

## Семинарский лист 2.4

Анастасия Григорьева  
[Telegram](#)

Денис Козлов  
[Telegram](#)

Елизавета Орешонок  
[Telegram](#)

Ира Голобородько  
[Telegram](#)

Версия от 28.11.2020 01:39

**Предполагая функцию  $f$  непрерывной на  $D$ , запишите тройной интеграл от  $f$  по  $D$  в виде одного из повторных, если  $D$  задано неравенствами.**

### Задача 1

$$0 \leq z \leq 4 - x^2, \quad x^2 - y^2 \geq 0, \quad x \geq 0.$$

Хочу интегрировать в порядке  $\int_{\dots}^{\dots} dx \int_{\dots}^{\dots} dy \int_{\dots}^{\dots} f(x, y, x) dz$ .

Посмотрим, что происходит при фиксированном  $x$ .

Так как  $x^2 \geq y^2 \iff |x| \geq |y|$ , то  $-x \leq y \leq x$  ( $x$  положительный). Ещё знаем, что  $0 \leq z \leq 4 - x^2$ .

$$\text{Итак, } \int_{\dots}^{\dots} dx \int_{-x}^x dy \int_0^{4-x^2} f(x, y, x) dz.$$

А каковы границы  $x$ ?  $x \geq 0$ , это нам дано. Из того, что  $z \in [0, 4 - x^2]$ , сделаем вывод, что  $x \leq 2$ , ведь при больших значениях  $x$  множество становится вырожденным.

Так что границы интегрирования знаем,  $\boxed{\int_0^2 dx \int_{-x}^x dy \int_0^{4-x^2} f(x, y, x) dz}.$

## Задача 2

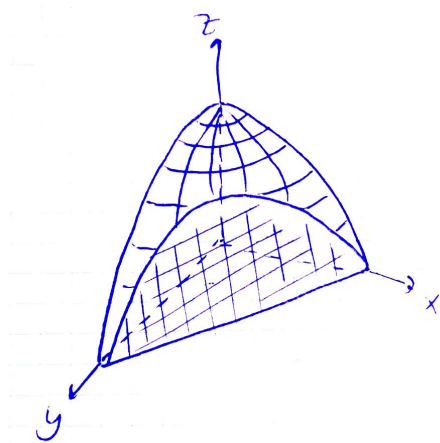
$$x + y + z \leq 2; \quad 0 \leq 4z \leq 4 - x^2 - y^2; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0; & z \geq 0 \\ x + y + z \leq 2 \\ x^2 + y^2 \leq 4 - 4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0, 2] \\ y \in [0, 2] \\ z \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2 - x - y \\ 4z = 4 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow 8 - 4x - 4y = 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow y = \sqrt{4x - x^2} + 2 - \text{пересечение фигур}$$

$$\int_0^1 dx \left\{ \int_0^{\sqrt{4x-x^2}+2} dy \int_0^{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}} f(x, y, z) dz + \int_{\sqrt{4x-x^2}+2}^{1-x} dy \int_0^{2-x-y} f(x, y, z) dz \right\}$$

Пересечение параболоида и плоскости. Первый интеграл отвечает за часть параболоида, а второй — за плоскость.



