

Семинарский лист 2.5

Анастасия Григорьева
[Telegram](#)

Денис Козлов
[Telegram](#)

Елизавета Орешонок
[Telegram](#)

Ира Голобородько
[Telegram](#)

Версия от 06.12.2020 23:18

Задайте в полярных координатах множество D , заданное неравенствами в декартовых координатах. Предполагая функцию f непрерывной на D , преобразуйте интеграл в полярных координатах к повторному.

Задача 1

$$x^2 + y^2 \leq 2x$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D := r^2 \leq 2r \cos \varphi \Leftrightarrow r(r - 2 \cos \varphi) \leq 0 \Leftrightarrow r \in [0; 2 \cos \varphi], \cos \varphi \geq 0$$

$$\iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr =$$

$$\left\{ r^2 \leq 2r \cos \varphi \Leftrightarrow \cos \varphi \geq \frac{r}{2} \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\arccos \frac{r}{2}; \arccos \frac{r}{2} \right] \right\}$$

$$= \int_0^2 r dr \int_{-\arccos \frac{r}{2}}^{\arccos \frac{r}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi$$

Задача 2

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1, \quad x^2 + y^2 \geq 1$$

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D := \left\{ \begin{array}{l} r^2 \leq 2r \cos \varphi, \\ r^2 \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r \in [0; 2 \cos \varphi], \\ \cos \varphi \geq 0, \\ r \geq 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r \in [1; 2 \cos \varphi], \\ \cos \varphi \geq 1/2, \end{array} \right.$$

$$\cos \varphi \geq 1/2 \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$$

$$\iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi dr = \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int_1^{2 \cos \varphi} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr =$$

$$\left\{ r^2 \leq 2r \cos \varphi \Leftrightarrow \cos \varphi \geq \frac{r}{2} \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\arccos \frac{r}{2}; \arccos \frac{r}{2} \right] \right\}$$

$$= \int_1^2 r dr \int_{-\arccos \frac{r}{2}}^{\arccos \frac{r}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi$$

Задача 3

$(x^2 + y^2)^2 \leq 4xy$. Перепишем неравенство в полярных координатах:

$$(r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi)^2 \leq 4r^2 \cos \varphi \cdot \sin \varphi \iff r^2 \leq 2 \sin 2\varphi. \quad \circledast$$

Делаем вывод, что $2 \sin 2\varphi \geq 0 \iff 2\varphi \in [2n\pi, (2n+1)\pi] \implies \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2} \right]$.

$$\circledast \rightarrow r \leq \sqrt{2 \sin 2\varphi}.$$

Рисунок тут даже не требуется, можно сразу записать интеграл.

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{2 \sin 2\varphi}} f \cdot r dr + \int_{\pi}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^{\sqrt{2 \sin 2\varphi}} f \cdot r dr.$$

Задача 4

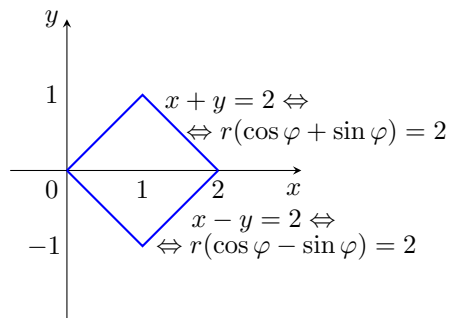
$$|x-1| + |y| \leq 1$$

Область представляет собой ромб с центром в точке $(1, 0)$

Из рисунка видно, что угол φ лежит в пределах $[-\pi/4; \pi/4]$

Можно определить и отрезки для r :

$$r \in \begin{cases} \left[0; \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi}\right], & \varphi \geq 0 \\ \left[0; \frac{2}{\cos \varphi - \sin \varphi}\right], & \varphi < 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \iint_D f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi dr &= \int_{-\pi/4}^0 d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos \varphi - \sin \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr + \int_0^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr = \\ &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\frac{2}{\cos \varphi + |\sin \varphi|}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr \end{aligned}$$

