Семинарский лист 2.6

Денис Козлов Telegram

Елизавета Орешонок Telegram

Ира Голобородько Telegram

Версия от 12.12.2020 13:54

Переходя к полярным или обощенным полярным координатам, вычислите площадь фигуры, ограниченной кривой.

Задача 1

$(x^2+y^2)^2 = 2x^3$

В полярных координатах: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $|J| = r$

$(x^2+y^2)^2 = 2x^3 \;\Leftrightarrow\; r^4 = 2r^3\cos^3\varphi \;\Leftrightarrow\; r = 2\cos^3\varphi \;\Leftrightarrow\; \cos\varphi = \sqrt[3]{\frac{r}{2}}$

$r \geq 0 \;\Rightarrow\; \cos\varphi \geq 0 \;\Rightarrow\; \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Площадь фигуры:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^6\varphi\,d\varphi = 2\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\varphi\,d\varphi = \frac{\cos^5\varphi\sin\varphi}{3}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{3}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{5\cos^3\varphi\sin\varphi}{12}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{4}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\varphi\,d\varphi = \frac{5\cos\varphi\sin\varphi}{8}\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{8}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{5\pi}{8}$$

Задача 2

$\underline{(x^2+y^2)^3 = x^4+y^4}$

- Используем пол. координаты: $\begin{cases} x = r\cos\varphi; \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$

- Кривая становится $r^6 = r^4\cos^4\varphi + r^4\sin^4\varphi \iff r^2 = \cos^4\varphi + \sin^4\varphi = (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 - 2\cos^2\varphi\,\sin^2\varphi =$

$1 - \dfrac{\sin^2 2\varphi}{2} \implies r = \sqrt{1 - \dfrac{\sin^2 2\varphi}{2}}.$

- $S = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{1-\sin^2 2\varphi/2}} \underbrace{r}_{\text{Якобиан}} \, dr = \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right) \, d\varphi = \frac{1}{2} \int\limits_0^{2\pi} 1 - \frac{(1/2 - 1/2\cos 4\varphi)}{2} = \frac{1}{4} \int\limits_0^{2\pi} \frac{3}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{2} \, d\varphi =$

$\frac{3\pi}{4} + \frac{1}{16} \int\limits_0^{8\pi} \cos\Theta \, d\Theta = \boxed{\frac{3\pi}{4}}$.

Задача 3

$(x^2 + y^2)^2 = xy$

В полярных координатах: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$

$(x^2 + y^2)^2 = xy \; \Leftrightarrow \; r^4 = r^2 \sin\varphi\cos\varphi \; \Leftrightarrow \; r^2 = \frac{1}{2}\sin 2\varphi \; \Leftrightarrow \; \sin 2\varphi = 2r^2$

$r^2 \geq 0 \; \Rightarrow \; \sin 2\varphi \geq 0 \; \Rightarrow \; \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

Площадь фигуры:

$$S = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi)\,d\varphi + \int\limits_\pi^{\frac{3\pi}{2}} r^2(\varphi)\,d\varphi\right) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\varphi\,d\varphi + \int\limits_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \sin 2\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\cos 2\varphi\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \cos 2\varphi\,\Big|_\pi^{\frac{3\pi}{2}}\right) = -\frac{1}{4}\left(-1 - 1 - 1 - 1\right) = 1$$

Задача 4

$\underline{x^4 + y^4 = x^2 y}$

- Видим, что $x^4 + y^4 \geqslant 0$ и $x^2 \geqslant 0 \implies y \geqslant 0$.

- x может быть любым. Однако кривая симметрична относительно x, поэтому можно посчитать интеграл из предположения $x \geqslant 0$, а после удвоить его.

- Получили ограничение на угол $\varphi \in [0, \pi/2]$.

Обобщённые полярные координаты.

$$\begin{cases} x = r\cos^\alpha\varphi; \\ y = r\sin^\alpha\varphi; \\ J = r \cdot \alpha \cdot \sin^{\alpha-1}\varphi \cdot \cos^{\alpha-1}\varphi \end{cases}$$

Нам подходит $\alpha = \frac{1}{2}$.

