Семинарский лист 3

Александр Богданов Telegram | Алиса Вернигор Telegram | Василий Шныпко Telegram | Денис Козлов Telegram

Иван Пешехонов Telegram | Иван Добросовестнов Telegram | Елизавета Орешонок Telegram | Никита Насонков Telegram

Версия от 26.09.2020 13:33

Применяя признак Вейрштрасса, покажите, что ряд сходится абсолютно.

Задача 1

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos n^2}{\sqrt{n^3+3}} \text{ — сходится по признаку сравнения}$$

$$|a_n| = \frac{|\cos n^2|}{\sqrt{n^3+3}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n^3+3}} \sim \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{n^{3/2}} \text{ — сходящийся ряд}$$

Задача 2

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^{\ln n}}{2^{\sqrt{n}}} \qquad |a_n| = \frac{n^{\ln n}}{2^{\sqrt{n}}} = \exp \underbrace{\left[\ln^2 n - \sqrt{n} \ln 2\right]}_{b_n} = e^{b_n}$$

Рассмотрим b_n. Заметим, что $\ln n = o(n^p),\ n \to \inf,\ p > 0$. В нашем случае $p_n = \frac{1}{2}$, $\ln^2 n = o(\sqrt{n}) \Rightarrow b_n \sim -\sqrt{n} \ln 2$

Оценим b_n — $\sqrt{n} \ln 2 \geqslant 2 \ln n \Rightarrow -\sqrt{n} \ln 2 \leqslant -2 \ln n$

Подставим эту оценку для b_n — $e^{b_n} \leqslant e^{-2 \ln n} = \frac{1}{n^2}$

$|a_n|$ мажорируется $\frac{1}{n^2} \Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_n|$ сходится по признаку сравнения

Задача 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2^n + 3^n) \sin n}{2^n + n^2 \cdot 3^n} \qquad |a_n| \leqslant \frac{2^n + 3^n}{2^n + n^2 \cdot 3^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + n^2} \leqslant \frac{2}{n^2} \text{ — сходится}$$

Применяя признак Лейбница, покажите, что ряд сходится.

4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} \text{ — знакочередующийся ряд, } \quad a_n = \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5}, \quad |a_n| = \frac{2n-1}{n^2+3n+5}$$

Проверим, что $|a_n|$ монотонно убывает. Рассмотрим $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2+3x+5}$:

$$f'(x) = \frac{2(x^2+3x+5)-(2x-1)(2x+3)}{(x^2+3x+5)^2} = \frac{2x^2+6x+10-4x^2-4x+3}{(x^2+3x+5)^2} = -\frac{2x^2-2x-3}{(x^2+3x+5)^2} =$$

$$= -\frac{2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{2}}{(x^2+3x+5)^2} < 0 \text{ при } x \geq 2 \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ |a_n| \searrow$ начиная с $n = 2$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\dfrac{1}{n}}{n+3+\dfrac{5}{n}} = 0$$

$$\begin{cases} \text{ряд знакочередующийся,} \\ |a_n| > |a_{n+1}| \ \forall n \geq 2, \\ \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2+3n+5} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2+3n+5} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ — расходится по признаку сравнения } \Rightarrow \text{ абсолютной сходимости нет.}$$

5

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} \text{ — знакочередующийся ряд, } \quad a_n = \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}, \quad |a_n| = \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}}$$

Проверим, что $|a_n|$ монотонно убывает. Рассмотрим $f(x) = \dfrac{\ln^2 x}{\sqrt{2x+3}}$:

$$f'(x) = \frac{\dfrac{2\ln x}{x}\sqrt{2x+3} - \ln^2 x \dfrac{2}{2\sqrt{2x+3}}}{2x+3} = \frac{\ln x(4x+6-x\ln x)}{x(2x+2)^{3/2}} = -\frac{\ln x}{(2x+2)^{3/2}}\left(\ln x - 4 - \frac{6}{x}\right) < 0 \text{ при } x \geq 50 \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ |a_n| \searrow$ начиная с $n = 50$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} = 0, \ \text{ т.к. } \ln^2 n = o(\sqrt{n})$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{ряд знакочередующийся,}\\ |a_n| > |a_{n+1}|\ \forall n \geq 50,\\ \lim_{n\to\infty}|a_n| = 0\end{array}\right. \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} \text{ сходится условно по признаку Лейбница.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^2 n}{\sqrt{2n+3}} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ — расходится по признаку сравнения } \Rightarrow \text{ абсолютной сходимости нет.}$$

