Семинарский лист 2.4

Анастасия Григорьева
Telegram

Денис Козлов
Telegram

Елизавета Орешонок
Telegram

Ира Голобородько
Telegram

Версия от 28.11.2020 01:35

Предполагая функцию f непрерывной на D, запишите тройной интеграл от f по D в виде одного из повторных, если D задано неравенствами.

Задача 1

$0 \leqslant z \leqslant 4 - x^2,\ x^2 - y^2 \geqslant 0,\ x \geqslant 0.$

Хочу интегрировать в порядке $\int\limits_{\ldots}^{\ldots} dx \int\limits_{\ldots}^{\ldots} dy \int\limits_{\ldots}^{\ldots} f(x, y, x) dz.$

Посмотрим, что происходит при фиксированном x.

Так как $x^2 \geqslant y^2 \iff |x| \geqslant |y|$, то $-x \leqslant y \leqslant x$ (x положительный). Ещё знаем, что $0 \leqslant z \leqslant 4 - x^2$.

Итак, $\int\limits_{\ldots}^{\ldots} dx \int\limits_{-x}^{x} dy \int\limits_{0}^{4-x^2} f(x, y, x) dz.$

А каковы границы x? $x \geqslant 0$, это нам дано. Из того, что $z \in [0, 4 - x^2]$, сделаем вывод, что $x \leqslant 2$, ведь при больших значениях x множество становится вырожденным.

Так что границы интегрирования знаем, $\boxed{\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-x}^{x} dy \int\limits_{0}^{4-x^2} f(x, y, x) dz}$.

Задача 2

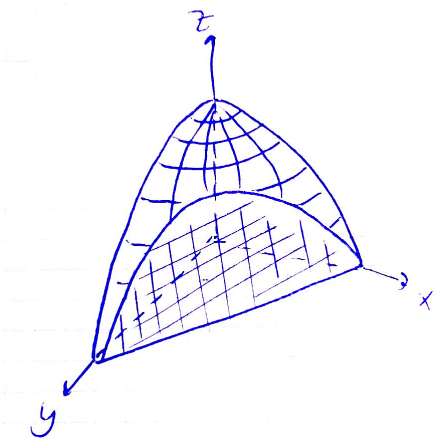
$$x + y + z \leqslant 2; \;\; 0 \leqslant 4z \leqslant 4 - x^2 - y^2; \;\; x \geqslant 0; \;\; y \geqslant 0$$

$$\begin{cases} x \geqslant 0, \;\; y \geqslant 0; \;\; z \geqslant 0 \\ x + y + z \leqslant 2 \\ x^2 + y^2 \leqslant 4 - 4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0, 2] \\ y \in [0, 2] \\ z \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2 - x - y \\ 4z = 4 - x^2 - y^2 \end{cases} \implies 8 - 4x - 4y = 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow y = \sqrt{4x - x^2} + 2 \text{ — пересечение фигур}$$

$$\int\limits_0^1 dx \left\{ \int\limits_0^{\sqrt{4x-x^2}+2} dy \int\limits_0^{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}} f(x,y,z)dx + \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}+2}^{1-x} dy \int\limits_0^{2-x-y} f(x,y,z)dz \right\}$$

Пересечение параболоида и плоскости. Первый интеграл отвечает за часть параболоида, а второй — за плоскость.



