Семинарский лист 3.1

Денис Козлов
Telegram

Елизавета Орешонок
Telegram

Версия от 22.01.2021 23:46

Вычислите предел

Задача 1

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{y}^{\sqrt{3}+y}\frac{dx}{1+x^2+y^2}$$

Сделаем замену $x=t+y$, $dx=dt$, перейдя к собственному интегралу:

$$\lim_{y\to 0}\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+(t+y)^2+y^2}=\lim_{y\to 0}\int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+2ty+2y^2+t^2}$$

Функция $\Phi(t;y)=\dfrac{dt}{1+2ty+2y^2+t^2}$ непрерывна на прямоугольнике $[0;\sqrt{3}]\times[-0.5;0.5]\Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{переходим к } y=0:\ \int\limits_{0}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}t\,\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-0=\frac{\pi}{3}$$

Задача 2

$$\lim_{y\to +0}\int\limits_{0}^{1}\frac{x}{y}\,e^{-x^2/y}dx$$ обратим внимание, что подынтегральная функция разрывна:

$x=0:\ \dfrac{0}{y}e^0=0 \qquad\qquad y=x^2, y\to 0:\ \dfrac{x}{x^2}e^{-x^2/x^2}\to\infty$

Поэтому теорему как в первой задаче применять нельзя. Решаем по-другому

Сделаем замену $t=\dfrac{x^2}{y}$, $dt=\dfrac{2x\,dx}{y}\Leftrightarrow dx=\dfrac{y}{2x}\,dt$:

$$\lim_{y\to +0}\int\limits_{0}^{1/y}\frac{1}{2}\,e^{-t}dt=-\frac{1}{2}\lim_{y\to +0}e^{-t}\,\Big|_0^{1/y}=-\frac{1}{2}\lim_{y\to +0}\left(e^{-\frac{1}{y}}-1\right)=-\frac{1}{2}\cdot(0-1)=\frac{1}{2}$$

Задача 3

$$\lim_{y\to+\infty}\int\limits_1^2 \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)}dx, \quad G=[1;2]\times[1;+\infty)$$

Область не ограничена (бесконечна по y), значит, функция $f(x,y)$ должна быть равномерно непрерывна. Функция равномерно непрерывна, если её частные производные ограничены:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)} = \frac{\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x+y}-\dfrac{2x\ln(x+y)}{x^2+y^2}}{\ln^2(x^2+y^2)}, \quad \lim_{y\to\infty}\frac{\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x+y}-\dfrac{2x\ln(x+y)}{x^2+y^2}}{\ln^2(x^2+y^2)}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)} = \frac{\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x+y}-\dfrac{2y\ln(x+y)}{x^2+y^2}}{\ln^2(x^2+y^2)}, \quad \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\ln(x^2+y^2)}{x+y}-\dfrac{2y\ln(x+y)}{x^2+y^2}}{\ln^2(x^2+y^2)}=0$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial x}$ ограничены на $G \Rightarrow f$ равном. непр. на G.

$$\lim_{y\to+\infty}\int\limits_1^2 \frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)}\,dx = \int\limits_1^2 \lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(x+y)}{\ln(x^2+y^2)}\,dx = \int\limits_1^2 \lim_{y\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x+y}}{\dfrac{2y}{x^2+y^2}}\,dx =$$

$$= \int\limits_1^2 \lim_{y\to+\infty}\frac{(x+y)^2-2xy}{2y(x+y)}\,dx = \int\limits_1^2 \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{x+y}{2y}-\frac{x}{x+y}\right)dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^2 dx = \frac{x}{2}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}$$

Найдите множество значений y, при которых интеграл существует в собственном смысле, и исследуйте на этом множестве на непрерывность функцию от y, заданную интегралом.

Задача 5

Рассмотрим поведение функции $f(x, y) = x^y$ на векторе $x = 0$ (по другим направлениям всё хорошо) :

$y > 0: \ f(0, y) = 0^y = 0 \ \Rightarrow \ f(x) = x^y$ интегрируема по Риману при $y > 0$;

$y = 0: \ f(0, 0) = 0^0$ — неопределенность,

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{x\,\ln x} = e^{\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{1/x}} = e^{-\lim_{x\to 0+} \frac{1}{1/x}} = e^{-\lim_{x\to 0+} x} = e^0 = 1 \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow \ f(x) = x^0$ интегрируема на отрезке $[0, 1]$;

$y < 0: \ f(0, y) = 0^y = \dfrac{1}{0^{|y|}}, \ \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{1}{0^{|y|}} \ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для $f(x) = x^y$ не существует в собственном смысле интеграл на отрезке $[0, 1]$ при $y < 0$.

