

Теория вероятностей и математическая статистика, Коллоквиум IV

Версия от 16.06.2021 00:37

Содержание

Билет 1	2
Выборка, оценка, статистика	2
Несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность оценок	2
Пример отсутствия несмещенной оценки	3
Отсутствие эффективной оценки в классе всех оценок	3
Единственность эффективной оценки	3
Состоятельность асимптотической нормальной оценки	4
Билет 2	5
Метод моментов и его состоятельность	5
Метод максимального правдоподобия	5
Энтропия и состоятельность оценки максимального правдоподобия	5
Билет 3	8
Информация Фишера и неравенство Рао-Крамера	8
Критерий равенства в неравенстве Рао-Крамера	9
Билет 4	10
Доверительные интервалы	10
Различные методы построения доверительных интервалов (с помощью неравенств на вероятность больших отклонений, с помощью центральной статистики, с помощью асимптотически нормальной оценки). Примеры	10
Билет 5	13
Построение точных доверительных интервалов для параметров нормального распределения.	13
Матожидание.	13
Дисперсия.	14
Билет 6	15
Проверка гипотез	15
Ошибки 1-го и 2-го рода	15
Уровень значимости и мощность статистического критерия	15
Пример построения критерия с помощью доверительного интеграла	15
Нижняя оценка суммы вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода	16
Билет 7	17
Теорема Неймана-Пирсона	17
Пример применения теоремы Неймана-Пирсона	17
Билет 8	19
Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко-Кантелли	19

Билет 1

Выборка, оценка, статистика. Несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность оценок. Пример отсутствия несмещенной оценки. Отсутствие эффективной оценки в классе всех оценок. Единственность эффективной оценки. Состоятельность асимптотической нормальной оценки.

Выборка, оценка, статистика

Предположим, нам известно, что неизвестное распределение принадлежит какому-то конкретному семейству распределений с функциями распределения F_θ , где $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Тогда задачей статистики является оценка неизвестного параметра $\theta_0 \in \Theta$, соответствующего нашему неизвестному распределению.

Например, пусть X есть случайная величина и мы знаем распределение этой случайно величины $F_\theta(t)$ с точностью до θ (например, $\mathcal{N}(0, \theta)$). Задача статистики заключается в том, чтобы оценить параметр θ .

Пример. Пусть в ящике N шаров, M из них чёрные. Мы достали из ящика n шаров. Теория вероятностей задаётся вопросом, с какой вероятностью среди вытянутых шаров есть m чёрных. Математическая статистика задаётся вопросом, сколько всего в ящике чёрных шаров (какое M), если мы достали n шаров и m из них чёрные.

Определение. Вектор $X = (X_1, \dots, X_n)$ с независимыми компонентами, где каждая случайная величина имеет одно и то же распределение, называется **выборкой**.

Определение. Произвольная функция $T_n(X)$, принимающая выборку как аргумент, называется **статистикой**.

Важно то, что статистика зависит от случайных величин X_1, \dots, X_n , и не зависит от θ .

Пример. Выборочное среднее \overline{X}_n является статистикой

$$T(X) = \overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

Когда проводится серия независимых экспериментов с функцией распределения F_θ (θ неизвестно), мы получаем выборку $X = (X_1, \dots, X_n)$. По выборке хочется определить значение $\hat{\theta}$, которое в каком-либо смысле близко к реальному θ .

Определение. Статистика $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ со значением из множества параметров Θ называется **оценкой** неизвестного параметра θ .

Несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность оценок

Определение. Оценка $\hat{\theta}_n(X)$ является **несмещенной**, если $E_\theta [\hat{\theta}_n(X)] = \theta$ для любого $\theta \in \Theta$.

Напомним определение сходимости случайных величин X_n к случайной величине X по вероятности:

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \iff \forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P[|X_n - X| \geq \varepsilon] = 0.$$

Определение. Оценка $\hat{\theta}_n(X)$ является **состоятельной**, если $\hat{\theta}_n(X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P_\theta} \theta$ для любого $\theta \in \Theta$.

Обычно состоятельность оценки является следствием закона больших чисел.

Пример. Пусть $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ и $E[X_1] = \theta$. Тогда $\hat{\theta}_n = \overline{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{ЗБЧ}} E[X_1] = \theta$, откуда следует, что оценка $\hat{\theta}_n$ состоятельная.

Напомним определение сходимости случайных величин X_n к случайной величине X почти наверное:

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} X \iff P \left[\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X \right] = 1.$$

Определение. Оценка $\hat{\theta}_n(X)$ является **сильно состоятельной**, если $\hat{\theta}_n(X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \theta$ для любого $\theta \in \Theta$.

