

## Семинарский лист 2.3

Анастасия Григорьева  
[Telegram](#)

Денис Козлов  
[Telegram](#)

Елизавета Орешонок  
[Telegram](#)

Ира Голобородько  
[Telegram](#)

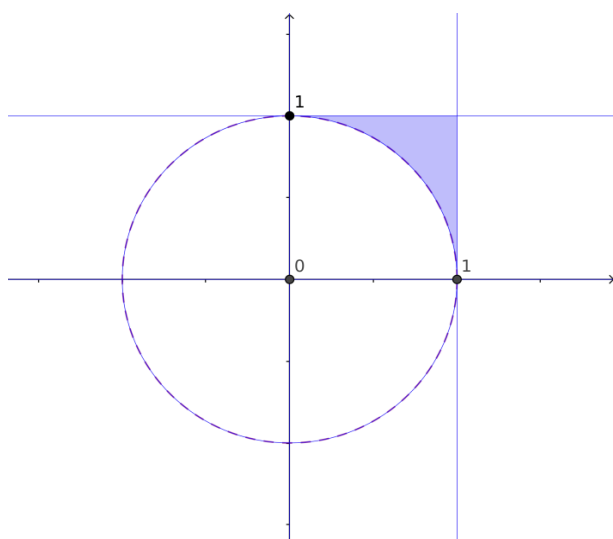
Версия от 21.11.2020 01:28

Предполагая функцию  $f$  непрерывной на  $D$ , приведите двойной интеграл от  $f$  по  $D$  к повторному двумя способами: по  $x$  затем по  $y$  и наоборот.

### Задача 1

$$D = \{(x, y) \mid x, y \in [0; 1], x^2 + y^2 \geq 1\}$$

Множество точек, находящихся в квадрате, ограниченном прямыми  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ , за пределами круга радиуса 1 с центром в точке  $(0, 0)$ :



Интеграл по  $x$  затем по  $y$ :

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 dx = \int_0^1 dy \cdot x \Big|_{\sqrt{1-y^2}}^1 = \int_0^1 dy (1 - \sqrt{1-y^2}) = \int_0^1 dy - \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = 1 - \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy$$

Замена:  $y = \sin u \Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sqrt{1-\sin^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2u + 1}{2} du =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2u du + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{1}{4} \sin 2u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Тогда:

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Очевидно, что повторный интеграл, взятый в другом порядке, будет вычисляться точно так же:

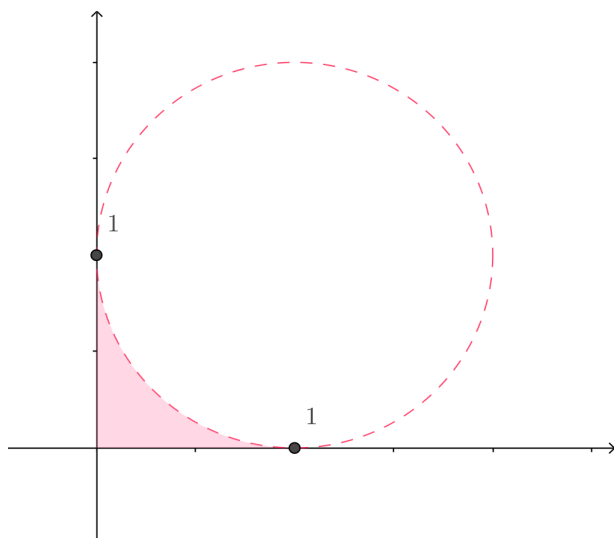
$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 dy = \int_0^1 dy \cdot y \Big|_{\sqrt{1-x^2}}^1 = \int_0^1 dx (1 - \sqrt{1-x^2}) = \int_0^1 dy - \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dy = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Ответ:  $1 - \frac{\pi}{4}$ .

