

# Коллоквиум 1

Александр Богданов  
[Telegram](#)

Алиса Вернигор  
[Telegram](#)

Василий Шныпко  
[Telegram](#)

Денис Козлов  
[Telegram](#)

Елизавета Орешонок  
[Telegram](#)

Никита Насонков  
[Telegram](#)

Даниэль Хайбулин  
[Telegram](#)

Сергей Лоптев  
[Telegram](#)

Версия от 17.10.2020 13:41

**1. Дайте определения: числовой ряд, частичная сумма ряда, сумма ряда, сходящийся ряд, расходящийся ряд. Рассмотрим ряд с общим членом  $a_n$ . Докажите, что если ряд сходится, то  $a_n \rightarrow 0$ .**

Пусть  $a_n$  — последовательность, т.е.  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Формальная бесконечная сумма  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  называется рядом.

$S_N = \sum_{n=1}^N a_n$  — частичная сумма.

Суммой ряда называется  $S = \lim_{N \rightarrow \infty} S_N$ .

Если  $\exists S \in \mathbb{R}$ , то ряд называют сходящимся.

Если  $\exists S = \infty$  или  $\nexists S$ , то ряд называют расходящимся.

**Необходимое условие сходимости:** Если ряд сходится, то  $a_n \rightarrow 0$ .

*Доказательство:*  $a_n = S_n - S_{n-1} \rightarrow 0$ , т.к.  $S_n \rightarrow S$  и  $S_{n-1} \rightarrow S$ . ■

## 2. Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Последовательность  $\{x_n\}$  сходится, если  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N \implies |x_n - x_m| < \varepsilon$

Критерий Коши сходимости числового ряда

Ряд  $\sum x_n$  сходится тогда, и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N, n > m \implies \left| \sum_{i=m}^n x_i \right| < \varepsilon$

*Доказательство.* Рассмотрим последовательность частных сумм  $\{S_n\}$

Ряд сходится тогда, и только тогда, когда сходится  $\{S_n\}$

То есть ряд  $\sum x_n$  сходится тогда, и только тогда, когда  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geq N, n > m \implies |S_n - S_m| < \varepsilon \implies$

$$\left| \sum_{i=m}^n x_i \right| < \varepsilon$$

■

### 3. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $a_n \leq b_n$ .

Пусть  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \quad 0 \leq a_n \leq b_n$ .

- Если сходится ряд  $\sum b_n$ , то сходится и ряд  $\sum a_n$ .
- Если расходится ряд  $\sum a_n$ , то расходится и ряд  $\sum b_n$ .

*Доказательство.* Для начала удалим из обеих последовательностей первые  $n_0$  элементов, чтобы неравенство  $0 \leq a_n \leq b_n$  выполнялось для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Имеем на это право, так как конечное число элементов последовательности не влияет на ее поведение.

Заметим, что последовательности частичных сумм  $A_n = \sum_{n=1}^N a_n$  и  $B_n = \sum_{n=1}^N b_n$  обе монотонны, так как ряды положительны. Также ряд  $\sum b_n$  сходится, следовательно последовательность  $B_n$  ограничена сверху. Тогда ограничена сверху и  $A_n \leq B_n$ , а из ее монотонности последовательность частичных сумм ряда  $\sum a_n$  сходится  $\implies$  ряд  $\sum a_n$  сходится.

Второе утверждение выполняется как контрапозиция первого. ■

### 4. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$ .

**Утверждение 0.1** (Сравнение отношений). Пусть  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$  при  $n \geq n_0$ . Тогда:

$$\begin{aligned} \sum b_n \text{ сходится} &\implies \sum a_n \text{ сходится} \\ \sum a_n \text{ расходится} &\implies \sum b_n \text{ расходится} \end{aligned}$$

*Доказательство.* Предполагаем, что  $a_n > 0, b_n > 0$ .

$$a_{n_0+1} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

...

$$a_{n_0+k} \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k}$$

$$\sum_{n=n_0}^N a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^N b_n$$

■

**5. Сформулировать и доказать признак сравнения числовых рядов, основанный на пределе  $\lim \frac{a_n}{b_n}$ .**

Пусть  $\sum a_n$  и  $\sum b_n$  — положительные ряды, и  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0; +\infty)$ .

Тогда ряд  $\sum a_n$  сходится  $\Leftrightarrow \sum b_n$  сходится.

*Доказательство.*  $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$

По определению предела:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ (берем } \varepsilon < c) \exists n_0 : c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon \quad \forall n \geq n_0 \Rightarrow (c - \varepsilon) b_n \leq a_n \leq (c + \varepsilon) b_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum (c - \varepsilon) b_n \leq \sum a_n \leq \sum (c + \varepsilon) b_n \Leftrightarrow C_1 \sum b_n \leq \sum a_n \leq C_2 \sum b_n \quad \blacksquare$$

**6. Пусть последовательности  $\{a_n\}$ ,  $\{A_n\}$  таковы, что  $a_n - (A_n - A_{n-1}) = c_n$  и ряд  $\sum c_n$  сходится. Докажите, что существует  $C$  такое, что  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n + C + o(1)$ .**

$$\text{Доказательство.} \quad \sum_{n=1}^N c_n = \sum_{n=1}^N a_n - \sum_{n=1}^N (A_n - A_{n-1}) = \sum_{n=1}^N a_n - A_N + A_0 \Rightarrow a_1 + a_2 + \dots + a_N = A_N + \left( -A_0 + \sum_{n=1}^N c_n \right).$$

Последнее равенство получено перенесением некоторых слагаемых первых равенств в другую часть от знака равно.

$$\text{Получим требуемое, если возьмём } C = \lim_{N \rightarrow \infty} -A_0 + \sum_{n=1}^N c_n.$$

Так как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$  — сходится, то такой предел существует. ■

**7. Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши**

**Утверждение 0.2.** 1 Пусть  $a_n \downarrow$ . Рассмотрим ряды:

$$\sum a_n \quad (1) \text{ и } \sum 2^n \cdot a_{2^n} \quad (2)$$

Тогда ряды (1) и (2) ведут себя одинаково

Доказательство.

$$2^m \text{ слаг.: } a_1 + \underbrace{a_2}_{\substack{\leq a_1 \\ \geq a_2}} + \underbrace{a_3 + a_4}_{\substack{\leq 2a_2 \\ \geq 2a_4}} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\substack{\leq 4a_4 \\ \geq 4a_8}} + \cdots + \underbrace{a_{2^{m-1}+1} + a_{2^{m-1}+2} + \cdots + a_{2^{m-1}+2^{m-1}}}_{\substack{\leq 2^{m-1} \cdot a_{2^{m-1}} \\ \geq \frac{1}{2} \cdot 2^m \cdot a_{2^m}}}$$

$$a_1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^m 2^n a_{2^n} \leq \sum_{n=1}^{2^m} a_n \leq a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n \cdot a_{2^n}$$

Левая часть – сумма нижних оценок, правая – сумма верхних

■

**8. Сформулируйте теорему Штольца о пределе последовательности  $\frac{p_n}{q_n}$ , где  $p_n, q_n \rightarrow 0$ .**

**Покажите на примере, как можно с помощью этой теоремы уточнить асимптотическую оценку для частичной суммы ряда.**

Пусть  $p_n, q_n \rightarrow 0$  и  $q_n$  монотонна. Тогда если  $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$ .

Докажем, что  $S_N = S - \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right)$  для ряда  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  (семинарская задача 2.19).

Пусть  $p_n = S - S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  и  $q_n = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , причем  $q_n$  монотонно убывает. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n} &= \frac{(S - S_{n+1}) - (S - S_n)}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \frac{S_n - S_{n+1}}{\frac{n - (n+1)}{n(n+1)}} = \frac{-\frac{1}{(n+1)^2}}{-\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} &= 1 \text{ (по теореме Штольца)} \Rightarrow \frac{p_n}{q_n} = 1 + o(1) \Rightarrow p_n = q_n + o(q_n) \Rightarrow \\ \Rightarrow S - S_n &= \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \Rightarrow S_N = S - \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**9. Пусть  $\sum a_n, \sum a'_n$  – сходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд  $\sum a'_n$  сходится быстрее ряда  $\sum a_n$ , если  $a'_n = o(a_n)$ . Докажите, что в этом случае также  $r'_n = o(r_n)$ , где  $r_n, r'_n$  – остатки соответствующих рядов.**

Доказательство.

$$a'_n = o(a_n), \text{ то есть, } \frac{a'_n}{a_n} \rightarrow 0$$

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \Rightarrow r_{n-1} = \sum_{k=n}^{\infty}$$

Так как ряды положительные и сходятся,  $r_n, r'_n \rightarrow 0$ ,  $r_n \downarrow \Rightarrow$  можем применить теорему Штольца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r'_n}{r_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r'_n - r'_{n-1}}{r_n - r_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a'_n}{a_n} = 0 \Rightarrow r'_n = o(r_n)$$

■

**10. Пусть  $\sum a_n, \sum a'_n$  – расходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд  $\sum a'_n$  расходится медленнее чем ряд  $a_n$ , если  $a'_n = o(a_n)$ . Докажите, что в этом случае также  $S'_n = o(S_n)$ , где  $S_n, S'_n$  – частичные суммы соответствующих рядов.**

Докажем при помощи теоремы Штольца. У нас даны две расходящиеся последовательности, для которых последовательности частичных сумм положительны и строго возрастают. Рассмотрим предел отношений частичных сумм  $S_n$  и

$$S'_n: \lim \frac{S'_n}{S_n} = \lim \frac{S'_n - S'_{n-1}}{S_n - S_{n-1}} = \lim \frac{a'_n}{a_n} = 0, \text{ так как } a'_n = o(a_n)$$

Показали, что  $S'_n = o(S_n)$

**11. Пусть положительный ряд  $\sum a_n$  сходится и  $r_n$  – его остаток. Докажите, что ряд  $\sum (\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$  также сходится, причём медленнее, чем ряд  $\sum a_{n+1}$ .**

Сначала докажем сходимость ряда  $\sum_{n=0}^N (\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ :

$$\sum_{n=0}^N (\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_1} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + \dots + \sqrt{r_N} - \sqrt{r_{N+1}} = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_{N+1}} = \sqrt{S} - \sqrt{r_{N+1}} \rightarrow \sqrt{S} \text{ (т.к. } \sqrt{r_{N+1}} \rightarrow 0)$$

Теперь покажем, что он сходится медленнее, чем  $a_{n+1}$ :

$$\frac{\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}}{r_n - r_{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} \rightarrow \infty, \text{ т.к. } \sqrt{r_n} \rightarrow 0 \text{ и } \sqrt{r_{n+1}} \rightarrow 0. \blacksquare$$

**12. Пусть положительный ряд  $\sum a_n$  расходится и  $S_n$  его частичная сумма. Докажите, что ряд  $\sum (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$  также расходится, причём медленнее, чем ряд  $\sum a_{n+1}$**

Докажем расходимость:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}) &= \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \dots + \sqrt{S_{N+1}} - \sqrt{S_N} \\ &= \sqrt{S_{N+1}} - \sqrt{S_0} \\ &= \sqrt{S_{N+1}} \rightarrow \sqrt{S}. \end{aligned}$$

Перейдем ко второй части вопроса:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{a_{n+1}} &= \frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{S_{n+1} - S_n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}}, \end{aligned}$$

где  $\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n} \rightarrow \infty$ . Это значит, что  $\frac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}}$  стремится к 0. Тогда ряд  $\sum (\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$  расходится, причём медленнее, чем ряд  $\sum a_{n+1}$ .

