

Семинарский лист 2.6

Денис Козлов
[Telegram](#)

Елизавета Орешонок
[Telegram](#)

Ира Голобородько
[Telegram](#)

Версия от 12.12.2020 14:23

Переходя к полярным или обобщенным полярным координатам, вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой.

Задача 1

$$(x^2 + y^2)^2 = 2x^3$$

В полярных координатах: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $|J| = r$

$$(x^2 + y^2)^2 = 2x^3 \Leftrightarrow r^4 = 2r^3 \cos^3 \varphi \Leftrightarrow r = 2 \cos^3 \varphi \Leftrightarrow \cos \varphi = \sqrt[3]{\frac{r}{2}}$$

$$r \geq 0 \Rightarrow \cos \varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Площадь фигуры:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4 \cos^6 \varphi d\varphi = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi d\varphi = \frac{\cos^5 \varphi \sin \varphi}{3} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{5 \cos^3 \varphi \sin \varphi}{12} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{5 \cos \varphi \sin \varphi}{8} \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{8} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{5\pi}{8} \end{aligned}$$

Задача 2

$$(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$$

- Используем пол. координаты: $\begin{cases} x = r \cos \varphi; \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$
- Кривая становится $r^6 = r^4 \cos^4 \varphi + r^4 \sin^4 \varphi \iff r^2 = \cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi = (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^2 - 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi =$
 $1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2} \implies r = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2}}.$

$$\bullet \quad S = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{1-\sin^2 2\varphi/2}} \underbrace{r}_{\text{Якобиан}} dr = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 - \frac{(1/2 - 1/2 \cos 4\varphi)}{2} = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \frac{3}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{2} d\varphi =$$

$$\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{16} \int_0^{8\pi} \cos \Theta d\Theta = \boxed{\frac{3\pi}{4}}.$$

Задача 3

$$(x^2 + y^2)^2 = xy$$

В полярных координатах: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

$$(x^2 + y^2)^2 = xy \Leftrightarrow r^4 = r^2 \sin \varphi \cos \varphi \Leftrightarrow r^2 = \frac{1}{2} \sin 2\varphi \Leftrightarrow \sin 2\varphi = 2r^2$$

$$r^2 \geq 0 \Rightarrow \sin 2\varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$$

Площадь фигуры:

$$S = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi \right) = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2\varphi d\varphi \right) =$$

$$= -\frac{1}{4} \left(\cos 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos 2\varphi \Big|_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \right) = -\frac{1}{4} (-1 - 1 - 1 - 1) = 1$$

Задача 4

$$\underline{x^4 + y^4 = x^2 y}$$

• Видим, что $x^4 + y^4 \geq 0$ и $x^2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 0$.

• x может быть любым. Однако кривая симметрична относительно x , поэтому можно посчитать интеграл из предположения $x \geq 0$, а после удвоить его.

• Получили ограничение на угол $\varphi \in [0, \pi/2]$.

Обобщённые полярные координаты.

$$\begin{cases} x = r \cos^{\alpha} \varphi; \\ y = r \sin^{\alpha} \varphi; \\ J = r \cdot \alpha \cdot \sin^{\alpha-1} \varphi \cdot \cos^{\alpha-1} \varphi \end{cases}$$

Нам подходит $\alpha = \frac{1}{2}$.

• В этом случае $x^4 + y^4 = r^4 = r^3 \cos \varphi \sqrt{\sin \varphi} \Rightarrow r = \cos \varphi \sqrt{\sin \varphi}$. Нам интересны точки, т.ч. $r \in [0, \cos \varphi \sqrt{\sin \varphi}]$.

$$\bullet S = 2 \cdot \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\cos \varphi \sqrt{\sin \varphi}} \underbrace{\frac{r dr}{2\sqrt{\sin \varphi \cos \varphi}}}_{\text{Якобиан}} = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi}{\sqrt{\sin \varphi \cos \varphi}} d\varphi.$$

$$\text{Замена} \begin{cases} t = \sqrt{\operatorname{tg} \varphi}; \\ dt = \frac{d\varphi}{2 \cos^2 \varphi \sqrt{\operatorname{tg} \varphi}}; \\ t \in [0, +\infty] \end{cases}$$