При $r \in [0; \sqrt{2}]$ все углы от $-\pi/4$ до $\pi/4$ лежит в нужной области

При $r \in (\sqrt{2}; 2\sqrt{2}]$ необходимо $2 \geq r(\cos \varphi + |\sin \varphi|)$

Так как относительно Oy все симметрично, найдем границу при $\varphi > 0$:

из геометрии рисунка (треугольников и всего такого)

$$r \cos \left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{4} - \varphi\right) = \frac{\sqrt{2}}{r} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} - \arccos \frac{\sqrt{2}}{r}$$

Повторный интеграл с найденными границами:

$$\int_0^{\sqrt{2}} r dr \int_{-\pi/4}^{\pi/4} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi + \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} r dr \int_{\arccos \frac{\sqrt{2}}{r} - \frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4} - \arccos \frac{\sqrt{2}}{r}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) d\varphi$$

Задача 5

D – множество, лежащее в круге $x^2 + y^2 \leq 1$ вне кривой $r = \cos 3\varphi$.

Для начала простое. $x^2 + y^2 \leq 1 \Leftrightarrow r \leq 1 \Rightarrow r \in [0, 1]$.

Теперь разберёмся с кривой $r = \cos 3\varphi$.

Если $r \in [0, 1]$, то $\cos 3\varphi \in [0, 1] \Rightarrow 3\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$.

$$\begin{cases} n = 0 \rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]; \\ n = 1 \rightarrow \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]; \\ n = 2 \rightarrow \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

$$\text{T.e. } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right].$$

[picture is coming soon]

Мы готовы записать интеграл, не забывая указывать якобиан!

$$\int_{-\pi/6}^{\pi/6} d\varphi \int_{\cos 3\varphi}^1 r \cdot f \, dr + \int_{\pi/2}^{5\pi/6} d\varphi \int_{\cos 3\varphi}^1 r \cdot f \, dr + \int_{7\pi/6}^{3\pi/2} d\varphi \int_{\cos 3\varphi}^1 r \cdot f \, dr$$

Задача 6

D — множество, лежащее вне окружности $x^2 + y^2 = 1$ и внутри петель кривой $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$

Так как область лежит вне окружности $x^2 + y^2 = 1$, в полярных координатах $r > 1$.

Определим условия, необходимые и достаточные для того, чтобы координаты лежали внутри петель кривой:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2) \Leftrightarrow r^4 = 2r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \Leftrightarrow r^2 = 2 \cos 2\varphi$$

Тогда точка с полярными координатами (r, φ) лежит внутри петель,

$$\text{если } r^2 \leq 2 \cos 2\varphi \Leftrightarrow \cos 2\varphi \geq \frac{r^2}{2} \Leftrightarrow \varphi \in \left[-\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{2}; \frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{2} \right]$$

Повторный интеграл:
$$\int_1^{\sqrt{2}} r \, dr \int_{-\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{2}}^{\frac{1}{2} \arccos \frac{r^2}{2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, d\varphi$$

Перейдя к полярным координатам, вычислите интеграл.

Задача 7

$$\iint_D \ln(1 + x^2 + y^2) \, dx \, dy, \quad D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

D — круг с радиусом 2 $\Rightarrow r \in [0, 2]$.

