Семинарский лист 4

Александр Богданов Telegram
Алиса Вернигор Telegram
Анастасия Григорьева Telegram
Василий Шныпко Telegram
Данил Казанцев Telegram
Денис Козлов Telegram
Елизавета Орешонок Telegram
Иван Пешехонов Telegram
Иван Добросовестнов Telegram
Настя Городилова Telegram
Никита Насонков Telegram
Сергей Лоптев Telegram

Версия от 03.10.2020 00:25

Вычислите бесконечное произведение как предел частичного

Задача 1

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\prod_{n=2}^{N}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\prod_{n=2}^{N}\frac{n^2-1}{n^2}=\prod_{n=2}^{N}\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdot\frac{(N-1)\cdot(N+1)}{N\cdot N}=\frac{N+1}{2N}\to\frac{1}{2}$$

Задача 2

$$\prod_{n=1}^{\infty}e^{\frac{(-1)^n}{n}}$$

$$\prod_{n=1}^{N}e^{\frac{(-1)^n}{n}}=e^{\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n}}=\Diamond$$

$$\ln n+\gamma+o(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\implies\frac{1}{2}\left(\ln n+\gamma+o(1)\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n}\text{ — чётные члены суммы }\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{n}$$

$$\ln(2n+1)+\gamma+o(1)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\implies\left(\ln(2n+1)+\gamma+o(1)\right)-\frac{1}{2}\left(\ln n+\gamma+o(1)\right)=$$

$$=1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n+1}\text{ — нечётные члены суммы }\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n}$$

$$\Diamond=e^{\frac{1}{2}(\ln n+\gamma+o(1))-(\ln(2n+1)+\gamma+o(1))-\frac{1}{2}(\ln n+\gamma+o(1))}=e^{\frac{1}{2}\ln n+\frac{1}{2}\gamma+o(1)-\ln(2n+1)-\gamma+o(1)+\frac{1}{2}\ln n+\frac{1}{2}\gamma+o(1)}=e^{\ln n-\ln(2n+1)+o(1)}=$$

$$=e^{\ln\frac{n}{2n+1}+o(1)}\to e^{\ln\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$$

Задача 3

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{x}{2^n}$$

Найдем частичное произведение:

$$\prod_{n=1}^{N} \cos\frac{x}{2^n} = \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{x}{2^N}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 4\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{2} = \ldots = 2^k \sin\frac{x}{2^k}\prod_{m=1}^{k}\cos\frac{x}{2^m} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \prod_{m=1}^{k}\cos\frac{x}{2^m} = \frac{\sin x}{2^k \sin\frac{x}{2^k}} \Rightarrow \prod_{n=1}^{N}\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^N \sin\frac{x}{2^N}}$$

Бесконечное произведение как предел частичного:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n} = \lim_{N\to\infty}\frac{\sin x}{2^N \sin\frac{x}{2^N}} = \sin x \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2^N\dfrac{x}{2^N}} = \frac{\sin x}{x}$$

$$\boxed{\text{Ответ: } \prod_{n=1}^{\infty}\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{x}.}$$

Исследуйте бесконечное произведение на сходимость

Задача 4

Формулы Тейлора:

$(1+x)^a \sim 1+x$
$\ln(1+x) \sim x$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+3}}$$

$$\prod_{n=1}^{N}\frac{n}{\sqrt{n^2+3}} = e^{\ln\prod\limits_{n=1}^{N}\frac{n}{\sqrt{n^2+3}}} = e^{\sum\limits_{n=1}^{N}\ln\frac{n}{\sqrt{n^2+3}}}; \qquad a_n = \ln\frac{n}{\sqrt{n^2+3}} = \ln\left[\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right] \sim \ln\left(1-\frac{3}{2n^2}\right) \sim -\frac{3}{2n^2} \implies$$

$\implies$ ряд сходится.

Задача 5

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(2-\sqrt[n]{n}\right)$$

$$\prod_{n=1}^{N}\left(2-\sqrt[n]{n}\right)=e^{\ln\prod\limits_{n=1}^{N}\left(2-\sqrt[n]{n}\right)}=e^{\sum\limits_{n=1}^{N}\ln\left(2-\sqrt[n]{n}\right)}$$

$$a_n=\ln\left(2-\sqrt[n]{n}\right)=\ln\left(1+\left(1-\sqrt[n]{n}\right)\right)\sim\left(1-\sqrt[n]{n}\right)=-\left(e^{\frac{\ln n}{n}}-1\right)=$$

$$=\ [\text{Формула Тейлора для } e^x]\ -\left(1+\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln^2 n}{2n^2}+o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)-1\right)=$$

