1 Семинарский лист 2

Задача 1.1.

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(\ln n)^{(\ln n)}}$

$a_n = \dfrac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \dfrac{1}{e^{(\ln n)\ln(\ln n)}} = \dfrac{1}{n^{\ln(\ln n)}} \leqslant \dfrac{1}{n^2} \implies$ ряд сходится.

Задача 1.2.

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3}{3^{\sqrt{n}}}$

$a_n = \dfrac{n^3}{3^{\sqrt{n}}} = \dfrac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n}}$

$\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n = \sqrt{n}\ln 3\left(1 - \dfrac{3\ln n}{\sqrt{n}\ln 3}\right) = \left|\dfrac{\ln n}{\sqrt{n}} \to 0\right| \sim \sqrt{n}\ln 3$

Заметим, что $\forall p \implies p\ln n < \sqrt{n}\ln 3 \implies p\ln n < \sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n \implies \dfrac{1}{e^{p\ln n}} > \dfrac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n}} \iff \dfrac{1}{n^p} > \dfrac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n}}$

Выберем $p = 2$, тогда $\dfrac{1}{n^2} > \dfrac{1}{e^{\sqrt{n}\ln 3 - 3\ln n}} \implies$ ряд сходится.

Задача 1.3.

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}\right)$

$a_n = \ln\left(\dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}\right) = \ln\left(\dfrac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}\right) = \ln\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) - \ln\left(1 + \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right) = -2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Задача 1.4.

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)!!}{n!}$

Применим признак Даламбера:

$\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(2n+1)!!}{(n+1)!} \cdot \dfrac{n!}{(2n-1)!!} = \dfrac{2n+1}{n+1} \to 2 > 1 \implies$ ряд расходится.

Задача 1.5.

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n! \cdot 3^n}$

Применим признак Даламбера:

$\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!3^{n+1}} \cdot \dfrac{n! \cdot 3^n}{n^n} = \dfrac{(n+1)^n}{3n^n} = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{e}{3} < 1 \implies$ ряд сходится.

Оценим теперь N-ый остаток ряда:

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \approx \dfrac{e}{3} \implies a_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \dfrac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \ldots \cdot \dfrac{a_2}{a_1} \cdot a_1 \leqslant \dfrac{e}{3} \cdot \dfrac{e}{3} \cdot \ldots \cdot \dfrac{e}{3} \cdot a_1 = \left(\dfrac{e}{3}\right)^n \cdot a_1 = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{e}{3}\right)^n$

$r_N = \sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n \leqslant \dfrac{1}{3}\left(\left(\dfrac{e}{3}\right)^N + \left(\dfrac{e}{3}\right)^{N+1} + \ldots\right) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{(e/3)^N}{1 - e/3} = \dfrac{(e/3)^N}{3 - e}$

Задача 1.6.

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \dfrac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}$

Применим признак Коши:

$\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\operatorname{arctg}^n \dfrac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}} = \operatorname{arctg} \dfrac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}} \sim \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{3n}{n}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \dfrac{\pi}{3} > 1 \implies$ ряд расходится.

Задача 1.7.

$S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n}$

Применим признак Коши:

$\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\dfrac{n^2}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \dfrac{\sqrt[n]{n^2}}{3 + \frac{1}{n}} \sim \dfrac{\sqrt[n]{n^2}}{3} = \dfrac{\sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{n}}{3} = \left|\sqrt[n]{n} \to 1\right| \to \dfrac{1}{3} < 1 \implies$ ряд сходится.

Оценим теперь N-ый остаток ряда:

$$\sqrt[n]{a_n} \approx \frac{1}{3} \implies a_n \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n \implies r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^N + \left(\frac{1}{3}\right)^{N+1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{N+2} + \ldots \leqslant \frac{(1/3)^N}{1-1/3}$$

Задача 1.8.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$$

Применим признак Гаусса:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^2 \cdot \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}\right)^2 = \frac{4+\frac{4}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{4+\frac{8}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} =$$

$$= \frac{1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \left(1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right) \implies$$

$$\implies \begin{cases} \delta = 1 \\ p = 1 \quad = 1 \end{cases} \implies \text{ряд расходится.}$$

Задача 1.9. $S = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$$S_N = \sum_{n=3}^{N} \frac{\ln n}{n} f(n) = \frac{\ln n}{n};\ f'(n) = \frac{\frac{1}{n}\cdot n - \ln n}{n^2} = \frac{1-\ln n}{n^2} < 0 \text{ при } x > e$$

$f(n+t) \leqslant f(n) \leqslant f(n-1+t), t \in [0;1], n \geqslant 4$

Проинтегрируем неравенство по переменной t от 0 до 1:

$$\int_0^1 f(n+t)dt \leqslant \int_0^1 f(n)dt \leqslant \int_0^1 f(n-1+t)dt$$

Сделаем замену: $x_1 = n+t$, $x_2 = n-1+t$

$$\int_n^{n+1} f(x_1)dx_1 \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(x_2)dx_2$$

Просуммируем всё от 4 до N:

$$\int_4^{N+1} f(x_1)dx_1 \leqslant \sum_4^N f(n) \leqslant \int_3^N f(x_2)dx_2$$

Найдём первообразную функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$:

$$\int f(x)dx = \int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2}\ln^2 x + C$$

Подставим первообразную в двойное неравенство:

$$\frac{1}{2}\ln^2(N+1) - \frac{1}{2}\ln^2 4 \leqslant \sum_4^N f(n) \leqslant \frac{1}{2}\ln^2(N) - \frac{1}{2}\ln^2 3$$

Прибавим ко всем частям $\frac{\ln 3}{3}$:

$$\frac{1}{2}\ln^2(N+1) - \frac{1}{2}\ln^2 4 + \frac{\ln 3}{3} \leqslant S_N \leqslant \frac{1}{2}\ln^2(N) - \frac{1}{2}\ln^2 3 + \frac{\ln 3}{3}$$

Получили необходимую оценку на частичную сумму.