## Задача 2

$$D = \{(x, y) \mid x, y \in [0; 1], (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1\}$$

Множество точек, находящихся в квадрате, ограниченном прямыми  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ , за пределами круга радиуса 1 с центром в точке  $(1, 1)$ :



Интеграл по  $x$  затем по  $y$ :

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} dx = \int_0^1 dy \cdot x \Big|_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} = \int_0^1 dy \left( \sqrt{1-(y-1)^2} + 1 \right) = \int_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2} dy + 1$$

$$\begin{aligned} \text{Замена: } (y-1) = \sin u &\Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2} dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sqrt{1-\sin^2 u} du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 u du = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos 2u + 1}{2} du = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos 2u du + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 du = \frac{1}{4} \sin 2u \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \frac{1}{2} u \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Тогда:

$$\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Очевидно, что повторный интеграл, взятый в другом порядке, будет вычисляться точно так же:

$$\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}+1} dy = \int_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2} dx + 1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Ответ: $1 - \frac{\pi}{4}$ .
------------------------------

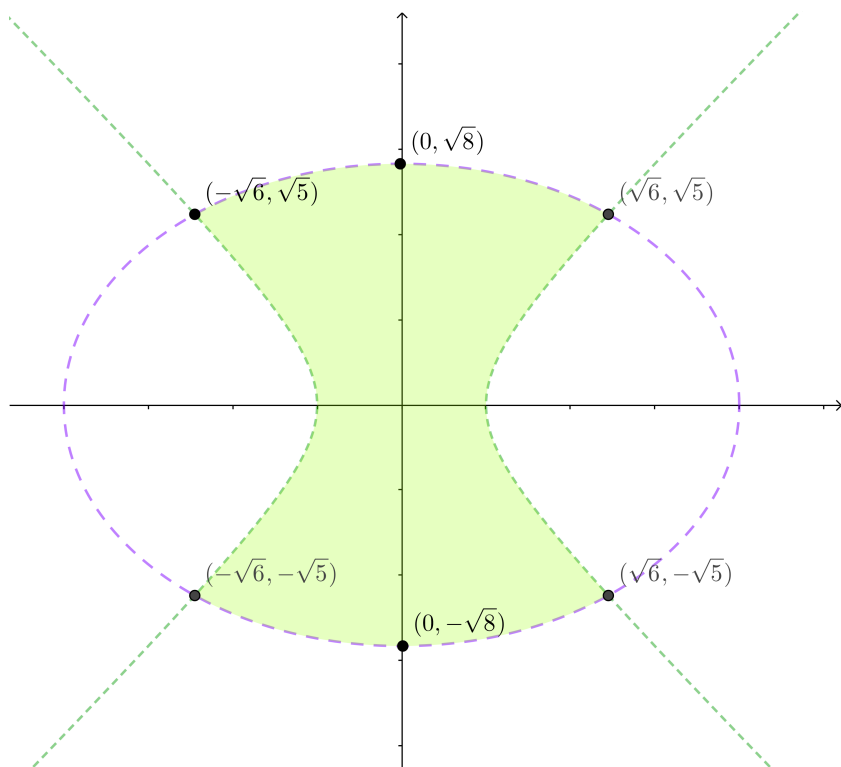
### Задача 3

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + 2y^2 \leq 16, x^2 - y^2 \leq 1\}.$$

- $x^2 + 2y^2 = 16$  – эллипс, нужны точки внутри него;
- $x^2 - y^2 = 1$  – гипербола, нужна область, ограниченная двумя частями ее графика.

$$\text{Найдем координаты точки пересечения кривых: } \begin{cases} x^2 + 2y^2 = 16; \\ x^2 - y^2 = 1; \end{cases} \implies \begin{cases} y = \pm\sqrt{5}; \\ x = \pm\sqrt{6}. \end{cases}$$

Эллипс пересекает ось ординат в точках  $(0, \sqrt{8})$  и  $(0, -\sqrt{8})$ .



Интегрируя по  $x$ , видим два симметричных относительно 0 куска  $\implies$  можем рассмотреть любой из них и продублировать интеграл.