**13. Сформулируйте (предельный) признак Даламбера для положительного ряда.**

Пусть  $\sum a_n$  — положительный ряд. Тогда

- $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сходится};$
- $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расходится}.$

**14. Сформулируйте (предельный) радикальный признак Коши для положительного ряда.**

**Утверждение 0.3** (Радикальный признак Коши.). Пусть  $a_n \geq 0$ . Тогда:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} < 1 & \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сход.} \\ > 1 & \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расх.} \end{cases}$$

**15. Доказать, что всякий раз, когда признак Даламбера даёт ответ на вопрос о сходимости или расходимости ряда, радикальный признак Коши также даёт (тот же) ответ на этот вопрос.**

Пусть  $a_n > 0$ . Тогда 
$$\begin{cases} \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1, \\ \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1, \end{cases}$$

*Доказательство.* Для доказательства основного утверждения докажем неравенство:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \text{ очевидно, докажем } \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(левое неравенство доказывается аналогично):

$$\text{Пусть } q = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}, \quad p = \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

От противного: пусть  $p < q$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \{n_k\} : \sqrt[n_k]{a_{n_k}} \geq q - \varepsilon \implies a_{n_k} \geq (q - \varepsilon)^{n_k}$$

$$\exists n_0 : \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leq p + \varepsilon, \quad n \geq n_0 \implies a_{n_0+m} \leq a_{n_0}(p + \varepsilon)^m$$

$$(q - \varepsilon)^{n_k} \leq a_{n_k} \leq a_{n_0}(p + \varepsilon)^{n_k - n_0} \implies \frac{a_{n_0}}{(p + \varepsilon)^{n_0}} \geq \left( \frac{q - \varepsilon}{p + \varepsilon} \right)^{n_k} \quad \forall k = 1, 2, \dots;$$

$$\text{но } \frac{q - \varepsilon}{p + \varepsilon} > 1 \text{ при малом } \varepsilon \text{ по предположению} \implies$$

$$\implies \left( \frac{q - \varepsilon}{p + \varepsilon} \right)^{n_k} \text{ — бесконечно большое, тогда как } \frac{a_{n_0}}{(p + \varepsilon)^{n_0}} = C \text{ — некоторая константа.}$$

Получили неравенство  $C \geq +\infty$  — противоречие, следовательно, предположение неверно, и неравенство выполняется.

Из  $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  исходное утверждение следует очевидно. ■

16

**Доказать, что если для  $\sum a_n$  существует  $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ , то существует и  $\lim \sqrt[n]{a_n} = q$ .**

$$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Rightarrow \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = q$$

*Доказательство.* Рассмотрим неравенство (доказанное в п. 15):

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$\exists \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Leftrightarrow \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq q \Rightarrow \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = q \Leftrightarrow \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = q,$$

что и требовалось доказать. ■

**17. Приведите пример положительного ряда, вопрос о поведении которого не может быть решён с помощью признака Даламбера, но может быть решён с помощью радикального признака Коши (с обоснованием)**

*Пример.*

$$0 < a < 1 < b$$

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a^{[\frac{n}{2}]} \cdot b^{[\frac{n-1}{2}]}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} a, & n - \text{нечёт.} \\ b, & n - \text{чёт.} \end{cases} \Rightarrow \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = b > 1, \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$$

– признак Даламбера не работает

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{n-2}{2n}}, & n - \text{чёт.} \\ a^{\frac{n-1}{2n}} \cdot b^{\frac{n-1}{2n}}, & n - \text{нечёт.} \end{cases} \Rightarrow \lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{ab}$$

Если  $ab \neq 1$ , то радикальный признак работает

**18. Приведите пример ряда, который сходится медленнее любого ряда геометрической прогрессии, но быстрее любого обобщенного гармонического ряда (с обоснованием).**

$$\text{Рассмотрим } \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$$

Ряд геометрической прогрессии:  $\sum q^n$ ,  $0 < q < 1$ ; Обобщенный гармонический ряд:  $\sum \frac{1}{n^p}$ ,  $p > 1$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{q^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-\sqrt{n} - n \ln q) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\sqrt{n} + n \ln \frac{1}{q}\right) = \infty$  так как  $q < 1$ . Получается ряд сходится медленнее геометрической прогрессии.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\sqrt{n} - p \ln \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp(-\sqrt{n} + p \ln n) = 0$ . Получается ряд сходится быстрее обобщенного гармонического ряда.

## 19. Сформулируйте признак Гаусса для положительного ряда. Приведите пример применения признака Гаусса.

**Утверждение 0.4** (Признак Гаусса).

Пусть  $\exists \delta > 0, p : \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{p}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$

Тогда:

если  $p > 1 \Rightarrow \sum a_n$  — сходится если  $p \leq 1 \Rightarrow \sum a_n$  — расходится

Пример.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-4)}{3^n \cdot n!}$

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(3(n+1)-4) \cdot 3^n \cdot n!}{3^{n+1} \cdot (n+1)!} = \frac{3(n+1)-4}{3(n+1)} = \frac{3n-1}{3n+3} = \frac{1 - \frac{1}{3n}}{1 + \frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{1}{3n}\right) \left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n^2} - O\left(\frac{1}{3n^3}\right) = 1 - \frac{4}{3n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{4}{3} \\ \delta = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{ряд сходится по признаку Гаусса.} \end{aligned}$$

Пример.  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$

Применим признак Гаусса:  $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^2 \cdot \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \left(\frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{2}{n}}\right)^2 =$

$$\begin{aligned} &\frac{4 + \frac{4}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{4 + \frac{8}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \\ &= \frac{1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1 + \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \left(1 - \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \delta = 1 \\ p = 1 \end{cases} = 1 \Rightarrow \text{ряд расходится по признаку Гаусса.} \end{aligned}$$

## 20

Привести пример положительного ряда, вопрос о поведении которого не может быть решен с помощью признака Гаусса.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^p n}$  — положительный ряд,  $a_n = \frac{1}{n \ln^p n}$

Рассмотрим отношение:



$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)}}{\frac{1}{n\ln^p n}} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln^p n}{\ln^p(n+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \cdot \frac{\ln^p n}{\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^p} = \\ &= \left[ \text{По формуле Тейлора для } (1+x)^{-1} \text{ и } \ln(1+x) \sim x \right] \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \cdot \left(1 + \frac{\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{-p} = \\ &= \left[ \text{Перешли к менее строгому приближению и снова разложили } (1+x)^{-p} \right] \\ &= \left(1 - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{p}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{p}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \end{aligned}$$

Для использования признака Гаусса должны получить приближение  $1 - \frac{q}{n} + O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$ ,  $\delta > 0$ ,

но  $-\frac{p}{n\ln n} + o\left(\frac{1}{n\ln n}\right) \neq O\left(\frac{1}{n^{1+\delta}}\right)$ , т.к.  $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n^\delta}$  при  $n \rightarrow \infty \quad \forall \delta > 0$

**21. Выведите двустороннюю оценку частичной суммы ряда через неопределённый интеграл. Сформулируйте и докажите интегральный признак Коши-Маклорена.**

**Интегральный признак Коши-Маклорена:** Если функция  $f(x)$  принимает неотрицательные значения на всей области определения и монотонно убывает, а также  $\forall n \in \mathbb{N} : f(n) = a_n$ , то  $\sum a_n$  и  $\int^\infty f(x)dx$  сходятся или расходятся одновременно.

*Доказательство:* Рассмотрим убывающую при  $x \geq n_0 - 1$  функцию  $f(x)$  и ряд  $\sum_{n=n_0}^\infty a_n$ , где  $a_n = f(n)$ . Заметим, что

$$f(n+t) \leq a_n \leq f(n-1+t), \quad t \in [0; 1]$$

Проинтегрируем каждый член неравенства определённым интегралом от 0 до 1 по  $dt$ :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(n+t)dt &\leq \int_0^1 a_n dt \leq \int_0^1 f(n-1+t)dt \\ \int_n^{n+1} f(x)dx &\leq a_n \leq \int_{n-1}^n f(x)dx \end{aligned}$$

Просуммируем эти неравенства при всех  $n$ :

$$\int_{n_0}^{N+1} f(x)dx \leq \sum_{n=n_0}^N a_n \leq \int_{n_0-1}^N f(x)dx$$

Тогда  $\sum a_n$  ведёт себя как несобственный интеграл  $\int^\infty f(x)dx$ . ■

Двусторонняя оценка для частичной суммы ряда через определённый интеграл была выведена в процессе.