$\varphi \in [0, 2\pi)$, как и всегда.

$$\int_0^2 dr \int_0^{2\pi} r \cdot \ln(1 + r^2) \, d\varphi = \int_0^2 2\pi \cdot r \cdot \ln(1 + r^2) \, dr = \pi \int_0^2 2 \cdot r \cdot \ln(1 + r^2) \, dr.$$

$$\text{Замена } \begin{cases} t = 1 + r^2; \\ dt = 2r \, dr; \\ r \in [0, 2] \Rightarrow t \in [1, 5] \end{cases}$$

$$\dots = \pi \int_1^5 \ln(t) \, dt = \pi \cdot \left(t \ln t - t \right) \Big|_1^5 = \pi \cdot (5 \ln 5 - 5 + 1) = \boxed{\pi(5 \ln 5 - 4)}.$$

Задача 8

$$\iint_D \frac{x dx dy}{\sqrt{4-x^2-y^2}}, \quad D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x\}$$

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases} \Rightarrow D = \{(r, \varphi) | r \leq 2 \cos \varphi\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{4-r^2}} r d\varphi dr &= \int_0^2 dr \int_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} \frac{r^2 \cos \varphi}{\sqrt{4-r^2}} d\varphi = \int_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}} dr \int_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} \cos \varphi d\varphi = \\ &= \int_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}} dr \sin \varphi \Big|_{-\arccos(r/2)}^{\arccos(r/2)} = \int_0^2 \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}} \sqrt{4-r^2} dr = \int_0^2 r^2 dr = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Перейдите к переменным, в которых область интегрирования имеет вид прямоугольника, и вычислите интеграл.

Задача 9

$$\iint_D \frac{(x+y)^2}{x} dx dy; \quad D = \{(x, y) | 1-x \leq y \leq 3-x, \quad \frac{x}{2} \leq y \leq 2x\}.$$

Область интегрирования имеет вид прямоугольника – значит, нам нужно, чтобы граница каждого интеграла изменялась от одной константы до другой константы.

$$\begin{cases} u := x + y \Rightarrow 1 \leq u \leq 3 \text{ из 1-го нер-ва.} \\ v := \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq v \leq 2 \text{ из 2-го нер-ва.} \end{cases}$$

Т.е. с помощью подобной замены мы смогли выполнить поставленную задачу (обе координаты ограничены только константами и не зависят друг от друга).

Выражаем теперь, обратно, x и y через u и v .

$$x = u - y.$$

$$\begin{cases} y = v \cdot x = v \cdot (u - y) = v \cdot u - v \cdot y \Rightarrow y = \frac{v \cdot u}{1 + v}; \\ x = u - \frac{v \cdot u}{1 + v} = \frac{u + uv - uv}{1 + v} = \frac{u}{1 + v}. \end{cases}$$

Считаем якобиан. Для удобства взятия производной, лучше игрек

$$\text{перепишем как } y = \frac{v \cdot u}{1 + v} = u - \frac{u}{1 + v}.$$

$$J = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{u}{1+v}\right)_u & \left(u - \frac{u}{1+v}\right)_u \\ \left(\frac{u}{1+v}\right)_v & \left(u - \frac{u}{1+v}\right)_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{1+v} & \frac{v}{1+v} \\ \frac{-u}{(1+v)^2} & \frac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{u}{(1+v)^3} + \frac{uv}{(1+v)^3} = \frac{u(1+v)}{(1+v)^3} = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

Теперь перепишем функцию в новых координатах.

$$f = \frac{(x+y)^2}{x} = \frac{u^2}{u/(1+v)} = u(1+v).$$

Всё, теперь мы готовы брать интеграл.

$$\int_{1/2}^2 dv \int_1^3 (1+v) \cdot u \cdot \left| \frac{u}{(1+v)^2} \right| du = [\text{помним, что } u - \text{положительный}] =$$

$$\int_{1/2}^2 \frac{1}{1+v} \int_1^3 u^2 du = \int_{1/2}^2 \frac{1}{1+v} \cdot \left(\frac{u^3}{3} \Big|_1^3 \right) =$$

$$= \int_{1/2}^2 \frac{1}{1+v} \cdot \frac{26}{3} dv = \frac{26}{3} \int_{1/2}^2 \frac{1}{1+v} dv.$$

$$\text{Замена} \begin{cases} t = 1+v; \\ dt = dv; \\ v \in [1/2, 2] \implies t \in [3/2, 3] \end{cases}$$

$$\dots = \frac{26}{3} \int_{3/2}^3 \frac{1}{t} = \frac{26}{3} \left(\ln t \Big|_{3/2}^3 \right) = \frac{26}{3} \cdot (\ln 3 - \ln(3/2)) = \boxed{\frac{26}{3} \ln 2}.$$