- В этом случае $x^4 + y^4 = r^4 = r^3 \cos\varphi\sqrt{\sin\varphi} \implies r = \cos\varphi\sqrt{\sin\varphi}$. Нам интересны точки, т.ч. $r \in [0, \; \cos\varphi\sqrt{\sin\varphi}]$.

- $S = 2 \cdot \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{\cos\varphi\sqrt{\sin\varphi}} \underbrace{\frac{rdr}{2\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}}}_{\text{Якобиан}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\varphi \cdot \sin\varphi}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}} \, d\varphi.$

Замена $\begin{cases} t = \sqrt{\operatorname{tg}\varphi}; \\ dt = \dfrac{d\varphi}{2\cos^2\varphi\,\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}}; \\ t \in [0,\ +\infty] \end{cases}$

$$\dots = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^4\varphi\sin\varphi\sqrt{\sin\varphi}}{\sqrt{\sin\varphi\cos\varphi}\cdot\sqrt{\cos\varphi}}\ dt = \int\limits_0^{+\infty} \cos^3\varphi\sin\varphi\ dt = \int\limits_0^{+\infty} \cos^4\varphi\operatorname{tg}\varphi\ dt = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1+t^4}\right)^2 t^2\ dt =$$

$\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+2t^4+t^8}\ dt.$ = тут применяем Остроградского, но хочется применить пулю в рот =

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^2}dt = \left.\frac{at^3+bt^2+ct+d}{1+t^4}\right|_0^{\infty} + \int\limits_0^{\infty} \frac{et^3+ft^2+gt+h}{t^4+1}dt$$

$$\frac{t^2}{(1+t^4)^2} = \frac{3at^2+2bt+c+3at^6+2bt^5+c^4-4at^6-4bt^5-4ct^4-4dt^3}{(1+t^4)^2} + \frac{et^3+ft^2+gt+h}{t^4+1}$$

$$t^2 = -at^6-2bt^5-3ct^4-4dt^3+3at^2+2bt+c+et^7+ft^6+gt^5+ht^4+et^3+ft^2+gt+h$$

$$\begin{cases} e=0 \\ f-a=0 \\ g-2b=0 \\ h-3c=0 \\ e-4d=0 \\ f+3a=1 \\ g+2b=0 \\ h+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e=0 \\ d=0 \\ g=0 \\ b=0 \\ h=0 \\ c=0 \\ a=\dfrac{1}{4} \\ f=\dfrac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^4)^2}dt = \frac{1}{4}\left.\frac{t^3}{1+t^4}\right|_0^{\infty} + \frac{1}{4}\int\limits_0^{\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt = \frac{1}{4}\int\limits_0^{\infty} \frac{t^2}{t^4+1}dt$$

Я понизил степень знаменателя и ожидаемую длительность жизни в два раза

Задача 5

$(x^2+y^2)^3 = x^4 y$

В полярных координатах: $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$

$(x^2+y^2)^3 = x^4 y \ \Leftrightarrow\ r^6 = r^5 \sin\varphi\cos^4\varphi \ \Leftrightarrow\ r = \sin\varphi\cos^4\varphi$

$r \geq 0, \cos^4\varphi \geq 0 \ \Rightarrow\ \sin\varphi = \dfrac{r}{\cos^4\varphi} \geq 0 \ \Rightarrow\ \varphi \in [0;\pi]$

Площадь фигуры:

