

Математический анализ 2, Коллоквиум IV

Версия от 14.06.2021 12:11

Содержание

1.	Кусочно-гладкая кривая и её длина. Элемент длины для параметрически заданной кривой. Криволинейный интеграл I-го рода.	3
2.	Кусочно-гладкая поверхность и её площадь. Элемент площади для параметрически заданной поверхности. Поверхностный интеграл I-го рода.	3
2.1.	Кусочно-гладкая поверхность	3
2.2.	Элемент площади для параметрически заданной поверхности	3
2.3.	Поверхностный интеграл I-го рода	3
3.	Дифференциальная 1-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую. Ориентация кривой. Криволинейный интеграл II-го рода. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода.	4
4.	Формула Грина и её приложение к вычислению площади куска фигуры. Внешний дифференциал 2-мерной 1-формы и краткая запись формулы Грина.	4
4.1.	Формула Грина	4
4.2.	Внешний дифференциал 2-мерной 1-формы	5
4.3.	Краткая запись формулы Грина	5
5.	Дифференциальная 2-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность. Ориентация поверхности и вектор нормали. Поверхностный интеграл II-го рода. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода.	6
6.	Формула Остроградского-Гаусса и её приложение к вычислению объема тела. Внешний дифференциал 3-мерной 2-формы, дивергенция векторного поля и краткая запись формулы Остроградского-Гаусса.	6
7.	Формула Стокса. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы, ротор векторного поля и краткая запись формулы Стокса.	6
7.1.	Формула Стокса	6
8.	Комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$	7
8.1.	Комплексная плоскость.	7
8.2.	Сфера Римана и стереографическая проекция.	7
8.3.	Функция комплексной переменной.	8
8.4.	Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$	8
8.5.	Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$	9
9.	Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции. Условия Коши-Римана и голоморфность. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.	9
10.	Голоморфная функция нескольких переменных. Голоморфность композиции (в том числе: суммы, произведения, частного) голоморфных функций. Голоморфность обратной функции.	9

11.	Аналитическая функция. Аналитичность голоморфной функции. Неравенство Коши для коэффициентов ряда. Радиус сходимости ряда как максимальный радиус круга, в котором функция голоморфна. Теорема Лиувилля.	10
12.	Бесконечная дифференцируемость и голоморфность аналитической функции. Нуль аналитической функции и его порядок. Изолированность нуля аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции.	11
13.	Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.	13
13.1.	Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность.	13
13.2.	Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке.	13
13.3.	Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$	14
13.4.	Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.	14
14.	Ряд Лорана и его сходимост. Единственность разложения Лорана. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.	15
14.1.	Ряд Лорана и его сходимост.	15
14.2.	Единственность разложения Лорана.	15
14.3.	Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.	16
15.	Вычет голоморфной функции в однозначной особой точке. Теорема Коши о вычетах. Вычет как коэффициент c_{-1} ряда Лорана. Вычисления вычета в полюсе.	17

1. Кусочно-гладкая кривая и её длина. Элемент длины для параметрически заданной кривой. Криволинейный интеграл I-го рода.
2. Кусочно-гладкая поверхность и её площадь. Элемент площади для параметрически заданной поверхности. Поверхностный интеграл I-го рода.

2.1. Кусочно-гладкая поверхность

Определение. Область - открытое связное множество в \mathbb{R}^k

Определение. Замкнутая область - это замыкание некоторой области

Определение. Жорданова область - ограниченная область, измеримая по Жордану

Определение. Пусть $G \subset \mathbb{R}^k, k < m$ - замкнутая жорданова область и $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ - непрерывно дифференцируемая инъективная функция.

$$x = \varphi(u), x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_k)$$

$x \in \mathbb{R}^m, u \in G$, причем

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial u_k} \end{pmatrix}$$

имеет в любом $u \in G$ максимальный ранг k .

Тогда образ $\varphi(G)$ называется гладкой k -мерной поверхностью S (при $k \geq 2$).

$S = \bigsqcup_{i=1}^n S_i$ - кусочно гладкая поверхность

2.2. Элемент площади для параметрически заданной поверхности

Теорема. $G \subset \mathbb{R}^2$ - замкнутая жорданова область

$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ - параметризующее отображение

$(u, v) \in G$ - параметры поверхности

$$\mu(S) = \iint_G \sqrt{\begin{vmatrix} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|^2 & \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle & \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|^2 \end{vmatrix}} du dv = \iint_G \sqrt{\left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|^2 \cdot \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|^2 - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle^2} du dv$$

2.3. Поверхностный интеграл I-го рода

Теорема. Пусть:

$$G \subset \mathbb{R}^2$$

$$\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$S = \varphi(G)$$

$$f : S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = f(\varphi)$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v))$$

$$ds = \sqrt{\left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|^2 \cdot \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|^2 - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle^2} du dv, \text{ тогда:}$$

$$\int_S f(x) ds = \iint_G f(\varphi(u, v)) \cdot \sqrt{\left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|^2 \cdot \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|^2 - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle^2} dudv$$

3. Дифференциальная 1-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую. Ориентация кривой. Криволинейный интеграл II-го рода. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода.
4. Формула Грина и её приложение к вычислению площади криволинейной фигуры. Внешний дифференциал 2-мерной 1-формы и краткая запись формулы Грина.

