Семинарский лист 2.3

Анастасия Григорьева
Telegram

Денис Козлов
Telegram

Елизавета Орешонок
Telegram

Ира Голобородько
Telegram

Версия от 21.11.2020 01:18

Предполагая функцию f непрерывной на D, приведите двойной интеграл от f по D к повторному двумя способами: по x затем по y и наоборот.

Задача 1

$D = \{(x, y) \mid x, y \in [0; 1], x^2 + y^2 \geq 1\}$

Множество точек, находящихся в квадрате, ограниченном прямыми $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$, за пределами круга радиуса 1 с центром в точке $(0, 0)$:

Интеграл по x затем по y:

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 dx = \int_0^1 dy \cdot x \Big|_{\sqrt{1-y^2}}^1 = \int_0^1 dy \left(1 - \sqrt{1-y^2}\right) = \int_0^1 dy - \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\, dy = 1 - \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\, dy$$

Замена: $y = \sin u \Leftrightarrow \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \sqrt{1-\sin^2 u}\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2u + 1}{2}\, du =$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2u\, du + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} du = \frac{1}{4} \sin 2u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

Тогда:

$$\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y^2}}^1 dx = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Очевидно, что повторный интеграл, взятый в другом порядке, будет вычисляться точно так же:

$$\int_0^1 dx \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 dy = \int_0^1 dy \cdot y \Big|_{\sqrt{1-x^2}}^1 = \int_0^1 dx \left(1 - \sqrt{1-x^2}\right) = \int_0^1 dy - \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dy = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$\boxed{\text{Ответ: } 1 - \frac{\pi}{4}.}$

Задача 2

$D = \{(x,y)\,|\,x,y\in[0;1],(x-1)^2+(y-1)^2\geq 1\}$

Множество точек, находящихся в квадрате, ограниченном прямыми $x=0,x=1,y=0,y=1$, за пределами круга радиуса 1 с центром в точке $(1,1)$:

Интеграл по x затем по y:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} dx = \int\limits_0^1 dy\cdot x\,\Big|_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} = \int\limits_0^1 dy\left(\sqrt{1-(y-1)^2}+1\right) = \int\limits_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}\,dy+1$$

Замена: $(y-1)=\sin u \Leftrightarrow \int\limits_0^1 \sqrt{1-(y-1)^2}\,dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u\sqrt{1-\sin^2 u}\,du = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^2 u\,du = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos 2u+1}{2}\,du =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos 2u\,du + \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 du = \frac{1}{4}\sin 2u\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 + \frac{1}{2}\,u\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{\pi}{4}$$

Тогда:

$$\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{1-(y-1)^2}+1} dx = 1-\frac{\pi}{4}$$

Очевидно, что повторный интеграл, взятый в другом порядке, будет вычисляться точно так же:

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}+1} dy = \int\limits_0^1 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx+1 = 1-\frac{\pi}{4}$$

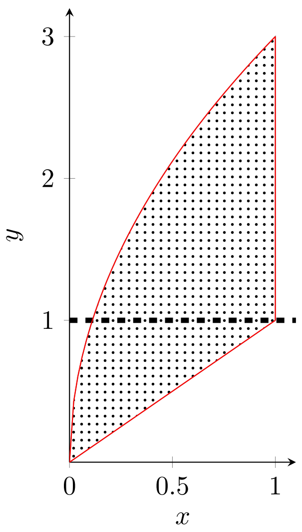
$\boxed{\text{Ответ: } 1-\frac{\pi}{4}.}$

Предполагая функцию f непрерывной на D, измените порядок интегрирования в повторном интеграле

Задача 6

$$\int_0^1 dy\int_{\frac{y^2}{9}}^{y} f(x,y)dx + \int_1^3 dy\int_{\frac{y^2}{9}}^{1} f(x,y)dx = \text{ пристально смотрим на рисунок } =$$

$$= \int_0^1\int_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_x^{3\sqrt{x}} f(x,y)dy$$



