

Семинарский лист 2.4

Денис Козлов
[Telegram](#)

Елизавета Орешонок
[Telegram](#)

Ира Голобородько
[Telegram](#)

Версия от 27.11.2020 21:40

Предполагая функцию f непрерывной на D , запишите тройной интеграл от f по D в виде одного из повторных, если D задано неравенствами.

Задача 1

$$0 \leq z \leq 4 - x^2, \quad x^2 - y^2 \geq 0, \quad x \geq 0.$$

Хочу интегрировать в порядке $\int_{\dots}^{\dots} dx \int_{\dots}^{\dots} dy \int_{\dots}^{\dots} f(x, y, x) dz$.

Посмотрим, что происходит при фиксированном x .

Так как $x^2 \geq y^2 \iff |x| \geq |y|$, то $-x \leq y \leq x$ (x положительный). Ещё знаем, что $0 \leq z \leq 4 - x^2$.

$$\text{Итак, } \int_{\dots}^{\dots} dx \int_{-x}^x dy \int_0^{4-x^2} f(x, y, x) dz.$$

А каковы границы x ? $x \geq 0$, это нам дано. Из того, что $z \in [0, 4 - x^2]$, сделаем вывод, что $x \leq 2$, ведь при больших значениях x множество становится вырожденным.

Так что границы интегрирования знаем, $\boxed{\int_0^2 dx \int_{-x}^x dy \int_0^{4-x^2} f(x, y, x) dz}.$

Задача 2

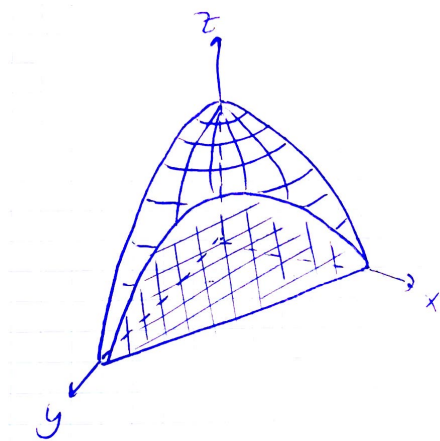
$$x + y + z \leq 2; \quad 0 \leq 4z \leq 4 - x^2 - y^2; \quad x \geq 0; \quad y \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0, & y \geq 0; & z \geq 0 \\ x + y + z \leq 2 \\ x^2 + y^2 \leq 4 - 4z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [0, 2] \\ y \in [0, 2] \\ z \in [0, 1] \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 2 - x - y \\ 4z = 4 - x^2 - y^2 \end{cases} \Rightarrow 8 - 4x - 4y = 4 - x^2 - y^2 \Rightarrow y = \sqrt{4x - x^2} + 2 - \text{пересечение фигур}$$

$$\int_0^1 dx \left\{ \int_0^{\sqrt{4x-x^2}+2} dy \int_0^{1-\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}} f(x, y, z) dz + \int_{\sqrt{4x-x^2}+2}^{1-x} dy \int_0^{2-x-y} f(x, y, z) dz \right\}$$

Пересечение параболоида и плоскости. Первый интеграл отвечает за часть параболоида, а второй — за плоскость.



