Семинарский лист 3.4

Денис Козлов
Telegram

Елизавета Орешонок
Telegram

Версия от 12.02.2021 19:23

Обоснуйте возможность занесения предела под знак интеграла и вычислите предел.

Найдите область определения функции, заданной интегралом, и исследуйте эту функцию на непрерывность

Задача 7

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}}dx = I(p) \quad \text{в нуле особенности нет, а на бесконечности есть по определению}$$

$$\left|\frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right| \quad \Rightarrow \quad \int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}} \text{ сходится (от 1 потому что интересно только на беск)}$$

$$\text{По признаку сравнения сходится } \int\limits_0^\infty \frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}}dx \forall p$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Признак сравнения порождает Вейрштрасса, поэтому } I(p) \text{ сх. равн} \\ f(x,p) = \dfrac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}}, x > 0 \text{ непр} \end{array}\right\} I(p) \text{ непр на } \mathbb{R}$$

Задача 8

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+p)^2}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{e^{(x+p)^2}}\,dx \text{ особенность только на бесконечности}$$

$(x+p)^2$ — парабола с ветвями вверх, наим. значение 0 достигается при $x=-p$

При $p \geq 0$ $\left|e^{-(x+p)^2}\right| \leq \dfrac{1}{e^{x^2}} < \dfrac{1}{x^2}, \displaystyle\int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+p)^2}\,dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса

При $p<0$ сделаем замену $u = x - p$ и получим интеграл

$$\int\limits_{-p}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \int\limits_{-p}^{0} e^{-u^2}\,du + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-u^2}\,du$$

также сходящийся по признаку Вейерштрасса (док-во аналогично случаю выше)

При этом $e^{-(x+p)^2}$ непрерывна на $[0;+\infty) \times (-\infty;+\infty) \Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+p)^2}\,dx$ непрерывна при $p \in \mathbb{R}$

Задача 9

$$I(p) = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^p x} = 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x} \ \{\text{так только одна особенность в } 0\} \simeq 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^p} \text{ сх. при } p<1$$

Крайняя точка $p=1$ $\quad I(1) = \displaystyle\int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin x} \simeq 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{x}$ расх $\Rightarrow$ по методу крайней точки $I(p<1)$ может не сходиться

Придется подтвердить более потным способом:

$$\left|\frac{1}{\sin^p x}\right| = \left|\frac{1}{\sin x}\right|^p \leqslant \left|\frac{1}{\sin x}\right|^\beta \leqslant \left|\frac{1}{\sin^\beta x}\right| \quad \beta<1 \Rightarrow \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^\beta x} \text{ сх } \Rightarrow \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^p x} \text{ сх равн по Вейрштрассу на } [\alpha,\beta]$$

$\forall[\alpha,\beta] \in (-\infty,1) : I(p)$ сх равн. на $[\alpha,\beta]$
$\forall p \in (-\infty,1) \exists [\alpha,\beta] \in (-\infty,1), p \in [\alpha,\beta] \Rightarrow I(p)$ непр в $p \Rightarrow I(p)$ непр на $(-\infty,1)$

Задача 10

$$I(p) = \int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{(x-p)^2+1} dx$$

$$\left|\frac{\ln x}{(x-p)^2+1}\right| \leqslant \left|\frac{\sqrt{x}}{(x-p)^2}\right|$$

При $p \leqslant 1:$ $\quad \left|\frac{\sqrt{x}}{(x-p)^2}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x^{3/2}}\right| \qquad \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$ сх. $\Rightarrow \int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{(x-p)^2+1} dx$ р. сх. по Вейрштрассу

При $p > 1:$ $\quad \int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{(x-p)^2+1} dx = \underbrace{\int\limits_1^p \frac{\ln x}{(x-p)^2+1} dx}_{\text{const}} + \int\limits_p^\infty \frac{\ln x}{(x-p)^2+1} dx$

$\left|\frac{\sqrt{x}}{(x-p)^2}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x^{3/2}}\right|$ при $p \leqslant x \qquad \Rightarrow \int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{(x-p)^2+1} dx$ равн. сх. по Вейрштрассу

$\frac{\ln x}{(x-p)^2+1}$ непрерывна при $x \geqslant 1, p \in \mathbb{R} \Rightarrow I(p)$ непрервына