Определение. Область $D \subset \mathbb{R}^2$ называется y -проектором (то есть проектируемой вдоль оси y), если она задается неравенствами:

$$D : a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x),$$

h_1, h_2 - непрерывные функции, $h_1(x) \leq h_2(x)$

Аналогично вводится x -проектор.

Определение. Область называется **проектируемой**, если она является x - и y -проектируемой.

Определение. Область D называется **простой**, если она есть объединение конечного числа проектируемых областей.

4.1. Формула Грина

Теорема. Пусть D - простая область с кусочно гладкой границей $L = \partial D$, ориентация которой соответствует ориентации области D . Пусть P, Q непрерывно дифференцируемы в D . Тогда:

$$\oint_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Доказательство. 1. Рассмотрим y -проектируемую область $D : a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)$

$$\begin{aligned} - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= - \int_a^b dx \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = - \int_a^b dx (P(x, h_2(x)) - P(x, h_1(x))) = \\ &= - \int_a^b P(x, h_2(x)) dx + \int_a^b P(x, h_1(x)) dx + \int_a^a P dx + \int_b^b P dx = \\ &= \int_b^a P(x, h_2(x)) dx + \int_a^b P(x, h_1(x)) dx + \int_a^a P dx + \int_b^b P dx = \oint_{\partial D} P dx \end{aligned}$$

2. Аналогично для x -проектируемой области D получим

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_{\partial D} Q dy$$

3. D - x - и y -проектируемая область, то

$$\oint_{\partial D} (P dx + Q dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dx dy \right)$$

4. (Нет четкой формулировки, записано со слов лектора)

D - простая область. В соседних областях по границе будем интегрировать в правильном направлении. Двойные интегралы (правые части) частей простой области будут складываться по аддитивности. Криволинейные интегралы (при разбиении в суммы) дадут интегралы по внешним границам и интегралы по внутренним границам. Интегралы по всем внутренним кусочкам границы будут взаимно уничтожаться (так как при обходе в противоположных направлениях будут давать разные знаки).

■

4.2. Внешний дифференциал 2-мерной 1-формы

Определение. $\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = a_1(\bar{x}) dx_1 + \dots + a_n(\bar{x}) dx_n$

a_1, \dots, a_n - непрерывно дифференцируемы

Внешним дифференциалом формы ω называется:

$$d\omega = da_1 \wedge dx_1 + \dots + da_n \wedge dx_n,$$

где $da_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial a_1}{\partial x_n} dx_n$ - обычный дифференциал.

Операция \wedge линейна и кососимметрична:

$$dx_1 \wedge dx_2 = -dx_2 \wedge dx_1 \Rightarrow dx_1 \wedge dx_1 = 0$$

Пример. $d(P dx + Q dy) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$

4.3. Краткая запись формулы Грина

$$\begin{aligned} \iint_D d(x, y) dx \wedge dy &= \iint_D f(x, y) dx dy \\ \Rightarrow \oint_{\partial D} \omega &= \iint_D d\omega, \omega = P dx + Q dy \end{aligned}$$

5. Дифференциальная 2-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность. Ориентация поверхности и вектор нормали. Поверхностный интеграл II-го рода. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода.
6. Формула Остроградского-Гаусса и её приложение к вычислению объема тела. Внешний дифференциал 3-мерной 2-формы, дивергенция векторного поля и краткая запись формы Остроградского-Гаусса.

Теорема. (Формула Остроградского-Гаусса)

Пусть D – замкнутая жорданова область, ограниченная кусочно гладкой поверхностью $S = \partial D$, также пусть $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ – непрерывно дифференцируемая 2-форма в D .

Тогда
$$\iint_{\partial D} \omega = \iiint_D d\omega.$$

Доказательство не было рассмотрено на лекции.

Определение. Внешним дифференциалом называется выражение $d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$.

Определение. Выражение $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ называется *дивергенцией* векторного поля. Обозначение: $\text{div}(P, Q, R)$

Более подробная запись формулы Остроградского-Гаусса:
$$\iint_S Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$$

7. Формула Стокса. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы, ротор векторного поля и краткая запись формулы Стокса.

7.1. Формула Стокса

Теорема. Пусть S – ориентированная кусочно гладкая поверхность с краем $L = \partial S$, лежащая в области D .

$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ – непрерывно дифференцируема в D .

Тогда

$$\oint_{\partial S} \omega = \iint_S d\omega - \text{краткая запись}$$

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

Доказательство. 1. Пусть $S = \varphi(G)$, где G – прямоугольник на плоскости параметров (u_1, u_2) . Тогда

$$\oint_{\partial S} \omega = \{ \text{крив. инт. на пл-ти} \} = \iint_G d(\varphi^* \omega) = \{ \text{Формула Грина} \} \iint_G \varphi^*(d\omega) = \iint_S d\omega$$

2. В общем случае поверхность разбивается на прямоугольники и интегралы по ним суммируются. ■

Определение. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ – это $d\omega = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$ – ротор

8. Комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$.

8.1. Комплексная плоскость.

