Семинарский лист 3.4

Денис Козлов
Telegram

Елизавета Орешонок
Telegram

Версия от 12.02.2021 17:07

Обоснуйте возможность занесения предела под знак интеграла и вычислите предел.

Найдите область определения функции, заданной интегралом, и исследуйте эту функцию на непрерывность

Задача 7

$$\int\limits_0^\infty \frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}}dx = I(p) \quad \text{в нуле особенности нет, а на бесконечности есть по определению}$$

$$\left|\frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}}\right| \leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right| \quad \Rightarrow \quad \int\limits_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3}} \text{ сходится (от 1 потому что интересно только на беск)}$$

$$\text{По признаку сравнения сходится } \int\limits_0^\infty \frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}}dx \forall p$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Признак сравнения порождает Вейрштрасса, поэтому } I(p) \text{ сх. равн} \\ f(x,p) = \dfrac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}}, x > 0 \text{ непр} \end{array}\right\} I(p) \text{ непр на } \mathbb{R}$$

Задача 8

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+p)^2}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{e^{(x+p)^2}}\,dx$$

$(x+p)^2$ — парабола с ветвями вверх, наим. значение 0 достигается при $x=-p$

При $p \geq 0$ $\left|e^{-(x+p)^2}\right| \leq \frac{1}{e^{x^2}} < \frac{1}{x^2}$, $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+p)^2}\,dx$ сходится равномерно по признаку Вейерштрасса

$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}}$, $3/2 > 1 \Rightarrow \frac{1}{x^{3/2}}$ сходится $\Rightarrow \frac{\cos px}{\sqrt{1+x^3}}$ при $p \geq 0$ сходится равномерно по пр-ку Вейерштрасса

При $p<0$ сделаем замену $u = x - p$ и получим интеграл

$$\int\limits_{-p}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \int\limits_{-p}^{0} e^{-u^2}\,du + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-u^2}\,du = \int\limits_{0}^{p} e^{-u^2}\,du + \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-u^2}\,du,$$

также сходящийся по признаку Вейерштрасса (док-во аналогично случаю выше)

При этом $e^{-(x+p)^2}$ непрерывна на $[0;+\infty) \times (-\infty;+\infty)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int\limits_0^{+\infty} e^{-(x+p)^2}\,dx$ непрерывна при $p \in \mathbb{R}$

Задача 9

$I(p) = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^p x} = 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^p x}$ $\{$так только одна особенность в $0\}$ $\simeq 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{x^p}$ сх. при $p<1$

Крайняя точка $p=1$ $\quad I(1) = \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin x} \simeq 2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{x}$ расх $\Rightarrow$ по методу крайней точки $I(p<1)$ может не сходиться

Придется подтвердить более потным способом:

$\left|\frac{1}{\sin^p x}\right| = \left|\frac{1}{\sin x}\right|^p \leqslant \left|\frac{1}{\sin x}\right|^\beta \leqslant \left|\frac{1}{\sin^\beta x}\right| \quad \beta < 1 \Rightarrow \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^\beta x}$ сх $\Rightarrow \int\limits_0^{\pi} \frac{dx}{\sin^p x}$ сх равн по Вейрштрассу на $[\alpha,\beta]$

$\forall [\alpha,\beta] \in (-\infty,1) : I(p)$ сх равн. на $[\alpha,\beta]$
$\forall p \in (-\infty,1) \exists [\alpha,\beta] \in (-\infty,1), p \in [\alpha,\beta] \Rightarrow I(p)$ непр в $p \Rightarrow I(p)$ непр на $(-\infty,1)$