Семинарский лист 2.5

Анастасия Григорьева
Telegram

Денис Козлов
Telegram

Елизавета Орешонок
Telegram

Ира Голобородько
Telegram

Версия от 11.12.2020 14:26

Задайте в полярных координатах множество D, заданное неравенствами в декартовых координатах. Предполагая функцию f непрерывной на D, преобразуйте интеграл в полярных координатах к повторному.

Задача 1

$$x^2 + y^2 \le 2x$$

$$x = r\cos\varphi, \ y = r\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D := r^2 \le 2\,r\cos\varphi \Leftrightarrow r(r - 2\cos\varphi) \le 0 \Leftrightarrow r \in [0; 2\cos\varphi]\,, \cos\varphi \ge 0$$

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\,dr = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr =$$

$$\left\{ r^2 \le 2\,r\cos\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi \ge \frac{r}{2} \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\arccos\frac{r}{2}; \arccos\frac{r}{2}\right] \right\}$$

$$= \int\limits_0^2 r\,dr \int\limits_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi$$

Задача 2

$$(x-1)^2+y^2 \le 1,\ x^2+y^2 \ge 1$$

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D := \left\{ \begin{array}{rcl} r^2 & \le & 2\,r\cos\varphi, \\ r^2 & \ge & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r & \in & [0; 2\cos\varphi]\,, \\ \cos\varphi & \ge & 0, \\ r & \ge & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r & \in & [1; 2\cos\varphi]\,, \\ \cos\varphi & \ge & 1/2, \end{array} \right.$$

$$\cos\varphi \ge 1/2 \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\,dr = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{1}^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr =$$

$$\left\{ r^2 \le 2\,r\cos\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi \ge \frac{r}{2} \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\arccos\frac{r}{2}; \arccos\frac{r}{2}\right] \right\}$$

$$= \int\limits_{1}^{2} r\,dr \int\limits_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi$$

Задача 3

$(x^2+y^2)^2 \leqslant 4xy$. Перепишем неравенство в полярных координатах:

$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 \leqslant 4r^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi \iff r^2 \leqslant 2\sin 2\varphi.$ $\circledast$

Делаем вывод, что $2\sin 2\varphi \geqslant 0 \iff 2\varphi \in [2n\pi, (2n+1)\pi] \implies \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right].$

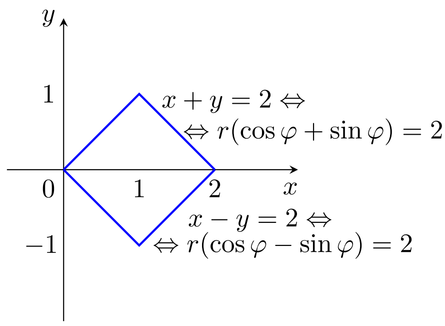
$\circledast \to\ r \leqslant \sqrt{2\sin 2\varphi}.$

Рисунок тут даже не требуется, можно сразу записать интеграл.

$$\int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2\sin 2\varphi}} f\cdot r\ dr + \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2\sin 2\varphi}} f\cdot r\ dr.$$

Задача 4

$|x-1|+|y| \leq 1$



Область представляет собой ромб с центром в точке $(1,0)$

Из рисунка видно, что угол φ лежит в пределах $[-\pi/4;\pi/4]$

Можно определить и отрезки для r :

$$r \in \begin{cases} \left[0; \dfrac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}\right], & \varphi \geq 0 \\ \left[0; \dfrac{2}{\cos\varphi-\sin\varphi}\right], & \varphi < 0 \end{cases}$$

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi\, d\varphi\, dr = \int\limits_{-\pi/4}^{0} d\varphi \int\limits_0^{\frac{2}{\cos\varphi-\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr + \int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr =$$

$$= \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{\frac{2}{\cos\varphi+|\sin\varphi|}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr$$

При $r \in [0;\sqrt{2}]$ все углы от $-\pi/4$ до $\pi/4$ лежит в нужной области

При $r \in (\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$ необходимо $2 \geq r(\cos\varphi + |\sin\varphi|)$

Так как относительно Oy все симметрично, найдем границу при $\varphi > 0$:

из геометрии рисунка (треугольников и всего такого)

$r\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\varphi\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{r} \Leftrightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4} - \arccos\dfrac{\sqrt{2}}{r}$

Повторный интеграл с найденными границами:

$$\int\limits_0^{\sqrt{2}} r\, dr \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} r\, dr \int\limits_{\arccos\frac{\sqrt{2}}{r}-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{r}{\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, d\varphi$$

Задача 5

D – множество, лежащее в круге $x^2+y^2 \leqslant 1$ вне кривой $r=\cos 3\varphi$.