$$\dots = \int_0^{+\infty} \frac{\cos^4 \varphi \sin \varphi \sqrt{\sin \varphi}}{\sqrt{\sin \varphi} \cos \varphi \cdot \sqrt{\cos \varphi}} dt = \int_0^{+\infty} \cos^3 \varphi \sin \varphi dt = \int_0^{+\infty} \cos^4 \varphi \operatorname{tg} \varphi dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^4} \right)^2 t^2 dt =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+2t^4+t^8} dt. = \text{тут применяем Остроградского, но хочется применить пулю в рот} =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^2} dt = \frac{at^3 + bt^2 + ct + d}{1+t^4} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{et^3 + ft^2 + gt + h}{t^4 + 1} dt$$

$$\frac{t^2}{(1+t^4)^2} = \frac{3at^2 + 2bt + c + 3at^6 + 2bt^5 + c^4 - 4at^6 - 4bt^5 - 4ct^4 - 4dt^3}{(1+t^4)^2} + \frac{et^3 + ft^2 + gt + h}{t^4 + 1}$$

$$t^2 = -at^6 - 2bt^5 - 3ct^4 - 4dt^3 + 3at^2 + 2bt + c + et^7 + ft^6 + gt^5 + ht^4 + et^3 + ft^2 + gt + h$$

$$\begin{cases} e = 0 \\ f - a = 0 \\ g - 2b = 0 \\ h - 3c = 0 \\ e - 4d = 0 \\ f + 3a = 1 \\ g + 2b = 0 \\ h + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = 0 \\ d = 0 \\ g = 0 \\ b = 0 \\ h = 0 \\ c = 0 \\ a = \frac{1}{4} \\ f = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^2} dt = \frac{1}{4} \frac{t^3}{1+t^4} \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{t^4 + 1} dt$$

Я понизил степень знаменателя и ожидаемую длительность жизни в два раза

Задача 5

$$(x^2 + y^2)^3 = x^4 y$$

В полярных координатах: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

$$(x^2 + y^2)^3 = x^4 y \Leftrightarrow r^6 = r^5 \sin \varphi \cos^4 \varphi \Leftrightarrow r = \sin \varphi \cos^4 \varphi$$

$$r \geq 0, \cos^4 \varphi \geq 0 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{r}{\cos^4 \varphi} \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [0; \pi]$$

Площадь фигуры:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin^2 \varphi \cos^8 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 - \cos^2 \varphi) \cos^8 \varphi d\varphi =$$

$$\frac{1}{2} \left(\int_0^\pi \cos^8 \varphi d\varphi - \int_0^\pi \cos^{10} \varphi d\varphi \right) = \frac{1}{2} \left(\int_0^\pi \cos^8 \varphi d\varphi - \frac{\cos^9 \varphi \sin \varphi}{10} \Big|_0^\pi - \frac{9}{10} \int_0^\pi \cos^8 \varphi d\varphi \right) =$$

$$\frac{1}{20} \int_0^\pi \cos^8 \varphi d\varphi = \frac{1}{20} \left(\frac{\cos^7 \varphi \sin \varphi}{8} \Big|_0^\pi + \frac{7}{8} \int_0^\pi \cos^6 \varphi d\varphi \right) = \frac{7}{160} \left(\frac{\cos^5 \varphi \sin \varphi}{6} \Big|_0^\pi + \frac{5}{6} \int_0^\pi \cos^4 \varphi d\varphi \right) =$$

$$\frac{7}{192} \left(\frac{\cos^3 \varphi \sin \varphi}{4} \Big|_0^\pi + \frac{3}{4} \int_0^\pi \cos^2 \varphi d\varphi \right) = \frac{7}{256} \left(\frac{\cos \varphi \sin \varphi}{2} \Big|_0^\pi + \frac{1}{2} \int_0^\pi \varphi d\varphi \right) = \frac{7\pi}{512}$$

Задача 6

$$x^6 + y^6 = x^4 + y^4$$

В полярных координатах: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$

$$r^6(\cos^6 \varphi + \sin^6 \varphi) = r^4(\cos^4 \varphi + \sin^4 \varphi) \Leftrightarrow r^2 \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\varphi \right) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi \Leftrightarrow$$

$$r^2 = \frac{1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\varphi}{1 - \frac{3}{4} \sin^2 2\varphi} = 2 \frac{2 - \sin^2 2\varphi}{4 - 3 \sin^2 2\varphi} = 2 - 2 \frac{2 - 2 \sin^2 2\varphi}{4 - 3 \sin^2 2\varphi} = 2 - 4 \frac{\cos^2 2\varphi}{1 + 3 \cos^2 2\varphi}$$

