Математический анализ 2, Коллоквиум IV

Версия от 14.06.2021 15:51

Содержание

1. Кусочно-гладкая кривая и её длина. Элемент длины для параметрически заданной кривой. Криволинейный интеграл I-го рода.

1.1. Кусочно-гладкая кривая и её длина.

Определение. **Область** — это открытое связное (грубо говоря, любые две точки множества могут быть соединены ломаной) множество в $\mathbb{R}^k$.

Определение. **Замкнутая область** — это замыкание некоторой области.

Определение. **Жорданова область** — это ограниченная область, измеримая по Жордану.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^k$ (где $k \leqslant m$) — замкнутая жорданова область, и $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ — непрерывно дифференцируемая *инъективная* функция. Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^m$ и $u \in G$ и определим x следующим образом:

$$x := \varphi(u) \iff x_i = \varphi_i(u_1, ..., u_k),$$

причем матрица якоби

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & \dots & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_k} \end{pmatrix}$$

имеет максимальный ранг в каждой точке $u \in G$.

Определение. Образ $\varphi(G)$ называется **гладкой кривой** при $k = 1$.

Определение. Если L_i это гладкая кривая, то их объединение $L = \bigsqcup\limits_{i=1}^{n} L_i$ называется **кусочно-гладкой кривой**.

1.2. Элемент длины для параметрически заданной кривой.

Пусть даны отрезок $G = [a; b]$, непрерывно дифференцируемое отображение $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ и гладкая кривая L, которая задается через G и φ.

Определение. **Длина кривой** L определяется следующим образом

$$\mu(L) := \int\limits_G \sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^T \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right)} \mathrm{d}u = \int_a^b \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| \mathrm{d}u.$$

1.3. Криволинейный интеграл I-го рода.

Ссылка на лекцию.

Пусть L — гладкая кривая к $\mathbb{R}^m$, то есть $L = \varphi([a; b])$, и рассмотрим некую функцию $f : L \to \mathbb{R}$, которая задана на точках кривой.

Определение. Криволинейный интеграл первого рода определяется следующим образом:

$$\int_L f(x)\mathrm{d}l = \int_a^b f(\varphi(u)) \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial u}\right| \mathrm{d}u.$$

$\mathrm{d}l := \left|\dfrac{\partial x}{\partial u}\right| \mathrm{d}u$ — элемент длины.

2. Кусочно-гладкая поверхность и её площадь. Элемент площади для параметрически заданной поверхности. Поверхностный интеграл I-го рода.

2.1. Кусочно-гладкая поверхность

Определение. **Область** — это открытое связное (грубо говоря, любые две точки множества могут быть соединены ломаной) множество в $\mathbb{R}^k$.

Определение. **Замкнутая область** — это замыкание некоторой области.

Определение. **Жорданова область** — это ограниченная область, измеримая по Жордану.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^k$ (где $k < m$) — замкнутая жорданова область, и $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ — непрерывно дифференцируемая *инъективная* функция. Рассмотрим $x \in \mathbb{R}^m$ и $u \in G$ и определим x следующим образом:

$$x := \varphi(u) \iff x_i = \varphi_i(u_1, ..., u_k),$$

причем матрица якоби

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial u_1} & ... & \dfrac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots & ... & \vdots \\ \dfrac{\partial x_m}{\partial u_1} & ... & \dfrac{\partial x_m}{\partial u_k} \end{pmatrix}$$

имеет максимальный ранг в каждой точке $u \in G$.

Определение. Образ $\varphi(G)$ называется **гладкой k-мерной поверхностью** (при $k > 1$).

Определение. Если S_i это гладкая поверхность, то их объединение $S = \bigsqcup_{i=1}^{n} S_i$ называется **кусочно-гладкой поверхностью**.

2.2. Элемент площади для параметрически заданной поверхности

Пусть $G \subset \mathbb{R}^2$ — это замкнутая жорданова область, $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$ — параметризующее отображение.

Определение. **Площадь поверхности** S определяется как

$$\mu(S) := \iint_G \sqrt{\det \begin{pmatrix} \left|\dfrac{\partial x}{\partial u}\right|^2 & \left\langle \dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \dfrac{\partial x}{\partial u}, \dfrac{\partial x}{\partial v} \right\rangle & \left|\dfrac{\partial x}{\partial v}\right|^2 \end{pmatrix}} \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \iint_G \sqrt{\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|^2 \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|^2 - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

2.3. Поверхностный интеграл I-го рода

Ссылка на лекцию.

Рассмотрим поверхность $S := \varphi(G)$, заданную через замкнутую жорданову область $G \subset \mathbb{R}^2$ и параметризующее отображение $\varphi : G \to \mathbb{R}^m$.

Задана некая функция $f : S \to \mathbb{R}$, которая с одной стороны может принимать $x \in \mathbb{R}^m$, а с другой стороны $u \in G$:

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) = f(\varphi(u, v)).$$

Определение. Элемент площади определяется как

$$\mathrm{d}s := \sqrt{\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|^2 \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|^2 - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Поверхностный интеграл первого рода определяется следующим образом:

$$\int_S f(x)\mathrm{d}s = \iint_G f(\varphi(u, v)) \cdot \sqrt{\left|\frac{\partial x}{\partial u}\right|^2 \cdot \left|\frac{\partial x}{\partial v}\right|^2 - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle^2} \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

3. Дифференциальная 1-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую. Ориентация кривой. Криволинейный интеграл II-го рода. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода.

4. Формула Грина и её приложение к вычислению площади клоской фигуры. Внешний дифференциал 2-мерный 1-формы и краткая запись формулы Грина.

Определение. Область $D \subset \mathbb{R}^2$ называется y**-проектором** (то есть проектируемой вдоль оси y), если она задается неравенствами:

$$D : a \leqslant x \leqslant b, h_1(x) \leqslant y \leqslant h_2(x),$$

h_1, h_2 - непрерывные функции, $h_1(x) \leqslant h_2(x)$
Аналогично вводится x**-проектор**.

Определение. Область называется **проектируемой**, если она является x- и y-проектируемой.

Определение. Область D называется **простой**, если она есть объединение конечного числа проектируемых областей.