Для начала простое. $x^2+y^2 \leqslant \iff r \leqslant 1 \implies r \in [0,1]$.

Теперь разберёмся с кривой $r=\cos 3\varphi$.

Если $r \in [0,1]$, то $\cos 3\varphi \in [0,1] \implies 3\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n, \dfrac{\pi}{2}+2\pi n\right]$.

$$\begin{cases} n=0 \ \to \ \varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right]; \\ n=1 \ \to \ \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right]; \\ n=2 \ \to \ \left[\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Т.е. $\varphi \in \left[-\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{2}\right]$.

[picture is coming soon]

Мы готовы записать интеграл, не забываем указывать якобиан!

$$\boxed{\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \int\limits_{\cos 3\varphi}^{1} r\cdot f\ dr + \int\limits_{\pi/2}^{5\pi/6} d\varphi \int\limits_{\cos 3\varphi}^{1} r\cdot f\ dr + \int\limits_{7\pi/6}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_{\cos 3\varphi}^{1} r\cdot f\ dr}$$

Задача 5

D – множество, лежащее в круге $x^2+y^2 \leqslant 1$ вне кривой $r=\cos 3\varphi$.

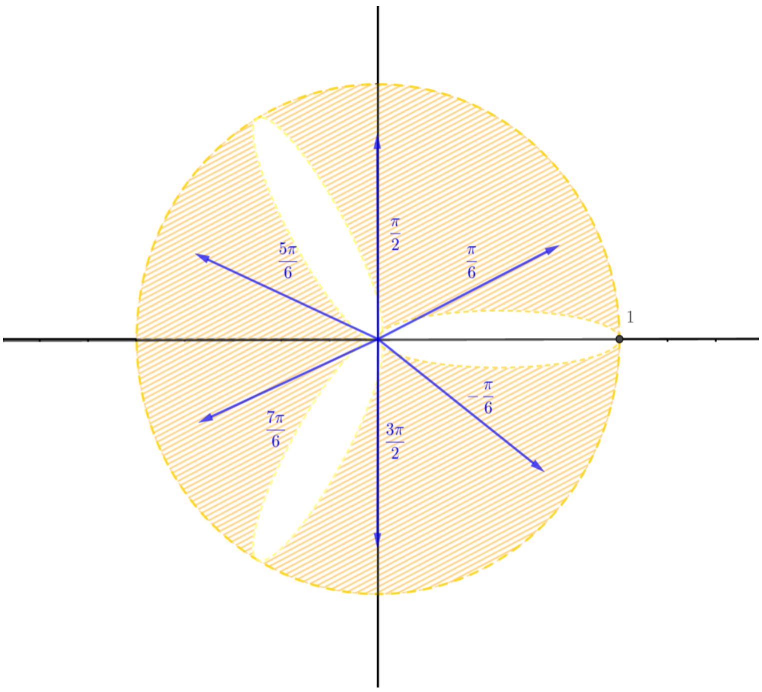
Для начала простое. $x^2+y^2 \leqslant \iff r\leqslant 1 \implies r\in[0{,}1]$.

Теперь разберёмся с кривой $r=\cos 3\varphi$.

Если $r\in[0{,}1]$, то $\cos 3\varphi \in [0{,}1] \implies 3\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$.

$$\begin{cases} n=0 \to \varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]; \\ n=1 \to \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]; \\ n=2 \to \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Т.е. для точек кривой $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$.



При $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]$ радиус будет ограничен $\cos 3\varphi$;
при остальных φ радиус произвольный (в пределах круга).

Мы готовы записать интеграл, не забываем указывать якобиан!

$$\boxed{\int\limits_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \int\limits_{\cos 3\varphi}^{1} r\cdot f\,dr + \int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{1} r\cdot f\,dr + \int\limits_{\pi/2}^{5\pi/6} d\varphi \int\limits_{\cos 3\varphi}^{1} r\cdot f\,dr + \int\limits_{5\pi/6}^{7\pi/6} d\varphi \int\limits_{0}^{1} r\cdot f\,dr + \int\limits_{7\pi/6}^{3\pi/2} d\varphi \int\limits_{\cos 3\varphi}^{1} r\cdot f\,dr + \int\limits_{3\pi/2}^{11\pi/6} d\varphi \int\limits_{0}^{1} r\cdot f\,dr}$$

Задача 6

D — множество, лежащее вне окружности $x^2+y^2=1$ и внутри петель кривой $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$

Так как область лежит вне окружности $x^2+y^2=1$, в полярных координатах $r>1$.

