

Семинарский лист 2.3

Анастасия Григорьева
[Telegram](#)

Денис Козлов
[Telegram](#)

Елизавета Орешонок
[Telegram](#)

Ира Голобородько
[Telegram](#)

Версия от 20.11.2020 22:40

Предполагая функцию f непрерывной на D , приведите двойной интеграл от f по D к повторному двумя способами: по x затем по y и наоборот.

Задача 1

$$D = \{(x, y) \mid x, y \in [0; 1], x^2 + y^2 \geq 1\}$$

Множество точек, находящихся в квадрате, ограниченном прямыми $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$, за пределами круга радиуса 1 с центром в точке $(0, 0)$:

Интеграл по x затем по y :

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 dx = \int_0^1 dy \cdot x \Big|_{\sqrt{1-y^2}}^1 = \int_0^1 dy (1 - \sqrt{1-y^2}) = \int_0^1 dy - \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = 1 - \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy$$

$$\text{Замена: } y = \sin u \Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sqrt{1-\sin^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2u + 1}{2} du =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2u du + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{1}{4} \sin 2u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Тогда:

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Очевидно, что повторный интеграл, взятый в другом порядке, будет вычисляться точно так же:

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 dy = \int_0^1 dy \cdot y \Big|_{\sqrt{1-x^2}}^1 = \int_0^1 dx (1 - \sqrt{1-x^2}) = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $1 - \frac{\pi}{4}$.

Задача 2

$$D = \{(x, y) \mid x, y \in [0; 1], (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1\}$$

Множество точек, находящихся в квадрате, ограниченном прямыми $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$, за пределами круга радиуса 1 с центром в точке $(1, 1)$:

Интеграл по x затем по y :

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} dx = \int_0^1 dy \cdot x \Big|_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} = \int_0^1 dy \left(\sqrt{1-(y-1)^2} + 1 \right) = \int_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2} dy + 1$$

$$\begin{aligned} \text{Замена: } (y-1) = \sin u &\Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sqrt{1-\sin^2 u} du = \int_0^0 \cos^2 u du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos 2u + 1}{2} du = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos 2u du + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 du = \frac{1}{4} \sin 2u \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \frac{1}{2} u \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Тогда:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Очевидно, что повторный интеграл, взятый в другом порядке, будет вычисляться точно так же:

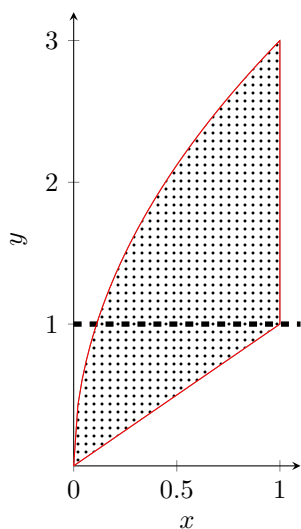
$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}+1} dy = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx + 1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $1 - \frac{\pi}{4}$.

Предполагая функцию f непрерывной на D , измените порядок интегрирования в повторном интеграле

Задача 6

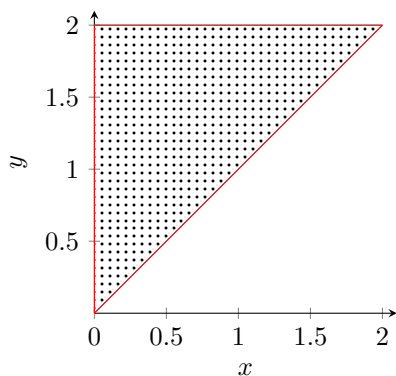
$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^y f(x, y) dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^1 f(x, y) dx &= \text{пристально смотрим на рисунок} = \\ &= \int_0^1 \int_x^{3\sqrt{x}} f(x, y) dx dy = \int_0^1 dx \int_x^{3\sqrt{x}} f(x, y) dy \end{aligned}$$



Изменив порядок интегрирования, вычислите интеграл

Задача 10

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 x^2 dx \int_x^2 \ln(1+y^2) dy &= \text{пристально смотрим на рисунок} = \int_0^2 \int_0^y x^2 \ln(1+y^2) dx dy = \\
 &= \int_0^2 \ln(1+y^2) dy \int_0^y x^2 dx = \int_0^2 \ln(1+y^2) dy \left(\frac{x^3}{3} \Big|_0^y \right) = \frac{1}{3} \int_0^2 \ln(1+y^2) y^3 dy = \\
 &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln(1+y^2) \Rightarrow u' = \frac{2y}{1+y^2} \\ v' = y^3 \Rightarrow v = \frac{y^4}{4} \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \ln(1+y^2) \frac{y^4}{4} \Big|_0^2 - \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{y^4}{4} \frac{2y}{1+y^2} dy = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+y^2 \\ dt = 2y dy \\ dy = \frac{dt}{2y} \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{1}{3} (4 \ln(5) - 0) - \frac{1}{6} \int_1^5 \frac{y^5}{t} \frac{dt}{2y} = \frac{4}{3} \ln(5) - \frac{1}{12} \int_1^5 \frac{(y^4 + 2y^2 + 1) - (2y^2 - 2) + 1}{t} dt = \\
 &= \frac{4}{3} \ln(5) - \frac{1}{12} \int_1^5 \frac{t^2 - 2t + 1}{t} dt = \frac{4}{3} \ln(5) - \frac{1}{12} \left(\int_1^5 t dt - 2 \int_1^5 dt + \int_1^5 \frac{dt}{t} \right) = \\
 &= \frac{4}{3} \ln(5) - \frac{1}{12} \left(\left(\frac{25}{2} - \frac{1}{2} \right) - 2(5-1) + \ln(|t|) \Big|_1^5 \right) = \frac{4}{3} \ln(5) - \frac{1}{12} (12 - 8 + \ln(5)) = \\
 &= \frac{4}{3} \ln(5) - \frac{1}{3} - \frac{\ln(5)}{12} = \frac{5 \ln(5)}{4} - \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$



Вычислите интеграл

Задача 14

Предполагая функцию f непрерывной на D , измените порядок интегрирования в повторном интеграле всеми возможными способами

Задача 18