

Семинарский лист 3.4

Денис Козлов
[Telegram](#)

Елизавета Орешонок
[Telegram](#)

Версия от 12.02.2021 17:14

Обоснуйте возможность занесения предела под знак интеграла и вычислите предел.

Найдите область определения функции, заданной интегралом, и исследуйте эту функцию на непрерывность

Задача 7

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}} dx = I(p) \quad \text{в нуле особенности нет, а на бесконечности есть по определению}$$

$$\left| \frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}} \right| \leq \left| \frac{1}{\sqrt{x^3}} \right| \Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3}} \text{ сходится (от 1 потому что интересно только на беск)}$$

$$\text{По признаку сравнения сходится } \int_0^{\infty} \frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}} dx \forall p$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Признак сравнения порождает Вейрштрасса, поэтому } I(p) \text{ сх. равн} \\ f(x, p) = \frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}}, x > 0 \text{ непр} \end{array} \right\} I(p) \text{ непр на } \mathbb{R}$$

Задача 8

$$\int_0^{+\infty} e^{-(x+p)^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{(x+p)^2}} dx \text{ особенность только на бесконечности}$$

$(x+p)^2$ — парабола с ветвями вверх, наим. значение 0 достигается при $x = -p$

$$\text{При } p \geq 0 \quad \left| e^{-(x+p)^2} \right| \leq \frac{1}{e^{x^2}} < \frac{1}{x^2}, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ сходится} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-(x+p)^2} dx \text{ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса}$$

При $p < 0$ сделаем замену $u = x - p$ и получим интеграл

$$\int_{-p}^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_{-p}^0 e^{-u^2} du + \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du$$

также сходящийся по признаку Вейерштрасса (док-во аналогично случаю выше)

При этом $e^{-(x+p)^2}$ непрерывна на $[0; +\infty) \times (-\infty; +\infty) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-(x+p)^2} dx \text{ непрерывна при } p \in \mathbb{R}$$

Задача 9

$$I(p) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^p x} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x} \quad \{ \text{так только одна особенность в } 0 \} \simeq 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^p} \text{ сх. при } p < 1$$

$$\text{Крайняя точка } p = 1 \quad I(1) = \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin x} \simeq 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x} \text{ расх} \Rightarrow \text{ по методу крайней точки } I(p < 1) \text{ может не сходиться}$$

Придется подтвердить более потным способом:

$$\left| \frac{1}{\sin^p x} \right| = \left| \frac{1}{\sin x} \right|^p \leq \left| \frac{1}{\sin x} \right|^\beta \leq \left| \frac{1}{\sin^\beta x} \right| \quad \beta < 1 \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^\beta x} \text{ сх} \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^p x} \text{ сх равн по Вейрштрассу на } [\alpha, \beta]$$

$$\forall [\alpha, \beta] \in (-\infty, 1) : I(p) \text{ сх равн. на } [\alpha, \beta]$$

$$\forall p \in (-\infty, 1) \exists [\alpha, \beta] \in (-\infty, 1), p \in [\alpha, \beta] \Rightarrow I(p) \text{ непр в } p \Rightarrow I(p) \text{ непр на } (-\infty, 1)$$