Определим условия, необходимые и достаточные для того, чтобы координаты лежали внутри петель кривой:
$(x^2+y^2)^2=2\,(x^2-y^2)\Leftrightarrow r^4=2\,r^2(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)\Leftrightarrow r^2=2\cos 2\,\varphi$

Тогда точка с полярными координатами (r,φ) лежит внутри петель, если $r^2\le 2\cos 2\,\varphi\Leftrightarrow\cos 2\,\varphi\ge\dfrac{r^2}{2}\Leftrightarrow\varphi\in\left[-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{r^2}{2};\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{r^2}{2}\right]$

Повторный интеграл: $\displaystyle\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi$

Перейдя к полярным координатам, вычислите интеграл.

Задача 7

$$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)dxdy,\ \ D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}.$$

D – круг с радиусом 2 $\implies$ $r\in[0,2]$.

$\varphi\in[0,2\pi)$, как и всегда.

$$\int\limits_0^2 dr\int\limits_0^{2\pi} r\cdot\ln(1+r^2)d\varphi=\int\limits_0^2 2\pi\cdot r\cdot\ln(1+r^2)dr=\pi\int\limits_0^2 2\cdot r\cdot\ln(1+r^2)dr.$$

Замена $\begin{cases} t=1+r^2; \\ dt=2r\,dr; \\ r\in[0,2]\implies t\in[1,5] \end{cases}$

$$\dots=\pi\int\limits_1^5\ln(t)\,dt=\pi\cdot\left(t\ln t-t\Big|_1^5\right)=\pi\cdot(5\ln 5-5+1)=\boxed{\pi(5\ln 5-4)}\,.$$

Задача 8

$$\iint\limits_D \frac{xdxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \;\; D = \{(x,y)|x^2+y^2 \leqslant 2x\}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow D = \{(r,\varphi)|r \leqslant 2\cos\varphi\}$$

$$\iint\limits_D \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{4-r^2}} r d\varphi dr = \int\limits_0^2 dr \int\limits_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} \frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{4-r^2}} d\varphi = \int\limits_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}} dr \int\limits_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} \cos\varphi d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}} dr \, \sin\varphi|_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} = \int\limits_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}} \sqrt{4-r^2} dr = \int_0^2 r^2 dr = \frac{8}{3}$$

Перейдите к переменным, в которых область интегрирования имеет вид прямоугольника, и вычислите интеграл.

Задача 9

$$\iint\limits_D \frac{(x+y)^2}{x} dxdy; \;\; D = \{(x,y) \mid 1-x \leqslant y \leqslant 3-x, \;\; \frac{x}{2} \leqslant y \leqslant 2x\}.$$

Область интегрирования имеет вид прямоугольника – значит, нам нужно, чтобы граница каждого интеграла изменялась от одной константы до другой константы.

$$\begin{cases} u := x+y \implies 1 \leqslant u \leqslant 3 \text{ из 1-го нер-ва.} \\ v := \dfrac{y}{x} \implies \dfrac{1}{2} \leqslant v \leqslant 2 \text{ из 2-го нер-ва.} \end{cases}$$

Т.е. с помощью подобной замены мы смогли выполнить поставленную задачу (обе координаты ограничены только константами и не зависят друг от друга).

Выражаем теперь, обратно, x и y через u и v.

$x = u - y.$

$$\begin{cases} y = v\cdot x = v\cdot(u-y) = v\cdot u - v\cdot y \implies y = \dfrac{v\cdot u}{1+v}; \\ x = u - \dfrac{v\cdot u}{1+v} = \dfrac{u+uv-uv}{1+v} = \dfrac{u}{1+v}. \end{cases}$$

Считаем якобиан. Для удобства взятия производной, лучше игрек перепишем как $y = \dfrac{v\cdot u}{1+v} = u - \dfrac{u}{1+v}$.

$$J=\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\left(\dfrac{u}{1+v}\right)_u & \left(u-\dfrac{u}{1+v}\right)_u\\ \left(\dfrac{u}{1+v}\right)_v & \left(u-\dfrac{u}{1+v}\right)_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{1+v} & \dfrac{v}{1+v}\\ \dfrac{-u}{(1+v)^2} & \dfrac{u}{(1+v)^2}\end{vmatrix}=$$

$$\frac{u}{(1+v)^3}+\frac{uv}{(1+v)^3}=\frac{u(1+v)}{(1+v)^3}=\frac{u}{(1+v)^2}\ .$$

