Математический анализ 2, Коллоквиум IV

Версия от 13.06.2021 21:20

Содержание

1. **Кусочно-гладкая кривая и её длина. Элемент длины для параметрически заданной кривой. Криволинейный интеграл I-го рода.**

2. **Кусочно-гладкая поверхность и её площадь. Элемент площади для параметрически заданной поверхности. Поверхностный интеграл I-го рода.**

3. **Дифференциальная 1-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую. Ориентация кривой. Криволинейный интеграл II-го рода. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода.**

4. **Формула Грина и её приложение к вычислению площади клоской фигуры. Внешний дифференциал 2-мерный 1-формы и краткая запись формулы Грина.**

5. **Дифференциальная 2-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность. Ориентация поверхности и вектор нормали. Поверхностный интеграл II-го рода. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода.**

6. **Формула Остроградского-Гаусса и её приложение к вычислению объема тела. Внешний дифференциал 3-мерной 2-формы, дивергенция векторного поля и краткая запись формы Остроградского-Гаусса.**

7. **Формула Стокса. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы, ротор векторного поля и краткая запись формулы Стокса.**

8. **Комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$.**

9. **Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции. Условия Коши-Римана и голоморфность. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.**

10. **Голоморфная функция нескольких переменных. Голоморфность композиции (в том числе: суммы, произведения, частного) голоморфных функций. Голоморфность обратной функции.**

Определение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – область определения
$f : D \to \mathbb{R}^2$ – непрерывно дифференцируема.
f называется голоморфной в D, если она удовлетворяет условию Коши-Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Определение. Пусть $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ – области определения. Функция $F : G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}$:

$$F(z_1, z_2) = U(x_1, y_1, x_2, y_2) + iV(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

называется голоморфной, если она непрерывно дифференцируема и голоморфна по каждой переменной в отдельности.

Теорема. Пусть $D \subseteq \mathbb{C}$ – область, $\varphi_1 : D \to G_1$, $\varphi_2 : D \to G_2$ – голоморфны.
Тогда $f(z) = F\left(\varphi_1(z), \varphi_2(z)\right)$ – голоморфна.

Доказательство. Для удобства будем иметь в виду, что $\varphi_k(z) = \xi_k(x,y) + i\eta_k(x,y)$, $k \in \{1,2\}$ и $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ Тогда

$$u'_x = U'_{x_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + U'_{y_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + U'_{x_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + U'_{y_1}\frac{\partial \eta_2}{\partial x} = V'_{y_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial y} + (-V'_{x_1}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right) + V'_{y_2}\frac{\partial \eta_2}{\partial y} + (-V'_{x_2}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right) = v'_y$$

Аналогично, $u'_y = -v'_x$ ■

Следствие. Голоморфны следующие функции:

1. $F(z_1, z_2) = az_1 + bz_2$
2. $F(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$
3. $F(z_1, z_2) = \dfrac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$

Теорема. Пусть $w = f(z)$, $w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$ и f – голоморфна в окрестности точки z_0.
Тогда в некоторой окрестности точки w_0 существует единственная обратная функция $f^{-1}(w) : f^{-1}(w_0) = z_0$, которая является голоморфной.

Доказательство. Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, тогда:

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}, \text{ причем } \begin{cases} u_0 = u(x_0, y_0) \\ v_0 = v(x_0, y_0) \end{cases}$$

Посчитаем Якобиан отображения в z_0:

$$\left.\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}\right|_{z_0} = |f'(z_0)|^2 > 0 \implies \text{Существует единственное обратное отображение по теореме о неявной функции}$$

Найдем матрицу Якоби обратного отображения:

$$\left.\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}\right|_{w_0} = \left.\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}^{-1}\right|_{z_0} = \frac{1}{|f'(z_0)^2|}\begin{pmatrix} v'_y & -u'_y \\ -v'_x & u'_x \end{pmatrix}$$

Рассмотрим элементы на главных диагоналях первой и последней матриц. Т.к. исходное отображение голоморфно, то $v'_y = u'_x$, а значит и $x'_u = y'_u$.
Аналогично, рассмотрев элементы на побочных диагоналях, получим, что $x'_v = -y'_u$. Условие Коши-Римана выполнено, значит, обратная функция является голоморфной. ■

11. Аналитическая функция. Аналитичность голоморфной функции. Неравенство Коши для коэффициентов ряда. Радиус сходимости ряда как максимальный радиус круга, в котором функция голоморфна. Теорема Лиувилля.

Определение. Функция называется аналитической в точке z_0, если $\exists \{c_n\} \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k, \; |z - z_0| < \delta$$

Теорема. Если функция f голоморфна в окрестности z_0, то она аналитична в z_0.