Напомним определение сходимости случайных величин X_n к случайной величине X по распределению:

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X \iff \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \text{ в каждой точке } x, \text{ где непрерывна } F_X.$$

Определение. Оценка $\hat{\theta}_n(X)$ является **асимптотически нормальной** с коэффициентом $\sigma^2(\theta)$, если

$$\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n(X) - \theta \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d_\theta} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta)),$$

что эквивалентно $\frac{\sqrt{n} \left(\hat{\theta}_n(X) - \theta \right)}{\sigma(\theta)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d_\theta} \mathcal{N}(0, 1)$.

Коэффициент $\sigma^2(\theta)$ называется асимптотической дисперсией.

Определение. Пусть K это некое множество (класс) оценок (например, K — несмещенные оценки).

Оценка $\hat{\theta}_n(X) \in K$ является **эффективной в классе K** , если для каждого $\theta \in \Theta$ и для каждой оценки $\theta_n^* \in K$ выполняется

$$\mathbb{E}_\theta \left[\hat{\theta}_n(X) - \theta \right]^2 \leq \mathbb{E}_\theta [\theta_n^*(X) - \theta]^2.$$

Если K это класс несмещенных оценок, то условие можно переписать следующим образом:

$$\mathbb{D}_\theta [\hat{\theta}_n(X)] \leq \mathbb{D}_\theta [\theta_n^*(X)].$$

Определение. Несмещенную оценку $\hat{\theta}_n(X)$ в классе всех несмещенных оценок будем называть просто **эффективной**.

Пример отсутствия несмещенной оценки

Пример. Пусть X_i это случайная величина Бернулли (то есть X_i принимает значение 1 с вероятностью $p \in (0; 1)$ и 0 с вероятностью $1 - p$) и $\theta = \sin(p)$. Запишем математическое ожидание оценки по определению:

$$\mathbb{E} [\hat{\theta}_n(X)] = \sum_{(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n} \hat{\theta}_n(x_1, \dots, x_n) \cdot p^{x_1 + \dots + x_n} \cdot (1 - p)^{n - x_1 - \dots - x_n}.$$

То есть математическое ожидание оценки это некий полином от p , а полином не может равняться $\sin p$, поэтому оценка не может быть несмещенной. Вместо синуса можно было рассмотреть что-то другое.

Отсутствие эффективной оценки в классе всех оценок

Утверждение. Не существует эффективной оценки в классе всех оценок.

Доказательство. Пусть $\hat{\theta}_n(X)$ эффективна в классе всех оценок. Тогда для любой $\theta_n^*(X)$ должно выполняться

$$\mathbb{E}_\theta \left[\hat{\theta}_n(X) - \theta \right]^2 \leq \mathbb{E}_\theta [\theta_n^*(X) - \theta]^2.$$

В том числе, это должно выполняться для любой $\theta_n^*(X) = C = \text{const}$:

$$\mathbb{E}_\theta \left[\hat{\theta}_n(X) - \theta \right]^2 \leq \mathbb{E}_\theta [C - \theta]^2.$$

Это неравенство также должно выполняться для любого θ . В частности, для $\theta = C$. Тогда

$$\mathbb{E}_\theta \left[\hat{\theta}_n(X) - \theta \right]^2 \leq 0.$$

Это означает, что $\hat{\theta}_n(X) = \theta = C$ почти наверное. Но мы ведь могли взять и другое $C' \neq C$ и ровно по тем же соображениям получить

$$\hat{\theta}_n(X) = C \neq C' = \hat{\theta}_n(X).$$

Пришли к противоречию. ■

Единственность эффективной оценки

Утверждение. Если эффективная оценка существует, то она единственная.

Доказательство. Пусть $\hat{\theta}_n(X)$ и $\theta_n^*(X)$ — эффективные оценки.

Тогда по определению эффективности:

- $\mathbb{E}_\theta [\hat{\theta}_n(X)] = \theta = \mathbb{E}_\theta [\theta_n^*(X)]$ для любого θ .
- $\mathbb{D}_\theta [\hat{\theta}_n(X)] \leq \mathbb{D}_\theta [\tilde{\theta}(X)]$ и $\mathbb{D}_\theta [\theta_n^*(X)] \leq \mathbb{D}_\theta [\tilde{\theta}(X)]$ для любой несмещенной $\tilde{\theta}_n(X)$.