Интеграл существует в собственном смысле при $y \in [0, +\infty)$

$$\int\limits_0^1 x^y dx = \frac{1}{y+1} x^{y+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{y+1} \text{ — непрерывна при } y \neq -1 \Rightarrow \text{непрерывна при } y \geq 0$$

Задача 6

Рассмотрим поведение функции $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ на векторе $x = 0$ (по другим направлениям всё хорошо) :

$y \neq 0: \ f(0, y) = \ln(0 + y^2)$, причем $y^2 > 0 \ \Rightarrow \ f(x) = \ln(x^2 + y^2)$ интегрируема по Риману при $y \neq 0$;
$y = 0: \ f(0, 0) = \ln 0, \ \lim\limits_{x\to 0} [\infty] \ln x = [-\infty] \ \Rightarrow$

$\Rightarrow$ для $f(x) = \ln(x^2 + y^2)$ не существует в собственном смысле интеграл на отрезке $[0, 1]$ при $y = 0$.

Интеграл существует в собственном смысле при $y \neq 0$

$\ln(x^2 + y^2)$ непрерывна на прямоугольнике $[0, 1] \times [y_1, y_2]$ $\forall y_1, y_2 < 0$ или $y_1, y_2 > 0 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ F(y) = \int\limits_0^1 \ln(x^2 + y^2) dx \text{ также непрерывна при } y \neq 0$$

Задача 7

Проверим, как ведет себя функция $f(x, y) = (1 + x)^{xy}$ на векторе $x = 0:$

$f(0, y) = 1^{0 \cdot y} = e^{0 \cdot y \cdot \ln 1} = e^0 = 1 \ \Rightarrow \ f(x) = (1 + x)^{xy}$ интегрируема по Риману $\forall y$
и непрерывна на прямоугольнике $[0, 1] \times [-c, c] \ \forall c > 0 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow F(y) = \int_0^1 (1 + x)^{xy} dx \text{ непрерывна } \forall y$$

Задача 8

$f(x, y) = \dfrac{y\, e^x}{x^2 + y^2}$ возрастает по модулю на отрезке $[0, 1]$ при любом фиксированном $y \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ \frac{y\, e^x}{x^2 + y^2} \le \frac{y\, e^1}{x^2 + y^2} \forall x \ \Rightarrow \ \int_0^1 \frac{y\, e^x}{x^2 + y^2} \le e \int_0^1 \frac{y}{x^2 + y^2} = e \cdot \operatorname{arctg} \frac{x}{y} \Big|_0^1 = e \cdot \operatorname{arctg} \frac{1}{y} \xrightarrow[y \to 0]{} \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ функция интегрируема при любом y при $y \neq 0$ проблем нет,
но в окрестности 0 $F(y) \to 0 \ \Rightarrow F(y)$ терпит разрыв при $y = 0$.

$$F(y) = \int_0^1 \frac{y\, e^x}{x^2 + y^2} \text{ определена при любом } y, \text{ непрерывна при } y \neq 0.$$

Найдите производную функции, заданной интегралом

Задача 9

$f(x, y) = e^{x^2 + y^2}$ непрерывна на $[0, 1] \ \forall y \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} \int_0^1 e^{x^2 + y^2}\, dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} e^{x^2 + y^2}\, dx = 2y \int_0^1 e^{x^2 + y^2}\, dx$$

Задача 10

$f(x, y) = \sin(y\, e^x)$ непрерывна на $[0, 1] \ \forall y \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} \int_0^1 \sin(y\, e^x)\, dx = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \sin(y\, e^x)\, dx = \int_0^1 e^x \cos(y\, e^x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{y} \sin(y\, e^x) \Big|_0^1 + f(1, y) \cdot (1)'_y - f(0, y) \cdot (0)'_y = \frac{\sin(y\, e) - \sin y}{y} + 0 - 0$$