Площадь фигуры:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} r^2(\varphi) d\varphi \text{ (фигура симметрична по } x \text{ и } y) =$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \left(2 - 4 \frac{\cos^2 2\varphi}{1 + 3 \cos^2 2\varphi} \right) d\varphi = 2\pi - 8 \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 2\varphi}{1 + 3 \cos^2 2\varphi} d\varphi = 2\pi - \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{1}{1 + 3 \cos^2 2\varphi} \right) d\varphi =$$

$$= 2\pi - \frac{4\pi}{3} + \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + 3 \cos^2 2\varphi} d\varphi = 2\pi - \frac{4\pi}{3} + \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{1 + 3 \cos^2 \varphi} d\varphi$$

Замена: $u = \operatorname{tg} \varphi$, $\frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{\cos^2 \varphi}$, $d\varphi = \cos^2 \varphi du$:

$$\frac{2\pi}{3} + \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{1}{\cos^2 \varphi} - 1 \right) + 4} du = \frac{2\pi}{3} + \frac{4}{3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 + 4} du = [v = u/2] \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3} \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^2 + 1} dv =$$

$$= \frac{2\pi}{3} + \frac{2}{3} \operatorname{arctg} v \Big|_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

Найдите объем тела, заданного неравенствами.

Задача 7

$$\underline{x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, x + y + z \leq 4}$$

$$\bullet x^2 + y^2 \leq 1 \implies x \in [-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]; y \in [-1, 1].$$

$$\bullet x + y + z \leq 4 \implies z \leq 4 - x - y. \text{ Условие } x + y \leq 4 \text{ при данных ограничениях выполнено всегда.}$$

$$S = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^{4-x-y} dz = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 4 - x - y dx = \int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 4 - y dx - \underbrace{\int_{-1}^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x dx}_0 =$$

$$2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} \cdot (4-y) dy = 8 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} dy - 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2} \cdot y dy.$$

$$\text{Замена} \begin{cases} t = \arcsin y; \\ t \in [-\pi/2, \pi/2]; \\ dt = \frac{dy}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$$

$$\dots 8 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt - 2 \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t dt}_0 = \boxed{8\pi}.$$

Задача 8

$$\underline{x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, x + y + z \leq 1}$$

$$\bullet x^2 + y^2 \leq 1 \implies x \in [-\sqrt{1-y^2}, \sqrt{1-y^2}]; y \in [-1, 1].$$

$$\bullet x + y + z \leq 1 \implies z \leq 1 - x - y.$$

$$\bullet \text{ Также необходимо условие } x + y \leq 1.$$

При $y \in [-1, 0]$ оно соблюдается, в ином случае x сверху придётся ограничить значением $1 - y$.

Советую сделать сначала предыдущий номер, там подробно описана замена, которую я использую.

$$\begin{aligned} \bullet S &= \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int_0^{1-x-y} dz + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} dx \int_0^{1-x-y} dz = 2 \int_{-1}^0 (1-y) \sqrt{1-y^2} dy - \underbrace{\int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x dx}_0 \\ &= \int_0^1 (1-y) \left((1-y) + \sqrt{1-y^2} \right) dy - \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} x dx = 2 \int_{-1}^0 \sqrt{1-y^2} dy - 2 \int_{-1}^0 y \sqrt{1-y^2} dy + \\ &+ \int_0^1 (1-2y+y^2) dy + \int_0^1 (1-y) \sqrt{1-y^2} dy - \frac{1}{2} \int_0^1 1-2y+y^2-1+y^2 dy = 2 \int_{-\pi/2}^0 dt - 2 \int_{-\pi/2}^0 \sin t dt + \\ &+ \left(t - t^2 + \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy - \int_0^1 y \sqrt{1-y^2} dy - \frac{1}{2} \int_0^1 -2y+2y^2 dy = \pi + -2 \left(-\cos t \right) \Big|_{-\pi/2}^0 + \frac{1}{3} + \\ &\int_0^{\pi/2} dt - \int_0^{\pi/2} \sin t dt + \int_0^1 y - y^2 dy = \pi + 2 + \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} + \left(\cos t \right) \Big|_0^{\pi/2} + \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{3\pi}{2} + 2 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Задача 9

$$x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1 - 2y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in [-1; 1], y \in [-\sqrt{1-x^2}; \sqrt{1-x^2}], z \in [0; 1-2y^2]$$

$$z \geq 0 \Rightarrow 1 - 2y^2 \geq 0 \Rightarrow y \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\sqrt{1-x^2} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1-x^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

