

1 Семинарский лист 2

Задача 1.1.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)}}$$

$$a_n = \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{e^{(\ln n) \ln(\ln n)}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln n)}} \leq \frac{1}{n^2} \implies \text{ряд сходится.}$$

Задача 1.2.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^{\sqrt{n}}}$$

$$a_n = \frac{n^3}{3^{\sqrt{n}}} = 3^{-\sqrt{n}} n^3 = e^{\ln(3^{-\sqrt{n}} n^3)} = e^{3 \ln n - \sqrt{n} \ln 3} \sim e^{\ln n - \sqrt{n}} \sim e^{-\inf} = 0 \implies \text{ряд сходится.}$$

Задача 1.3.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(\frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} \right)$$

$$a_n = \ln \left(\frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} \right) = \ln \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n} \right) = \ln \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) - \ln \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) = -2 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Задача 1.4.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!}$$

Применим признак Даламбера:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(2n+1)!!}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(2n-1)!!} = \frac{2n+1}{n+1} \rightarrow 2 > 1 \implies \text{ряд сходится.}$$

Оценим теперь N -ый остаток ряда:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \approx 2 \iff a_n \approx \frac{1}{2} a_{n+1} \implies r_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n = \frac{a_{N+1}}{1-1/2} = 2a_{N+1}$$

Задача 1.5.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! \cdot 3^n}$$

Применим признак Даламбера:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)! 3^{n+1}} \cdot \frac{n! \cdot 3^n}{n^n} = \frac{(n+1)^n}{3n^n} = \frac{1}{3} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = \frac{e}{3} < 1 \implies \text{ряд сходится.}$$

Оценим теперь N -ый остаток ряда:

Задача 1.6.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \arctg^n \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}$$

Применим признак Коши:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\arctg^n \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}}} = \arctg \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{n+2}} \sim \arctg \sqrt{\frac{3n}{n}} = \arctg \sqrt{3} = \frac{\pi}{3} > 1 \implies \text{ряд расходится.}$$

Задача 1.7.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Применим признак Коши:

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(3 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \frac{\sqrt[n]{n^2}}{3 + \frac{1}{n}} \sim \frac{\sqrt[n]{n^2}}{3} = \frac{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n}}{3} = \frac{\sqrt[n]{n} \sqrt[n]{n}}{3} = \left| \sqrt[n]{n} \rightarrow 1 \right| \rightarrow \frac{1}{3} < 1 \implies \text{ряд сходится.}$$

Задача 1.8.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \right)^2$$

Применим признак Гаусса:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \right)^2 \cdot \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \cdot \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = \left(\frac{2n+1}{2n+2} \right)^2 = \left(\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}} \right)^2 = \frac{4+\frac{4}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{4+\frac{8}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \\ &= \frac{1+\frac{1}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{2}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} = \left(1 + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \left(1 - \frac{2}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \delta = 1 \\ p = 1 \end{cases} = 1 \Rightarrow \text{ряд расходится.} \end{aligned}$$

Задача 1.9. $S = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

$$S_N = \sum_{n=3}^N \frac{\ln n}{n} f(n) = \frac{\ln n}{n}; f'(n) = \frac{\frac{1}{n} \cdot n - \ln n}{n^2} = \frac{1 - \ln n}{n^2} < 0 \text{ при } x > e$$

$$f(n+t) \leq f(n) \leq f(n-1+t), t \in [0; 1], n \geq 4$$

Проинтегрируем неравенство по переменной t от 0 до 1:

$$\int_0^1 f(n+t) dt \leq \int_0^1 f(n) dt \leq \int_0^1 f(n-1+t) dt$$

Сделаем замену: $x_1 = n+t, x_2 = n-1+t$

$$\int_n^{n+1} f(x_1) dx_1 \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(x_2) dx_2$$

Просуммируем всё от 4 до N :

$$\int_4^{N+1} f(x_1) dx_1 \leq \sum_4^N f(n) \leq \int_3^N f(x_2) dx_2$$

Найдём первообразную функции $f(x) = \frac{\ln x}{x}$:

$$\int f(x) dx = \int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d(\ln x) = \frac{1}{2} \ln^2 x + C$$

Подставим первообразную в двойное неравенство:

$$\frac{1}{2} \ln^2(N+1) - \frac{1}{2} \ln^2 4 \leq \sum_4^N f(n) \leq \frac{1}{2} \ln^2(N) - \frac{1}{2} \ln^2 3$$

Прибавим ко всем частям $\frac{\ln 3}{3}$:

$$\frac{1}{2} \ln^2(N+1) - \frac{1}{2} \ln^2 4 + \frac{\ln 3}{3} \leq S_N \leq \frac{1}{2} \ln^2(N) - \frac{1}{2} \ln^2 3 + \frac{\ln 3}{3}$$

Получили необходимую оценку на частичную сумму.