 3 \end{cases}$$

Выражаем x и y:

$$x = \frac{y^2}{v}.$$

$$\begin{cases} y = x^3 \cdot u = \dfrac{y^6}{v^3} \cdot u \implies \dfrac{1}{y^5} = \dfrac{u}{v^3} \implies y = \sqrt[5]{\dfrac{v^3}{u}} = v^{3/5} \cdot u^{-1/5}; \\ x = \dfrac{y^2}{v} = v^{6/5} \cdot u^{-2/5} \cdot v^{-1} = v^{1/5} \cdot u^{-2/5} \end{cases}$$

Перепишем функцию:

$f = xy = v^{3/5} \cdot v^{1/5} \cdot u^{-1/5} \cdot u^{-2/5} = v^{4/5} \cdot u^{-3/5}.$

Ищем якобиан.

$$J = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(v^{1/5} \cdot u^{-2/5}\right)_u & \left(v^{3/5} \cdot u^{-1/5}\right)_u \\ \left(v^{1/5} \cdot u^{-2/5}\right)_v & \left(v^{3/5} \cdot u^{-1/5}\right)_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2/5 \cdot v^{1/5} \cdot u^{-7/5} & -1/5 \cdot v^{3/5} \cdot u^{-6/5} \\ 1/5 \cdot v^{-4/5} \cdot u^{-2/5} & 3/5 \cdot v^{-2/5} \cdot u^{-1/5} \end{vmatrix}$$
$$=$$
$$-\frac{6}{25} v^{-1/5} \cdot u^{-8/5} + \frac{1}{25} v^{-1/5} \cdot u^{-8/5} = -\frac{v^{-1/5} \cdot u^{-8/5}}{5}.$$

Всё готово для подсчёта интеграла. Заметим, что $J < 0 \implies |J| = -J$.

$$I = \int\limits_1^2 du \int\limits_2^3 v^{4/5} \cdot u^{-3/5} \cdot |J| \, dv = \frac{1}{5} \int\limits_1^2 du \int\limits_2^3 v^{4/5} \cdot u^{-3/5} \cdot v^{-1/5} \cdot u^{-8/5} \, dv =$$

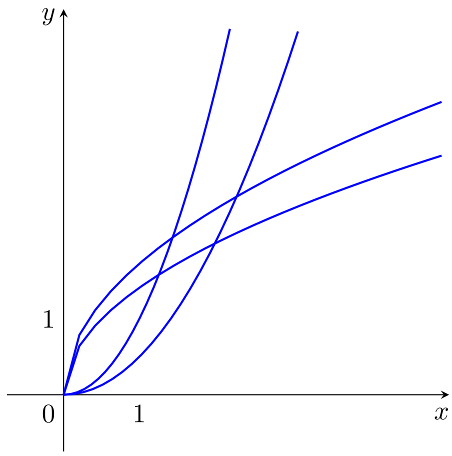
$$\frac{1}{5} \int\limits_1^2 du \int\limits_2^3 v^{3/5} \cdot u^{-11/5} \, dv =$$

$$= \frac{1}{5} \int\limits_1^2 u^{-11/5} \, du \left(\frac{8}{5} \cdot v^{5/8} \Bigg|_2^3 \right) = \frac{1}{8} \cdot (3^{8/5} - 2^{8/5}) \cdot \int\limits_1^2 u^{-11/5} \, du = \frac{1}{8} \cdot$$

$$(3^{8/5} - 2^{8/5}) \cdot \left(-\frac{5}{6} u^{-6/5} \Bigg|_1^2 \right) \, du =$$

$$\boxed{\frac{5}{46} \cdot (3^{8/5} - 2^{8/5}) \cdot (1 - 2^{-6/5})}.$$

Задача 12



$$\iint\limits_D \frac{x^2\sin(xy)}{y}\,dx\,dy, \quad D=\{(x,y)\,|\,y\le x^2\le 2y,\, 2x\le y^2\le 3x\}$$

Хотим, чтобы область, заданная пересечением парабол, была прямоугольником в какой-то системе координат

Перейдем к координатам u и v таким, что $u=\dfrac{x^2}{y}$, $v=\dfrac{y^2}{x}$.