Объем фигуры:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_D dx dy dz = \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{1-2y^2} dz + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{1-2y^2} dz + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{1-2y^2} dz = \\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-2y^2) dy + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} (1-2y^2) dy + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1-2y^2) dy = \\ &= \int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \cdot \left(y - \frac{2}{3}y^3\right) \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dx \cdot \left(y - \frac{2}{3}y^3\right) \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} + \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dx \cdot \left(y - \frac{2}{3}y^3\right) \Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \\ &= \frac{4}{3} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \sqrt{1-x^2}(1+2x^2) dx - \frac{8}{3} \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 (1-x^2)^{3/2} dx + \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right) x \Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{aligned}$$

Замена: $t = \arcsin x, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+2\sin^2 t) dt - \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t) dt + \left(2 - \frac{2}{3}\right) &= \frac{4}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4\sin^2 t - 1) dt + \frac{4}{3} = \\ &= \frac{4}{3} (-2\cos t \sin t + t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} (-\sin 2t + t) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \left(1 + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{3} = \frac{8}{3} + \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Задача 10

$$\underline{x \leq x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq z \leq x^2 y^2}$$

• Цилиндрические координаты:
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi; \\ y = r \sin \varphi; \\ z = z \end{cases}$$

• $x \leq x^2 + y^2 \leq 2x \Rightarrow r \cos \varphi \leq r^2 \leq 2r \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi \leq r \leq 2 \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi \geq 0 \Rightarrow \varphi \in [-\pi/2, \pi/2].$

• $0 \leq z \leq x^2 y^2 = r^4 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi = \frac{r^4}{4} \sin^2 2\varphi.$

$$\begin{aligned}
& \bullet \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} dr \int_0^{\frac{r^4}{4} \sin^2 2\varphi} r dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \frac{r^5}{4} \sin^2 2\varphi dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi \int_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \frac{r^5}{4} dr = \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\varphi d\varphi \left(\frac{r^6}{6} \Big|_{\cos \varphi}^{2 \cos \varphi} \right) = \\
& = \frac{63}{24} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\varphi \cos^6 \varphi d\varphi = \frac{63}{24} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\varphi \right)^3 d\varphi = \frac{63}{24} \cdot \frac{1}{16} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4\varphi) \cdot (1 + \cos 2\varphi)^3 d\varphi = \\
& \frac{63}{24} \cdot \frac{1}{16} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos 4\varphi) \left(1 + 3 \cos 2\varphi + 3 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) + \cos 2\varphi \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 4\varphi \right) \right) d\varphi = \\
& \frac{63}{24 \cdot 16} \left(\frac{5}{2} \cdot \pi - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi \right) = \boxed{\frac{63}{24 \cdot 16} \cdot \frac{7}{4} \pi}.
\end{aligned}$$

Как мы это получили: воспользуемся периодичностью и поймём, что после подстановки все слагаемые обратятся

в 0, за исключением $1 + \frac{3}{2}$, что даёт вклад $\frac{5}{2}$; и $\frac{-3}{2} \cdot \cos^2 4\varphi = \frac{-3}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 8\varphi \right)$, что даёт вклад $\frac{-3}{2} \cdot \frac{1}{2}$.

($\cos 8\varphi$ аналогично уходит по периодичности).

Задача 11

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 3, \quad x^2 + y^2 \leq 2z \Rightarrow r^2 \leq 3, \quad r^2 \cos^2 \theta \leq 2r \cos^2 \theta \Rightarrow r \leq 2 \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta}, r \leq \sqrt{3}$$

Хотим найти пересечение параболоида и сферы для интегрирования

$$x^2 + y^2 + z^2 - 3 = x^2 + y^2 - 2z \Rightarrow z^2 + 2z - 3 = 0 \Rightarrow z = 1 \text{ отрицательные не подойдут} \Rightarrow \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}} \sin \theta d\theta \int_0^{\frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta}} r^2 dr + \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r^2 dr = \\
&= 2\pi \left(\int_0^{\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{8 \cos^3 \theta}{3 \sin^6 \theta} \sin \theta d\theta + \int_{\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3} \sin \theta d\theta \right) = \left\{ \begin{array}{l} t = \sin \theta \\ \cos^2 \theta = 1 - t^2 \\ dt = \cos \theta d\theta \end{array} \right\} = \\
&= 2\pi \left(\frac{8}{3} \int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{1 - t^2}{t^5} dt + \sqrt{3} \left(0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \\
&= 2\pi \left(1 + \frac{8}{3} \left(-\frac{9}{16} + \frac{9}{16} \right) \right) = 2\pi
\end{aligned}$$

Задача 12

$$\underline{x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Цилиндрическая замена.

