Семинарский лист 3.4

Денис Козлов
Telegram

Елизавета Орешонок
Telegram

Версия от 17.03.2021 16:23

Обоснуйте возможность занесения предела под знак интеграла и вычислите предел.

Найдите область определения функции, заданной интегралом, и исследуйте эту функцию на непрерывность

Задача 7

$\int\limits_0^\infty \frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}}dx = I(p)$ в нуле особенности нет, а на бесконечности есть по определению

$\left|\frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right| \quad \Rightarrow \quad \int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$ сходится (от 1 потому что интересно только на беск)

По признаку сравнения сходится $\int\limits_0^\infty \frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}}dx \forall p$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Признак сравнения порождает Вейрштрасса, поэтому } I(p) \text{ сх. равн} \\ f(x,p) = \dfrac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}}, x > 0 \text{ непр}\end{array}\right\} I(p) \text{ непр на } \mathbb{R}$$

Задача 8

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+p)^2}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{e^{(x+p)^2}}\,dx \text{ особенность только на бесконечности}$$

$(x+p)^2$ — парабола с ветвями вверх, наим. значение 0 достигается при $x = -p$

При $p \geq 0$ $\left|e^{-(x+p)^2}\right| \leq \frac{1}{e^{x^2}} < \frac{1}{x^2}, \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+p)^2}\,dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса

При $p < 0$ сделаем замену $u = x - p$ и получим интеграл

$$\int\limits_{-p}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \int\limits_{-p}^{0} e^{-u^2}\,du + \int\limits_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$$

также сходящийся по признаку Вейерштрасса (док-во аналогично случаю выше)

При этом $e^{-(x+p)^2}$ непрерывна на $[0; +\infty) \times (-\infty; +\infty)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+p)^2}\,dx$ непрерывна при $p \in \mathbb{R}$

Задача 9

$$I(p) = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^p x} = 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x} \;\{\text{так только одна особенность в } 0\} \simeq 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^p} \text{ сх. при } p < 1$$

Крайняя точка $p = 1$ $\quad I(1) = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin x} \simeq 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{x}$ расх $\Rightarrow$ по методу крайней точки $I(p < 1)$ может не сходиться

Придется подтвердить более потным способом:

$$\left|\frac{1}{\sin^p x}\right| = \left|\frac{1}{\sin x}\right|^p \leqslant \left|\frac{1}{\sin x}\right|^\beta \leqslant \left|\frac{1}{\sin^\beta x}\right| \quad \beta < 1 \Rightarrow \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^\beta x} \text{ сх } \Rightarrow \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^p x} \text{ сх равн по Вейрштрассу на } [\alpha, \beta]$$

$\forall [\alpha, \beta] \in (-\infty, 1) : I(p)$ сх равн. на $[\alpha, \beta]$
$\forall p \in (-\infty, 1) \exists [\alpha, \beta] \in (-\infty, 1), p \in [\alpha, \beta] \Rightarrow I(p)$ непр в $p \Rightarrow I(p)$ непр на $(-\infty, 1)$

Задача 10

$$I(p) = \int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{(x-p)^2+1} dx$$

$$\left|\frac{\ln x}{(x-p)^2+1}\right| \leqslant \left|\frac{\sqrt{x}}{(x-p)^2}\right|$$

При $p \leqslant 1:$ $\quad \left|\frac{\sqrt{x}}{(x-p)^2}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x^{3/2}}\right| \qquad \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^{3/2}} dx$ сх. $\Rightarrow \int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{(x-p)^2+1} dx$ р. сх. по Вейрштрассу

При $p > 1:$ $\quad \int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{(x-p)^2+1} dx = \underbrace{\int\limits_1^p \frac{\ln x}{(x-p)^2+1} dx}_{\text{const}} + \int\limits_p^\infty \frac{\ln x}{(x-p)^2+1} dx$

$$\left|\frac{\sqrt{x}}{(x-p)^2}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x^{3/2}}\right| \text{ при } p \leqslant x \qquad \Rightarrow \int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{(x-p)^2+1} dx \text{ равн. сх. по Вейрштрассу}$$

$\frac{\ln x}{(x-p)^2+1}$ непрерывна при $x \geqslant 1, p \in \mathbb{R} \Rightarrow I(p)$ непрервына

Задача 11

$$J(p) = \int\limits_0^1 \frac{\sin\, x}{x^p}\, dx$$

Определим поведение функции при $x \to 0$, перейдя к пределу:

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin\, x}{x^p} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x^p} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^{p-1}}$ сх. при $p - 1 < 1 \; \Leftrightarrow \; p < 2 \; \Rightarrow$

$\Rightarrow \; J(p)$ сх. при $p \in (-\infty; p_0]$, $p_0 < 2$

При $p \leq 0$ инт. собств., f непр. $\Rightarrow$ инт. непр.

При $0 < p < 2:$ $\left|\frac{\sin\, x}{x^p}\right| \leq \frac{x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}}$, $x \geq 0$, $p - 1 \in (-1; 1)$ сх-ся $\Rightarrow$ $\frac{\sin\, x}{x^p}$ сх. равн. по пр-ку Вейерштрасса $\Rightarrow$

$\Rightarrow \; J(p)$ непр. при $p < 2$