Рассмотрим равенство параллелограмма для билинейной формы $\text{cov}(\xi, \nu)$:

$$\text{cov}(\xi + \nu, \xi + \nu) + \text{cov}(\xi - \nu, \xi - \nu) = 2 \cdot \text{cov}(\xi, \xi) + 2 \cdot \text{cov}(\nu, \nu).$$

Так как $\text{cov}(\xi, \xi) = D[\xi]$, поделив обе стороны на 4 получаем равенство

$$D\left[\frac{\xi + \nu}{2}\right] + D\left[\frac{\xi - \nu}{2}\right] = \frac{1}{2} D[\xi] + \frac{1}{2} D[\nu].$$

Воспользовавшись этим равенством для оценки $\frac{\hat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}$ получаем

$$D_\theta\left[\frac{\hat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right] = \frac{D[\hat{\theta}_n(X)] + D[\theta_n^*(X)]}{2} - D_\theta\left[\frac{\hat{\theta}_n(X) - \theta_n^*(X)}{2}\right] \leq \frac{D[\hat{\theta}_n(X)] + D[\theta_n^*(X)]}{2}$$

При этом, так как обе оценки эффективные,

$$\frac{D[\hat{\theta}_n(X)] + D[\theta_n^*(X)]}{2} \leq D_\theta\left[\frac{\hat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right].$$

Последнее равенство может показаться неочевидным. Так как $\hat{\theta}_n(X)$ это эффективная оценка (а значит имеет дисперсию не превосходящую дисперсию любой другой несмещенной оценки) и оценка $\frac{\hat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}$ несмещенная (по линейности матожидания), то выполняется неравенство

$$D_\theta[\hat{\theta}_n(X)] \leq D_\theta\left[\frac{\hat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right] \iff \frac{1}{2} D_\theta[\hat{\theta}_n(X)] \leq \frac{1}{2} D_\theta\left[\frac{\hat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right].$$

Аналогичное неравенство выполняется и для оценки $\theta_n^*(X)$. Суммируем эти два неравенства и получаем

$$\frac{D_\theta[\hat{\theta}_n(X)] + D_\theta[\theta_n^*(X)]}{2} \leq D_\theta\left[\frac{\hat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right].$$

Мы закончили тем же, с чего и начали. Тогда все неравенства это равенство. Значит, $D_\theta\left[\frac{\hat{\theta}_n(X) - \theta_n^*(X)}{2}\right] = 0$.

Из этого следует, что почти наверное

$$\hat{\theta}_n(X) - \theta_n^*(X) = E_\theta[\hat{\theta}_n(X) - \theta_n^*(X)] = E_\theta[\hat{\theta}_n(X)] - E_\theta[\theta_n^*(X)] = \theta - \theta = 0.$$

То есть, $\hat{\theta}_n(X) = \theta_n^*(X)$ почти наверное. ■

Состоятельность асимптотической нормальной оценки

Утверждение. Если оценка асимптотически нормальная, то она состоятельная.

Доказательство. Пусть $\hat{\theta}_n(X)$ — асимптотически нормальная оценка параметра θ .

По определению асимптотической нормальности $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n(X) - \theta) \xrightarrow{d_\theta} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$.

Про сходимост по распределению произведения мы знаем, что если один из пределов сходится к константе, то верна арифметика:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot Z \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} 0 \cdot Z = 0.$$

Тогда

$$\hat{\theta}_n(X) - \theta = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}(\hat{\theta}_n(X) - \theta) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d_\theta} 0 \cdot \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta)) = 0.$$

Так как есть сходимост по распределению к константе, то есть сходимост по вероятности к константе (факт с предыдущего коллоквиума):

$$\hat{\theta}_n(X) - \theta \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d_\theta} 0 \iff \hat{\theta}_n(X) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P_\theta} \theta,$$

а это и есть определение состоятельности. ■

Билет 2

Метод моментов и его состоятельность. Метод максимального правдоподобия. Энтропия и состоятельность оценки максимального правдоподобия.

Метод моментов и его состоятельность

Пусть (X_1, \dots, X_n) — выборка, где X_i задано распределением F_θ . Хотим найти состоятельную оценку параметра θ . Пусть g — непрерывная функция, причём $\mathbb{E}_\theta |g(X_1)| < \infty$. Посчитаем матожидание $\mathbb{E}_\theta g(X_1) = f(\theta)$. Предположим, что $\exists f^{-1}$, и она непрерывна. Так как на практике мы не знаем параметр θ , то мы не можем посчитать такое матожидание. Но мы можем приближённо посчитать $f(\theta)$ воспользовавшись ЗБЧ:

$$\frac{g(X_1) + \dots + g(X_n)}{n} \xrightarrow{P_\theta} \mathbb{E}_\theta g(X_1) = f(\theta).$$

Теперь в силу обратимости f можно получить сходимость к θ :

$$f^{-1} \left(\frac{g(X_1) + \dots + g(X_n)}{n} \right) \xrightarrow{P_\theta} f^{-1}(f(\theta)).$$

Оценкой параметра θ назовём функцию

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = f^{-1} \left(\frac{g(X_1) + \dots + g(X_n)}{n} \right).$$

Эта оценка состоятельна, так как $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{P_\theta} \theta$. Вместо ЗБЧ можно применить УЗБЧ, и получить сильную состоятельность.