4.1. Формула Грина

Теорема. Пусть D - простая область с кусочно гладкой границей $L = \partial D$, ориентация которой соответствует ориентации области D. Пусть P, Q непрерывно дифференцируемы в D. Тогда:

$$\oint_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Доказательство. 1. Рассмотрим y-проектируемую область $D : a \leqslant x \leqslant b, h_1(x) \leqslant y \leqslant h_x(x)$

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = -\int_a^b dx \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = -\int_a^b dx \left(P(x, h_2(x)) - P(x, h_1(x))\right) =$$
$$= -\int_a^b P(x, h_2(x))\, dx + \int_a^b P(x, h_1(x))\, dx + \int_a^a Pdx + \int_b^b Pdx =$$
$$= \int_b^a P(x, h_2(x))\, dx + \int_a^b P(x, h_1(x))\, dx + \int_a^a Pdx + \int_b^b Pdx = \oint_{\partial D} Pdx$$

2. Аналогично для x-проектируемой области D получим

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_{\partial D} Qdy$$

3. D - x- и y-проектируемая область, то

$$\oint_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy \right)$$

4. (Нет четкой формулировки, записано со слов лектора)
   D - простая область. В соседних областях по границе будем интегрировать в правильном направлении. Двойные интегралы (правые части) частей простой области будут складываться по аддитивности. Криволинейные интегралы (при разбиении в суммы) дадут интегралы по внешним границам и интегралы по внутренним границам. Интегралы по всем внутренним кусочкам границы будут взаимно уничтожаться (так как при обходе в противоположных направлениях будут давать разные знаки).

■

4.2. Внешний дифференциал 2-мерной 1-формы

Определение. $\omega\left(\overline{x}, d\overline{x}\right) = a_1\left(\overline{x}\right)dx_1 + ... + a_n\left(\overline{x}\right)dx_x$
$a_1, ..., a_n$ - непрерывно дифференцируемы
Внешним дифференциалом формы ω называется:

$$d\omega = da_1 \wedge dx_1 + ... + da_n \wedge dx_n,$$

где $da_1 = \dfrac{\partial a_1}{\partial x_1}dx_1 + ... + \dfrac{\partial a_1}{\partial x_n}dx_n$ - обычный дифференциал.
Операция $\wedge$ линейна и кососимметрична:

$$dx_1 \wedge dx_2 = -dx_2 \wedge dx_1 \Rightarrow dx_1 \wedge dx_1 = 0$$

Пример. $d\left(Pdx + Qdy\right) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left(\dfrac{\partial P}{\partial x}dx + \dfrac{\partial P}{\partial y}dy\right) \wedge dx + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}dx + \dfrac{\partial Q}{\partial y}dy\right) \wedge dy = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\right)dx \wedge dy$

4.3. Краткая запись формулы Грина

$$\iint_D d\left(x,y\right)dx \wedge dy = \iint_D f\left(x,y\right)dxdy$$
$$\Rightarrow \oint_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega, \omega = Pdx + Qdy$$

5. Дифференциальная 2-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность. Ориентация поверхности и вектор нормали. Поверхностный интеграл II-го рода. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода.

6. Формула Остроградского-Гаусса и её приложение к вычислению объема тела. Внешний дифференциал 3-мерной 2-формы, дивергенция векторного поля и краткая запись формы Остроградского-Гаусса.

Теорема. (Формула Остроградского-Гаусса)
Пусть D – замкнутая жорданова область, ограниченная кусочно гладкой поверхностью $S = \partial D$, также пусть $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$ – непрерывно дифференцируемая 2-форма в D.
Тогда $\displaystyle\iint_{\partial D} \omega = \iiint_D d\omega$.

Доказательство не было рассмотрено на лекции.

Определение. Внешним дифференциалом назвается выражение $d\omega = \left(\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}\right)dx \wedge dy \wedge dz$.

Определение. Выражение $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$ называется *дивергенцией* векторного поля. Обозначение: $\operatorname{div}(P,Q,R)$

Более подробная запись формулы Остроградского-Гаусса: $\iint_S Pdy\wedge dz+Qdz\wedge dx+Rdx\wedge dy=\iiint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$

7. Формула Стокса. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы, ротор векторного поля и краткая запись формулы Стокса.

7.1. Формула Стокса

Теорема. Пусть S – ориентированная кусочно гладкая поверхность с краем $L=\partial S$, лежащая в области D.
$\omega=Pdx+Qdy+Rdz$ – непрерывно дифференцируема в D.
Тогда

$$\oint_{\partial S}\omega=\iint_S d\omega \text{ – краткая запись}$$

$$\oint_L Pdx+Qdy+Rdz=\iint_S(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dy\wedge dz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dz\wedge dx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dx\wedge dy$$

Доказательство. 1. Пусть $S=\varphi(G)$, где G – прямоугольник на плоскости параметров (u_1,u_2). Тогда

$$\oint_{\partial S}\omega=\{\text{ крив. инт. на пл-ти }\}=\iint_G d(\varphi^*\omega)=\{\text{Формула Грина}\}\iint_G\varphi^*(d\omega)=\iint_S d\omega$$

2. В общем случае поверхность разбивается на прямоугольники и интегралы по ним суммируются.

■

Определение. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы $\omega=Pdx+Qdy+Rdz$ – это $d\omega=(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dy\wedge dz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dz\wedge dx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dx\wedge dy$ – ротор

8. Комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$.

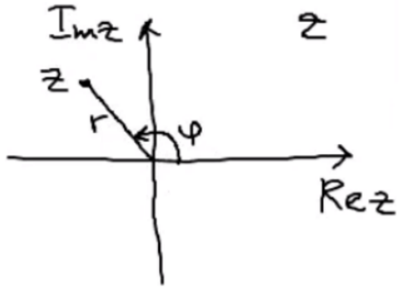
8.1. Комплексная плоскость.

Формально вводим символ i, такой что $i^2=-1$.

Определение. Линейная комбинация обычной единицы и мнимой единицы с вещественными коэффициентами называется *комплексном числом* $z=x+iy$, $x,y\in\mathbb{R}$.
Действительная часть числа $z:\ \operatorname{Re}z=x$, мнимая часть числа $z:\ \operatorname{Im}z=y$.

Определение. Каждому комплексному числу z ставится в соответствии *сопряженное* $\overline{z}=x-iy$.

Можно еще задать комплексное число геометрически:



Определение. Тогда *модуль* числа z – $r = |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Аргумент* числа z – угол φ, такой что $x = |z|\cos\varphi$, $y = |z|\sin\varphi$.

На этом моменте впервые встает вопрос о многозначности функций.

Определение. Если мы хотим говорить про однозначно выбираемый аргумент, то пишут $\varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$ или $(-\pi; \pi]$ – *главное значение* аргумента. При этом, $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ – *полный (или многозначный)* аргумент.

