Семинарский лист 3.1

Денис Козлов
Telegram

Елизавета Орешонок
Telegram

Версия от 21.01.2021 16:37

Вычислите предел

Задача 1

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{y}^{\sqrt{3}+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}$$

Сделаем замену $x = t + y$, $dx = dt$, перейдя к собственному интегралу:

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+(t+y)^2+y^2} = \lim_{y\to 0}\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+2ty+2y^2+t^2}$$

Функция $\Phi(t;y) = \dfrac{dt}{1+2ty+2y^2+t^2}$ непрерывна на прямоугольнике $[0;\sqrt{3}]\times[-0.5;0.5] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{переходим к } y = 0: \int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t\,\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

Задача 2

$$\lim_{y\to +0}\int\limits_{0}^{1}\frac{x}{y}\,e^{-x^2/y}dx \quad \text{обратим внимание, что подынтегральная функция разрывна:}$$

$$x = 0:\ \frac{0}{y}e^0 = 0 \qquad\qquad y = x^2, y\to 0:\ \frac{x}{x^2}e^{-x^2/x^2}\to\infty$$

Поэтому теорему как в первой задаче применять нельзя. Решаем по-другому

Сделаем замену $t = \dfrac{x^2}{y}$, $dt = \dfrac{2x\,dx}{y} \Leftrightarrow dx = \dfrac{y}{2x}\,dt$:

$$\lim_{y\to +0}\int\limits_{0}^{1/y}\frac{1}{2}\,e^{-t}dt = -\frac{1}{2}\lim_{y\to +0}e^{-t}\,\Big|_0^{1/y} = -\frac{1}{2}\lim_{y\to +0}\left(e^{-\frac{1}{y}} - 1\right) = -\frac{1}{2}\cdot(0-1) = \frac{1}{2}$$

Задача 3

$$\lim_{y\to+\infty}\int\limits_1^2 \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)}dx, \quad G=[1;2]\times[1;+\infty)$$

Область не ограничена (бесконечна по y), значит, функция $f(x,y)$ должна быть равномерно непрерывна. Функция равномерно непрерывна, если её частные производные ограничены:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)} = \frac{\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x+y}-\dfrac{2x\ln(x+y)}{x^2+y^2}}{\ln^2(x^2+y^2)}, \quad \lim_{y\to\infty}\frac{\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x+y}-\dfrac{2x\ln(x+y)}{x^2+y^2}}{\ln^2(x^2+y^2)}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)} = \frac{\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x+y}-\dfrac{2y\ln(x+y)}{x^2+y^2}}{\ln^2(x^2+y^2)}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x+y}-\dfrac{2y\ln(x+y)}{x^2+y^2}}{\ln^2(x^2+y^2)}=0$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}$ ограничены на $G \Rightarrow f$ равном. непр. на G.

$$\lim_{y\to+\infty}\int\limits_1^2 \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)}\,dx = \int\limits_1^2 \lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)}\,dx = \int\limits_1^2 \lim_{y\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{2y}{x^2+y^2}}\,dx =$$

$$= \int\limits_1^2 \lim_{y\to+\infty}\frac{(x+y)^2-2xy}{2y(x+y)}\,dx = \int\limits_1^2 \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{x+y}{2y}-\frac{x}{x+y}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 dx = \frac{x}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$

Найдите множество значений y, при которых интеграл существует в собственном смысле, и исследуйте на этом множестве на непрерывность функцию от y, заданную интегралом.

Задача 5

$f(x,y)=x^y$ интегрируема по Риману при $y>0$,

$$\int\limits_0^1 x^y dx = \frac{1}{y+1}x^{y+1}\Big|_0^1 = \frac{1}{y+1} \text{ — непрерывна при } y\neq -1 \Rightarrow \text{непрерывна при } y>0$$

Задача 6

$f(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ интегрируема по Риману при $y\neq 0$,

$$\int\limits_0^1 \ln(x^2+y^2)dx \text{ непрерывна при } y\neq 0$$

Найдите производную функции, заданной интегралом

Задача 11

$$J(y)=\int\limits_{y}^{y^2} e^{-x^2y}dx\,,\qquad \frac{dJ}{dy}=\int\limits_{y}^{y^2}\frac{\partial}{\partial y}e^{-x^2y}dx+e^{-x^2y}\Big|_{x=y^2}2y-e^{-x^2y}\Big|_{x=y}=$$

$$=\int\limits_{y}^{y^2}-x^2e^{-x^2y}dx+2ye^{-y^5}-e^{-y^3}\text{ удачи лол}$$

Покажите, что функция $u(x)=\int\limits_0^{\pi} e^{x\cos t}dt$ удовлетворяет дифееренциальному уравнению $xu''+u'-xu=0$

