Семинарский лист 2.3

Анастасия Григорьева
Telegram

Денис Козлов
Telegram

Елизавета Орешонок
Telegram

Ира Голобородько
Telegram

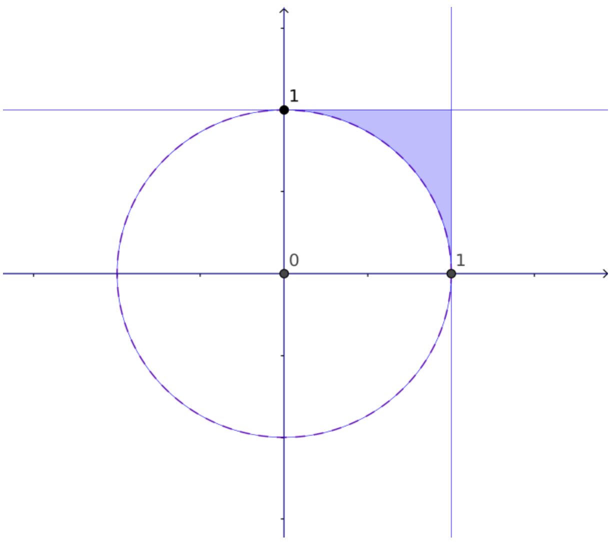
Версия от 21.11.2020 12:23

Предполагая функцию f непрерывной на D, приведите двойной интеграл от f по D к повторному двумя способами: по x затем по y и наоборот.

Задача 1

$D = \{(x, y) \,|\, x, y \in [0; 1], x^2 + y^2 \geq 1\}$

Множество точек, находящихся в квадрате, ограниченном прямыми $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$, за пределами круга радиуса 1 с центром в точке $(0, 0)$:



Интеграл по x затем по y:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^1 dx = \int\limits_0^1 dy \cdot x \,\Big|_{\sqrt{1-y^2}}^1 = \int\limits_0^1 dy \left(1 - \sqrt{1-y^2}\right) = \int\limits_0^1 dy - \int\limits_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = 1 - \int\limits_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy$$

Замена: $y = \sin u \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sqrt{1-\sin^2 u}\,du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2u + 1}{2}\,du =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2u\,du + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{1}{4}\,\sin 2u\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\,u\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Тогда:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^1 dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Очевидно, что повторный интеграл, взятый в другом порядке, будет вычисляться точно так же:

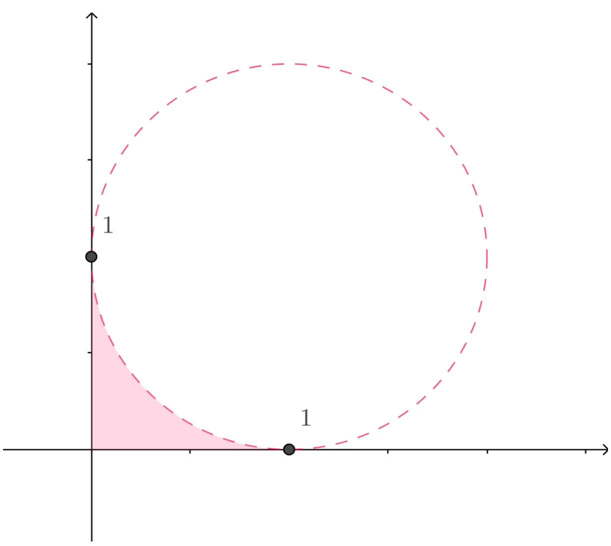
$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^1 dy = \int\limits_0^1 dy \cdot y \,\Big|_{\sqrt{1-x^2}}^1 = \int\limits_0^1 dx \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right) = \int\limits_0^1 dy - \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dy = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\text{Ответ: } 1 - \frac{\pi}{4}.}$

Задача 2

$D = \{(x,y)\,|\,x,y \in [0;1], (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1\}$

Множество точек, находящихся в квадрате, ограниченном прямыми $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$, за пределами круга радиуса 1 с центром в точке $(1,1)$:



