Семинарские листы.

Александр Богданов | telegram
Алиса Вернигор | telegram
Василий Шныпко | telegram
Иван Пешехонов | telegram

Версия от 18.09.2020 02:48

Содержание

1 Листок №1. Частичная сумма для ряда и необходимое условие сходимости.

1.1 Вычислите частичную сумму ряда и исследуйте ее предел.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{A}{3n-1}+\frac{B}{3n+2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3Bn-B+3An+2A}{(3n-1)(3n+2)} = \left[\begin{cases}3B+3A=0\\2A-B=1\end{cases} \implies \begin{cases}A=\frac{1}{3}\\B=\frac{-1}{3}\end{cases}\right] =$
$\frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2} = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\dots+\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}) = \frac{1}{3}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3n+2}) = \lim\limits_{n\to\infty}\sum = \frac{1}{6}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(4n^2-1)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{A}{(2n-1)^2}+\frac{B}{(2n+1)^2} =$

$$\begin{cases}4A+4B=0\\4A-4B=1\\A+B=0\end{cases} \implies \begin{cases}A=\frac{1}{8}\\B=-\frac{1}{8}\end{cases}$$

$= \frac{1}{8}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{25}+\frac{1}{25}-\dots+\frac{1}{(2n-1)^2}-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) = \frac{1}{8}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right) =$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum = \frac{1}{8}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}+\frac{C}{n+2} = \frac{An^3+3An+2A+Bn^2+2B+Cn^2+C}{n(n+1)(n+2)} =$

$$\begin{cases}A+B+C=0\\3A=0\\2A+2B+C=1\end{cases} \implies \begin{cases}A=0\\B=1\\C=-1\end{cases}$$

$= \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\dots+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum = \frac{1}{2}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)(n+3)} = \frac{1}{6}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}+\frac{3}{n+1}-\frac{5}{n+3}$

Заметим, что $\frac{2}{k}+\frac{3}{k}-\frac{5}{k}=0$. Т.е. 3 члена суммы с одинаковыми знаменателями уничтожатся. Так как первый общий знаменатель 4, а последний n, получаем $\frac{1}{6}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}+\frac{3}{n+1}-\frac{5}{n+3} = \frac{1}{6}\cdot\left(\left(\sum\limits_{n=1}^{3}\frac{2}{n}\right)+\left(\sum\limits_{n=1}^{2}\frac{3}{n+1}\right)+\frac{3}{n+1}-\left(\sum\limits_{n=n-2}^{n}\frac{5}{n+3}\right)\right) =$
$\frac{37}{36}-\frac{12n^2+45n+37}{6(n+1)(n+2)(n+3)} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum = \frac{37}{36}$

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{n-(n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}-\sqrt{3}+\dots-\sqrt{n+1}+\sqrt{n} =$
$\sqrt{n+1}-1 = \lim\limits_{n\to\infty}\sum = \infty$

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n+2}-2\cdot\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n})$:

$S_N = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n+2}-2\cdot\sqrt[3]{n+1}+\sqrt[3]{n}) = \sum\limits_{n=1}^{N}\sqrt[3]{n+2}-2\sum\limits_{n=1}^{N}\sqrt[3]{n+1}+\sum\limits_{n=1}^{N}\sqrt[3]{n} = \sum\limits_{n=3}^{N+2}\sqrt[3]{n}-2\sum\limits_{n=2}^{N+1}\sqrt[3]{n}+\sum\limits_{n=1}^{N}\sqrt[3]{n} = (\sqrt[3]{N+1}+$
$\sqrt[3]{N+2})-2(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{N+1})+(\sqrt[3]{1}+\sqrt[3]{2}) = 1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{N+2}-\sqrt[3]{N+1} = 1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{N}\left((1+\frac{2}{N})^{1/3}-(1+\frac{1}{N})^{1/3}\right) =$
$= \left[(1+x)^a = 1+ax+O(x)\right] = 1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{N}\left(\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{N}+O(\frac{1}{N})\right)-\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{N}+O(\frac{1}{N})\right)\right) = 1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{N}\left(\frac{1}{3N}+O(\frac{1}{N})\right) \xrightarrow[\text{N}\to\infty]{}$
$1-\sqrt[3]{2}$

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1-1}{(n+1)!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!} = 1-\frac{1}{(n+1)!} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum = 1$

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!(n+2)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1+1-1}{(n+2)!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{3!}-\dots+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{2}-\frac{1}{(n+2)!} =$
$\lim\limits_{n\to\infty}\sum = \frac{1}{2}$