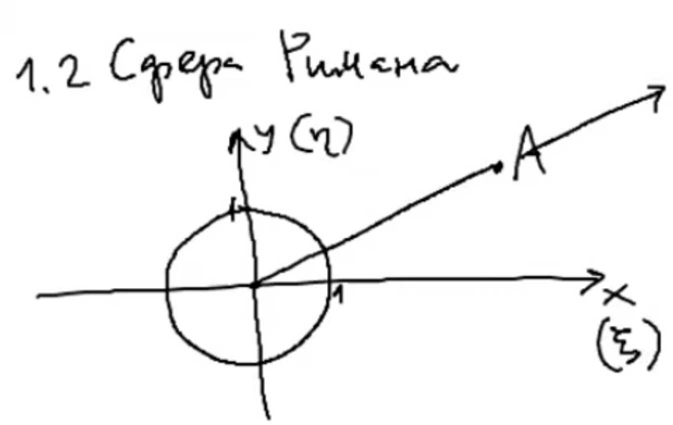
Определение. *Тригонометрическая запись* комплексного числа: $z = |z| \cdot (\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$.

Определение. *Показательная форма записи*: комплексного числа: $z = |z| \cdot e^{i \operatorname{Arg} z}$.

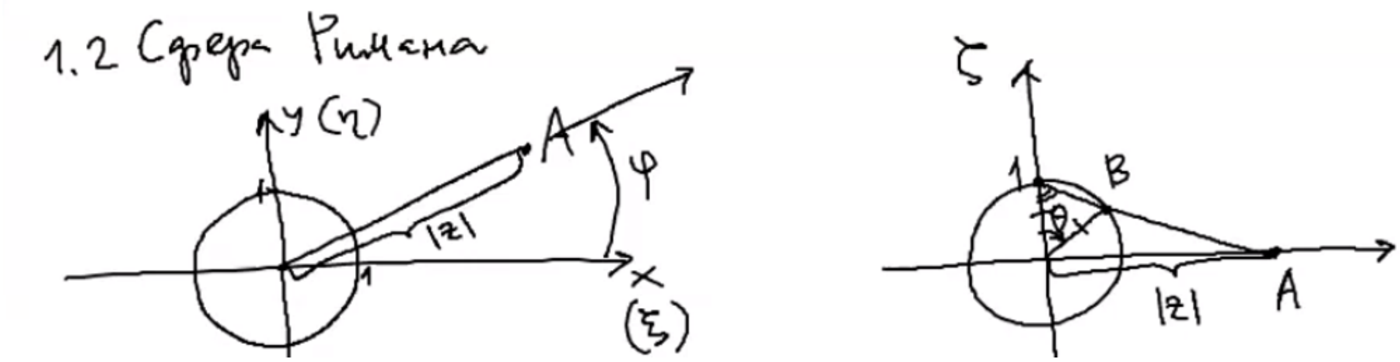
Комлпексную плоскость обычно обозначают $\mathbb{C}$.

8.2. Сфера Римана и стереографическая проекция.

На рисунке не окружность, а сфера единичная.



Рассматриваем вертикальное сечение в плоскости, содержащей ось ζ и прямую, проходящую через начало координат и точку A. Наша сфера выглядит следующим образом (рисунок справа):



Определение. Отображение $B \longmapsto A$ – *стереографическая проекция.* Но для нас будет более важным обратное отображение.

Заметим, что $|z| = \operatorname{tg}\dfrac{\pi - \theta}{2}$ и $\varphi = \arg z$.

Отсюда несложно вывести (по словам Маевского Е.В.), что $\xi = \dfrac{2x}{1 + |z|^2}, \eta = \dfrac{2y}{1 + |z|^2}, \zeta = \dfrac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}$.

Обратные формулы: $x = \dfrac{\xi}{1 - \zeta}$ и $y = \dfrac{\eta}{1 - \zeta}$.

В действительном матанализе мы фактически имели две бесконечности (для нас было важно направление): $+\infty$ и $-\infty$. В комплексном матанализе чаще всего не имеет значения, в каком направлении мы идем в бесконечность. Поэтому рассматривается просто *бесконечно удаленная точка* и обозначается $z \to \infty$. Это означает, что $|x|, |y| \to \infty$.

Можно заметить, что если мы захотим добавить бесконечно удаленную точку к комплексной плоскости, то ей будет соответствовать северный полюс на сфере Римана. Если мы добавим к комплексной плоскости бесконечно удаленную точку, то это называется *замкнутой комплексной плоскостью*: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. И вот как раз замкнутую комплексную плоскость очень удобно представлять, как сферу Римана.

Стало непонятно, надо ли техать про сходимость последовательности, поэтому ссылка с таймкодом на лекцию: тык.

8.3. Функция комплексной переменной.

Определение. *Функция комплексной переменной* $w = f(z)$ – отображение, заданное на одной комплексной плоскости и принимающее значения на другой комплексной плоскости.

Считаем, что $w = u + iv$, тогда становится понятно, что $f(z) = u(z) + iv(z)$, где $u(z), v(z)$ – вещественные функции от комплексной переменной. Еще можно представлять функцию от z как функцию от двух переменных: $f(z) = \widetilde{f}(x, y)$. Тогда $\widetilde{f}(x, y) = \widetilde{u}(x, y) + i\widetilde{v}(x, y)$.
Замена переменной:

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \overline{z} = x - iy \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \\ y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i} \end{cases}$$

Тогда $f(z) = \widetilde{f}\left(\dfrac{z + \overline{z}}{2}, \dfrac{z - \overline{z}}{2i}\right)$.

8.4. Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$.

Определение. *Экспонента* e^z в комплексном случае задается двумя эквивалентными способами:
1) $e^z := \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n \quad \forall z$
2) $e^z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

На основе этого определения доказываются все те же известные нам алгебраические свойства экспоненты для комплексного случая.

Тогда можем написать, что $w = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \implies u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$.

Определение. Косинус в комплексном случае тоже задается двумя эквивалентными способами:
1) $\cos z := \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
2) $\cos z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

С помощью этих формул можно получить следующее:

$$\cos z = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \implies u = \cos x \operatorname{ch} y, v = -\sin x \operatorname{sh} y$$

Определение. Синус в комплексном случае тоже задается двумя эквивалентными способами:
1) $\sin z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
2) $\cos z := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

С помощью этих формул можно получить следующее:

$$\sin z = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^{y}(\cos x - i \sin x)}{2i} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \implies u = \sin x \operatorname{ch} y, v = \cos x \operatorname{sh} y$$

8.5. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$.

Определение. *Комплексным корнем n–ой степени* $\sqrt[n]{z}$, $z \neq 0$ называется каждое число $w : w^n = z$, где $n = 2, 3, 4, \ldots$

Определение. *Полным натуральным логарифмом* $\operatorname{Ln} z$, $z \neq 0$ называется каждое число $w : e^w = z$. Составим $z = |z| \cdot e^{i \operatorname{Arg} z} \implies \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + i2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Это пример бесконечнозначной функции.

9. Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции. Условия Коши–Римана и голоморфность. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.

9.1. Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции.

Определение. Функция $f : D \to \mathbb{R}^2, D \subseteq \mathbb{R}^2$ называется *дифференцируемой* (в общем случае) в точке (x_0, y_0), если

$$\Delta f := \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \overline{o}\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}$$

Тогда P – матрица Якоби, т.е. $P = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}$.

В комплексном случае: $\Delta f := \Delta u + i\Delta v = p\Delta z + q\Delta\overline{z} + \overline{o}(|\Delta z|) \implies$

$$\implies p = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{2i} \left(= \frac{\partial f}{\partial z}\right) \qquad q = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(-\frac{1}{2i}\right) \left(= \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right)$$

Определение. Тогда $p\Delta z + q\Delta\overline{z}$ – это *дифференциал* функции f.

Определение. $\mathbb{R}$–дифференцируемая функция называется $\mathbb{C}$–*дифференцируемой*, если ее дифференциал $df = \dfrac{\partial f}{\partial z}\, dz + \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\, d\overline{z}$ является $\mathbb{C}$ – линейным, т.е. $df = \dfrac{\partial f}{\partial z}\, dz$.
Следовательно, получим следующее равенство:

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(-\frac{1}{2i}\right) = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \text{ – условия Коши–Римана}$$

Определение. Если существует предел

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{(u(x,y) - u(x_0, y_0) + i(v(x,y) - v(x_0, y_0))}{(x - x_0) + i(y - y_0)},$$

то он называется *производной* f по z и обозначается $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Определение. (эквивалентное определение $\mathbb{C}$–дифференцируемости)
Пусть существует предел из определения выше (длинный такой).
Пусть $y = y_0$, тогда $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \lim\limits_{x \to (x_0} \dfrac{(u(x,y) - u(x_0, y_0) + i(v(x,y) - v(x_0, y_0))}{x - x_0} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.
Аналогично при $x = x_0$ получим, что $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$.
Тогда получим, что $\dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{1}{i}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \implies \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \implies \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0,$

поэтому в этом случае $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ логично обозначать как $\dfrac{df}{dz}$. Тогда $\mathbb{C}$ – *дифференцируемость* равносильна существованию и конечности производной $\dfrac{df}{dz}$ (доказательство было в курсе МА–1).

9.2. Условия Коши–Римана и голоморфность.

Определение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – область определения и $f : D \to \mathbb{R}^2$ – непрерывно дифференцируема.
f называется *голоморфной* в D, если она удовлетворяет условиям Коши-Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

9.3. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой.

Определение. Пусть L – кусочно–гладкая ориентированная (по умолчанию положительная ориентированность) кривая в области D, тогда *интеграл по кривой на комплексной плоскости* равен сумме двух криволинейных интегралов второго рода:

$$\int_L f(z)\,dz = \int_L (u(x,y) + iv(x,y)) \cdot (dx + i\,dy) := \int_L (u\,dx - v\,dy) + i\int_L (v\,dx + u\,dy)$$

9.4. Теорема Коши.

Теорема. Если функция f голоморфна в замыкании $\overline{D}$ жордановой области D, то $\oint_{\partial D} f(z)\,dz = 0$.

Доказательство. Распишем интеграл по определению:

$$\oint_{\partial D} f(z)\,dz = \oint_{\partial D} (u\,dx - v\,dy) + i\oint_{\partial D} (v\,dx + u\,dy) = \text{ по формуле Грина } =$$
$$= \iint_D \left(-\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx \wedge dy + i\iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx \wedge dy = 0$$

Заметим, что так как функция голоморфна, то есть непрерывно дифференцируема на D и выполнены условия Коши–Римана. Тогда в силу условий Коши–Римана оба подыинтегральных выражения равны нулю, и весь интеграл тоже равен нулю. ■

9.5. Интегральная формула Коши.

Теорема. (Формула Коши–Грина) Если функция f непрерывно дифференцируема в замыкании $\overline{D}$ жордановой области D, граница области $L = \partial D$ – кусочно–гладкая. Пусть $z_0 \in D$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot \frac{dx \wedge dy}{z - z_0}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\dfrac{f(z)}{z - z_0}$, она непрерывна в $\overline{D}\backslash\{z_0\}$. Рассмотрим область D без окрестности точки z_0: если $U_\varepsilon(z_0)$ – круг $|z - z_0| \leqslant \varepsilon$, то рассматриваемая область $D_\varepsilon = D\backslash U_\varepsilon(z_0)$. Ее граница $L_\varepsilon = \partial D_\varepsilon$ получается объединением двух границ ∂D и $\partial U_\varepsilon(z_0)$.
Рассмотрим криволинейный интеграл по границе области ∂D_ε:

$$\oint_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz = \begin{bmatrix} (x,y) \to (z, \overline{z}) \\ df = \dfrac{\partial f}{\partial z}\,dz + \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,d\overline{z}, dz \wedge dz = 0 \end{bmatrix}, \text{ и по формуле Грина } = \iint_{D_\varepsilon} d\left(\frac{f(z)}{z - z_0}\right) \wedge dz =$$
$$= \iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f/\partial \overline{z}}{z - z_0}\,d\overline{z} \wedge dz$$

Переходим к обычным переменным, вычисляя матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(\overline{z}, z)}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \implies \det\frac{\partial(\overline{z}, z)}{\partial(x,y)} = 2i \implies d\overline{z} \wedge dz = 2i dx \wedge dy$$

Тогда получим следующее:

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f/\partial \overline{z}}{z - z_0}\,d\overline{z} \wedge dz = 2i\iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot \frac{1}{z - z_0}\,dx \wedge dy$$

С другой стороны:

$$\oint_{L_\varepsilon} = \oint_L + \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz - \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

Интеграл по малой окружности (тот, что справа) можем посчитать. Представим $z = z_0 + \varepsilon \cdot e^{i\varphi}, \varphi \in [0; 2\pi]$, тогда $f(z) = f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) = f(z_0) + \overline{o}(1)$ при $\varepsilon \to 0$. При этом, $dz = \varepsilon i e^{i\varphi}\, d\varphi$. Подставляя, получим:

$$\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0) + \overline{o}(1)}{\varepsilon e^{i\varphi}} \cdot \varepsilon i e^{i\varphi}\, d\varphi = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - i\int_0^{2\pi} f(z_0) + \overline{o}(1)\, d\varphi =$$
$$= \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - 2\pi i f(z_0) + \overline{o}(1)$$

При устремлении $\varepsilon \to 0$ и приравнивая оба значения интеграла, получаем:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot \frac{dx \wedge dy}{z - z_0}$$

■

Замечание. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} \cdot \frac{dx \wedge dy}{z - z_0}$ называется *главным значением* несобственного интеграла.