Интегрируем правую часть – интеграл разбивается на участки до перекрытия гиперболой (до координаты 1) и после. Во втором интеграле используем симметричность относительно  $Ox$ .

$$\text{Итого: } I(D, f) = 2 \cdot \left( \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{(16-x^2)/2}}^{\sqrt{(16-x^2)/2}} f(y) dy + 2 \cdot \int_1^{\sqrt{6}} dx \int_{\sqrt{x^2-1}}^{\sqrt{(16-x^2)/2}} f(y) dy \right).$$

Теперь по  $y$ . Тоже используем симметричность и считаем лишь верхнюю часть.

$$I(D, f) = 2 \cdot \left( \int_0^{\sqrt{5}} dy \int_{-\sqrt{1+y^2}}^{\sqrt{1+y^2}} f(x) dx + \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} dy \int_{-\sqrt{16-2y^2}}^{\sqrt{16-2y^2}} f(x) dx \right).$$

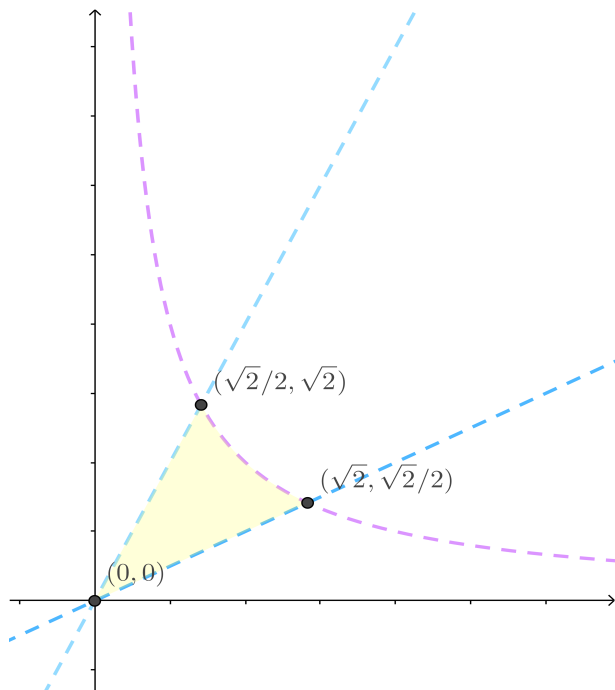
#### Задача 4

$$D = \{(x, y) \mid x, y \geq 0, 0 < xy \leq 1, y \leq 2x, x \leq 2y\}.$$

- $xy = 1$  – гипербола, рассматривается участок под ней;
- $y = 2x$  – прямая, рассматривается полуплоскость под ней;
- $x = 2y$  – прямая, рассматривается полуплоскость над ней.

$$\text{Найдем точки пересечения кривых: } \begin{cases} xy = 1; \\ y = 2x; \end{cases} \implies \begin{cases} y = \sqrt{2}; \\ x = \sqrt{2}/2; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 1; \\ x = 2y; \end{cases} \implies \begin{cases} y = \sqrt{2}/2; \\ x = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Значит, требуется привести интеграл по следующему множеству:



Разбивая область интегрирования по  $x$  до перекрытия с гиперболой и после, получаем:

$$I(D, f) = \int_0^{\sqrt{2}/2} dx \int_{x/2}^{2x} f(y) dy + \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} dx \int_{x/2}^{1/x} f(y) dy;$$

Разбивая область интегрирования по  $y$  до перекрытия с гиперболой и после, получаем (симметрично):

$$I(D, f) = \int_0^{\sqrt{2}/2} dy \int_{x/2}^{2x} f(x) dx + \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} dy \int_{x/2}^{1/x} f(x) dx.$$