Интеграл по x затем по y:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} dx = \int\limits_0^1 dy \cdot x \Big|_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} = \int\limits_0^1 dy \left(\sqrt{1-(y-1)^2}+1\right) = \int\limits_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}\, dy + 1$$

Замена: $(y-1) = \sin u \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}\, dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sqrt{1-\sin^2 u}\, du = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 u\, du = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos 2u + 1}{2}\, du =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos 2u\, du + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 du = \frac{1}{4}\,\sin 2u\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \frac{1}{2}\,u\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{\pi}{4}$$

Тогда:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Очевидно, что повторный интеграл, взятый в другом порядке, будет вычисляться точно так же:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}+1} dy = \int\limits_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\, dx + 1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\text{Ответ: } 1 - \frac{\pi}{4}.}$

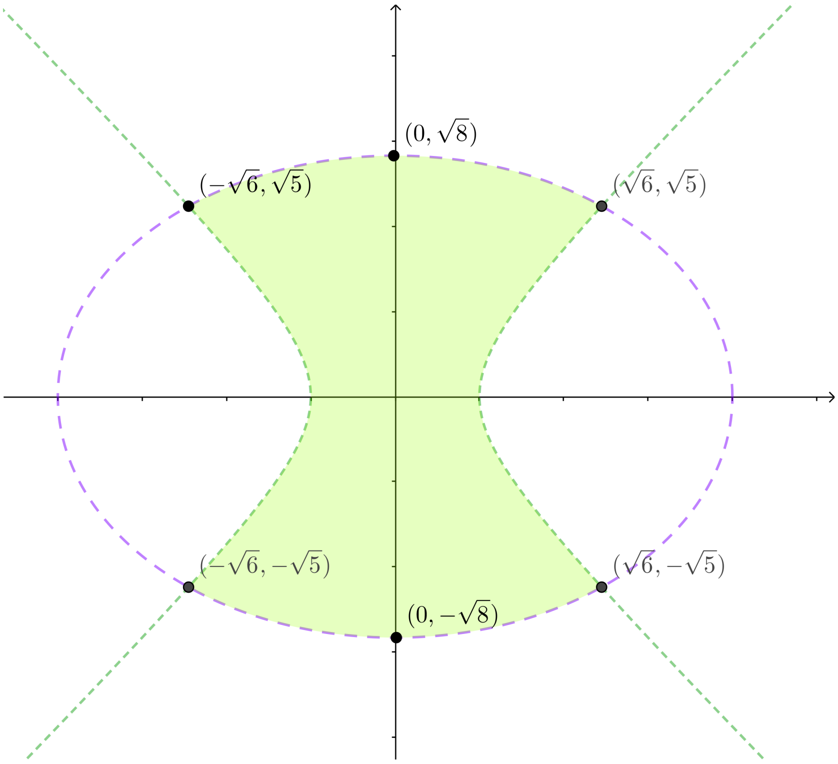
Задача 3

$D = \{(x,y) \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 16,\ x^2 - y^2 \leqslant 1\}$.

- $x^2 + 2y^2 = 16$ – эллипс, нужны точки внутри него;
- $x^2 - y^2 = 1$ – гипербола, нужна область, ограниченная двумя частями ее графика.

Найдем координаты точки пересечения кривых: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 16; x^2 - y^2 = 1; \end{cases} \implies \begin{cases} y = \pm\sqrt{5}; \\ x = \pm\sqrt{6}. \end{cases}$

Эллипс пересекает ось ординат в точках $(0, \sqrt{8})$ и $(0, -\sqrt{8})$.



Интегрируя по x, видим два симметричных относительно 0 куска $\implies$ можем рассмотреть любой из них и продублировать интеграл.