## Задача 3

$$0 \leq z \leq 4xy, \quad x + 4y + z \leq 1.$$

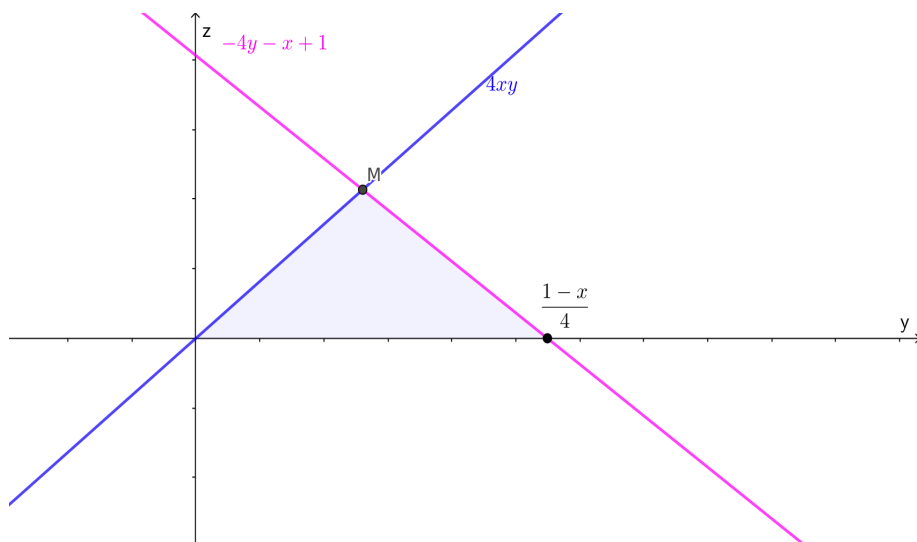
Буду интегрировать  $\int_{\dots}^{\dots} dx \int_{\dots}^{\dots} dy \int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dz.$

Для невырожденности  $D$  требуется  $\begin{cases} x \neq 0; \\ y \neq 0. \end{cases}$

Из того, что  $0 \leq xy$ , делаем вывод, что  $x$  и  $y$  одного знака.

Случай I.  $\begin{cases} x > 0; \\ y > 0. \end{cases}$

При фиксированном  $x$  в срезе  $Oyz$  нас интересуют точки треугольника, ограниченного прямыми  $z = 4xy, z = -4y - x + 1$  и  $z = 0$ .



Найдём  $y$ -координату точки  $M$ :  $-4y - x + 1 = 4xy \Rightarrow 4y(x + 1) = 1 - x \Rightarrow M_y = \frac{1 - x}{4x + 4}$ .

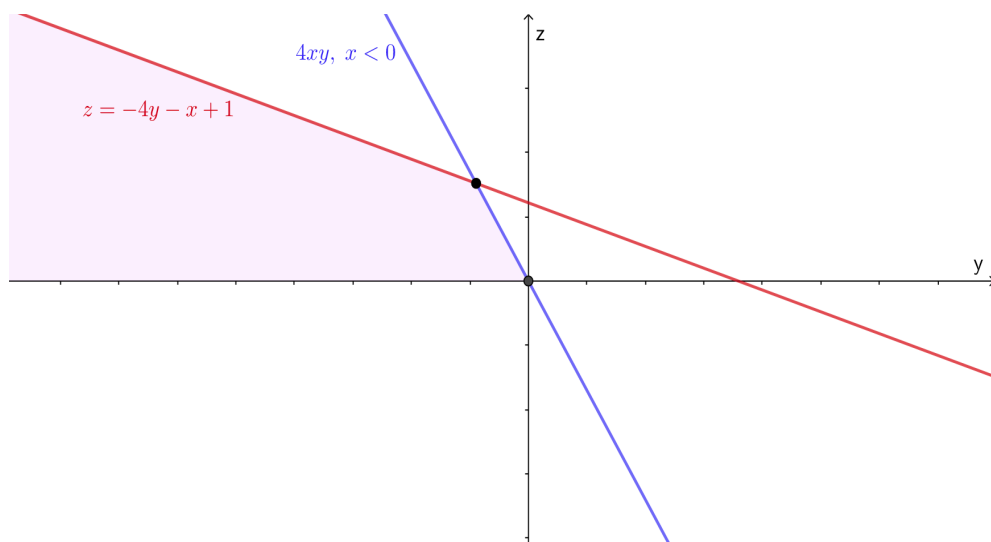
Множество является вырожденным, т. и т.т. прямая  $z = -4y - x + 1$  проходит через 0, т.е. при  $x = 1$ .