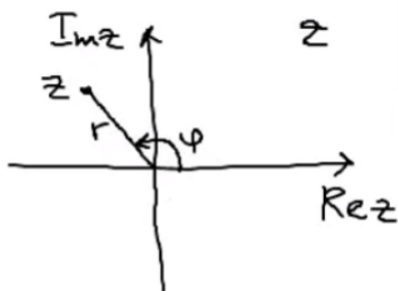
Формально вводим символ i , такой что $i^2 = -1$.

Определение. Линейная комбинация обычной единицы и мнимой единицы с вещественными коэффициентами называется *комплексным числом* $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Действительная часть числа z : $\operatorname{Re} z = x$, мнимая часть числа z : $\operatorname{Im} z = y$.

Определение. Каждому комплексному числу z ставится в соответствии *сопряженное* $\bar{z} = x - iy$.

Можно еще задать комплексное число геометрически:



Определение. Тогда *модуль* числа z — $r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Аргумент* числа z — угол φ , такой что $x = |z| \cos \varphi$, $y = |z| \sin \varphi$.

На этом моменте впервые встает вопрос о многозначности функций.

Определение. Если мы хотим говорить про однозначно выбираемый аргумент, то пишут $\varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$ или $(-\pi; \pi]$ — *главное значение* аргумента. При этом, $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ — *полный (или многозначный) аргумент*.

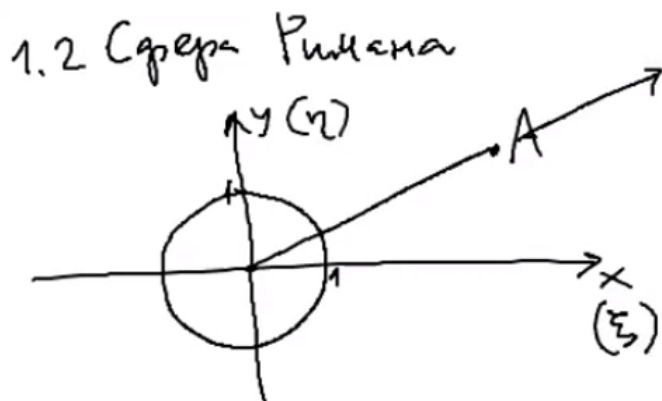
Определение. *Тригонометрическая запись* комплексного числа: $z = |z| \cdot (\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$.

Определение. *Показательная форма записи:* комплексного числа: $z = |z| \cdot e^{i \operatorname{Arg} z}$.

Комплексную плоскость обычно обозначают \mathbb{C} .

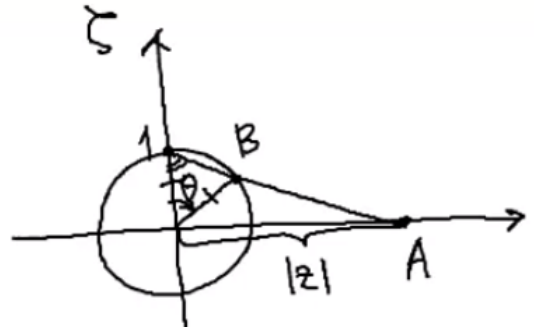
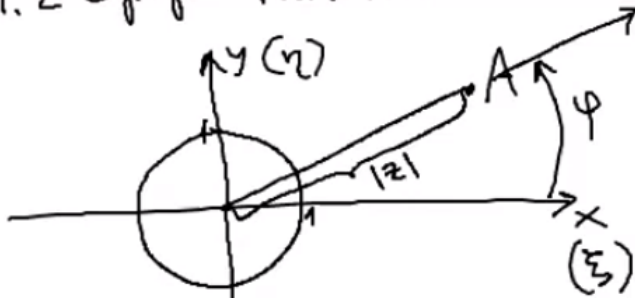
8.2. Сфера Римана и стереографическая проекция.

На рисунке не окружность, а сфера единичная.



Рассматриваем вертикальное сечение в плоскости, содержащей ось ζ и прямую, проходящую через начало координат и точку A . Наша сфера выглядит следующим образом (рисунок справа):

1.2 Сфера Римана



Определение. Отображение $B \mapsto A$ – *стереографическая проекция*. Но для нас будет более важным обратное отображение.

Заметим, что $|z| = \tan \frac{\pi - \theta}{2}$ и $\varphi = \arg z$.

Отсюда несложно вывести (по словам Маевского Е.В.), что $\xi = \frac{2x}{1 + |z|^2}$, $\eta = \frac{2y}{1 + |z|^2}$, $\zeta = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}$.

Обратные формулы: $x = \frac{\xi}{1 - \zeta}$ и $y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$.

В действительном матанализе мы фактически имели две бесконечности (для нас было важно направление): $+\infty$ и $-\infty$. В комплексном матанализе чаще всего не имеет значения, в каком направлении мы идем в бесконечность. Поэтому рассматривается просто *бесконечно удаленная точка* и обозначается $z \rightarrow \infty$. Это означает, что $|x|, |y| \rightarrow \infty$.

Можно заметить, что если мы захотим добавить бесконечно удаленную точку к комплексной плоскости, то ей будет соответствовать северный полюс на сфере Римана. Если мы добавим к комплексной плоскости бесконечно удаленную точку, то это называется *замкнутой комплексной плоскостью*: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. И вот как раз замкнутую комплексную плоскость очень удобно представлять, как сферу Римана.

Стало непонятно, надо ли теxать про сходимостъ последовательности, поэтому ссылка с таймкодом на лекцию: [тык](#).