Интегрируем правую часть – интеграл разбивается на участки до перекрытия гиперболой (до координаты 1) и после. Во втором интеграле используем симметричность относительно Ox.

$$\text{Итого: } I(D,f) = 2\cdot\left(\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{(16-x^2)/2}}^{\sqrt{(16-x^2)/2}} f(x,y)dy + 2\cdot\int\limits_1^{\sqrt{6}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{(16-x^2)/2}} f(x,y)dy\right).$$

Теперь по y. Тоже используем симметричность и считаем лишь верхнюю часть.

$$I(D,f) = 2\cdot\left(\int\limits_0^{\sqrt{5}} dy \int\limits_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x,y)dx + \int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} dy \int\limits_{-\sqrt{16-2y^2}}^{\sqrt{16-2y^2}} f(x,y)dx\right).$$

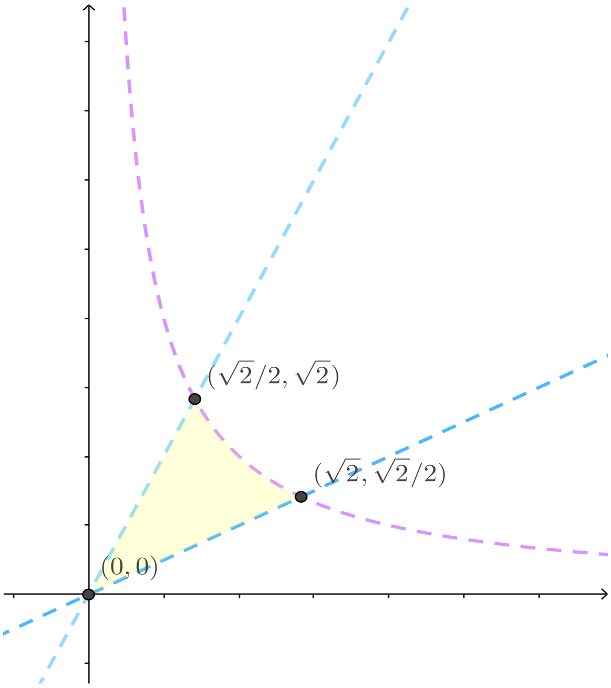
Задача 4

$D = \{(x,y) \mid x,y \geqslant 0,\ 0 < xy \leqslant 1,\ y \leqslant 2x,\ x \leqslant 2y\}$.

- $xy = 1$ – гипербола, рассматривается участок под ней;
- $y = 2x$ – прямая, рассматривается полуплоскость под ней;
- $x = 2y$ – прямая, рассматривается полуплоскость над ней.

Найдем точки пересечения кривых: $\begin{cases} xy = 1; \\ y = 2x; \end{cases} \implies \begin{cases} y = \sqrt{2}; \\ x = \sqrt{2}/2; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 1; \\ x = 2y; \end{cases} \implies \begin{cases} y = \sqrt{2}/2; \\ x = \sqrt{2}. \end{cases}$

Значит, требуется привести интеграл по следующему множеству:



Разбивая область интегрирования по x до перекрытия с гиперболой и после, получаем:

$$I(D,f) = \int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2} dx \int\limits_{x/2}^{2x} f(x,y)dy + \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x/2}^{1/x} f(x,y)dy;$$

Разбивая область интегрирования по y до перекрытия с гиперболой и после, получаем (симметрично):

$$I(D,f) = \int\limits_{0}^{\sqrt{2}/2} dy \int\limits_{x/2}^{2x} f(x,y)dx + \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{x/2}^{1/x} f(x,y)dx.$$

Предполагая функцию f непрерывной на D, измените порядок интегрирования в повторном интеграле