Значит, в данном случае  $x \in (0, 1)$ . Интегрируем!

$$\int_0^1 dx \left( \int_0^{M_y} dy \int_0^{4xy} f dz + \int_{M_y}^{(1-x)/4} dy \int_0^{-4y-x+1} f dz \right), \text{ где } M_y = \frac{1-x}{4x+4}.$$

Случай II.  $\begin{cases} x < 0; \\ y < 0. \end{cases}$

При фиксированном  $x$  в срезе  $Oyz$  происходит такая жуть:



Данная область неограничена снизу по  $y$ , значит она бесконечная  $\Rightarrow$  интеграл от неё невозможно взять.

#### Задача 4

$$y^2 \leq z \leq 4, \quad x^2 + y^2 \leq 16$$

Все точки рассматриваемой области находятся внутри круга радиуса 4 с центром в начале координат (его задает неравенство  $x^2 + y^2 \leq 16$ ). Значения  $z$ , как видно из 1-го неравенства, лежат в промежутке  $[y^2; 4]$ . Искомый повторный интеграл может иметь вид:

$$\int_{-4}^4 dx \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \int_{y^2}^4 f(x, y, z) dz$$

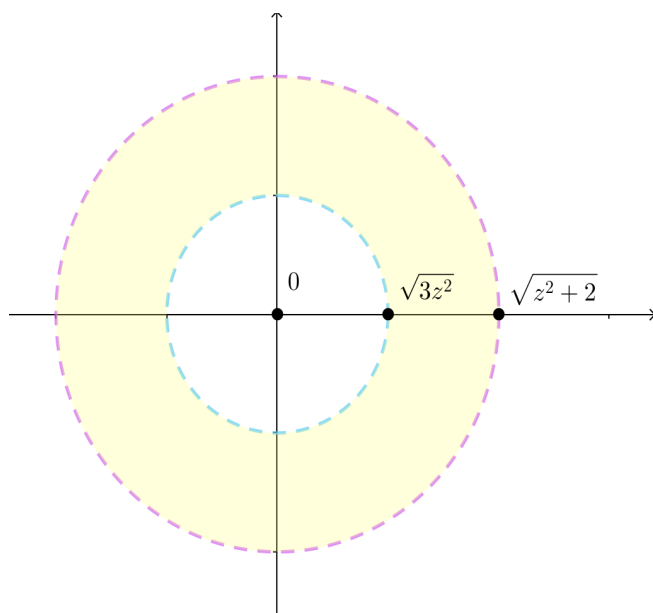
## Задача 5

$$x^2 + y^2 \geq 3z^2, \quad x^2 + y^2 - z^2 \leq 2.$$

Проинтегрируем внешне по  $z$ .

$$z = \text{const} \implies x^2 + y^2 \geq 3z^2, \quad x^2 + y^2 \leq z^2 + 2.$$

Нам интересно примерно такое колечко:



Можно начать разбивать область интегрирования по  $x$ . Но мы ленивые. Поэтому просто вычтем из площади большей окружности площадь меньшей.

Тогда внутри интеграла по  $z$  появится

$$\int_{-\sqrt{z^2+2}}^{\sqrt{z^2+2}} dx \int_{-\sqrt{z^2+2-x^2}}^{\sqrt{z^2+2-x^2}} f dy - \int_{-\sqrt{3z^2}}^{\sqrt{3z^2}} dx \int_{-\sqrt{3z^2-x^2}}^{\sqrt{3z^2-x^2}} f dy.$$

Для невырожденности множества, получаем условие  $\sqrt{3z^2} \leq \sqrt{z^2+2} \iff 2z^2 \leq 2 \iff |z| \leq 1 \iff z \in [-1, 1]$ .

