Коллоквиум 1

Александр Богданов
Telegram

Алиса Вернигор
Telegram

Василий Шныпко
Telegram

Денис Козлов
Telegram

Елизавета Орешонок
Telegram

Никита Насонков
Telegram

Даниэль Хайбулин
Telegram

Сергей Лоптев
Telegram

Версия от 16.10.2020 22:46

1. Дайте определения: числовой ряд, частичная сумма ряда, сумма ряда, сходящийся ряд, расходящийся ряд. Рассмотрим ряд с общим членом a_n. Докажите, что если ряд сходится, то $a_n \to 0$.

Пусть a_n – последовательность, т.е. $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Формальная бесконечная сумма $a_1 + a_2 + a_3 + ... = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется рядом.

$S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ – частичная сумма.

Суммой ряда называется $S = \lim\limits_{N\to\infty} S_N$.

Если $\exists S \in \mathbb{R}$, то ряд называют сходящимся.
Если $\exists S = \infty$ или $\nexists S$, то ряд называют расходящимся.

Необходимое условие сходимости: Если ряд сходится, то $a_n \to 0$.
Доказательство: $a_n = S_n - S_{n-1} \to 0$, т.к. $S_n \to S$ и $S_{n-1} \to S$. ■

2. Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Последовательность $\{x_n\}$ сходится, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N \implies |x_n - x_m| < \varepsilon$
Критерий Коши сходимости числового ряда

Ряд $\sum x_n$ сходится тогда, и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N,\ n > m \implies |\sum\limits_{i=m}^{n} x_i| < \varepsilon$

Доказательство. Рассмотрим последовательность частных сумм $\{S_n\}$
Ряд сходится тогда, и только тогда, когда сходится $\{S_n\}$

То есть ряд $\sum x_n$ сходится тогда, и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n, m \geqslant N,\ n > m \implies |S_n - S_m| < \varepsilon \implies$ $|\sum\limits_{i=m}^{n} x_i| < \varepsilon$ ■

3. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $a_n \leqslant b_n$.

Пусть $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geqslant n_0 \quad 0 \leqslant a_n \leqslant b_n$.

- Если сходится ряд $\sum b_n$, то сходится и ряд $\sum a_n$.
- Если расходится ряд $\sum a_n$, то расходится и ряд $\sum b_n$.

Доказательство. Для начала удалим из обеих последовательностей первые n_0 элементов, чтобы неравенство $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ выполнялось для всех $n \in \mathbb{N}$. Имеем на это право, так как конечное число элементов последовательности не влияет на ее поведение.

Заметим, что последовательности частичных сумм $A_n = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ и $B_n = \sum\limits_{n=1}^{N} b_n$ обе монотонны, так как ряды положительны. Также ряд $\sum b_n$ сходится, следовательно последовательность B_n ограничена сверху. Тогда ограничена сверху и $A_n \leqslant B_n$, а из ее монотонности последовательность частичных сумм ряда $\sum a_n$ сходится $\implies$ ряд $\sum a_n$ сходится.

Второе утверждение выполняется как контрапозиция первого. ∎

4. Сформулируйте и докажите признак сравнения положительных числовых рядов, основанный на неравенстве $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

Утверждение 0.1 (Сравнение отношений)**.** *Пусть* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ *при* $n \geqslant n_0$. *Тогда:*

$$\sum b_n \text{ сходится} \implies \sum a_n \text{ сходится}$$

$$\sum a_n \text{ расходится} \implies \sum b_n \text{ расходится}$$

Доказательство. Предполагаем, что $a_n > 0, b_n > 0$.

$$a_{n_0+1} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+1}$$

$$a_{n_0+2} \leqslant \frac{a_{n_0+1}}{b_{n_0+1}} \cdot b_{n_0+2} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+2}$$

$$\ldots$$

$$a_{n_0+k} \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot b_{n_0+k}$$

$$\sum_{n=n_0}^{N} a_n \leqslant \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^{N} b_n$$

∎

5. Сформулировать и доказать признак сравнения числовых рядов, основанный на пределе $\lim \frac{a_n}{b_n}$.

Пусть $\sum a_n$ и $\sum b_n$ — положительные ряды, и $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0;\, +\infty)$.

Тогда ряд $\sum a_n$ сходится $\Leftrightarrow \sum b_n$ сходится.

Доказательство. $c = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} > 0$

По определению предела:

$\forall \varepsilon > 0$ (берем $\varepsilon < c$) $\exists n_0 : c - \varepsilon \leq \frac{a_n}{b_n} \leq c + \varepsilon \;\; \forall n \geq n_0 \;\Rightarrow\; (c-\varepsilon)\, b_n \leq a_n \leq (c+\varepsilon)\, b_n \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \sum (c-\varepsilon)\, b_n \leq \sum a_n \leq \sum (c+\varepsilon)\, b_n \;\Leftrightarrow\; C_1 \sum b_n \leq \sum a_n \leq C_2 \sum b_n$ ■

6. Пусть последовательности $\{a_n\}$, $\{A_n\}$ таковы, что $a_n - (A_n - A_{n-1}) = c_n$ и ряд $\sum c_n$ сходится. Докажите, что существует C такое, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n = A_n + C + o(1)$.

Доказательство. $\sum\limits_{n=1}^{N} c_n = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n - \sum\limits_{n=1}^{N} (A_n - A_{n-1}) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n - A_N + A_0 \implies a_1 + a_2 + \dots + a_N = A_N + \left(-A_0 + \sum\limits_{n=1}^{N} c_n\right)$.

Последнее равенство получено перенесением некоторых слагаемых первых равенств в другую часть от знака равно.

Получим требуемое, если возьмём $C = \lim\limits_{N\to\infty} -A_0 + \sum\limits_{n=1}^{N} c_n$.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ – сходится, то такой предел существует. ■

7. Сформулируйте и докажите признак Лобачевского-Коши

Утверждение 0.2. *1 Пусть $a_n \downarrow$. Рассмотрим ряды:*

$$\sum a_n \; (1) \;\; и \;\; \sum 2^n \cdot a_{2^n} \; (2)$$

Тогда ряды (1) и (2) ведут себя одинаково

Доказательство.

$$2^m \text{ слаг.: } a_1 + \underbrace{a_2}_{\substack{\leqslant a_1\\ \geqslant a_2}} + \underbrace{a_3 + a_4}_{\substack{\leqslant 2a_2\\ \geqslant 2a_4}} + \underbrace{a_5 + a_6 + a_7 + a_8}_{\substack{\leqslant 4a_4\\ \geqslant 4a_8}} + \dots + \underbrace{a_{2^{m-1}+1} + a_{2^{m-1}+2} + \dots + a_{2^{m-1}+2^{m-1}}}_{\substack{\leqslant 2^{m-1}\cdot a_{2^{m-1}}\\ \geqslant \frac{1}{2}\cdot 2^m\cdot a_{2^m}}}$$

$$a_1 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} 2^n a_{2^n} \leqslant \sum_{n=1}^{2^m} a_n \leqslant a_1 + \sum_{n=0}^{m-1} 2^n \cdot a_{2^n}$$

Левая часть – сумма нижних оценок, правая – сумма верхних

■

8. Сформулируйте теорему Штольца о пределе последовательности $\dfrac{p_n}{q_n}$, где p_n, $q_n \to 0$. Покажите на примере, как можно с помощью этой теоремы уточнить асимптотическую оценку для частичной суммы ряда.

Пусть p_n, $q_n \to 0$ и q_n монотонна. Тогда если $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{q_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n}$.

Докажем, что $S_N = S - \dfrac{1}{N} + o\left(\dfrac{1}{N}\right)$ для ряда $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ (семинарская задача 2.19).

Пусть $p_n = S - S_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ и $q_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, причем q_n монотонно убывает. Тогда

$$\frac{p_{n+1} - p_n}{q_{n+1} - q_n} = \frac{(S - S_{n+1}) - (S - S_n)}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \frac{S_n - S_{n+1}}{\frac{n-(n+1)}{n(n+1)}} = \frac{-\frac{1}{(n+1)^2}}{-\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \implies$$

$$\implies \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = 1 \text{ (по теореме Штольца)} \implies \frac{p_n}{q_n} = 1 + o(1) \implies p_n = q_n + o(q_n) \implies$$

$$\implies S - S_n = \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \implies S_N = S - \frac{1}{N} + o\left(\frac{1}{N}\right) \quad ■$$

9. Пусть $\Sigma a_n, \Sigma a'_n$ – сходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд $\Sigma a'_n$ сходится быстрее ряда Σa_n, если $a'_n = o(a_n)$. Докажите, что в этом случае также $r'_n = o(r_n)$, где r_n, r'_n – остатки соответствующих рядов.

Доказательство.

$a'_n = o(a_n)$, то есть, $\dfrac{a'_n}{a_n} \to 0$

$r_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \Rightarrow r_{n-1} = \sum\limits_{k=n}^{\infty}$

Так как ряды положительные и сходятся, $r_n, r'_n \to 0$, $r_n \downarrow \Rightarrow$ можем применить теорему Штольца

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r'_n}{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{r'_n - r'_{n-1}}{r_n - r_{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a'_n}{a_n} = 0 \Rightarrow r'_n = o(r_n)$ ■

10. Пусть $\sum a_n$, $\sum a'_n$ – расходящиеся положительные ряды. Говорят, что ряд $\sum a'_n$ расходится медленнее чем ряд a_n, если $a'_n = o(a_n)$. Докажите, что в этом случае также $S'_n = o(S_n)$, где S_n, S'_n – частичные суммы соответствующих рядов.

Докажем при помощи теоремы Штольца. У нас даны две расходящиеся последовательности, для которых последовательности частичных сумм положительны и строго возрастают. Рассмотрим предел отношений частичных сумм S_n и S'_n: $\lim \dfrac{S'_n}{S_n} = \lim \dfrac{S'_n - S'_{n-1}}{S_n - S_{n-1}} = \lim \dfrac{a'_n}{a_n} = 0$, так как $a'_n = o(a_n)$

Показали, что $S'_n = o(S_n)$

11. Пусть положительный ряд $\sum a_n$ сходится и r_n – его остаток. Докажите, что ряд $\sum(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$ также сходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$.