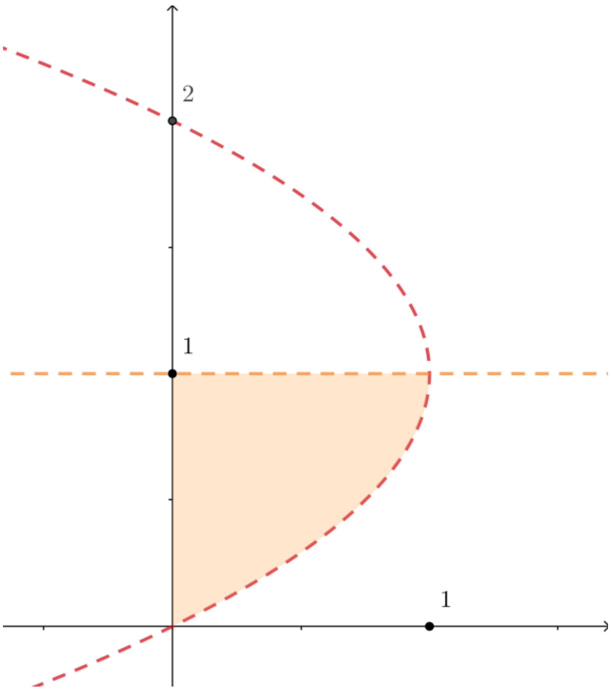
Задача 5

$$\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{2y-y^2} f(x,y)dx.$$

Чтобы изменить порядок интегрирования, нужно восстановить множество D. Это можно сделать, изучив пределы интегрирования.

$y \in [0,1]$ – судя по внешнему интегралу.

Нас интересуют точки с положительной абсциссой, которые лежат слева от кривой $x = 2y - y^2$. Парабола пересекается с Oy в $(0,0)$ и (0,2), и имеет вершину в (1,1).



$x = 2y - y^2 \iff y = 1 \pm \sqrt{1-x}$. Но наш кейс – только $y = 1 - \sqrt{1-x}$, так как $y \in [0{,}1]$.

$x \in [0{,}1]$ – нам это нужно для пределов внешнего интеграла.

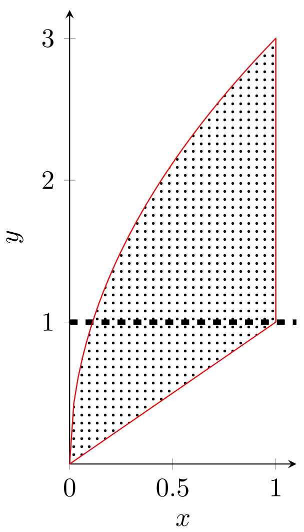
Далее задача сводится к тому, что мы уже умеем.

Итого: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-\sqrt{1-x}}^{1} f(x,y)dy$.

Задача 6

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)dx = \text{ пристально смотрим на рисунок } =$$

$$= \int_0^1 \int_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$$



Задача 7

$$\int\limits_3^7 dy \int\limits_{9/y}^{3} f(x,y)dx + \int\limits_7^9 dy \int\limits_{9/y}^{10-y} f(x,y)dx.$$

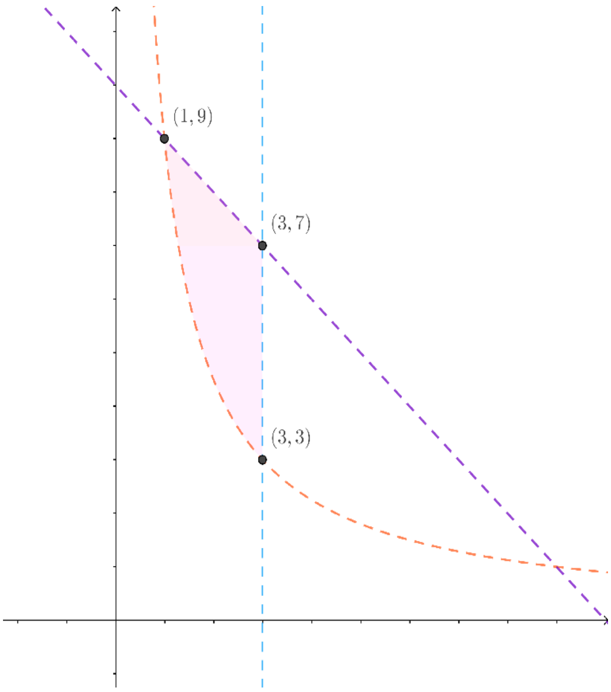
$y \in [3, 9]$.

При $y \in [3{,}7]$ точки лежат между графиком гиперболы $y = 9/x$ и прямой $x = 3$.

При $y \in [7{,}9]$ точки лежат между графиком гиперболы $y = 9/x$ и прямой $y = -x + 10$.

Найдём точки пересечения кривых:

$$\begin{cases} x = 3; \\ y = -x + 10 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3; \\ y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 9/x; \\ y = -x + 10 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1; \\ y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 9/x; \\ x = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3; \\ y = 3 \end{cases}$$



Теперь изменим порядок интегрирования. $x \in [1, 3]$. При всех x точки лежат между гиперболой и прямой $y = -x + 10$.