6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{3n-2} \qquad a_n = \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{3n-2} \text{ очевидно знакочередующийся} \qquad |a_n| = \frac{\sqrt{n}}{3n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \qquad |a_n|' = \frac{\frac{3n-2}{2\sqrt{n}} - 3\sqrt{n}}{(3n-2)^2} = \frac{3n-2-6n}{2\sqrt{n}(3n-2)^2} = -\frac{3n+2}{2\sqrt{n}(3n-2)^2} < 0\ \forall n > 0 \implies \text{ монотонно убывает}$$

По признаку Лейбница ряд сходится

Применяя группировку членов постоянного знака, покажите, что ряд расходится.

7

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} \text{ — знакопеременный ряд}$$

При $2k \leq [\ln n] < 2k+1 \ \Leftrightarrow\ [e^{2k}] \leq n < [e^{2k+1}]$ n-е слагаемое положительно.

Перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1}$$

Оценим сумму группы $A_k = \displaystyle\sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1}$ снизу:

$$\sum_{n=[e^{2k}]}^{[e^{2k+1}]-1} \frac{1}{2n+1} \geq \frac{1}{2[e^{2k+1}]-1}\left([e^{2k+1}] - 1 - [e^{2k}]\right) \geq \frac{2[e^{2k}] - [e^{2k}] - 1}{2[e^{2k+1}]-1} \geq \frac{[e^{2k}]-1}{2[e^{2k+1}]-1} \geq \frac{[e^{2k+1}]}{2[e^{2k+1}]} = \frac{1}{2} \neq 0$$

$$\lim_{k\to\infty} |A_k| = \frac{1}{2} \neq 0 \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln n]}}{2n+1} \text{ тоже расходится}$$

8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\left[\sqrt{n}\right]}}{\sqrt{n}+2} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k$$

$$\left[\sqrt{n}\right] = k \implies k \leqslant \sqrt{n} < k+1 \implies k^2 \leqslant n < (k+1)^2 \qquad A_k = (-1)^k \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{n}+2}$$

$$|A_k| = \sum_{n=k^2}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{\sqrt{n}+2} \geqslant \frac{(k+1)^2 - 1 - k^2 + 1}{\sqrt{(k+1)^2 - 1} + 2} \geqslant \frac{2k+1}{\sqrt{(k+1)^2}+2} = \frac{2k+1}{k+3} \to 2 \neq 0 \implies$$

$\implies$ не выполняется необходимое условие сходимости.

9

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}} \text{ — знакопеременный ряд}$$

При $2k \leq [\sqrt[3]{n}] < 2k+1 \ \Leftrightarrow\ 8k^3 \leq n < (2k+1)^3$: n-е слагаемое положительно.

Перестановка:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}} = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$$

Оценим сумму группы $A_k = \displaystyle\sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$ снизу:

$$\sum_{n=8k^3}^{8k^3+12k^2+6k} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{((2k+1)^3-1)^2+3}}(12k^2+6k) = \frac{6k(2k+1)}{\sqrt[3]{(2k+1)^6 - 2(2k+1)^3 + 4}} =$$

$$= \frac{6k}{\sqrt[3]{(2k+1)^3 - 2 + \dfrac{4}{(2k+1)^3}}} \geq \frac{6k}{2k+1} \text{ (при } k \geq 1) \geq 3 \neq 0$$

$$\lim_{k\to\infty} |A_k| = 3 \neq 0 \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{\infty} A_k \text{ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости } \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt[3]{n}]}}{\sqrt[3]{n^2+3}} \text{ тоже расходится}$$

10

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \ln n}{n+2} \text{ — знакопеременный ряд}$$

При $2\pi k < \ln n < 2\pi k + \pi \Leftrightarrow [e^{2\pi k}] + 1 \le n < [e^{2\pi k+\pi}]$: n-е слагаемое положительно.

