Семинарский лист 2.3

Анастасия Григорьева Telegram
Денис Козлов Telegram
Елизавета Орешонок Telegram
Ира Голобородько Telegram

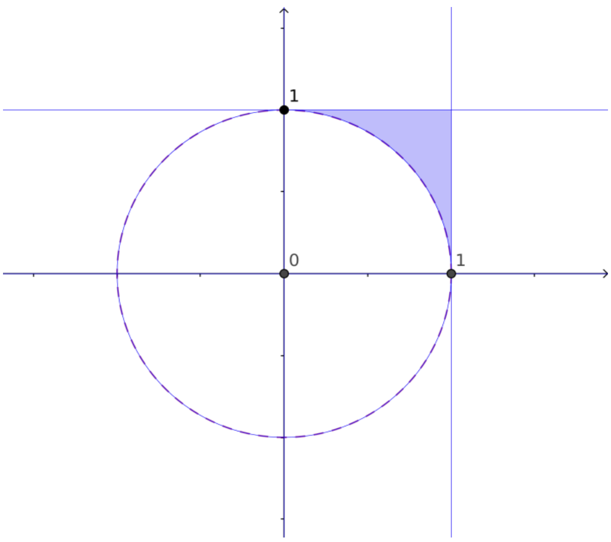
Версия от 20.11.2020 22:44

Предполагая функцию f непрерывной на D, приведите двойной интеграл от f по D к повторному двумя способами: по x затем по y и наоборот.

Задача 1

$D = \{(x, y) \,|\, x, y \in [0; 1], x^2 + y^2 \geq 1\}$

Множество точек, находящихся в квадрате, ограниченном прямыми $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$, за пределами круга радиуса 1 с центром в точке $(0, 0)$:



Интеграл по x затем по y:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^1 dx = \int\limits_0^1 dy \cdot x \,\Big|_{\sqrt{1-y^2}}^1 = \int\limits_0^1 dy \left(1-\sqrt{1-y^2}\right) = \int\limits_0^1 dy - \int\limits_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = 1 - \int\limits_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy$$

Замена: $y=\sin u \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sqrt{1-\sin^2 u}\,du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2u+1}{2}\,du =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2u\,du + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{1}{4}\sin 2u \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}u\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Тогда:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^1 dx = 1-\frac{\pi}{4}$$

Очевидно, что повторный интеграл, взятый в другом порядке, будет вычисляться точно так же:

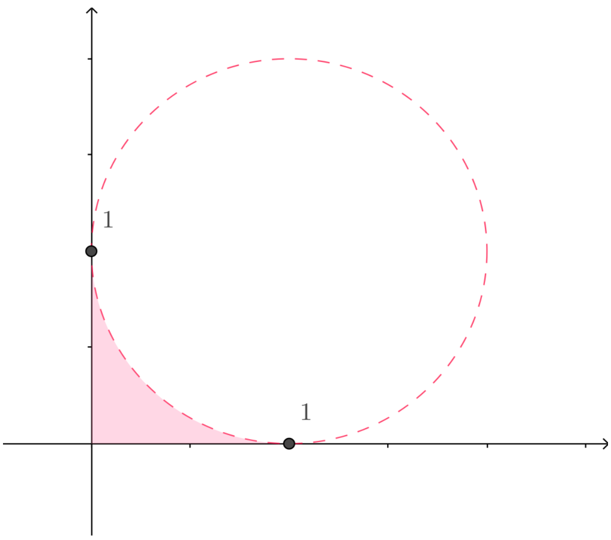
$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^1 dy = \int\limits_0^1 dy \cdot y \,\Big|_{\sqrt{1-x^2}}^1 = \int\limits_0^1 dx \left(1-\sqrt{1-x^2}\right) = \int\limits_0^1 dy - \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dy = 1-\frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\text{Ответ: } 1-\frac{\pi}{4}.}$

Задача 2

$D = \{(x,y)\,|\,x,y\in[0;1], (x-1)^2+(y-1)^2 \geq 1\}$

Множество точек, находящихся в квадрате, ограниченном прямыми $x=0, x=1, y=0, y=1$, за пределами круга радиуса 1 с центром в точке $(1,1)$:



Интеграл по x затем по y:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} dx = \int\limits_0^1 dy \cdot x \,\Big|_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} = \int\limits_0^1 dy \left(\sqrt{1-(y-1)^2}+1\right) = \int\limits_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}\,dy + 1$$

Замена: $(y-1) = \sin u \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sqrt{1-\sin^2 u}\,du = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 u\,du = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos 2u + 1}{2}\,du =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos 2u\,du + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 du = \frac{1}{4}\,\sin 2u\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \frac{1}{2}\,u\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{\pi}{4}$$

Тогда:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Очевидно, что повторный интеграл, взятый в другом порядке, будет вычисляться точно так же:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}+1} dy = \int\limits_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx + 1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\text{Ответ: } 1 - \frac{\pi}{4}.}$