Задача 3

$0 \leqslant z \leqslant 4xy, \; x + 4y + z \leqslant 1.$

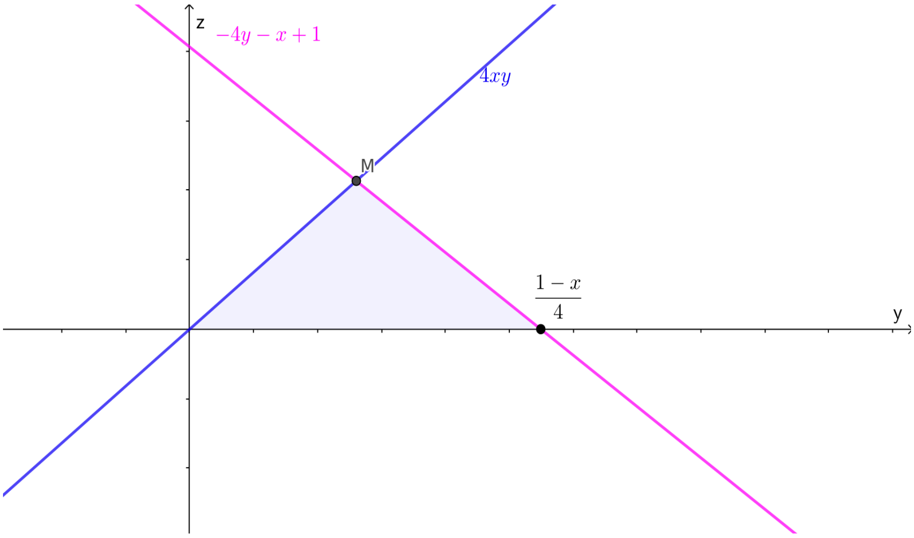
Буду интегрировать $\int\limits_{\dots}^{\dots} dx \int\limits_{\dots}^{\dots} dy \int\limits_{\dots}^{\dots} f(x,y,x)dz.$

Для невырожденности D требуется $\begin{cases} x \neq 0; \\ y \neq 0. \end{cases}$

Из того, что $0 \leqslant xy$, делаем вывод, что x и y одного знака.

Случай I. $\begin{cases} x > 0; \\ y > 0. \end{cases}$

При фиксированном x в срезе Oyz нас интересуют точки треугольника, ограниченного прямыми $z = 4xy$, $z = -4y - x + 1$ и $z = 0$.



Найдём y-координату точки M: $-4y - x + 1 = 4xy \implies 4y(x+1) = 1 - x \implies M_y = \dfrac{1-x}{4x+4}$.

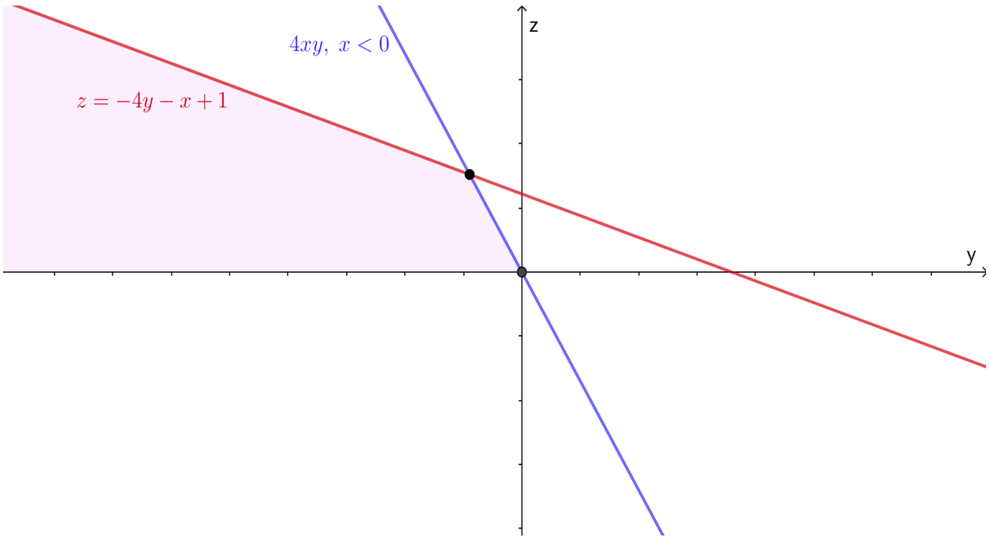
Множество является вырожденным, т. и т.т. прямая $z = -4y - x + 1$ проходит через 0, т.е. при $x = 1$.