Оценим сумму группы $A_k = \sum\limits_{n=[e^{2\pi k}]+1}^{[e^{2\pi k+\pi}]-1} \dfrac{\sin \ln n}{n+2}$ снизу:

при $2\pi k + \dfrac{\pi}{6} \le \ln n \le 2\pi k + \dfrac{5\pi}{6} \Leftrightarrow [e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}] + 1 \le n \le [e^{2\pi k+\frac{5\pi}{6}}]$: $\sin \ln n \ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_k \ge \sum_{n=[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}]+1}^{[e^{2\pi k+\frac{5\pi}{6}}]} \frac{1}{2(n+2)} \ge \frac{1}{2([e^{2\pi k+\frac{5\pi}{6}}]+2)}([e^{2\pi k+\frac{5\pi}{6}}] - [e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}] - 1)$$

$$8[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}] < [e^{2\pi k+\frac{5\pi}{6}}] < 9[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}] \Rightarrow A_k \ge \frac{7[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}] - 1}{2(9[e^{2\pi k+\frac{\pi}{6}}]+2)} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{7}{18} \ne 0$$

$\lim\limits_{k\to\infty} |A_k| \ge \dfrac{7}{18} \ne 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \ln n}{n+2}$ тоже расходится

11

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \pi\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}$ — знакопеременный ряд

При $2\pi k < \pi\sqrt{n} < 2\pi k + \pi \Leftrightarrow 4k^2 < n < (2k+1)^2$: n-е слагаемое положительно.

Оценим сумму группы $A_k = \sum\limits_{n=4k^2+1}^{4k^2+4k} \dfrac{\sin \pi\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}$ снизу:

при $2\pi k + \dfrac{\pi}{6} \le \pi\sqrt{n} \le 2\pi k + \dfrac{5\pi}{6} \Leftrightarrow \left(2k + \dfrac{1}{6}\right)^2 \le n \le \left(2k + \dfrac{5}{6}\right)^2$: $\sin \pi\sqrt{n} \ge \dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow A_k \ge \sum_{n=\left(2k+\frac{1}{6}\right)^2}^{(2k+\frac{5}{6})^2} \frac{1}{2\sqrt{2n+1}} \ge \frac{1}{2\sqrt{2(2k+\frac{5}{6})^2+1}} \left(\left(2k + \frac{5}{6}\right)^2 - \left(2k + \frac{1}{6}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{\frac{2}{3}(4k+1)}{2\sqrt{8k^2 + \frac{20}{3}k + \frac{34}{9}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4 + \frac{1}{k}}{\sqrt{8 + \frac{20}{3k} + \frac{34}{9k^2}}} \xrightarrow{k\to\infty} \frac{4}{3 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{2}{3\sqrt{2}} \ne 0$$

$\lim\limits_{k\to\infty} |A_k| \ge \dfrac{2}{3\sqrt{2}} \ne 0 \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ расходится, т.к. не выполнено необходимое условие сходимости $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin \pi\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}$ тоже расходится

Применяя признак Дирихле или Абеля, покажите, что ряд сходится.

12

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\ \sqrt{2}n}{2n-5}$$

Пусть $a_n = cos\ \sqrt{2}n$, тогда $\left|\sum_{n=1}^{N} a_n\right| \leqslant 1$, то есть частичная сумма a_n ограничена.

Пусть $b_n = \dfrac{1}{2n-5}$, тогда, очевидно, $b_n \searrow 0$.

Заметим, что $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\ \sqrt{2}n}{2n-5} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n =>$ ряд сходится по признаку Дирихле.

13

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{sin(4n)}{ln\ n - ln\ ln\ n}$$

$a_n = sin(4n) => \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n -$ ограничена.