Задача 3

$$0 \leq z \leq 4xy, \quad x + 4y + z \leq 1.$$

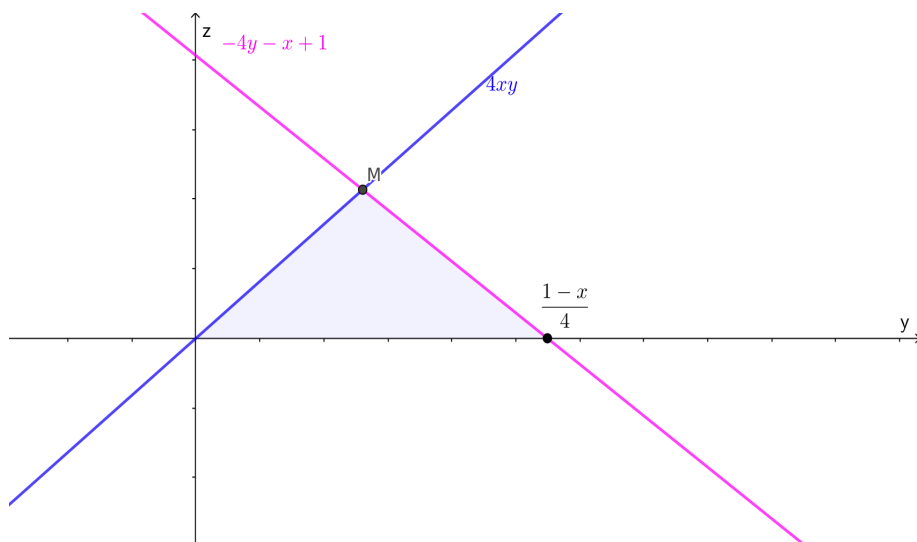
Буду интегрировать $\int_{\dots}^{\dots} dx \int_{\dots}^{\dots} dy \int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dz.$

Для невырожденности D требуется $\begin{cases} x \neq 0; \\ y \neq 0. \end{cases}$

Из того, что $0 \leq xy$, делаем вывод, что x и y одного знака.

Случай I. $\begin{cases} x > 0; \\ y > 0. \end{cases}$

При фиксированном x в срезе Oyz нас интересуют точки треугольника, ограниченного прямыми $z = 4xy, z = -4y - x + 1$ и $z = 0$.



Найдём y -координату точки M : $-4y - x + 1 = 4xy \Rightarrow 4y(x + 1) = 1 - x \Rightarrow M_y = \frac{1 - x}{4x + 4}$.

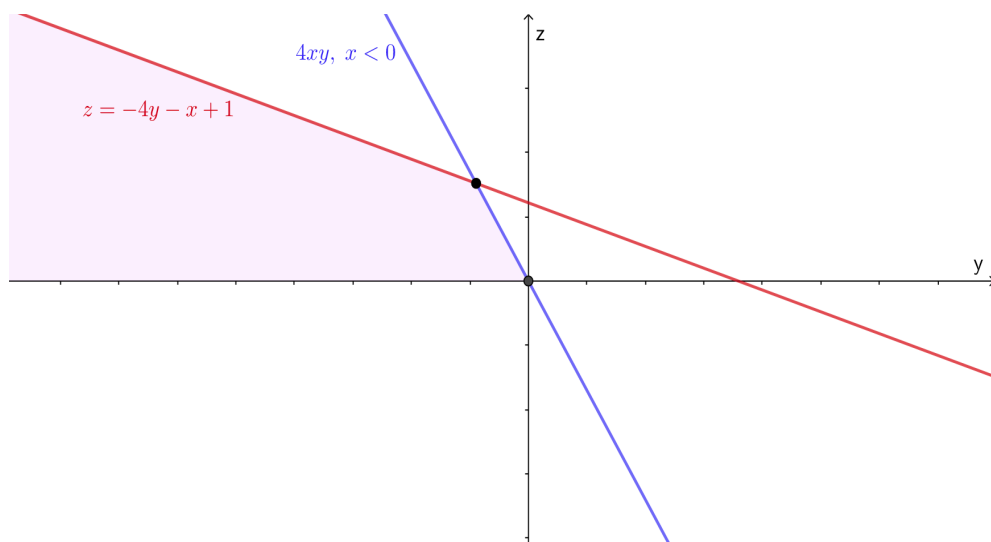
Множество является вырожденным, т. и т.т. прямая $z = -4y - x + 1$ проходит через 0, т.е. при $x = 1$.