Итого

$$\int_{-1}^1 dz \left( \int_{-\sqrt{z^2+2}}^{\sqrt{z^2+2}} dx \int_{-\sqrt{z^2+2-x^2}}^{\sqrt{z^2+2-x^2}} f dy - \int_{-\sqrt{3z^2}}^{\sqrt{3z^2}} dx \int_{-\sqrt{3z^2-x^2}}^{\sqrt{3z^2-x^2}} f dy \right).$$

## Задача 6

$$y^2 + x + z \leq 1, \quad x \geq z \geq 0$$

Проинтегрируем в порядке

$$\int_{\dots}^{\dots} dy \int_{\dots}^{\dots} dx \int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dz$$

При фиксированном  $y$  неравенства  $y^2 + x + z \leq 1$  и  $x \geq z \geq 0$  можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} z \leq (1 - y^2) - x, \\ z \leq x, \\ z \geq 0 \end{cases},$$

задающей треугольник, ограниченный прямыми  $z = (1 - y^2) - x$ ,  $z = x$  и  $z = 0$ , при условии того, что точка пересечения прямых  $z = (1 - y^2) - x$  и  $z = x$  находится не ниже оси  $Ox$ :

$$(1 - y^2) - x = x \Leftrightarrow x = \frac{1 - y^2}{2} \Rightarrow z = x = \frac{1 - y^2}{2} \geq 0 \Rightarrow 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-1; 1]$$

Значения  $x$  нас интересуют только те, при которых  $z \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - y^2) - x \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq (1 - y^2), \\ x \geq 0 \end{cases},$

т.е.  $x \in [0; 1 - y^2]$ . При этом при  $x \leq \frac{1 - y^2}{2}$  значения  $z$  лежат на отрезке  $[0; x]$ , а при  $x \geq \frac{1 - y^2}{2}$  — на отрезке  $[0; 1 - y^2]$

Получили границы для повторного интеграла:

$$\int_{-1}^1 dy \left( \int_0^{\frac{1-y^2}{2}} dx \int_0^x f(x, y, z) dz + \int_{\frac{1-y^2}{2}}^{1-y^2} dx \int_0^{1-y^2} f(x, y, z) dz \right)$$

**Вычислите интеграл.**

**Задача 7**

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} (x + y + z) dz &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \left( \int_0^{xy} (x) dz + \int_0^{xy} (y) dz + \int_0^{xy} (z) dz \right) = \int_0^1 dx \int_0^x dy \left( x \int_0^{xy} 1 dz + y \int_0^{xy} 1 dz + \int_0^{xy} (z) dz \right) = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \left( x \cdot (xy) + y \cdot (xy) + \frac{(xy)^2}{2} \right) = \int_0^1 x dx \cdot \int_0^x dy \left( xy + y^2 + \frac{xy^2}{2} \right) = \int_0^1 x \cdot \left( x \cdot \left( \frac{x^2}{2} \right) + \frac{x^3}{3} + x \cdot \left( \frac{x^3}{6} \right) \right) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{6} dx = \left( \frac{x^5}{10} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{36} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{36} = \frac{3+2}{30} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}. \end{aligned}$$