Следствие. (Интегральная формула Коши)
Если функция f голоморфна в замыкании $\overline{D}$ жордановой области D, то $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$.

Доказательство. ■

10. Голоморфная функция нескольких переменных. Голоморфность композиции (в том числе: суммы, произведения, частного) голоморфных функций. Голоморфность обратной функции.

Определение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – область определения
$f : D \to \mathbb{R}^2$ – непрерывно дифференцируема.
f называется голоморфной в D, если она удовлетворяет условиям Коши-Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Определение. Пусть $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ – области определения. Функция $F : G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}$:

$$F(z_1, z_2) = U(x_1, y_1, x_2, y_2) + iV(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

называется голоморфной, если она непрерывно дифференцируема и голоморфна по каждой переменной в отдельности.

Теорема. Пусть $D \subseteq \mathbb{C}$ – область, $\varphi_1 : D \to G_1$, $\varphi_2 : D \to G_2$ – голоморфны.
Тогда $f(z) = F(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ – голоморфна.

Доказательство. Для удобства будем иметь в виду, что $\varphi_k(z) = \xi_k(x, y) + i\eta_k(x, y)$, $k \in \{1, 2\}$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
Тогда

$$u'_x = U'_{x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + U'_{y_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + U'_{x_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + U'_{y_1} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = V'_{y_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + (-V'_{x_1}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right) + V'_{y_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + (-V'_{x_2}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right) = v'_y$$

Аналогично, $u'_y = -v'_x$ ■

Следствие. Голоморфны следующие функции:

1. $F(z_1, z_2) = az_1 + bz_2$

2. $F(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$

3. $F(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$

Теорема. Пусть $w = f(z)$, $w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$ и f – голоморфна в окрестности точки z_0.
Тогда в некоторой окрестности точки w_0 существует единственная обратная функция $f^{-1}(w) : f^{-1}(w_0) = z_0$, которая является голоморфной.

Доказательство. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда:

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}, \text{ причем } \begin{cases} u_0 = u(x_0,y_0) \\ v_0 = v(x_0,y_0) \end{cases}$$

Посчитаем Якобиан отображения в z_0:

$$\left.\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}\right|_{z_0} = |f'(z_0)|^2 > 0 \implies \text{Существует единственное обратное отображение по теореме о неявной функции}$$

Найдем матрицу Якоби обратного отображения:

$$\left.\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}\right|_{w_0} = \left.\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}^{-1}\right|_{z_0} = \frac{1}{|f'(z_0)^2|}\begin{pmatrix} v'_y & -u'_y \\ -v'_x & u'_x \end{pmatrix}$$

Рассмотрим элементы на главных диагоналях первой и последней матриц. Т.к. исходное отображение голоморфно, то $v'_y = u'_x$, а значит и $x'_u = y'_u$.
Аналогично, рассмотрев элементы на побочных диагоналях, получим, что $x'_v = -y'_u$. Условие Коши-Римана выполнено, значит, обратная функция является голоморфной. ■

11. Аналитическая функция. Аналитичность голоморфной функции. Неравенство Коши для коэффициентов ряда. Радиус сходимости ряда как максимальный радиус круга, в котором функция голоморфна. Теорема Лиувилля.

Определение. Функция называется аналитической в точке z_0, если $\exists \{c_n\} \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k, \ |z - z_0| < \delta$$

Теорема. Если функция f голоморфна в окрестности z_0, то она аналитична в z_0.

Доказательство. Пусть $|z - z_0| < \varepsilon < \delta$, $L = \{\zeta : |\zeta - z_0| = \varepsilon\}$
Тогда по формуле Коши: $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}d\zeta =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \dots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n + \frac{\left(\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}}\right)d\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta\right)\cdot(z - z_0)^k + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(\zeta)\cdot\frac{\left(\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{\zeta - z}d\zeta}_{r_n(z,z_0)}$$

Пусть $M = \sup\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} |f(\zeta)|$, а также заметим, что $|\zeta - z| \geqslant |\zeta - z_0| - |z - z_0| = \varepsilon(1 - \alpha)$, тогда:

$$|r_n(z, z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\oint_L |f(\zeta)| \cdot \frac{\left|\dfrac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right|^{n+1}}{|\zeta - z|}dl \leqslant \frac{M \cdot \alpha^{n+1}}{2\pi \cdot \varepsilon(1 - \alpha)} \cdot \underbrace{2\pi\varepsilon}_{\text{длина кривой}} \leqslant \frac{M \cdot \alpha^{n+1}}{\varepsilon(1 - \alpha)} \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

Значит, $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, $c_k = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta$ при $\forall z : |z - z_0| < \delta$.

Так как $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ голоморфна в кольце $\varepsilon_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant \varepsilon_2$, то $\displaystyle\oint_{|z - z_0| = \varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta - \oint_{|z - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}d\zeta = 0 \implies c_k$ не зависит от ε. ■

Следствие. (Неравенство Коши)
$|c_k| \leqslant \oint_L \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{k+1}} dl \leqslant \frac{M}{2\pi\varepsilon^{k+1}} \cdot 2\pi\varepsilon = \frac{M}{\varepsilon^k}$, подставим M:
$|c_k| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^k} \cdot \sup\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} |f(z)| \ \forall\varepsilon < \delta$

Теорема. Пусть $f(z)$ голоморфна в $|z - z_0| < r$, но не является голоморфной в круге большего радиуса, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, $|z - z_0| < R = \frac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$. Тогда $R = r$.

Доказательство. Пусть $M = \sup\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} |f(z)|$, $|c_k| \leqslant \frac{M}{\varepsilon^k} \ \forall\varepsilon < r$
$\overline{\lim} \sqrt[k]{|c_k|} \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \implies R \geqslant \varepsilon \ \forall\varepsilon < r \implies R \geqslant$.
Но если $R > r$, то ряд сходится в z: $|z - z_0| > r$, что противоречит условию.
Значит, $R = r$. ■

Теорема. (Лиувилля)
Если функция $f(z)$ голоморфна и ограничена на $\mathbb{C}$, то она – константа.