Значит, в данном случае $x \in (0, 1)$. Интегрируем!

$$\int_0^1 dx \left(\int_0^{M_y} dy \int_0^{4xy} f dz + \int_{M_y}^{(1-x)/4} dy \int_0^{-4y-x+1} f dz \right), \text{ где } M_y = \frac{1-x}{4x+4}.$$

Случай II. $\begin{cases} x < 0; \\ y < 0. \end{cases}$

При фиксированном x в срезе Oyz происходит такая жуть:



Данная область неограничена снизу по y , значит она бесконечная \Rightarrow интеграл от неё невозможно взять.

Задача 4

$$y^2 \leq z \leq 4, \quad x^2 + y^2 \leq 16$$

Все точки рассматриваемой области находятся внутри круга радиуса 4 с центром в начале координат (его задает неравенство $x^2 + y^2 \leq 16$). Значения z , как видно из 1-го неравенства, лежат в промежутке $[y^2; 4]$. Искомый повторный интеграл может иметь вид:

$$\int_{-4}^4 dx \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \int_{y^2}^4 f(x, y, z) dz$$

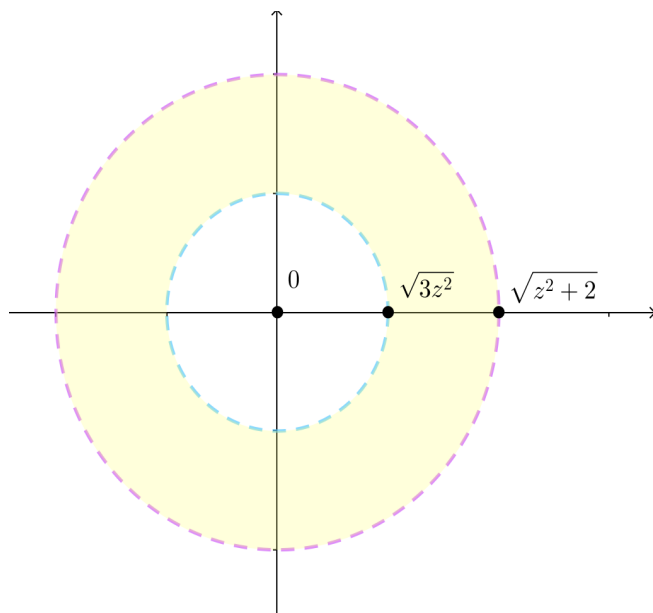
Задача 5

$$x^2 + y^2 \geq 3z^2, \quad x^2 + y^2 - z^2 \leq 2.$$

Проинтегрируем внешне по z .

$$z = \text{const} \implies x^2 + y^2 \geq 3z^2, \quad x^2 + y^2 \leq z^2 + 2.$$

Нам интересно примерно такое колечко:



Можно начать разбивать область интегрирования по x . Но мы ленивые. Поэтому просто вычтем из площади большей окружности площадь меньшей.

Тогда внутри интеграла по z появится

$$\int_{-\sqrt{z^2+2}}^{\sqrt{z^2+2}} dx \int_{-\sqrt{z^2+2-x^2}}^{\sqrt{z^2+2-x^2}} f dy - \int_{-\sqrt{3z^2}}^{\sqrt{3z^2}} dx \int_{-\sqrt{3z^2-x^2}}^{\sqrt{3z^2-x^2}} f dy.$$

Для невырожденности множества, получаем условие $\sqrt{3z^2} \leq \sqrt{z^2+2} \iff 2z^2 \leq 2 \iff |z| \leq 1 \iff z \in [-1, 1]$.

