Коллоквиум по Дискретной Математике

Денис Козлов
Telegram

Версия от 11.12.2020 01:35

Вычислимость

Логика

10. Лемма о корректной постановке

Лемма 2.1 (73)**.** В любой интерпретации при любой оценке π для всех $\varphi \in \mathrm{Fm}_\sigma$, $t, s \in \mathrm{Tm}_\sigma$, $x \in \mathrm{Var}$, если $t - x - \varphi$, то

$[s(t/x)](\pi) = [s](\pi + (x \to [t](\pi)))$ и $[\varphi(t/x)](\pi) = [\varphi](\pi + (x \to [t](\pi)))$.

Доказательство. Так же, как при доказательстве леммы 18 (являющейся частным случаем данной) проведем индукцию по построению: пусть $s = z \neq x$, тогда $[s(t/x)](\pi) = \pi(z) = [s](\pi + (x \to [t](\pi)))$, если $= x$, то $[s(t/x)](\pi) = [t](\pi) = [s](\pi + (x \to [t](\pi)))$. Случай $s = \mathbb{f}_i$ тривиален (значение s — константа, не зависящая от x).

Если $s = \mathbb{f}_j(s_1, s_2, \ldots, s_{a_j})$, то по предположению индукции:

$$[s(t/x)](\pi) = \mathbb{f}_j([s_1(t/x)](\pi), \ldots, [s_{a_j}(t/x)](\pi)) = \\ = \mathbb{f}_j([s_1](\pi + (x \to [t](\pi))), \ldots, [s_{a_j}](\pi + (x \to [t](\pi)))) = [s](\pi + (x \to [t](\pi)))$$

Случай $\varphi = \mathbb{P}_i$ тривиален.

Если $\varphi = \mathbb{P}_j(s_1, t_2, \ldots, s_{a_j})$, то по предположению индукции:

$$[\varphi(t/x)](\pi) = \mathbb{P}_j([s_1(t/x)](\pi), \ldots, [s_{a_j}(t/x)](\pi)) = \\ = \mathbb{P}_j([s_1](\pi + (x \to [t](\pi))), \ldots, [s_{a_j}](\pi + (x \to [t](\pi)))) = [\varphi](\pi + (x \to [t](\pi)))$$

■