Значит, в данном случае $x \in (0, 1)$. Интегрируем!

$$\int\limits_0^1 dx \left(\int\limits_0^{M_y} dy \int\limits_0^{4xy} f\,dz + \int\limits_{M_y}^{(1-x)/4} dy \int\limits_0^{-4y-x+1} f\,dz \right), \text{ где } M_y = \frac{1-x}{4x+4}.$$

Случай II. $\begin{cases} x < 0; \\ y < 0. \end{cases}$

При фиксированном x в срезе Oyz происходит такая жуть:



Данная область неограничена снизу по y, значит она бесконечная $\implies$ интеграл от неё невозможно взять.

Задача 4

$y^2 \le z \le 4,\ x^2 + y^2 \le 16$

Все точки рассматриваемой области находятся внутри круга радиуса 4 с центром в начале координат (его задает неравенство $x^2+y^2 \le 16$). Значения z, как видно из 1-го неравенства, лежат в промежутке $[y^2;4]$. Искомый повторный интеграл может иметь вид:

$$\int\limits_{-4}^{4} dx \int\limits_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \int\limits_{y^2}^{4} f(x,y,z)\,dz$$

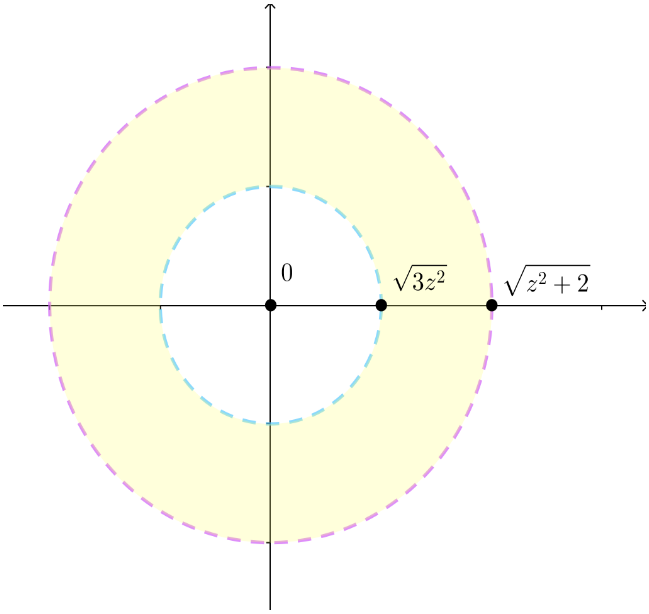
Задача 5

$x^2+y^2 \geqslant 3z^2,\ x^2+y^2-z^2 \leqslant 2.$

Проинтегрируем внешне по z.

$z = const \implies x^2+y^2 \geqslant 3z^2,\ x^2+y^2 \leqslant z^2+2.$

Нам интересно примерно такое колечко:



Можно начать разбивать область интегрирования по x. Но мы ленивые. Поэтому просто вычтем из площади большей окружности площадь меньшей.

Тогда внутри интеграла по z появится $\int\limits_{-\sqrt{z^2+2}}^{\sqrt{z^2+2}} dx \int\limits_{-\sqrt{z^2+2-x^2}}^{\sqrt{z^2+2-x^2}} f dy - \int\limits_{-\sqrt{3z^2}}^{\sqrt{3z^2}} dx \int\limits_{-\sqrt{3z^2-x^2}}^{\sqrt{3z^2-x^2}} f dy.$

Для не-вырожденности множества, получаем условие $\sqrt{3z^2} \leqslant \sqrt{z^2+2} \iff 2z^2 \leqslant 2 \iff |z| \leqslant 1 \iff z \in [-1,1].$

Итого $\int\limits_{-1}^{1} dz \left(\int\limits_{-\sqrt{z^2+2}}^{\sqrt{z^2+2}} dx \int\limits_{-\sqrt{z^2+2-x^2}}^{\sqrt{z^2+2-x^2}} f dy - \int\limits_{-\sqrt{3z^2}}^{\sqrt{3z^2}} dx \int\limits_{-\sqrt{3z^2-x^2}}^{\sqrt{3z^2-x^2}} f dy \right).$

Задача 6

$y^2+x+z \le 1,\ x \ge z \ge 0$

Проинтегрируем в порядке

$$\int\limits_{\dots}^{\dots} dy \int\limits_{\dots}^{\dots} dx \int\limits_{\dots}^{\dots} f(x,y,z)\,dz$$