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$:

$$\sum_{n=1}^{N}(n+1)x^n = \sum_{n=1}^{N} n\cdot x^n + \sum_{n=1}^{N} x^n = x\sum_{n=1}^{N} n\cdot x^{n-1} + \sum_{n=1}^{N} x^n = \Big[x \neq 1\Big] = x\Big(x\cdot\frac{x^N-1}{x-1}\Big)' + \Big(x\cdot\frac{x^N-1}{x-1}\Big) = x\Big(\frac{x^{N+1}-x}{x-1}\Big)' + \Big(\frac{x^{N+1}-x}{x-1}\Big) = x\cdot\frac{((N+1)x^N-1)\cdot(x-1)-(x^{N+1}-x)}{(x-1)^2} + \Big(\frac{x^{N+1}-x}{x-1}\Big)$$

Получаем, что для:

1. $|x| \geqslant 1 \Longrightarrow a_n(x) = (n+1)x^n \longrightarrow \infty \implies$ ряд расходится;
2. $|x| < 1 \Longrightarrow x^N \longrightarrow 0, \quad N\cdot x^N \implies 0$ ряд сходится.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)x^n = 2\sum_{n=1}^{\infty} nx^n - \sum_{n=1}^{\infty} x^n = 2x\cdot\frac{((N+1)x^N-1)\cdot(x-1)-(x^{N+1}-x)}{(x-1)^2} - \Big(\frac{x^{N+1}-x}{x-1}\Big)$

1. $|x| \geqslant 1 \Longrightarrow a_n(x) = (2n-1)x^n \longrightarrow \infty \implies$ ряд расходится;
2. $|x| < 1 \Longrightarrow x^N \longrightarrow 0, \quad 2N\cdot x^N \implies 0$ ряд сходится.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin x\cdot\sin\frac{x}{2} + \sin 2x\cdot\sin\frac{x}{2} + \dots + \sin nx\cdot\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} =$

Воспользуемся формулой произведения синусов:

$$= \frac{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{5x}{2}\right) + \dots + \frac{1}{2}\left(\cos(n-\frac{1}{2})x - \cos(n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует при $x \neq \pi k, k\in\mathbb{Z}$ т.к. $\nexists \lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+\dfrac{1}{2})x$, но если $x = \pi k, k\in\mathbb{Z}$, то $sin nx = 0$ и $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx = 0 + \dots + 0 = 0$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\cos^2 nx = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(1+\cos(2nx)) = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(2nx)$

Дальше можно решать как задачу 11 или так:

$e^{ix} = \cos x + i\sin x, \cos x = \Re(e^{ix}) \implies \cos 2x + \cos 4x + \dots + \cos 2Nx = \Re(1 + e^{2ix} + e^{4ix} + \dots + e^{2Nix}) = \Re\left(\dfrac{e^{2(N+1)ix}-1}{e^{2ix}-1}\right)$

1.2 Докажите, что ряд расходится

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3n+2}$

Проверим необходимое условие сходимости т.е., что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to 0$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{3n+2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \dfrac{1}{3} \implies$ ряд расходится.

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = \dfrac{1}{1} = 1$ ряд расходится. $\sqrt[n]{n} = 1$ очевидный факт с 1 курса, но его легко можно доказать: $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n} =$ по Лопиталю $= \dfrac{1}{n} = 0 \implies \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$

17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$

$\lim\limits_{n\to\inf} a_n = \dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)\to 0}{\frac{1}{n}\to 0} =$[применяем Лопиталя]$= \dfrac{n^2(n^2+2n-2)\cos\left(\frac{n+1}{n^2+2}\right)}{(n^2+2)^2} = 1$ т.к. и в числителе и в знаменателе наибольшая степень n^4 с коэффициентами 1.

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{3}-1)$

$a_n = n\cdot(3^{\frac{1}{n}}-1)$, вспомним оценку $e^x = 1 + x + o(x)$, тогда $3^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln 3}{n}} = 1 + \dfrac{\ln 3}{n} + o(\dfrac{1}{n}) \implies a_n = n\cdot(1 + \dfrac{\ln 3}{n} + o(\dfrac{1}{n}) - 1) = \ln 3 + o(1) \to \ln 3$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

Докажем одно из свойств замечательного предела $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^x = [u = \dfrac{x}{k}, u\to\infty] = \lim\limits_{u\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{u}\right)^{u\cdot k} = e^k$

В нашем примере $k = -1$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \to \dfrac{1}{e}$

20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-n} \cdot \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

Хочется воспользоваться вторым замечательным пределом, но это ловушка, делаем так:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty} e^{n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-n} = \lim_{n\to\infty} e^{n^2\cdot\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-n} = \lim_{n\to\infty} e^{n-\frac{1}{2}+o(1)-n} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