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi r^2(\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sin^2\varphi\cos^8\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi (1-\cos^2\varphi)\cos^8\varphi\,d\varphi =$$

$$\frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\pi \cos^8\varphi\,d\varphi - \int\limits_0^\pi \cos^{10}\varphi\,d\varphi\right) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\pi \cos^8\varphi\,d\varphi - \frac{\cos^9\varphi\sin\varphi}{10}\,\Big|_0^\pi - \frac{9}{10}\int\limits_0^\pi \cos^8\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$\frac{1}{20}\int\limits_0^\pi \cos^8\varphi\,d\varphi = \frac{1}{20}\left(\frac{\cos^7\varphi\sin\varphi}{8}\,\Big|_0^\pi + \frac{7}{8}\int\limits_0^\pi \cos^6\varphi\,d\varphi\right) = \frac{7}{160}\left(\frac{\cos^5\varphi\sin\varphi}{6}\,\Big|_0^\pi + \frac{5}{6}\int\limits_0^\pi \cos^4\varphi\,d\varphi\right) =$$

$$\frac{7}{192}\left(\frac{\cos^3\varphi\sin\varphi}{4}\,\Big|_0^\pi + \frac{3}{4}\int\limits_0^\pi \cos^2\varphi\,d\varphi\right) = \frac{7}{256}\left(\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{2}\,\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \varphi\,d\varphi\right) = \frac{7\pi}{512}$$

Найдите объем тела, заданного неравенствами.

Задача 7

$\underline{x^2+y^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0,\ x+y+z \leqslant 4}$

- $x^2+y^2 \leqslant 1 \implies x \in \left[-\sqrt{1-y^2},\ \sqrt{1-y^2}\right];\ \ y \in [-1,\ 1].$

- $x+y+z \leqslant 4 \implies z \leqslant 4-x-y.$ Условие $x+y \leqslant 4$ при данных ограничениях выполнено всегда.

$$S = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int\limits_{0}^{4-x-y} dz = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 4-x-y\ \ dx = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} 4-y\ \ dx - \underbrace{\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\ dx}_{0} =$$

$$2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\cdot(4-y)\,dy = 8\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,dy - 2\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\cdot y\,dy.$$

Замена $\begin{cases} t = \arcsin y; \\ t \in [-\pi/2,\ \pi/2]\,; \\ dt = \dfrac{dy}{\sqrt{1-t^2}} \end{cases}$

$$\ldots 8\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} dt - 2\underbrace{\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t\, dt}_{0} = \boxed{8\pi}\,.$$

Задача 8

$\underline{x^2+y^2 \leqslant 1,\ z \geqslant 0,\ x+y+z \leqslant 1}$

- $x^2+y^2 \leqslant 1 \implies x \in \left[-\sqrt{1-y^2},\ \sqrt{1-y^2}\right];\ \ y \in [-1,\ 1].$

- $x+y+z \leqslant 1 \implies z \leqslant 1-x-y.$

- Также необходимо условие $x+y \leqslant 1$.

При $y \in [-1,\ 0]$ оно соблюдается, в ином случае x сверху придётся ограничить значением $1-y$.

Советую сделать сначала предыдущий номер, там подробно описана замена, которую я использую.

- $$S = \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dx \int\limits_{0}^{1-x-y} dz + \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} dx \int\limits_{0}^{1-x-y} dz = 2\int\limits_{-1}^{0} (1-y)\sqrt{1-y^2}\, dy - \underbrace{\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\, dx}_{0} +$$

$$\int\limits_{0}^{1} (1-y)\left((1-y)+\sqrt{1-y^2}\right)\, dy - \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} x\, dx = 2\int\limits_{-1}^{0} \sqrt{1-y^2}\, dy - 2\int\limits_{-1}^{0} y\sqrt{1-y^2}\, dy +$$

$$+\int\limits_{0}^{1} \left(1-2y+y^2\right)\, dy + \int\limits_{0}^{1} (1-y)\sqrt{1-y^2}\, dy - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} 1-2y+y^2-1+y^2\ \, dy = 2\int\limits_{-\pi/2}^{0} dt - 2\int\limits_{-\pi/2}^{0} \sin t\, dt +$$

$$+\left(t-t^2+\frac{t^3}{3}\ \Bigg|_{0}^{1}\right) + \int\limits_{0}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy - \int\limits_{0}^{1} y\,\sqrt{1-y^2}\, dy - \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{1} -2y+2y^2\ \, dy = \pi + -2\left(-\cos t\ \Big|_{-\pi/2}^{0}\right) + \frac{1}{3} +$$