Доказательство. Пусть $M = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$
Так как $|c_k| \leqslant \frac{M}{\varepsilon^k} \ \forall\varepsilon$, то при $\varepsilon \to \infty$ получаем, что $c_1 = c_2 = \cdots = 0 \implies f(z) = c_0$ ■

12. Бесконечная дифференцируемость и голоморфность аналитической функции. Нуль аналитической функции и его порядок. Изолированность нуля аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции.

Предложение. Пусть $f(z)$ - аналитическая в точке z_0. Значит, функция $f(z)$ представима в окрестности z_0 в виде ряда $\sum\limits_{k=0}^{\inf} c_k(z - z_0)^k$, $|z - z_0| < \delta$. Тогда ряд будет абсолютно сходиться $\forall z : |z - z_0| = \varepsilon < \delta \implies \sum\limits_{k=0}^{\inf} |c_k|\varepsilon^k$. Отсюда следует $\exists A > 0 : |c_k|\varepsilon^k \leqslant A \implies |c_k| \leqslant \frac{A}{\varepsilon^k}$.
Покажем что аналитическая функция дифференцируема. Рассмотрим $|z - z_0| \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon < \delta$. Берём приращение $0 < |h| < \varepsilon - \varepsilon_1$.

$$\frac{(z + h) - f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\inf} c_k \frac{(z - z_0 + h)^k - (z - z_0)^k}{h}$$

$$\frac{(z - z_0 + h)^k - (z - z_0)^k}{h} = k(z-z_0)^{k-1} + c_k^2 h(z-z_0)^{k-2} + \cdots + c_k^k h^{k-1} = \sum_{k=1}^{\inf} kc_k(z-z_0)^{k-1} + hc_2 + h\sum_{k=3}^{\inf} c_k(c_k^2(z-z_0 + \cdots + c_k^k h^{k-2}))$$

При $k \geqslant 3$: $c_k^2\varepsilon_{k-2} + c_k^3\varepsilon_1^{k-3}|h| + \cdots + c_k^k|h|^{k-2} \leqslant c_k^2(\varepsilon_1 + |h|)^{k-2}$.
Теперь возьмём по модулю третью сумму: $|h\sum\limits_{k=3}^{\inf} c_k(c_k^2(z - z_0 + \cdots + c_k^k h^{k-2}))| \leqslant \sum\limits_{k=3}^{\inf} \frac{A}{\varepsilon^k}\frac{k(k-1)}{2}(\varepsilon_1 + |h|)^{k-2}$; так как $\frac{\varepsilon_1 + |h|}{\varepsilon} < 1$, то полученный ряд сходится. Взяв $h \to 0$, получим $f'(z) = \sum\limits_{k=1}^{\inf} kc_k(z - z_0)^{k-1}$. Мы обосновали что комплексную аналитическую функцию можно почленно дифференцировать. В таком случае, можно заметить, что f' - тоже аналитическая функция, а значит $f''(z) = \sum\limits_{k=2}^{\inf} k(k-1)c_k(z - z_0)^{k-2}$, ч.т.д.
Мы получили, что f бесконечно дифференцируема, а из дифференцируемости вытекает её голоморфность. $f(z)$ имеет производную, это равносильно условиям Коши-Римана, кроме того $f'(z)$ непрерывна, а это даёт голоморфность.

Нуль аналитической функции, его порядок и изолированность.
Пусть в z_0 значение аналитической функции $f(z_0)$ равно 0. В этом случае z_0 называется нулём функции $f(z)$. Тогда в разложении в ряд Тейлора будет отсутствовать свободный член $c_0 = 0$. В случае когда отсутствуют все слагаемые,

содержащие $(z-z_0)^i, i<n$, где n - некоторое число, то разложение будет иметь вид $f(z) = \sum\limits_{k=n}^{\inf} c_k(z-z_0)^k$, а сама точка z_0 будет называться нулём порядка n.
Под изолированностью нуля какой-либо функции подразумевается существование такой окрестности нуля, что в ней отсутствуют другие нули.

Теорема. Теорема (прим. техера: подготовительная) единственности аналитической функции.
Если f аналитична в точке z_0 и z_0 является предельной точкой последовательности нулей функции f, т.е. $\exists z_n : z_n \to z_0, f(z_n) = 0 \forall n$, то $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки z_0.

Доказательство. Так как f непрерывна, то $f(z_0) = 0 \implies$ в разложении $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\inf} c_k(z-z_0)^k$ некоторое количество начальных коэффициентов будет равно нулю: $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$, т.е. $f(z) = (z-z_0)^n(c_{n+1} + c_{n+2}(z-z_0) + \dots)$. Получили, что z_0 - это ноль функции f кратности n.
Рассмотрим сумму в скобках. Она задаёт голоморфную функцию $g(z)$. Значит, $g(z)$ - непрерывна, и так как $c_{n+1} \neq 0$, то существует такая окрестность $|z-z_0| < \varepsilon : |g(z)| > 0. \implies$ в круге радиуса $|z-z_0| < \varepsilon$ нет дургих нулей функции, т.е. z_0 - ноль аналитической функции должен быть изолированным. А это противоречит тому, что у нас n нулей, т.е. такого n не существует, а значит $f(z) = 0$ в некоторой окрестности z. ∎

Отсюда перейдём непосредственно к самой теореме о единственности.

Теорема. Теорема (прим. техера: основная) единственности аналитической функции.
Если две функции $f_1(z), f_2(z) \in \Sigma D$ совпадают на множестве ε, которое имеет хотя бы одну предельную точку $z_0 \in D$, то $f_1(z) = f_2(z)$ всюду в D.

Доказательство. Рассмотрим $f = f_1 - f_2$. Покажем, что $f \equiv 0$ в D. Т.е. требуется доказать, что множество $F = z \in D : f(z) = 0$, в которое включено ε совпадёт с D. Предельная точка z_0 является нулём функции f в силу непрерывности. Из теоремы доказанной ранее получим, что $f \equiv 0$ в некоторой окрестности z_0, ибо в противном случае эта точка не могла бы быть предельной для множества нулей f. Таким образом, получим, что ядро множества F непусто - оно содержит в себе точку z_0. По построению F открыто, но при этом замкнуто относительно области D. По ранее доказанной теореме можем сказать, что взяв точку $b \in D$, мы получим предельную точку для F, а потому $f(b) \equiv 0$, т.е. $b \in F$. Так как по определению области D связно, то имеем $F = D$. А значит $f \equiv 0$ на всей D, и $f_1(z) = f_2(z)$. ∎

13. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\dfrac{1}{f(z)}$. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.

13.1. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность.

