

Семинарский лист 3.1

Александр Богданов
[Telegram](#)

Денис Козлов
[Telegram](#)

Елизавета Орешонок
[Telegram](#)

Версия от 12.02.2021 14:49

Вычислите предел

Задача 1

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_y^{\sqrt{3}+y} \frac{dx}{1+x^2+y^2}$$

Сделаем замену $x = t + y$, $dx = dt$, перейдя к собственному интегралу:

$$\lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+(t+y)^2+y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+2ty+2y^2+t^2}$$

Функция $\Phi(t; y) = \frac{dt}{1+2ty+2y^2+t^2}$ непрерывна на прямоугольнике $[0; \sqrt{3}] \times [-0.5; 0.5] \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{переходим к } y = 0 : \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

Задача 2

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_0^1 \frac{x}{y} e^{-x^2/y} dx \quad \text{обратим внимание, что подынтегральная функция разрывна:}$$

$$x = 0 : \frac{0}{y} e^0 = 0 \qquad y = x^2, y \rightarrow 0 : \frac{x}{x^2} e^{-x^2/x^2} \rightarrow \infty$$

Поэтому теорему как в первой задаче применять нельзя. Решаем по-другому

$$\text{Сделаем замену } t = \frac{x^2}{y}, dt = \frac{2x dx}{y} \Leftrightarrow dx = \frac{y}{2x} dt:$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \int_0^{1/y} \frac{1}{2} e^{-t} dt = -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow +0} e^{-t} \Big|_0^{1/y} = -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow +0} \left(e^{-\frac{1}{y}} - 1 \right) = -\frac{1}{2} \cdot (0 - 1) = \frac{1}{2}$$

Задача 3

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^2 \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)} dx, \quad G = [1; 2] \times [1; +\infty)$$

Область не ограничена (бесконечна по y), значит, функция $f(x, y)$ должна быть равномерно непрерывна.

Функция равномерно непрерывна, если её частные производные ограничены:

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)} = \frac{\frac{\ln(x^2+y^2)}{x+y} - \frac{2x \ln(x+y)}{x^2+y^2}}{\ln^2(x^2+y^2)}, \quad \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(x^2+y^2)}{x+y} - \frac{2x \ln(x+y)}{x^2+y^2}}{\ln^2(x^2+y^2)} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)} = \frac{\frac{\ln(x^2+y^2)}{x+y} - \frac{2y \ln(x+y)}{x^2+y^2}}{\ln^2(x^2+y^2)}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\ln(x^2+y^2)}{x+y} - \frac{2y \ln(x+y)}{x^2+y^2}}{\ln^2(x^2+y^2)} = 0$$

$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ ограничены на $G \Rightarrow f$ равном. непр. на G .

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \int_1^2 \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)} dx &= \int_1^2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)} dx = \int_1^2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+y}}{\frac{2y}{x^2+y^2}} dx = \\ &= \int_1^2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(x+y)^2 - 2xy}{2y(x+y)} dx = \int_1^2 \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+y}{2y} - \frac{x}{x+y} \right) dx = \frac{1}{2} \int_1^2 dx = \frac{x}{2} \Big|_1^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Найдите множество значений y , при которых интеграл существует в собственном смысле, и исследуйте на этом множестве на непрерывность функцию от y , заданную интегралом.

Задача 5

Рассмотрим поведение функции $f(x, y) = x^y$ на векторе $x = 0$ (по другим направлениям всё хорошо) :

$y > 0$: $f(0, y) = 0^y = 0 \Rightarrow f(x) = x^y$ интегрируема по Риману при $y > 0$;

$y = 0$: $f(0, 0) = 0^0$ — неопределенность,

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0+} e^{x \ln x} = e^{\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{1/x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0+} x} = e^0 = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f(x) = x^0$ интегрируема на отрезке $[0, 1]$;

$$y < 0 : f(0, y) = 0^y = \frac{1}{0^{|y|}}, \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{0^{|y|}} \Rightarrow$$

\Rightarrow для $f(x) = x^y$ не существует в собственном смысле интеграл на отрезке $[0, 1]$ при $y < 0$.