## Задача 8

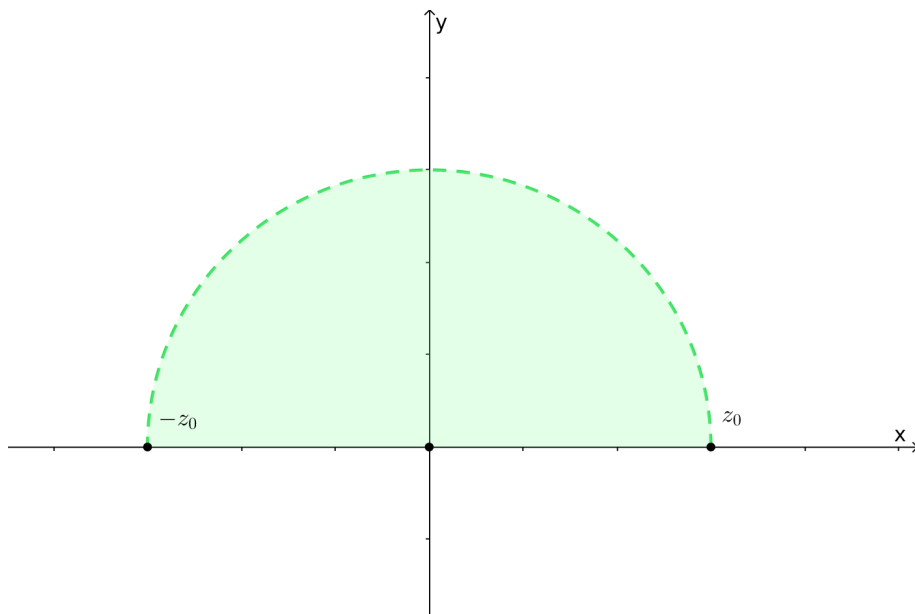
$$\begin{aligned}
 \int_1^2 dy \int_y^2 dx \int_0^{1/(xy)} \frac{dz}{x(1+x^2y^2z^2)} &= \left[ u = xyz, \frac{du}{dz} = xy \Leftrightarrow dz = \frac{du}{xy} \right] \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{xy} dx \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \\
 &= \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{xy} dx \cdot \left( \operatorname{arctg} u \Big|_0^1 \right) = \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{1}{y} dy \int_y^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{1}{y} dy \cdot \left( -\frac{1}{x} \Big|_y^2 \right) = \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{1}{y} \left( \frac{1}{y} - \frac{1}{2} \right) dy = \\
 &= \frac{\pi}{4} \left( \int_1^2 \frac{1}{y^2} dy - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{y} dy \right) = \frac{\pi}{4} \left( -\frac{1}{y} \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \ln y \Big|_1^2 \right) = \frac{\pi}{4} \left( 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{\pi}{8} (1 - \ln 2)
 \end{aligned}$$

## Задача 9

$$\int_0^4 dz \int_{-z}^z dx \int_0^{\sqrt{z^2-x^2}} z^2 xy^2 dy.$$

Для удобства, хочу проинтегрировать в порядке  $z - y - x$ . Чтобы поменять  $x$  и  $y$  местами, рассмотрю срез  $D$  при произвольном фиксированном  $z = z_0$ .

$x \in [-z_0, z_0]$ , точки  $D$  лежат в половинке окружности радиуса  $z_0$  выше нуля.



Если изменим порядок интегрирования, то  $y \in [0, z]$ ,  $x \in [-\sqrt{z^2-y^2}, \sqrt{z^2-y^2}]$

$$\int_0^4 dz \int_0^z dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} z^2 xy^2 dx = \int_0^4 z^2 dz \int_0^z y^2 dy \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} x dx = \int_0^4 z^2 dz \int_0^z y^2 dy \left( \frac{x^2}{2} \Big|_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} \right) = 0.$$

## Задача 10

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 dz \int_{1-z}^{3-z} dy \int_0^{3-y-z} \frac{dx}{(x+y+z)^2} &= \left[ u = x+y+z, \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow dx = du \right] \int_1^3 dz \int_{1-z}^{3-z} dy \int_{y+z}^3 \frac{du}{u^2} = \\
 &= \int_1^3 dz \int_{1-z}^{3-z} dy \cdot \left( -\frac{1}{u} \Big|_{y+z}^3 \right) = \int_1^3 dz \int_{1-z}^{3-z} \left( \frac{1}{y+z} - \frac{1}{3} \right) dy = [v = y+z, dy = dv] \int_1^3 dz \left( \int_1^3 \frac{1}{v} dv - \frac{1}{3} \int_{1-z}^{3-z} dy \right) = \\
 &= \int_1^3 dz \left( \ln 3 - \frac{1}{3} ((3-z) - (1-z)) \right) = \int_1^3 dz \left( \ln 3 - \frac{2}{3} \right) = \left( \ln 3 - \frac{2}{3} \right) (3-1) = 2 \ln 3 - \frac{4}{3}
 \end{aligned}$$