Задача 13

$$u(x)=\int\limits_0^{\pi} e^{x\cos t}dt\,,\qquad u'(x)=\int\limits_0^{\pi}\frac{\partial}{\partial x}e^{x\cos t}dt=\int\limits_0^{\pi}\cos t e^{x\cos t}dt\,,\qquad u''(x)=\int\limits_0^{\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{x\cos t}dt=\int\limits_0^{\pi}\cos^2 t e^{x\cos t}dt$$

$$xu''+u'-xu=\int\limits_0^{\pi}x\cos^2 te^{x\cos t}dt+\int\limits_0^{\pi}\cos te^{x\cos t}dt-\int\limits_0^{\pi}xe^{x\cos t}dt=\int\limits_0^{\pi}\left(x\cos^2 t+\cos t-x\right)e^{x\cos t}dt=$$

$$=\int\limits_0^{\pi}\left(\cos t-x\sin^2 t\right)e^{x\cos t}dt=-\int\limits_0^{\pi}x\sin^2 te^{x\cos t}dt+\int\limits_0^{\pi}\underbrace{\cos t}_{dv}\underbrace{e^{x\cos t}}_{u}dt=$$

$$-\int\limits_0^{\pi}x\sin^2 te^{x\cos t}dt+\sin te^{x\cos t}\Big|_0^{\pi}+\int\limits_0^{\pi}x\sin^2 te^{x\cos t}dt=\sin te^{x\cos t}\Big|_0^{\pi}=0$$

Применяя метод дифференцирования по параметру, вычислите интеграл

Задача 15

$$J(p) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1 + p\sin x)}{\sin x} dx\,, \quad p \in [0, 1]$$

$$\frac{d}{dp} J(p) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\ln(1 + p\sin x)}{\sin x} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1 + p\sin x)\sin x} dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{1}{1 + p\sin x} dx$$

$$t = \operatorname{tg} {}^{x}\!/_{2}, \quad x = 2\arctan t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{1}{1 + p\sin x} dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2pt}{1+t^2}} dt = \int\limits_0^{\infty} \frac{2}{t^2 + 2pt + 1} dt = \int\limits_0^{\infty} \frac{2}{(t+p)^2 + 1 - p^2} dt = \left\{ \begin{array}{ll} z & = t + p \\ dt & = dz \end{array} \right\} =$$

$$\int\limits_p^{\infty} \frac{2}{z^2 + 1 - p^2} dz = 2\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \arctan \frac{z}{\sqrt{1-p^2}} \Bigg|_p^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{1-p^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \right) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin\alpha & = p \\ \cos\alpha & = \sqrt{1-p^2} \\ \tan\alpha & = \dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}} \end{array} \right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} (\pi - 2\arcsin p) = \frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}} - \frac{2\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}} = J'(p)$$

$$J(p) = \int J'(p) dp = \int \left(\frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}} - \frac{2\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}} \right) dp = \pi \arcsin p - \int \frac{2\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}} dp = \left\{ \begin{array}{ll} u & = \arcsin p \\ du & = \dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}} dp \end{array} \right\} =$$

$$\pi \arcsin p - \int 2u du = \pi \arcsin p - u^2 + C = \pi\arcsin p - \arcsin^2 p + C = J(p)$$

$$J(p) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1 + p\sin x)}{\sin x} dx, \qquad J(0) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\ln(1)}{\sin x} dx = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \pi \arcsin 0 - \arcsin^2 0 + C = 0 \;\; \Rightarrow \;\; C = 0$$

$$J(p) = \pi \arcsin p - \arcsin^2 p$$

Задача 17

$$J(p) = \int\limits_0^{\pi} \ln\left(1 + 2p\cos x + p^2\right) dx$$

$$J'(p) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial p} \ln\left(1 + 2p\cos x + p^2\right) dx = \int\limits_0^{\pi} \frac{2p + 2\cos x}{1 + 2p\cos x + p^2} dx$$

Применяя интегрирование по параметру под знаком интеграла, вычислите интеграл $a > b > 0$

Задача 18

$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ Интегрирование по параметру — значит нужно найти типа первообразной подынтегральной

Рассмотрим $f(x, y) = x^y$, $\int\limits_a^b f dy = \int\limits_a^b x^y dy = \int\limits_a^b e^{y \ln x} dy = \left. \frac{e^{y \ln x}}{\ln x} \right|_a^b = \frac{e^{b \ln x} - e^{a \ln x}}{\ln x} = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int\limits_0^1 \int\limits_a^b x^y dy dx = \int\limits_a^b \int\limits_0^1 x^y dx dy = \int\limits_a^b \left. \frac{x^{y+1}}{y+1} \right|_0^1 dy = \int\limits_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln(y+1)\big|_a^b = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$