Итого: $I(D, f) = \int\limits_1^3 dx \int\limits_{9/y}^{10-y} f(x, y)dy$

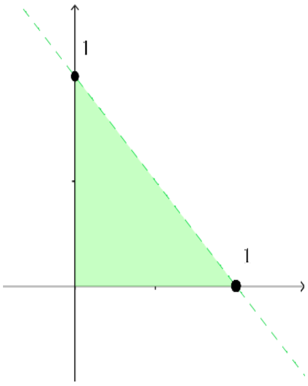
Изменив порядок интегрирования, вычислите интеграл

Задача 9

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} e^{-x^2+2x+1} dx.$$

Чтобы изменить порядок интегрирования, нужно знать, что представляет собой D.

$y \in [0{,}1]$, и точки лежат под прямой $y = -x + 1$.



Изменяем порядок: $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} e^{-x^2+2x+1} dy = \int\limits_0^1 e^{-x^2+2x+1} \int\limits_0^{1-x} dy\, dx = \int\limits_0^1 e^{-(x-1)^2+2}\ (1-x)\, dx.$

Замена $\begin{cases} t = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1; \\ dt = (2x-2)dx; \\ dx = dt/(2x-2); \\ \text{границы становятся } (1, 0). \end{cases}$

$$\int\limits_1^0 e^{-t+2} \left(\frac{1-x}{2x-2}\right) dt = \int\limits_1^0 e^{-t+2} \left(-\frac{1}{2}\right) dt = -\frac{e^2}{2} \int\limits_1^0 e^{-t} dt = -\frac{e^2}{2}\ \left(-e^{-t}\Big|_{t=1}^{0}\right) = \frac{-e^2(-e^0 + e^{-1})}{2} = \frac{e^2 - e}{2}.$$

Задача 10

$$\int\limits_0^2 x^2dx\int\limits_x^2 \ln(1+y^2)dy = \text{ пристально смотрим на рисунок } = \int\limits_0^2\int\limits_0^y x^2\ln(1+y^2)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^2 \ln(1+y^2)dy\int\limits_0^y x^2dx = \int\limits_0^2 \ln(1+y^2)dy\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^y\right) = \frac{1}{3}\int\limits_0^2 \ln(1+y^2)y^3dy =$$

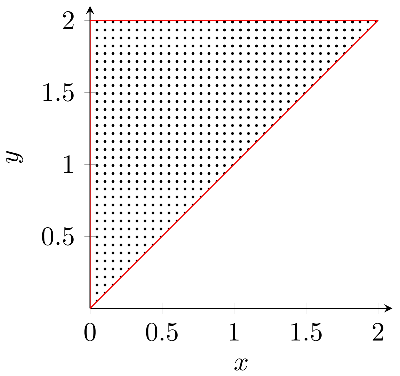
$$= \left\{\begin{array}{ll} u = \ln(1+y^2) & \Rightarrow u' = \dfrac{2y}{1+y^2} \\ v' = y^3 & \Rightarrow v = \dfrac{y^4}{4}\end{array}\right\} = \frac{1}{3}\ln(1+y^2)\frac{y^4}{4}\Big|_0^2 - \frac{1}{3}\int\limits_0^2 \frac{y^4}{4}\frac{2y}{1+y^2}dy = \left\{\begin{array}{l} t = 1+y^2 \\ dt = 2ydy \\ dy = \dfrac{dt}{2y}\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}(4\ln(5)-0) - \frac{1}{6}\int\limits_1^5 \frac{y^5}{t}\frac{dt}{2y} = \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}\int\limits_1^5 \frac{(y^4+2y^2+1)-(2y^2-2)+1}{t}dt =$$

$$= \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}\int\limits_1^5 \frac{t^2-2t+1}{t}dt = \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}\left(\int\limits_1^5 tdt - 2\int\limits_1^5 dt + \int\limits_1^5 \frac{dt}{t}\right) =$$