Теперь перепишем функцию в новых координатах.

$$f=\frac{(x+y)^2}{x}=\frac{u^2}{u/(1+v)}=u(1+v).$$

Всё, теперь мы готовы брать интеграл.

$$\int\limits_{1/2}^{2}dv\int\limits_{1}^{3}(1+v)\cdot u\cdot\left|\frac{u}{(1+v)^2}\right|\,du=[\text{помним, что } u-\text{положительный}]=$$

$$\int\limits_{1/2}^{2}\frac{1}{1+v}\int\limits_{1}^{3}u^2\,du=\int\limits_{1/2}^{2}\frac{1}{1+v}\cdot\left(\frac{u^3}{3}\ \Bigg|_1^3\right)=$$

$$=\int\limits_{1/2}^{2}\frac{1}{1+v}\cdot\frac{26}{3}dv=\frac{26}{3}\ \int\limits_{1/2}^{2}\frac{1}{1+v}dv.$$

Замена $\begin{cases}t=1+v;\\ dt=dv;\\ v\in[1/2,\ 2]\implies t\in[3/2,\ 3]\end{cases}$

$$\dots=\frac{26}{3}\int\limits_{3/2}^{3}\frac{1}{t}=\frac{26}{3}\left(\ln t\ \Bigg|_{3/2}^{3}\right)=\frac{26}{3}\cdot(\ln 3-\ln(3/2))=\boxed{\frac{26}{3}\ln 2}\,.$$

Задача 10

$$\iint\limits_D xy(x+y)dxdy, \qquad D = \left\{(x,y)\Big| -1 \leqslant x-y \leqslant 1, \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant \frac{2}{x}\right\}$$

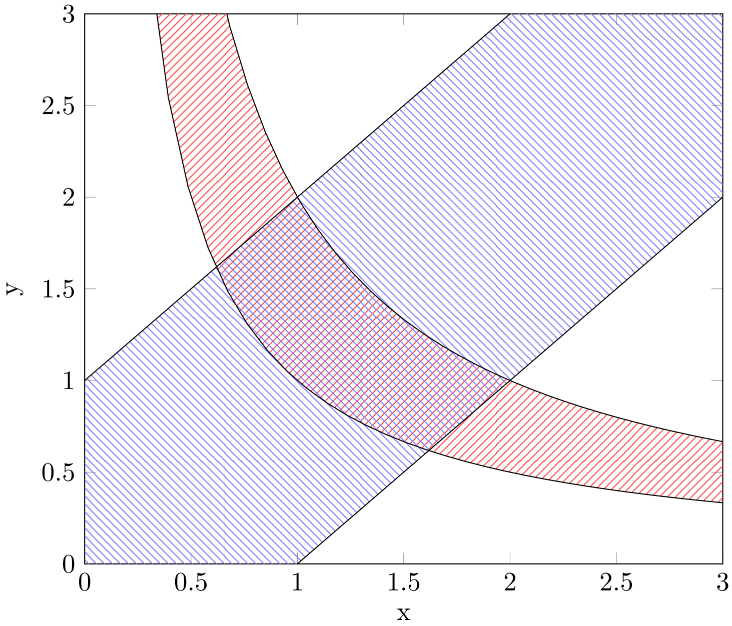
$$\begin{cases} u = x - y & u \in [-1,1] \\ v = xy & v \in [1,2] \end{cases} \Rightarrow x = u + y \Rightarrow v = uy + y^2 \Rightarrow y = \frac{-u \pm \sqrt{u^2+4v}}{2}$$

$$u^2 + 4v \geqslant 4 \Rightarrow \sqrt{u^2+4v} \geqslant 2 \Rightarrow y_- \leqslant \frac{-u-2}{2} \Rightarrow y_- < 0. \text{ По картинке } y > 0 \Rightarrow y = y_+ = \frac{-u+\sqrt{u^2+4v}}{2}$$

$$x = u + y = u + \frac{-u+\sqrt{u^2+4v}}{2} = \frac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2} \\ y = \dfrac{-u+\sqrt{u^2+4v}}{2} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} + \dfrac{u}{2\sqrt{u^2+4v}} & \dfrac{1}{\sqrt{u^2+4v}} \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{u}{2\sqrt{u^2+4v}} & \dfrac{1}{\sqrt{u^2+4v}} \end{pmatrix} \qquad |J| = \frac{1}{\sqrt{u^2+4v}}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{1}^{2} v\left(\frac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2} + \frac{-u+\sqrt{u^2+4v}}{2}\right)|J|dv = \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{1}^{2} v\frac{\sqrt{u^2+4v}}{\sqrt{u^2+4v}}dv = \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{1}^{2} vdv = 3$$



