Семинарский лист 2.5

Денис Козлов
Telegram

Елизавета Орешонок
Telegram

Ира Голобородько
Telegram

Версия от 04.12.2020 23:37

Задайте в полярных координатах множество D, заданное неравенствами в декартовых координатах. Предполагая функцию f непрерывной на D, преобразуйте интеграл в полярных координатах к повторному.

Задача 1

$$x^2 + y^2 \leq 2x$$

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D := r^2 \leq 2\,r\cos\varphi \Leftrightarrow r(r - 2\cos\varphi) \leq 0 \Leftrightarrow r \in [0; 2\cos\varphi]\,, \cos\varphi \geq 0$$

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\,dr = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr =$$

$$\left\{ r^2 \leq 2\,r\cos\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi \geq \frac{r}{2} \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\arccos\frac{r}{2}; \arccos\frac{r}{2}\right] \right\}$$

$$= \int\limits_0^2 r\,dr \int\limits_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi$$

Задача 2

$$(x-1)^2 + y^2 \le 1,\ x^2 + y^2 \ge 1$$

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D := \left\{ \begin{array}{rcl} r^2 & \le & 2\,r\cos\varphi, \\ r^2 & \ge & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r & \in & [0; 2\cos\varphi]\,, \\ \cos\varphi & \ge & 0, \\ r & \ge & 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} r & \in & [1; 2\cos\varphi]\,, \\ \cos\varphi & \ge & 1/2, \end{array} \right.$$

$$\cos\varphi \ge 1/2 \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$$

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi\,dr = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{1}^{2\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr =$$

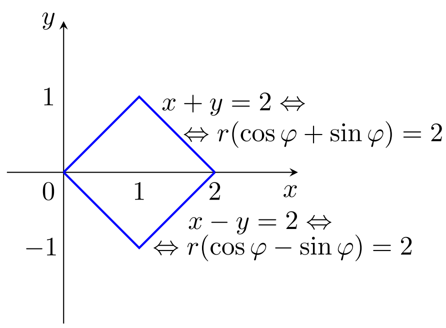
$$\left\{ r^2 \le 2\,r\cos\varphi \Leftrightarrow \cos\varphi \ge \frac{r}{2} \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\arccos\frac{r}{2}; \arccos\frac{r}{2}\right] \right\}$$

$$= \int\limits_{1}^{2} r\,dr \int\limits_{-\arccos\frac{r}{2}}^{\arccos\frac{r}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi$$

Задача 4

$$|x-1| + |y| \le 1$$

Область представляет собой ромб с центром в точке $(1, 0)$
Из рисунка видно, что угол φ лежит в пределах $[-\pi/4; \pi/4]$
Можно определить и отрезки для r :



$$r \in \left\{ \begin{array}{ll} \left[0; \dfrac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}\right], & \varphi \ge 0 \\ \left[0; \dfrac{2}{\cos\varphi - \sin\varphi}\right], & \varphi < 0 \end{array} \right.$$

$$\iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi\,d\varphi\,dr = \int\limits_{-\pi/4}^{0} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{2}{\cos\varphi - \sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr + \int\limits_{0}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr =$$

$$= \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{\frac{2}{\cos\varphi + |\sin\varphi|}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr$$

При $r \in [0; \sqrt{2}]$ все углы от $-\pi/4$ до $\pi/4$ лежит в нужной области

При $r \in (\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$ необходимо $2 \ge r(\cos\varphi + |\sin\varphi|)$
Так как относительно Oy все симметрично, найдем границу при $\varphi > 0$:
из геометрии рисунка (треугольников и всего такого)

$$r\cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \frac{\sqrt{2}}{r} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} - \arccos\frac{\sqrt{2}}{r}$$

Повторный интеграл с найденными границами:

$$\int\limits_{0}^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{-\pi/4}^{\pi/4} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi + \int\limits_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{\arccos\frac{\sqrt{2}}{r} - \frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{r}{\sqrt{2}}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi$$

Задача 6

D — множество, лежащее вне окружности $x^2+y^2=1$ и внутри петель кривой $(x^2+y^2)^2 = 2(x^2-y^2)$

Так как область лежит вне окружности $x^2+y^2=1$, в полярных координатах $r > 1$.

Определим условия, необходимые и достаточные для того, чтобы координаты лежали внутри петель кривой:
$(x^2+y^2)^2 = 2\,(x^2-y^2) \Leftrightarrow r^4 = 2\,r^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \Leftrightarrow r^2 = 2\cos 2\,\varphi$

Тогда точка с полярными координатами (r,φ) лежит внутри петель, если $r^2 \le 2\cos 2\,\varphi \Leftrightarrow \cos 2\,\varphi \ge \dfrac{r^2}{2} \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{r^2}{2}; \dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{r^2}{2}\right]$

Повторный интеграл: $\displaystyle\int\limits_1^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{-\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{2}}^{\frac{1}{2}\arccos\frac{r^2}{2}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi$

Перейдя к полярным координатам, вычислите интеграл.