$b_n = \dfrac{1}{ln\ n - ln\ ln\ n}$

Покажем, что $b_n \searrow 0$:

Пусть $f(x) = \dfrac{1}{ln\ x - ln\ ln\ x}$. Найдём её производную и покажем, что она всегда меньше нуля. Это будет означать, что функция, а значит, и b_n монотонно убывает:

$$f'(x) = -\frac{1\ \cdot\ (ln\ x - ln\ ln\ x)'}{(ln\ x - ln\ ln\ x)^2} = -\frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x\ ln\ x}}{(ln\ x - ln\ ln\ x)^2}$$

При $x \to \infty$ $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x\ ln\ x} > 0 => f'(x) < 0 => b_n$ монотонно убывает. Также заметим, что при $n \to \infty$ $ln\ n$ растёт быстрее, чем $ln\ ln\ n => (ln\ n - ln\ ln\ n) \to \infty => b_n = \dfrac{1}{ln\ n - ln\ ln\ n} \to 0$. Следовательно $b_n \searrow 0 =>$ ряд сходится по признаку Дирихле. ■

14

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln^2 n}$$

Последовательность $\{a_n\},\ a_n = \sqrt[n]{n}$ монотонно убывает при $n \geq 3$ $\left[\left(\sqrt[n]{n}\right)'_n = \left(e^{\frac{\ln n}{n}}\right)'_n = \sqrt[n]{n}\dfrac{1-\ln n}{n^2} < 0,\ n \geq 3\right]$

$$\begin{cases} \text{Ряд } \sum_{n=2}^{\infty} b_n,\ b_n = \dfrac{(-1)^n}{\ln^2 n} & \text{— знакопеременный,} \\ |b_n| = \dfrac{1}{\ln^2 n} \searrow \text{ при } n > 1 & \left[\left(\dfrac{1}{\ln^2 n}\right)_n' = -\dfrac{2}{n \ln^3 n} < 0,\ n > 1\right] \\ \lim_{n\to\infty} |b_n| = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln^2 n} & = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} b_n \text{ сходится по признаку Лейбница}$$

$$\begin{cases} \{a_n\} & \text{монотонно убывает,} \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n & \text{сходится} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n \cdot b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt[n]{n}}{\ln^2 n} \text{ сходится по признаку Абеля}$$

15

$$\frac{(-1)^n \ \cdot \ cos\ 3n}{\sqrt{n^2+2}}$$

Пусть $a_n = (-1)^n \cdot cos\ 3n$. Докажем, что частичная сумма этого ряда ограничена. Для этого посчитаем S_N^+ и S_N^- и докажем, что они ограничены. Для удобства рассмотрим такие n, что $n = 2 \cdot p,\ p \in \mathbb{N}$.

Тогда $S_N^+ = \sum\limits_{p=1}^{N} cos(6p)$ ограничена (доказано на семинаре). $S_N^- = \sum\limits_{p=1}^{N} cos(3+6p) = \sum\limits_{p=1}^{N} (cos\ 3\ cos\ 6p - sin\ 3\ sin\ 6p) =$

$cos\ 3 \sum\limits_{p=1}^{N} cos\ 6p - sin\ 3 \sum\limits_{p=1}^{N} sin\ 6p -$ и уменьшаемое, и вычитаемое ограничены, значит и S_N^- ограничена.

Таким образом $S_N = S_N^+ - S_N^-$ ограничена.

Теперь пусть $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}$. Докажем, что $b_n \searrow 0$. Очевидно, что $b_n \to 0$. Для доказательства монотонного убывания сравним b_n и b_{n+1}:

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+2}} \ \vee \ \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+2}}$$

$$\frac{1}{n^2+2} \ \vee \ \frac{1}{(n+1)^2+2}$$

$$(n+1)^2 + 2 \ \vee \ n^2 + 2$$

$$n^2 + 2n + 3 \ \vee \ n^2 + 2$$

$2n + 1 > 0$, начиная с какого-то n_0.

Следовательно, $b_n \searrow 0$. Значит, наш ряд сходится по признаку Дирихле.