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} dt - \int\limits_{0}^{\pi/2} \sin t\, dt + \int\limits_{0}^{1} y-y^2\ \, dy = \pi + 2 + \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} + \left(\cos t\ \Bigg|_{0}^{\pi/2}\right) + \left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\ \Bigg|_{0}^{1}\right) = \frac{3\pi}{2} + 2 + \frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{3\pi}{2}+\frac{3}{2}}.$$

Задача 9

$$x^2+y^2\le 1,\ 0\le z\le 1-2y^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x\in[-1;1],\ y\in[-\sqrt{1-x^2};\sqrt{1-x^2}],\ z\in[0;1-2y^2]$$

$$z\ge 0\Rightarrow 1-2y^2\ge 0\Rightarrow y\in\left[-\frac{1}{\sqrt2};\frac{1}{\sqrt2}\right]$$

$$\sqrt{1-x^2}\ge\frac{1}{\sqrt2}\ \Leftrightarrow\ 1-x^2\ge\frac12\ \Leftrightarrow\ x^2\le\frac12\ \Leftrightarrow\ x\in\left[-\frac{1}{\sqrt2};\frac{1}{\sqrt2}\right]$$

Объем фигуры:

$$V=\iiint\limits_D dxdydz=\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt2}}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_0^{1-2y^2}dz+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt2}}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_0^{1-2y^2}dz+\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt2}}^{\frac{1}{\sqrt2}}dx\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt2}}^{\frac{1}{\sqrt2}}dy\int\limits_0^{1-2y^2}dz=$$

$$=\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt2}}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-2y^2)\,dy+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt2}}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1-2y^2)\,dy+\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt2}}^{\frac{1}{\sqrt2}}dx\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt2}}^{\frac{1}{\sqrt2}}(1-2y^2)\,dy=$$

$$=\int\limits_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt2}}dx\cdot\left(y-\frac23y^3\right)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt2}}^{1}dx\cdot\left(y-\frac23y^3\right)\Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}+\int\limits_{-\frac{1}{\sqrt2}}^{\frac{1}{\sqrt2}}dx\cdot\left(y-\frac23y^3\right)\Big|_{-\frac{1}{\sqrt2}}^{\frac{1}{\sqrt2}}=$$

$$=\frac43\int\limits_{\frac{1}{\sqrt2}}^{1}\sqrt{1-x^2}(1+2x^2)\,dx-\frac83\int\limits_{\frac{1}{\sqrt2}}^{1}(1-x^2)^{3/2}\,dx+\left(\sqrt2-\frac{\sqrt2}{3}\right)x\Big|_{-\frac{1}{\sqrt2}}^{\frac{1}{\sqrt2}}$$

Замена: $t=\arcsin x,\ t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right],\ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$$\frac43\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\sin^2t)\,dt-\frac83\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2t)\,dt+\left(2-\frac23\right)=\frac43\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(4\sin^2t-1)\,dt+\frac43=$$

$$=\frac43(-2\cos t\sin t+t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac43=\frac43(-\sin 2t+t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac43=\frac43(1+\frac{\pi}{4})+\frac43=\frac83+\frac{\pi}{3}$$

Задача 10

$\underline{x\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x,\ 0\leqslant z\leqslant x^2y^2}$

- Циллиндрические координаты: $\begin{cases}x=r\cos\varphi;\\ y=r\sin\varphi;\\ z=z\end{cases}$

- $x\leqslant x^2+y^2\leqslant 2x\implies r\cos\varphi\leqslant r^2\leqslant 2r\cos\varphi\implies\cos\varphi\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi\implies\cos\varphi\geqslant 0\implies\varphi\in[-\pi/2,\pi/2]\,.$

- $0\leqslant z\leqslant x^2y^2=r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi=\dfrac{r^4}{4}\sin^2 2\varphi.$