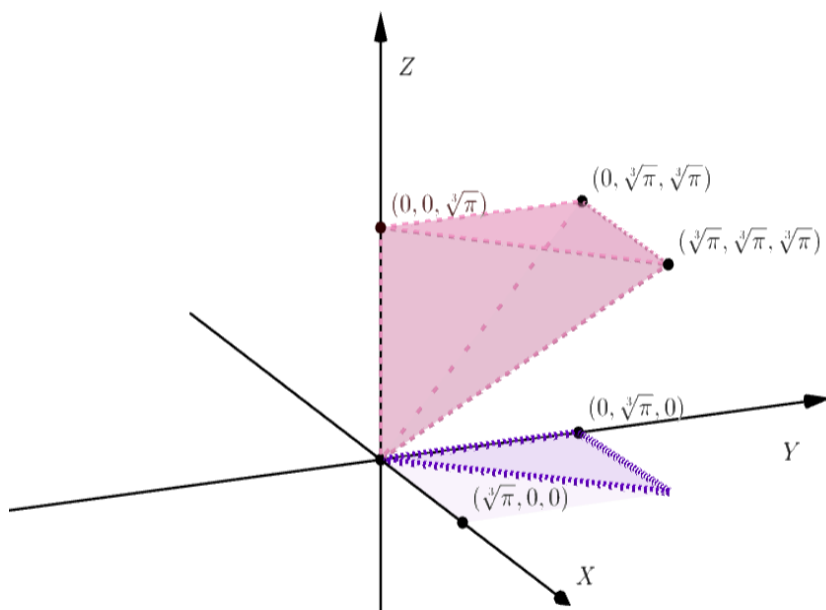
**Измените порядок интегрирования и вычислите интеграл.**

## Задача 11

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} dx \int_x^{\sqrt[3]{\pi}} dy \int_y^{\sqrt[3]{\pi}} \sin(z^3) dz. \text{ Исследуем границы для восстановления } D.$$

$x \in [0, \sqrt[3]{\pi}]$ . Нам интересны точки между плоскостями  $x = y$  и  $y = \sqrt[3]{\pi}$ .

Вертикально множество ограничено плоскостями  $y = z$  и  $z = \sqrt[3]{\pi}$ . Итого получили пирамидку:



Так как функция зависит от  $z$ , то сначала лучше интегрировать именно по  $z$ .

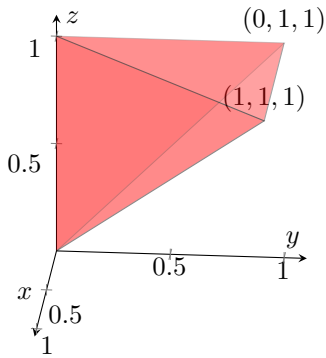
$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \sin(z^3) dz \int_0^z dy \int_0^y dx = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \sin(z^3) dz \int_0^z y dy = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \frac{z^2}{2} \cdot \sin(z^3) dz = [t = z^3; dt = 3z^2 dz] = \frac{1}{6} \cdot \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{1}{6} \left( -\cos t \Big|_0^{\pi} \right) =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}.$$

## Задача 12

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 e^{z^3} dz = \int_0^1 e^{z^3} dz \int_0^z dy \int_0^y dx = \int_0^1 e^{z^3} dz \int_0^z y dy = \int_0^1 \frac{z^2}{2} e^{z^3} dz = \left\{ \begin{array}{l} u = z^3 \\ du = 3z^2 dz \\ dz = \frac{du}{3z^2} \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{6} e^u du = \frac{e-1}{6}$$

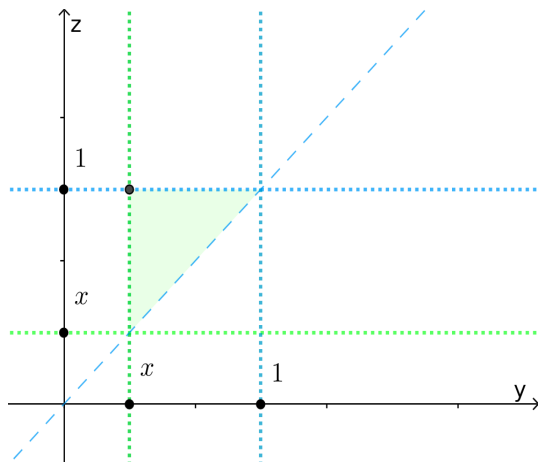


## Задача 13

$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_y^1 \frac{\operatorname{arctg} z}{z} dz.$$

Чтобы было удобнее, сделаем первым интегралом  $z$ . Для этого сначала поменяем  $y$  и  $z$ , а потом  $z$  и  $x$ .