8.3. Функция комплексной переменной.

Определение. Функция комплексной переменной $w = f(z)$ – отображение, заданное на одной комплексной плоскости и принимающее значения на другой комплексной плоскости.

Считаем, что $w = u + iv$, тогда становится понятно, что $f(z) = u(z) + iv(z)$, где $u(z), v(z)$ – вещественные функции от комплексной переменной. Еще можно представлять функцию от z как функцию от двух переменных: $f(z) = \tilde{f}(x, y)$. Тогда $\tilde{f}(x, y) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$.

Замена переменной:

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$$

Тогда $f(z) = \tilde{f}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right)$.

8.4. Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z, \cos z$.

Определение. Экспонента e^z в комплексном случае задается двумя эквивалентными способами:

$$1) e^z := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad \forall z$$

$$2) e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

На основе этого определения доказываются все те же известные нам алгебраические свойства экспоненты для комплексного случая.

Тогда можем написать, что $w = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \implies u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$.

Определение. Косинус в комплексном случае тоже задается двумя эквивалентными способами:

$$1) \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$2) \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

С помощью этих формул можно получить следующее:

$$\cos z = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \implies u = \cos x \operatorname{ch} y, v = -\sin x \operatorname{sh} y$$

Определение. Синус в комплексном случае тоже задается двумя эквивалентными способами:

$$1) \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$2) \sin z := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

С помощью этих формул можно получить следующее:

$$\sin z = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \implies u = \sin x \operatorname{ch} y, v = \cos x \operatorname{sh} y$$

8.5. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}, \operatorname{Ln} z$.

Определение. Комплексным корнем n -ой степени $\sqrt[n]{z}, z \neq 0$ называется каждое число $w : w^n = z$, где $n = 2, 3, 4, \dots$

Определение. Полным натуральным логарифмом $\operatorname{Ln} z, z \neq 0$ называется каждое число $w : e^w = z$. Составим $z = |z| \cdot e^{i \operatorname{Arg} z} \implies \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + i 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Это пример бесконечнозначной функции.

9. Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции. Условия Коши-Римана и голоморфность. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.

10. Голоморфная функция нескольких переменных. Голоморфность композиции (в том числе: суммы, произведения, частного) голоморфных функций. Голоморфность обратной функции.

Определение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – область определения

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ – непрерывно дифференцируема.

f называется голоморфной в D , если она удовлетворяет условию Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Определение. Пусть $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ – области определения. Функция $F : G_1 \times G_2 \rightarrow \mathbb{C}$:

$$F(z_1, z_2) = U(x_1, y_1, x_2, y_2) + iV(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

называется голоморфной, если она непрерывно дифференцируема и голоморфна по каждой переменной в отдельности.

Теорема. Пусть $D \subseteq \mathbb{C}$ – область, $\varphi_1 : D \rightarrow G_1, \varphi_2 : D \rightarrow G_2$ – голоморфны.

Тогда $f(z) = F(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ – голоморфна.

Доказательство. Для удобства будем иметь в виду, что $\varphi_k(z) = \xi_k(x, y) + i\eta_k(x, y), k \in \{1, 2\}$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

Тогда

$$u'_x = U'_{x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + U'_{y_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + U'_{x_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + U'_{y_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = V'_{y_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + (-V'_{x_1}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right) + V'_{y_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + (-V'_{x_2}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right) = v'_y$$

Аналогично, $u'_y = -v'_x$ ■

Следствие. Голomorphicны следующие функции:

1. $F(z_1, z_2) = az_1 + bz_2$
2. $F(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$
3. $F(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}, z_2 \neq 0$

Теорема. Пусть $w = f(z)$, $w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$ и f – голоморфна в окрестности точки z_0 .

Тогда в некоторой окрестности точки w_0 существует единственная обратная функция $f^{-1}(w) : f^{-1}(w_0) = z_0$, которая является голоморфной.

Доказательство. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}, \text{ причем } \begin{cases} u_0 = u(x_0, y_0) \\ v_0 = v(x_0, y_0) \end{cases}$$

Посчитаем Якобиан отображения в z_0 :

$$\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \Big|_{z_0} = |f'(z_0)|^2 > 0 \implies \text{Существует единственное обратное отображение по теореме о неявной функции}$$

Найдем матрицу Якоби обратного отображения:

$$\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \Big|_{w_0} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}^{-1} \Big|_{z_0} = \frac{1}{|f'(z_0)|^2} \begin{pmatrix} v'_y & -u'_y \\ -v'_x & u'_x \end{pmatrix}$$

Рассмотрим элементы на главных диагоналях первой и последней матриц. Т.к. исходное отображение голоморфно, то $v'_y = u'_x$, а значит и $x'_u = y'_u$.

Аналогично, рассмотрев элементы на побочных диагоналях, получим, что $x'_v = -y'_u$. Условие Коши-Римана выполнено, значит, обратная функция является голоморфной. ■

11. Аналитическая функция. Аналитичность голоморфной функции. Неравенство Коши для коэффициентов ряда. Радиус сходимости ряда как максимальный радиус круга, в котором функция голоморфна. Теорема Лиувилля.