- $$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} dr \int\limits_{0}^{\frac{r^4}{4}\sin^2 2\varphi} r\,dz = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} \frac{r^5}{4}\sin^2 2\varphi\,dr = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\varphi\,d\varphi \int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi} \frac{r^5}{4}\,dr = \frac{1}{4}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\varphi\,d\varphi \left(\frac{r^6}{6}\Big|_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\right) =$$

$$= \frac{63}{24}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2\varphi \cos^6\varphi \quad d\varphi = \frac{63}{24}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\varphi\right)^3 \quad d\varphi = \frac{63}{24}\cdot\frac{1}{16}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\cos 4\varphi)\cdot(1+\cos 2\varphi)^3\,d\varphi =$$

$$\frac{63}{24}\cdot\frac{1}{16}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1-\cos 4\varphi)\left(1+3\cos 2\varphi+3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)+\cos 2\varphi\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 4\varphi\right)\right)\,d\varphi =$$

$$\frac{63}{24\cdot 16}\left(\frac{5}{2}\cdot\pi-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\pi\right) = \boxed{\frac{63}{24\cdot 16}\cdot\frac{7}{4}\pi}.$$

Как мы это получили: воспользуемся периодичностью и поймём, что после подстановки все слагаемые обратятся в 0, за исключением $1+\dfrac{3}{2}$, что даёт вклад $\dfrac{5}{2}$; и $\dfrac{-3}{2}\cdot\cos^2 4\varphi = \dfrac{-3}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos 8\varphi\right)$, что даёт вклад $\dfrac{-3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}$.

($\cos 8\varphi$ аналогично уходит по периодичности).

Задача 11

$$x^2+y^2+z^2 \leqslant 3,\ \ x^2+y^2 \leqslant 2z \quad\Rightarrow\quad r^2 \leqslant 3,\ \ r^2\cos^2\theta \leqslant 2r\cos^2\theta \quad\Rightarrow\quad r \leqslant 2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}, r \leqslant \sqrt{3}$$

Хотим найти пересечение параболоида и сферы для интегрирования

$$x^2+y^2+z^2-3 = x^2+y^2-2z \quad\Rightarrow\quad z^2+2z-3=0 \Rightarrow z=1 \ \textit{отрицательные не подойдут} \Rightarrow \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}} r^2 dr + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{\sqrt{3}} r^2 dr =$$

$$= 2\pi\left(\int\limits_0^{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{8}{3}\frac{\cos^3\theta}{\sin^6\theta}\sin\theta d\theta + \int\limits_{\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3}\sin\theta d\theta\right) = \left\{\begin{array}{rl} t & = \sin\theta \\ \cos^2\theta & = 1-t^2 \\ dt & = \cos\theta d\theta \end{array}\right\} =$$

$$= 2\pi\left(\frac{8}{3}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{1-t^2}{t^5}dt + \sqrt{3}\left(0+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) =$$

$$= 2\pi\left(1+\frac{8}{3}\left(-\frac{9}{16}+\frac{9}{16}\right)\right) = 2\pi$$

Задача 12

$\underline{x^2+y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{x^2+y^2}}$

Циллиндрическая замена.

- $r^2 \leqslant z \leqslant r \implies r \in [0,1]$.

- $$\int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_{r^2}^{r} dz \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int\limits_0^1 r\,dr \int\limits_{r^2}^{r} dz = 2\pi \int\limits_0^1 r^2 - r^3\,dr = 2\pi \int\limits_0^1 r^2 - r^3\,dr = 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \quad \Big|_0^1 \right) = \boxed{\frac{\pi}{6}}.$$

Задача 13

<u>$0 \leqslant z \leqslant 4 - x^2 - y^2,\ z + x^2 \leqslant 1$</u>

Циллиндричекая замена.

- $0 \leqslant z \leqslant 4 - r^2 \implies r \in [0,\,2]$.

- $z + x^2 \leqslant 1 \implies z + r^2\cos^2\varphi \leqslant 1 \implies z \leqslant 1 - r^2\cos^2\varphi \implies r^2\cos^2\varphi \leqslant 1 \implies r^2 \leqslant \dfrac{1}{\cos^2\varphi}$.