**22. Что такое улучшение сходимости положительного ряда? Покажите на примере как можно улучшить сходимость ряда.**

Пусть у нас есть некоторый ряд  $\sum a_n$  и он сходится медленно. В таких случаях для расчёта суммы ряда с необходимой точностью потребуется взять больше членов, что неудобно. Мы можем преобразовать наш ряд для улучшения

сходимости, т.е. получить некоторый ряд  $\sum a'_n$ , который будет сходиться быстрее, чем исходный  $\sum a_n$ . Пусть у нас есть ряд  $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . Воспользуемся методом Куммера. Для улучшения сходимости будем брать ряды вида  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \dots$

В данном случае нам подойдёт первый ряд в этом списке, поскольку  $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$ .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2 + 2} - \frac{1}{n(n+1)} \right) = S - 1 \implies S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n^2 + 2} - \frac{1}{n(n+1)} \right)$$

$$\frac{1}{n^2 + 2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2} \cdot \left( \frac{1}{1 + \frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{n^2} \cdot \left( 1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left( 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

**23. Дайте определения: знакопеременный ряд, знакочередующийся ряд, абсолютно сходящийся ряд, условно сходящийся ряд, положительная и отрицательная части ряда.**

- Ряд  $\sum a_n$  называется знакопеременным, если на знаки его элементов  $a_n$  не наложены ограничения. Фактически любой ряд — знакопеременный.
- Ряд  $\sum a_n$  называется знакочередующимся, если  $a_i \cdot a_{i+1} < 0 \quad \forall i \in \mathbb{N}$ .
- Ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно, если сходятся ряды  $\sum a_n$  и  $\sum |a_n|$ .
- Ряд  $\sum a_n$  сходится условно, если сходится ряд  $\sum a_n$  и расходится ряд  $\sum |a_n|$ .
- Введем последовательности  $a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n > 0 \\ 0, & a_n \leq 0 \end{cases}$  и  $a_n^- = \begin{cases} |a_n|, & a_n < 0 \\ 0, & a_n \geq 0 \end{cases} \implies$   
 $\implies$  ряды  $\sum a_n^+$  и  $\sum a_n^-$  — положительная и отрицательная части ряда  $\sum a_n$  соответственно.

**24. Докажите, что ряд сходится абсолютно ровно в том случае, когда сходятся его положительная и отрицательная части.**

*Утверждение 0.5. Ряд  $\sum a_n$  сходится абсолютно  $\iff \sum a_n^+, \sum a_n^- < \infty$  сходятся.*

*Доказательство.* Если  $\sum |a_n| < \infty$ , то  $S_N^+, S_N^-$  ограничены  $\implies$  сходятся.

Если  $S_N^+ \rightarrow S^+, S_N^- \rightarrow S^-$ , то  $\sum_{n=1}^N a_n \rightarrow S^+ - S^-, \sum_{n=1}^N |a_n| \rightarrow S^+ + S^-$ . ■

**25. Доказать, что если ряд сходится условно, то его положительная и отрицательная части расходятся.**

$\sum a_n$  — ряд,  $S_+ = \sum a_n^+$  и  $S_- = \sum a_n^-$  — положительная и отрицательная части суммы соответственно.

$$\begin{cases} \sum a_n = C, \\ \sum |a_n| = \pm\infty \end{cases} \Rightarrow S_+ \text{ и } S_- \text{ расходятся.}$$

*Доказательство.* По определению:

$$\sum a_n = S_+ - S_-, \quad \sum |a_n| = S_+ + S_-.$$

От противного: пусть

1.  $S_+, S_-$  конечны. Тогда  $\sum |a_n| = S_+ + S_- = C_1 + C_2 = \text{const}$  — сходится, противоречие.

2.  $S_+$  конечна,  $S_-$  расходится (симметричный случай аналогично).

Тогда  $\sum a_n = S_+ - S_- = C_1 - \underbrace{S_-}_{\text{беск. большое}} = -\infty$  — расходится, противоречие.

■

**26. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса (признак абсолютной сходимости). Приведите пример применения мажорантного признака.**

**Признак Вейерштрасса:**

Если  $\sum a_n$  — ряд, и  $\exists n_0 : |a_n| \leq b_n \quad \forall n \geq n_0$ , причем  $\sum b_n$  сходится, то ряд  $\sum a_n$  также сходится.

*Пример.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p}, \quad p > 0; \quad |a_n| = \frac{|\sin(nx)|}{n^p} \leq \frac{1}{n^p} = b_n$$

Ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  сходится при  $p > 1$ , значит, и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  сходится абсолютно при  $p > 1$ .

**27. Что такое группировка членов ряда? Докажите, что любой ряд, полученный из сходящегося группировкой его членов, сходится и имеет ту же сумму.**

*Определение 1.* Говорят, что ряд  $\sum A_k$  получен из ряда  $\sum a_n$  группировкой членов, если  $\exists n_1, n_2, \dots : 1 \leq n_1 < n_2 < \dots$  такие, что

$$A_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}$$

$$A_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \dots + a_{n_2}$$

*Утверждение 0.6.* Если ряд  $\sum a_n$  сходится, то ряд  $\sum A_k$  тоже сходится, причём к той же сумме.

*Доказательство.* Последовательность частичных сумм  $S'_k = A_1 + \dots + A_k$  ряда  $\sum A_k$  явл. подпоследовательностью последовательности частичных сумм  $S_n = a_1 + \dots + a_n$  ряда  $\sum a_n$  ■

**28. Как с помощью группировки преобразовать знакопеременный ряд в знакочередующийся? Что можно утверждать о сходимости полученного знакочередующегося ряда?**

Пусть есть знакопеременный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ , и нужно его с помощью группировки преобразовать в знакочередующийся ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Проведём группировку следующим образом:

Сначала найдём такое число  $n_1$ , что числа  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n_1}$  одного знака, а  $a_{n_1+1}$  — уже другого знака. Тогда  $b_1 = \sum_{i=1}^{n_1} a_i$ .

Затем найдём такое число  $n_2$ , что числа  $a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, a_{n_1+3}, \dots, a_{n_2}$  одного знака, а  $a_{n_2+1}$  — уже другого знака. Тогда  $b_2 = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} a_i$ .

И так далее. Мы как бы делим последовательность  $a_n$  на последовательные подотрезки, состоящие из чисел одинакового знака, и записываем суммы на этих подотрезках в последовательные элементы последовательности  $b_n$ .

Сходимость исходного ряда при такой группировке  $\iff$  сходимость  $\sum b_n$ .

**29. Приведите пример приведения преобразования знакопеременного (но не знакочередующегося) ряда к знакочередующемуся.**

*Пример.* 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$$

$$(-1)^k : \\ k \leq \ln n < k+1 \\ e^k \leq n < e^{k+1}$$

$$A_k = (-1)^k \sum_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]} \frac{1}{n}$$

$$|A_k| \geq \frac{1}{e^{k+1}}([e^{k+1}] - ([e^k] + 1)) \geq \frac{1}{e^{k+1}}(2[e^k] - [e^k] - 1) = \frac{[e^k] - 2}{e^{k+1}} > \frac{e^k - 2}{e^{k+1}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \frac{1}{e} \neq 0$$

$$\Rightarrow \sum A_k - \text{расходится (не выполняется необходимое условие сходимости ряда)} \Rightarrow \sum a_n - \text{расходится}$$

**30. Для знакочередующегося ряда с убывающим по модулю общим членом сформулируйте оценку  $n$ -го остатка. Приведите пример применения этой оценки.**

*Утверждение 0.7. Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n, u_n > 0$ . Если  $u_n \rightarrow 0$  и  $u_n \downarrow$  при  $n \geq n_0$ , то  $|r_n| \leq u_{n+1}$ .*

Пример.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, p > 0$

$$u_n \searrow \Rightarrow |r_n| \leq \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^p}$$

**31. Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующегося ряда. Приведите пример применения признака Лейбница.**

**Признак Лейбница:** Если ряд имеет вид  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot u_n$  и  $u_n$  монотонно убывает к 0 (обозначение:  $u_n \searrow 0$ ), то ряд сходится.

Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}, p > 0$$

$$\frac{1}{n^p} \searrow 0 \Rightarrow \text{ряд сходится (при } \forall p > 0)$$

**32. Покажите на примере, что к знакопеременным рядам неприменим предельный признак сравнения**

Рассмотрим 2 ряда:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n}$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ . Второй ряд сходится по признаку Лейбница.

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} \approx \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} \approx \frac{1}{n} - \text{расходится}$$

$$\sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n} = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^N \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - (-1)^n)} - \text{расходится как сумма сходящегося и расходящегося ряда.}$$

**33. Покажите, что для любых числовых последовательностей  $\{a_n\}, \{B_n\}$  справедлива формула суммирования по частям (преобразование Абеля):**

$$\sum_{n=m+1}^N a_n (B_n - B_{n-1}) = (a_N B_N - a_m B_m) - \sum_{n=m+1}^N (a_n - a_{n-1}) B_{n-1}$$

*Доказательство.* Заметим, что  $a_n (B_n - B_{n-1}) = (a_n B_n - a_{n-1} B_{n-1}) - (a_n - a_{n-1}) B_{n-1}$ . Просуммируем левую часть

от  $m + 1$  до  $N$ :

$$\begin{aligned} \sum_{n=m+1}^N a_n (B_n - B_{n-1}) &= \sum_{n=m+1}^N (a_n B_n - a_{n-1} B_{n-1}) - \sum_{n=m+1}^N (a_n - a_{n-1}) B_{n-1} = \\ &= (a_N B_N - a_m B_m) - \sum_{n=m+1}^N (a_n - a_{n-1}) B_{n-1} \end{aligned}$$

■

### 34. Сформулируйте признак Дирихле. Приведите пример его применения.

**Утверждение 0.8 (Признак Дирихле).** Если  $a_n \searrow 0$  и  $\left| \sum_{n=1}^N b_n \right| = |B_N| \leq C$  — ограничена, то ряд  $\sum a_n b_n$  сходится.

*Пример.*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p}, \quad x \neq \pi k, \quad p > 0$$

$$a_n = \frac{1}{n^p}, \quad b_n = \sin nx$$

$$B_n = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) x \right)}{2 \sin \frac{x}{2}}; \quad |B_n| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

$\Rightarrow$  ряд сходится по признаку Дирихле.

### 35. Сформулировать признак Абеля. Вывести утверждение признака Абеля из признака Дирихле.

**Признак Абеля.** Если  $\{a_n\}$  монотонна и ограничена  $|a_n| \leq C$ , а  $\sum b_n$  сходится, ряд  $\sum a_n \cdot b_n$  также сходится.