При фиксированном y неравенства $y^2+x+z \le 1$ и $x \ge z \ge 0$ можно переписать в виде системы

$$\left\{\begin{array}{lll} z & \le & (1-y^2)-x, \\ z & \le & x, \\ z & \ge & 0 \end{array}\right. ,$$

задающей треугольник, ограниченный прямыми $z=(1-y^2)-x$, $z=x$ и $z=0$, при условии того, что точка пересечения прямых $z=(1-y^2)-x$ и $z=x$ находится не ниже оси Ox:

$$(1-y^2)-x = x \Leftrightarrow x = \frac{1-y^2}{2} \Rightarrow z = x = \frac{1-y^2}{2} \ge 0 \Rightarrow 1-y^2 \ge 0 \Leftrightarrow y \in [-1;1]$$

Значения x нас интересуют только те, при которых $z \ge 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rll} (1-y^2)-x & \ge & 0, \\ x & \ge & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} x & \le & (1-y^2), \\ x & \ge & 0 \end{array}\right.$,

т.е. $x \in [0; 1-y^2]$. При этом при $x \le \dfrac{1-y^2}{2}$ значения z лежат на отрезке $[0;x]$, а при $x \ge \dfrac{1-y^2}{2}$ — на отрезке $[0;1-y^2]$

Получили границы для повторного интеграла:

$$\int\limits_{-1}^{1} dy \left(\int\limits_{0}^{\frac{1-y^2}{2}} dx \int\limits_{0}^{x} f(x,y,z)\,dz + \int\limits_{\frac{1-y^2}{2}}^{1-y^2} dx \int\limits_{0}^{1-y^2} f(x,y,z)\,dz \right)$$

Вычислите интеграл.

Задача 7

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \int\limits_0^{xy} (x+y+z)dz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \left(\int\limits_0^{xy} (x)dz + \int\limits_0^{xy} (y)dz + \int\limits_0^{xy} (z)dz \right) = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \left(x \int\limits_0^{xy} 1\,dz + y \int\limits_0^{xy} 1\,dz + \int\limits_0^{xy} (z)dz \right) =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x dy \left(x \cdot (xy) + y \cdot (xy) + \frac{(xy)^2}{2} \right) = \int\limits_0^1 x\,dx \cdot \int\limits_0^x dy \left(xy + y^2 + \frac{xy^2}{2} \right) = \int\limits_0^1 x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{x^3}{3} + x \cdot \left(\frac{x^3}{6} \right) \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{6} dx = \left(\frac{x^5}{10} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{36} \Bigg|_0^1 \right) = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{36} = \frac{3+2}{30} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}.$$

Задача 8

$$\int\limits_1^2 dy \int\limits_y^2 dx \int\limits_0^{1/(xy)} \frac{dz}{x(1+x^2y^2z^2)} = \left[u = xyz,\ \frac{du}{dz} = xy \Leftrightarrow dz = \frac{du}{xy} \right] \int\limits_1^2 dy \int\limits_y^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{xy}\, dx \int\limits_0^1 \frac{du}{1+u^2} =$$

$$= \int\limits_1^2 dy \int\limits_y^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{xy}\, dx \cdot \left(\operatorname{arctg} u \,\Big|_0^1 \right) = \frac{\pi}{4} \int\limits_1^2 \frac{1}{y}\, dy \int\limits_y^2 \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} \int\limits_1^2 \frac{1}{y}\, dy \cdot \left(-\frac{1}{x} \,\Big|_y^2 \right) = \frac{\pi}{4} \int\limits_1^2 \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2} \right) dy =$$