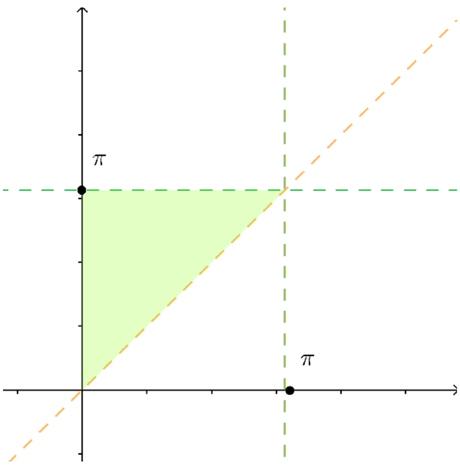
$$= \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}\left(\left(\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\right) - 2(5-1) + \ln(|t|)\Big|_1^5\right) = \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}(12-8+\ln(5)) =$$

$$= \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{3} - \frac{\ln(5)}{12} = \mathbf{\frac{5\ln(5)}{4} - \frac{1}{3}}$$



Задача 11

$\int\limits_0^\pi xdx\int\limits_x^\pi \frac{\sin y}{y}dy$. Как всегда, ищем D с помощью границ интегрирования.



Тогда, изменив порядок, получим: $\int\limits_0^\pi dy \int\limits_0^y x \frac{\sin y}{y} dx = \int\limits_0^\pi \frac{\sin y}{y} dy \int\limits_0^y x dx = \int\limits_0^\pi \frac{\sin y}{y} \frac{y^2}{2} dy = \frac{1}{2} \int\limits_0^\pi (y \sin y)\, dy.$

Интегрируем по частям.

$$\begin{cases} f = y \implies df = dy; \\ g = -\cos y \implies dg = \sin y\, dy \end{cases}$$

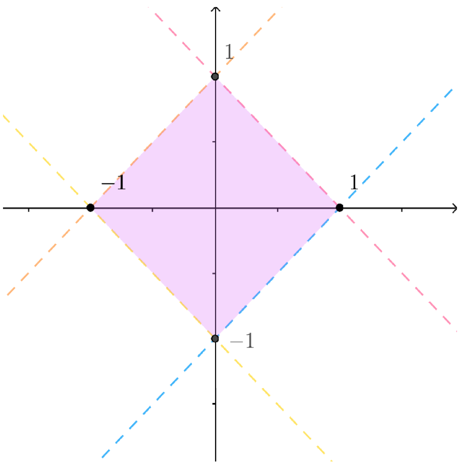
$$\frac{1}{2}\left(f \cdot g \Big|_0^\pi \right) - \frac{1}{2} \int\limits_0^\pi g \cdot df = \frac{1}{2}\left(-y \cos y \Big|_0^\pi \right) - \frac{1}{2} \int\limits_0^\pi -\cos y dy = \frac{1}{2}\left(-y \cos y \Big|_0^\pi \right) + \frac{1}{2}\left(\sin y \Big|_0^\pi \right) = \frac{\pi}{2}.$$

Вычислите интеграл

Задача 13

$$\iint\limits_D x^3 y^5 dxdy,\ D = \{(x,y)\ :\ |x| + |y| \leqslant 1\}.$$

Наше множество D – это следующий квадрат:



Знаная D, можем увидеть границы интегрирования:

$$\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-1-x}^{1+x} x^3y^5 dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-1+x}^{1-x} x^3y^5 dy = \int\limits_{-1}^{0} x^3 dx \int\limits_{-1-x}^{1+x} y^5 dy + \int\limits_{0}^{1} x^3 dx \int\limits_{-1+x}^{1-x} y^5 dy = \int\limits_{-1}^{0} x^3 \left(\frac{y^6}{6} \Bigg|_{y=-1-x}^{1+x} \right) dx +$$

$$\int\limits_{0}^{1} x^3 \left(\frac{y^6}{6} \Bigg|_{y=-1+x}^{1-x} \right) dx = \int\limits_{-1}^{0} x^3 \left(\frac{(1+x)^6}{6} - \frac{(-1-x)^6}{6} \right) dx + \int\limits_{0}^{1} x^3 \left(\frac{(1-x)^6}{6} - \frac{(-1+x)^6}{6} \right) dx = 0.$$