Определение. Функция называется аналитической в точке z_0 , если $\exists \{c_n\} \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k, |z - z_0| < \delta$$

Теорема. Если функция f голоморфна в окрестности z_0 , то она аналитична в z_0 .

Доказательство. Пусть $|z - z_0| < \varepsilon < \delta$, $L = \{\zeta : |\zeta - z_0| = \varepsilon\}$

$$\text{Тогда по формуле Коши: } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \dots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n + \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right) d\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^k + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_L f(\zeta) \cdot \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{\zeta - z} d\zeta}_{r_n(z, z_0)}$$

Пусть $M = \sup_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} |f(\zeta)|$, а также заметим, что $|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| = \varepsilon(1 - \alpha)$, тогда:

$$|r_n(z, z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_L |f(\zeta)| \cdot \frac{\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^{n+1}}{|\zeta - z|} d\zeta \leq \frac{M \cdot \alpha^{n+1}}{2\pi \cdot \varepsilon(1 - \alpha)} \cdot \underbrace{2\pi\varepsilon}_{\text{длина кривой}} \leq \frac{M \cdot \alpha^{n+1}}{\varepsilon(1 - \alpha)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Значит, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, $c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$ при $\forall z : |z - z_0| < \delta$.

Так как $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ голоморфна в кольце $\varepsilon_1 \leq |z - z_0| \leq \varepsilon_2$, то $\oint_{|z - z_0| = \varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta - \oint_{|z - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = 0 \implies c_k$ не зависит от ε . ■

Следствие. (Неравенство Коши)

$$|c_k| \leq \oint_L \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{k+1}} d\zeta \leq \frac{M}{2\pi\varepsilon^{k+1}} \cdot 2\pi\varepsilon = \frac{M}{\varepsilon^k}, \text{ подставим } M:$$

$$|c_k| \leq \frac{1}{\varepsilon^k} \cdot \sup_{|z - z_0| = \varepsilon} |f(z)| \quad \forall \varepsilon < \delta$$

Теорема. Пусть $f(z)$ голоморфна в $|z - z_0| < r$, но не является голоморфной в круге большего радиуса, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, $|z - z_0| < R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$. Тогда $R = r$.

Доказательство. Пусть $M = \sup_{|z - z_0| = \varepsilon} |f(z)|$, $|c_k| \leq \frac{M}{\varepsilon^k} \quad \forall \varepsilon < r$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} \leq \frac{1}{\varepsilon} \implies R \geq \varepsilon \quad \forall \varepsilon < r \implies R \geq r.$$

Но если $R > r$, то ряд сходится в $z : |z - z_0| > r$, что противоречит условию.

Значит, $R = r$. ■

Теорема. (Лиувилля)

Если функция $f(z)$ голоморфна и ограничена на \mathbb{C} , то она – константа.

Доказательство. Пусть $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

Так как $|c_k| \leq \frac{M}{\varepsilon^k} \quad \forall \varepsilon$, то при $\varepsilon \rightarrow \infty$ получаем, что $c_1 = c_2 = \dots = 0 \implies f(z) = c_0$ ■

12. Бесконечная дифференцируемость и голоморфность аналитической функции. Нуль аналитической функции и его порядок. Изолированность нуля аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции.

Предложение. Пусть $f(z)$ – аналитическая в точке z_0 . Значит, функция $f(z)$ представима в окрестности z_0 в виде ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, $|z - z_0| < \delta$. Тогда ряд будет абсолютно сходиться $\forall z : |z - z_0| = \varepsilon < \delta \implies \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \varepsilon^k$. Отсюда

$$\text{следует } \exists A > 0 : |c_k| \varepsilon^k \leq A \implies |c_k| \leq \frac{A}{\varepsilon^k}.$$

Покажем что аналитическая функция дифференцируема. Рассмотрим $|z - z_0| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon < \delta$. Берём приращение $0 < |h| < \varepsilon - \varepsilon_1$.

$$\frac{(z + h) - f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{(z - z_0 + h)^k - (z - z_0)^k}{h}$$

$$\frac{(z - z_0 + h)^k - (z - z_0)^k}{h} = k(z - z_0)^{k-1} + c_k^2 h(z - z_0)^{k-2} + \dots + c_k^k h^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1} + h c_2 + h \sum_{k=3}^{\infty} c_k (c_k^2 (z - z_0 + \dots + c_k^k h^{k-2}))$$

При $k \geq 3$: $c_k^2 \varepsilon_{k-2} + c_k^3 \varepsilon_1^{k-3} |h| + \dots + c_k^k |h|^{k-2} \leq c_k^2 (\varepsilon_1 + |h|)^{k-2}$.

Теперь возьмём по модулю третью сумму: $|h \sum_{k=3}^{\infty} c_k(c_k^2(z - z_0 + \dots + c_k^k h^{k-2}))| \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{A}{\varepsilon^k} \frac{k(k-1)}{2} (\varepsilon_1 + |h|)^{k-2}$; так как $\frac{\varepsilon_1 + |h|}{\varepsilon} < 1$, то полученный ряд сходится. Взяв $h \rightarrow 0$, получим $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - z_0)^{k-1}$. Мы обосновали что комплексную аналитическую функцию можно почленно дифференцировать. В таком случае, можно заметить, что f' - тоже аналитическая функция, а значит $f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k (z - z_0)^{k-2}$, ч.т.д.