$$=-\left(\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln^2 n}{2n^2}+o\left(\frac{\ln^2 n}{n^2}\right)\right)\leq-\frac{\ln n}{n}\implies$$

$$\implies\sum_{n=1}^{N}\ln\left(2-\sqrt[n]{n}\right)<-\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln n}{n},\quad\left|\sum_{n=1}^{N}\ln\left(2-\sqrt[n]{n}\right)\right|>\sum_{n=1}^{N}\frac{\ln n}{n}\implies$$

$$\implies\sum_{n=1}^{N}\ln\left(2-\sqrt[n]{n}\right)\ \text{расходится в } -\infty \text{ по признаку сравнения}\implies$$

$$\implies\prod_{n=1}^{\infty}\left(2-\sqrt[n]{n}\right)\ \text{расходится к } 0$$

Задача 6

$$\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\operatorname{arcctg} n\right)$$

$$\cos\left(\operatorname{arcctg} n\right)=\operatorname{ctg}\left(\operatorname{arcctg} n\right)\,\sin\left(\operatorname{arcctg} n\right)=n\sqrt{1-\cos^2\left(\operatorname{arcctg} n\right)}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\left(\operatorname{arcctg} n\right)=\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}$$

$$\prod_{n=1}^{N}\cos\left(\operatorname{arcctg} n\right)=\prod_{n=1}^{N}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}=e^{\ln\prod\limits_{n=1}^{N}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}}=e^{\sum\limits_{n=1}^{N}\ln\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}}$$

$$a_n=\ln\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}=\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{1}{1+n^2}\right)\sim-\frac{1}{2(1+n^2)}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sum_{n=1}^{N}a_n\ \text{сходится по признаку сравнения}\ \Rightarrow$$

$$\implies\ \prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\operatorname{arcctg} n\right)\ \text{сходится}$$

Исследуйте бесконечное произведение на сходимость и абсолютную сходимость

Задача 7

$$\prod_{n=1}^{\infty} n^{\frac{(-1)^n}{n}} = e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln n^{\frac{(-1)^n}{n}}}; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} \implies a_n = \frac{\ln n}{n} \to 0;$$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \implies f'(x) = -\frac{\ln x - 1}{x^2} < 0 \implies \text{ монотонно убывает } \implies \text{ ряд сходится по Лейбницу}$$

$$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n \ln n}{n}\right| \geqslant \frac{\ln 2}{n} \implies \text{ряд расходится абсолютно.}$$

Задача 8

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+2}}\right) = e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+2}}\right)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+2}}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2+2}} \text{ — знакочередующийся ряд,} \quad a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2}}$$

Проверим монотонность $|a_n|$: $f(n) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+2}}$, $f'(n) = -\dfrac{2n}{3(n^2+2)^{4/3}} < 0$ и $f(n)$ монотонно убывает при $n > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2}} = 0 \implies \text{ряд сходится по Лейбницу}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2+2}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2}} \text{ расходится по признаку сравнения с } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \implies$$

$$\implies \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+2}}\right) \text{расходится абсолютно} \implies$$

$$\implies \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+2}}\right) \text{ сходится условно}$$

Задача 9

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sin n}=e^{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sin n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sin n}=\sum_{n=1}^{\infty}-\ln\left(1+\frac{\sin n}{\sqrt{n}}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin n}{\sqrt{n}}-\frac{\sin^2 n}{2n}+o\left(\frac{\sin^3 n}{n^{3/2}}\right)\right)=$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\underbrace{\frac{\sin n}{\sqrt{n}}}_{\text{сходится}}-\underbrace{\frac{1}{4n}}_{\text{расходится}}+\underbrace{\frac{\cos 2n}{4n}}_{\text{сходится}}+\underbrace{o\left(\frac{\sin^3 n}{n^{3/2}}\right)}_{\text{сходится}}\right)\text{ расходится }\implies$$

$$\implies\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sin n}\text{ расходится}$$

Исследуйте функциональную последовательность f_n на равномерную сходимость к поточечному пределу f на множестве D, оценивая $\|f_n-f\|$.

Задача 10

$f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n},\quad D=[-1,1]$

$f_n(x)=\sin\dfrac{x}{n}\to\sin 0=0\implies f\equiv 0$

$\sup\limits_D\left\|\sin\dfrac{x}{n}\right\|=\sin\dfrac{1}{n}\to 0\implies$ равномерная сходимость.