Сначала докажем сходимость ряда $\sum\limits_{n=0}^{N}(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}})$:

$\sum\limits_{n=0}^{N}(\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}) = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_1} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_2} + ... + \sqrt{r_N} - \sqrt{r_{N+1}} = \sqrt{r_0} - \sqrt{r_{N+1}} = \sqrt{S} - \sqrt{r_{N+1}} \to \sqrt{S}$ (т.к. $\sqrt{r_{N+1}} \to 0$)

Теперь покажем, что он сходится медленнее, чем a_{n+1}:

$\dfrac{\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}}{a_{n+1}} = \dfrac{\sqrt{r_n} - \sqrt{r_{n+1}}}{r_n - r_{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n} + \sqrt{r_{n+1}}} \to \infty$, т.к. $\sqrt{r_n} \to 0$ и $\sqrt{r_{n+1}} \to 0$. ■

12. Пусть положительный ряд $\sum a_n$ расходится и S_n его частичная сумма. Докажите, что ряд $\sum(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$ также расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$

Докажем расходимость:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}) &= \sqrt{S_1} - \sqrt{S_0} + \sqrt{S_2} - \sqrt{S_1} + \cdots + \sqrt{S_{N+1}} - \sqrt{S_N} \\ &= \sqrt{S_{N+1}} - \sqrt{S_0} \\ &= \sqrt{S_{N+1}} \to \sqrt{S}.\end{aligned}$$

Перейдем ко второй части вопроса:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{a_{n+1}} &= \frac{\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n}}{S_{n+1} - S_n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}},\end{aligned}$$

где $\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n} \to \infty$. Это значит, что $\dfrac{1}{\sqrt{S_{n+1}} + \sqrt{S_n}}$ стремится к 0. Тогда ряд $\sum(\sqrt{S_{n+1}} - \sqrt{S_n})$ расходится, причём медленнее, чем ряд $\sum a_{n+1}$.

13. Сформулируйте (предельный) признак Даламбера для положительного ряда.

Пусть $\sum a_n$ — положительный ряд. Тогда

- $\overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ сходится;
- $\underline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \implies$ ряд $\sum a_n$ расходится.

14. Сформулируйте (предельный) радикальный признак Коши для положительного ряда.

Утверждение 0.3 (Радикальный признак Коши.). *Пусть* $a_n \geqslant 0$. *Тогда:*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} < 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ сход.} \\ > 1 \implies \text{ряд } \sum a_n \text{ расх.} \end{cases}$$

15. Доказать, что всякий раз, когда признак Даламбера даёт ответ на вопрос о сходимости или расходимости ряда, радикальный признак Коши также даёт (тот же) ответ на этот вопрос.

Пусть $a_n > 0$. Тогда $\begin{cases} \overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1, \\ \underline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Rightarrow \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1, \end{cases}$.

Доказательство. Для доказательства основного утверждения докажем неравенство:

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}$ очевидно, докажем $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

(левое неравенство доказывается аналогично):

Пусть $q = \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n}, \ p = \overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

От противного: пусть $p < q$:
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{n_k\} : \sqrt[n_k]{a_{nk}} \geq q - \varepsilon \ \Rightarrow \ a_{nk} \geq (q-\varepsilon)^{n_k}$

$\exists n_0 : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq p + \varepsilon, \ n \geq n_0 \ \Rightarrow \ a_{n0+m} \leq a_{n0}(p+\varepsilon)^m$

$$(q-\varepsilon)^{n_k} \leq a_{nk} \leq a_{n0}(p+\varepsilon)^{n_k - n_0} \ \Rightarrow \ \frac{a_{n0}}{(p+\varepsilon)^{n_0}} \geq \left(\frac{q-\varepsilon}{p+\varepsilon}\right)^{n_k} \quad \forall k = 1, 2, \ldots;$$

но $\dfrac{q-\varepsilon}{p+\varepsilon} > 1$ при малом ε по предположению $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\dfrac{q-\varepsilon}{p+\varepsilon}\right)^{n_k}$ — бесконечно большое, тогда как $\dfrac{a_{n0}}{(p+\varepsilon)^{n_0}} = C$ — некоторая константа.

Получили неравенство $C \geq +\infty$ — противоречие, следовательно, предположение неверно, и неравенство выполняется.

Из $\underline{\lim}\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ исходное утверждение следует очевидно. ■

16

Доказать, что если для $\sum a_n$ существует $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то существует и $\lim \sqrt[n]{a_n} = q$.

$\exists \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q \ \Rightarrow\ \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = q$

Доказательство. Рассмотрим неравенство (доказанное в п. 15):

$\underline{\lim}\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \underline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$

$\exists \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q \ \Leftrightarrow\ \underline{\lim}\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \overline{\lim}\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q \ \Rightarrow$

$\Rightarrow\ q \leq \underline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} \leq \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} \leq q \ \Rightarrow \underline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{a_n} = q \ \Leftrightarrow\ \exists \lim \sqrt[n]{a_n} = q,$

что и требовалось доказать. ■

17. Приведите пример положительного ряда, вопрос о поведении которого не может быть решён с помощью признака Даламбера, но может быть решён с помощью радикального признака Коши (с обоснованием)

Пример.

$0 < a < 1 < b$

$$1 + a + ab + a^2b + a^2b^2 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a^{\left[\frac{n}{2}\right]} \cdot b^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} a, & \text{n – нечёт.} \\ b, & \text{n – чёт.} \end{cases} \implies \overline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} = b > 1, \underline{\lim}\frac{a_{n+1}}{a_n} = a < 1$$

– признак Даламбера не работает

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{n-2}{2n}}, & \text{n – чёт.} \\ a^{\frac{n-1}{2n}} \cdot b^{\frac{n-1}{2n}}, & \text{n – нечёт.} \end{cases} \implies \lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{ab}$$

Если $ab \neq 1$, то радикальный признак работает

18. Приведите пример ряда, который сходится медленнее любого ряда геометрической прогрессии, но быстрее любого обобщенного гармонического ряда (с обоснованием).

Рассмотрим $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$

Ряд геометрической прогрессии: $\sum q^n,\ \ 0 < q < 1$; Обобщенный гармонический ряд: $\sum \dfrac{1}{n^p},\ \ p > 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{q^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \exp\left(-\sqrt{n} - n\ln q\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \exp\left(-\sqrt{n} + n\ln\dfrac{1}{q}\right) = \infty$ так как $q < 1$. Получается ряд сходится медленнее геометрической прогрессии.

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^p}} = \lim\limits_{n\to\infty} \exp\left(-\sqrt{n} - p\ln\dfrac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \exp\left(-\sqrt{n} + p\ln n\right) = 0$. Получается ряд сходится быстрее обобщенного гармонического ряда.

19. Сформулируйте признак Гаусса для положительного ряда. Приведите пример применения признака Гаусса.

Утверждение 0.4 (Признак Гаусса)**.**

Пусть $\exists\delta > 0, p : \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \dfrac{p}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^{1+\delta}}\right)$

Тогда:
если $p > 1 \Rightarrow \sum a_n$ *– сходится если* $p \leqslant 1 \Rightarrow \sum a_n$ *– расходится*

Пример. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot\ldots\cdot(3n-4)}{3^n\cdot n!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(3(n+1)-4)\cdot 3^n\cdot n!}{3^{n+1}\cdot(n+1)!} = \frac{3(n+1)-4}{3(n+1)} = \frac{3n-1}{3n+3} = \frac{1-\frac{\frac{1}{3}}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \left(1-\frac{1}{3n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{\frac{1}{3}}{n} + \frac{\frac{1}{3}}{n^2} - O\left(\frac{1}{3n^3}\right) = 1 - \frac{\frac{4}{3}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \implies \begin{cases} p = \dfrac{4}{3} \\ \delta = 1 \end{cases} \implies \text{ряд сходится по признаку Гаусса.}$$

Пример. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$

Применим признак Гаусса: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^2\cdot\left(\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \left(\dfrac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\cdot\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2 = \left(\dfrac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = \left(\dfrac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}\right)^2 =$

$\dfrac{4+\frac{4}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{4+\frac{8}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} =$

$$= \frac{1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \left(1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\left(1-\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \implies$$

$$\implies \begin{cases} \delta = 1 \\ p = 1 \quad = 1 \end{cases} \implies \text{ряд расходится по признаку Гаусса.}$$

20

Привести пример положительного ряда, вопрос о поведении которого не может быть решен с помощью признака Гаусса.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\ln^p n}$ — положительный ряд, $a_n = \dfrac{1}{n\ln^p n}$

Рассмотрим отношение:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)\ln^p(n+1)}}{\dfrac{1}{n\ln^p n}} = \frac{n}{n+1}\cdot\frac{\ln^p n}{\ln^p(n+1)} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\cdot\frac{\ln^p n}{\left(\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^p} =$$

$$= \left[\text{ По формуле Тейлора для } (1+x)^{-1} \text{ и } \ln(1+x)\sim x\ \right] \left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\cdot\left(1+\frac{\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\ln n}\right)^{-p} =$$

$\left[\text{ Перешли к менее строгому приближению и снова разложили } (1+x)^{-p}\ \right]$

$$= \left(1-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{p}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)\right) = 1-\frac{1}{n}-\frac{p}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$$

Для использования признака Гаусса должны получить приближение $1-\dfrac{q}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^{1+\delta}}\right),\ \delta>0,$

но $-\dfrac{p}{n\ln n}+o\left(\dfrac{1}{n\ln n}\right)\neq O\left(\dfrac{1}{n^{1+\delta}}\right)$, т.к. $\dfrac{1}{\ln n}>\dfrac{1}{n^\delta}$ при $n\to\infty\ \ \forall\delta>0$

21. Выведите двустороннюю оценку частичной суммы ряда через неопределённый интеграл. Сформулируйте и докажите интегральный признак Коши-Маклорена.

Интегральный признак Коши-Маклорена: Если функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения на всей области определения и монотонно убывает, а также $\forall n\in\mathbb{N}: f(n)=a_n$, то $\sum a_n$ и $\int^{\infty} f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Доказательство: Рассмотрим убывающую при $x\geqslant n_0-1$ функцию $f(x)$ и ряд $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$, где $a_n=f(n)$. Заметим, что

$$f(n+t)\leqslant a_n\leqslant f(n-1+t),\ t\in[0;1]$$

Проинтегрируем каждый член неравенства определённым интегралом от 0 до 1 по dt:

$$\int_0^1 f(n+t)dt\leqslant\int_0^1 a_n dt\leqslant\int_0^1 f(n-1+t)dt$$

$$\int_n^{n+1} f(x)dx\leqslant a_n\leqslant\int_{n-1}^{n} f(x)dx$$

Просуммируем эти неравенства при всех n:

$$\int_{n_0}^{N+1} f(x)dx\leqslant\sum_{n=n_0}^{N} a_n\leqslant\int_{n_0-1}^{N} f(x)dx$$

Тогда $\sum a_n$ ведёт себя как несобственный интеграл $\int^{\infty} f(x)dx$. ■

Двусторонняя оценка для частичной суммы ряда через определённый интеграл была выведена в процессе.