Пусть некоторая последовательность  $a_n \cdot b_n$  удовлетворяет признаку Абеля.

У монотонной ограниченной последовательности существует конечный предел:  $\lim a_n = A$ .

Представим исходную последовательность в виде суммы:

$$a_n \cdot b_n = A \cdot b_n + (a_n - A)b_n \Rightarrow \sum a_n \cdot b_n = \underbrace{\sum A \cdot b_n}_{\text{сходится}} + \sum (a_n - A)b_n$$

$a_n \rightarrow A \Rightarrow (a_n - A) \rightarrow 0$ , причем, т.к.  $\{a_n\}$  монотонная,  $\{(a_n - A)\}$  монотонно стремится к 0.

Т.к. ряд  $\sum b_n$  сходится, последовательность его частичных сумм также сходится.

$$\left\{ \begin{array}{l} \{(a_n - A)\} \downarrow 0, \\ \left\{ \sum_{n=1}^N b_n \right\} \leq B \end{array} \right. \Rightarrow \sum (a_n - A)b_n \text{ сходится по признаку Дирихле.}$$

$$\sum a_n \cdot b_n = \underbrace{\sum A \cdot b_n}_{\text{сходится}} + \underbrace{\sum (a_n - A)b_n}_{\text{сходится}} = \text{сходится.}$$

**36. Что такое перестановка членов ряда? Приведите пример.**

Пусть  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  биекция.

Говорят, что ряд  $\sum b_n$  получен из ряда  $\sum a_n$  перестановкой членов, если  $\exists$  биекция  $f : b_n = a_{f(n)}$ .

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots = -\ln 2.$$

Пусть  $\sum b_n$  получен так: сложим сначала  $p$  положительных слагаемых из  $\sum a_n$ , потом  $q$  отрицательных, затем снова  $p$  положительных и так далее ( $p, q \in \mathbb{N}$ , берем слагаемые по возрастанию их индексов).

**37. Сформулируйте свойство абсолютно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов.**

*Утверждение 0.9. Сумма абс. сходящегося ряда не меняется при любой перестановке его членов*

**38. Сформулируйте свойство условно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов (теорема Римана).**

*Теорема 0.10 (Свойство условно сходящегося ряда (теорема Римана)). Каков бы ни был условно сходящийся ряд  $\sum a_n$  и  $S \in [-\infty; +\infty]$ , найдётся такая перестановка  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , что  $\sum a_{f(n)} = S$ .*

**39. Приведите пример условно сходящегося ряда и перестановки, меняющей его сумму (с обоснованием).**

Пример.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots = -\ln 2$

$$S_{2n}^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + o(1)$$

$$S_{2n}^- = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} = \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + o(1)$$

Пусть берётся  $p$  положительных слагаемых, затем  $q$  отрицательных и так далее. Тогда после  $m$  действий получим:

$$S_{2mp}^+ = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2mp} = \frac{1}{2}(\ln(mp) + \gamma) + o(1)$$

$$S_{2mq-1}^- = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2mq-1} = \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln(mq) + \gamma) + o(1)$$

$$S_{2mp}^+ - S_{2mq}^- = -\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{p}{q} \right) + o(1)$$

$$\Rightarrow \text{ряд сходится к числу } -\ln \left( 2\sqrt{\frac{q}{p}} \right)$$

**40. Как определяется произведение рядов? Что можно утверждать о произведении абсолютно сходящихся рядов?**

Рассмотрим ряды  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{m=1}^{\infty} b_m$

$$\left( \sum_{k=1}^K a_k \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^M b_m \right) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq K \\ 1 \leq m \leq M}} a_k \cdot b_m$$

Если эта сумма имеет предел при  $K, M \rightarrow \infty$ , не зависящий от порядка суммирования, то говорят, что определено произведение произведение рядов

**Теорема Коши.** Если  $\sum a_k, \sum b_k$  сходятся абсолютно, то определено их произведение

$$\left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \cdot b_{m_n}$$

Оно не зависит от выбранного порядка суммирования, т.е. от биекции  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ,

$n \mapsto (k_n, m_n)$  и является абсолютно сходящимся рядом.

**41. Что такое произведение рядов в форме Коши? Приведите пример вычисления такого произведения.**

**Произведение рядов в форме Коши:** Если  $\left( \sum_{k=1}^{\infty} a_k \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n$ , то  $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_j \cdot b_{i-j}, i \geq 2$ .

*Пример:*  $\left( \sum_{k=1}^{\infty} k + 1 \right) \cdot \left( \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \right) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n$ . Для примера посчитаем несколько первых членов  $c_n$ :

$$c_2 = a_1 \cdot b_1 = 2 \cdot 1 = 2$$

$$c_3 = a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$$

$$c_4 = a_3 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3 = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 = 34$$

...

**42. Дайте определения: бесконечное произведение, частичное произведение, сходящееся бесконечное произведение, расходящееся бесконечное произведение.**

$\prod_{n=1}^N a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N$  — частичное произведение.

Бесконечным произведением называют формальную запись  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$

Значением бесконечного произведения является предел частичного произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N a_n$$



Если предел существует и он конечен – то бесконечное произведение сходится, иначе расходится.

### 43. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости бесконечного произведения.

Если бесконечное произведение  $\prod a_n$  сходится, то  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ .

*Доказательство.* Пусть  $P_N = \prod_{n=1}^N a_n$  — частичное произведение. Тогда  $a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ , так как  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{n-1} = \prod_{n=1}^{\infty} a_n$ . ■

### 44. Пусть последовательности $\{a_n\}$ , $\{A_n\}$ , $A_n \neq 0$ таковы, что $a_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n$ и бесконечное произведение $\prod c_n$ сходится. Докажите, что существует число $C \neq 0$ такое, что $\prod_{n=1}^N a_n = A_N (C + o(1))$ .

*Доказательство.*

$$a_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n, \quad \prod c_n \text{ сходится, то есть } \prod_{n=1}^N c_n \rightarrow P \neq 0$$

$$\prod_{n=1}^N a_n = \frac{\cancel{A_1}}{A_0} \cdot c_1 \cdot \frac{\cancel{A_2}}{\cancel{A_1}} \cdot c_2 \cdot \dots \cdot \frac{A_N}{\cancel{A_{N-1}}} \cdot c_N = A_N \cdot \underbrace{\frac{1}{A_0} \cdot \prod_{n=1}^N c_n}_{\rightarrow \frac{P}{A_0} \neq 0}$$

$$\Rightarrow \prod_{n=1}^N a_n = A_N \cdot (C + o(1)), \quad C = \frac{P}{A_0} \neq 0$$

■

## 45

Как определяется соответствующий бесконечному произведению ряд? Сформулировать и доказать утверждение об их взаимосвязи.

Пусть  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  — бесконечное произведение.

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$  называется соответствующим этому бесконечному произведению.

Так как  $a_n = e^{\ln a_n}$ , верно равенство  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \prod_{n=1}^{\infty} e^{\ln a_n} = e^{\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n}$  (по свойству степени)

**46. В каком случае бесконечное произведение называется сходящимся абсолютно? Сформулируйте и докажите критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения.**

$\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  наз-ся абсолютно сходящимся, если абсолютно сх-ся соответствующий ряд из логарифмов  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ .

Критерий абс. сх-ти:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сход. абс.} \iff \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - 1) \text{ сход. абс.}$$

*Доказательство.* Пусть  $a_n = 1 + \alpha_n$ ;  $\alpha_n \rightarrow 0$ .  $\circledast$

Тогда  $\ln a_n = \ln(1 + \alpha_n) = \alpha_n + o(\alpha_n) = \alpha_n(1 + o(1)) \implies |\ln a_n| = |\alpha_n| \cdot (1 + o(1))$ , то есть  $|\ln a_n| \sim |\alpha_n|$ .

Возможно, тут стоит упомянуть, что необходимое условие сходимости  $\sum_{n=1}^{\infty} |\ln a_n|$  это  $|\ln a_n| \rightarrow 0 \iff a_n \rightarrow 1$ .

Поэтому, если  $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$  сход. абс., то  $\circledast$  у нас верно всегда.

■

**47. Напишите произведение Валлиса и его значение (формула Валлиса). Вычисление каких интегралов приводит к этой формуле?**

*Утверждение 0.11. Произведение Валлиса*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = \frac{\pi}{2} - \text{формула Валлиса}$$

- получается из анализа интегралов  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

**48. Дайте определение дзета-функции ( $\zeta$ -функции) Римана. Сформулируйте тождество Эйлера для  $\zeta$  - функции.**

$\zeta$ -функция Римана по определению:  $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ,  $s > 1$  (т.е. это сумма обобщенного гарм. ряда).

Тождество Эйлера:  $\zeta(s) = 1 / \left( \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{p_n^s} \right) \right)$ , где  $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \dots$  - посл-ть всех простых чисел.

**49. Дайте определения: функциональная последовательность, точка сходимости функциональной последовательности, область (множество) сходимости функциональной последовательности, поточечная сходимость функциональной последовательности на данном множестве.**

*Определение 2.* Функциональным рядом (последовательностью) называется такой ряд (последовательность), что его элементами являются не числа, а функции  $f_n(x)$ .

*Определение 3.* Пусть  $\forall n, n \in \mathbb{N}, f_n : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$ . Говорят, что  $a \in D$  - точка сходимости  $\{f_n(x)\}$ , если последовательность  $\{f_n(a)\}$  сходится.

*Определение 4.* Множество всех точек сходимости называется множеством сходимости.

*Определение 5.* Говорят, что последовательность сходится на  $D$  поточечно, если  $D$  – множество сходимости.

**50. Что такое равномерная норма? Покажите (исходя из определения нормы), что равномерная норма явл-ся нормой в линейном пр-ве всех числовых функций, определенных на  $D \subseteq \mathbb{R}$ .**

Рассмотрим пространство функций  $D \rightarrow \mathbb{R}$ .

Равномерной нормой называется  $\|f\| := \sup_{x \in D} |f(x)|$ .