**Предполагая функцию  $f$  непрерывной на  $D$ , измените порядок интегрирования в повторном интеграле**

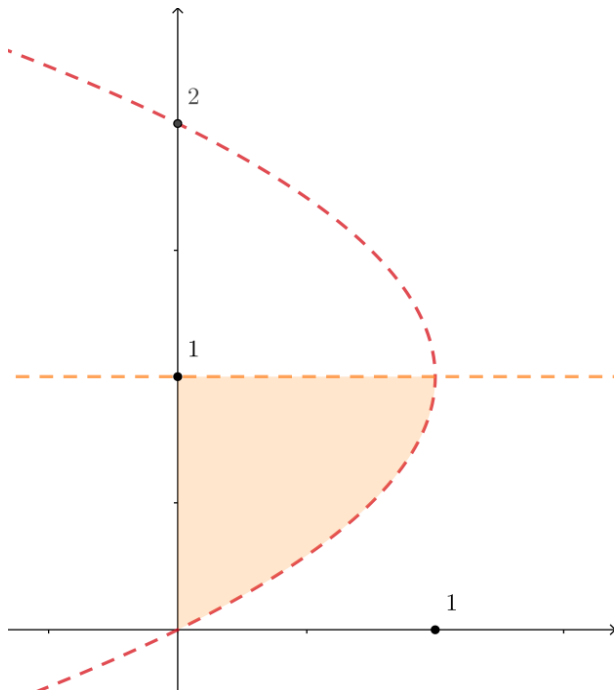
### Задача 5

$$\int_0^1 dy \int_0^{2y-y^2} f(x,y) dx.$$

Чтобы изменить порядок интегрирования, нужно восстановить множество  $D$ . Это можно сделать, изучив пределы интегрирования.

$y \in [0, 1]$  – судя по внешнему интегралу.

Нас интересуют точки с положительной абсциссой, которые лежат слева от кривой  $x = 2y - y^2$ . Парабола пересекается с  $Oy$  в  $(0, 0)$  и  $(0, 2)$ , и имеет вершину в  $(1, 1)$ .



$x = 2y - y^2 \iff y = 1 \pm \sqrt{1-x}$ . Но наш кейс – только  $y = 1 - \sqrt{1-x}$ , так как  $y \in [0,1]$ .

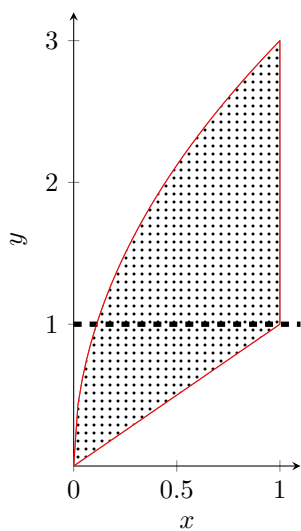
$x \in [0,1]$  – нам это нужно для пределов внешнего интеграла.

Далее задача сводится к тому, что мы уже умеем.

Итого: 
$$\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x}}^1 f(x,y) dy.$$

## Задача 6

$$\begin{aligned} \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^y f(x,y) dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^1 f(x,y) dx &= \text{пристально посмотрим на рисунок} = \\ &= \int_0^1 dx \int_x^{3\sqrt{x}} f(x,y) dy = \int_0^1 dx \int_x^{3\sqrt{x}} f(x,y) dy \end{aligned}$$



## Задача 7

$$\int_3^7 dy \int_{9/y}^3 f(x,y) dx + \int_7^9 dy \int_{9/y}^{10-y} f(x,y) dx.$$