Задача 11

$$J(y) = \int\limits_{y}^{y^2} e^{-x^2 y} dx\,, \qquad \frac{dJ}{dy} = \int\limits_{y}^{y^2} \frac{\partial}{\partial y} e^{-x^2 y} dx + e^{-x^2 y}\Big|_{x=y^2} 2y - e^{-x^2 y}\Big|_{x=y} =$$

$$= \int\limits_{y}^{y^2} -x^2 e^{-x^2 y} dx + 2y e^{-y^5} - e^{-y^3} \text{ удачи лол}$$

Задача 12

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x} \text{ — проблема на векторе} (0, y)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(xy)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{xy}{x} = y \ \Rightarrow \text{можно доопределить в нуле } y\text{-м, получив непрерывную функцию}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dy} \int\limits_{y}^{1+y} \frac{\sin(xy)}{x}\, dx = \int\limits_{y}^{1+y} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\sin(xy)}{x}\, dx = \int\limits_{y}^{1+y} \cos(xy)\, dx =$$

$$= \frac{1}{y} \sin(xy)\,\Big|_{y}^{1+y} + \frac{\sin(y + y^2)}{1+y} - \frac{\sin(y^2)}{y} = \frac{\sin(y+y^2) - \sin(y^2)}{y} + \frac{\sin(y+y^2)}{1+y} - \frac{\sin(y^2)}{y} =$$

$$= \frac{\sin(y+y^2) - 2\sin(y^2)}{y} + \frac{\sin(y+y^2)}{1+y}$$

Покажите, что функция $u(x) = \int\limits_0^{\pi} e^{x\cos t}dt$ удовлетворяет дифеоренциальному уравнению $xu'' + u' - xu = 0$

Задача 13

$$u(x) = \int\limits_0^{\pi} e^{x\cos t}dt\,, \qquad u'(x) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial x} e^{x\cos t}dt = \int\limits_0^{\pi} \cos t e^{x\cos t}dt\,, \qquad u''(x) = \int\limits_0^{\pi} \frac{\partial^2}{\partial x^2} e^{x\cos t}dt = \int\limits_0^{\pi} \cos^2 t e^{x\cos t}dt$$

$$xu'' + u' - xu = \int\limits_0^{\pi} x\cos^2 t e^{x\cos t}dt + \int\limits_0^{\pi} \cos t e^{x\cos t}dt - \int\limits_0^{\pi} x e^{x\cos t}dt = \int\limits_0^{\pi} \left(x\cos^2 t + \cos t - x\right) e^{x\cos t}dt =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \left(\cos t - x\sin^2 t\right) e^{x\cos t}dt = -\int\limits_0^{\pi} x\sin^2 t e^{x\cos t}dt + \int\limits_0^{\pi} \underbrace{\cos t}_{dv}\underbrace{e^{x\cos t}}_{u}dt =$$

$$-\int\limits_0^{\pi} x\sin^2 t e^{x\cos t}dt + \sin t e^{x\cos t}\Big|_0^{\pi} + \int\limits_0^{\pi} x\sin^2 t e^{x\cos t}dt = \sin t e^{x\cos t}\Big|_0^{\pi} = 0$$

Применяя метод дифференцирования по параметру, вычислите интеграл

Задача 14

$f(x,p) = \ln(p^2 - \sin^2 x),\ |p| \geq 1$ — функция непрерывна и дифференцируема по $p\ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dp}\int\limits_0^{\pi/2} \ln(p^2 - \sin^2 x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\partial}{\partial p}\ln(p^2 - \sin^2 x)\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2p}{p^2 - \sin^2 x}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{2p\,\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\dfrac{p^2}{\cos^2 x} - p^2 - \sin^2 x + p^2}\,dx$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} u &=& \operatorname{tg} x, \\ du &=& \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx, \\ \dfrac{p^2}{\cos^2 x} - p^2 &=& p^2u^2 \end{array}\right. \quad \int\limits_0^{+\infty} \frac{2p}{p^2u^2 + p^2 - u^2}\,du = \int\limits_0^{+\infty} \frac{2p}{(p^2-1)u^2 + p^2}\,du = \frac{2p}{p^2-1}\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{u^2 + \dfrac{p^2}{p^2-1}}\,du =$$

$$= \frac{2p}{p^2-1}\cdot\frac{\sqrt{p^2-1}}{p}\left(\operatorname{arctg}\frac{u\sqrt{p^2-1}}{p}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{p^2-1}}\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{\sqrt{p^2-1}}$$