Интеграл существует в собственном смысле при $y \in [0, +\infty)$

$$\int_0^1 x^y dx = \frac{1}{y+1} x^{y+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{y+1} \text{ — непрерывна при } y \neq -1 \Rightarrow \text{непрерывна при } y \geq 0$$

Задача 6

Рассмотрим поведение функции $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ на векторе $x = 0$ (по другим направлениям всё хорошо) :

$y \neq 0$: $f(0, y) = \ln(0 + y^2)$, причем $y^2 > 0 \Rightarrow f(x) = \ln(x^2 + y^2)$ интегрируема по Риману при $y \neq 0$;

$y = 0$: $f(0, 0) = \ln 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} [\infty] \ln x = [-\infty] \Rightarrow$

\Rightarrow для $f(x) = \ln(x^2 + y^2)$ не существует в собственном смысле интеграл на отрезке $[0, 1]$ при $y = 0$.

Интеграл существует в собственном смысле при $y \neq 0$

$\ln(x^2 + y^2)$ непрерывна на прямоугольнике $[0, 1] \times [y_1, y_2] \forall y_1, y_2 < 0$ или $y_1, y_2 > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(y) = \int_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx \text{ также непрерывна при } y \neq 0$$

Задача 7

Проверим, как ведет себя функция $f(x, y) = (1 + x)^{xy}$ на векторе $x = 0$:

$f(0, y) = 1^{0 \cdot y} = e^{0 \cdot y \cdot \ln 1} = e^0 = 1 \Rightarrow f(x) = (1 + x)^{xy}$ интегрируема по Риману $\forall y$
и непрерывна на прямоугольнике $[0, 1] \times [-c, c] \forall c > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(y) = \int_0^1 (1 + x)^{xy} dx \text{ непрерывна } \forall y$$

Задача 8

$f(x, y) = \frac{y e^x}{x^2 + y^2}$ возрастает по модулю на отрезке $[0, 1]$ при любом фиксированном $y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{y e^x}{x^2 + y^2} \leq \frac{y e^1}{x^2 + y^2} \forall x \Rightarrow \int_0^1 \frac{y e^x}{x^2 + y^2} \leq e \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} = e \cdot \arctg \frac{x}{y} \Big|_0^1 = e \cdot \arctg \frac{1}{y} \xrightarrow{y \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

\Rightarrow функция интегрируема при любом y при $y \neq 0$ проблем нет,
но в окрестности 0 $F(y) \rightarrow 0 \Rightarrow F(y)$ терпит разрыв при $y = 0$.

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y e^x}{x^2 + y^2} \text{ определена при любом } y, \text{ непрерывна при } y \neq 0.$$

Найдите производную функции, заданной интегралом

Задача 9

$f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$ непрерывна на $[0, 1] \forall y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} \int_0^1 e^{x^2 + y^2} dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} e^{x^2 + y^2} dx = 2y \int_0^1 e^{x^2 + y^2} dx$$

Задача 10

$f(x, y) = \sin(y e^x)$ непрерывна на $[0, 1] \forall y \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} \int_0^1 \sin(y e^x) dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \sin(y e^x) dx = \int_0^1 e^x \cos(y e^x) dx =$$

$$= \frac{1}{y} \sin(y e^x) \Big|_0^1 + f(1, y) \cdot (1)_y' - f(0, y) \cdot (0)_y' = \frac{\sin(y e) - \sin y}{y} + 0 - 0$$