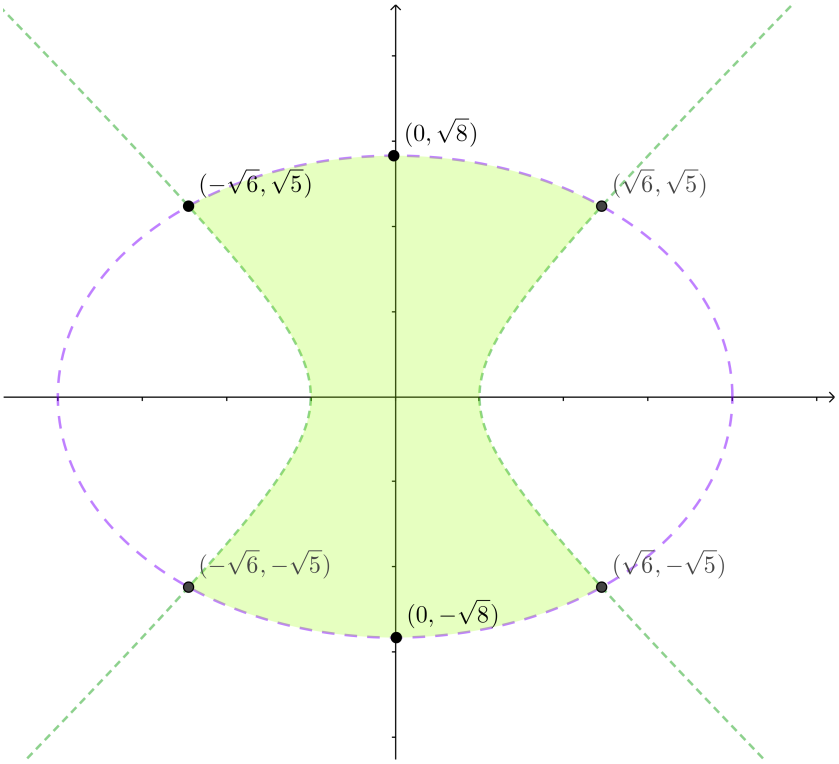
Задача 3

$D = \{(x,y) \mid x^2 + 2y^2 \leqslant 16,\ x^2 - y^2 \leqslant 1\}$.

- $x^2 + 2y^2 = 16$ – эллипс, нужны точки внутри него;
- $x^2 - y^2 = 1$ – гипербола, нужна область, ограниченная двумя частями ее графика.

Найдем координаты точки пересечения кривых: $\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 16; x^2 - y^2 = 1; \end{cases} \implies \begin{cases} y = \pm\sqrt{5}; \\ x = \pm\sqrt{6}. \end{cases}$

Эллипс пересекает ось ординат в точках $(0, \sqrt{8})$ и $(0, -\sqrt{8})$.



Интегрируя по x, видим два симметричных относительно 0 куска $\implies$ можем рассмотреть любой из них и продублировать интеграл.

Интегрируем правую часть – интеграл разбивается на участки до перекрытия гиперболой (до координаты 1) и после. Во втором интеграле используем симметричность относительно Ox.

Итого: $I(D,f) = 2 \cdot \left(\int\limits_0^1 dx \int\limits_{-\sqrt{(16-x^2)/2}}^{\sqrt{(16-x^2)/2}} f(y)dy + 2 \cdot \int\limits_1^{\sqrt{6}} dx \int\limits_{\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{(16-x^2)/2}} f(y)dy \right).$

Теперь по y. Тоже используем симметричность и считаем лишь верхнюю часть.

$$I(D,f) = 2 \cdot \left(\int\limits_0^{\sqrt{5}} dy \int\limits_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x)dx + \int\limits_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} dy \int\limits_{-\sqrt{16-2y^2}}^{\sqrt{16-2y^2}} f(x)dx \right).$$

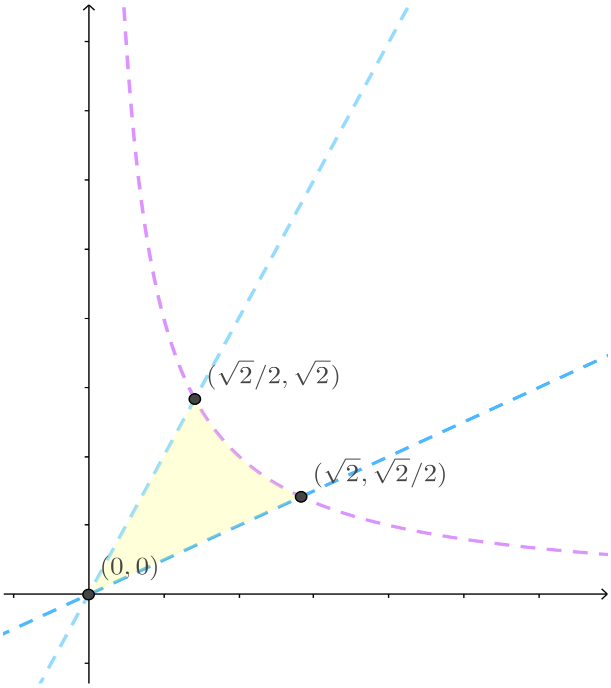
Задача 4

$D = \{(x,y) \mid x, y \geqslant 0,\ 0 < xy \leqslant 1,\ y \leqslant 2x,\ x \leqslant 2y\}.$

- $xy = 1$ – гипербола, рассматривается участок под ней;
- $y = 2x$ – прямая, рассматривается полуплоскость под ней;
- $x = 2y$ – прямая, рассматривается полуплоскость над ней.