Получили $r \leqslant \dfrac{1}{|\cos\varphi|} \implies \dfrac{1}{|\cos\varphi|} \leqslant 2 \implies |\cos\varphi| \geqslant \dfrac{1}{2} \implies \varphi \in [-\pi/3,\, \pi/3] \cup [2\pi/3,\, 4\pi/3]$.

- Разберёмся с границами z. Когда верхняя граница равна $4 - r^2$? Должно выполниться неравенство:

$$4 - r^2 < 1 - r^2\cos^2\varphi \iff 3 < r^2(1 - \cos^2\varphi) \iff 3 < r^2\sin^2\varphi \iff \frac{\sqrt{3}}{|\sin\varphi|} < r \implies \frac{\sqrt{3}}{|\sin\varphi|} \leqslant 2.$$

Следовательно, $\varphi \in [\pi/3,\, 2\pi/3] \cup [4\pi/3 \cup 5\pi/3]$, что невозможно при данных ограничениях. Поэтому верхняя граница всегда $1 - r^2\cos^2\varphi$.

- $$S = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{1/\cos\varphi} r\,dr \int\limits_0^{1-r^2\cos^2\varphi} dz + \int\limits_{2\pi/3}^{4\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{-1/\cos\varphi} r\,dr \int\limits_0^{1-r^2\cos^2\varphi} dz =$$

$$\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{1/\cos\varphi} r - r^3\cos^2\varphi\ \ dr + \int\limits_{2\pi/3}^{4\pi/3} d\varphi \int\limits_0^{-1/\cos\varphi} r - r^3\cos^2\varphi\ \ dr =$$

$$\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\cos^2\varphi \quad \Big|_0^{1/\cos\varphi} \right) + \int\limits_{2\pi/3}^{4\pi/3} d\varphi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\cos^2\varphi \quad \Big|_0^{-1/\cos\varphi} \right) =$$

$$\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2\cos^2\varphi} - \frac{1}{4\cos^2\varphi}\ \ d\varphi + \int\limits_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{1}{2\cos^2\varphi} - \frac{1}{4\cos^2\varphi}\ \ d\varphi = \int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2\cos^2\varphi}\ \ d\varphi + \int\limits_{2\pi/3}^{4\pi/3} \frac{1}{2\cos^2\varphi}\ \ d\varphi = \mathrm{tg}(\pi/3) + \mathrm{tg}(4\pi/3) = \boxed{2\sqrt{3}}.$$

Задача 14

<u>$1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0,\ x \geqslant 0$</u>

- $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4,\ x \geqslant 0 \implies x \in \left[\sqrt{1 - y^2},\ \sqrt{4 - y^2}\right]$.

- $x^2 - y^2 - z^2 \geqslant 0 \implies z \in \left[-\sqrt{x^2 - y^2},\ \sqrt{x^2 - y^2}\right];\ \ x \geqslant |y|.$

- Насчёт границ x. Нижней границей будет $\sqrt{1 - y^2}$, если выполнено нер-во

$|y| \leqslant \sqrt{1 - y^2} \iff |y| \leqslant 1/\sqrt{2} \iff y \in \left[-1/\sqrt{2},\ 1/\sqrt{2}\right].$

Иначе – нижняя граница $|y|$.

- Насчёт границ y. Должно быть верно $|y| \leqslant \sqrt{4 - y^2} \iff |y| \leqslant \sqrt{2} \iff y \in \left[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}\right].$

- $S = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int\limits_{-\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2-y^2}} dz + \int\limits_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int\limits_{-\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2-y^2}} dz + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{4-y^2}} dx \int\limits_{-\sqrt{x^2-y^2}}^{\sqrt{x^2-y^2}} dz =$

$2 \int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{-y}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2 - y^2}\ dx + 2 \int\limits_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2 - y^2}\ dx + 2 \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{x^2 - y^2}\ dx.$