22. Что такое улучшение сходимости положительного ряда? Покажите на примере как можно улучшить сходимость ряда.

Пусть у нас есть некоторый ряд $\sum a_n$ и он сходится медленно. В таких случаях для расчёта суммы ряда с необходимой точностью потребуется взять больше членов, что неудобно. Мы можем преобразовать наш ряд для улучшения сходимости, т.е. получить некоторый ряд $\sum a'_n$, который будет сходиться быстрее, чем исходный $\sum a_n$. Пусть у нас есть ряд $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2} \approx \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Воспользуемся методом Куммера. Для улучшения сходимости будем брать ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}, \dots$.

В данном случае нам подойдёт первый ряд в этом списке, поскольку $\frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)}\right) = S - 1 \implies S = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$\frac{1}{n^2+2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2}\cdot\left(\frac{1}{1+\frac{2}{n^2}} - \frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n^2}\cdot\left(1 - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

23. Дайте определения: знакопеременный ряд, знакочередующийся ряд, абсолютно сходящийся ряд, условно сходящийся ряд, положительная и отрицательная части ряда.

- Ряд $\sum a_n$ называется знакопеременным, если на знаки его элементов a_n не наложены ограничения. Фактически любой ряд — знакопеременный.
- Ряд $\sum a_n$ называется знакочередующимся, если $a_i \cdot a_{i+1} < 0 \ \ \forall i \in \mathbb{N}$.
- Ряд $\sum a_n$ сходится абсолютно, если сходятся ряды $\sum a_n$ и $\sum |a_n|$.
- Ряд $\sum a_n$ сходится условно, если сходится ряд $\sum a_n$ и расходится ряд $\sum |a_n|$.
- Введем последовательности $a_n^+ = \begin{cases} a_n, & a_n > 0 \\ 0, & a_n \leqslant 0 \end{cases}$ и $a_n^- = \begin{cases} |a_n|, & a_n < 0 \\ 0, & a_n \geqslant 0 \end{cases} \implies$

  $\implies$ ряды $\sum a_n^+$ и $\sum a_n^-$ — положительная и отрицательная части ряда $\sum a_n$ соответственно.

24. Докажите, что ряд сходится абсолютно ровно в том случае, когда сходятся его положительная и отрицательная части.

Утверждение 0.5. *Ряд* $\sum a_n$ *сходится абсолютно* $\iff \sum a_n^+, \sum a_n^- < \infty$ *сходятся.*

Доказательство. Если $\sum |a_n| < \infty$, то S_N^+, S_N^- ограничены $\implies$ сходятся.

Если $S_N^+ \to S^+$, $S_N^- \to S^-$, то $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \to S^+ - S^-$, $\sum\limits_{n=1}^{N} |a_n| \to S^+ + S^-$. ■

25. Доказать, что если ряд сходится условно, то его положительная и отрицательная части расходятся.

$\sum a_n$ — ряд, $S_+ = \sum a_n^+$ и $S_- = \sum a_n^-$ — положительная и отрицательная части суммы соответственно.

$$\begin{cases} \sum a_n &= C, \\ \sum |a_n| &= \pm\infty \end{cases} \Rightarrow S_+ \text{ и } S_- \text{ расходятся.}$$

Доказательство. По определению:

$\sum a_n = S_+ - S_-, \ \sum |a_n| = S_+ + S_-.$

От противного: пусть

1. $S_+,\ S_-$ конечны. Тогда $\sum |a_n| = S_+ + S_- = C_1 + C_2 = const$ — сходится, противоречие.

2. S_+ конечна, S_- расходится (симметричный случай аналогично).

   Тогда $\sum a_n = S_+ - S_- = C_1 - \underbrace{S_-}_{\text{беск. большое}} = -\infty$ — расходится, противоречие.

■

26. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса (признак абсолютной сходимости). Приведите пример применения мажорантного признака.

Признак Вейерштрасса:

Если $\sum a_n$ — ряд, и $\exists n_0 : |a_n| \le b_n \ \ \forall n \ge n_0$, причем $\sum b_n$ сходится, то ряд $\sum a_n$ также сходится.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^p},\ p > 0; \quad |a_n| = \frac{|\sin(nx)|}{n^p} \le \frac{1}{n^p} = b_n$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится при $p > 1$, значит, и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно при $p > 1$.

27. Что такое группировка членов ряда? Докажите, что любой ряд, полученный из сходящегося группировкой его членов, сходится и имеет ту же сумму.

Определение 1. Говорят, что ряд $\sum A_k$ получен из ряда $\sum a_n$ группировкой членов, если $\exists n_1, n_2, \ldots : 1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots$ такие, что

$$A_1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n_1}$$
$$A_2 = a_{n_1+1} + a_{n_1+2} + \cdots + a_{n_2}$$

Утверждение 0.6. *Если яд $\sum a_n$ сходится, то ряд $\sum A_k$ тоже сходится, причём к той же сумме.*

Доказательство. Последовательность частичных сумм $S'_k = A_1 + \dots + A_k$ ряда $\sum A_k$ явл. подпоследовательностью последовательности частичных сумм $S_n = a_1 + \dots + a_n$ ряда $\sum a_n$ ■

28. Как с помощью группировки преобразовать знакопеременный ряд в знакочередующийся? Что можно утверждать о сходимости полученного знакочередующегося ряда?

Пусть есть знакопеременный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, и нужно его с помощью группировки преобразовать в знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Проведём группировку следующим образом:

Сначала найдём такое число n_1, что числа $a_1, a_2, a_3, ..., a_{n_1}$ одного знака, а a_{n_1+1} – уже другого знака. Тогда $b_1 = \sum\limits_{i=1}^{n_1} a_i$.

Затем найдём такое число n_2, что числа $a_{n_1+1}, a_{n_1+2}, a_{n_1+3}, ..., a_{n_2}$ одного знака, а a_{n_2+1} – уже другого знака. Тогда $b_2 = \sum\limits_{i=n_1+1}^{n_2} a_i$.

И так далее. Мы как бы делим последовательность a_n на последовательные подотрезки, состоящие из чисел одинакового знака, и записываем суммы на этих подотрезках в последовательные элементы последовательности b_n.

Сходимость исходного ряда при такой группировке $\iff$ сходимость $\sum b_n$.

29. Приведите пример приведения преобразования знакопеременного (но не знакочередующегося) ряда к знакочередующемуся.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{[\ln n]}}{n}$

$(-1)^k :$
$k \leqslant \ln n < k+1$
$e^k \leqslant n < e^{k+1}$

$$A_k = (-1)^k \sum_{n=[e^k]+1}^{[e^{k+1}]} \frac{1}{n}$$

$$|A_k| \geqslant \frac{1}{e^{k+1}}([e^{k+1}] - ([e^k]+1)) \geqslant \frac{1}{e^{k+1}}(2[e^k] - [e^k] - 1) = \frac{[e^k]-2}{e^{k+1}} > \frac{e^k - 2}{e^{k+1}} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{1}{e} \neq 0$$

$\Rightarrow \sum A_k$ – расходится (не выполняется необходимое условие сходимости ряда) $\Rightarrow \sum a_n$ – расходится

30. Для знакочередующегося ряда с убывающем по модулю общим членом сформулируйте оценку n-го остатка. Приведите пример применения этой оценки.

Утверждение 0.7. *Рассмотрим ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n, u_n > 0$. *Если* $u_n \to 0$ *и* $u_n \downarrow$ *при* $n \geqslant n_0$, *то* $|r_n| \leqslant u_{n+1}$.

Пример. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}, p>0$

$u_n \downarrow \Rightarrow |r_n| \leqslant \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^p}$

31. Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующегося ряда. Приведите пример применения признака Лейбница.

Признак Лейбница: Если ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot u_n$ и u_n монотонно убывает к 0 (обозначение: $u_n \searrow 0$), то ряд сходится.
Пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p},\ p>0$$

$\frac{1}{n^p} \searrow 0 \implies$ ряд сходится (при $\forall p>0$)

32. Покажите на примере, что к знакопеременным рядам неприменим предельный признак сравнения

Рассмотрим 2 ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Второй ряд сходится по признаку Лейбница.

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} \approx \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-(-1)^n)} \approx \frac{1}{n}$ – расходится

$\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} = \sum\limits_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}(\sqrt{n}-(-1)^n)}$ – расходится как сумма сходящегося и расходящегося ряда.

33. Покажите, что для любых числовых последовательностей $\{a_n\}$, $\{B_n\}$ справедлива формула суммирования по частям (преобразование Абеля):

$$\sum_{n=m+1}^{N} a_n\left(B_n-B_{n-1}\right) = \left(a_N B_N - a_m B_m\right) - \sum_{n=m+1}^{N}\left(a_n-a_{n-1}\right)B_{n-1}$$

Доказательство. Заметим, что $a_n\left(B_n-B_{n-1}\right) = (a_n B_n - a_{n-1}B_{n-1}) - (a_n-a_{n-1})B_{n-1}$. Просуммируем левую часть от $m+1$ до N:

$$\sum_{n=m+1}^{N} a_n \left(B_n - B_{n-1}\right) = \sum_{n=m+1}^{N} \left(a_n B_n - a_{n-1} B_{n-1}\right) - \sum_{n=m+1}^{N} \left(a_n - a_{n-1}\right) B_{n-1} =$$

$$\left(a_N B_N - a_m B_m\right) - \sum_{n=m+1}^{N} \left(a_n - a_{n-1}\right) B_{n-1}$$

■

34. Сформулируйте признак Дирихле. Приведите пример его применения.