Тогда $D=\{(u,v)\,|\,1\le u\le 2,\ 2\le v\le 3\}$

Выражение старых координат через новые:

$$u=\frac{x^2}{y}\Rightarrow y=\frac{x^2}{u}\Rightarrow v=\frac{x^4}{u^2x}=\frac{x^3}{u^2}\Rightarrow x=\sqrt[3]{u^2v},\ y=\sqrt[3]{\frac{u^4v^2}{u^3}}=\sqrt[3]{uv^2}$$

$$J=\begin{vmatrix} x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \sqrt[3]{\dfrac{2v}{3u}} & \sqrt[3]{\dfrac{v^2}{3u^2}}\\ \sqrt[3]{\dfrac{u^2}{3v^2}} & \sqrt[3]{\dfrac{2u}{3v}}\end{vmatrix}=\sqrt[3]{\frac{4uv}{9uv}}-\sqrt[3]{\frac{u^2v^2}{9u^2v^2}}=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$$

$$I=\int\limits_1^2 du\int\limits_2^3 \frac{\sqrt[3]{u^4v^2}\sin(uv)}{\sqrt[3]{uv^2}}\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)dv=\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)\int\limits_1^2 u\,du\int\limits_2^3\sin(uv)\,dv=$$

$$=\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)\int\limits_1^2 u\,du\left(-\frac{1}{u}\cos(uv)\right)\Big|_2^3=\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)\int\limits_1^2\left(\cos 2u-\cos 3u\right)\,du-\frac{1}{u}\cos(uv)\Big|_2^3=$$

$$=\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)\left(\frac{1}{2}\sin 2u-\frac{1}{3}\sin 3u\right)\Big|_1^2=\left(\sqrt[3]{\frac{4}{9}}-\sqrt[3]{\frac{1}{9}}\right)\left(\frac{1}{2}(\sin 4-\sin 2)-\frac{1}{3}(\sin 6-\sin 3)\right)$$

Задайте в цилиндрических координатах множество D, заданное неравенствами в декартовых координатах. Пердполагаю функцию f непрерывной на D, преобразуйте интеграл в цилиндрических координатах к повторному.

Задача 13

$x^2+y^2\leqslant 1,\ x^2+y^2+z^2\leqslant 4.$

- Первое неравенство:

$r^2\leqslant 1 \implies r\in[0,1].$

- Второе неравенство:

$r^2+z^2\leqslant 4 \implies |z|\leqslant\sqrt{4-r^2} \implies z\in[-\sqrt{4-r^2},\ \sqrt{4-r^2}].$

Ограничений на φ никаких нет. Можем приступать к записи интеграла. Помним, что в циллиндрических координатах $|J|=r$.

$$I = \boxed{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi, z)\cdot r\ dz}\ .$$

Задача 14

$x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z,\ x^2+y^2 \leqslant z^2.$

• Первое нер-во.

$x^2+y^2 \leqslant 2z - z^2 \iff r^2 \leqslant 2z - z^2.$

Значит, значение $2z-z^2$ обязано быть положительным. Парабола с нулями в 0 и 2 $\implies z \in [0,\,2]$.

В таком случае $r \in \left[0,\ \sqrt{2z-z^2}\right]$.

• Второе нер-во.

$r^2 \leqslant z^2 \implies r \in [0,\,|z|]$. Так как $z \geqslant 0$, то $|z| = z$.

Заметим, что при $z \in [0,\,2]$ всегда выполнено $2 \geqslant z \iff 2z \geqslant 2z^2 \iff \sqrt{2z-z^2} \geqslant z$.

Так что границы r переписываем полностью как $r \in [0{,}z]$.