Метод максимального правдоподобия

Энтропия и состоятельность оценки максимального правдоподобия

Определение 1. Обобщённой плотностью ρ_X случайной величины X назовём функцию плотности X , если случайная величина является непрерывно, или функцию $\rho_X(t) = P(X = t)$ в случае, если X имеет дискретное распределение.

Определение 2. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка из распределения с обобщённой плотностью ρ_θ . Обобщённая плотность вектора X называется функцией правдоподобия, и имеет вид

$$p(X, \theta) = \rho_\theta(X_1) \cdot \dots \cdot \rho_\theta(X_n)$$

Функцию $\ln p(X, \theta)$ называют логарифмической функцией правдоподобия и обозначают $L(X, \theta)$.

Определение 3. Пусть ρ_0, ρ_1 — положительные вероятностные плотности. Выражение

$$\int \ln \frac{\rho_1(x)}{\rho_0(x)} \cdot \rho_1(x) dx$$

называется энтропией распределения с плотностью ρ_1 относительно распределения с плотностью ρ_0 .

Замечание. Здесь и далее интегралы без пределов интегрирования обозначают интегрирование по множеству, на котором задано распределение. Они вовсе не означают неопределённый интеграл.

Следующее утверждение показывает, что энтропия в некотором смысле оценивает расстояние между распределениями:

Лемма (Информационное неравенство). Пусть ρ_0, ρ_1 — положительные вероятностные плотности. Тогда

$$\int \ln \frac{\rho_1(x)}{\rho_0(x)} \cdot \rho_1(x) dx \geq 0$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\rho_0 = \rho_1$.

Доказательство. Домножим обе части неравенства на (-1) и будем выводить оценку сверху:

$$\int \ln \frac{\rho_0(x)}{\rho_1(x)} \cdot \rho_1(x) dx \stackrel{?}{\leq} 0$$

Воспользуемся неравенством $\ln x \leq x - 1$ (очевидно, если, например, посмотреть на графики этих функций: у них есть единственное пересечение в точке $x = 1$):

$$\ln \frac{\rho_0(x)}{\rho_1(x)} \rho_1(x) \leq \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 \right) \rho_1 = \rho_0 - \rho_1$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \ln \frac{\rho_0(x)}{\rho_1(x)} \cdot \rho_1(x) dx \leq \int \rho_0(x) dx - \int \rho_1(x) dx = 0$$

Оба интеграла справа равны 1, в силу того, что под интегралами стоят плотности. Таким образом оценку сверху мы доказали, найдём теперь, когда достигается равенство.

Пусть в неравенстве достигается равенство, т.е. известно, что

$$\int \ln \frac{\rho_0(x)}{\rho_1(x)} \cdot \rho_1(x) dx = 0 \quad \int \rho_0(x) dx - \int \rho_1(x) dx = 0 \iff \int \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 \right) \rho_1 dx = 0$$

Тогда

$$\int \left(\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 \right) - \ln \frac{\rho_0}{\rho_1} \right) \rho_1 dx = 0$$

Так как $\ln x \leq x - 1$, то $0 \leq x - 1 - \ln x$ и функция в скобках неотрицательна. Теперь очевидно, что 0 достигается только в случае $\rho_0 = \rho_1$:

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 \right) - \ln \frac{\rho_0}{\rho_1} = 0 \iff \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1 \right) = \ln \frac{\rho_0}{\rho_1} \iff \rho_0 = \rho_1 \quad \blacksquare$$

Вывели утверждение, которое показывает, что энтропия, в некотором смысле оценивает расстояние между плотностями, т.е. расстояние между распределениями. Теперь будем применять это утверждение для построения оценки.