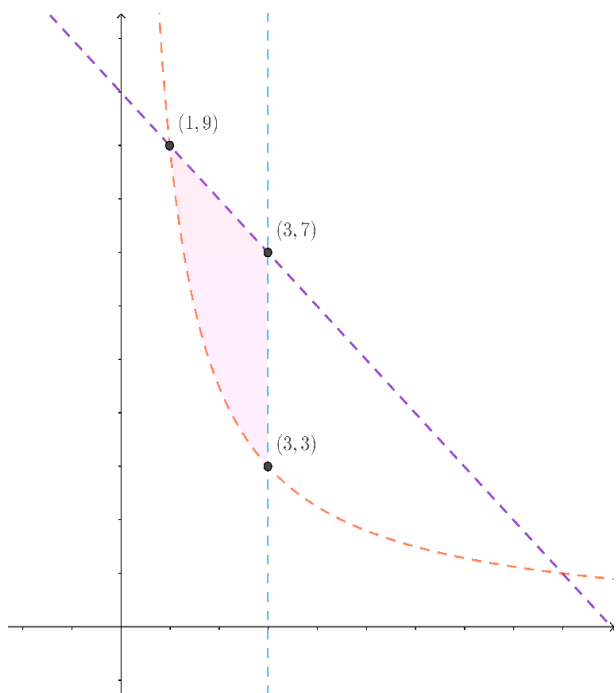
$$y \in [3, 9].$$

При  $y \in [3, 7]$  точки лежат между графиком гиперболы  $y = 9/x$  и прямой  $x = 3$ .

При  $y \in [7, 9]$  точки лежат между графиком гиперболы  $y = 9/x$  и прямой  $y = -x + 10$ .

Найдём точки пересечения кривых:

$$\begin{cases} x = 3; \\ y = -x + 10 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3; \\ y = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 9/x; \\ y = -x + 10 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 1; \\ y = 9 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 9/x; \\ x = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 3; \\ y = 3 \end{cases}$$



Теперь изменим порядок интегрирования.  $x \in [1, 3]$ . При всех  $x$  точки лежат между гиперболой и прямой  $y = -x + 10$ .

$$\text{Итого: } I(D, f) = \int_1^3 dx \int_{9/y}^{10-y} f(x,y) dy$$

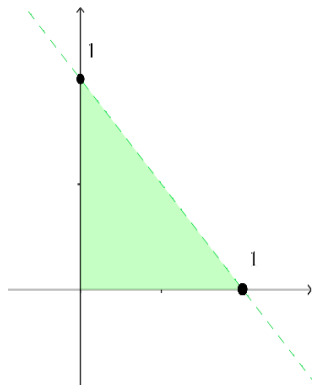
**Изменив порядок интегрирования, вычислите интеграл**

## Задача 9

$$\int_0^1 dy \int_0^{1-y} e^{-x^2+2x+1} dx.$$

Чтобы изменить порядок интегрирования, нужно знать, что представляет собой  $D$ .

$y \in [0, 1]$ , и точки лежат под прямой  $y = -x + 1$ .



Изменяем порядок: 
$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} e^{-x^2+2x+1} dy = \int_0^1 e^{-x^2+2x+1} \int_0^{1-x} dy dx = \int_0^1 e^{-(x-1)^2+2} (1-x) dx.$$

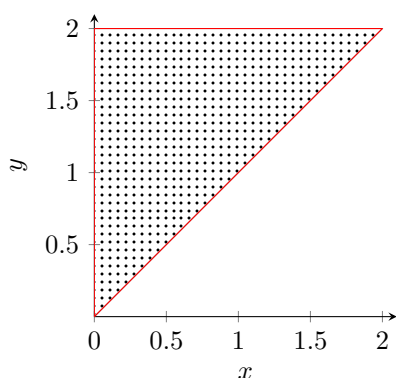
Замена 
$$\begin{cases} t = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1; \\ dt = (2x-2)dx; \\ dx = dt/(2x-2); \\ \text{границы становятся } (1, 0). \end{cases}$$

$$\int_1^0 e^{-t+2} \left( \frac{1-x}{2x-2} \right) dt = \int_1^0 e^{-t+2} \left( -\frac{1}{2} \right) dt = -\frac{e^2}{2} \int_1^0 e^{-t} dt = -\frac{e^2}{2} \left( -e^{-t} \Big|_{t=1}^0 \right) = \frac{-e^2(-e^0 + e^{-1})}{2} = \frac{e^2 - e}{2}.$$