Задача 11

$$J(y) = \int_y^{y^2} e^{-x^2 y} dx, \quad \frac{dJ}{dy} = \int_y^{y^2} \frac{\partial}{\partial y} e^{-x^2 y} dx + e^{-x^2 y} \Big|_{x=y^2}^{2y - e^{-x^2 y}} \Big|_{x=y} =$$

$$= \int_y^{y^2} -x^2 e^{-x^2 y} dx + 2ye^{-y^5} - e^{-y^3} \text{ удаchi лол}$$

Задача 12

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x} - \text{проблема на векторе}(0, y)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x} = y \Rightarrow \text{можно доопределить в нуле } y\text{-м, получив непрерывную функцию}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} \int_y^{1+y} \frac{\sin(xy)}{x} dx = \int_y^{1+y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin(xy)}{x} dx = \int_y^{1+y} \cos(xy) dx =$$

$$= \frac{1}{y} \sin(xy) \Big|_y^{1+y} + \frac{\sin(y+y^2)}{1+y} - \frac{\sin(y^2)}{y} = \frac{\sin(y+y^2) - \sin(y^2)}{y} + \frac{\sin(y+y^2)}{1+y} - \frac{\sin(y^2)}{y} =$$

$$= \frac{\sin(y+y^2) - 2\sin(y^2)}{y} + \frac{\sin(y+y^2)}{1+y}$$

Покажите, что функция $u(x) = \int_0^{\pi} e^{x \cos t} dt$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xu'' + u' - xu = 0$

Задача 13

$$\begin{aligned}
 u(x) &= \int_0^{\pi} e^{x \cos t} dt, & u'(x) &= \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial x} e^{x \cos t} dt = \int_0^{\pi} \cos t e^{x \cos t} dt, & u''(x) &= \int_0^{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{x \cos t} dt = \int_0^{\pi} \cos^2 t e^{x \cos t} dt \\
 xu'' + u' - xu &= \int_0^{\pi} x \cos^2 t e^{x \cos t} dt + \int_0^{\pi} \cos t e^{x \cos t} dt - \int_0^{\pi} x e^{x \cos t} dt = \int_0^{\pi} (x \cos^2 t + \cos t - x) e^{x \cos t} dt = \\
 &= \int_0^{\pi} (\cos t - x \sin^2 t) e^{x \cos t} dt = - \int_0^{\pi} x \sin^2 t e^{x \cos t} dt + \int_0^{\pi} \underbrace{\cos t}_{dv} \underbrace{e^{x \cos t}}_u dt = \\
 &= - \int_0^{\pi} x \sin^2 t e^{x \cos t} dt + \sin t e^{x \cos t} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} x \sin^2 t e^{x \cos t} dt = \sin t e^{x \cos t} \Big|_0^{\pi} = 0
 \end{aligned}$$

Применяя метод дифференцирования по параметру, вычислите интеграл

Задача 14

$f(x, p) = \ln(p^2 - \sin^2 x)$, $|p| \geq 1$ — функция непрерывна и дифференцируема по $p \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \frac{d}{dp} \int_0^{\pi/2} \ln(p^2 - \sin^2 x) dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial p} \ln(p^2 - \sin^2 x) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2p}{p^2 - \sin^2 x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2p \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{p^2}{\cos^2 x} - p^2 - \sin^2 x + p^2} dx \\
 \left\{ \begin{array}{l} u = \operatorname{tg} x, \\ du = \frac{1}{\cos^2 x} dx, \\ \frac{p^2}{\cos^2 x} - p^2 = p^2 u^2 \end{array} \right. & \int_0^{+\infty} \frac{2p}{p^2 u^2 + p^2 - u^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{2p}{(p^2 - 1)u^2 + p^2} du = \frac{2p}{p^2 - 1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 + \frac{p^2}{p^2 - 1}} du = \\
 &= \frac{2p}{p^2 - 1} \cdot \frac{\sqrt{p^2 - 1}}{p} \left(\operatorname{arctg} \frac{u \sqrt{p^2 - 1}}{p} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{p^2 - 1}} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{\sqrt{p^2 - 1}}
 \end{aligned}$$