Задача 10

$$\iint_D xy(x+y) dx dy, \quad D = \left\{ (x, y) \mid -1 \leq x - y \leq 1, \frac{1}{x} \leq y \leq \frac{2}{x} \right\}$$

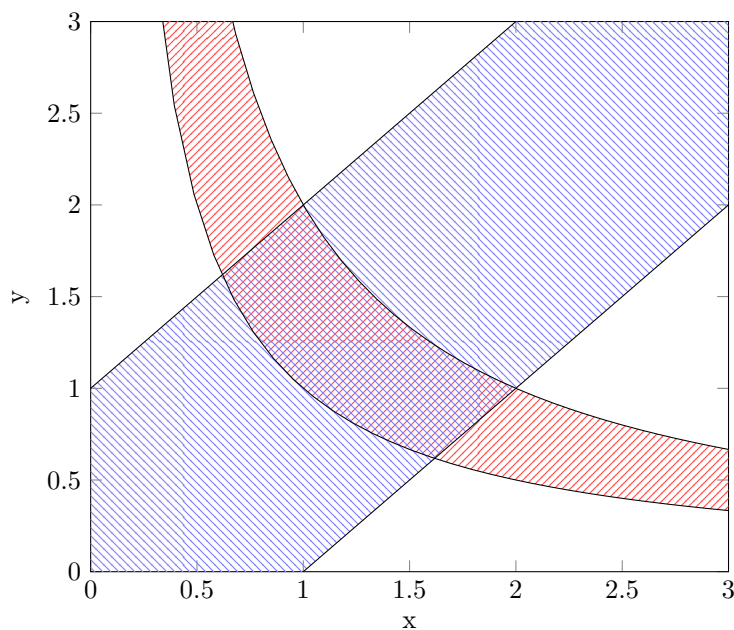
$$\begin{cases} u = x - y & u \in [-1, 1] \\ v = xy & v \in [1, 2] \end{cases} \Rightarrow x = u + y \Rightarrow v = uy + y^2 \Rightarrow y = \frac{-u \pm \sqrt{u^2 + 4v}}{2}$$

$$u^2 + 4v \geq 4 \Rightarrow \sqrt{u^2 + 4v} \geq 2 \Rightarrow y_- \leq \frac{-u - 2}{2} \Rightarrow y_- < 0. \text{ По картинке } y > 0 \Rightarrow y = y_+ = \frac{-u + \sqrt{u^2 + 4v}}{2}$$

$$x = u + y = u + \frac{-u + \sqrt{u^2 + 4v}}{2} = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4v}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4v}}{2} \\ y = \frac{-u + \sqrt{u^2 + 4v}}{2} \end{cases} \Rightarrow J = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{u}{2\sqrt{u^2 + 4v}} & \frac{1}{\sqrt{u^2 + 4v}} \\ -\frac{1}{2} + \frac{u}{2\sqrt{u^2 + 4v}} & \frac{1}{\sqrt{u^2 + 4v}} \end{pmatrix} \quad |J| = \frac{1}{\sqrt{u^2 + 4v}}$$

$$\int_{-1}^1 du \int_1^2 v \left(\frac{u + \sqrt{u^2 + 4v}}{2} + \frac{-u + \sqrt{u^2 + 4v}}{2} \right) |J| dv = \int_{-1}^1 du \int_1^2 v \frac{\sqrt{u^2 + 4v}}{\sqrt{u^2 + 4v}} dv = \int_{-1}^1 du \int_1^2 v dv = 3$$