Доказательство. Пусть $|z-z_0|<\varepsilon<\delta$, $L=\{\zeta : |\zeta-z_0|=\varepsilon\}$

Тогда по формуле Коши: $f(z)=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}d\zeta=$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-z_0}\left(1+\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}+\dots+\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n+\frac{\left(\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\right)d\zeta=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta\right)\cdot(z-z_0)^k+\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(\zeta)\cdot\frac{\left(\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{n+1}}{\zeta-z}d\zeta}_{r_n(z,z_0)}$$

Пусть $M=\sup\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon}|f(\zeta)|$, а также заметим, что $|\zeta-z|\geqslant|\zeta-z_0|-|z-z_0|=\varepsilon(1-\alpha)$, тогда:

$$|r_n(z,z_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\oint\limits_L|f(\zeta)|\cdot\frac{\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^{n+1}}{|\zeta-z|}dl\leqslant\frac{M\cdot\alpha^{n+1}}{2\pi\cdot\varepsilon(1-\alpha)}\cdot\underbrace{2\pi\varepsilon}_{\text{длина кривой}}\leqslant\frac{M\cdot\alpha^{n+1}}{\varepsilon(1-\alpha)}\to 0 \text{ при } n\to\infty$$

Значит, $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$, $c_k=\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$ при $\forall z:|z-z_0|<\delta$.

Так как $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$ голоморфна в кольце $\varepsilon_1\leqslant|z-z_0|\leqslant\varepsilon_2$, то $\oint\limits_{|z-z_0|=\varepsilon_2}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta-\oint\limits_{|z-z_0|=\varepsilon_1}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta=0\implies c_k$ не зависит от ε. ■

Следствие. (Неравенство Коши)

$|c_k|\leqslant\oint\limits_L\dfrac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|^{k+1}}dl\leqslant\dfrac{M}{2\pi\varepsilon^{k+1}}\cdot2\pi\varepsilon=\dfrac{M}{\varepsilon^k}$, подставим M:

$|c_k|\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon^k}\cdot\sup\limits_{|z-z_0|=\varepsilon}|f(z)|\ \forall\varepsilon<\delta$

Теорема. Пусть $f(z)$ голоморфна в $|z-z_0|<r$, но не является голоморфной в круге большего радиуса, $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k$, $|z-z_0|<R=\dfrac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}}$. Тогда $R=r$.

Доказательство. Пусть $M=\sup\limits_{|z-z_0|=\varepsilon}|f(z)|$, $|c_k|\leqslant\dfrac{M}{\varepsilon^k}\ \forall\varepsilon<r$

$\overline{\lim}\sqrt[k]{|c_k|}\leqslant\dfrac{1}{\varepsilon}\implies R\geqslant\varepsilon\ \forall\varepsilon<r\implies R\geqslant$.

Но если $R>r$, то ряд сходится в z: $|z-z_0|>r$, что противоречит условию.

Значит, $R=r$. ■

Теорема. (Лиувилля)

Если функция $f(z)$ голоморфна и ограничена на $\mathbb{C}$, то она – константа.

Доказательство. Пусть $M=\sup\limits_{z\in\mathbb{C}}|f(z)|$, $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_kz^k$

Так как $|c_k|\leqslant\dfrac{M}{\varepsilon^k}\ \forall\varepsilon$, то при $\varepsilon\to\infty$ получаем, что $c_1=c_2=\dots=0\implies f(z)=c_0$ ■

12. Бесконечная дифференцируемость и голоморфность аналитической функции. Нуль аналитической функции и его порядок. Изолированность нуля аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции.

13. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.

13.1. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность.

Определение. Точка z_0 называется изолированной особой точкой однозначного характера функции f, если $\exists\delta : f$ голоморфна в проколотой окрестности $0 < |z-z_0| < \delta$, но не является голоморфной ни в каком круге $|z-z_0| < r$

Классификация:

- $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C} \iff$ устранимая особенность
- $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff$ полюс
- $\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \iff$ существенная особенность

13.2. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке.

Теорема. Если z_0 – устранимая особенность функции f и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$, то $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ a, & z = z_0. \end{cases}$ голоморфна в окрестности точки z_0

Доказательство. Пусть f голоморфна в $0 < |z-z_0| < \delta$, $\varepsilon_1 < \varepsilon < \delta$ и $\varepsilon_1 < |z-z_0| < \varepsilon$ Тогда по формуле Коши, получаем, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \underbrace{=}_{(*_1)} \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \underbrace{=}_{(*_2)} \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad \begin{bmatrix} \text{при } \varepsilon_1 \to 0 \\ z \neq z_0 \end{bmatrix}$$

Объяснения:

$(*_1)$: Граница множества D состоит из двух окружностей: внешней (радиуса ε, которая обходится в положительном направлении (против часовой стрелки) и внутренней (радиуса ε_1), которая обходится в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Заодно сразу поменяем знак перед интегралом по внутренней окружности, для того, чтобы написать его в положительном направлении.