На φ ограничений нет, модуль якобиана равен r.

$$\boxed{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 dz \int\limits_0^z f\cdot r\ dr}\ .$$

Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислите интеграл.

Задача 15

$$\iiint\limits_D zdxdydz \qquad D = \left\{(x,y,z)|x^2+y^2 \leqslant z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\right\} \Rightarrow D = \left\{(r,\varphi,z)|r^2 \leqslant z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 zdz \int_0^z rdr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 z\frac{z^2}{2}dz = 2\pi\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Задача 16

$$\iiint_D z^2\ dxdydz,\ \ D = \{(x{,}y{,}z) \mid x^2+y^2+z^2 \geqslant 1,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z\}.$$

• Первое нер-во.

$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1 \iff r^2 \geqslant 1 \implies r \geqslant 1.$

• Второе нер-во.

$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2z \implies$ как в номере 14, $z \in [0{,}2]$; $r \leqslant z$.

По φ область не ограничена. Модуль якобиана равен r. Сразу вынесу все константы за интегралы:

$$\int\limits_0^2 z^2\, dz \int\limits_0^z r\, dr \int\limits_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi \cdot \int\limits_0^2 z^2\, dz\ \left(\frac{r^2}{2} \Bigg|_0^z \right) = \pi \cdot \int\limits_0^2 z^4\, dz =$$

$$\pi \cdot \left(\frac{z^5}{5} \Bigg|_0^2 \right) = \boxed{\frac{32\pi}{5}}.$$

Задайте в сферических координатах множество D, заданное неравенствами в декартовых координатах. Предполагая функцию f непрерывной на D, преобразуйте интеграл в сферических координатах к повторному.

Задача 17

$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1;\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2z.$

Используем следующую замену:

$$\begin{cases} x = r \cos\varphi \sin\Theta; \\ y = r \sin\varphi \sin\Theta; \\ z = r \cos\Theta; \end{cases}$$

• Первое неравенство:

$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \implies r^2 \leqslant 1 \implies r \in [0{,}1].$

• Второе неравенство:

$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2z \iff r^2 \leqslant 2r\cos\Theta \iff r \leqslant 2\cos\Theta.$

Заметим, что при этих ограничениях: $\begin{cases} 2\cos\Theta > 1 \implies r \in [0{,}1]; \\ 2\cos\Theta \leqslant 1 \implies r \in [0, 2\cos\Theta] \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} r \in [0{,}1],\ \ \Theta \in \left[\dfrac{\pi}{3},\ \pi\right]; \\ r \in [0, 2\cos\Theta]\,,\ \ \Theta \in \left[0,\ \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

φ остаётся без ограничений.

Якобиан в сферических координатах (при данной! замене) равен $r^2 \sin\Theta$.

Итог:

$$\boxed{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\int\limits_0^{\pi/3} d\Theta \int\limits_0^{2\cos\Theta} f \cdot r^2 \sin\Theta \, dr + \int\limits_{\pi/3}^{\pi} d\Theta \int\limits_0^{1} f \cdot r^2 \sin\Theta \, dr \right)}.$$

Задача 18

$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2y,\ x^2 + y^2 \geqslant z^2.$

• Первое нер-во.

$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2y \iff r^2 \leqslant 2\,r\sin\varphi\sin\Theta \iff r \leqslant 2\sin\varphi\sin\Theta \implies r \in [0, 2\sin\varphi\sin\Theta].$

Также мы должны учесть, что $\sin\varphi$ обязан быть неотрицательным, ведь $r \geqslant 0 \wedge \sin\Theta \geqslant 0$.

То есть $\varphi \in [0, \pi]$.

• Второе нер-во.

$x^2 + y^2 \geqslant z^2 \iff r^2\sin^2\Theta \geqslant r^2\cos^2\Theta \implies \operatorname{tg}^2\Theta \geqslant 1 \implies |\operatorname{tg}\Theta| \geqslant 1.$

Значит, $\Theta \in \left[\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Модуль Якобиана в сферических координатах с данной заменой – $r^2\sin\Theta$.