Определение. Точка z_0 называется изолированной особой точкой однозначного характера функции f, если $\exists \delta : f$ голоморфна в проколотой окрестности $0 < |z-z_0| < \delta$, но не является голоморфной ни в каком круге $|z-z_0| < r$

Классификация:

- $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C} \iff$ устранимая особенность
- $\exists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \iff$ полюс
- $\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \iff$ существенная особенность

13.2. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке.

Теорема. Если z_0 – устранимая особенность функции f и $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$, то $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ a, & z = z_0. \end{cases}$ голоморфна в окрестности точки z_0

Доказательство. Пусть f голоморфна в $0 < |z - z_0| < \delta$, $\varepsilon_1 < \varepsilon < \delta$ и $\varepsilon_1 < |z - z_0| < \varepsilon$ Тогда по формуле Коши, получаем, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \underbrace{=}_{(*_1)} \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \underbrace{=}_{(*_2)} \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad \begin{bmatrix}\text{при } \varepsilon_1 \to 0 \\ z \neq z_0\end{bmatrix}$$

Объяснения:

$(*_1)$: Граница множества D состоит из двух окружностей: внешней (радиуса ε, которая обходится в положительном направлении (против часовой стрелки) и внутренней (радиуса ε_1), которая обходится в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Заодно сразу поменяем знак перед интегралом по внутренней окружности, для того, чтобы написать его в положительном направлении.

$(*_2)$: Оценим сверху модуль второго интеграла:

$$\underbrace{\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\right|}_{\text{интеграл второго рода}} \leqslant \frac{1}{2\pi i}\underbrace{\oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| dl}_{\text{интеграл первого рода}}$$

Затем оценим саму подынтегральную функцию:

$$\left.\begin{array}{c} f(\zeta) = a + o(1) \text{ при } \varepsilon_1 \to 0 \\ |\zeta - z| \geqslant |\underbrace{t - z_0}_{\text{число}}| - \varepsilon_1 \\ \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} dl = 2\pi\varepsilon_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\underbrace{\oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \left|\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\right| dl}_{\text{интеграл первого рода}} \xrightarrow[\varepsilon_1 \to 0]{} 0$$

Вернемся к получившемуся выражению для функции $f(z)$

Так как мы перешли к пределу, мы можем сказать, что во всех точка z, включая z_0, можно понимать левую часть выражения как $\tilde{f}(z)$, тогда получим:

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \quad \begin{bmatrix}\text{при } \varepsilon_1 \to 0 \\ |z - z_0| < \delta\end{bmatrix}$$

Если мы применим к данному интегралу рассуждения, которые мы применяли при доказательстве аналитичности голоморфной функции (11 билет), получим, что функция представленная данным образом аналитична в точке z_0, а отсюда следует, что она голоморфна в точке z_0. Ну и напоследок, если мы в этот интеграл вместо z подставим z_0, в силу произвольности ε, устремив ε к нулю, мы получим, что $\tilde{f}(z_0) = a$. ∎

13.3. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$.

Определение. Полюс это точка, такая что в проколотой окрестности этой точки функция голоморфна, а в самой этой точке в пределе получается бесконечное значение.

Пускай $f(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} \infty$, то есть z_0 – полюс

Рассмотрим функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, тогда $g(z) \xrightarrow[z\to z_0]{} 0$ и $g(z)$ будет голоморфной в проколотой окрестности точки z_0 (так как $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности точки z_0 и не обращается в 0), отсюда делаем вывод, что $g(z)$ имеет устранимую особенность.

Доопределим функцию $g(z)$ в точке z_0, получим новую функцию $\widetilde{g}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)}, \, z \neq z_0, \\ 0, \, z = z_0. \end{cases}$ которая будет голоморфной в точке z_0, а значит будет аналитической, мы можем представить ее в виде степенного ряда:

$$\widetilde{g}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k \text{ так как } \widetilde{g}(z_0) = 0 \text{ то } c_0 = .. = c_n = 0, c_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \widetilde{g}(z) = (z-z_0)^n \underbrace{(c_{n+1} + c_{n+2}(z-z_0) + ..)}_{h(z)}$$

Определение. В такой ситуации говорят, что $\widetilde{g}(z)$ имеет нуль $n-$ого порядка.

Распишем тогда как будет выглядеть изначальная функция $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^n} \cdot \underbrace{\frac{1}{h(z)}}_{\text{голоморфна в } z_0}$$

Определение. Число n в полученном выражении называется называется порядком полюса. Функция $f(z)$ имеет полюс $n-$ого порядка.

13.4. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.

Теорема. Если z_0 – существенно особая точка функции f, то

$$\forall a \in \overline{\mathbb{C}} \; \exists \{z_n\} \colon z_n \to z_0, \, f(z_n) \to a$$

Доказательство.

- $a = \infty$ Если функция ограничена в $0 < |z - z_0| < \delta$ то z_0 – устранимая особенность, но так как мы знаем, что z_0 не является устранимой особенностью, то функция f не ограничена в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$, а значит $\exists \{z_n\} : \; z_n \to z_0, \, f(z_n) \to \infty$
- Если $\forall \delta \; \exists z : \; 0 < |z - z_0| < \delta \; f(z) = a$, тогда $\exists \{z_n\} : \; 0 < |z_n - z_0| < \dfrac{1}{n} \; f(z_n) = a$ (выбрали последовательность, на которой функция в точности принимает значение a)
- $\exists \delta : \; 0 < |z - z_0| < \delta \; f(z) \neq a$ Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - a}$, так как $f(z)$ в некоторой проколотой окрестности не принимает значение a, то функция $g(z)$ – голоморфна в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$

  Тогда функция f выглядит следующим образом $f(z) = a + \dfrac{1}{g(z)}$ отсюда следует, что g в точке z_0 имеет существенную особенность. По первому рассмотренному случаю получаем, что для функции g верно, что $\exists \{z_n\} : \; g(z_n) \to \infty$, тогда $f(z_n) \to a$.

■

14. Ряд Лорана и его сходимость. Единственность разложения Лорана. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.

14.1. Ряд Лорана и его сходимость.

Пускай f голоморфна в кольце $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Зафиксируем $\forall z$ и $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 : \; r_1 < \varepsilon_1 < |z - z_0| < \varepsilon_2 < r_2$
Рассмотрим в плоскости ζ кольцо $\varepsilon_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant \varepsilon_2$ Тогда по формуле Коши мы получим, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{(1)} \underbrace{- \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{(2)}$$

Рассмотрим эти два интеграла отдельно:

$$(1)\colon \; \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta = \sum_{k=0}^{n} c_k (z - z_0)^k + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\varepsilon_2} f(\zeta) \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{\zeta - z} d\zeta$$

Заметим, что модуль остаточного члена $\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_2} f(\zeta)\frac{\left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{n+1}}{\zeta-z}d\zeta\right|$ стремится к нулю, а значит ряд будет сходиться

Аналогично:

$$(2)\colon -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\cdot\frac{\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\cdot\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}+..+\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^m+\frac{\left(\frac{\zeta-z}{z-z_0}\right)^{m+1}}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}\right)d\zeta =$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_1} f(\zeta)\cdot\frac{\left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^m}{z-\zeta}$$

В данном случае, дробь в числителе остаточного члена по модулю меньше 1, поэтому при возведении в степень мы будем получать число стремящееся к 0, то есть остаточный член будет стремиться к 0, а значит ряд сходится.