Равномерная норма явл-ся нормой в линейном пр-ве всех числовых функций, определенных на  $D \subseteq \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Для нормы в лин. пр-ве  $\mathbb{V}$  должны выполняться следующие св-ва:

$$1.0. \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{V};$$

$$1.1. \|x\| = 0 \implies x = 0;$$

$$2. \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{V}$$

$$3. \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{V}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Проверим их напрямую.

$$1.0. \|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)| \geq 0 \quad \forall f \in \mathbb{V};$$

$$1.1. \|f\| = \sup_{x \in D} |f(x)| = 0 \implies \forall x |f(x)| \leq 0 \implies \forall x |f(x)| = 0 \implies \forall x f(x) = 0 \iff f = 0;$$

$$2. \|f + g\| = \sup_{x \in D} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in D} (|f(x)| + |g(x)|) = \sup_{x \in D} |f(x)| + \sup_{x \in D} |g(x)| = \|f\| + \|g\| \quad \forall f, g \in \mathbb{V};$$

$$3. \|\alpha f\| = \sup_{x \in D} |\alpha \cdot f(x)| = |\alpha| \sup_{x \in D} |f(x)| = |\alpha| \cdot \|f\| \quad \forall f \in \mathbb{V}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

■

**51. Сформулируйте определения равномерной сходимости функциональной последовательности: в терминах нормы и на языке  $\varepsilon - \delta$ .**

$$f_n \xrightarrow{D} f \iff \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N(\varepsilon), \forall x \in D \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

**52. Докажите, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость на данном множестве.**

Определение поточечной сходимости  $\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Определение равномерной сходимости  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

*Доказательство.* Видно, что в определении равномерной сходимости номер  $N$  зависит от  $\varepsilon$  и не зависит от  $x$ , а в определении поточечной - и от  $\varepsilon$ , и от  $x$ . Если выполняется равномерная сходимость, то  $\forall x \in E \exists$  нужное  $N$ , то есть выполняется поточечная сходимость. ■

**53. Приведите пример функциональной последовательности, сходящейся поточечно, но не сходящейся равномерно (с обоснованием).**

Рассмотрим функциональную последовательность  $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ ,  $D = [0, 1]$  (семинарская задача 4.20). При  $x =$

$0 \quad f_n(x) = 1$ , а при  $x \neq 0 \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \implies f_n$  сходится поточечно на  $D$ . При этом равномерная сходимость отсутствует, так как  $f_n$  непрерывна  $\forall n$ , а  $f$  разрывна в нуле.

**54. Приведите пример функциональной последовательности  $\{f_n(x)\}$  (с нетривиальной зависимостью от  $n$  и  $x$ ), равномерно сходящейся на некотором множестве (с обоснованием).**

*Пример.*

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x}, \quad D = [0; +\infty)$$

$$f_n(x) \xrightarrow{D} 0$$

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \sup_{x \in D} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

$\implies$  последовательность сходится равномерно.

**55. Доказать, что если две функциональные последовательности сходятся равномерно к предельным функциям, то их сумма также сходится равномерно к сумме двух этих предельных функций.**

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n \xrightarrow{D} f, \\ g_n \xrightarrow{D} g \end{array} \right. \implies (f_n + g_n) \xrightarrow{D} (f + g)$$

*Доказательство.* По определению равномерной сходимости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_1(\varepsilon) \quad \forall x \in D,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2(\varepsilon) : |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2(\varepsilon) \quad \forall x \in D$$

Тогда

$$\begin{aligned} \forall x \in D \quad \forall n \geq \max(N_1, N_2) : |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| &= |(f_n(x) - f(x)) + (g_n(x) - g(x))| \leq \\ &\leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \text{ т.е.} \end{aligned}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1, N_2) : |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| < \varepsilon \quad n \geq N \quad \forall x \in D,$$

т.е. сумма  $(f_n + g_n)$  равномерно сходится к  $(f + g)$  на  $D$ . ■

**56. Докажите, что если 2 функциональные последовательности сходятся равномерно к ограниченным предельным функциям, то их произведение также сходится равномерно к произведению этих предельных функций.**

*Доказательство.* Пусть наши последовательности -  $\{f_n\}, \{g_n\}$ ; их предельные функции -  $f, g$  соотв.

Знаем:  $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \exists N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1; |g_m(x) - g(x)| < \varepsilon_2$  при  $n \geq N_1(\varepsilon_1), m \geq N_2(\varepsilon_2)$ .

Пусть  $|f(x)|$  ограничен какой-нибудь константой  $C_1$ .

Так как  $|g(x)|$  ограничен, то  $|g_n(x)|$  ограничен какой-нибудь константой  $C_2$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| &= \\ &= |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g_n(x) + f(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| \leq \\ &\leq |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g_n(x)| + |f(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| = \\ &= |g_n(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \cdot |g_n(x) - g(x)| \leq C_2 \cdot \varepsilon_1 + C_1 \cdot \varepsilon_2 \quad (\text{начиная с } n = \max(N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2))). \end{aligned}$$

Теперь возьмем произвольный  $\varepsilon > 0$ , и положим  $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{3 \cdot C_2}; \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{3 \cdot C_1}$ .

Начиная с  $n = \max(N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2))$  верно, что  $|f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| \leq \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$ . Мы победили. ■

**57.** Пусть функциональная последовательность  $\{f_n\}$  сходится равномерно на множестве  $D$  к предельной функции  $f$ , отделимой от нуля (т.е.  $\inf_{x \in D} |f(x)| > 0$ ), то функциональная последовательность  $\frac{1}{f_n}$  сходится равномерно на  $D$  к  $\frac{1}{f}$ .

*Доказательство.*

$$\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right\| = \left\| \frac{f_n - f}{f_n \cdot f} \right\| = \sup_{x \in D} \left| \frac{f_n - f}{f_n \cdot f} \right| \leq \sup_{x \in D} \frac{\varepsilon}{|f_n \cdot f|} \text{ при } n \geq N(\varepsilon), \text{ т.к. } \|f_n - f\| \leq \varepsilon \text{ при } n \geq N(\varepsilon).$$

$$\inf |f(x)| = m > 0 \implies |f(x)| \geq m \quad \forall x \in D.$$

$$|f_n| + |f_n - f| \geq |f_n - (f_n - f)| = |f| \iff |f_n| \geq |f| - |f_n - f|. \text{ Поэтому если } \varepsilon < m/2, \text{ то}$$

$$|f_n| \geq |f| - |f_n - f| > m - \varepsilon > m - m/2 = m/2 \text{ при } n \geq N(\varepsilon), \text{ ведь } |f| \geq m, |f_n - f| < \varepsilon < m/2.$$

$$|f_n| > m/2 \implies \frac{1}{|f_n|} < \frac{2}{m}; \quad |f| \geq m \implies \frac{1}{|f|} \leq \frac{1}{m}. \text{ Поэтому:}$$

$$\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right\| \leq \sup_{x \in D} \frac{\varepsilon}{|f_n \cdot f|} < \frac{\varepsilon}{m/2 \cdot m} = \varepsilon \cdot \frac{2}{m^2} \quad (\forall n \geq N(\varepsilon))$$

Так как  $\frac{2}{m^2}$  - фиксированное число, а  $\varepsilon$  у нас - сколь угодно малое, то это означает, что  $\left\| \frac{1}{f_n} - \frac{1}{f} \right\| \rightarrow 0$ , что является по определению равномерной сходимостью  $f_n$  к  $f$ . ■

**58.** Докажите, что равномерная сходимость последовательности на множестве  $D = D_1 \cup D_2$  равносильна равномерной сходимости на  $D_1$  и  $D_2$  одновременно.

Пусть  $D = D_1 \cup D_2$  и  $f_n$  — функциональная последовательность. Хотим доказать

$$f_n \xrightarrow{D} f \iff f_n \xrightarrow{D_1} f \wedge f_n \xrightarrow{D_2} f$$

*Доказательство.* Очевидно, что для поточечной сходимости эквивалентность есть из определения, то есть  $f_n \xrightarrow{D} f \iff f_n \xrightarrow{D_1} f \wedge f_n \xrightarrow{D_2} f$ . Тогда рассмотрим условие равномерной сходимости и заметим, что

$$\begin{aligned} \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| &= \max \left( \sup_{x \in D_1} |f_n(x) - f(x)|, \sup_{x \in D_2} |f_n(x) - f(x)| \right) \implies \\ &\implies \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \iff \sup_{x \in D_1} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \wedge \sup_{x \in D_2} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Отсюда следует доказываемое утверждение. ■

**59.** Пусть  $\varphi : G \rightarrow D$  — биекция. Докажите, что равномерная сходимость функциональной последовательности  $\{f_n\}$  на множество  $D$  равносильна равномерной сходимости на функциональной последовательности  $\{f_n \circ \varphi\}$  на множестве  $G$ .

*Доказательство.*

$$X \in D, f_n(x)$$

$$t \in G, \varphi(t) \in D$$

$$(f_n \circ \varphi)(t) = f_n(\varphi(t))$$

Знаем, что  $f_n \xrightarrow{D} f$

Хотим доказать:  $f_n \circ \varphi \xrightarrow{G} f \circ \varphi$

$$\|f_n \circ \varphi - f \circ \varphi\| = \sup_{t \in G} |f_n(\varphi(t)) - f(\varphi(t))| = M_n$$

Что означает, что супремум равен  $M_n$ ? Это означает, что:

- 1)  $|f_n(\varphi(t)) - f(\varphi(t))| \leq M_n, \forall t$
- 2)  $\exists \{t_k\} : |f_n(\varphi(t_k)) - f(\varphi(t_k))| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M_n$

Что получаем?

- 1)  $\Leftrightarrow \forall x \in D |f_n(x) - f(x)| \leq M_n$
- 2)  $\Leftrightarrow \exists \{x_k\} : |f_n(x_k) - f(x_k)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} M_n$ , где  $x_k = \varphi(t_k)$

$$\Rightarrow M_n = \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)|$$

$$\Rightarrow \|f_n \circ \varphi - f \circ \varphi\|_G = \|f_n - f\|_D$$

Получается, что если одна норма равна 0, то и вторая норма будет равна 0. А так как везде знаки равносильности, то доказали мы сразу в две стороны. ■

## 60. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

Утверждение 0.12.  $f_n \xrightarrow{D} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \|f_n - f_m\| < \varepsilon$  при всех  $n, m \geq N$

## 61. Докажите, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией.

*Доказательство:* Пусть функция  $s(x)$  — предел некоторой последовательности непрерывных функций  $s_n(x)$ . Тогда непрерывность функции  $s(x)$ , которую нам нужно доказать, по определению будет заключаться в том, что в любой точке  $x_0$  для любого  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $\delta$ , что из  $|h| < \delta$  следует, что  $|s(x_0 + h) - s(x_0)| < \varepsilon$ .