Задача 11

$$\iint\limits_D xy\ dxdy; \quad D = \{(x,y) \mid x^3 \leqslant y \leqslant 2x^3,\ 2x \leqslant y^2 \leqslant 3x\}.$$

$$\begin{cases} u = \dfrac{y}{x^3} \implies 1 \leqslant u \leqslant 2; \\ v = \dfrac{y^2}{x} \implies 2 \leqslant v \leqslant 3 \end{cases}$$

Выражаем x и y:

$$x = \frac{y^2}{v}.$$

$$\begin{cases} y = x^3 \cdot u = \frac{y^6}{v^3} \cdot u \implies \frac{1}{y^5} = \frac{u}{v^3} \implies y = \sqrt[5]{\frac{v^3}{u}} = v^{3/5} \cdot u^{-1/5}; \\ x = \frac{y^2}{v} = v^{6/5} \cdot u^{-2/5} \cdot v^{-1} = v^{1/5} \cdot u^{-2/5} \end{cases}$$

Перепишем функцию:

$f = xy = v^{3/5} \cdot v^{1/5} \cdot u^{-1/5} \cdot u^{-2/5} = v^{4/5} \cdot u^{-3/5}.$

Ищем якобиан.

$$J = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(v^{1/5} \cdot u^{-2/5}\right)_u & \left(v^{3/5} \cdot u^{-1/5}\right)_u \\ \left(v^{1/5} \cdot u^{-2/5}\right)_v & \left(v^{3/5} \cdot u^{-1/5}\right)_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2/5 \cdot v^{1/5} \cdot u^{-7/5} & -1/5 \cdot v^{3/5} \cdot u^{-6/5} \\ 1/5 \cdot v^{-4/5} \cdot u^{-2/5} & 3/5 \cdot v^{-2/5} \cdot u^{-1/5} \end{vmatrix}$$
$$=$$
$$-\frac{6}{25} v^{-1/5} \cdot u^{-8/5} + \frac{1}{25} v^{-1/5} \cdot u^{-8/5} = -\frac{v^{-1/5} \cdot u^{-8/5}}{5}.$$

Всё готово для подсчёта интеграла. Заметим, что $J < 0 \implies |J| = -J$.

$$I = \int\limits_1^2 du \int\limits_2^3 v^{4/5} \cdot u^{-3/5} \cdot |J| \, dv = \frac{1}{5} \int\limits_1^2 du \int\limits_2^3 v^{4/5} \cdot u^{-3/5} \cdot v^{-1/5} \cdot u^{-8/5} \, dv =$$

$$\frac{1}{5} \int\limits_1^2 du \int\limits_2^3 v^{3/5} \cdot u^{-11/5} \, dv =$$

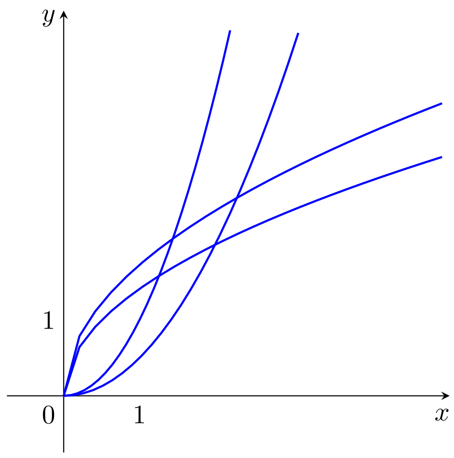
$$= \frac{1}{5} \int\limits_1^2 u^{-11/5} \, du \left(\frac{8}{5} \cdot v^{5/8} \Bigg|_2^3 \right) = \frac{1}{8} \cdot (3^{8/5} - 2^{8/5}) \cdot \int\limits_1^2 u^{-11/5} \, du = \frac{1}{8} \cdot$$

$$(3^{8/5} - 2^{8/5}) \cdot \left(-\frac{5}{6} u^{-6/5} \Bigg|_1^2 \right) du =$$

$$\boxed{\frac{5}{46} \cdot (3^{8/5} - 2^{8/5}) \cdot (1 - 2^{-6/5})}.$$

Задача 12

$$\iint\limits_D \frac{x^2\sin(xy)}{y}\,dx\,dy,\quad D=\{(x,y)\,|\,y\le x^2\le 2y,\,2x\le y^2\le 3x\}$$



Хотим, чтобы область, заданная пересечением парабол, была прямоугольником в какой-то системе координат

Перейдем к координатам u и v таким, что $u=\dfrac{x^2}{y}$, $v=\dfrac{y^2}{x}$.