Задача 11

$$\iint_D xy dx dy; \quad D = \{(x, y) \mid x^3 \leq y \leq 2x^3, 2x \leq y^2 \leq 3x\}.$$

$$\begin{cases} u = \frac{y}{x^3} \Rightarrow 1 \leq u \leq 2; \\ v = \frac{y^2}{x} \Rightarrow 2 \leq v \leq 3 \end{cases}$$

Выражаем x и y :

$$x = \frac{y^2}{v}.$$

$$\begin{cases} y = x^3 \cdot u = \frac{y^6}{v^3} \cdot u \implies \frac{1}{y^5} = \frac{u}{v^3} \implies y = \sqrt[5]{\frac{v^3}{u}} = v^{3/5} \cdot u^{-1/5}; \\ x = \frac{y^2}{v} = v^{6/5} \cdot u^{-2/5} \cdot v^{-1} = v^{1/5} \cdot u^{-2/5} \end{cases}$$

Перепишем функцию:

$$f = xy = v^{3/5} \cdot v^{1/5} \cdot u^{-1/5} \cdot u^{-2/5} = v^{4/5} \cdot u^{-3/5}.$$

Ищем якобиан.

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(v^{1/5} \cdot u^{-2/5}\right)_u & \left(v^{3/5} \cdot u^{-1/5}\right)_u \\ \left(v^{1/5} \cdot u^{-2/5}\right)_v & \left(v^{3/5} \cdot u^{-1/5}\right)_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2/5 \cdot v^{1/5} \cdot u^{-7/5} & -1/5 \cdot v^{3/5} \cdot u^{-6/5} \\ 1/5 \cdot v^{-4/5} \cdot u^{-2/5} & 3/5 \cdot v^{-2/5} \cdot u^{-1/5} \end{vmatrix} \\ &= \\ &= -\frac{6}{25} v^{-1/5} \cdot u^{-8/5} + \frac{1}{25} v^{-1/5} \cdot u^{-8/5} = -\frac{v^{-1/5} \cdot u^{-8/5}}{5}. \end{aligned}$$

Всё готово для подсчёта интеграла. Заметим, что $J < 0 \implies |J| = -J$.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 du \int_2^3 v^{4/5} \cdot u^{-3/5} \cdot |J| dv = \frac{1}{5} \int_1^2 du \int_2^3 v^{4/5} \cdot u^{-3/5} \cdot v^{-1/5} \cdot u^{-8/5} dv = \\ &= \frac{1}{5} \int_1^2 du \int_2^3 v^{3/5} \cdot u^{-11/5} dv = \\ &= \frac{1}{5} \int_1^2 u^{-11/5} du \left(\frac{8}{5} \cdot v^{5/8} \Big|_2^3 \right) = \frac{1}{8} \cdot (3^{8/5} - 2^{8/5}) \cdot \int_1^2 u^{-11/5} du = \frac{1}{8} \cdot \\ &= (3^{8/5} - 2^{8/5}) \cdot \left(-\frac{5}{6} u^{-6/5} \Big|_1^2 \right) du = \\ &= \boxed{\frac{5}{46} \cdot (3^{8/5} - 2^{8/5}) \cdot (1 - 2^{-6/5})}. \end{aligned}$$

Задача 12

$$\iint_D \frac{x^2 \sin(xy)}{y} dx dy, \quad D = \{(x, y) \mid y \leq x^2 \leq 2y, 2x \leq y^2 \leq 3x\}$$

Хотим, чтобы область, заданная пересечением парабол, была прямоугольником в какой-то системе координат

Перейдем к координатам u и v таким, что $u = \frac{x^2}{y}$, $v = \frac{y^2}{x}$.