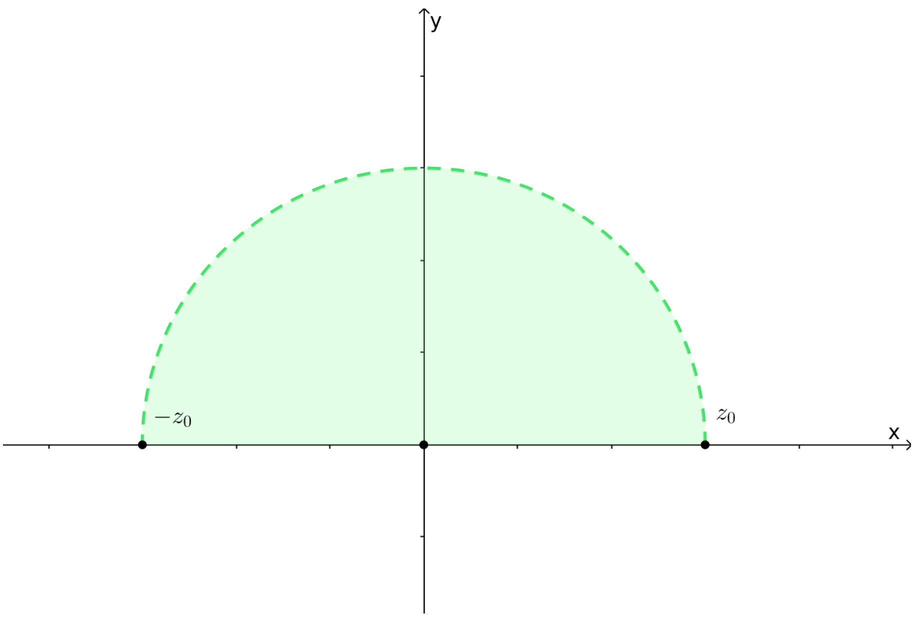
$$= \frac{\pi}{4} \left(\int\limits_1^2 \frac{1}{y^2}\, dy - \frac{1}{2} \int\limits_1^2 \frac{1}{y}\, dy \right) = \frac{\pi}{4} \left(-\frac{1}{y} \,\Big|_1^2 - \frac{1}{2} \ln y \,\Big|_1^2 \right) = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{\pi}{8} (1 - \ln 2)$$

Задача 9

$$\int\limits_0^4 dz \int\limits_{-z}^{z} dx \int\limits_0^{\sqrt{z^2-x^2}} z^2xy^2 dy.$$

Для удобства, хочу проинтегрировать в порядке $z - y - x$. Чтобы поменять x и y местами, рассмотрю срез D при произвольном фиксированном $z = z_0$.

$x \in [-z_0, z_0]$, точки D лежат в половинке окружности радиуса z_0 выше нуля.



Если изменим порядок интегрирования, то $y \in [0, z]$, $\quad x \in \left[-\sqrt{z^2-y^2}, \sqrt{z^2-y^2} \right]$

$$\int\limits_0^4 dz \int\limits_0^z dy \int\limits_0^{\sqrt{z^2-y^2}} z^2xy^2 dx = \int\limits_0^4 z^2 dz \int\limits_0^z y^2 dy \int\limits_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} x\, dx = \int\limits_0^4 z^2 dz \int\limits_0^z y^2 dy \left(\frac{x^2}{2} \Bigg|_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} \right) = 0.$$

Задача 10

$$\int\limits_1^3 dz \int\limits_{1-z}^{3-z} dy \int\limits_0^{3-y-z} \frac{dx}{(x+y+z)^2} = \left[u = x+y+z,\ \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow dx = du \right] \int\limits_1^3 dz \int\limits_{1-z}^{3-z} dy \int\limits_{y+z}^{3} \frac{du}{u^2} =$$

$$= \int\limits_1^3 dz \int\limits_{1-z}^{3-z} dy \cdot \left(-\frac{1}{u} \Big|_{y+z}^{3} \right) = \int\limits_1^3 dz \int\limits_{1-z}^{3-z} \left(\frac{1}{y+z} - \frac{1}{3} \right) dy = [\, v = y+z,\ dy = dv \,] \int\limits_1^3 dz \left(\int\limits_1^3 \frac{1}{v}\, dv - \frac{1}{3} \int\limits_{1-z}^{3-z} dy \right) =$$

$$= \int\limits_1^3 dz \left(\ln 3 - \frac{1}{3} \left((3-z) - (1-z) \right) \right) = \int\limits_1^3 dz \left(\ln 3 - \frac{2}{3} \right) = \left(\ln 3 - \frac{2}{3} \right)(3-1) = 2\ln 3 - \frac{4}{3}$$