Итого

$$\int_{-1}^1 dz \left(\int_{-\sqrt{z^2+2}}^{\sqrt{z^2+2}} dx \int_{-\sqrt{z^2+2-x^2}}^{\sqrt{z^2+2-x^2}} f dy - \int_{-\sqrt{3z^2}}^{\sqrt{3z^2}} dx \int_{-\sqrt{3z^2-x^2}}^{\sqrt{3z^2-x^2}} f dy \right).$$

Задача 6

$$y^2 + x + z \leq 1, \quad x \geq z \geq 0$$

Проинтегрируем в порядке

$$\int_{\dots}^{\dots} dy \int_{\dots}^{\dots} dx \int_{\dots}^{\dots} f(x, y, z) dz$$

При фиксированном y неравенства $y^2 + x + z \leq 1$ и $x \geq z \geq 0$ можно переписать в виде системы

$$\begin{cases} z \leq (1 - y^2) - x, \\ z \leq x, \\ z \geq 0 \end{cases},$$

задающей треугольник, ограниченный прямыми $z = (1 - y^2) - x$, $z = x$ и $z = 0$, при условии того, что точка пересечения прямых $z = (1 - y^2) - x$ и $z = x$ находится не ниже оси Ox :

$$(1 - y^2) - x = x \Leftrightarrow x = \frac{1 - y^2}{2} \Rightarrow z = x = \frac{1 - y^2}{2} \geq 0 \Rightarrow 1 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-1; 1]$$

Значения x нас интересуют только те, при которых $z \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - y^2) - x \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq (1 - y^2), \\ x \geq 0 \end{cases},$

т.е. $x \in [0; 1 - y^2]$. При этом при $x \leq \frac{1 - y^2}{2}$ значения z лежат на отрезке $[0; x]$, а при $x \geq \frac{1 - y^2}{2}$ — на отрезке $[0; 1 - y^2]$

Получили границы для повторного интеграла:

$$\int_{-1}^1 dy \left(\int_0^{\frac{1-y^2}{2}} dx \int_0^x f(x, y, z) dz + \int_{\frac{1-y^2}{2}}^{1-y^2} dx \int_0^{1-y^2} f(x, y, z) dz \right)$$

Вычислите интеграл.

Задача 7

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} (x + y + z) dz &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \left(\int_0^{xy} (x) dz + \int_0^{xy} (y) dz + \int_0^{xy} (z) dz \right) = \int_0^1 dx \int_0^x dy \left(x \int_0^{xy} 1 dz + y \int_0^{xy} 1 dz + \int_0^{xy} (z) dz \right) = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \left(x \cdot (xy) + y \cdot (xy) + \frac{(xy)^2}{2} \right) = \int_0^1 x dx \cdot \int_0^x dy \left(xy + y^2 + \frac{xy^2}{2} \right) = \int_0^1 x \cdot \left(x \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) + \frac{x^3}{3} + x \cdot \left(\frac{x^3}{6} \right) \right) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^5}{6} dx = \left(\frac{x^5}{10} + \frac{x^5}{15} + \frac{x^6}{36} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{36} = \frac{3+2}{30} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}. \end{aligned}$$

Задача 8

$$\begin{aligned} \int_1^2 dy \int_y^2 dx \int_0^{1/(xy)} \frac{dz}{x(1+x^2y^2z^2)} &= \left[u = xyz, \frac{du}{dz} = xy \Leftrightarrow dz = \frac{du}{xy} \right] \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{xy} dx \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \\ &= \int_1^2 dy \int_y^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{xy} dx \cdot \left(\operatorname{arctg} u \Big|_0^1 \right) = \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{1}{y} dy \int_y^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{1}{y} dy \cdot \left(-\frac{1}{x} \Big|_y^2 \right) = \frac{\pi}{4} \int_1^2 \frac{1}{y} \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{2} \right) dy = \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\int_1^2 \frac{1}{y^2} dy - \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{y} dy \right) = \frac{\pi}{4} \left(-\frac{1}{y} \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \ln y \Big|_1^2 \right) = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \right) = \frac{\pi}{8} (1 - \ln 2) \end{aligned}$$