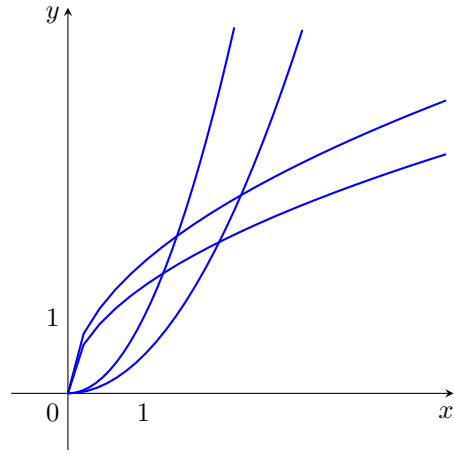
Тогда $D = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 2, 2 \leq v \leq 3\}$

Выражение старых координат через новые:

$$u = \frac{x^2}{y} \Rightarrow y = \frac{x^2}{u} \Rightarrow v = \frac{x^4}{u^2 x} = \frac{x^3}{u^2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{u^2 v}, y = \sqrt[3]{\frac{u^4 v^2}{u^3}} = \sqrt[3]{uv^2}$$

$$J = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{v}{u}} & \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{v^2}{u^2}} \\ \frac{1}{3} \sqrt[3]{\frac{u^2}{v^2}} & \frac{2}{3} \sqrt[3]{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{4}{9} \sqrt[3]{\frac{uv}{uv}} - \frac{1}{9} \sqrt[3]{\frac{u^2 v^2}{u^2 v^2}} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 du \int_2^3 \frac{\sqrt[3]{u^4 v^2} \sin(uv)}{\sqrt[3]{uv^2}} \cdot \frac{1}{3} dv = \frac{1}{3} \int_1^2 u du \int_2^3 \sin(uv) dv = \\ &= \frac{1}{3} \int_1^2 u du \left(-\frac{1}{u} \cos(uv) \right) \Big|_2^3 = \frac{1}{3} \int_1^2 (\cos 2u - \cos 3u) du - \frac{1}{u} \cos(uv) \Big|_2^3 = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \sin 2u - \frac{1}{3} \sin 3u \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} (\sin 4 - \sin 2) - \frac{1}{3} (\sin 6 - \sin 3) \right) \end{aligned}$$



Задайте в цилиндрических координатах множество D , заданное неравенствами в декартовых координатах. Предпологаю функцию f непрерывной на D , преобразуйте интеграл в цилиндрических координатах к повторному.

Задача 13

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4.$$

- Первое неравенство:

$$r^2 \leq 1 \implies r \in [0, 1].$$

- Второе неравенство:

$$r^2 + z^2 \leq 4 \implies |z| \leq \sqrt{4 - r^2} \implies z \in [-\sqrt{4 - r^2}, \sqrt{4 - r^2}].$$

Ограничений на φ никаких нет. Можем приступить к записи интеграла. Помним, что в цилиндрических координатах $|J| = r$.

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dr \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \cdot r \, dz.$$

Задача 14

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, \quad x^2 + y^2 \leq z^2.$$

• Первое нер-во.

$$x^2 + y^2 \leq 2z - z^2 \iff r^2 \leq 2z - z^2.$$

Значит, значение $2z - z^2$ обязано быть положительным. Парабола с нулями в 0 и 2 $\implies z \in [0, 2]$.

В таком случае $r \in [0, \sqrt{2z - z^2}]$.

• Второе нер-во.

$$r^2 \leq z^2 \implies r \in [0, |z|]. \text{ Так как } z \geq 0, \text{ то } |z| = z.$$

Заметим, что при $z \in [0, 1]$ всегда выполнено $z \geq z^2 \iff 2z \geq 2z^2 \iff \sqrt{2z - z^2} \geq z$.

При $z \in [1, 2]$ всегда выполнено $z \leq z^2 \iff \sqrt{2z - z^2} \leq z$.

Поэтому на промежутке $[0, 1]$ радиус ограничен z , а на промежутке $[1, 2]$ выражением $\sqrt{2z - z^2}$.

На φ ограничений нет, модуль якобиана равен r .