Мы получили, что f бесконечно дифференцируема, а из дифференцируемости вытекает её голоморфность. $f(z)$ имеет производную, это равносильно условиям Коши-Римана, кроме того $f'(z)$ непрерывна, а это даёт голоморфность.

Ноль аналитической функции, его порядок и изолированность.

Пусть в z_0 значение аналитической функции $f(z_0)$ равно 0. В этом случае z_0 называется нулём функции $f(z)$. Тогда в разложении в ряд Тейлора будет отсутствовать свободный член $c_0 = 0$. В случае когда отсутствуют все слагаемые, содержащие $(z - z_0)^i, i < n$, где n - некоторое число, то разложение будет иметь вид $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, а сама точка z_0 будет называться нулём порядка n .

Под изолированностью нуля какой-либо функции подразумевается существование такой окрестности нуля, что в ней отсутствуют другие нули.

Теорема. Теорема (прим. темера: подготовительная) единственности аналитической функции.

Если f аналитична в точке z_0 и z_0 является предельной точкой последовательности нулей функции f , т.е. $\exists z_n : z_n \rightarrow z_0, f(z_n) = 0 \forall n$, то $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки z_0 .

Доказательство. Так как f непрерывна, то $f(z_0) = 0 \implies$ в разложении $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$ некоторое количество начальных коэффициентов будет равно нулю: $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$, т.е. $f(z) = (z - z_0)^n (c_{n+1} + c_{n+2}(z - z_0) + \dots)$. Получили, что z_0 - это ноль функции f кратности n .

Рассмотрим сумму в скобках. Она задаёт голоморфную функцию $g(z)$. Значит, $g(z)$ - непрерывна, и так как $c_{n+1} \neq 0$, то существует такая окрестность $|z - z_0| < \varepsilon : |g(z)| > 0$. \implies в круге радиуса $|z - z_0| < \varepsilon$ нет других нулей функции, т.е. z_0 - ноль аналитической функции должен быть изолированным. А это противоречит тому, что у нас n нулей, т.е. такого n не существует, а значит $f(z) = 0$ в некоторой окрестности z . ■

Отсюда перейдём непосредственно к самой теореме о единственности.

Теорема. Теорема (прим. темера: основная) единственности аналитической функции.

Если две функции $f_1(z), f_2(z) \in \Sigma D$ совпадают на множестве ε , которое имеет хотя бы одну предельную точку $z_0 \in D$, то $f_1(z) = f_2(z)$ всюду в D .

Доказательство. Рассмотрим $f = f_1 - f_2$. Покажем, что $f \equiv 0$ в D . Т.е. требуется доказать, что множество $F = \{z \in D : f(z) = 0\}$, в которое включено ε совпадёт с D . Предельная точка z_0 является нулём функции f в силу непрерывности. Из теоремы доказанной ранее получим, что $f \equiv 0$ в некоторой окрестности z_0 , ибо в противном случае эта точка не могла бы быть предельной для множества нулей f . Таким образом, получим, что ядро множества F непусто - оно содержит в себе точку z_0 . По построению F открыто, но при этом замкнуто относительно области D . По ранее доказанной теореме можем сказать, что взяв точку $b \in D$, мы получим предельную точку для F , а потому $f(b) \equiv 0$, т.е. $b \in F$. Так как по определению области D связно, то имеем $F = D$. А значит $f \equiv 0$ на всей D , и $f_1(z) = f_2(z)$. ■

13. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.

13.1. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность.

Определение. Точка z_0 называется изолированной особой точкой однозначного характера функции f , если $\exists \delta : f$ голоморфна в проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$, но не является голоморфной ни в каком круге $|z - z_0| < r$

Классификация:

- $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C} \iff$ устранимая особенность
- $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff$ полюс
- $\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \iff$ существенная особенность

13.2. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке.

Теорема. Если z_0 — устранимая особенность функции f и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$, то $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ a, & z = z_0. \end{cases}$

голоморфна в окрестности точки z_0

Доказательство. Пусть f голоморфна в $0 < |z - z_0| < \delta$, $\varepsilon_1 < \varepsilon < \delta$ и $\varepsilon_1 < |z - z_0| < \varepsilon$ Тогда по формуле Коши, получаем, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{(*)_1}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{(*)_2}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \left[\begin{array}{l} \text{при } \varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ z \neq z_0 \end{array} \right]$$

Объяснения:

(*)₁: Граница множества D состоит из двух окружностей: внешней (радиуса ε , которая обходится в положительном направлении (против часовой стрелки) и внутренней (радиуса ε_1), которая обходится в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Заодно сразу поменяем знак перед интегралом по внутренней окружности, для того, чтобы написать его в положительном направлении.