Задача 14

$$D = \big\{(x,y) : x^2+y^2 \leqslant 9\big\} \qquad \iint\limits_D \operatorname{sgn}\big(x^2+y^2-4\big)\, dxdy$$

Заметим, что D описывает множество точек круга с радиусом 3, а подынтегральная функция принимает значение -1 на точках круга радиусом 2 и значение 1 на всех остальных точках. Получается задачу можно решать не через матан а через геому, чем мы и займемся.

$$\iint\limits_D \operatorname{sgn}\big(x^2+y^2-4\big)\, dxdy = -1(\pi 2^2) + 1(\pi 3^2 - \pi 2^2) = \pi$$

Задача 16

$\iint\limits_D xy\, dxdy$, D ограничена осями координат и кривой $\begin{cases} x = \cos^3 t; \\ y = \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, \pi/2].$

Заметим, что при данных ограничениях t однозначно выразим через $x \Rightarrow y$ тоже однозначно выразим через x.

Тоесть $y = \varphi(x)$.

На $[0, \pi/2]$ x принимает значения от 0 до 1. Если D ограничено осями координат и графиком $\varphi(x)$, то $y \in [0, \varphi(x)]$ при фиксированном x (ибо y неотрицателен при $t \in [0, \pi/2]$).

Так что пределы интегрирования знаем:

$$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\varphi(x)} xy\; dy = \int\limits_{0}^{1} dx \left(\frac{xy^2}{2} \Bigg|_{0}^{\varphi(x)} \right) = \int\limits_{0}^{1} \left(\frac{x \cdot \varphi^2(x)}{2} \right) dx.$$

Пришло время подставить параметр: $\begin{cases} x = \cos^3 t; \\ \varphi(x) = \sin^3 t; \\ dx = 3\cos^2 t \cdot (-\sin t)\, dt; \\ \text{пределы интегрирования теперь } [\pi/2, 0] \end{cases}$

$$\int\limits_{\pi/2}^{0} -\frac{3}{2} \cos^3 t \cdot \sin^6 t \cdot \cos^2 t \cdot \sin t\, dt = \frac{3}{2} \int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^5 t \cdot \sin^7 t\, dt.$$

Идея: отщепим один множитель (синус или косинус), загоним его под дифференциал. И введем новую переменную:

$$\begin{cases} \cos t \, dt = d \sin t; \\ u := \sin t; \\ \cos^4 t = (1-u^2)^2; \\ \text{пределы интегрирования теперь } [0,1] \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}\int\limits_0^1 (1-u^2)^2 \cdot u^7 \, du = \frac{3}{2}\int\limits_0^1 u^7 - 2u^9 + u^{11} \, du = \frac{3}{2}\left(\frac{u^8}{8} - \frac{u^{10}}{5} + \frac{u^{12}}{12}\bigg|_{u=0}^{1}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{5} + \frac{1}{12}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{15-24+10}{120} = \frac{1}{80}.$$

P.s. тут картинка не нужна!

Предполагая функцию f непрерывной на D, измените порядок интегрирования в повторном интеграле всеми возможными способами