Утверждение 0.8 (Признак Дирихле.). *Если* $a_n \searrow 0$ *и* $\left|\sum_{n=1}^{N} b_n\right| = |B_N| \leqslant C$ *— ограничена, то ряд* $\sum a_n b_n$ *сходится.*

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p},\ x \neq \pi k,\ p > 0$$

$$a_n = \frac{1}{n^p},\ b_n = \sin nx$$

$$B_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}; \qquad |B_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}$$

$\implies$ ряд сходится по признаку Дирихле.

35. Сформулировать признак Абеля. Вывести утверждение признака Абеля из признака Дирихле.

Признак Абеля. Если $\{a_n\}$ монотонна и ограничена $|a_n| \leq C$, а $\sum b_n$ сходится, ряд $\sum a_n \cdot b_n$ также сходится.

Пусть некоторая последовательность $a_n \cdot b_n$ удовлетворяет признаку Абеля.
У монотонной ограниченной последовательности существует конечный предел: $\lim a_n = A$.
Представим исходную последовательность в виде суммы:

$$a_n \cdot b_n = A \cdot b_n + (a_n - A) b_n \ \Rightarrow\ \sum a_n \cdot b_n = \underbrace{\sum A \cdot b_n}_{\text{сходится}} + \sum (a_n - A) b_n$$

$a_n \to A \ \Rightarrow\ (a_n - A) \to 0$, причем, т.к. $\{a_n\}$ монотонная, $\{(a_n - A)\}$ монотонно стремится к 0.

Т.к. ряд $\sum b_n$ сходится, последовательность его частичных сумм также сходится.

$$\begin{cases} \{(a_n - A)\} & \downarrow \quad 0, \\ \left\{\sum_{n=1}^{N} b_n\right\} & \leq \quad B \end{cases} \Rightarrow \sum (a_n - A) b_n \text{ сходится по признаку Дирихле.}$$

$$\sum a_n \cdot b_n = \underbrace{\sum A \cdot b_n}_{\text{сходится}} + \underbrace{\sum (a_n - A) b_n}_{\text{сходится}} \text{ — сходится.}$$

36. Что такое перестановка членов ряда? Приведите пример.

Пусть $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ биекция.

Говорят, что ряд $\sum b_n$ получен из ряда $\sum a_n$ перестановкой членов, если $\exists$ биекция $f:\ b_n = a_{f(n)}$.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \cdots = -\ln 2.$$

Пусть $\sum b_n$ получен так: сложим сначала p положительных слагаемых из $\sum a_n$, потом q отрицательных, затем снова p положительных и так далее ($p, q \in \mathbb{N}$, берем слагаемые по возрастанию их индексов).

37. Сформулируйте свойство абсолютно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов.

Утверждение 0.9. *Сумма абс. сходящегося ряда не меняется при любой перестановке его членов*

38. Сформулируйте свойство условно сходящегося ряда, связанное с перестановкой членов (теорема Римана).

Теорема 0.10 (Свойство условно сходящегося ряда (теорема Римана)). *Каков бы ни был условно сходящийся ряд* $\sum a_n$ *и* $S \in [-\infty;\ +\infty]$, *найдётся такая перестановка* $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *что* $\sum a_{f(n)} = S$.

39. Приведите пример условно сходящегося ряда и перестановки, меняющей его сумму (с обоснованием).

Пример. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \ldots = -\ln 2$

$$S_{2n}^{+} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + o(1)$$

$$S_{2n}^{-} = 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n-1} = \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln n + \gamma) + o(1)$$

Пусть берётся p положительных слагаемых, затем q отрицательных и так далее.
Тогда после m действий получим:

$$S_{2mp}^{+} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2mp} = \frac{1}{2}(\ln(mp) + \gamma) + o(1)$$

$$S_{2mq-1}^{-} = 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2mq-1} = \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln(mq) + \gamma) + o(1)$$

$$S_{2mp}^{+} - S_{2mq}^{-} = -ln2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{p}{q}\right) + o(1)$$

$\Rightarrow$ ряд сходится к числу $-\ln\left(2\sqrt{\dfrac{q}{p}}\right)$

40. Как определяется произведение рядов? Что можно утверждать о произведении абсолютно сходящихся рядов?

Рассмотрим ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k, \sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m$

$$\left(\sum_{k=1}^{K} a_k\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{M} b_m\right) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant K 1 \leqslant m \leqslant M} a_k \cdot b_k$$

Если эта сумма имеет предел при $K, M \to \infty$, не зависящий от порядка суммирования, то говорят, что определено произведение произведение рядов

Теорема Коши. Если $\sum a_k, \sum b_k$ сходятся аболютно, то определено их произведение

$\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{k_n} \cdot b_{m_n}$ Оно не зависит от выбранного порядка суммирования, т.е. от биекции $\mathbb{N} \to \mathbb{N} times \mathbb{N}$, $n \mapsto (k_n, m_n)$ и является абсолютно сходящимся рядом.

41. Что такое произведение рядов в форме Коши? Приведите пример вычисления такого произведения.

Произведение рядов в форме Коши: Если $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k\right) \cdot \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m\right) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n$, то $c_i = \sum\limits_{j=1}^{i-1} a_j \cdot b_{i-j},\ i \geqslant 2$.

Пример: $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} k+1\right) \cdot \left(\sum\limits_{m=1}^{\infty} m^2\right) = \sum\limits_{n=2}^{\infty} c_n$. Для примера посчитаем несколько первых членов c_n:

$c_2 = a_1 \cdot b_1 = 2 \cdot 1 = 2$
$c_3 = a_2 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_2 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 4 = 11$
$c_4 = a_3 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_3 = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 9 = 34$
$\dots$

42. Дайте определения: бесконечное произведение, частичное произведение, сходящееся бесконечное произведение, расходящееся бесконечное произведение.

$\prod\limits_{n=1}^{N} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N$ – частичное произведение.

Бесконечным произведением называют формальную запись $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

Значением бесконечного произведения является предел частичного произведения:

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} \prod_{n=1}^{N} a_n$$

Если предел существует и он конечен – то бесконечное произведение сходится, иначе расходится.

43. Сформулируйте и докажите необходимое условие сходимости бесконечного произведения.

Если бесконечное произведение $\prod a_n$ сходится, то $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 1$.

Доказательство. Пусть $P_N = \prod\limits_{n=1}^{N} a_n$ — частичное произведение. Тогда $a_n = \dfrac{P_n}{P_{n-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty} P_{n-1} = \prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. ■

44. Пусть последовательности $\{a_n\}\,,\ \{A_n\}\,,\ A_n \neq 0$ таковы, что $a_n = \dfrac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n$ и бесконечное произведение $\prod c_n$ сходится. Докажите, что существует число $C \neq 0$ такое, что $\prod\limits_{n=1}^{N} a_n = A_N\,(C + o(1))$.

Доказательство.

$$a_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot c_n, \qquad \prod c_n \text{ сходится, то есть } \prod_{n=1}^{N} c_n \to P \neq 0$$

$$\prod_{n=1}^{N} a_n = \frac{\cancel{A_1}}{A_0} \cdot c_1 \cdot \frac{\cancel{A_2}}{\cancel{A_1}} \cdot c_2 \cdot \ldots \cdot \frac{A_N}{\cancel{A_{N-1}}} \cdot c_N = A_N \cdot \underbrace{\frac{1}{A_0} \cdot \prod_{n=1}^{N} c_n}_{\to \frac{P}{A_0} \neq 0}$$

$$\Longrightarrow \prod_{n=1}^{N} a_n = A_N \cdot (C + o(1))\,, \qquad C = \frac{P}{A_0} \neq 0$$

■

45

Как определяется соответствующий бесконечному произведению ряд? Сформулировать и доказать утверждение об их взаимосвязи.

Пусть $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ — бесконечное произведение.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ называется соответствующим этому бесконечному произведению.

Так как $a_n = e^{\ln a_n}$, верно равенство $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \prod\limits_{n=1}^{\infty} e^{\ln a_n} = e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n}$ (по свойству степени)

46. В каком случае бесконечное произведение называется сходящимся абсолютно? Сформулируйте и докажите критерий абсолютной сходимости бесконечного произведения.

$\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ наз-ся абсолютно сходящимся, если абсолютно сх-ся соответствующий ряд из логарифмов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln a_n$.

Критерий абс. сх-ти:

$$\boxed{\prod_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сход. абс.} \iff \sum_{n=1}^{\infty}(a_n - 1) \text{ сход. абс.}}$$

Доказательство. Пусть $a_n = 1 + \alpha_n$; $\alpha_n \to 0$. $\circledast$

Тогда $\ln a_n = \ln(1+\alpha_n) = \alpha_n + \overline{o}(\alpha_n) = \alpha_n(1+\overline{o}(1)) \implies |\ln a_n| = |\alpha_n| \cdot (1+\overline{o}(1))$, то есть $|\ln a_n| \sim |\alpha_n|$.

Возможно, тут стоит упомянуть, что необходимое условие сходимости $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\ln a_n|$ *это* $|\ln a_n| \to 0 \iff a_n \to 1$.

Поэтому, если $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сход. абс., то* $\circledast$ *у нас верно всегда.*

$\blacksquare$

47. Напишите произведение Валлиса и его значение (формула Валлиса). Вычисление каких интегралов приводит к этой формуле?

Утверждение 0.11. *Произведение Валлиса*

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2-1} = \frac{\pi}{2} \text{ – \textit{формула Валлиса}}$$

– *получается из анализа интегралов* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$

48. Дайте определение дзета-функции (ζ-функции) Римана. Сформулируйте тождество Эйлера для ζ - функции.

ζ-функция Римана по определению: $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},\ s > 1$ (т.е. это сумма обощенного гарм. ряда).

Тождество Эйлера: $\zeta(s) = 1/\left(\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)\right)$, где $p_1 = 1$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5, \dots$ - посл-ть всех простых чисел.

49. Дайте определения: функциональная последовательность, точка сходимости функциональной последовательности, область (множество) сходимости функциональной последовательности, поточечная сходимость функциональной последовательности на данном множестве.

Определение 2. Функциональным рядом (последовательностью) называется такой ряд (последовательность), что его элементами являются не числа, а функции $f_n(x)$.

Определение 3. Пусть $\forall n, n \in \mathbb{N}, f_n : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$. Говорят, что $a \in D$ - точка сходимости $\{f_n(x)\}$, если последовательность $\{f_n(a)\}$ сходится.

Определение 4. Множество всех точек сходимости называется множеством сходимости.