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_0^1 dz \int_0^z f \cdot r \, dr + \int_1^2 dz \int_0^{\sqrt{2z-z^2}} f \cdot r \, dr \right].$$

Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислите интеграл.

Задача 15

$$\iiint_D z \, dx \, dy \, dz \quad D = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\} \Rightarrow D = \{(r, \varphi, z) | r^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 z \, dz \int_0^z r \, dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 z \frac{z^2}{2} \, dz = 2\pi \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$$

Задача 16

$$\iiint_D z^2 \, dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \geq 1, \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}.$$

• Первое нер-во.

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 1 \iff r^2 \geq 1 \implies r \geq 1.$$

• Второе нер-во.

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z \implies \text{как в номере 14, } z \in [0, 2]; \quad r \leq \min(z, \sqrt{2z - z^2}).$$

По φ область не ограничена. Модуль якобиана равен r . Сразу вынесу все константы за интегралы:

$$\begin{aligned} & \int_0^1 z^2 \, dz \int_0^z r \, dr \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi + \int_1^2 z^2 \, dz \int_0^{\sqrt{2z-z^2}} r \, dr \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi = 2\pi \cdot \left[\int_0^1 z^2 \, dz \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^z \right) + \int_1^2 z^2 \, dz \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{2z-z^2}} \right) \right] = \\ & \pi \left[\int_0^1 z^4 \, dz + \int_1^2 2z^3 - z^4 \, dz \right] = \pi \left[\left(\frac{z^5}{5} \Big|_0^1 \right) + \left(\frac{2z^4}{4} - \frac{z^5}{5} \Big|_1^2 \right) \right] = \\ & \pi \cdot \left(\frac{1}{5} + 8 - \frac{32}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \boxed{\frac{3\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Задайте в сферических координатах множество D , заданное неравенствами в декартовых координатах. Предполагая функцию f непрерывной на D , преобразуйте интеграл в сферических координатах к повторному.

Задача 17

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1; \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z.$$

Используем следующую замену:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \Theta; \\ y = r \sin \varphi \sin \Theta; \\ z = r \cos \Theta; \end{cases}$$

• Первое неравенство:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \implies r^2 \leq 1 \implies r \in [0, 1].$$

• Второе неравенство:

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z \iff r^2 \leq 2r \cos \Theta \iff r \leq 2 \cos \Theta.$$

Заметим, что при этих ограничениях: $\begin{cases} 2 \cos \Theta > 1 \implies r \in [0, 1]; \\ 2 \cos \Theta \leq 1 \implies r \in [0, 2 \cos \Theta] \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} r \in [0, 1], \quad \Theta \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi \right]; \\ r \in [0, 2 \cos \Theta], \quad \Theta \in \left[0, \frac{\pi}{3} \right) \end{cases}$$

φ остаётся без ограничений.

Якобиан в сферических координатах (при данной! замене) равен $r^2 \sin \Theta$.

Итог:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_0^{\pi/3} d\Theta \int_0^{2 \cos \Theta} f \cdot r^2 \sin \Theta \, dr + \int_{\pi/3}^{\pi} d\Theta \int_0^1 f \cdot r^2 \sin \Theta \, dr \right).$$

Задача 18

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y, \quad x^2 + y^2 \geq z^2.$$

• Первое нер-во.

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y \iff r^2 \leq 2r \sin \varphi \sin \Theta \iff r \leq 2 \sin \varphi \sin \Theta \implies r \in [0, 2 \sin \varphi \sin \Theta].$$

Также мы должны учесть, что $\sin \varphi$ обязан быть неотрицательным, ведь $r \geq 0 \wedge \sin \Theta \geq 0$.

То есть $\varphi \in [0, \pi]$.