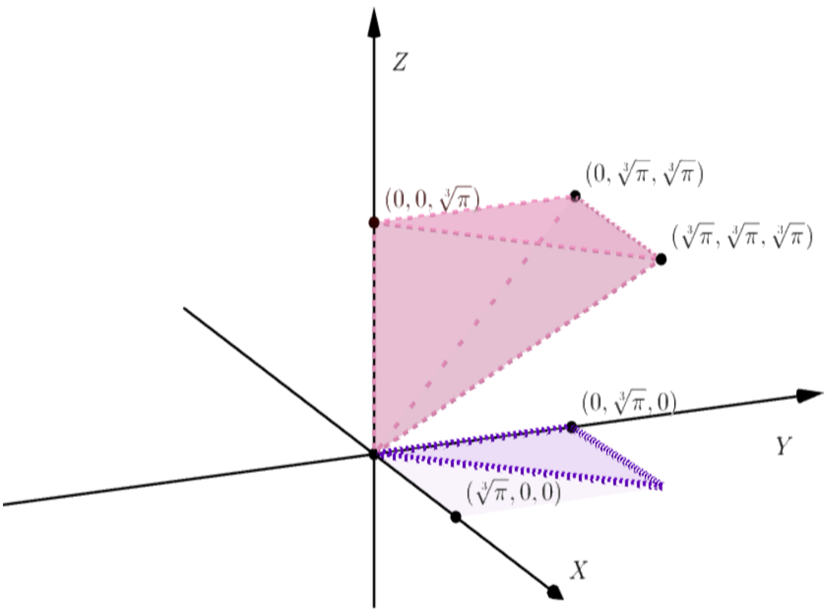
Измените порядок интегрирования и вычислите интеграл.

Задача 11

$\int\limits_0^{\sqrt[3]{\pi}} dx \int\limits_x^{\sqrt[3]{\pi}} dy \int\limits_y^{\sqrt[3]{\pi}} \sin(z^3) dz$. Исследуем границы для восстановления D.

$x \in [0, \sqrt[3]{\pi}]$. Нам интересны точки между плоскостями $x = y$ и $y = \sqrt[3]{\pi}$.

Вертикально множество ограничено плоскостями $y = z$ и $z = \sqrt[3]{\pi}$. Итого получили пирамидку:



Так как функция зависит от z, то сначала лучше интегрировать именно по z.

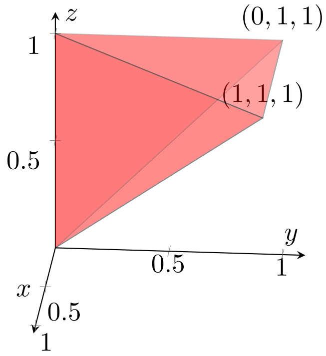
$$\int\limits_0^{\sqrt[3]{\pi}} \sin(z^3)dz \int\limits_0^z dy \int\limits_0^y dx = \int\limits_0^{\sqrt[3]{\pi}} \sin(z^3)dz \int\limits_0^z y\,dy = \int\limits_0^{\sqrt[3]{\pi}} \frac{z^2}{2}\cdot\sin(z^3)dz = \left[t = z^3;\ dt = 3z^2dz\right] = \frac{1}{6}\cdot\int\limits_0^{\pi} \sin t\,dt = \frac{1}{6}\left(-\cos t\Big|_0^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

Задача 12

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 e^{z^3} dz = \int_0^1 e^{z^3} dz \int_0^z dy \int_0^y dx = \int_0^1 e^{z^3} dz \int_0^z y dy = \int_0^1 \frac{z^2}{2} e^{z^3} dz = \left\{ \begin{array}{rl} u = & z^3 \\ du = & 3z^2 dz \\ dz = & \dfrac{du}{3z^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{6} e^u du = \frac{e-1}{6}$$