Определение 5. Говорят, что последовательность сходится на D поточечно, если D – множество сходимости.

50. Что такое равномерная норма? Покажите (исходя из определения нормы), что равномерная норма явл-ся нормой в линейном пр-ве всех числовых функций, определенных на $D \subseteq \mathbb{R}$.

Рассмотрим пространство функций $D \to \mathbb{R}$.

Равномерной нормой называется $\|f\| := \sup\limits_{x \in D} |f(x)|$.

Равномерная норма явл-ся нормой в линейном пр-ве всех числовых функций, определенных на $D \subseteq \mathbb{R}$.

Доказательство. Для нормы в лин. пр-ве $\mathbb{V}$ должны выполняться следующие св-ва:

1.0. $\|x\| \geqslant 0 \; \forall \, x \in \mathbb{V}$;

1.1. $\|x\| = 0 \implies x = 0$;

2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \; \forall \, x, y \in \mathbb{V}$

3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \; \forall \, x \in \mathbb{V}, \alpha \in R$.

Проверим их напрямую.

1.0. $\|f\| = \sup\limits_{x \in D} |f(x)| \geqslant 0 \; \forall f \in \mathbb{V}$;

1.1. $\|f\| = \sup\limits_{x \in D} |f(x)| = 0 \implies \forall \, x \; |f(x)| \leqslant 0 \implies \forall \, x \; |f(x)| = 0 \implies \forall \, x \; f(x) = 0 \iff f = 0$;

2. $\|f + g\| = \sup\limits_{x \in D} |f(x) + g(x)| \leqslant \sup\limits_{x \in D}(|f(x)| + |g(x)|) = \sup\limits_{x \in D} |f(x)| + \sup\limits_{x \in D} |g(x)| = \|f\| + \|g\| \; \forall \, f, g \in \mathbb{V}$;

3. $\|\alpha f\| = \sup\limits_{x \in D} |\alpha \cdot f(x)| = |\alpha| \sup\limits_{x \in D} |f(x)| = |\alpha| \cdot \|f\| \; \forall \, f \in \mathbb{V}, \alpha \in R$.

■

51. Сформулируйте определения равномерной сходимости функциональной последовательности: в терминах нормы и на языке $\varepsilon - \delta$.

1. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \iff ||f_n - f|| \to 0$.

2. $\sum f_n(x) \rightrightarrows S(x) \iff \forall\varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon), |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon.$

52. Докажите, что из равномерной сходимости следует поточечная сходимость на данном множестве.

Определение поточечной сходимости $\forall x \in E\ \forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon, x) : \forall n \geqslant N\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Определение равномерной сходимости $\forall\varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N\ \forall x \in E\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Доказательство. Видно, что в определении равномерной сходимости номер N зависит от ε и не зависит от x, а в определении поточечной - и от ε, и от x. Если выполняется равномерная сходимость, то $\forall x \in E\ \exists$ нужное N, то есть выполняется поточечная сходимость. ■

53. Приведите пример функциональной последовательности, сходящейся поточечно, но не сходящейся равномерно (с обоснованием).

Рассмотрим функциональную последовательность $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $D = [0, 1]$ (семинарская задача 4.20). При $x = 0$ $f_n(x) = 1$, а при $x \neq 0$ $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \implies f_n$ сходится поточечно на D. При этом равномерная сходимость отсутствует, так как f_n непрерывна $\forall\, n$, а f разрывна в нуле.

54. Приведите пример функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ (с нетривиальной зависимостью от n и x), равномерно сходящейся на некотором множестве (с обоснованием).

Пример.

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x}, \qquad D = [0; +\infty)$$

$$f_n(x) \overset{D}{\rightrightarrows} 0$$

$$\|f_n - 0\| = \|f_n\| = \sup_{x\in D} |f_n(x)| = \frac{1}{n} \to 0$$

$\implies$ последовательность сходится равномерно.

55. Доказать, что если две функциональные последовательности сходятся равномерно к предельным функциям, то их сумма также сходится равномерно к сумме двух этих предельных функций.

$$\begin{cases} f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f, \\ g_n \overset{D}{\rightrightarrows} g \end{cases} \Rightarrow (f_n + g_n) \overset{D}{\rightrightarrows} (f + g)$$

Доказательство. По определению равномерной сходимости:

$\forall\varepsilon > 0\ \exists N_1(\varepsilon) : |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}\quad \forall n \geq N_1(\varepsilon)\ \ \forall x \in D,$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_2(\varepsilon) : |g_n(x) - g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \geq N_2(\varepsilon) \;\; \forall x \in D$

Тогда

$\forall x \in D \;\; \forall n \geq max(N_1, N_2) : |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| = |(f_n(x) - f(x)) + (g_n(x) - g(x))| \leq$

$\leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N = max(N_1, N_2) : |(f_n(x) + g_n(x)) - (f(x) + g(x))| < \varepsilon \quad n \geq N \;\; \forall x \in D,$

т.е. сумма $(f_n + g_n)$ равномерно сходится к $(f + g)$ на D. ■

56. Докажите, что если 2 функциональные последовательности сходятся равномерно к ограниченным предельным функциям, то их произведение также сходится равномерно к произведению этих предельных функций.

Доказательство. Пусть наши последовательности - $\{f_n\}$, $\{g_n\}$; их предельные функции - f, g соотв.

Знаем: $\forall \; \varepsilon_1, \varepsilon_2 \; \exists \; N_1(\varepsilon_1), \; N_2(\varepsilon_2) : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_1; \; |g_m(x) - g(x)| < \varepsilon_2$ при $n \geqslant N_1(\varepsilon_1), \; m \geqslant N_2(\varepsilon_2)$.

Пусть $|f(x)|$ ограничен ограничен какой-нибудь константой C_1.

Так как $|g(x)|$ ограничен, то $|g_n(x)|$ ограничен какой-нибудь константой C_2. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&|f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| = \\
&= |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g_n(x) + f(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| \leqslant \\
&\leqslant |f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g_n(x)| + |f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g_n(x)| = \\
&= |g_n(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \cdot |g(x) - g_n(x)| \leqslant C_2 \cdot \varepsilon_1 + C_1 \cdot \varepsilon_2 \text{ (начиная с } n = \max(N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2))\text{).}
\end{aligned}$$

Теперь возьмем произвольный $\varepsilon > 0$, и положим $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{3 \cdot C_2}$; $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{3 \cdot C_1}$.

Начиная с $n = \max(N_1(\varepsilon_1), N_2(\varepsilon_2))$ верно, что $|f_n(x) \cdot g_n(x) - f(x) \cdot g(x)| \leqslant \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$. Мы победили. ■

57. Пусть функциональная последовательность $\{f_n\}$ сходится равномерно на множестве D к предельной функции f, отделённой от нуля (т.е. $\inf\limits_{x\in D}|f(x)|>0$), то функциональная последовательность $\dfrac{1}{f_n}$ сходится равномерно на D к $\dfrac{1}{f}$.

Доказательство.

$$\left\|\frac{1}{f_n}-\frac{1}{f}\right\|=\left\|\frac{f_n-f}{f_n\cdot f}\right\|=\sup_{x\in D}\left|\frac{f_n-f}{f_n\cdot f}\right|\lesseqgtr\sup_{x\in D}\frac{\varepsilon}{|f_n\cdot f|}\ \text{ при } n\geqslant N(\varepsilon),\ \text{т.к. } \|f_n-f\|\leqslant\varepsilon \text{ при } n\geqslant N(\varepsilon).$$

$\inf|f(x)|=m>0\implies|f(x)|\geqslant m\,\forall\,x\in D.$

$|f_n|+|f_n-f|\geqslant|f_n-(f_n-f)|=|f|\iff|f_n|\geqslant|f|-|f_n-f|$. Поэтому если $\varepsilon<m/2$, то

$|f_n|\geqslant|f|-|f_n-f|>m-\varepsilon>m-m/2=m/2$ при $n\geqslant N(\varepsilon)$, ведь $|f|\geqslant m$, $|f_n-f|<\varepsilon<m/2$.

$|f_n|>m/2\implies\dfrac{1}{|f_n|}<\dfrac{2}{m}$; $|f|\geqslant m\implies\dfrac{1}{|f|}\leqslant\dfrac{1}{m}$. Поэтому:

$$\left\|\frac{1}{f_n}-\frac{1}{f}\right\|\leqslant\sup_{x\in D}\frac{\varepsilon}{|f_n\cdot f|}<\frac{\varepsilon}{m/2\cdot m}=\varepsilon\cdot\frac{2}{m^2}\ \ (\forall\,n\geqslant N(\varepsilon))$$

Так как $\dfrac{2}{m^2}$ - фиксированное число, а ε у нас - сколь угодно малое, то это означает, что $\left\|\dfrac{1}{f_n}-\dfrac{1}{f}\right\|\to0$, что является по определению равномерной сходимостью f_n к f. ■

58. Докажите, что равномерная сходимость последовательности на множестве $D=D_1\cup D_2$ равносильна равномерной сходимости на D_1 и D_2 одновременно.

Пусть $D=D_1\cup D_2$ и f_n — функциональная последовательность. Хотим доказать

$$f_n\overset{D}{\rightrightarrows}f\iff f_n\overset{D_1}{\rightrightarrows}f\wedge f_n\overset{D_2}{\rightrightarrows}f$$

Доказательство. Очевидно, что для поточечной сходимости эквивалентность есть из определения, то есть $f_n\xrightarrow{D}f\iff f_n\xrightarrow{D_1}f\wedge f_n\xrightarrow{D_2}f$. Тогда рассмотрим условие равномерной сходимости и заметим, что

$$\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=\max\left(\sup_{x\in D_1}|f_n(x)-f(x)|,\ \sup_{x\in D_2}|f_n(x)-f(x)|\right)\implies$$

$$\implies\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|\xrightarrow{n\to\infty}0\iff\sup_{x\in D_1}|f_n(x)-f(x)|\xrightarrow{n\to\infty}0\ \wedge\ \sup_{x\in D_2}|f_n(x)-f(x)|\xrightarrow{n\to\infty}0$$

Отсюда следует доказываемое утверждение. ■

59. Пусть $\varphi:G\to D$ – биекция. Докажите, что равномерная сходимость функциональной последовательности $\{f_n\}$ на множество D равносильна равномерное сходимости на функциональной последовательности $\{f_n\circ\varphi\}$ на множестве G.