Для любых  $x_0, h, n$  имеем

$$|s(x_0 + h) - s(x_0)| = |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h) + s_n(x_0 + h) - s_n(x_0) + s_n(x_0) - s(x_0)| \leq$$

$$\leq |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| + |s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| + |s_n(x_0) - s(x_0)|$$

По определению равномерной сходимости мы можем взять такое  $n$ , что для любого  $x_0$  будет выполняться неравенство

$$|s(x_0) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}. \text{ Значит справедливы неравенства}$$

$$|s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|s(x_0) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Итак, пусть мы зафиксировали некоторое  $n$ , тогда, поскольку функция  $s_n(x)$  непрерывна по условию, найдётся такое  $\delta$ , что для любого  $|h| < \delta$  выполняется неравенство  $|s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$ . Таким образом

$$|s(x_0 + h) - s(x_0)| \leq |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| + |s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| + |s_n(x_0) - s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \quad \blacksquare$$

**62. Сформулируйте теорему Дини о монотонной сходимости. Приведите пример её применения для доказательства равномерной сходимости функциональной последовательности (с обоснованием).**

**Теорема Дини:**

Пусть  $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, монотонная по  $n$  при всех  $x \in [a, b]$ ,  $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$  и  $f$  — непрерывная, тогда  $f_n \Rightarrow f$ .

*Пример.*

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n, \quad [a, b] = [1, 2], \quad f_n(x) \text{ — непрерывная,}$$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad [ \text{Формула Тейлора для } (1+x)^\alpha ]$$

$$= 1 + x + \frac{nx}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 + x + \frac{(n-1)x}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{x}{2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0 \text{ при } x > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n \text{ монотонна по } n \text{ при } x \in [a, b]$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x \Rightarrow f_n \xrightarrow{[a,b]} f, \quad f(x) = e^x \text{ — непрерывная}$$

Выполнены условия теоремы, следовательно,  $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$ .

Покажем, что  $f_n$  равномерно сходится к  $f$  на  $[a, b]$ :

$$\left(e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right)_x = e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{n-1} > 0 \quad \forall x \in [a, b] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sup_{[1,2]} \|f_n(x) - f(x)\| = |f_n(2) - f(2)| = \left|\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n - e^2\right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow f_n \xrightarrow{[a,b]} f.$$

**63. Приведите контрпример, показывающий, что в формулировке теоремы Дини о равномерной сходимости нельзя отказаться от условия непрерывности предельной функции (с обоснованием).**

Возьмем функциональную последовательность  $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ ,  $D = [0, 1]$  (семинарская задача 4.20). Если исключить условие непрерывности предельной функции, то остальные условия выполняются, что означало бы равномерную сходимость  $f_n$  на  $D$ :

- $D = [0, 1]$  — действительно компакт
- $f_n$  монотонно убывает на  $D$
- $f_n$  непрерывна на  $D$



При этом  $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f_n$  сходится неравномерно на  $D$ . Следовательно,

непрерывность предельной функции нужно обязательно учитывать при использовании теоремы Дини.

**64. Покажите на примере как доказать неравномерность сходимости функциональной последовательности с помощью локализации особенности (с обоснованием).**

$$f_n = \frac{1}{x^n}, \quad D = (1, +\infty)$$

$$f_n \xrightarrow{D} f = 0$$

$$f_n \rightarrow \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Получили, что, если добавить точку, непрерывная функция стремится к разрывной  $\Rightarrow$  локализовали особенность  $\Rightarrow$  функциональная последовательность  $f_n$  сходится неравномерно.

**65. Сформулировать и доказать теорему о почленном переходе к пределу в функциональной последовательности.**

$-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , рассмотрим  $D = (a; b)$ ,  $D = [a; b]$

Пусть  $f_n \xrightarrow{D} f$ ,  $x \in D$ ,  $y_n = \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x)$ ,  $\{y_n\}$  сходится к  $y$

Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y$ ,

$$\text{т.е. } \lim_{x \rightarrow x_0} \underbrace{\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)}_{f(x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left( \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) \right)}_{y_n}$$

*Доказательство.* По определению предела сходящейся последовательности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : |y - y_n| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n \geq N,$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - y_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall n$$

Тогда

$$|y - f_n(x)| \leq |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

т.е.  $f_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} y$ , что и требовалось доказать. ■

**66. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функциональной последовательности.**

$-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ,  $D = (a, b)$  или  $D = [a, b]$ .

Пусть  $f_n$  дифф. на мн-ве  $D$ , и  $f'_n \xrightarrow{D} g$ ,  $\exists c \in D : \{f_n(c)\}$  сходится.

Тогда  $\exists$  такая предельная функция  $f : f_n \xrightarrow{D} f$  (причем, если  $D$  ограничена, то  $f_n \xrightarrow{D} f$ ), что  $f$  дифф., и  $f' = g$ .

Говоря иначе,  $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ .

## 67. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функциональной последовательности.

Утверждение 0.13.

$$-\infty < a < b < \infty, \quad D = [a; b]$$

Пусть  $f_n$  непрерывна на  $D$ ,  $f_n \xrightarrow{D} f (\implies f \text{ непр. на } D)$

$$\text{Тогда: } \int_a^x f_n(t) dt \xrightarrow{D} \int_a^x f(t) dt,$$

$$\text{т.е. } \int_a^x \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n(t) dt$$

## 68. Как определяются множества абсолютной и условной сходимости функционального ряда? Как они связаны с множеством сходимости?

*Определение 6.* Множество абсолютной сходимости – множество всех тех значений  $x$ , при которых ряд сходится абсолютно.

*Определение 7.* Множество условной сходимости – множество всех тех значений  $x$ , при которых ряд сходится условно.

Объединение множеств абсолютной сходимости и условной сходимости образует множество сходимости.

## 69. Дайте определение равномерной сходимости функционального ряда.

$D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $a_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Рассмотрим функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ , и его ч.с.  $S_N(x) := \sum_{n=1}^N a_n(x)$ .

Говорят, что ряд сх-ся равномерно на  $D$ , если последовательность  $\{S_N\}$  сх-ся равномерно на  $D$ .

## 70. Объединение множеств абсолютной сходимости и условной сходимости образует множество сходимости.

*Теорема 0.14.* Если  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  равномерно сходится к сумме  $S(x)$ , то  $a_n \xrightarrow{D} 0$

*Доказательство.*  $S_n(x) = a_1(x) + \dots + a_n(x)$ ,  $a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$

$$S_n \xrightarrow{D} S \implies a_n \xrightarrow{D} (S - S) = 0$$

■

**71. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.**

Функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$  сходится равномерно на  $D \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n \geq N, \forall m:$

$$\|a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+m}\| < \varepsilon$$

Т.е.  $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \dots + a_{n+m}(x)| < \varepsilon \forall x \in D$ .

**72. Сформулируйте следствие критерия Коши – достаточное условие того, что функциональный ряд не является сходящимся равномерно.**

Отрицание критерия Коши

$\exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists m, n > N \exists x = x(N) \in E : \left| \sum_{k=m}^n x_k \right| \geq \varepsilon \iff$  ряд  $\sum x_n$  сходится на  $E$  неравномерно

**73. Приведите пример функционального ряда, сходящегося на некотором множестве поточечно, но не равномерно (с обоснованием).**

*Пример.*

$$\sum \frac{1}{1 + (x - n)^2}, \quad D = \mathbb{R}$$

Очевидно, что  $\sum \frac{1}{1 + (x - n)^2}$  сходится как гармонический ряд.

Проверим необходимое условие равномерной сходимости.

$$a_n(x) = \frac{1}{1 + (x - n)^2} \rightarrow 0$$

$$\text{Но } \sup_{x \in D} \left\| \frac{1}{1 + (x - n)^2} \right\|_{x_n=n} \geq \frac{1}{1} \not\rightarrow 0$$

$\implies$  необходимое условие не выполняется  $\implies$  функциональный ряд сходится неравномерно.

**74. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда.**

*Утверждение 0.15 (Признак Вейерштрасса для функционального ряда.). Если  $|a_n(x)| \leq b_n$  при  $\forall n \geq n_0, \forall x \in D$ , а ряд  $\sum b_n$  сходится, то  $\sum a_n(x)$  сходится на  $D$  абсолютно и равномерно.*

**75. Как применяются признаки Даламбера и Коши для исследования сходимости функционального ряда?**

**Признак Даламбера**

Если  $\exists q < 1 : |a_{n+1}(x)| \leq q \cdot |a_n(x)|$  при  $\forall n \geq n_0, x \in D$ , причем  $a_{n_0}(x)$  ограничена на  $D$  (т.е.  $\|a_{n_0}\| < \infty$ ),

то  $\sum a_n(x)$  сходится на  $D$  абсолютно и равномерно.

### Радикальный признак Коши

Если  $\sum u_n$  — знакоположительный числовой ряд, и существует конечный предел

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n}, \text{ то}$$

1.  $l < 1 \Rightarrow$  ряд сходится
2.  $l > 1 \Rightarrow$  ряд расходится
3.  $l = 1 \Rightarrow$  необходимо дополнительное исследование

Заметно, что признаки практически идентичны соответствующим признакам для числовых рядов.

### 77. Сформулируйте признак Лейбница равномерной сходимости знакопередающегося функционального ряда.

Рассмотрим знакопередающийся функциональный ряд:  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n u_n(x)$ ,  $u_n(x) \geq 0$  на  $D$ .

Если  $u_n(x) \downarrow_{(n)}$  и  $u_n \xrightarrow{D} 0$ , то ряд сходится равномерно.

### 78. Сформулируйте пр-к Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.

Рассм. функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot b_n(x) = \circledast$ .