1.3 При каких значениях x для ряда выполнено необходимое условие сходимости

21.1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$

Рассмотрим случаи:

1. $x = 0 \implies \forall n:\ a_n = 0$
2. $x \neq 0$. Поделим на nx : $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{nx}+nx} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{nx} = 0$

Значит выполнено для $\forall x$

21.2 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\dfrac{x^n}{n} - \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\Big)$

$a_n(x) = x^n \cdot \Big(\dfrac{1}{n} - \dfrac{x}{n+1}\Big) = \dfrac{x^n}{n}\Big(1 - x \cdot \dfrac{n}{n+1}\Big)$

1. $|x| > 1 : \dfrac{x^n}{n} \longrightarrow \infty, (1 - x \cdot \dfrac{n}{n+1}) \longrightarrow 1 - x \neq 0$
2. $|x| = 1 :$
   (a) $x = -1 : a_n(-1) = \dfrac{(-1)^n}{n} \cdot \Big(1 + \dfrac{n}{n+1}\Big) \longrightarrow 0$
   (b) $x = 1 : a_n(1) = \dfrac{1}{n} \cdot \Big(1 - \dfrac{n}{n+1}\Big) \longrightarrow 0$
3. $|x| < 1 : a_n(x) = \dfrac{x^n}{n}] \cdot \Big(1 - x \cdot \dfrac{n}{n+1}\Big) \longrightarrow 0\Big(\dfrac{n}{n+1} \to 1; x^n \to 0; n \to \infty\Big)$

<u>Ответ:</u> $x \in [-1; 1]$

22. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \Big(\dfrac{n^x}{x^n}\Big)$:

$a_n(x) = \dfrac{x^n}{x^n}$

1. $\begin{cases} n^x - \text{степенная функция;} \\ x^n - \text{показательная функция;} \end{cases} \implies a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ при $|x| > 1$
2. $|x| = 1 :$
   (a) $x = 1 : \dfrac{n}{1} \longrightarrow \infty;$
   (b) $x = -1 : \dfrac{n^{-1}}{(-1)^n} = \dfrac{(-1)^n}{n} \longrightarrow 0$
3. $|x| < 1 :$
   (a) при $x > 0 : n^x \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$
   (b) при $x < 0 : n^x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

   $x^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

<u>Ответ:</u>

$x \in (0; 1) : a_n \longrightarrow \infty;$

$x \in (-1; 0) : a_n = \dfrac{n^x}{x^n} = \Big[n^x \to 0; x^n \to 0\Big] = \dfrac{n^{-|x|}}{(-1)^n \cdot |x|^n} \longrightarrow \infty$

(показательная ф-ия стремится к нулю быстрее степенной)

23. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n+3^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{nx^n}{2^n+3^n} \approx \left(\frac{x}{3}\right)^n \cdot n$

Показательная функция быстрее линейной, поэтому сходимость зависит от неё:

1. $\left|\frac{x}{3}\right| \geqslant 1$, то $a_n \to \infty$

2. $\left|\frac{x}{3}\right| < 1$, то $a_n \to 0$

Получаем ответ, при $x \in (-3; 3)$

24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$a_n(x) = \frac{x^n}{n!} \to 0$ т.к. показательная функция медленее факториала, покажем это:

$\frac{x^n}{n!} \sim \frac{e^{n\ln x} \cdot e^n}{\sqrt{2\pi n} \cdot n^n} \leqslant \frac{e^{n\cdot(\ln x+1)}}{e^{n\ln n}} \sim e^{n(\ln x - \ln n)} \to e^{-\infty} = 0$

Значит сходится для $\forall x$

25. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{n!}$:

Формула Стирлинга: $n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (1 + O(1))$

необходимое условие сходимости: $a_n = \frac{x^{n^2}}{n!} \longrightarrow 0 \Longleftrightarrow |a_n| \longrightarrow 0 : |a_n| = \left|\frac{x^{n^2}}{n!}\right| = \frac{|x|^{n^2}}{n!}$

$$|a_n| = \frac{|x|^{n^2}}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} \cdot \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = \left[\frac{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1\right] \sim \frac{|x|^{n^2}}{\sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n} = \frac{e^{n^2 \ln|x| - n\ln|\frac{n}{e}| - \frac{1}{2}\ln n}}{\sqrt{2\pi}}$$

1. $|x| \leqslant 1 : |a_n| \longrightarrow \frac{e^{-\infty}}{\sqrt{2\pi}} = 0$

2. $|x| > 1 : |a_n| \longrightarrow \frac{e^{+\infty}}{\sqrt{2\pi}} = +\infty$