Доказательство.
$X\in D, f_n(x)$

$t \in G, \varphi(t) \in D$
$(f_n \circ \varphi)(t) = f_n(\varphi(t))$

Знаем, что $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$

Хотим доказать: $f_n \circ \varphi \overset{G}{\rightrightarrows} f \circ \varphi$

$||f_n \circ \varphi - f \circ \varphi|| = \underset{t \in G}{sup} |f_n(\varphi(t)) - f(\varphi(t))| = M_n$

Что означает, что супремум равен M_n? Это означает, что:

1) $|f_n(\varphi(t)) - f(\varphi(t))| \leqslant M_n, \forall t$
2) $\exists \{t_k\} : |f_n(\varphi(t_k)) - f(\varphi(t_k))| \xrightarrow[k \to \infty]{} M_n$

Что получаем?

1) $\Leftrightarrow \forall x \in D \ |f_n(x) - f(x)| \leqslant M_n$
2) $\Leftrightarrow \exists \{x_k\} : |f_n(x_k) - f(x_k)| \xrightarrow[k \to \infty]{} M_n$, где $x_k = \varphi(t_k)$

$\Rightarrow M_n = \underset{x \in D}{sup} |f_n(x) - f(x)|$

$\Rightarrow ||f_n \circ \varphi - f \circ \varphi||_G = ||f_n - f||_D$
Получается, что если одна норма равна 0, то и вторая норма будет равна 0. А так как везде знаки равносильности, то доказали мы сразу в две стороны. ■

60. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

Утверждение 0.12. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) : ||f_n - f_m|| < \varepsilon$ *при всех* $n, m \geqslant N$

61. Докажите, что предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций является непрерывной функцией.

Доказательство: Пусть функция $s(x)$ − предел некоторой последовательности непрерывных функций $s_n(x)$. Тогда непрерывность функции $s(x)$, которую нам нужно доказать, по определению будет заключаться в том, что в любой точке x_0 для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое δ, что из $|h| < \delta$ следует, что $|s(x_0 + h) - s(x_0)| < \varepsilon$.

Для любых x_0, h, n имеем

$|s(x_0 + h) - s(x_0)| = |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h) + s_n(x_0 + h) - s_n(x_0) + s_n(x_0) - s(x_0)| \leqslant$
$\leqslant |s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| + |s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| + |s_n(x_0) - s(x_0)|$

По определению равномерной сходимости мы можем взять такое n, что для любого x_0 будет выполняться неравенство $|s(x_0) - s_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Значит справедливы неравенства

$$|s(x_0 + h) - s_n(x_0 + h)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$|s(x_0) - s_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Итак, пусть мы зафиксировали некоторое n, тогда, поскольку функция $s_n(x)$ монотонна по условию, найдётся такое δ, что для любого $|h| < \delta$ выполняется неравенство $|s_n(x_0 + h) - s_n(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Таким образом

$$|s(x_0+h)-s(x_0)| \leqslant |s(x_0+h)-s_n(x_0+h)|+|s_n(x_0+h)-s_n(x_0)|+|s_n(x_0)-s(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon \ \blacksquare$$

62. Сформулируйте теорему Дини о монотонной сходимости. Приведите пример её применения для доказательства равномерной сходимости функциональной последовательности (с обоснованием).

Теорема Дини:

Пусть $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция, монотонная по n при всех $x \in [a,b]$, $f_n \xrightarrow{[a,b]} f$ и f — непрерывная, тогда $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$.

Пример.

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \ \ [a,b]=[1,2], \ \ f_n(x) \text{ — непрерывная},$$

$$f_{n+1}(x)-f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \ \ [\text{ Формула Тейлора для } (1+x)^\alpha \ ]$$

$$= 1+x+\frac{nx}{2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \left(1+x+\frac{(n-1)x}{2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{x}{2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) > 0 \text{ при } x>0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ f_n \text{ монотонна по } n \text{ при } x \in [a,b]$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x \ \Rightarrow \ f_n \xrightarrow{[a,b]} f, \ \ f(x)=e^x \text{ — непрерывная}$$

Выполнены условия теоремы, следовательно, $f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$.

Покажем, что f_n равномерно сходится к f на $[a,b]$:

$$\left(e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right)'_x = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1} > 0 \ \ \forall x \in [a,b] \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \sup_{[1,2]}\|f_n(x)-f(x)\| = |f_n(2)-f(2)| = \left|\left(1+\frac{2}{n}\right)^n - e^2\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \ \Rightarrow \ f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f.$$

63. Приведите контрпример, показывающий, что в формулировке теоремы Дини о равномерной сходимости нельзя отказаться от условия непрерывности предельной функции (с обоснованием).

Возьмем функциональную последовательность $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $D=[0,\,1]$ (семинарская задача 4.20). Если исключить условие непрерывности предельной функции, то остальные условия выполнятся, что означало бы равномерную сходимость f_n на D:

- $D=[0,\,1]$ — действительно компакт
- f_n монотонно убывает на D
- f_n непрерывна на D

При этом $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \implies f_n$ сходится неравномерно на D. Следовательно,

непрерывность предельной функции нужно обязательно учитывать при использовании теоремы Дини.

64. Покажите на примере как доказать неравномерность сходимости функциональной последовательности с помощью локализации особенности (с обоснованием).

$$f_n = \frac{1}{x^n}, \qquad D = (1,\ +\infty)$$

$$f_n \overset{D}{\nrightarrow} f = 0$$

$$f_n \to \begin{cases} 1, & x = 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Получили, что, если добавить точку, непрерывная функция стремится к разрывной $\implies$ локализовали особенность $\implies$ функциональная последовательность f_n сходится неравномерно.

65. Сформулировать и доказать теорему о почленном переходе к пределу в функциональной последовательности.

$-\infty \leq a < b \leq +\infty$, рассмотрим $D = (a;\, b),\ D = [a;\, b]$

Пусть $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f,\ \ x \in D,\ \ y_n = \lim\limits_{x\to x_0} f_n(x),\ \ \{y_n\}$ сходится к y

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y$,

т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} \underbrace{\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)}_{f(x)} = \underbrace{\lim\limits_{n\to\infty} \overbrace{\left(\lim\limits_{x\to x_0} f_n(x)\right)}^{y_n}}_{y}$

Доказательство. По определению предела сходящейся последовательности:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : |y - y_n| < \dfrac{\varepsilon}{3},\ \ \|f_n - f\| < \dfrac{\varepsilon}{3}\ \ \forall n \geq N,$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f_n(x) - y_n| < \dfrac{\varepsilon}{3}\quad \forall n$

Тогда

$|y - f_n(x)| \leq |y - y_n| + |y_n - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$

т.е. $f_n(x) \xrightarrow{x\to x_0} y$, что и требовалось доказать. ∎

66. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функциональной последовательности.

$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty,\ \ D = (a, b)$ или $D = [a, b]$.

Пусть f_n дифф. на мн-ве D, и $f_n' \overset{D}{\rightrightarrows} g,\ \exists\, c \in D : \{f_n(c)\}$ сходится.

Тогда $\exists$ такая предельная функция $f : f_n \xrightarrow{D} f$ (причем, если D ограничена, то $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$), что f дифф., и $f' = g$.

Говоря иначе, $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$.

67. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функциональной последовательности.

Утверждение 0.13.

$$-\infty < a < b < \infty,\ D = [a;b]$$

Пусть f_n непрерывна на $D, f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f(\implies f$ непр. на $D)$

Тогда: $\displaystyle\int_a^x f_n(t)dt \overset{D}{\rightrightarrows} \int_a^x f(t)dt,$

т.е. $\displaystyle\int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)dt$

68. Как определяются множества абсолютной и условной сходимости функционального ряда? Как они связаны с множеством сходимости?

Определение 6. Множество абсолютной сходимости – множество всех тех значений x, при которых ряд сходится абсолютно.

Определение 7. Множество условной сходимости – множество всех тех значений x, при которых ряд сходится условно.

Объединение множеств абсолютной сходимости и условной сходимости образует множество сходимости.

69. Дайте определение равномерной сходимости функционального ряда.

$D \subseteq \mathbb{R},\ a_n : D \to \mathbb{R}$. Рассмотрим функциональный ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$, и его ч.с. $S_N(x) := \displaystyle\sum_{n=1}^{N} a_n(x)$.

Говорят, что ряд сх-ся равномерно на D, если последовательность $\{S_N\}$ сх-ся равномерно на D.

70. Объединение множеств абсолютной сходимости и условной сходимости образует множество сходимости.

Теорема 0.14. *Если* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *равномерно сходится к сумме* $S(x)$*, то* $a_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0$

Доказательство. $S_n(x) = a_1(x) + \dots + a_n(x)$, $a_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$

$S_n \overset{D}{\rightrightarrows} S \implies a_n \overset{D}{\rightrightarrows} (S - S) = 0$ ■

71. Сформулируйте критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда.

Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ *сходится равномерно на* $D \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon),\ \forall n \geqslant N,\ \forall m$*:*

$$||a_n + a_{n+1} + \cdots + a_{n+m}|| < \varepsilon$$

Т.е. $|a_n(x) + a_{n+1}(x) + \cdots + a_{n+m}(x)| < \varepsilon\ \forall x \in D$*.*

72. Сформулируйте следствие критерия Коши – достаточное условие того, что функциональный ряд не является сходящимся равномерно.

Отрицание критерия Коши

$\exists\varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists m,n > N\ \exists x = x(N) \in E : |\sum\limits_{k=m}^{n} x_k| \geqslant \varepsilon \iff$ *ряд* $\sum x_n$ *сходится на* E *неравномерно*

73. Приведите пример функционального ряда, сходящегося на некотором множестве поточечно, но не равномерно (с обоснованием).

Пример.

$$\sum \frac{1}{1 + (x-n)^2}, \qquad D = \mathbb{R}$$

Очевидно, что $\sum \frac{1}{1 + (x-n)^2}$ сходится как гармонический ряд.

Проверим необходимое условие равномерной сходимости.

$$a_n(x) = \frac{1}{1 + (x-n)^2} \to 0$$

$$\text{Но } \sup_{x\in D}\left\|\frac{1}{1 + (x-n)^2}\right\| \underset{x_n = n}{\geqslant} \frac{1}{1} \nrightarrow 0$$

$\implies$ необходимое условие не выполняется $\implies$ функциональный ряд сходится неравномерно.