Объединяя (1) и (2) получаем обобщенный степенной ряд:

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

$$c_k=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta,\ k\in\mathbb{Z},\ r_1<\varepsilon<r_2$$

Определение.

1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$ – ряд Лорана.

2) $\sum\limits_{k=0}^{n}c_k(z-z_0)^k$ – правильная часть ряда Лорана

3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$ – главная часть ряда Лорана

14.2. Единственность разложения Лорана.

Теорема. Пусть $f(z)$ представлена в некотором кольце $r_1<|z-z_0|<r_2$ в виде

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

Покажем, что это и есть разложение в ряд Лорана.

Доказательство.

- Для начала докажем голоморфность функции $f(z)$ в кольце:

  Заметим, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}$ сходятся на соответствующих множествах, а мы знаем, что степенной рад внутри интервала сходимости будет сходиться абсолютно, а если мы возьмем замкнутое подмножество множества сходимости, то на нем ряд будет сходиться равномерно. Тогда в кольце $r_1+\delta\leqslant|z-z_0|\leqslant r_2-\delta$ наш ряд сходится абсолютно и равномерно.

  Итого получили абсолютно и равномерно сходящихся ряд, сосотящий из аналитических функций, тогда (по теореме, которую мы не доказывали) сумма ряда, а именно функция $f(z)$ – аналитическая функция, а значит она голоморфная, тогда мы можем $f(z)$ разложить в ряд Лорана.

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_{k+n+1}(\zeta-z_0)^k$$

- Так как наш ряд сходится абсолютно и равномерно, то мы можем его проинтегрировать почленно, тогда

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0|<\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1} \oint\limits_{\varepsilon} (\zeta - z_0)^k d\zeta = (*)$$

Вычислим отдельно интеграл $\oint\limits_{\varepsilon} (\zeta - z_0)^k d\zeta$, для этого перейдем к другой переменной интегрирования:

$$\begin{aligned} \zeta =& z_0 + \varepsilon e^{i\varphi},\ \varphi \in [0; 2\pi] \\ d\zeta =& \varepsilon \cdot i \cdot e^{i\varphi} d\varphi \end{aligned}$$

$$\oint\limits_{\varepsilon} (\zeta - z_0)^k d\zeta = \int\limits_0^{2\pi} i \cdot \varepsilon^{k+1} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = i \cdot \varepsilon^{k+1} \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi \underbrace{=}_{\text{Формула Эйлера}} i \cdot \varepsilon^{k+1} \cdot \begin{cases} 0, & k+1 \neq 0 \\ 2\pi, & k+1 = 0 \end{cases}$$

Возвращаясь к исходному неравенству получим, что

$$(*) = \frac{\varepsilon}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1} \cdot i \cdot \varepsilon^k \cdot \int\limits_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot a_n \cdot \varepsilon^{-1} \cdot 2\pi = a_n$$

■

14.3. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.

Определение.

$$1)\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} \ - \text{ ряд Лорана.}$$

$$2)\ \sum_{k=0}^{n} c_k (z - z_0)^k \ - \text{ правильная часть ряда Лорана}$$

$$3)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} \ - \text{ главная часть ряда Лорана}$$

Пускай z_0 — однозначно особая точка функции f. Рассмотрим ряд Лорана функции f в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

Рассмотрим множество $I = \{k \mid c_{-k} \neq 0\}$, тогда

1. z_0 — устранимая особенность $\iff$ $I = \varnothing$, т.е. все $c_{-k} = 0$
2. z_0 — полюс $\iff$ I — конечное
3. z_0 — существенная особенность $\iff$ I — бесконечное

15. Вычет голоморфной функции в однозначной особой точке. Теорема Коши о вычетах. Вычет как коэффициент c_{-1} ряда Лорана. Вычисления вычета в полюсе.

Определение. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в $0 < |z - z_0| < \delta$, тогда вычет функции f в точке $z_0 (res_{z_0} f)$ это величина, равная $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z) dz$, где $0 < \varepsilon < \delta$.

Теорема. Теорема Коши о вычетах.

Пусть f голоморфна в области D всюду, за исключением конечного числа однозначных особых точек $z_1, \ldots, z_n$, тогда

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f$$

Доказательство. Окружим каждую точку маленьким кругом, которые не пересекаются и не вылезают за предел множества. Каждая точка - z_i, а её круг - U_i.
Рассмотрим множество $D' = D$
$(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n)$, тогда по теореме Коши:

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 0 \implies \oint_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint_{\partial U_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f$$

$$(\oint_{\partial U_k} f(z)dz = 2\pi i res_{z_k} f)$$

■

Теорема. Вычет как коэффициент c_{-1} ряда Лорана: $res_{z_0} f = c_{-1}$.

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum_{k=-\inf}^{\inf} c_k(z - z_0)^k$ в некоторой проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$. Так как этот ряд сходится, то мы можем его почленно проинтегрировать: $res_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon} f(z)dz$. Возьмём замкнутое множество $\delta < |z - z_0| < r - \delta$, тогда на этом множестве ряд будет сходиться равномерно, а значит мы можем почленно применить этот интеграл к каждому слагаемому ряда: $res_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\inf}^{\inf} c_k \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} (z - z_0)^k dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot c_{-1} \cdot 2\pi i = c_{-1}$. Здесь мы заметили, что интеграл внутри суммы обращается в $2\pi i$ при $k + 1 = 0$, и в 0 в обратном случае. ■

Предложение. Пусть z_0 - полюс порядка n. $f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-n}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$. Домножим на $(z - z_0)^n$. Получим $f(z)(z - z_0)^n = c_{-n} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{n-1} + c_0(z - z_0)^n + \dots$. Сделав разложение по Тейлору получим $c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} (f(z)(z - z_0)^n)^{(n-1)}|_{z=z_0}$. Если $n = 1$, то $c_{-1} = (f(z)(z - z_0))|_{z=z_0}$, на самом деле так как у f есть неприятность в точке z_0, то как правило необходимо считать предел.