Тогда $D=\{(u,v)\,|\,1\le u\le 2,\ 2\le v\le 3\}$

Выражение старых координат через новые:

$$u=\frac{x^2}{y}\Rightarrow y=\frac{x^2}{u}\Rightarrow v=\frac{x^4}{u^2x}=\frac{x^3}{u^2}\Rightarrow x=\sqrt[3]{u^2v},\ y=\sqrt[3]{\frac{u^4v^2}{u^3}}=\sqrt[3]{uv^2}$$

$$J=\begin{vmatrix}x_u & y_u\\ x_v & y_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{v}{u}} & \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{v^2}{u^2}}\\ \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{u^2}{v^2}} & \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{u}{v}}\end{vmatrix}=\frac{4}{9}\sqrt[3]{\frac{uv}{uv}}-\frac{1}{9}\sqrt[3]{\frac{u^2v^2}{u^2v^2}}=\frac{4}{9}-\frac{1}{9}=\frac{1}{3}$$

$$I=\int\limits_1^2 du\int\limits_2^3\frac{\sqrt[3]{u^4v^2}\sin(uv)}{\sqrt[3]{uv^2}}\cdot\frac{1}{3}\,dv=\frac{1}{3}\int\limits_1^2 u\,du\int\limits_2^3\sin(uv)\,dv=$$

$$=\frac{1}{3}\int\limits_1^2 u\,du\left(-\frac{1}{u}\cos(uv)\right)\Big|_2^3=\frac{1}{3}\int\limits_1^2(\cos 2u-\cos 3u)\,du-\frac{1}{u}\cos(uv)\Big|_2^3=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sin 2u-\frac{1}{3}\sin 3u\right)\Big|_1^2=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}(\sin 4-\sin 2)-\frac{1}{3}(\sin 6-\sin 3)\right)$$

Задайте в цилиндрических координатах множество D, заданное неравенствами в декартовых координатах. Пердполагаю функцию f непрерывной на D, преобразуйте интеграл в цилиндрических координатах к повторному.

Задача 13

$x^2+y^2\leqslant 1,\ x^2+y^2+z^2\leqslant 4.$

- Первое неравенство:

$r^2\leqslant 1\implies r\in[0{,}1].$

- Второе неравенство:

$r^2+z^2\leqslant 4\implies |z|\leqslant\sqrt{4-r^2}\implies z\in[-\sqrt{4-r^2},\ \sqrt{4-r^2}].$

Ограничений на φ никаких нет. Можем приступать к записи интеграла. Помним, что в циллиндрических координатах $|J|=r$.

$$I = \boxed{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi, z)\cdot r\ dz}\ .$$

Задача 14

$x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z,\ x^2+y^2 \leqslant z^2.$

• Первое нер-во.

$x^2+y^2 \leqslant 2z-z^2 \iff r^2 \leqslant 2z-z^2.$

Значит, значение $2z-z^2$ обязано быть положительным. Парабола с нулями в 0 и 2 $\implies z \in [0,\ 2]$.

В таком случае $r \in \left[0,\ \sqrt{2z-z^2}\right]$.

• Второе нер-во.

$r^2 \leqslant z^2 \implies r \in [0,\ |z|]$. Так как $z \geqslant 0$, то $|z| = z$.

Заметим, что при $z \in [0,\ 1]$ всегда выполнено $z \geqslant z^2 \iff 2z \geqslant 2z^2 \iff \sqrt{2z-z^2} \geqslant z$.

При $z \in [1, 2]$ всегда выполнено $z \leqslant z^2 \iff \sqrt{2z-z^2} \leqslant z$.

Поэтому на промежутке [0,1] радиус ограничен z, а на промежутке [1,2] выражением $\sqrt{2z-z^2}$.

На φ ограничений нет, модуль якобиана равен r.

$$\boxed{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left[\int\limits_0^1 dz \int\limits_0^z f\cdot r\ dr + \int\limits_1^2 dz \int\limits_0^{\sqrt{2z-z^2}} f\cdot r\ dr\right]}\ .$$

Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислите интеграл.

Задача 15

$$\iiint\limits_D z dxdydz \qquad D = \left\{(x,y,z) | x^2+y^2 \leqslant z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\right\} \Rightarrow D = \left\{(r,\varphi,z) | r^2 \leqslant z^2,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 zdz \int_0^z rdr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 z\frac{z^2}{2}dz = 2\pi\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Задача 16

$$\iiint_D z^2\, dxdydz, \quad D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \geqslant 1,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z\}.$$

• Первое нер-во.