Осталось решить уравнение:

$$\underbrace{\frac{d}{dp} \int_0^{\pi/2} \ln(p^2 - \sin^2 x) dx}_{=h(p)} = \frac{\pi}{\sqrt{p^2 - 1}} \Leftrightarrow h_p = \frac{\pi}{\sqrt{p^2 - 1}} \Leftrightarrow h(p) = \pi \ln |p + \sqrt{p^2 - 1}|$$

$$\int_0^{\pi/2} \ln(p^2 - \sin^2 x) dx = \pi \ln |p + \sqrt{p^2 - 1}|$$

Задача 15

$$J(p) = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + p \sin x)}{\sin x} dx, \quad p \in [0, 1]$$

$$\frac{d}{dp} J(p) = \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial p} \frac{\ln(1 + p \sin x)}{\sin x} dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{(1 + p \sin x) \sin x} dx = \int_0^{\pi} \frac{1}{1 + p \sin x} dx$$

$$t = \operatorname{tg} x/2, \quad x = 2 \arctan t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + p \sin x} dx = \int_0^{\infty} \frac{2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2pt}{1+t^2}} dt = \int_0^{\infty} \frac{2}{t^2 + 2pt + 1} dt = \int_0^{\infty} \frac{2}{(t+p)^2 + 1 - p^2} dt = \left\{ \begin{array}{l} z = t+p \\ dt = dz \end{array} \right\} =$$

$$\int_p^{\infty} \frac{2}{z^2 + 1 - p^2} dz = 2 \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \arctan \frac{z}{\sqrt{1-p^2}} \Big|_p^{\infty} = \frac{2}{\sqrt{1-p^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \right) = \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha = p \\ \cos \alpha = \sqrt{1-p^2} \\ \tan \alpha = \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \end{array} \right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} (\pi - 2 \arcsin p) = \frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}} - \frac{2 \arcsin p}{\sqrt{1-p^2}} = J'(p)$$

$$J(p) = \int J'(p) dp = \int \left(\frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}} - \frac{2 \arcsin p}{\sqrt{1-p^2}} \right) dp = \pi \arcsin p - \int \frac{2 \arcsin p}{\sqrt{1-p^2}} dp = \left\{ \begin{array}{l} u = \arcsin p \\ du = \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} dp \end{array} \right\} =$$

$$\pi \arcsin p - \int 2u du = \pi \arcsin p - u^2 + C = \pi \arcsin p - \arcsin^2 p + C = J(p)$$

$$J(p) = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1 + p \sin x)}{\sin x} dx, \quad J(0) = \int_0^{\pi} \frac{\ln(1)}{\sin x} dx = 0 \Rightarrow \pi \arcsin 0 - \arcsin^2 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$J(p) = \pi \arcsin p - \arcsin^2 p$$

Задача 17

$$J(p) = \int_0^{\pi} \ln(1 + 2p \cos x + p^2) dx$$

$$J'(p) = \int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial p} \ln(1 + 2p \cos x + p^2) dx = \int_0^{\pi} \frac{2p + 2 \cos x}{1 + 2p \cos x + p^2} dx$$

Применяя интегрирование по параметру под знаком интеграла, вычислите интеграл $a > b > 0$

Задача 18

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx \quad \text{Интегрирование по параметру — значит нужно найти типа первообразной подынтегральной}$$

$$\text{Рассмотрим } f(x, y) = x^y, \quad \int_a^b f dy = \int_a^b x^y dy = \int_a^b e^{y \ln x} dy = \frac{e^{y \ln x}}{\ln x} \Big|_a^b = \frac{e^{b \ln x} - e^{a \ln x}}{\ln x} = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$$

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \int_a^b x^y dy dx = \int_a^b \int_0^1 x^y dx dy = \int_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1} \Big|_0^1 dy = \int_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln(y+1) \Big|_a^b = \ln \left(\frac{b+1}{a+1} \right)$$