74. Сформулируйте мажорантный признак Вейерштрасса абсолютной и равномерной сходимости функционального ряда.

Утверждение 0.15 (Признак Вейерштрасса для функционального ряда.). *Если* $|a_n(x)| \leqslant b_n$ *при* $\forall n \geqslant n_0$, $\forall x \in D$, *а ряд* $\sum b_n$ *сходится, то* $\sum a_n(x)$ *сходится на* D *абсолютно и равномерно.*

75. Как применяются признаки Даламбера и Коши для исследования сходимости функционального ряда?

Признак Даламбера

Если $\exists q < 1 :\ |a_{n+1}(x)| \leq q \cdot |a_n(x)|$ *при* $\forall n \geq n_0,\ x \in D$, *причем* $a_{n0}(x)$ *ограничена на* D *(т.е.* $\|a_{n0}\| < \infty$*),* *то* $\sum a_n(x)$ *сходится на* D *абсолютно и равномерно.*

Радикальный признак Коши

Если $\sum u_n$ *— знакоположительный числовой ряд, и существует конечный предел*

$l = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$, *то*

1. $l < 1 \;\Rightarrow$ *ряд сходится*
2. $l > 1 \;\Rightarrow$ *ряд расходится*
3. $l = 1 \;\Rightarrow$ *необходимо дополнительное исследование*

Заметно, что признаки практически идентичны соответствующим признакам для числовых рядов.

77. Сформулируйте признак Лейбница равномерной сходимости знакочередующегося функционального ряда.

Рассмотрим знакочередующийся функциональный ряд: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n(x),\ u_n(x) \geqslant 0$ *на* D.

Если $u_n(x)\downarrow_{(n)}$ *и* $u_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0$, *то ряд сходится равномерно.*

78. Сформулируйте пр-к Дирихле равномерной сходимости функционального ряда.

Рассм. функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)\cdot b_n(x) = \circledast$.

Если $a_n(x)\downarrow_{(n)}$ *и* $a_n \overset{D}{\rightrightarrows} 0$, *и при этом* $\|b_1 + \dots + b_n\| \leqslant C = const$ *при всех* n, *то ряд* $\circledast$ *сх-ся равномерно на* D.

79. Сформулируйте признак Абеля равномерной сходимости функционального ряда.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x) = \circledast$.

Если $a_n(x)$ *мотонна по* n *(при* $\forall\, x \in D \subseteq \mathbb{R}$*) и* $\|a_n\| \leqslant C$ *при всех* n,

а ряд $\sum b_n(x)$ *сх-ся равномерно, то* $\circledast$ *сх-ся равномерно.*

80. Сформулируйте теорему о почленном переходе к пределу в функциональном ряде.

Теорема 0.16. $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $D = (a;b)$, $D = [a;b]$

Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ *сходится равномерно на* D, $x_0 \in D$, $\exists \lim\limits_{x\to x_0} c_n(x) = y_n$ *и* $\exists \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = y$.

Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0} c_n(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n = y$

81. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функционального ряда.

$-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty,\ D=(a;b),\ D=[a;b]$

Пусть $c_n(x)$ *дифференцируемы на* D *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n'(x)$ *сходится равномерно на* D.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)$ *сходится на* D *(а если* D *огр, то сходится равномерно), а его сумма будет дифференцируемой функцией на* D *и* $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(x)\right)' = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n'(x)$

82. Сформулируйте теорему о почленном интегрировании функционального ряда.

Пусть $-\infty < a < b < +\infty,\ D=(a;b),\ D=[a;b],\ c_n$ *равномерно сходится на* D *и имеет суммой функцию* $s(x)$

$\int_a^x \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(t)\right) dt = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_a^x c_n(t)dt$ *– сходится равномерно на* D *и имееет суммой функцию* $\int_a^x s_n$.

83. Что такое степенной ряд? Как определяются радиус и интервал сходимости степенного ряда? Что можно утверждать о характере сходимости ряда на интервале сходимости?

- *Степенным рядом называется функциональный ряд вида* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$, *где* c_n *— числовая последовательность и* $x_0 = const$.
- *Радиусом сходимости степенного ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n\,(x-x_0)^n$ *называется такое число* R, *равное* $\sup\left\{|x-x_0| : \text{ряд сходится}\right\} = \inf\left\{|x-x_0| : \text{ряд расходится}\right\}$ *(если ряд сходится всюду, то* $R=+\infty$*). Также по формуле Коши-Адамара* $R = \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}}$.
- *Интервалом сходимости степенного ряда* $\sum c_n\,(x-x_0)^n$ *с радиусом сходимости* R *называется интервал* $(x_0 - R,\ x_0+R)$.
- *Степенной ряд сходится равномерно на отрезке* $[x_0 - r,\ x_0 + r]$, *если* $0 \leqslant r < R$ *(неверно утверждать, что это происходит на интервале* $(x_0 - R,\ x_0+R)$*).*

84. Что можно утверждать про равномерную сходимость степенного ряда?

Пусть есть степенной ряд $\sum a_n\,(x-x_0)^n$, *его радиус сходимости равен* R. *Тогда в интервале* $(x_0 - R,\ x_0+R)$ *этот ряд сходится абсолютно и равномерно.*

85. Сформулировать и доказать теорему Абеля о сходимости степенного ряда.

Теорема Абеля

1) *Если степенной ряд* $\sum c_n(x-x_0)^n$ *сходится в точке* $x_1 \neq x_0$, *то он сходится при всех* $x : |x-x_0| < |x_1-x_0|$

2) *Если степенной ряд* $\sum c_n(x-x_0)^n$ *расходится в точке* $x_2 \neq x_0$, *то он расходится при всех* $x : |x-x_0| > |x_2-x_0|$

Доказательство. $\left|\sum\limits_{n=m}^{N} c_n(x-x_0)^n\right| = \left|\sum\limits_{n=m}^{N} c_n \cdot (x-x_0)^n \cdot \left(\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^n\right| \leq$

$$\sum_{n=m}^{N} \underbrace{|c_n \cdot (x-x_0)^n|}_{<\varepsilon\ \forall m \geq n_0} \cdot \underbrace{\left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|^n}_{q^n} \leq \varepsilon \cdot (q^m + \ldots + q^N) \leq \varepsilon \cdot q^m \cdot \frac{1}{1-q} \to 0$$

■

86. Докажите, что если степенной ряд $\sum c_n(x-x_0)^n$ расходится в точке x_1, то он расходится во всех точках x, для которых $|x-x_0| > |x_1-x_0|$.

Доказательство. Докажем, что если $\sum c_n(x-x_0)^n$ сходится в точке x_1, то он сходится во всех точках x, для которых $|x-x_0| < |x_1-x_0|$ $\circledast$. Из этого будет следовать сформулированное выше утверждение (методом от противного).

Итак, доказываем $\circledast$. (Будем рассматривать нетривиальный случай $x_1 \neq x_0$, иначе очевидно).

$$\left|\sum_{n=m}^{N} c_n(x-x_0)^n\right| = \left|\sum_{n=m}^{N} c_n \cdot (x_1-x_0)^n \cdot \left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^n\right| \leqslant \sum_{n=m}^{N} \left|c_n \cdot (x_1-x_0)^n\right| \cdot \left|\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|^n = \bigstar.$$

Заметим, что $\left|c_n \cdot (x_1-x_0)^n\right| < \varepsilon$ при $m \geqslant n_0(\varepsilon)$ (следствие из необходимого условия сходимости).

Далее, (при наших условиях) $\sum \left|\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right|^n$ образуют геом. прогрессию, где $q = \left|\dfrac{x-x_0}{x_1-x_0}\right| < 1$.

Так что $\bigstar \leqslant \varepsilon \cdot (q^m + \cdots + q^n) \leqslant \varepsilon \cdot q^m \cdot \dfrac{1}{1-q} \to 0$.

Почему к нулю? При $m \to \infty$ выражение $q^m \cdot \dfrac{1}{1-q}$ остается ограниченным одной и той же константой, а ε - это произвольная сколь угодно малая величина.

Итог: ряд сходится по критерию Коши.

■

87. Выведите формулу Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда.

Для степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n$, *где* $\{c_n\}$ *- числовая посл-ть,* $x_0 \in \mathbb{R}$ *фиксирован,* $x \in \mathbb{R}$ *- переменная, радиус сходимости* R *вычислим по формуле Коши-Адамара:*

$$\boxed{R = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}}}$$

Доказательство. В нашем ряде $a_n(x) = c_n \cdot (x - x_0)^n$. Применим радикальный признак Коши:

$$\sqrt[n]{|a_n(x)|} = \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x - x_0| \implies \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n(x)|} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \cdot |x - x_0| = |x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} \implies$$

если $|x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$, то ряд сх-ся;

если $|x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$, то ряд расх-ся.

Введем $R := \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}}$.

Из полученных результатов ясно, что $|x - x_0| < R \iff |x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} < 1$ и ряд сходится;

$|x - x_0| > R \iff |x - x_0| \cdot \overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|} > 1$ и ряд расходится. А это определение радиуса сходимости.

■

88. Приведите примеры степенных рядов, радиус сходимости R которых: $R \in (0, +\infty)$, $R = 0$, $R = +\infty$.

- *Возьмем* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$. *Найти радиус сходимости этого ряда можно как через сумму, так и по формуле Коши-Адамара:*

  ◦ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 \cdot (1 - x^n)}{1 - x}$ — *сходится только при* $|x| < 1$, $S = \dfrac{1}{1 - x} \implies R = 1$

  ◦ $R = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}} = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{1}} = 1$

  Аналогично $R = 1$ *для ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (x - x_0)^n$, *где* $x_0 = const$.

- *Пусть дан ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n$. *Найдем радиус аналогично предыдущему пункту:*

  ◦ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nx^n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots = (x)' + \left(x^2\right)' + \left(x^3\right)' + \ldots = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x \cdot (1 - x^n)}{1 - x}\right)' =$

  $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)\, x^n + 1}{(1 - x)^2}$ — *сходится при* $|x| < 1, S = \dfrac{1}{(1 - x)^2} \implies R = 1$

  ◦ $R = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}} = \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{n}} = 1$, *так как* $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

  Аналогично $R = 1$ *для ряда* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n(x - x_0)^n$, *где* $x_0 = const$.