Задача 17

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)dz.$$

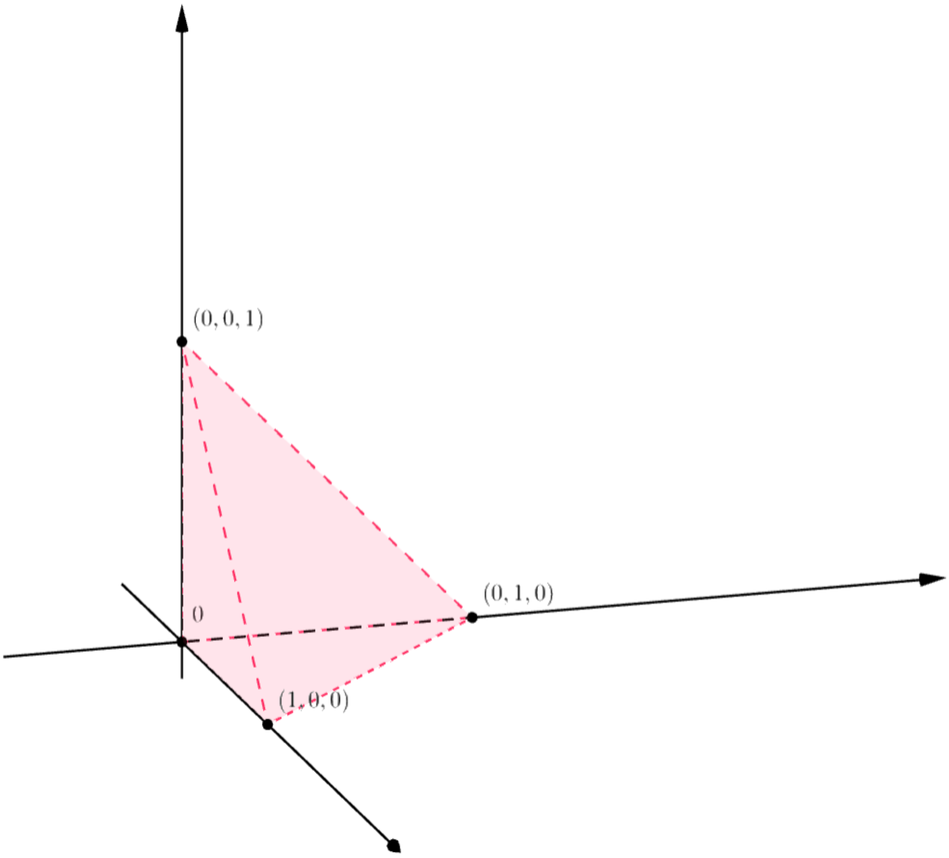
Если есть 3 переменных, то порядок интегрирования может быть задан $3! = 6$ возможными способами. Нужно найти оставшиеся 5.

Как и в 2-мерном случае, попытаемся восстановить множество D.

$x \in [0{,}1]$ – внешний интеграл.

В плоскости Oxy образуется треугольник между осями координат и прямой $y = -x + 1$.

Так как $z \leqslant 1 - x - y$, то нас будет интересовать участок под плоскостью $z + x + y = 1$. Итого получаем пирамидку:



Теперь всё стало очень просто, потому что наша пирамидка симметрична относительно любой замены координат (друг на друга). Значит, можем просто изменить координаты в формуле побуквенно. Погнали:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dz \int\limits_0^{1-x-z} f(x, y, z) dy.$$

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} dx \int\limits_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz.$$

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} dz \int\limits_0^{1-z-y} f(x, y, z) dx.$$

$$\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{1-z} dx \int\limits_0^{1-x-z} f(x, y, z) dy.$$

$$\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^{1-z} dy \int\limits_0^{1-z-y} f(x, y, z) dx.$$

Задача 18

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(x,y,z)dz \qquad \text{Порядок интегрирования (x, y, z)}$$

Видим, что $\begin{cases} x,y,z \in [0,1] \\ y \leqslant x; \quad z \leqslant y \quad z \leqslant x \end{cases}$ — это помогает шафлить порядок интегрирования

Пристально смотрим на картинку, начинаем менять порядок:

$(\mathbf{x},\mathbf{z},\mathbf{y})\colon \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x f(x,y,z)dy$

$(\mathbf{y},\mathbf{x},\mathbf{z})\colon \int_0^1 dy \int_y^1 dx \int_0^y f(x,y,z)dz$

$(\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{x})\colon \int_0^1 dy \int_0^y dz \int_y^1 f(x,y,z)dx$

$(\mathbf{z},\mathbf{x},\mathbf{y})\colon \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_z^x f(x,y,z)dy$

$(\mathbf{z},\mathbf{y},\mathbf{x})\colon \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_y^1 f(x,y,z)dx$

Алгоритм действий для меня был выписать все известные отношения с уже введенными переменными и использовать самые строгие. Может быть в более потных примерах придется дробить интегралы на несколько, но лично я такое решать не хочу.