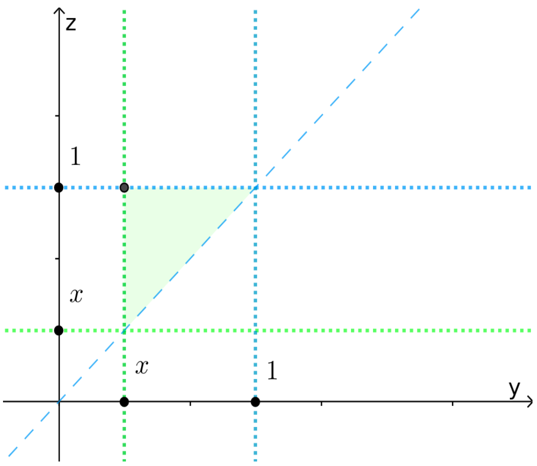


Задача 13

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 dy \int\limits_y^1 \frac{\operatorname{arctg} z}{z} dz.$$

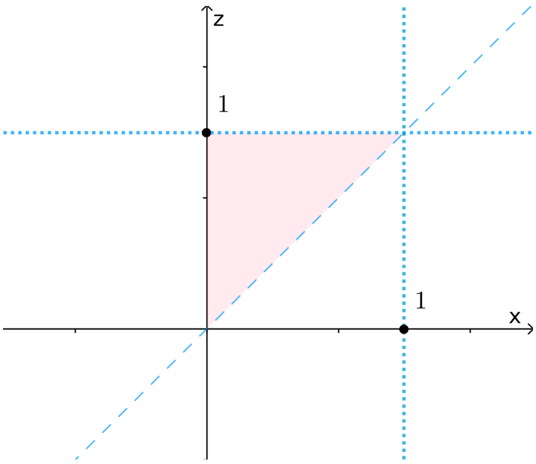
Чтобы было удобнее, сделаем первым интегралом z. Для этого сначала поменяем y и z, а потом z и x.

$y \leftrightarrow z$. При фиксированном x такая ситуация:



Значит, поменяв порядок y и z, получим $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 dz \int\limits_x^z \frac{\operatorname{arctg} z}{z} dy$.

Теперь меняем местами x и z. Смотрим, что происходит с z в зависимости от x:



Итого выйдет $\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^z dx \int\limits_x^z \frac{\operatorname{arctg} z}{z} dy = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^z \frac{\operatorname{arctg} z}{z} dx \int\limits_x^z dy = \int\limits_0^1 dz \int\limits_0^z (z-x) \frac{\operatorname{arctg} z}{z} dx = \int\limits_0^1 \operatorname{arctg} z \, dz \int\limits_0^z 1 - \frac{x}{z} \, dx =$

$= \int\limits_0^1 \left(z - \frac{z^2}{2z} \right) \operatorname{arctg} z \, dz = \int\limits_0^1 \frac{z}{2} \operatorname{arctg} z \, dz = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 z \operatorname{arctg} z \, dz.$

Интегрируем по частям: $\begin{cases} f = \frac{z^2}{2};\ df = zdz; \\ g = \operatorname{arctg} z;\ dg = \frac{1}{1+z^2} dz. \end{cases}$

Тогда $\int\limits_0^1 z \operatorname{arctg} z \, dz = \int\limits_0^1 g \, df = \left(fg \Big|_0^1 \right) - \int\limits_0^1 f dg = \left(\frac{z^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} z \Big|_0^1 \right) - \int\limits_0^1 \frac{z^2}{2(1+z^2)} dz =$

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(\int\limits_0^1 \frac{1+z^2}{1+z^2} dz - \int\limits_0^1 \frac{1}{(1+z^2)} dz \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$

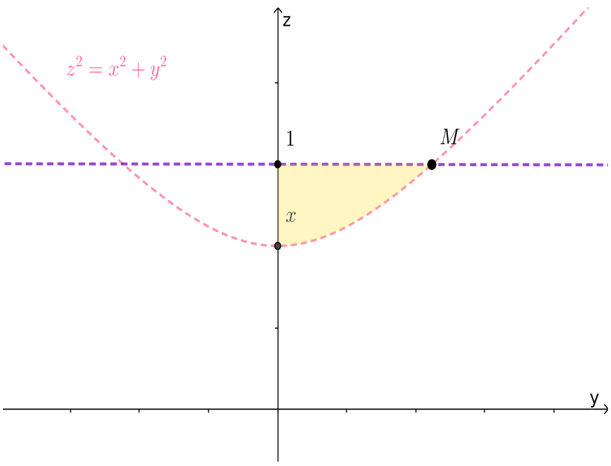
Не забываем домножить всё это дело на $\frac{1}{2}$, и получаем ответ, $\boxed{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}$.