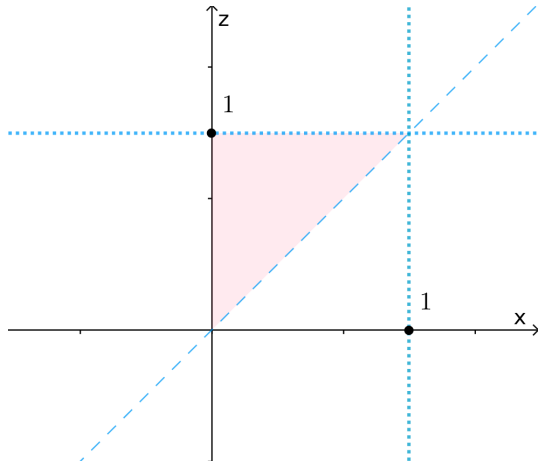
$y \leftrightarrow z$ . При фиксированном  $x$  такая ситуация:





Значит, поменяв порядок  $y$  и  $z$ , получим  $\int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_x^z \frac{\operatorname{arctg} z}{z} dy$ .

Теперь меняем местами  $x$  и  $z$ . Смотрим, что происходит с  $z$  в зависимости от  $x$ :



$$\begin{aligned} \text{Итого выйдет } & \int_0^1 dz \int_0^z dx \int_x^z \frac{\operatorname{arctg} z}{z} dy = \int_0^1 dz \int_0^z \frac{\operatorname{arctg} z}{z} dx \int_x^z dy = \int_0^1 dz \int_0^z (z-x) \frac{\operatorname{arctg} z}{z} dx = \int_0^1 \operatorname{arctg} z \, dz \int_0^z 1 - \frac{x}{z} dx = \\ & = \int_0^1 \left( z - \frac{z^2}{2} \right) \operatorname{arctg} z \, dz = \int_0^1 \frac{z}{2} \operatorname{arctg} z \, dz = \frac{1}{2} \int_0^1 z \operatorname{arctg} z \, dz. \end{aligned}$$

Интегрируем по частям: 
$$\begin{cases} f = \frac{z^2}{2}; & df = z dz; \\ g = \operatorname{arctg} z; & dg = \frac{1}{1+z^2} dz. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда } & \int_0^1 z \operatorname{arctg} z \, dz = \int_0^1 g \, df = \left( fg \Big|_0^1 \right) - \int_0^1 f \, dg = \left( \frac{z^2}{2} \cdot \operatorname{arctg} z \Big|_0^1 \right) - \int_0^1 \frac{z^2}{2(1+z^2)} dz = \\ & = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left( \int_0^1 \frac{1+z^2}{1+z^2} dz - \int_0^1 \frac{1}{(1+z^2)} dz \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(1) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

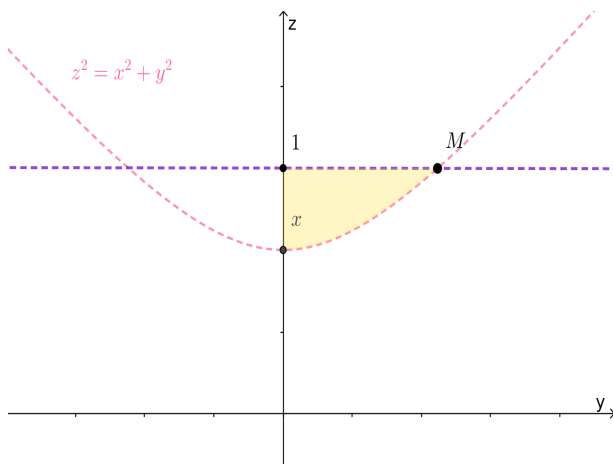
Не забываем домножить всё это дело на  $\frac{1}{2}$ , и получаем ответ,  $\boxed{\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}}$ .