Задача 9

Задача 10

$$\begin{aligned} \int_1^3 dz \int_{1-z}^{3-z} dy \int_0^{3-y-z} \frac{dx}{(x+y+z)^2} &= \left[u = x+y+z, \frac{du}{dx} = 1 \Leftrightarrow dx = du \right] \int_1^3 dz \int_{1-z}^{3-z} dy \int_{y+z}^3 \frac{du}{u^2} = \\ &= \int_1^3 dz \int_{1-z}^{3-z} dy \cdot \left(-\frac{1}{u} \Big|_{y+z}^3 \right) = \int_1^3 dz \int_{1-z}^{3-z} \left(\frac{1}{y+z} - \frac{1}{3} \right) dy = [v = y+z, dy = dv] \int_1^3 dz \left(\int_1^3 \frac{1}{v} dv - \frac{1}{3} \int_{1-z}^{3-z} dy \right) = \\ &= \int_1^3 dz \left(\ln 3 - \frac{1}{3} ((3-z) - (1-z)) \right) = \int_1^3 dz \left(\ln 3 - \frac{2}{3} \right) = \left(\ln 3 - \frac{2}{3} \right) (3-1) = 2 \ln 3 - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

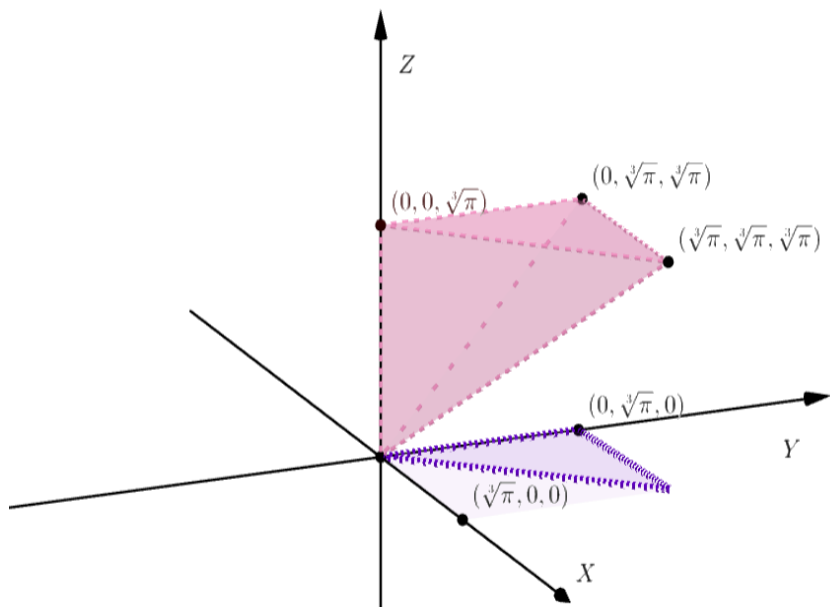
Измените порядок интегрирования и вычислите интеграл.

Задача 11

$$\int_0^{\sqrt[3]{\pi}} dx \int_x^{\sqrt[3]{\pi}} dy \int_y^{\sqrt[3]{\pi}} \sin(z^3) dz. \text{ Исследуем границы для восстановления } D.$$

$x \in [0, \sqrt[3]{\pi}]$. Нам интересны точки между плоскостями $x = y$ и $y = \sqrt[3]{\pi}$.

Вертикально множество ограничено плоскостями $y = z$ и $z = \sqrt[3]{\pi}$. Итого получили пирамидку:



Так как функция зависит от z , то сначала лучше интегрировать именно по z .

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \sin(z^3) dz \int_0^z dy \int_0^y dx &= \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \sin(z^3) dz \int_0^z y dy = \int_0^{\sqrt[3]{\pi}} \frac{z^2}{2} \cdot \sin(z^3) dz = [t = z^3; dt = 3z^2 dz] = \frac{1}{6} \cdot \int_0^{\pi} \sin t dt = \frac{1}{6} \left(-\cos t \Big|_0^{\pi} \right) = \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}. \end{aligned}$$

Вычислите многократный интеграл.