Пусть есть выборка $X = (X_1, \dots, X_n)$ из распределения с обобщённой плотностью ρ_θ . Пусть реальное значение параметра θ равно θ_1 . Рассмотрим функцию следующего вида:

$$W(\theta) = \mathbb{E}_{\theta_1} \ln \rho_\theta(X_1) = \int \ln \rho_\theta(x) \rho_{\theta_1}(x) dx$$

Можно показать, что $W(\theta) \leq W(\theta_1) \forall \theta$, действительно:

$$W(\theta) - W(\theta_1) = \int \ln \rho_\theta(x) \rho_{\theta_1}(x) dx - \int \ln \rho_{\theta_1}(x) \rho_{\theta_1}(x) dx = \int \ln \frac{\rho_\theta(x)}{\rho_{\theta_1}(x)} \rho_{\theta_1}(x) dx \leq 0$$

Причём наибольшее значение $W(\theta)$ достигается при $\theta = \theta_1$. Таким образом можно естественно оценить реальный параметр, если найти точку максимума функции $W(\theta)$. В чём проблема: мы не знаем ρ_{θ_1} , и потому функция $W(\theta)$ нам так же не известна. Решение проблемы: $W(\theta)$ это некоторое матожидание. По ЗБЧ известно, что выборочное среднее по вероятности сходится к матожиданию. Т.е.

$$\frac{\ln \rho_\theta(X_1) + \dots + \ln \rho_\theta(X_n)}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}_{\theta_1} \ln \rho_\theta(X_1) = W(\theta)$$

Немного преобразуем левую часть:

$$\frac{\ln \rho_\theta(X_1) + \dots + \ln \rho_\theta(X_n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \rho_\theta(X_i) = \frac{1}{n} L(X, \theta)$$

Таким образом, вместо того, чтобы искать максимум неизвестной функции, мы будем искать максимум того, что к ней приближается, и найденное значение и будем называть **оценкой максимального правдоподобия**.

Определение 4. Оценкой максимального правдоподобия параметра θ называется максимум функции $L(X, \theta)$.

Предложение. (Состоятельность оценки максимального правдоподобия.)

Пусть $\theta \in (a, b)$, и на этом отрезке функция $\theta \rightarrow L(X, \theta)$ имеет единственную точку локального максимума $\hat{\theta}$. Тогда $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta_0$.

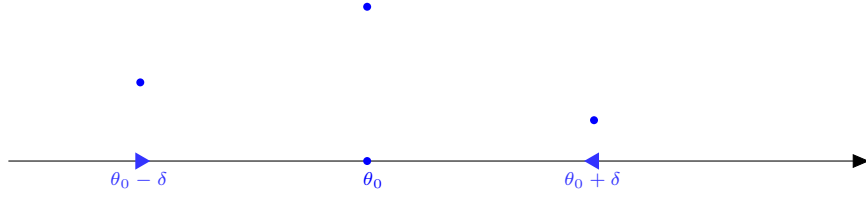
Доказательство. Будем пользоваться тем, что $\frac{1}{n} L(X, \theta) \xrightarrow{P} W(\theta)$. Хотим доказать, что $P(|\hat{\theta} - \theta_0| \geq \delta) \rightarrow 0 \forall \delta > 0$ (просто определение сходимости по вероятности). Рассмотрим точки $\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta$. Про эти точки известно следующее:

$$\begin{cases} W(\theta_0) > W(\theta_0 - \delta) \xleftarrow{P} \frac{1}{n} L(X, \theta_0 - \delta) \\ W(\theta_0) > W(\theta_0 + \delta) \xleftarrow{P} \frac{1}{n} L(X, \theta_0 + \delta) \end{cases}$$

Можно ожидать, что при достаточно большом n , с вероятностью, близкой к 1 будут выполнены неравенства

$$\begin{cases} \frac{1}{n} L(X, \theta_0) > \frac{1}{n} L(X, \theta_0 - \delta) \\ \frac{1}{n} L(X, \theta_0) > \frac{1}{n} L(X, \theta_0 + \delta) \end{cases}$$

Посмотрим теперь на функцию $\theta \rightarrow L(X, \theta)$:



Ясно, что на интервале $(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ существует точка, значение в которой строго больше, чем на концах, а значит, функция имеет на этом отрезке точку локального максимума. Т.е. для точки локального максимума $\hat{\theta}$ выполнено $|\hat{\theta} - \theta_0| < \delta$. Чтобы завершить доказательство, нужно обосновать фразу “при достаточно большом n , с вероятностью, близкой к 1...”. Другими словами, хотим доказать, что

$$P\left(\frac{1}{n}L(X, \theta_0 - \delta) < \frac{1}{n}L(X, \theta_0)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Положим $W(\theta_0) - W(\theta_0 - \delta) = \varepsilon > 0$. Из ЗБЧ следует, что

$$\begin{cases} P\left(\left|\frac{1}{n}L(X, \theta_0 - \delta) - W(\theta_0 - \delta)\right| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) \rightarrow 0 \\ P\left(\left|\frac{1}{n}L(X, \theta_0) - W(\theta_0)\right| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right) \rightarrow 0 \end{cases}$$