$(*_2)$: Оценим сверху модуль второго интеграла:

$$\underbrace{\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right|}_{\text{интеграл второго рода}} \leqslant \frac{1}{2\pi i}\underbrace{\oint\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon_1}\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right|dl}_{\text{интеграл первого рода}}$$

Затем оценим саму подынтегральную функцию:

$$\left.\begin{aligned} f(\zeta) = a + o(1) \text{ при } \varepsilon_1 \to 0 \\ |\zeta - z| \geqslant |\underbrace{t - z_0}_{\text{число}}| - \varepsilon_1 \\ \oint\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon_1} dl = 2\pi\varepsilon_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\underbrace{\oint\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon_1}\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right|dl}_{\text{интеграл первого рода}} \xrightarrow[\varepsilon_1\to 0]{} 0$$

Вернемся к получившемуся выражению для функции $f(z)$

Так как мы перешли к пределу, мы можем сказать, что во всех точка z, включая z_0, можно понимать левую часть выражения как $\tilde{f}(z)$, тогда получим:

$$\widetilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \begin{bmatrix} \text{при } \varepsilon_1 \to 0 \\ |z - z_0| < \delta \end{bmatrix}$$

Если мы применим к данному интегралу рассуждения, которые мы применяли при доказательстве аналитичности голоморфной функции (11 билет), получим, что функция представленная данным образом аналитична в точке z_0, а отсюда следует, что она голоморфна в точке z_0. Ну и напоследок, если мы в этот интеграл вместо z подставим z_0, в силу произвольности ε, устремив ε к нулю, мы получим, что $\widetilde{f}(z_0) = a$. ■

13.3. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\dfrac{1}{f(z)}$.

Определение. Полюс это точка, такая что в проколотой окрестности этой точки функция голоморфна, а в самой этой точке в пределе получается бесконечное значение.

Пускай $f(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} \infty$, то есть $z_0 -$ полюс

Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$, тогда $g(z) \xrightarrow[z \to z_0]{} 0$ и $g(z)$ будет голоморфной в проколотой окрестности точки z_0 (так как $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности точки z_0 и не обращается в 0), отсюда делаем вывод, что $g(z)$ имеет устранимую особенность.

Доопределим функцию $g(z)$ в точке z_0, получим новую функцию $\widetilde{g}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)}, \ z \neq z_0, \\ 0, \ z = z_0. \end{cases}$ которая будет голоморфной в точке z_0, а значит будет аналитической, мы можем представить ее в виде степенного ряда:

$$\widetilde{g}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \text{ так как } \widetilde{g}(z_0) = 0 \text{ то } c_0 = .. = c_n = 0, c_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \widetilde{g}(z) = (z - z_0)^n \underbrace{(c_{n+1} + c_{n+2}(z - z_0) + ..)}_{h(z)}$$

Определение. В такой ситуации говорят, что $\widetilde{g}(z)$ имеет нуль $n-$ого порядка.

Распишем тогда как будет выглядеть изначальная функция $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^n} \cdot \underbrace{\frac{1}{h(z)}}_{\text{голоморфна в } z_0}$$

Определение. Число n в полученном выражении называется называется порядком полюса. Функция $f(z)$ имеет полюс $n-$ого порядка.

13.4. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.

Теорема. Если z_0 – существенно особая точка функции f, то

$$\forall a \in \overline{\mathbb{C}} \ \exists \{z_n\} \colon z_n \to z_0, \ f(z_n) \to a$$

Доказательство.

- $a = \infty$ Если функция ограничена в $0 < |z - z_0| < \delta$ то $z_0 -$ устранимая особенность, но так как мы знаем, что z_0 не является устранимой особенностью, то функция f не ограничена в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$, а значит $\exists \{z_n\} : \ z_n \to z_0, \ f(z_n) \to \infty$
- Если $\forall \delta \ \exists z : \ 0 < |z - z_0| < \delta \ f(z) = a$, тогда $\exists \{z_n\} : \ 0 < |z_n - z_0| < \dfrac{1}{n} \ f(z_n) = a$ (выбрали последовательность, на которой функция в точности принимает значение a)

- $\exists\delta:\ \ 0 < |z - z_0| < \delta\ f(z) \neq a$ Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - a}$, так как $f(z)$ в некоторой проколотой окрестности не принимает значение a, то функция $g(z)$ − голоморфна в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$

  Тогда функция f выглядит следующим образом $f(z) = a + \dfrac{1}{g(z)}$ отсюда следует, что g в точке z_0 имеет существенную особенность. По первому рассмотренному случаю получаем, что для функции g верно, что $\exists\{z_n\}:\ \ g(z_n) \to \infty$, тогда $f(z_n) \to a$.

$\blacksquare$

14. Ряд Лорана и его сходимость. Единственность разложения Лорана. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.

15. Вычет голоморфной функции в однозначной особой точке. Теорема Коши о вычетах. Вычет как коэффициент c_{-1} ряда Лорана. Вычисления вычета в полюсе.