

Семинарский лист 5

Александр Богданов
[Telegram](#)

Алиса Вернигор
[Telegram](#)

Анастасия Григорьева
[Telegram](#)

Василий Шныпко
[Telegram](#)

Данил Казанцев
[Telegram](#)

Денис Козлов
[Telegram](#)

Елизавета Орешонок
[Telegram](#)

Иван Пешехонов
[Telegram](#)

Иван Добросовестнов
[Telegram](#)

Настя Городилова
[Telegram](#)

Никита Насонков
[Telegram](#)

Сергей Лоптев
[Telegram](#)

Версия от 10.10.2020 03:46

Найдите множества абсолютной и условной сходимости функционального ряда.

Пользуясь необходимым условием равномерной сходимости, покажите, что ряд сходится на множестве D неравномерно.

Пользуясь локализацией особенности, покажите, что ряд сходится на множестве D неравномерно.

Задача 11

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^n}, \quad D = (1, +\infty)$$

В качестве последовательности x_n возьмём $1 + \frac{1}{n}$. Тогда

$$\sup_{x \in D} \left| \frac{\sqrt[n]{x}}{1+x^n} - 0 \right| \geq \left| \frac{(1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}}{1 + (1 + \frac{1}{n})^n} - 0 \right| = \left| \frac{((1 + \frac{1}{n})^n)^{\frac{1}{n^2}}}{1 + (1 + \frac{1}{n})^n} \right| \rightarrow \frac{e^{\frac{1}{e^2}}}{1+e} \rightarrow \frac{1}{1+e} \neq 0 \implies \text{нарушено необходимое условие}$$

равномерной сходимости \implies ряд не является равномерно сходящимся.

Пользуясь критерием Коши, покажите, что ряд сходится на множестве D неравномерно.

Задача 15

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^3x^3}, \quad D = [0, 1]$$

Возьмём $x_n = \frac{1}{n}$, $m_n = 2n$. Тогда

$$\sum_{k=n}^{2n} \frac{\frac{1}{n}}{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^3} \geq \frac{1}{9} = \varepsilon$$

Таким образом, по отрицанию критерия Коши, ряд не является сходящимся равномерно.

Пользуясь признаком Вейрштрасса, покажите, что ряд сходится на множестве D равномерно.

Задача 19

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^2 + nx + n^2}, \quad D = (0, +\infty)$$

$$\left| \frac{1}{x^2 + nx + n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} - \text{сходится как канонический ряд} \implies \text{исходный ряд сходится по признаку Вейерштрасса.}$$

Пользуясь признаком Лейбница, покажите, что знакочередующийся ряд сходится на множестве D равномерно.

Задача 23

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^4}, \quad D = \mathbb{R}$$

$$\sup_{x \in D} \left| \frac{1}{x^4 + n} \right| = \left| \frac{1}{n} \right| \rightarrow 0 \implies \frac{1}{x^4 + n} \xrightarrow{D} 0 \implies \text{сходится равномерно по Лейбницу.}$$

Пользуясь признаком Дирихле или Абеля, покажите, что ряд сходится на множестве D равномерно.

Задача 25

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \ln n}{n+x}, \quad D = [1, +\infty)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |x| \leq 1 \implies x^{2n} \text{ монотонна (либо константно 1, либо монотонно убывает к 0)} \\ \frac{(-1)^n}{2n-1} - \text{сходится по Лейбницу} \end{array} \right\} \implies \text{сходится равномерно по Абелю.}$$

Задача 26

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n}}{2n-1}, \quad D = [-1, 1]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\ln n}{n+x} \downarrow_{(n)} 0 \\ \left| \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \right| \leq 1 \end{array} \right\} \implies \text{сходится равномерно по Дирихле.}$$