# Семинарский лист 2.3


Александр Богданов
Telegram

Алиса Вернигор
Telegram

Анастасия Григорьева
Telegram

Василий Шныпко
Telegram

Данил Казанцев
Telegram

Денис Козлов
Telegram

Елизавета Орешонок
Telegram

Иван Пешехонов
Telegram

Иван Добросовестнов
Telegram

Настя Городилова
Telegram

Никита Насонков
Telegram

Сергей Лоптев
Telegram


Версия от 20.11.2020 15:46

## Предполагая функцию $f$ непрерывной на $D$, приведите двойной интеграл от $f$ по $D$ к повторному двумя способами: по $x$ затем по $y$ и наоборот.

### Задача 1

$D = \{(x, y) \,|\, x, y \in [0; 1], x^2 + y^2 \geq 1\}$

Множество точек, находящихся в квадрате, ограниченном прямыми $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$,
за пределами круга радиуса 1 с центром в точке $(0, 0)$:

Интеграл по $x$ затем по $y$:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^1 dx = \int\limits_0^1 dy \cdot x \,\Big|_{\sqrt{1-y^2}}^1 = \int\limits_0^1 dy \left(1 - \sqrt{1-y^2}\right) = \int\limits_0^1 dy - \int\limits_0^1 \sqrt{1-y^2}\, dy = 1 - \int\limits_0^1 \sqrt{1-y^2}\, dy$$

Замена: $y = \sin u \Leftrightarrow \displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt{1-y^2}\, dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sqrt{1-\sin^2 u}\, du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2u + 1}{2}\, du =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2u\, du + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{1}{4}\sin 2u \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} u \,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Тогда:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^1 dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Очевидно, что повторный интеграл, взятый в другом порядке, будет вычисляться точно так же:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^1 dy = \int\limits_0^1 dy \cdot y \,\Big|_{\sqrt{1-x^2}}^1 = \int\limits_0^1 dx \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right) = \int\limits_0^1 dy - \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dy = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\text{Ответ: } 1 - \frac{\pi}{4}.}$

### Задача 2

$D = \{(x,y)\,|\,x,y \in [0;1], (x-1)^2 + (y-1)^2 \geq 1\}$

Множество точек, находящихся в квадрате, ограниченном прямыми $x=0, x=1, y=0, y=1$, за пределами круга радиуса 1 с центром в точке $(1,1)$:

Интеграл по $x$ затем по $y$:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} dx = \int\limits_0^1 dy \cdot x\,\Big|_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} = \int\limits_0^1 dy\left(\sqrt{1-(y-1)^2}+1\right) = \int\limits_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}\,dy + 1$$

Замена: $(y-1) = \sin u \Leftrightarrow \displaystyle\int\limits_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\,\sqrt{1-\sin^2 u}\,du = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 u\,du = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos 2u + 1}{2}\,du =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos 2u\,du + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 du = \frac{1}{4}\,\sin 2u\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \frac{1}{2}\,u\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{\pi}{4}$$

Тогда:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Очевидно, что повторный интеграл, взятый в другом порядке, будет вычисляться точно так же:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}+1} dy = \int\limits_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx + 1 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

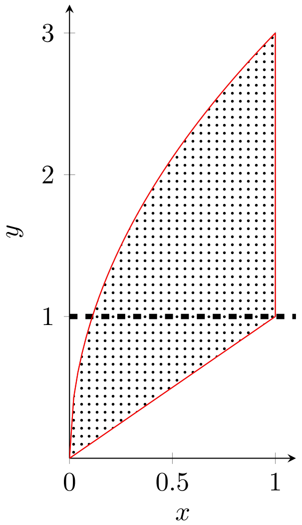
$\boxed{\text{Ответ: } 1 - \frac{\pi}{4}.}$

## Предполагая функцию $f$ непрерывной на $D$, измените порядок интегрирования в повторном интеграле

### Задача 6

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)dx = \text{ пристально смотрим на рисунок } =$$

$$= \int_0^1 \int_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx \int_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$$




## Изменив порядок интегрирования, вычислите интеграл

### Задача 10

## Вычислите интеграл

### Задача 14

## Предполагая функцию $f$ непрерывной на $D$, измените порядок интегрирования в повторном интеграле всеми возможными способами

### Задача 18