Задача 8

$$\iint\limits_D \frac{xdxdy}{\sqrt{4-x^2-y^2}},\quad D=\left\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2x\right\}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \Rightarrow D = \{(r,\varphi)|r\leqslant 2\cos\varphi\}$$

$$\iint\limits_D \frac{r\cos\varphi}{\sqrt{4-r^2}} rd\varphi dr = \int\limits_0^2 dr \int\limits_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} \frac{r^2\cos\varphi}{\sqrt{4-r^2}}d\varphi = \int\limits_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}dr \int\limits_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} \cos\varphi d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}dr\, \sin\varphi|_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} = \int\limits_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}\sqrt{4-r^2}dr = \int_0^2 r^2 dr = \frac{8}{3}$$

Перейдите к переменным, в которых область интегрирования имеет вид прямоугольника, и вычислите интеграл.

Задача 10

$$\iint\limits_D xy(x+y)dxdy, \qquad D = \left\{(x,y)\Big| -1 \leqslant x-y \leqslant 1, \frac{1}{x} \leqslant y \leqslant \frac{2}{x}\right\}$$

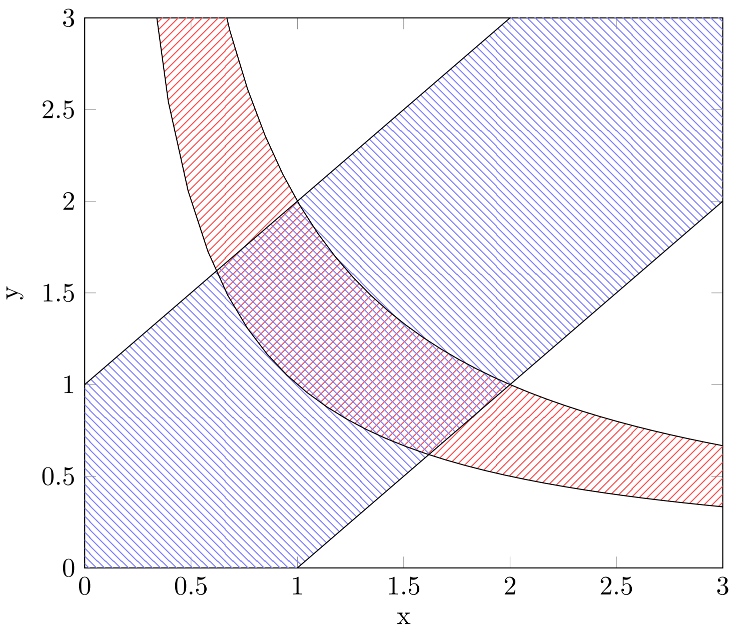
$$\begin{cases} u = x-y & u \in [-1,1] \\ v = xy & v \in [1,2] \end{cases} \Rightarrow x = u+y \Rightarrow v = uy + y^2 \Rightarrow y = \frac{-u \pm \sqrt{u^2+4v}}{2}$$

$u^2+4v \geqslant 4 \Rightarrow \sqrt{u^2+4v} \geqslant 2 \Rightarrow y_- \leqslant \dfrac{-u-2}{2} \Rightarrow y_- < 0$. По картинке $y > 0 \Rightarrow y = y_+ = \dfrac{-u+\sqrt{u^2+4v}}{2}$

$$x = u + y = u + \frac{-u+\sqrt{u^2+4v}}{2} = \frac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2} \\ y = \dfrac{-u+\sqrt{u^2+4v}}{2} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} + \dfrac{u}{2\sqrt{u^2+4v}} & \dfrac{1}{\sqrt{u^2+4v}} \\ -\dfrac{1}{2} + \dfrac{u}{2\sqrt{u^2+4v}} & \dfrac{1}{\sqrt{u^2+4v}} \end{pmatrix} \qquad |J| = \frac{1}{\sqrt{u^2+4v}}$$

$$\int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{1}^{2} v\left(\frac{u+\sqrt{u^2+4v}}{2} + \frac{-u+\sqrt{u^2+4v}}{2}\right)|J|dv = \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{1}^{2} v\frac{\sqrt{u^2+4v}}{\sqrt{u^2+4v}}dv = \int\limits_{-1}^{1} du \int\limits_{1}^{2} vdv = 3$$



Задайте в цилиндрических координатах множество D, заданное неравенствами в декартовых координатах. Перdполагаю функцию f непрерывной на D, преобразуйте интеграл в цилиндрических координатах к повторному.

Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислите интеграл.

Задача 15

Задайте в сферических координатах множество D, заданное неравенствами в декартовых координатах. Предполагая функцию f непрерывной на D, преобразуйте интеграл в сферических координатах к повторному.

Перейдя к сферическим координатам, вычислите интеграл.