Найдем точки пересечения кривых: $\begin{cases} xy = 1; \\ y = 2x; \end{cases} \implies \begin{cases} y = \sqrt{2}; \\ x = \sqrt{2}/2; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 1; \\ x = 2y; \end{cases} \implies \begin{cases} y = \sqrt{2}/2; \\ x = \sqrt{2}. \end{cases}$

Значит, требуется привести интеграл по следующему множеству:



Разбивая область интегрирования по x до перекрытия с гиперболой и после, получаем:

$$I(D,f) = \int\limits_0^{\sqrt{2}/2} dx \int\limits_{x/2}^{2x} f(y)dy + \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{x/2}^{1/x} f(y)dy;$$

Разбивая область интегрирования по y до перекрытия с гиперболой и после, получаем (симметрично):

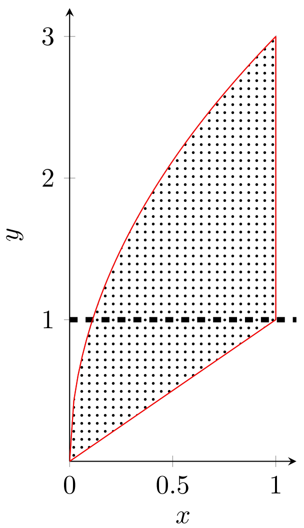
$$I(D,f) = \int\limits_0^{\sqrt{2}/2} dy \int\limits_{x/2}^{2x} f(x)dx + \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{x/2}^{1/x} f(x)dx.$$

Предполагая функцию f непрерывной на D, измените порядок интегрирования в повторном интеграле

Задача 6

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)dx = \text{ пристально смотрим на рисунок } =$$

$$= \int_0^1 \int_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$$



Изменив порядок интегрирования, вычислите интеграл

Задача 10

$$\int_0^2 x^2dx\int_x^2 \ln(1+y^2)dy = \text{ пристально смотрим на рисунок } = \int_0^2\int_0^y x^2\ln(1+y^2)dxdy =$$

$$= \int_0^2 \ln(1+y^2)dy\int_0^y x^2dx = \int_0^2 \ln(1+y^2)dy\left(\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^y\right) = \frac{1}{3}\int_0^2 \ln(1+y^2)y^3dy =$$

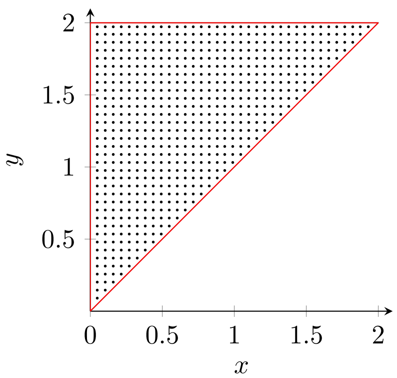
$$= \left\{\begin{array}{ll} u = \ln(1+y^2) & \Rightarrow u' = \dfrac{2y}{1+y^2} \\ v' = y^3 & \Rightarrow v = \dfrac{y^4}{4}\end{array}\right\} = \frac{1}{3}\ln(1+y^2)\left.\frac{y^4}{4}\right|_0^2 - \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{y^4}{4}\frac{2y}{1+y^2}dy = \left\{\begin{array}{l} t = 1+y^2 \\ dt = 2ydy \\ dy = \dfrac{dt}{2y}\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}(4\ln(5) - 0) - \frac{1}{6}\int_1^5 \frac{y^5}{t}\frac{dt}{2y} = \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}\int_1^5 \frac{(y^4+2y^2+1)-(2y^2-2)+1}{t}dt =$$

$$= \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}\int_1^5 \frac{t^2-2t+1}{t}dt = \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}\left(\int_1^5 tdt - 2\int_1^5 dt + \int_1^5 \frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}\left(\left(\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\right) - 2(5-1) + \ln(|t|)\Big|_1^5\right) = \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}(12-8+\ln(5)) =$$

$$= \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{3} - \frac{\ln(5)}{12} = \boldsymbol{\frac{5\ln(5)}{4} - \frac{1}{3}}$$



Вычислите интеграл

Задача 14

Предполагая функцию f непрерывной на D, измените порядок интегрирования в повторном интеграле всеми возможными способами

Задача 18