Всё готово, выписываем интеграл.

$$\boxed{\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\Theta \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi\sin\Theta} f \cdot r^2 \sin\Theta \, dr}.$$

Перейдя к сферическим координатам, вычислите интеграл.

Задача 19

$\iiint\limits_D (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz;\ D = \{(x,y,z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1,\ y^2 + z^2 \leqslant x^2,\ x \geqslant 0\}.$

[picture is coming soon]

Лайфхак: если мы видим, что с какой-то координатой возникают потенциальные трудности, делаем её в качестве оси, отвечающей за "широту". В данной ситуации нам подойдёт следующая замена:

$$\begin{cases} x = r\cos\Theta; \\ y = r\sin\varphi\sin\Theta; \\ z = r\cos\varphi\sin\Theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \Theta \in [0,\pi]; \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

• Первое неравенство.

$x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \implies r^2 \leqslant 1 \implies r \in [0,1]$.

• Третье неравенство.

$$x \geqslant 0 \implies r\cos\Theta \geqslant 0 \implies \cos\Theta \geqslant 0 \implies \Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

(Мы использовали тот факт, что $r \geqslant 0$).

• Второе неравенство.

$$y^2 + z^2 \leqslant x^2 \iff r^2\sin^2\varphi \cdot \sin^2\Theta + r^2\cos^2\varphi \cdot \sin^2\Theta \leqslant r^2\cos^2\Theta \implies$$

$$r^2\sin^2\Theta \leqslant r^2\cos^2\Theta \iff \operatorname{tg}^2\Theta \leqslant 1 \implies \Theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

На φ ограничений нет. $|J| = r^2\sin\Theta$, как и при обычной сферической замене.

Интегрируем:

$$\int\limits_0^{\pi/4} d\Theta \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{2\pi} r^2 \cdot r^2 \sin\Theta \, d\varphi = 2\pi \int\limits_0^{\pi/4} \sin\Theta \, d\Theta \int\limits_0^1 r^4 \, dr = 2\pi \cdot \left(-\cos\Theta \Bigg|_0^{\pi/4} \right) \cdot$$

$$\left(\frac{r^5}{5} \Bigg|_0^1 \right) = \boxed{\frac{2\pi}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Задача 20

$$\iint_D z \, dxdydz, \quad D = \left\{ (x,y,z) \,\Big|\, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leqslant 1, \; z \geqslant 0 \right\}$$

Сначала сделаю финт ушами, и заменю:

$$\begin{cases} x = 2u; \\ y = 3v; \\ z = w \end{cases}$$

Ищем якобиан,

$$J = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Т.е. множитель 6 мы добавим под интеграл в дальнейшем.

Теперь производим привычную замену на сферические координаты:

$$\begin{cases} u = r\cos\varphi\sin\Theta; \\ v = r\sin\varphi\sin\Theta; \\ w = r\cos\Theta \end{cases}$$

$|J| = r^2\sin\Theta$, это наряду с 6 появится под интегралом.

Теперь перепишем неравенства.

- $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 \leqslant 1 \iff \dfrac{4u^2}{4} + \dfrac{9v^2}{9} + w^2 \leqslant 1 \iff r^2 \leqslant 1 \implies$
$r \in [0,\, 1]$.

- $z \geqslant 0 \iff w \geqslant 0 \iff r\ \cos\Theta \geqslant 0 \implies \cos\Theta \geqslant 0 \implies \Theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$f = z = w = r\cos\Theta$.

Всё, теперь пишем интеграл. На φ ограничений нет. Сразу выносим константы.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos\Theta\ d\Theta \int\limits_0^1 r\ dr \int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi = \left(\sin\Theta\ \Big|_0^{\pi/2}\right) \cdot \left(\frac{r^2}{2}\ \Big|_0^1\right) \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{2} = \boxed{\pi}\,.$$