Задача 14

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \frac{\sin \pi z}{z} dz.$$

Таким же образом, как в предыдущем номере, вытолкнем границу по z наружу.

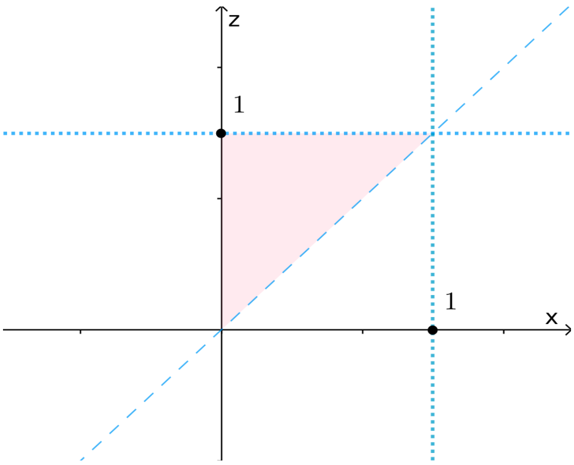
$y \leftrightarrow z$. При фиксированном x имеем $z^2 \geqslant x^2 + y^2$, это гипербола:



Найдём координаты точки M. При ней $z = 1 \implies y = \sqrt{z^2 - x^2} = \sqrt{1 - x^2}$. Всё сходится.

Значит, при нашей замене получим $\int\limits_0^1 dx \int\limits_x^1 dz \int\limits_0^{\sqrt{z^2-x^2}} \frac{\sin \pi z}{z} dy$.

Теперь делаем замену $z \leftrightarrow x$.



Здесь всё изменилось, прямо как в предыдущем пункте.

$$\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^z dx \int\limits_0^{\sqrt{z^2-x^2}} \frac{\sin \pi z}{z} dy = \int\limits_0^1 \frac{\sin \pi z}{z} dz \int\limits_0^z dx \int\limits_0^{\sqrt{z^2-x^2}} dy = \int\limits_0^1 \frac{\sin \pi z}{z} dz \int\limits_0^z \sqrt{z^2 - x^2} dx.$$

Производим замену (внутренний интеграл) $\begin{cases} x = z \sin t; \\ dx = z \cos t \, dt; \\ x \in (0, z) \implies \sin t \in (0,1) \implies t \in (0,\pi/2). \end{cases}$

Получаем $\int\limits_0^1 \frac{\sin \pi z}{z} dz \int\limits_0^{\pi/2} z \cos t \cdot \sqrt{z^2 - z^2 \sin^2 t} \, dt = \int\limits_0^1 \frac{\sin \pi z}{z} dz \int\limits_0^{\pi/2} z^2 \cos t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \, dt =$

$$\int\limits_0^1 z \sin(\pi z) \, dz \int\limits_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \, dt = \int\limits_0^1 z \sin(\pi z) \, dz \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t \, dt = \int\limits_0^1 z \sin(\pi z) \, dz \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) \, dt =$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_0^1 z\sin(\pi z)\,dz\int\limits_0^{\pi/2} 1+\cos(2t)\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 z\sin(\pi z)\,dz\left(\frac{\pi}{2}+\left(\left.\frac{\sin 2t}{2}\right|_0^{\pi/2}\right)\right)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1 z\sin(\pi z)\,dz\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\frac{\pi}{4}\int\limits_0^1 z\sin(\pi z)\,dz.$$

Считаем $\int\limits_0^1 z\sin(\pi z)\,dz$.

Вычислите многократный интеграл.