16

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2) \ \cdot \ sin(n)}{n^2 - 3n + 1}$$

$a_n = sin(n) => \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n -$ ограничена.

$$b_n = \frac{3n-2}{n^2-3n+1}$$

Докажем, что $b_n \searrow 0$. Очевидно, что $b_n \to 0$. Для дальнейшего доказательства сравним b_n и b_{n+1}:

$$\frac{3n-2}{n^2-3n+1} \ \vee \ \frac{3n+1}{(n+1)^2-3n-2}$$

$$(3n-2)((n+1)^2-3n-2) \ \vee \ (3n+1)(n^2-3n+1)$$

$$(3n-2)(n^2-n-1) \ \vee \ (3n+1)(n^2-3n+1)$$

$$3n^3-3n^2-3n-2n^2+2n+2 \ \vee \ 3n^3-9n^2+3n+n^2-3n+1$$

$3n^2-n+1>0$ начиная с какого-то n_0 => ряд сходится по признаку Дирихле. ■

Задача 17

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln n+1} \qquad \cos\left(n+\frac{1}{n}\right) = \cos(n)\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \sin(n)\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\cos(n)}{1+\ln n}\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{\sin(n)}{1+\ln n}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$ — сходится по признаку Абеля

$$\left.\begin{array}{l} \uparrow \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ \frac{\cos(n)}{1+\ln n} \quad \text{— сходящийся ряд по Дирихле} \end{array}\right\} \text{ряд сходится по признаку Абеля}$$

$$\left.\begin{array}{l} \downarrow \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ \frac{\sin(n)}{1+\ln n} \quad \text{— сходящийся ряд по Дирихле} \end{array}\right\} \text{ряд сходится по признаку Абеля}$$

Исследуйте ряд на сходимость и абсолютную сходимость, используя асимптотику общего члена.

18

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+2}\right)$$

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+2}\right) = \sin\left(\pi n\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}\right) = \sin\left(\pi n\left(1+\frac{2}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right) = \sin\left(\pi n+\frac{1}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) =$$

$$= (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = (-1)^n\frac{\pi}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^n\frac{\pi}{n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$$ сходится по Лейбницу

19

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$$

$$\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right) = [\text{Ряд Маклорена}]\ \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} - \frac{(-1)^n}{2n^{4/3}} + o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right) = (-1)^n \frac{2n^{2/3}-1}{2n^{4/3}} + o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right) \sim$$

$$\sim (-1)^n \frac{1}{n^{2/3}} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)}_{\text{сходится}}$$

$$\begin{cases} \text{Ряд } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} & \text{— знакопеременный,} \\ |b_n| = \dfrac{1}{n^{2/3}} \searrow & \text{при } n \geq 1 \\ \displaystyle\lim_{n\to\infty} |b_n| = & \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{2/3}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{2/3}} \text{ сходится условно по признаку Лейбница}$$

Сумма сходящихся рядов также сходится $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ сходится условно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)\right| \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{n^{2/3}}}_{\text{расходится}} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^{4/3}}\right)}_{\text{сходится}} \right)$$

Сумма сходящегося и расходящегося рядов расходится $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$ расходится абсолютно

20

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n - \sin n}$$

$$\frac{\cos n}{n-\sin n} = \frac{\cos n}{n}\left(\frac{n-\sin n}{n}\right)^{-1} = \frac{\cos n}{n}\left(1 - \frac{\sin n}{n}\right)^{-1} =$$

$$\left[\text{Ряд Маклорена для } \frac{1}{1-x}\right] \quad \frac{\cos n}{n}\left(1 + \frac{\sin n}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{\cos n}{n} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{сходится}}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \cos n = \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{N} e^{i\cdot n} = \operatorname{Re} \frac{1-e^{i(N+1)}}{1-e^{i}} - 1 = \frac{\sin\frac{N}{2}\cos\frac{(N+1)}{2}}{\sin\frac{1}{2}} < 3 \text{ при } N \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} \text{Ряд } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} & \text{— знакопеременный,} \\ \qquad \dfrac{1}{n} \searrow & \text{при } n \geq 1 \\ \left\{\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \cos n\right\} & \text{ограничена} \end{cases} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n} \text{ сходится условно по признаку Дирихле}$$

Сумма сходящихся рядов также сходится $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n-\sin n}$ сходится условно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\cos n}{n-\sin n}\right| \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(\underbrace{\frac{|\cos n|}{n}}_{\text{расходится}} + \underbrace{o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{сходится}}\right)$$