Изменив порядок интегрирования, вычислите интеграл

Задача 10

$$\int_0^2 x^2dx\int_x^2 \ln(1+y^2)dy = \text{ пристально смотрим на рисунок } = \int_0^2\int_0^y x^2\ln(1+y^2)dxdy =$$

$$= \int_0^2 \ln(1+y^2)dy\int_0^y x^2dx = \int_0^2 \ln(1+y^2)dy\left(\frac{x^3}{3}\Big|_0^y\right) = \frac{1}{3}\int_0^2 \ln(1+y^2)y^3dy =$$

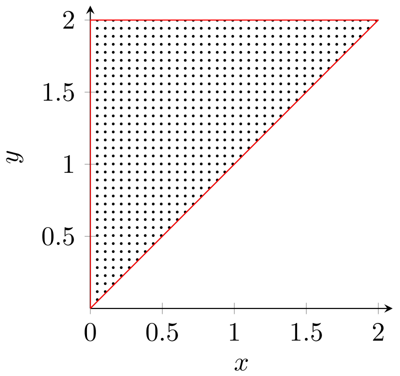
$$= \left\{\begin{array}{ll} u=\ln(1+y^2) & \Rightarrow u'=\dfrac{2y}{1+y^2} \\ v'=y^3 & \Rightarrow v=\dfrac{y^4}{4}\end{array}\right\} = \frac{1}{3}\ln(1+y^2)\frac{y^4}{4}\Big|_0^2 - \frac{1}{3}\int_0^2 \frac{y^4}{4}\frac{2y}{1+y^2}dy = \left\{\begin{array}{l} t=1+y^2 \\ dt=2ydy \\ dy=\dfrac{dt}{2y}\end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{3}(4\ln(5)-0) - \frac{1}{6}\int_1^5 \frac{y^5}{t}\frac{dt}{2y} = \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}\int_1^5 \frac{(y^4+2y^2+1)-(2y^2-2)+1}{t}dt =$$

$$= \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}\int_1^5 \frac{t^2-2t+1}{t}dt = \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}\left(\int_1^5 tdt - 2\int_1^5 dt + \int_1^5 \frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}\left(\left(\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\right) - 2(5-1) + \ln(|t|)\Big|_1^5\right) = \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{12}(12-8+\ln(5)) =$$

$$= \frac{4}{3}\ln(5) - \frac{1}{3} - \frac{\ln(5)}{12} = \mathbf{\frac{5\ln(5)}{4} - \frac{1}{3}}$$



Вычислите интеграл

Задача 14

$$D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leqslant 9\right\} \qquad \iint\limits_D \operatorname{sgn}\left(x^2 + y^2 - 4\right) dxdy$$

Заметим, что D описывает множество точек круга с радиусом 3, а подынтегральная функция принимает значение -1 на точках круга радиусом 2 и значение 1 на всех остальных точках. Получается задачу можно решать не через матан а через геому, чем мы и займемся.

$$\iint\limits_D \operatorname{sgn}\left(x^2 + y^2 - 4\right) dxdy = -1(\pi 2^2) + 1(\pi 3^2 - \pi 2^2) = \pi$$

Предполагая функцию f непрерывной на D, измените порядок интегрирования в повторном интеграле всеми возможными способами

Задача 18

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(x,y,z)dz \qquad \text{Порядок интегрирования (x, y, z)}$$

Видим, что $\begin{cases} x, y, z \in [0,1] \\ y \leqslant x; \quad z \leqslant y \quad z \leqslant x \end{cases}$ — это помогает шафлить порядок интегрирования

Пристально смотрим на картинку, начинаем менять порядок:

$(\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y})\colon \; \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x f(x,y,z)dy$

$(\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z})\colon \; \int_0^1 dy \int_y^1 dx \int_0^y f(x,y,z)dz$

$(\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x})\colon \; \int_0^1 dy \int_0^y dz \int_y^1 f(x,y,z)dx$

$(\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y})\colon \; \int_0^1 dz \int_z^1 dx \int_z^x f(x,y,z)dy$

$(\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{x})\colon \; \int_0^1 dz \int_z^1 dy \int_y^1 f(x,y,z)dx$

Алгоритм действий для меня был выписать все известные отношения с уже введенными переменными и использовать самые строгие. Может быть в более потных примерах придется дробить интегралы на несколько, но лично я такое решать не хочу.