Поймём, почему из этого следует, что $P\left(\frac{1}{n}L(X, \theta_0 - \delta) \geq \frac{1}{n}L(X, \theta_0)\right) \rightarrow 0 (*)$. Пусть величины $\frac{1}{n}L(X, \theta_0 - \delta)$ и $W(\theta_0 - \delta)$ отличаются менее, чем на $\frac{\varepsilon}{4}$. Аналогично для $\frac{1}{n}L(X, \theta_0)$ и $W(\theta_0)$. Тогда верна следующая цепочка равенств:

$$W(\theta_0) \leq \frac{1}{n}L_n(X, \theta_0) + \frac{\varepsilon}{4} \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{n}L_n(X, \theta_0 - \delta) + \frac{\varepsilon}{4} \leq W(\theta_0 - \delta) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Переход (1) следует из неравенства (*). Тогда мы получаем, что $W(\theta_0) - W(\theta_0 - \delta) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Но $W(\theta_0) - W(\theta_0 - \delta) = \varepsilon$, и получается противоречие. Значит, или $\frac{1}{n}L(X, \theta_0 - \delta)$ и $W(\theta_0 - \delta)$ отличаются более, чем на $\frac{\varepsilon}{4}$, или же величины $\frac{1}{n}L(X, \theta_0)$ и $W(\theta_0)$. Но тогда мы получаем, что исход из события $\left\{\frac{1}{n}L(X, \theta_0 - \delta) \geq \frac{1}{n}L(X, \theta_0)\right\}$ лежит в объединении

$$\left\{\left|\frac{1}{n}L(X, \theta_0 - \delta) - W(\theta_0 - \delta)\right| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right\} \cup \left\{\left|\frac{1}{n}L(X, \theta_0) - W(\theta_0)\right| \geq \frac{\varepsilon}{4}\right\}$$

А вероятность таких событий стремится к нулю. Теперь методом пристального взгляда можно заметить, что мы всё доказали. ■

Билет 3

Информация Фишера и неравенство Рао-Крамера. Критерий равенства в неравенстве Рао-Крамера.

Информация Фишера и неравенство Рао-Крамера

Определение. Информация Фишера $I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \right)^2$

Выведение и альтернативные варианты (здесь θ_0 — реальный параметр):

$$L(x, \theta) \stackrel{\text{ф-ла Тейлора}}{\underset{\leq 0 \text{ тк точка максимума}}{\simeq}} L(x, \hat{\theta}_n(x)) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L(x, \hat{\theta}_n(x)) (\theta - \hat{\theta}_n(x))^2$$

Точка максимума близка к параметру, посмотрим на вторую производную в реальном параметре:

$$\begin{aligned} -\mathbb{E}_{\theta_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L(x, \theta_0) &= -\mathbb{E}_{\theta_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta_0)}{P(x, \theta_0)} \right) = -\mathbb{E}_{\theta_0} \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(x, \theta_0)}{P(x, \theta_0)} - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta_0) \right)^2}{P(x, \theta_0)^2} \right) \ominus \\ &\left[\text{трюки с производными так как } \left(\frac{a}{b} \right)' = \frac{a'}{b} - \frac{ab'}{b^2}, \text{ но здесь } a = b' \implies \left(\frac{b'}{b} \right)' = \frac{b''}{b} - \frac{(b')^2}{b^2} \right] \\ &\ominus - \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(x, \theta_0)}{P(x, \theta_0)} - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta_0) \right)^2}{P(x, \theta_0)^2} \right) P(x, \theta_0) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(x, \theta_0) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta_0)}{P(x, \theta_0)} \right)^2 P(x, \theta_0) dx \end{aligned}$$

Предположим, что выполнены условия регулярности

- $P(x, \theta)$ дважды непрерывно дифференцируема по θ
- $P(x, \theta) > 0$ на каком-то множестве иксов (прямая, отрезок, точки в дискретном случае) $\forall \theta$
- Производную и интеграл можно переставить

Из этого следует

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(x, \theta) dx = 1 \implies \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta) dx = \frac{\partial 1}{\partial \theta} = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(x, \theta) dx = 0$$

Итак

$$-\mathbb{E}_{\theta_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L(x, \theta_0) = - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(x, \theta_0) dx}_{=0} + \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta_0)}{P(x, \theta_0)} \right)^2 P(x, \theta_0) dx = \mathbb{E}_{\theta_0} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta_0) \right)^2 = I(\theta)$$