Сумма сходящегося и расходящегося рядов расходится $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n-\sin n}$ расходится абсолютно

21

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos\ n}{\sqrt{n} + cos\ n}$$

$$a_n = \frac{cos\ n}{\sqrt{n}+cos\ n} = \frac{cos\ n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{cos\ n}{\sqrt{n}}} = \frac{cos\ n}{\sqrt{n}} \cdot \Big(1 - \frac{cos\ n}{\sqrt{n}} + \frac{\frac{cos^2 n}{n}}{1+\frac{cos\ n}{\sqrt{n}}}\Big) = \frac{cos\ n}{\sqrt{n}} - \frac{cos^2 n}{n} + \frac{\frac{cos^3 n}{n^{1.5}}}{1+\frac{cos\ n}{\sqrt{n}}} = O\Big(\frac{cos\ n}{\sqrt{n}}\Big)$$

$\dfrac{cos\ n}{\sqrt{n}}$ сходится по признаку Дирихле => $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно.

Рассмотрим теперь абсолютную сходимость. $|a_n| = \left|\dfrac{cos\ n}{\sqrt{n}}\right| = \dfrac{|cos\ n|}{\sqrt{n}}$. С семинара известно, что $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|cos\ n|}{n}$ расходится,

следовательно, так как $\dfrac{|cos\ n|}{n} \leqslant \dfrac{|cos\ n|}{\sqrt{n}}$, то по признаку сравнения $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|cos\ n|}{\sqrt{n}}$ расходится $\Rightarrow$ ряд расходится абсолютно.

22

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-(-1)^n}}$$

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n-(-1)^n}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(-1)^n}{n}}} =$$

$$= \left[\text{Ряд Маклорена для } (1+x)^{-1/2},\ x = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right] \quad \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2n} + \frac{3}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \underbrace{\frac{1}{2n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{сходится}}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ сходится условно по признаку Лейбница}$$

Сумма сходящихся рядов также сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-(-1)^n}}$ сходится условно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n-(-1)^n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n-(-1)^n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ — расходится } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-(-1)^n}} \text{ расходится абсолютно}$$

23

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n})$$

$$(\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}) = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}} - 1\right) =$$

$$= \left[\text{Ряд Маклорена для } (1+x)^{1/2},\ x = \frac{(-1)^n}{n}\right] \quad \sqrt{n}\left(\cancel{1} + \frac{(-1)^n}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \cancel{1}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} - \underbrace{\frac{1}{8n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{сходится}}$$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{2\sqrt{n}} \text{ сходится условно по признаку Лейбница}$$

Сумма сходящихся рядов также сходится $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n})$ сходится условно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|(\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n})\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ — расходится } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+(-1)^n} - \sqrt{n}) \text{ расходится абсолютно}$$

Вычислите произведение рядов.

24

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right)$$

Ряды $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ и $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ сходятся абсолютно по признаку сравнения с $\dfrac{1}{n!}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ их произведение $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right)$ также сходится абсолютно

Тогда $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n,$

где $\displaystyle c_n=\sum_{i+j=n}a_ib_j=\sum_{i+j=n}\frac{(-1)^i}{(2i+1)!}\cdot\frac{(-1)^j}{(2j)!}=\sum_{i+j=n}\frac{(-1)^{i+j}}{(2i+1)!(2j)!}=$

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(2n+1-2j)!(2j)!}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot\sum_{j=1}^{n}C_{2n+1}^{j}=\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot 2^{2n}=\frac{(-1)^n\cdot 4^n}{(2n+1)!}$$

И тогда произведение: $\displaystyle\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 4^n}{(2n+1)!}$

Задача 25

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{n!}\right)^2=\sum_{n=0}^{\infty}c_n \qquad a_n=b_n=\frac{3^n}{n!}$$

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{3^k}{k!}\cdot\frac{3^{n-k}}{(n-k)!}=\frac{3^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{3^n}{n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k1^k1^{n-k}=\frac{3^n}{n!}(1+1)^n=\frac{3^n\cdot 2^n}{n!}=\frac{6^n}{n!}$$