• Второе нер-во.

$$x^2 + y^2 \geq z^2 \iff r^2 \sin^2 \Theta \geq r^2 \cos^2 \Theta \implies \operatorname{tg}^2 \Theta \geq 1 \implies |\operatorname{tg} \Theta| \geq 1.$$

$$\text{Значит, } \Theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \right].$$

Модуль Якобиана в сферических координатах с данной заменой – $r^2 \sin \Theta$.

Всё готово, выписываем интеграл.

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\Theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2 \sin \varphi \sin \Theta} f \cdot r^2 \sin \Theta \, dr.$$

Перейдя к сферическим координатам, вычислите интеграл.

Задача 19

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz; D = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y^2 + z^2 \leq$$

$$x^2, x \geq 0\}.$$

[picture is coming soon]

Лайфхак: если мы видим, что с какой-то координатой возникают потенциальные трудности, делаем её в качестве оси, отвечающей за "широту". В данной ситуации нам подойдёт следующая замена:

$$\begin{cases} x = r \cos \Theta; \\ y = r \sin \varphi \sin \Theta; \\ z = r \cos \varphi \sin \Theta \end{cases} \quad \begin{cases} \Theta \in [0, \pi]; \\ \varphi \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

- Первое неравенство.

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \implies r^2 \leq 1 \implies r \in [0, 1].$$

- Третье неравенство.

$$x \geq 0 \implies r \cos \Theta \geq 0 \implies \cos \Theta \geq 0 \implies \Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

(Мы использовали тот факт, что $r \geq 0$).

- Второе неравенство.

$$y^2 + z^2 \leq x^2 \iff r^2 \sin^2 \varphi \cdot \sin^2 \Theta + r^2 \cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \Theta \leq r^2 \cos^2 \Theta \implies$$

$$r^2 \sin^2 \Theta \leq r^2 \cos^2 \Theta \iff \operatorname{tg}^2 \Theta \leq 1 \implies \Theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

На φ ограничений нет. $|J| = r^2 \sin \Theta$, как и при обычной сферической замене.

Интегрируем:

$$\int_0^{\pi/4} d\Theta \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r^2 \sin \Theta d\varphi = 2\pi \int_0^{\pi/4} \sin \Theta d\Theta \int_0^1 r^4 dr = 2\pi \cdot \left(-\cos \Theta \Big|_0^{\pi/4} \right).$$

$$\left(\frac{r^5}{5} \Big|_0^1 \right) = \boxed{\frac{2\pi}{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)}.$$

Задача 20

$$\iint_D z dx dy dz, D = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1, z \geq 0 \right\}$$

Сначала сделаю финт ушами, и заменю:

$$\begin{cases} x = 2u; \\ y = 3v; \\ z = w \end{cases}$$

Ищем якобиан,

$$J = \begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_w & y_w & z_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6.$$

Т.е. множитель 6 мы добавим под интеграл в дальнейшем.

Теперь производим привычную замену на сферические координаты:

$$\begin{cases} u = r \cos \varphi \sin \Theta; \\ v = r \sin \varphi \sin \Theta; \\ w = r \cos \Theta \end{cases}$$

$|J| = r^2 \sin \Theta$, это наряду с 6 появится под интегралом.

Теперь перепишем неравенства.

$$\bullet \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 \leq 1 \iff \frac{4u^2}{4} + \frac{9v^2}{9} + w^2 \leq 1 \iff r^2 \leq 1 \implies$$

$$r \in [0, 1].$$

$$\bullet z \geq 0 \iff w \geq 0 \iff r \cos \Theta \geq 0 \implies \cos \Theta \geq 0 \implies \Theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$f = z = w = r \cos \Theta.$$

Всё, теперь пишем интеграл. На φ ограничений нет. Сразу выносим константы.

$$\int_0^{\pi/2} \cos \Theta \, d\Theta \int_0^1 r \, dr \int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi = \left(\sin \Theta \Big|_0^{\pi/2} \right) \cdot \left(\frac{r^2}{2} \Big|_0^1 \right) \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{2} = \boxed{\pi}.$$