## Задача 10

$$\begin{aligned}
 \int_0^2 x^2 dx \int_x^2 \ln(1+y^2) dy &= \text{пристально смотрим на рисунок} = \int_0^2 \int_0^y x^2 \ln(1+y^2) dx dy = \\
 &= \int_0^2 \ln(1+y^2) dy \int_0^y x^2 dx = \int_0^2 \ln(1+y^2) dy \left( \frac{x^3}{3} \Big|_0^y \right) = \frac{1}{3} \int_0^2 \ln(1+y^2) y^3 dy = \\
 &= \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln(1+y^2) & \Rightarrow u' = \frac{2y}{1+y^2} \\ v' = y^3 & \Rightarrow v = \frac{y^4}{4} \end{array} \right\} = \frac{1}{3} \ln(1+y^2) \frac{y^4}{4} \Big|_0^2 - \frac{1}{3} \int_0^2 \frac{y^4}{4} \frac{2y}{1+y^2} dy = \left\{ \begin{array}{l} t = 1+y^2 \\ dt = 2y dy \\ dy = \frac{dt}{2y} \end{array} \right\} = \\
 &= \frac{1}{3} (4 \ln(5) - 0) - \frac{1}{6} \int_1^5 \frac{y^5}{t} \frac{dt}{2y} = \frac{4}{3} \ln(5) - \frac{1}{12} \int_1^5 \frac{(y^4 + 2y^2 + 1) - (2y^2 - 2) + 1}{t} dt = \\
 &= \frac{4}{3} \ln(5) - \frac{1}{12} \int_1^5 \frac{t^2 - 2t + 1}{t} dt = \frac{4}{3} \ln(5) - \frac{1}{12} \left( \int_1^5 t dt - 2 \int_1^5 dt + \int_1^5 \frac{dt}{t} \right) = \\
 &= \frac{4}{3} \ln(5) - \frac{1}{12} \left( \left( \frac{25}{2} - \frac{1}{2} \right) - 2(5-1) + \ln(|t|) \Big|_1^5 \right) = \frac{4}{3} \ln(5) - \frac{1}{12} (12 - 8 + \ln(5)) = \\
 &= \frac{4}{3} \ln(5) - \frac{1}{3} - \frac{\ln(5)}{12} = \frac{5 \ln(5)}{4} - \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$



## Вычислите интеграл

### Задача 14

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9\} \quad \iint_D \operatorname{sgn}(x^2 + y^2 - 4) dx dy$$

Заметим, что  $D$  описывает множество точек круга с радиусом 3, а подынтегральная функция принимает значение  $-1$  на точках круга радиусом 2 и значение 1 на всех остальных точках. Получается задачу можно решать не через матан а через геомю, чем мы и займемся.

$$\iint_D \operatorname{sgn}(x^2 + y^2 - 4) dx dy = -1(\pi 2^2) + 1(\pi 3^2 - \pi 2^2) = \pi$$

Предполагая функцию  $f$  непрерывной на  $D$ , измените порядок интегрирования в повторном интеграле всеми возможными способами

### Задача 18

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(x, y, z) dz \quad \text{Порядок интегрирования } (x, y, z)$$

Видим, что  $\begin{cases} x, y, z \in [0, 1] \\ y \leq x; \quad z \leq y \quad z \leq x \end{cases}$  — это помогает шафлить порядок интегрирования

Пристально смотрим на картинку, начинаем менять порядок:

$$(x, z, y): \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x f(x, y, z) dy$$

$$(y, x, z): \int_0^1 dy \int_y^1 dx \int_0^y f(x, y, z) dz$$

$$(y, z, x): \int_0^1 dy \int_0^y dz \int_y^1 f(x, y, z) dx$$

$$(z, x, y): \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_z^x f(x, y, z) dy$$

$$(z, y, x): \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_y^1 f(x, y, z) dx$$

Алгоритм действий для меня был выписать все известные отношения с уже введенными переменными и использовать самые строгие. Может быть в более потных примерах придется дробить интегралы на несколько, но лично я такое решать не хочу.