Если  $a_n(x) \downarrow_{(n)}$  и  $a_n \xrightarrow{D} 0$ , и при этом  $\|b_1 + \dots + b_n\| \leq C = \text{const}$  при всех  $n$ , то ряд  $\circledast$  сх-ся равномерно на  $D$ .

### 79. Сформулируйте признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда.

Рассмотрим ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) = \circledast$ .

Если  $a_n(x)$  монотонна по  $n$  (при  $\forall x \in D \subseteq \mathbb{R}$ ) и  $\|a_n\| \leq C$  при всех  $n$ ,

а ряд  $\sum b_n(x)$  сх-ся равномерно, то  $\circledast$  сх-ся равномерно.

### 80. Сформулируйте теорему о почленном переходе к пределу в функциональном ряде.

Теорема 0.16.  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ ,  $D = (a; b)$ ,  $D = [a; b]$

Пусть функциональный ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$  сходится равномерно на  $D$ ,  $x_0 \in D$ ,  $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} c_n(x) = y_n$  и  $\exists \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$ .

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} c_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n = y$$

### 81. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.

$$-\infty \leq a < b \leq +\infty, D = (a; b), D = [a; b]$$

Пусть  $c_n(x)$  дифференцируемы на  $D$  и  $\sum_{n=1}^{\infty} c'_n(x)$  сходится равномерно на  $D$ .

Тогда ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x)$  сходится на  $D$  (а если  $D$  огр, то сходится равномерно), а его сумма будет дифференцируемой

$$\text{функцией на } D \text{ и } \left( \sum_{n=1}^{\infty} c_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} c'_n(x)$$

### 82. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.

Пусть  $-\infty < a < b < +\infty$ ,  $D = (a; b)$ ,  $D = [a; b]$ ,  $c_n$  равномерно сходится на  $D$  и имеет суммой функцию  $s(x)$

$$\int_a^x \left( \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x c_n(t) dt - \text{сходится равномерно на } D \text{ и имеет суммой функцию } \int_a^x s_n.$$

### 83. Что такое степенной ряд? Как определяются радиус и интервал сходимости степенного ряда? Что можно утверждать о характере сходимости ряда на интервале сходимости?

- Степенным рядом называется функциональный ряд вида  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ , где  $c_n$  — числовая последовательность и  $x_0 = \text{const}$ .

- Радиусом сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  называется такое число  $R$ , равное  $\sup \{ |x - x_0| : \text{ряд сходится} \} = \inf \{ |x - x_0| : \text{ряд расходится} \}$  (если ряд сходится всюду, то  $R = +\infty$ ). Также по формуле Коши-Адамара  $R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}}$ .

- Интервалом сходимости степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  с радиусом сходимости  $R$  называется интервал  $(x_0 - R, x_0 + R)$ .
- Степенной ряд сходится равномерно на отрезке  $[x_0 - r, x_0 + r]$ , если  $0 \leq r < R$  (неверно утверждать, что это происходит на интервале  $(x_0 - R, x_0 + R)$ ).

### 84. Что можно утверждать про равномерную сходимость степенного ряда?

Степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$  с радиусом сходимости  $R$  сходится равномерно на отрезке  $[x_0 - r, x_0 + r]$ , если  $0 \leq r < R$

(неверно утверждать, что это происходит на интервале  $(x_0 - R, x_0 + R)$ ).

## 85. Сформулировать и доказать теорему Абеля о сходимости степенного ряда.

### Теорема Абеля

- 1) Если степенной ряд  $\sum c_n(x - x_0)^n$  сходится в точке  $x_1 \neq x_0$ , то он сходится при всех  $x : |x - x_0| < |x_1 - x_0|$
- 2) Если степенной ряд  $\sum c_n(x - x_0)^n$  расходится в точке  $x_2 \neq x_0$ , то он расходится при всех  $x : |x - x_0| > |x_2 - x_0|$

*Доказательство.*  $\left| \sum_{n=m}^N c_n(x - x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=m}^N c_n \cdot (x - x_0)^n \cdot \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n \right| \leq$

$$\sum_{n=m}^N \underbrace{|c_n \cdot (x - x_0)^n|}_{< \varepsilon \quad \forall m \geq n_0} \cdot \underbrace{\left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n}_{q^n} \leq \varepsilon \cdot (q^m + \dots + q^N) \leq \varepsilon \cdot q^m \cdot \frac{1}{1 - q} \rightarrow 0 \quad \blacksquare$$

## 86. Докажите, что если степенной ряд $\sum c_n(x - x_0)^n$ расходится в точке $x_1$ , то он расходится во всех точках $x$ , для которых $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ .

*Доказательство.* Докажем, что если  $\sum c_n(x - x_0)^n$  сходится в точке  $x_1$ , то он сходится во всех точках  $x$ , для которых  $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$   $\circledast$ . Из этого будет следовать сформулированное выше утверждение (методом от противного).

Итак, доказываем  $\circledast$ . (Будем рассматривать нетривиальный случай  $x_1 \neq x_0$ , иначе очевидно).

$$\left| \sum_{n=m}^N c_n(x - x_0)^n \right| = \left| \sum_{n=m}^N c_n \cdot (x_1 - x_0)^n \cdot \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right)^n \right| \leq \sum_{n=m}^N |c_n \cdot (x_1 - x_0)^n| \cdot \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n = \star.$$

Заметим, что  $|c_n \cdot (x_1 - x_0)^n| < \varepsilon$  при  $m \geq n_0(\varepsilon)$  (следствие из необходимого условия сходимости).

Далее, (при наших условиях)  $\sum \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right|^n$  образуют геом. прогрессию, где  $q = \left| \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \right| < 1$ .

Так что  $\star \leq \varepsilon \cdot (q^m + \dots + q^n) \leq \varepsilon \cdot q^m \cdot \frac{1}{1 - q} \rightarrow 0$ .

Почему к нулю? При  $m \rightarrow \infty$  выражение  $q^m \cdot \frac{1}{1 - q}$  остается ограниченным одной и той же константой, а  $\varepsilon$  - это произвольная сколь угодно малая величина.

Итог: ряд сходится по критерию Коши. \blacksquare

## 87. Выведите формулу Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.

Для степенного ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x - x_0)^n$ , где  $\{c_n\}$  - числовая посл-ть,  $x_0 \in \mathbb{R}$  фиксирован,  $x \in \mathbb{R}$  - переменная, радиус сходимости  $R$  вычислим по формуле Коши-Адамара:

$$R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

*Доказательство.* В нашем ряде  $a_n(x) = c_n \cdot (x - x_0)^n$ . Применим радикальный признак Коши:

$$\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x - x_0| \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x - x_0| = |x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \implies$$

если  $|x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$ , то ряд сх-ся;

если  $|x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$ , то ряд расх-ся.

$$\text{Введем } R := \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Из полученных результатов ясно, что  $|x - x_0| < R \iff |x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$  и ряд сходится;

$|x - x_0| > R \iff |x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$  и ряд расходится. А это определение радиуса сходимости. ■

**88. Приведите примеры степенных рядов, радиус сходимости  $R$  которых:  $R \in (0, +\infty)$ ,  $R = 0$ ,  $R = +\infty$ .**

- Возьмем  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ . Найти радиус сходимости этого ряда можно как через сумму, так и по формуле Коши-Адамара:

$$\circ \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot (1 - x^n)}{1 - x} \text{ — сходится только при } |x| < 1, S = \frac{1}{1 - x} \implies R = 1$$

$$\circ R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{1}} = 1$$

Аналогично  $R = 1$  для ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n$ , где  $x_0 = \text{const}$ .

- Пусть дан ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$ . Найдем радиус аналогично предыдущему пункту:

$$\circ \sum_{n=0}^{\infty} nx^n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots = (x)' + (x^2)' + (x^3)' + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x \cdot (1 - x^n)}{1 - x} \right)' =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2} \text{ — сходится при } |x| < 1, S = \frac{1}{(1-x)^2} \implies R = 1$$

$$\circ R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n}} = 1, \text{ так как } \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Аналогично  $R = 1$  для ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} n(x - x_0)^n$ , где  $x_0 = \text{const}$ .

- Рассмотрим степенной ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n! (x - x_0)^n$ , найдем радиус:  $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(-1)^n n!|}} = \frac{1}{\infty} = 0$ .

То есть ряд сходится только при  $x = x_0 \implies S = 0 + 0 + \dots = 0$ , иначе факториал растет быстрее экспоненты и потому ряд разойдется.

- Степенные ряды с радиусом сходимости  $R = +\infty$  можно найти в билетах 100–102 — например,  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $\cos x =$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

**89. Пусть  $R$  — радиус сходимости степенного ряда. Сформулируйте и докажите теорему о равномерной сходимости степенного ряда на  $[0; R]$ .**

*Теорема 0.17. Пусть  $\sum c_n R^n$  сходится. Тогда степенной ряд  $\sum c_n (x - x_0)^n$  сходится равномерно на  $[x_0, x_0 + R]$*

*Доказательство.*

В начале доказательства хочу заметить, что доказываю не совсем то, что в вопросе просят, однако это вроде ошибка Маевского, а не моя. Для того, чтобы всё было, как в вопросе, возьмите  $x_0 = 0$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n R^n) \cdot \left( \frac{x - x_0}{R} \right)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (c_n R^n) - \text{сходится равномерно (от } x \text{ не зависит)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x - x_0}{R} \right)^n \downarrow_{(n)} \quad \forall x \in [x_0, x_0 + R]$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n - \text{сходится равномерно на } [x_0, x_0 + R] \text{ по признаку Абеля}$$

■

**90. Пусть  $R$  — радиус сходимости степенного ряда. В каком случае можно утверждать,**

**что**  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n = \lim_{x \rightarrow R-0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n?$

*В случае если  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$ .*



*Доказательство.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n R^n) \left( \frac{x - x_0}{R} \right)^n$$

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n \text{ сход. по условию; не зависит от } x \implies \text{сход. равномерно} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{x - x_0}{R} \right)^n \text{ монотонно убывает } \forall x \in [x_0, x_0 + R] \end{array} \right\} \text{ряд сходится равномерно по Абелю}$$