(*)₂: Оценим сверху модуль второго интеграла:

$$\underbrace{\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right|}_{\text{интеграл второго рода}} \leq \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| dl}_{\text{интеграл первого рода}}$$

Затем оценим саму подынтегральную функцию:

$$\left. \begin{array}{l} f(\zeta) = a + o(1) \text{ при } \varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ |\zeta - z| \geq \underbrace{|t - z_0|}_{\text{число}} - \varepsilon_1 \\ \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} dl = 2\pi\varepsilon_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| dl}_{\text{интеграл первого рода}} \xrightarrow{\varepsilon_1 \rightarrow 0} 0$$

Вернемся к получившемуся выражению для функции $f(z)$

Так как мы перешли к пределу, мы можем сказать, что во всех точка z , включая z_0 , можно понимать левую часть выражения как $\tilde{f}(z)$, тогда получим:

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \left[\begin{array}{l} \text{при } \varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ |z - z_0| < \delta \end{array} \right]$$

Если мы применим к данному интегралу рассуждения, которые мы применяли при доказательстве аналитичности голоморфной функции (11 билет), получим, что функция представленная данным образом аналитична в точке z_0 , а отсюда следует, что она голоморфна в точке z_0 . Ну и напоследок, если мы в этот интеграл вместо z подставим z_0 , в силу произвольности ε , устремив ε к нулю, мы получим, что $\tilde{f}(z_0) = a$. ■

13.3. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$.

Определение. Полюс это точка, такая что в проколотой окрестности этой точки функция голоморфна, а в самой этой точке в пределе получается бесконечное значение.

Пусть $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \infty$, то есть z_0 — полюс

Рассмотрим функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, тогда $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ и $g(z)$ будет голоморфной в проколотой окрестности точки z_0 (так как $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности точки z_0 и не обращается в 0), отсюда делаем вывод, что $g(z)$ имеет устранимую особенность.

Доопределим функцию $g(z)$ в точке z_0 , получим новую функцию $\tilde{g}(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$ которая будет голоморфной

в точке z_0 , а значит будет аналитической, мы можем представить ее в виде степенного ряда:

$$\tilde{g}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \text{ так как } \tilde{g}(z_0) = 0 \text{ то } c_0 = \dots = c_n = 0, c_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \tilde{g}(z) = (z - z_0)^n \underbrace{(c_{n+1} + c_{n+2}(z - z_0) + \dots)}_{h(z)}$$

Определение. В такой ситуации говорят, что $\tilde{g}(z)$ имеет нуль n -ого порядка.

Распишем тогда как будет выглядеть изначальная функция $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^n} \cdot \underbrace{\frac{1}{h(z)}}_{\text{голоморфна в } z_0}$$

Определение. Число n в полученном выражении называется порядком полюса. Функция $f(z)$ имеет полюс n -ого порядка.

13.4. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.

Теорема. Если z_0 — существенно особая точка функции f , то

$$\forall a \in \overline{\mathbb{C}} \exists \{z_n\} : z_n \rightarrow z_0, f(z_n) \rightarrow a$$

Доказательство.

- $a = \infty$ Если функция ограничена в $0 < |z - z_0| < \delta$ то z_0 — устранимая особенность, но так как мы знаем, что z_0 не является устранимой особенностью, то функция f не ограничена в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$, а значит $\exists \{z_n\} : z_n \rightarrow z_0, f(z_n) \rightarrow \infty$

- Если $\forall \delta \exists z : 0 < |z - z_0| < \delta, f(z) = a$, тогда $\exists \{z_n\} : 0 < |z_n - z_0| < \frac{1}{n}, f(z_n) = a$ (выбрали последовательность, на которой функция в точности принимает значение a)

- $\exists \delta : 0 < |z - z_0| < \delta, f(z) \neq a$ Рассмотрим функцию $g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$, так как $f(z)$ в некоторой проколотой окрестности не принимает значение a , то функция $g(z)$ — голоморфна в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$

Тогда функция f выглядит следующим образом $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$ отсюда следует, что g в точке z_0 имеет существенную особенность. По первому рассмотренному случаю получаем, что для функции g верно, что $\exists \{z_n\} : g(z_n) \rightarrow \infty$, тогда $f(z_n) \rightarrow a$. ■

14. Ряд Лорана и его сходимось. Единственность разложения Лорана. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.

14.1. Ряд Лорана и его сходимось.

Пусть f голоморфна в кольце $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Зафиксируем $\forall z$ и $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 : r_1 < \varepsilon_1 < |z - z_0| < \varepsilon_2 < r_2$. Рассмотрим в плоскости ζ кольцо $\varepsilon_1 \leq |z - z_0| \leq \varepsilon_2$. Тогда по формуле Коши мы получим, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{(2)}$$

Рассмотрим эти два интеграла отдельно:

$$(1): \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta = \sum_{k=0}^n c_k (z - z_0)^k + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_2} f(\zeta) \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{\zeta - z} d\zeta$$

Заметим, что модуль остаточного члена $\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_2} f(\zeta) \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{\zeta - z} d\zeta \right|$ стремится к нулю, а значит ряд будет сходиться.

Аналогично:

$$(2): -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \frac{\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} + \dots + \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^m + \frac{\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^{m+1}}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \right) d\zeta =$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_1} f(\zeta) \cdot \frac{\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^m}{z - \zeta} d\zeta$$

В данном случае, дробь в числителе остаточного члена по модулю меньше 1, поэтому при возведении в степень мы будем получать число стремящееся к 0, то есть остаточный член будет стремиться к 0, а значит ряд сходится.

Объединяя (1) и (2) получаем обобщенный степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r_1 < \varepsilon < r_2$$

Определение.

- 1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$ — ряд Лорана.
- 2) $\sum_{k=0}^n c_k (z - z_0)^k$ — правильная часть ряда Лорана
- 3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$ — главная часть ряда Лорана

14.2. Единственность разложения Лорана.