Задача 11

$f_n(x)=x^n-x^{2n},\quad D=[0,1]$

$f_n(x)=x^n-x^{2n}\to 0\implies f\equiv 0$

$\sup\limits_D\left\|x^n-x^{2n}\right\|=\lozenge$

$f_n'(x)=(x^n-x^{2n})'=nx^{n-1}-2nx^{2n-1}=nx^{n-1}(1-2x^n)=0$

Критические точки: $x=0, f_n(x)=0;\quad x=\sqrt[n]{\dfrac{1}{2}}, f_n(x)=\dfrac{1}{4};\quad x=1, f_n(x)=0;$

$\lozenge=\dfrac{1}{4}\neq 0\implies$ отсутствие равномерной сходимости.

Задача 12

$$f_n(x) = n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right), \quad D=[0,3]$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\,\frac{x}{n} = x \implies f\equiv x \implies$$

$\implies$ функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится поточечно к $f(x)=x$

$$\sup_D \|f_n(x)-f(x)\| = \sup_D \left\| n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - x\right\| = \lozenge$$

$$(f_n(x)-f(x))' = \left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)-x\right)' = n\,\frac{x/n}{1+x/n} - 1 = \frac{x}{1+x/n} - 1$$

Критические точки:

$$x = 1+\frac{x}{n} \Leftrightarrow x = \frac{n}{n-1} \to 1,\ 1\in D,\ f_n(1)-f(1) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 \sim n\,\frac{1}{n} - 1 = 0$$

$\lozenge = 0 \implies$ сходимостm равномерная

Задача 13

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}, \quad D=[0,1]$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2nx}{1+n^2x^2} = [\text{ Правило Лопиталя }] \lim_{n\to\infty} \frac{2x}{2nx^2} = 0 \implies f\equiv 0 \implies$$

$\implies$ функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится поточечно к $f(x)=0$

$$\sup_D \|f_n(x)-f(x)\| = \sup_D \left\|\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right\| = \lozenge$$

$$(f_n(x)-f(x))' = \left(\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right)' = \frac{2n\left(1+n^2x^2\right)-4n^3x^2}{(1+n^2x^2)^2} = \frac{2n(1-n^2x^2)}{(1+n^2x^2)^2}$$

Критические точки:

$$n^2x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{n} \to 0,\ 0\in D,\ f_n(0) = 0$$

$\lozenge = 0 \implies$ сходимость равномерная

Задача 14

$$f_n(x) = \frac{nx^2}{n+x}, \quad D = [0,2]$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{n+x} = [\text{ Правило Лопиталя }] \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{1} \implies f \equiv x^2 \implies$$

$$\implies \text{ функциональная последовательность } f_n(x) \text{ сходится поточечно к } f(x) = x^2$$

$$\sup_D \|f_n(x) - f(x)\| = \sup_D \left\| \frac{nx^2}{n+x} - x^2 \right\| = \Diamond$$

$$(f_n(x) - f(x))' = \left(\frac{nx^2}{n+x} - x^2 \right)' = \frac{2nx(n+x) - nx^2}{(n+x)^2} - 2x = -\frac{x^2(2x+3n)}{(n+x)^2}$$

Критические точки:

$$x^2\,(2x+3n) = 0 \ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} x & = & 0, & 0 \in D, & f_n(0) = 0, \\ x & = & -\dfrac{3n}{2} & \to \infty & \notin D \end{array} \right.$$

$\Diamond = 0 \implies$ сходимость равномерная

Задача 15

$$f_n(x) = n \sim \frac{1}{nx}, \quad D = (0,3]$$

$$\frac{1}{nx} \to 0 \implies \sin\frac{1}{nx} \sim \frac{1}{nx} \implies f_n(x) \sim \frac{1}{x} \implies f(x) = \frac{1}{x}$$

Расширим D до компакта: $D = [0,3]$

$$\sup_D \left\| n\sin\frac{1}{nx} - \frac{1}{x} \right\|$$

Возьмём последовательность аргументов $x_n = \dfrac{1}{n} \in D$. Тогда $\sup\limits_D \left\| n\sin\dfrac{1}{nx} - \dfrac{1}{x} \right\| \geqslant \sup\limits_D \|n\sin 1 - n\| \to +\infty \implies$

$\implies$ Отсутствует равномерная сходимость.

Докажите равномерную сходимость функциональной последовательности на заданном множестве, применяя теорему Дини (о монотонной сходимости)

Теорема Дини: Если $f_n \to f$ на множестве одновременно выполнены следующие условия:

1. D — компакт
2. f_n — монотонна
3. f_n — непрерывна
4. f — непрерывна

тогда f_n равномерно сходится к f.