Так как сходится равномерно, можно применить предел:  $\lim_{x \rightarrow x_0 + R - 0} \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n$

см. условие, судя по пределу  $x_0 = 0 \implies$  все верно. ■

**91. Пусть  $R$  — радиус сходимости степенного ряда. В каком случае можно утверждать, что степенной ряд сходится неравномерно на  $[0; R)$ ? Обоснуйте ответ.**

*Пусть ряд  $\sum c_n R^n$  расходится. Тогда ряд  $\sum c_n (x - x_0)^n$  не может равномерно сходиться на  $[x_0; x_0 + R)$ .*

*Формально:*

$$\left. \begin{array}{l} S_N(x) = \sum_{n=0}^N c_n (x - x_0)^n - \text{непр. на } [x_0, x_0 + R] \\ S_N(x) \xrightarrow{[x_0, x_0 + R)} S(x) \\ S_N(x_0 + R) - \text{расходится} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{сходимость на } [x_0, x_0 + R) \text{ неравномерная,}$$

*т.к.  $\lim_{x \rightarrow x_0 + R} \sum c_n (x - x_0)^n = \sum c_n R^n$  расходится (воспользовались локализацией особенности  $x \rightarrow x_0 + R$ ).*

**92. Что можно утверждать о радиусе сходимости степенного ряда, полученного почленным дифференцированием исходного ряда? Обоснуйте ответ.**

*Радиус сходимости при дифференцировании степенного ряда не изменяется.*

*Доказательство.* Пусть дан степенной ряд  $\sum c_n (x - x_0)^n$  с радиусом сходимости  $R$ . Утверждается (доказательство в пункте 94), что

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (x - x_0)^n, \text{ где } c'_n = c_{n+1}(n+1)$$

По формуле Коши-Адамара радиус  $R'$  сходимости нового ряда равен

$$\frac{1}{\lim \sqrt[n]{|c'_n|}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|c_{n+1}|} \cdot \sqrt[n]{n+1}} = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{|c_n|}} = R, \text{ так как } \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

■

**93. Что можно утверждать о радиусе сходимости степенного ряда, полученного почленным интегрированием исходного ряда? Обоснуйте ответ.**

*Радиус сходимости при интегрировании степенного ряда не изменяется.*

*Доказательство.* Пусть дан степенной ряд  $\sum c_n (x - x_0)^n$  с радиусом сходимости  $R$ . Утверждается (доказательство в пункте 95), что

$$\int_{x_0}^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - x_0)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (x - x_0)^n, \text{ где } c'_n = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \frac{c_{n-1}}{n}, & n > 0 \end{cases}$$

По формуле Коши-Адамара радиус  $R'$  сходимости нового ряда равен

$$\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c'_n|}} = \frac{\overline{\lim} \sqrt[n]{n}}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}} = R$$

■

**94. Сформулируйте и докажите теорему о почленном дифференцировании степенного ряда.**

*Теорема 0.18 (Почленное дифференцирование степенного ряда.).*  $\sum c_n (x - x_0)^n$ ,  $R > 0$  — его радиус сходимости.

*При почленном дифференцировании получаем ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x - x_0)^{n-1}$ .*

*Его радиус сходимости равен радиусу сходимости исходного ряда, то есть он сходится равномерно при  $|x - x_0| \leq r < R$ .*

*Доказательство.* Пусть дан ряд  $\sum a_n x^n = f$ . Ряд, составленный из производных —  $\sum a_n n x^{n-1} = f'$ . Покажем по формуле Коши-Адамара, что радиусы сходимости исходного ряда и ряда, составленного из производных, равны.

$$\frac{1}{R_f} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\frac{1}{R'_f} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n| \cdot n} = [\sqrt[n]{n} \rightarrow 1] = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R_f}$$

■

**95. Сформулировать и доказать теорему о почленном интегрировании степенного ряда.**

$$\int_{x_0}^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - x_0)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x - x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} (x - x_0)^n$$

$$\text{Доказательство. } \int_{x_0}^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - x_0)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_0}^x c_n (t - x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (t - x_0)^{n+1} \Big|_{x_0}^x =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x_0-x_0)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} (x-x_0)^n \quad \blacksquare$$

**96. Запишите формулу Тейлора для бесконечно дифференцируемой функции с остаточным членом в формах Лагранжа и Коши.**

Если функция  $f(x)$  беск. дифф. в точке  $x_0$ , то  $f(x)$  можно сопоставить в соотв. ее ряд Тейлора:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n. \text{ При этом } f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n + r_N(x).$$

$$\text{Форм-ла Лагранжа: } r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0 + \Theta(x-x_0))}{(N+1)!} (x-x_0)^{N+1}, \quad \Theta \in (0, 1).$$

$$\text{Форм-ла Коши: } r_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x_0 + \Theta(x-x_0))}{N!} (1-\Theta)^N (x-x_0)^{N+1}, \quad \Theta \in (0, 1).$$

**97. Сформулируйте и докажите утверждение о единственности разложения функции в степенной ряд.**

Если  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n$ ,  $|x-x_0| < \delta$  (говоря иначе, функция представлена степенным рядом в некой окр-ти  $x_0$ ); то этот степенной ряд - ее ряд Тейлора.

*Доказательство.*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k} \implies$$

$$f^{(k)}(x_0) = c_k \cdot k! \implies c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

(Мы заменили в первом переходе нижнюю границу суммирования с нуля на  $k$ , так как все предыдущие слагаемые аннулируются)

То есть функция может быть представлена в виде степенного ряда единственным образом - и это будет ее р.Т. ■

**98. Что такое функция, аналитическая в данной точке? Каково соотношение между понятиями бесконечной дифференцируемости и аналитичности?**

- Функция  $f(x)$  называется бесконечно дифференцируемой в точке  $x_0$ , если  $\forall n \in \mathbb{N} \exists f^{(n)}(x_0)$ .
- Функция  $f(x)$  называется аналитической в точке  $x_0$ , если она представима степенным рядом в окрестности

этой точки, то есть  $\exists \delta > 0 \quad \forall x \in U_\delta(x_0) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ . Так как степенные ряды бесконечно диф-

ференцируемы, то из аналитичности функции в точке следует бесконечная дифференцируемость в этой же точке. Обратное утверждение неверно:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} - \text{бесконечно дифференцируема: } f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = 0 \implies$$

$$\implies 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots = 0 - (\text{единственное!}) \text{ разложение по Тейлору } \implies \text{аналитичность не выполняется.}$$

**99. Приведите пример бесконечной дифференцируемой функции, не являющейся аналитической.**

$$\text{Пример. } f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Такая функция бесконечно дифференцируема, но все её производные в нуле равны 0:

$$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \dots = 0$$

Получается, что её ряд Тейлора при  $x_0 = 0$ :  $0 + 0x + 0x^2 + \dots = 0$

То есть, такая функция не является аналитической.

**100. Запишите разложения в степенной ряд с центром в нуле для функций  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ . Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию? Обоснуйте ответ.**

1.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad R = \infty$$

Докажем равенство. Оценим остаток по формуле Лагранжа.

$$r_N(x) = \underbrace{e^{\Theta x}}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}}_{\rightarrow 0 \text{ при } \forall x}, \quad \Theta \in (0; 1)$$

Множество сходимости —  $\mathbb{R}$ , на множестве  $\mathbb{R}$  сумма ряда представляет собой исходную функцию.

2. Для  $\cos x$  аналогично:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad x \in \mathbb{R}, \quad R = \infty$$

3. Для  $\sin x$  аналогично:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in \mathbb{R}, \quad R = \infty$$

**101. Запишите разложения в степенной ряд с центром в нуле для функций  $(1+x)^p$ . Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию? Обоснуйте ответ.**

$$(1+x)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n}{n!} x^n, \text{ где } (p)_n = p(p-1)\dots(p-n+1)$$

Радиус сходимости у этого ряда  $R = 1$ , откуда множество сходимости есть  $(-1, 1)$ . Исследуем остаточный член ряда Тейлора в форме Коши.

$$r_N(x) = \frac{p(p-1)\dots(p-N)\cdot(1+\theta x)^{p-N-1}}{N!} \cdot (1-\theta)^N \cdot x^{N+1} = \left( \frac{(p-1)(p-2)\dots(p-N)}{N!} x^N \right) \cdot (px \cdot (1+\theta x)^{p-1}) \cdot \left( \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \text{ при } \forall x \in (-1; 1)$$

Первый множитель стремится к 0, как общий член сходящегося ряда, взятого для  $p-1$ ; так как при  $|x| < 1$  биномиальный ряд сходится, каков бы ни был показатель, то это выражение при  $n \rightarrow \infty$  стремится к нулю. Второе по абсолютной величине содержится между границами  $|mx| \cdot (1-|x|)^{m-1}$  и  $|mx| \cdot (1+|x|)^{m-1}$ , не зависящими от  $n$ , а третье меньше единицы.

Таким образом,  $r_n(x) \rightarrow 0$ , т.е. для  $|x| < 1$  имеет место разложение  $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} x^n + \dots$

**102. Получить разложение для  $\ln(1+x)$  интегрированием разложения для  $(1+x)^{-1}$ . Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию? Обоснуйте ответ.**

В пункте 101 получили разложение в степенной ряд для  $(1+x)^p$  при  $|x| < 1$ .

В частности, при  $p = -1$  разложение имеет вид

$$(1+x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

Интегрируя ряд на отрезке  $[0, x]$ ,  $|x| < 1$  (по теореме о почленном интегрировании, см. п. 95), получаем:

$$\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \int_0^x (1+t)^{-1} dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \ln(1+x) \Big|_0^x = \ln(1+x), \quad |x| < 1$$

Также по теореме о почленном интегрировании:

$$\int_0^x \left( \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} t^{n+1} \Big|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \quad |x| < 1,$$

Радиус сходимости такого ряда совпадает (см. п. 93) с радиусом сходимости исходного ряда, т.е.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n : R' = R = 1$$

Заметим, что при  $x = 1$ , полученный ряд принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln 2 - \text{ряд Лейбница, сумма которого в точности равна } \ln(1+1) = \ln 2,$$

т.е. ряд сходится и представляет собой исходную функцию на множестве  $(-1; 1]$