Теорема. Пусть $f(z)$ представлена в некотором кольце $r_1 < |z - z_0| < r_2$ в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Покажем, что это и есть разложение в ряд Лорана.

Доказательство.

- Для начала докажем голоморфность функции $f(z)$ в кольце:

Заметим, что $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$ сходятся на соответствующих множествах, а мы знаем, что степенной ряд внутри интервала сходимости будет сходиться абсолютно, а если мы возьмем замкнутое подмножество множества сходимости, то на нем ряд будет сходиться равномерно. Тогда в кольце $r_1 + \delta \leq |z - z_0| \leq r_2 - \delta$ наш ряд сходится абсолютно и равномерно.

Итого получили абсолютно и равномерно сходящийся ряд, состоящий из аналитических функций, тогда (по теореме, которую мы не доказывали) сумма ряда, а именно функция $f(z)$ — аналитическая функция, а значит она голоморфная, тогда мы можем $f(z)$ разложить в ряд Лорана.

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1}(\zeta - z_0)^k$$

- Так как наш ряд сходится абсолютно и равномерно, то мы можем его проинтегрировать почленно, тогда

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| < \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1} \oint_{\varepsilon} (\zeta - z_0)^k d\zeta = (*)$$

Вычислим отдельно интеграл $\oint_{\varepsilon} (\zeta - z_0)^k d\zeta$, для этого перейдем к другой переменной интегрирования:

$$\zeta = z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}, \varphi \in [0; 2\pi]$$

$$d\zeta = \varepsilon \cdot i \cdot e^{i\varphi} d\varphi$$

$$\oint_{\varepsilon} (\zeta - z_0)^k d\zeta = \int_0^{2\pi} i \cdot \varepsilon^{k+1} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = i \cdot \varepsilon^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi \stackrel{\text{Формула Эйлера}}{=} i \cdot \varepsilon^{k+1} \cdot \begin{cases} 0, & k+1 \neq 0 \\ 2\pi, & k+1 = 0 \end{cases}$$

Возвращаясь к исходному неравенству получим, что

$$(*) = \frac{\varepsilon}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1} \cdot i \cdot \varepsilon^k \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot a_n \cdot \varepsilon^{-1} \cdot 2\pi = a_n$$

■

14.3. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.

Определение.

- 1) $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$ — ряд Лорана.
- 2) $\sum_{k=0}^n c_k(z - z_0)^k$ — правильная часть ряда Лорана
- 3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$ — главная часть ряда Лорана

Пусть z_0 — однозначно особая точка функции f . Рассмотрим ряд Лорана функции f в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

Рассмотрим множество $I = \{k \mid c_{-k} \neq 0\}$, тогда

1. z_0 — устранимая особенность $\iff I = \emptyset$, т.е. все $c_{-k} = 0$
2. z_0 — полюс $\iff I$ — конечное
3. z_0 — существенная особенность $\iff I$ — бесконечное

15. Вычет голоморфной функции в однозначной особой точке. Теорема Коши о вычетах. Вычет как коэффициент c_{-1} ряда Лорана. Вычисления вычета в полюсе.

Определение. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в $0 < |z - z_0| < \delta$, тогда вычет функции f в точке z_0 ($\text{res}_{z_0} f$) это величина, равная $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z)dz$, где $0 < \varepsilon < \delta$.

Теорема. Теорема Коши о вычетах.

Пусть f голоморфна в области D всюду, за исключением конечного числа однозначных особых точек z_1, \dots, z_n , тогда

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}_{z_k} f$$

Доказательство. Окружим каждую точку маленьким кругом, которые не пересекаются и не вылезают за предел множества. Каждая точка - z_i , а её круг - U_i .

Рассмотрим множество $D' = D$

$(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n)$, тогда по теореме Коши:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} f(z)dz = 0 &\implies \oint_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\partial U_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}_{z_k} f \\ &(\oint_{\partial U_k} f(z)dz = 2\pi i \text{res}_{z_k} f) \end{aligned}$$

■

Теорема. Вычет как коэффициент c_{-1} ряда Лорана: $\text{res}_{z_0} f = c_{-1}$.

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$ в некоторой проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$. Так как этот ряд сходится, то мы можем его почленно проинтегрировать: $\text{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon} f(z)dz$. Возьмём замкнутое множество $\delta < |z - z_0| < r - \delta$, тогда на этом множестве ряд будет сходиться равномерно, а значит мы можем почленно применить этот интеграл к каждому слагаемому ряда: $\text{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} (z-z_0)^k dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot c_{-1} \cdot 2\pi i = c_{-1}$. Здесь мы заметили, что интеграл внутри суммы обращается в $2\pi i$ при $k+1=0$, и в 0 в обратном случае. ■

Предложение. Пусть z_0 - полюс порядка n . $f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$ Домножим на $(z-z_0)^n$. Получим $f(z)(z-z_0)^n = c_{-n} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n + \dots$ Сделав разложение по Тейлору получим $c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} (f(z)(z-z_0)^n)^{(n-1)}|_{z=z_0}$. Если $n=1$, то $c_{-1} = (f(z)(z-z_0))|_{z=z_0}$, на самом деле так как у f есть неприятность в точке z_0 , то как правило необходимо считать предел.