В дискретном случае меняем интегралы на суммы

Предположения про $P(x, \theta)$ очень натуральны, поэтому их никто не проверяет

Утверждение. Пусть выполнены условия регулярности. Тогда

$$I(\theta) = \mathbb{D}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \right) = n \cdot i(\theta), \text{ где } i(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \rho_\theta(X_1) \right)^2.$$

Здесь $i(\theta)$ — информация Фишера выборки из одного элемента

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \right) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta)}{P(x, \theta)} P(x, \theta) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta) dx = 0 \implies \mathbb{D}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \right) = \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \right)^2 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) &= \sum_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \rho_\theta(X_i)}_{\text{независимые одинаково распределенные}} \implies \mathbb{D}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \right) = n \mathbb{D}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \rho_\theta(X_1) \right) = n \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \rho_\theta(X_1) \right)^2 = n \cdot i(\theta) \end{aligned}$$

■

Теорема. Неравенство Рао-Крамера Пусть выполняются условия регулярности, а $\theta_n(x)$ — несмещенная оценка функции $\tau(\theta)$ (как правило $\tau(\theta) = \theta$, но иногда мы пытаемся оценить не саму θ , а какую-то функцию θ), тогда

$$\mathbb{D}_\theta(\theta_n(x)) \geq \frac{(\tau'(\theta))^2}{I(\theta)}$$

Неравенство нужно чтобы находить эффективные оценки: там где достигается равенство, там и оценка эффективна.

Доказательство.

$$\begin{aligned} \tau(\theta) &= \mathbb{E}_\theta(\theta_n(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} \theta_n(x) P(x, \theta) dx. \\ \tau'(\theta) &= \int_{\mathbb{R}^n} \theta_n(x) \frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \theta_n(x) \frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta) dx - \tau(\theta) \overbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta) dx}^{=0} = \int_{\mathbb{R}^n} (\theta_n(x) - \tau(\theta)) \frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\theta_n(x) - \tau(\theta)) \underbrace{\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta)}{P(x, \theta)}}_{= \frac{\partial}{\partial \theta} \ln P(x, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta)} P(x, \theta) dx = \mathbb{E}_\theta \left((\theta_n(x) - \tau(\theta)) \frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \right) \stackrel{\text{Коши-Буняковский}}{\leq} \\ &\leq \sqrt{\mathbb{E}_\theta (\theta_n(x) - \tau(\theta))^2} \sqrt{\mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \right)^2} = \sqrt{\mathbb{D}_\theta (\theta_n(x))} \sqrt{I(\theta)} \\ \tau'(\theta) &\leq \sqrt{\mathbb{D}_\theta (\theta_n(x))} \sqrt{I(\theta)} \implies (\tau'(\theta))^2 \leq \mathbb{D}_\theta (\theta_n(x)) I(\theta). \end{aligned}$$

■

Критерий равенства в неравенстве Рао-Крамера

Равенство достигается когда достигается равенство в Коши-Буняковском, то есть

$$\theta_n(x) - \tau(\theta) = \underbrace{c_n(\theta)}_{\text{const}} \frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta)$$

Пример в ситуации бернулли:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) = \frac{\sum_i X_i - n\theta}{\theta(1-\theta)} = \frac{n}{\underbrace{\theta(1-\theta)}_{\text{const}}} (\bar{X}_n - \theta) \implies \text{в Рао-Крамере достигается равенство} \implies \bar{X}_n \text{ эфф оценка}$$

Если (в случае оценки θ , то есть $\tau(\theta) = \theta$) существует несмещенная оценка $\hat{\theta}_n$, на которой достигается равенство в Рао-Крамере, то это оценка максимального правдоподобия

$$\hat{\theta}_n(x) - \theta = c_n(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \quad \text{Возьмем } \theta = \theta^*(x) \text{ оценка макс правдоподобия} \implies \frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta^*(x)) = 0 \implies \hat{\theta}_n(x) = \theta^*(x)$$

Билет 4

Доверительные интервалы. Различные методы построения доверительных интервалов (с помощью неравенств на вероятность больших уклонений, с помощью центральной статистики, с помощью асимптотически нормальной оценки). Примеры.

Доверительные интервалы

Знать, что оценка $\hat{\theta}_n(X)$ состоятельна (сходится по вероятности к θ) это, конечно, круто, но особо много информации о ней нам не даёт. Нам хотелось бы знать как быстро она куда-то там сходится – хотим для фиксированного $\alpha \in (0, 1)$ и фиксированного $\varepsilon > 0$ знать такой номер n , что $P_\theta(|\hat{\theta}_n(X) - \theta| < \varepsilon) > 1 - \alpha$.