$x^2+y^2+z^2 \geqslant 1 \iff r^2 \geqslant 1 - z^2.$

Тогда при $|z| < 1$ верно $r \geqslant \sqrt{1-z^2}$, иначе r ограничен снизу 0.

• Второе нер-во.

$x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z \implies r \leqslant \sqrt{2z - z^2}.$

Каковы границы z? Из второго нер-ва $\implies z \in [0,\, 2]$; также в силу

$\sqrt{1-z^2} \leqslant \sqrt{2z-z^2}$ при $z \leqslant 1 \implies 1 - z^2 \leqslant 2z - z^2 \implies z \geqslant \dfrac{1}{2}.$

По φ область не ограничена. Модуль якобиана равен r. Сразу вынесу все константы за интегралы:

$$\int\limits_{1/2}^{1} z^2 \;\; dz \int\limits_{\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{2z-z^2}} r \;\; dr \int\limits_{0}^{2\pi} 1 \;\; d\varphi \;\; + \int\limits_{1}^{2} z^2 \;\; dz \int\limits_{0}^{\sqrt{2z-z^2}} r \;\; dr \int\limits_{0}^{2\pi} 1 \;\; d\varphi \;\; = \;\; 2\pi \,\cdot$$

$$\left[\int\limits_{1/2}^{1} z^2\, dz \left(\frac{r^2}{2}\,\Bigg|_{\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{2z-z^2}}\right) + \int\limits_{1}^{2} z^2\, dz \left(\frac{r^2}{2}\,\Bigg|_{0}^{\sqrt{2z-z^2}}\right)\right] = \pi\left[\int\limits_{1/2}^{1} 2z^3 - z^2\, dz + \int\limits_{1}^{2} 2z^3 - z^4\, dz\right] =$$

$$\pi\left[\left(\frac{2z^4}{4} - \frac{z^3}{3}\,\Bigg|_{1/2}^{1}\right) + \left(\frac{2z^4}{4} - \frac{z^5}{5}\,\Bigg|_{1}^{2}\right)\right] =$$

$$\pi\cdot\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{32} + \frac{1}{24} + 8 - \frac{32}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \boxed{\frac{709\pi}{480}}.$$

Задайте в сферических координатах множество D, заданное неравенствами в декартовых координатах. Предполагая функцию f непрерывной на D, преобразуйте интеграл в сферических координатах к повторному.

Задача 17

$x^2+y^2+z^2 \leqslant 1;\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z.$

<u>Используем следующую замену:</u>

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\sin\Theta; \\ y = r\sin\varphi\sin\Theta; \\ z = r\cos\Theta; \end{cases}$$

• Первое неравенство:

$x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \implies r^2 \leqslant 1 \implies r \in [0{,}1]$.

• Второе неравенство:

$x^2+y^2+z^2 \leqslant 2z \iff r^2 \leqslant 2r\cos\Theta \iff r \leqslant 2\cos\Theta$.

Заметим, что при этих ограничениях: $\begin{cases} 2\cos\Theta > 1 \implies r \in [0{,}1]; \\ 2\cos\Theta \leqslant 1 \implies r \in [0, 2\cos\Theta] \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} r \in [0{,}1], \;\; \Theta \in \left[\dfrac{\pi}{3},\; \pi\right]; \\ r \in [0, 2\cos\Theta]\,, \;\; \Theta \in \left[0,\; \dfrac{\pi}{3}\right) \end{cases}$$

φ остаётся без ограничений.

Якобиан в сферических координатах (при данной! замене) равен $r^2\sin\Theta$.

Итог:

$$\boxed{\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \left(\int\limits_0^{\pi/3} d\Theta \int\limits_0^{2\cos\Theta} f\cdot r^2\sin\Theta\; dr + \int\limits_{\pi/3}^{\pi} d\Theta \int\limits_0^{1} f\cdot r^2\sin\Theta\; dr \right)}\,.$$

Задача 18

$x^2+y^2+z^2 \leqslant 2y,\; x^2+y^2 \geqslant z^2$.

• Первое нер-во.

$x^2+y^2+z^2 \leqslant 2y \iff r^2 \leqslant 2\,r\sin\varphi\sin\Theta \iff r \leqslant 2\sin\varphi\sin\Theta \implies$
$r \in [0, 2\sin\varphi\sin\Theta]$.