Осталось решить уравнение:

$$\underbrace{\frac{d}{dp}\int\limits_0^{\pi/2} \ln(p^2 - \sin^2 x)\,dx}_{=h(p)} = \frac{\pi}{\sqrt{p^2-1}} \ \Leftrightarrow\ h'_p = \frac{\pi}{\sqrt{p^2-1}} \ \Leftrightarrow\ h(p) = \pi\,\ln\left|p + \sqrt{p^2-1}\right|$$

$$\int\limits_0^{\pi/2} \ln(p^2 - \sin^2 x)\,dx = \pi\,\ln\left|p + \sqrt{p^2-1}\right|$$

Задача 15

$$J(p) = \int\limits_0^\pi \frac{\ln(1+p\sin x)}{\sin x} dx\,, \quad p \in [0,1]$$

$$\frac{d}{dp} J(p) = \int\limits_0^\pi \frac{\partial}{\partial p} \frac{\ln(1+p\sin x)}{\sin x} dx = \int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{(1+p\sin x)\sin x} dx = \int\limits_0^\pi \frac{1}{1+p\sin x} dx$$

$$t = \operatorname{tg} {}^x\!/_2, \quad x = 2\arctan t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+p\sin x} dx = \int\limits_0^\infty \frac{2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1+\frac{2pt}{1+t^2}} dt = \int\limits_0^\infty \frac{2}{t^2+2pt+1} dt = \int\limits_0^\infty \frac{2}{(t+p)^2+1-p^2} dt = \left\{ \begin{array}{ll} z & = t+p \\ dt & = dz \end{array} \right\} =$$

$$\int\limits_p^\infty \frac{2}{z^2+1-p^2} dz = 2\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \arctan \frac{z}{\sqrt{1-p^2}} \Bigg|_p^\infty = \frac{2}{\sqrt{1-p^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \right) = \left\{ \begin{array}{ll} \sin\alpha & = p \\ \cos\alpha & = \sqrt{1-p^2} \\ \tan\alpha & = \dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}} \end{array} \right\} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} (\pi - 2\arcsin p) = \frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}} - \frac{2\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}} = J'(p)$$

$$J(p) = \int J'(p) dp = \int \left(\frac{\pi}{\sqrt{1-p^2}} - \frac{2\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}} \right) dp = \pi \arcsin p - \int \frac{2\arcsin p}{\sqrt{1-p^2}} dp = \left\{ \begin{array}{ll} u & = \arcsin p \\ du & = \dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}} dp \end{array} \right\} =$$

$$\pi \arcsin p - \int 2u du = \pi \arcsin p - u^2 + C = \pi\arcsin p - \arcsin^2 p + C = J(p)$$

$$J(p) = \int\limits_0^\pi \frac{\ln(1+p\sin x)}{\sin x} dx, \qquad J(0) = \int\limits_0^\pi \frac{\ln(1)}{\sin x} dx = 0 \ \Rightarrow\ \pi\arcsin 0 - \arcsin^2 0 + C = 0 \ \Rightarrow\ C = 0$$

$$J(p) = \pi \arcsin p - \arcsin^2 p$$

Задача 17

$$J(p) = \int\limits_0^\pi \ln\left(1 + 2p\cos x + p^2\right) dx$$

$$J'(p) = \int\limits_0^\pi \frac{\partial}{\partial p} \ln\left(1+2p\cos x + p^2\right) dx = \int\limits_0^\pi \frac{2p + 2\cos x}{1+2p\cos x + p^2} dx$$

Применяя интегрирование по параметру под знаком интеграла, вычислите интеграл $a > b > 0$

Задача 18

$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ Интегрирование по параметру — значит нужно найти типа первообразной подынтегральной

Рассмотрим $f(x, y) = x^y$, $\int\limits_a^b f dy = \int\limits_a^b x^y dy = \int\limits_a^b e^{y \ln x} dy = \frac{e^{y \ln x}}{\ln x}\Big|_a^b = \frac{e^{b \ln x} - e^{a \ln x}}{\ln x} = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$

$$\int\limits_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int\limits_0^1 \int\limits_a^b x^y dy dx = \int\limits_a^b \int\limits_0^1 x^y dx dy = \int\limits_a^b \frac{x^{y+1}}{y+1}\Big|_0^1 dy = \int\limits_a^b \frac{1}{y+1} dy = \ln(y+1)\big|_a^b = \ln\left(\frac{b+1}{a+1}\right)$$