- *Рассмотрим степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\, n!\,(x-x_0)^n$*, найдем радиус:* $R = \dfrac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|(-1)^n\, n!|}} = \dfrac{1}{\infty} = 0.$

  То есть ряд сходится только при $x = x_0 \implies S = 0+0+\ldots = 0$*, иначе факториал растет быстрее экспоненты и потому ряд разойдется.*

- *Степенные ряды с радиусом сходимости* $R = +\infty$ *можно найти в билетах 100–102 — например,* $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$, $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

89. Пусть R – радиус сходимости степенного ряда. Сформулируйте и докажите теорему о равномерной сходимости степенного ряда на $[0; R]$.

Теорема 0.17. *Пусть* $\sum c_n R^n$ *сходится. Тогда степенной ряд* $\sum c_n(x-x_0)^n$ *сходится равномерно на* $[x_0, x_0+R]$

Доказательство.
В начале доказательства хочу заметить, что доказываю не совсем то, что в вопросе просят, однако это вроде ошибка Маевского, а не моя. Для того, чтобы всё было, как вопросе, возьмите $x_0 = 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(c_n R^n)\cdot\left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(c_n R^n)$ – сходится равномерно (от x не зависит)

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{x-x_0}{R}\right)^n \downarrow_{(n)} \quad \forall x \in [x_0, x_0+R]$

$\Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$ – сходится равномерно на $[x_0, x_0+R]$ по признаку Абеля ■

90. Пусть R — радиус сходимости степенного ряда. В каком случае можно утверждать, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n R^n = \lim\limits_{x\to R-0}\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$?

В случае если $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n R^n$.

Доказательство.

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n R^n) \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n \text{ сход. по условию; не зависит от } x \implies \text{ сход. равномерно} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-x_0}{R}\right)^n \text{ монотонно убывает } \forall x \in [x_0, x_0+R] \end{array}\right\} \text{ряд сходится равномерно по Абелю}$$

Так как сходится равномерно, можно применить предел: $\lim\limits_{x\to x_0+R-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n R^n$

см. условие, судя по пределу $x_0 = 0 \implies$ все верно.

■

91. Пусть R — радиус сходимости степенного ряда. В каком случае можно утверждать, что степенной ряд сходится неравномерно на $[0; R)$? Обоснуйте ответ.

Пусть ряд $\sum c_n R^n$ расходится. Тогда ряд $\sum c_n (x-x_0)^n$ не может равномерно сходиться на $[x_0; x_0+R)$.

Формально:

$$\left.\begin{array}{l} S_N(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} c_n (x-x_0)^n \text{ — непр. на } [x_0, x_0+R] \\ S_N(x) \xrightarrow{[x_0, x_0+R)} S(x) \\ S_N(x_0+R) \text{ — расходится} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{сходимость на } [x_0, x_0+R) \text{ неравномерная,}$$

т.к. $\lim\limits_{x\to x_0+R} \sum c_n (x-x_0)^n = \sum c_n R^n$ *расходится (воспользовались локализацией особенности $x \to x_0+R$).*

92. Что можно утверждать о радиусе сходимости степенного ряда, полученного почленным дифференцированием исходного ряда? Обоснуйте ответ.

Радиус сходимости при дифференцировании степенного ряда не изменяется.

Доказательство. Пусть дан степенной ряд $\sum c_n (x-x_0)^n$ с радиусом сходимости R. Утверждается (доказательство в пункте 94), что

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (x-x_0)^n, \text{ где } c'_n = c_{n+1}(n+1)$$

По формуле Коши-Адамара радиус R' сходимости нового ряда равен

$$\frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c'_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_{n+1}|}\cdot\sqrt[n]{n+1}} = \frac{1}{\overline{\lim}\sqrt[n]{|c_n|}} = R, \text{ так как } \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

■

93. Что можно утверждать о радиусе сходимости степенного ряда, полученного почленным интегрировании исходного ряда? Обоснуйте ответ.

Радиус сходимости при интегрировании степенного ряда не изменяется.

Доказательство. Пусть дан степенной ряд $\sum c_n (x-x_0)^n$ с радиусом сходимости R. Утверждается (доказательство в пункте 95), что

$$\int_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-x_0)^n \right) dt \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c'_n (x-x_0)^n, \text{ где } c'_n = \begin{cases} 0, & n=0 \\ \frac{c_{n-1}}{n}, & n>0 \end{cases}$$

По формуле Коши-Адамара радиус R' сходимости нового ряда равен

$$\frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c'_n|}} = \frac{\underline{\lim} \sqrt[n]{n}}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|c_n|}} = R$$

■

94. Сформулируйте и докажите теорему о почленном дифференцировании степенного ряда.

Теорема 0.18 (Почленное дифференцирование степенного ряда.). *$\sum c_n (x-x_0)^n$, $R > 0$ — его радиус сходимости.*

При почленном дифференцировании получаем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (x-)^{n-1}$.

Его радиус сходимости равен радиусу сходимости исходного ряда, то есть он сходится равномерно при $|x-x_0| \leqslant r < R$.

Доказательство. Пусть дан ряд $\sum a_n x^n = f$. Ряд, составленный из производных — $\sum a_n n x^{n-1} = f'$. Покажем по формуле Коши-Адамара, что радиусы сходимости исходного ряда и ряда, составленного из производных, равны.

$$\frac{1}{R_f} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\frac{1}{R'_f} = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n| \cdot n} = \left[\sqrt[n]{n} \to 1 \right] = \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R_f}$$

■

95. Сформулировать и доказать теорему о почленном интегрировании степенного ряда.

$$\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-x_0)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n} (x-x_0)^n$$

Доказательство. $\displaystyle\int\limits_{x_0}^{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-x_0)^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{x_0}^{x} c_n (t-x_0)^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (t-x_0)^{n+1} \Big|_{x_0}^{x} =$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x_0-x_0)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n-1}}{n}(x-x_0)^{n} \qquad \blacksquare$$

96. Запишите формулу Тейлора для бесконечно дифференцируемой функции с остаточным членом в формах Лагранжа и Коши.

Если функция $f(x)$ беск. дифф. в точке x_0, то $f(x)$ можно сопоставить в соотв. ее ряд Тейлора:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$. *При этом* $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + r_N(x)$.

Фор-ла Лагранжа: $r_N(x) = \dfrac{f^{(N+1)}(x_0 + \Theta(x-x_0))}{(N+1)!}(x-x_0)^{N+1},\ \Theta \in (0,1)$.

Фор-ла Коши: $r_N(x) = \dfrac{f^{(N+1)}(x_0 + \Theta(x-x_0))}{N!}(1-\Theta)^N(x-x_0)^{N+1},\ \Theta \in (0,1)$.

97. Сформулируйте и докажите утверждение о единственности разложения функции в степенной ряд.

Если $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (x-x_0)^n,\ |x-x_0| < \delta$ *(говоря иначе, функция представлена степенным рядом в некой окр-ти* x_0*); то этот степенной ряд - ее ряд Тейлора.*

Доказательство.

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k} = \sum_{n=k}^{\infty} c_n \cdot n \cdot (n-1) \dots (n-k+1) \cdot (x-x_0)^{n-k} \implies$$

$$f^{(k)}(x_0) = c_k \cdot k! \implies c_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

(Мы заменили в первом переходе нижнюю границу суммирования с нуля на k, так как все предыдущие слагаемые зануляются)

То есть функция может быть представлена в виде степенного ряда единственным образом - и это будет ее р.Т.

$\blacksquare$

98. Что такое функция, аналитическая в данной точке? Каково соотношение между понятиями бесконечной дифференцируемости и аналитичности?

- *Функция $f(x)$ называется бесконечно дифференцируемой в точке x_0, если $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists f^{(n)}(x_0)$.*
- *Функция $f(x)$ называется аналитической в точке x_0, если она представима степенным рядом в окрестности этой точки, то есть $\exists \delta > 0\ \ \forall x \in U_\delta(x_0)\ \ f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$. Так как степенные ряды бесконечно диф-*

ференцируемы, то из аналитичности функции в точке следует бесконечная дифференцируемость в этой же точке. Обратное утверждение неверно:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \text{ — бесконечно дифференцируема: } f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = 0 \implies$$

$$\implies 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \ldots = 0 \text{ — (единственное!) разложение по Тейлору} \implies \text{ аналитичность не выполняется.}$$

99. Приведите пример бесконечной дифференцируемой функции, не являющейся аналитической.

Пример. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$

Такая функция бесконечно дифференцируема, но все её производные в нуле равны 0:
$f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \ldots = 0$
Получается, что её ряд Тейлора при $x_0 = 0 : 0 + 0x + 0x^2 + \ldots = 0$
То есть, такая функция не является аналитической.

100. Запишите разложения в степенной ряд с центром в нуле для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$. Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию? Обоснуйте ответ.

1. $$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad R = \infty$$

   Докажем равенство. Оценим остаток по формуле Лагранжа.

   $$r_N(x) = \underbrace{e^{\Theta x}}_{\text{const}} \cdot \underbrace{\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}}_{\to 0 \text{ при } \forall x}, \qquad \Theta \in (0;\ 1)$$

   Множество сходимости — $\mathbb{R}$, на множестве $\mathbb{R}$ сумма ряда представляет собой исходную функцию.

2. Для $\cos x$ аналогично:

   $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad R = \infty$$

3. Для $\sin x$ аналогично:

   $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad x \in \mathbb{R}, \quad R = \infty$$

101. Запишите разложения в степенной ряд с центром в нуле для функций $(1 + x)^p$. Каково множество сходимости ряда? На каком множестве сумма ряда представляет собой исходную функцию? Обоснуйте ответ.

$(1+x)^p = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(p)_n}{n!} x^n$, где $(p_n) = p(p-1)\ldots(p-n+1)$

Радиус сходимости у этого ряда $R = 1$. Исследуем остаточный член ряда Тейлора в форме Коши.

$$r_N(x) = \frac{p(p-1)\dots(p-N)\cdot(1+\theta x)^{p-N-1}}{N!}\cdot(1-\theta)^N\cdot x^{N+1} = \left(\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-N)}{N!}x^N\right)\cdot px\cdot(1+\theta x)^{p-1}\cdot\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^N \xrightarrow{N\to\infty}$$

0 при $\forall x \in (-1;1)$

Первый множитель стремится к 0, как общий член сходящегося ряда, взятого для p-1. Остальное написано в Фихтенгольце.