Также мы должны учесть, что $\sin\varphi$ обязан быть неотрицательным, ведь $r \geqslant 0 \wedge \sin\Theta \geqslant 0$.

То есть $\varphi \in [0,\pi]$.

• Второе нер-во.

$x^2+y^2 \geqslant z^2 \iff r^2\sin^2\Theta \geqslant r^2\cos^2\Theta \implies \operatorname{tg}^2\Theta \geqslant 1 \implies |\operatorname{tg}\Theta| \geqslant 1$.

Значит, $\Theta \in \left[\dfrac{\pi}{4},\; \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

Модуль Якобиана в сферических координатах с данной заменой – $r^2\sin\Theta$.

Всё готово, выписываем интеграл.

$$\boxed{\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\Theta \int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{2\sin\varphi\sin\Theta} f\cdot r^2\sin\Theta\; dr}\,.$$

Перейдя к сферическим координатам, вычислите интеграл.

Задача 19

$\iiint\limits_D (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz;\ D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1,\ y^2+z^2 \leqslant x^2,\ x \geqslant 0\}.$

[picture is coming soon]

Лайфхак: если мы видим, что с какой-то координатой возникают потенциальные трудности, делаем её в качестве оси, отвечающей за "широту". В данной ситуации нам подойдёт следующая замена:

$$\begin{cases} x = r\cos\Theta; \\ y = r\sin\varphi\sin\Theta; \\ z = r\cos\varphi\sin\Theta \end{cases} \qquad \begin{cases} \Theta \in [0,\pi]; \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

• Первое неравенство.

$x^2+y^2+z^2 \leqslant 1 \implies r^2 \leqslant 1 \implies r \in [0,1].$

• Третье неравенство.

$$x \geqslant 0 \implies r\cos\Theta \geqslant 0 \implies \cos\Theta \geqslant 0 \implies \Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

(Мы использовали тот факт, что $r \geqslant 0$).

• Второе неравенство.

$y^2+z^2 \leqslant x^2 \iff r^2\sin^2\varphi\cdot\sin^2\Theta + r^2\cos^2\varphi\cdot\sin^2\Theta \leqslant r^2\cos^2\Theta \implies$

$r^2\sin^2\Theta \leqslant r^2\cos^2\Theta \iff \operatorname{tg}^2\Theta \leqslant 1 \implies \Theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$

На φ ограничений нет. $|J| = r^2\sin\Theta$, как и при обычной сферической замене.

Интегрируем:

$$\int\limits_0^{\pi/4} d\Theta \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{2\pi} r^2{\cdot}r^2\sin\Theta\,d\varphi = 2\pi\int\limits_0^{\pi/4}\sin\Theta\,d\Theta\int\limits_0^1 r^4\,dr = 2\pi\cdot\left(-\cos\Theta\,\Bigg|_0^{\pi/4}\right)\cdot$$

$$\left(\frac{r^5}{5}\,\Bigg|_0^1\right) = \boxed{\frac{2\pi}{5}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Задача 20

$$\iint_D z\,dxdydz,\quad D = \left\{(x,y,z) \,\middle|\, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0\right\}$$

Сначала сделаю финт ушами, и заменю:

$$\begin{cases} x = 2u; \\ y = 3v; \\ z = w \end{cases}$$

Ищем якобиан,

$$J = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Т.е. множитель 6 мы добавим под интеграл в дальнейшем.

Теперь производим привычную замену на сферические координаты:

$$\begin{cases} u = r \cos\varphi \sin\Theta; \\ v = r \sin\varphi \sin\Theta; \\ w = r \cos\Theta \end{cases}$$

$|J| = r^2 \sin\Theta$, это наряду с 6 появится под интегралом.

Теперь перепишем неравенства.

- $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} + z^2 \leqslant 1 \iff \dfrac{4u^2}{4} + \dfrac{9v^2}{9} + w^2 \leqslant 1 \iff r^2 \leqslant 1 \implies$
$r \in [0,\ 1]$.

- $z \geqslant 0 \iff w \geqslant 0 \iff r\ \cos\Theta \geqslant 0 \implies \cos\Theta \geqslant 0 \implies \Theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

$f = z = w = r\cos\Theta$.

Всё, теперь пишем интеграл. На φ ограничений нет. Сразу выносим константы.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos\Theta \; d\Theta \int\limits_0^1 r \; dr \int\limits_0^{2\pi} 1 \; d\varphi = \left(\sin\Theta \Bigg|_0^{\pi/2}\right) \cdot \left(\frac{r^2}{2} \Bigg|_0^1\right) \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{2} = \boxed{\pi}\,.$$