## Задача 14

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \frac{\sin \pi z}{z} dz.$$

Таким же образом, как в предыдущем номере, вытолкнем границу по  $z$  наружу.

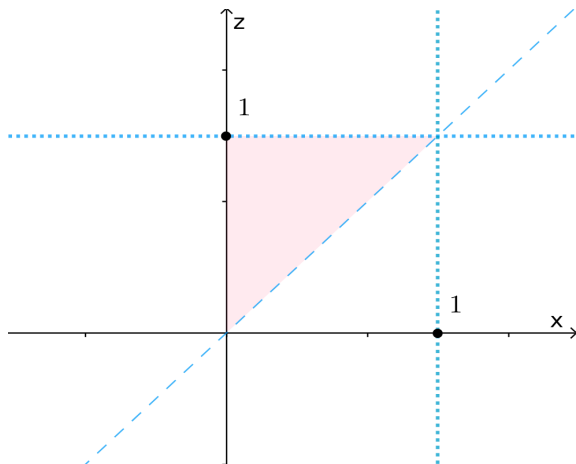
$y \leftrightarrow z$ . При фиксированном  $x$  имеем  $z^2 \geq x^2 + y^2$ , это гипербола:



Найдём координаты точки  $M$ . При ней  $z = 1 \implies y = \sqrt{z^2 - x^2} = \sqrt{1 - x^2}$ . Всё сходится.

Значит, при нашей замене получим  $\int_0^1 dx \int_x^1 dz \int_0^{\sqrt{z^2 - x^2}} \frac{\sin \pi z}{z} dy$ .

Теперь делаем замену  $z \leftrightarrow x$ .



Здесь всё изменилось, прямо как в предыдущем пункте.

$$\int_0^1 dz \int_0^z dx \int_0^{\sqrt{z^2 - x^2}} \frac{\sin \pi z}{z} dy = \int_0^1 \frac{\sin \pi z}{z} dz \int_0^z dx \int_0^{\sqrt{z^2 - x^2}} dy = \int_0^1 \frac{\sin \pi z}{z} dz \int_0^z \sqrt{z^2 - x^2} dx.$$

Производим замену (внутренний интеграл)  $\begin{cases} x = z \sin t; \\ dx = z \cos t dt; \\ x \in (0, z) \implies \sin t \in (0, 1) \implies t \in (0, \pi/2). \end{cases}$

$$\text{Получаем } \int_0^1 \frac{\sin \pi z}{z} dz \int_0^{\pi/2} z \cos t \cdot \sqrt{z^2 - z^2 \sin^2 t} dt = \int_0^1 \frac{\sin \pi z}{z} dz \int_0^{\pi/2} z^2 \cos t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} dt =$$

$$\int_0^1 z \sin(\pi z) dz \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} dt = \int_0^1 z \sin(\pi z) dz \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^1 z \sin(\pi z) dz \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t) dt =$$

$$\frac{1}{2} \int_0^1 z \sin(\pi z) dz \int_0^{\pi/2} 1 + \cos(2t) dt = \frac{1}{2} \int_0^1 z \sin(\pi z) dz \left( \frac{\pi}{2} + \left( \frac{\sin 2t}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 z \sin(\pi z) dz \left( \frac{\pi}{2} + 0 \right) = \frac{\pi}{4} \int_0^1 z \sin(\pi z) dz.$$

$$\text{Считаем } \int_0^1 z \sin(\pi z) dz = -\frac{z}{\pi} \cos(\pi z) \Big|_0^1 + \int_0^1 \cos(\pi z) dz = -\frac{z}{\pi} \cos(\pi z) \Big|_0^1 + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \cos(\pi z) dz = \frac{1}{\pi} + \frac{\sin(\pi z)}{\pi^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}$$

$$\text{Подставляем и получаем ответ: } \frac{\pi}{4} \int_0^1 z \sin(\pi z) dz = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{\pi} = \frac{1}{4}$$

**Вычислите многократный интеграл.**