Задача 16

$f_n = \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n, \quad D = [1, 2]$

$$\begin{cases} f_n \text{ — непрерывна, монотонна} \\ D = [1,2] \text{ — компакт} \\ f_n \to f(x) = e^x \text{ — непрерывна} \end{cases} \implies f_n \text{ равномерно сходится к } f \text{ по Т. Дини.}$$

Задача 17

$f_n = nx^2 e^{-nx}, \quad D = [1, +\infty)$
Расширим D до компакта: $D' = [1, +\infty]$

$f_n' = 2nx \cdot e^{-nx} + nx^2(-n) \cdot e^{-nx} = nxe^{-nx}(2 - nx) = 0 \implies$ при $n \geqslant 2, \ x \geqslant \dfrac{2}{n}, \quad f_n' \leqslant 0 \implies f_n$ — монотонна.

$$\begin{cases} f_n \text{ — монотонна} \\ f_n \text{ — непрерывна} \\ f_n \to 0 \text{ — непрерывна} \\ D' = [1, +\infty] \text{ — компакт} \end{cases} \implies f_n \text{ равномерно сходится к } f \text{ по Т. Дини.}$$

Задача 18

$f_n(x) = \cos \dfrac{x^2}{n}, \quad D = (0, 1]$

Расширим D до компакта: $D' = [0, 1]$

$f_n'(x) = -\dfrac{2x}{n} \sin \dfrac{x^2}{n} \leq 0$ при $x \in D'$, $n \in \mathbb{N} \implies f_n$ — монотонна

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \cos \dfrac{x^2}{n} = 1 \implies f_n(x) \to f(x) = 1$

$$\begin{cases} f_n \text{ — монотонна} \\ f_n \text{ — непрерывна} \\ f \text{ — непрерывна} \\ D' = [0, 1] \text{ — компакт} \end{cases} \implies f_n \text{ равномерно сходится к } f \text{ по Т. Дини.}$$

Задача 19

$$f_n(x) = \sqrt[2n]{1+x^n}, \quad D = [0,1]$$

$$f_n(x) = \sqrt[2n]{1+x^n} = \sqrt[2n]{g(x)},\ g(x) = 1 + x^n \text{ — монотонная } \implies f_n(x) \text{ — монотонна}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{1+x^n} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(1+x^n)}{2n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(1+x^n)}{2n}} =$$

$$= [\text{ Правило Лопиталя }]\ e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{x^n \ln x}{1+x^n}}{2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln x}{2}} = \sqrt{x} \implies f_n(x) \to f(x) = \sqrt{x}$$

$$\begin{cases} f_n \text{ — монотонна} \\ f_n \text{ — непрерывна} \\ f \text{ — непрерывна} \\ D = \text{ — компакт} \end{cases} \implies f_n \text{ равномерно сходится к } f \text{ по Т. Дини.}$$

Докажите неравномерную сходимость функциональной последовательности на заданном множестве, используя локализацию особенности.

Теорема: Если f_n непрерывна, и на множестве D равномерно сходится к f, то f — непрерывна.

Задача 20

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, \quad D = [0,1]$$

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \to f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases} \implies \text{ т.к. } f \text{ разрывна в 0, то равномерная сходимость отсутствует.}$$

Задача 21

$$f_n(x) = \sqrt[n]{x \sin x}, \quad D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x \sin x} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln(x \sin x)}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln(x \sin x)}{n}} = 1 \implies$$

$$\implies f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \neq 0 \end{cases} \implies \text{ т.к. } f \text{ разрывна в 0, равномерная сходимость отсутствует}$$

Задача 22

$$f_n(x) = \arcsin \frac{nx}{1+nx}, \quad D = [0,1]$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \arcsin \frac{nx}{1+nx} = \lim_{n\to\infty} \arcsin \left(1 - \frac{1}{1+nx}\right) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2} \implies$$

$$\implies f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x \neq 0 \end{cases} \implies \text{т.к. } f \text{ разрывна в } 0\text{, равномерная сходимость отсутствует}$$

Задача 23

$$f_n(x) = \operatorname{arctg}(nx), \quad D = [0,1]$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(nx) = \frac{\pi}{2} \implies$$

$$\implies f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x \neq 0 \end{cases} \implies \text{т.к. } f \text{ разрывна в } 0\text{, равномерная сходимость отсутствует}$$

Задача 24

$$f_n(x) = \frac{n^2}{4+n^2x^2}, \quad D = (0, +\infty)$$

Добавим точку 0 в D: $D = [0, +\infty)$

$$f_n(x) = \frac{n^2}{4+n^2x^2} \to f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ +\infty, & x = 0 \end{cases} \implies \text{т.к. } f \text{ разрывна в } 0\text{, то равномерная сходимость отсутствует.}$$