- $r^2 \leq z \leq r \implies r \in [0, 1]$.

- $\int_0^1 r \, dr \int_{r^2}^r dz \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^1 r \, dr \int_{r^2}^r dz = 2\pi \int_0^1 r^2 - r^3 \, dr = 2\pi \int_0^1 r^2 - r^3 \, dr = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{6}}.$

Задача 13

$$0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2, \quad z + x^2 \leq 1$$

Цилиндрическая замена.

- $0 \leq z \leq 4 - r^2 \implies r \in [0, 2]$.

- $z + x^2 \leq 1 \implies z + r^2 \cos^2 \varphi \leq 1 \implies z \leq 1 - r^2 \cos^2 \varphi \implies r^2 \cos^2 \varphi \leq 1 \implies r^2 \leq \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$

Получили $r \leq \frac{1}{|\cos \varphi|} \implies \frac{1}{|\cos \varphi|} \leq 2 \implies |\cos \varphi| \geq \frac{1}{2} \implies \varphi \in [-\pi/3, \pi/3] \cup [2\pi/3, 4\pi/3].$

- Разберёмся с границами z . Когда верхняя граница равна $4 - r^2$? Должно выполняться неравенство:

$$4 - r^2 < 1 - r^2 \cos^2 \varphi \iff 3 < r^2(1 - \cos^2 \varphi) \iff 3 < r^2 \sin^2 \varphi \iff \frac{\sqrt{3}}{|\sin \varphi|} < r \implies \frac{\sqrt{3}}{|\sin \varphi|} \leq 2.$$

Следовательно, $\varphi \in [\pi/3, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 5\pi/3]$, что невозможно при данных ограничениях. Поэтому верхняя граница всегда $1 - r^2 \cos^2 \varphi$.

- $$S = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{1/\cos \varphi} r \, dr \int_0^{1-r^2 \cos^2 \varphi} dz + \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} d\varphi \int_0^{-1/\cos \varphi} r \, dr \int_0^{1-r^2 \cos^2 \varphi} dz =$$

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int_0^{1/\cos \varphi} r - r^3 \cos^2 \varphi \, dr + \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} d\varphi \int_0^{-1/\cos \varphi} r - r^3 \cos^2 \varphi \, dr =$$

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \cos^2 \varphi \right) \Big|_0^{1/\cos \varphi} + \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} d\varphi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \cos^2 \varphi \right) \Big|_0^{-1/\cos \varphi} =$$

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} - \frac{1}{4 \cos^2 \varphi} d\varphi + \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} - \frac{1}{4 \cos^2 \varphi} d\varphi = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} d\varphi + \int_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{1}{2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \operatorname{tg}(\pi/3) + \operatorname{tg}(4\pi/3) = \boxed{2\sqrt{3}}.$$

Задача 14

$$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x^2 - y^2 - z^2 \geq 0, \quad x \geq 0$$

- $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0 \implies x \in [\sqrt{1 - y^2}, \sqrt{4 - y^2}].$

- $x^2 - y^2 - z^2 \geq 0 \implies z \in \left[-\sqrt{x^2 - y^2}, \sqrt{x^2 - y^2}\right]; \quad x \geq |y|.$

- Насчёт границ x . Нижней границей будет $\sqrt{1 - y^2}$, если выполнено нер-во

$$|y| \leq \sqrt{1 - y^2} \iff |y| \leq 1/\sqrt{2} \iff y \in \left[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right].$$

Иначе – нижняя граница $|y|$.

- Насчёт границ y . Должно быть верно $|y| \leq \sqrt{4 - y^2} \iff |y| \leq \sqrt{2} \iff y \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right].$

- $$S = \int_{-\sqrt{2}}^{-1/\sqrt{2}} dy \int_{-y}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2-y^2}} dz + \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2-y^2}} dz + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{4-y^2}} dx \int_{-\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2-y^2}} dz =$$

$$2 \int_{-\sqrt{2}}^{-1/\sqrt{2}} dy \int_{-y}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2 - y^2} \, dx + 2 \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2 - y^2} \, dx + 2 \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2 - y^2} \, dx.$$