Определение. $(\hat{\theta}_1(X), \hat{\theta}_2(X))$ – доверительный интервал уровня доверия $1 - \alpha$, если

$$P_\theta(\theta \in (\hat{\theta}_1(X), \hat{\theta}_2(X))) \geq 1 - \alpha$$

$$P_\theta(\hat{\theta}_1(X) \leq \theta \leq \hat{\theta}_2(X)) \geq 1 - \alpha$$

Определение. Последовательность оценок $\hat{\theta}_1^n(X), \hat{\theta}_2^n(X)$ образует асимптотический доверительный интервал, если $\liminf_{n \rightarrow \infty} P_\theta(\hat{\theta}_1^n(X) \leq \theta \leq \hat{\theta}_2^n(X)) \geq 1 - \alpha$

Пример. Пусть есть выборка из случайных величин с нормальным распределением $X_j \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$.

Знаем, что $\bar{X}_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P_\theta} \theta$ (ЗБЧ) – среднее хорошо приближает θ .

Посмотрим на разность эмпирического среднего и реальной θ : $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \theta = \frac{\overbrace{(X_1 - \theta)}^{\sim \mathcal{N}(0,1)} + \dots + \overbrace{(X_n - \theta)}^{\sim \mathcal{N}(0,1)}}{n} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{n})$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \theta) \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Теперь по таблице значений функции распределения нормального закона найдём квантили $z_{\frac{\alpha}{2}}$ и $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$: $\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}, \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

$$\begin{aligned} P_\theta(z_{\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \theta) \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}) &= \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha \\ P(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} - \bar{X}_n \leq -\theta \leq \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} - \bar{X}_n) &= 1 - \alpha \\ P(\bar{X}_n - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \bar{X}_n - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}) &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Заметим, что мы взяли симметричный интервал: $z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. В таком случае наш интервал принимает вид:

$$(\bar{X}_n - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}, \bar{X}_n + \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}). \text{ В таком случае длина этого интервала равна } O(\frac{1}{\sqrt{n}})$$

Но зачем мы решили взять симметричный интервал? Вспомним, что мы от него хотим: минимальной длины. А какой интервал на графике нормального распределения будет захватывать нужную площадь и при этом быть самым коротким среди всех? Правильно, симметричный с центром в пике колокола нормального распределения.

Различные методы построения доверительных интервалов (с помощью неравенств на вероятность больших уклонений, с помощью центральной статистики, с помощью асимптотически нормальной оценки). Примеры

1. Неравенства Чебышёва или Чернова

$$X_1, \dots, X_n \sim \text{Bern}(\theta), P(X_j = 1) = \theta$$

Чебышёв:

$$P_\theta(|\bar{X}_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{D}X_1}{n\varepsilon^2} = \frac{\theta(1-\theta)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2} = \alpha \Rightarrow \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}} \Rightarrow P_\theta(\bar{X}_n - \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}} < \theta < \bar{X}_n + \frac{1}{\sqrt{2n\alpha}}) \geq 1 - \alpha.$$

$$\text{Чернов: } P_\theta(|\bar{X}_n - \theta| \geq \varepsilon) \leq 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{4}} = \alpha$$

$$-\frac{n\varepsilon^2}{4} = \ln \frac{\alpha}{2}$$

$$\varepsilon = 2\sqrt{-\frac{\ln \frac{\alpha}{2}}{n}}$$

$$\Rightarrow P_\theta(\bar{X}_n - 2\sqrt{-\frac{\ln \frac{\alpha}{2}}{n}} < \theta < \bar{X}_n + 2\sqrt{-\frac{\ln \frac{\alpha}{2}}{n}}) \geq 1 - \alpha$$

Заметим, что в обеих оценках мы получили, что длина интервала равна $O(\frac{1}{\sqrt{n}})$, но несложно заметить, что константа Чернова значительно лучше, чем у Чебышёва.

2. Метод центральной статистики

Определение. $V(X, \theta)$ называется центральной статистикой, если:

- (a) её распределение не зависит от θ : $P_\theta(V(X, \theta) \leq t) = F(t)$
- (b) $\forall X: \theta \mapsto V(X, \theta)$ — монотонная

Пусть у нас есть такая статистика. Вопрос: как с её помощью строить доверительные интервалы? Предельно просто: подберём числа t_1 и t_2 таким образом, чтобы $P_\theta(t_1 \leq V(X, \theta) \leq t_2) \geq 1 - \alpha$. Мы можем так сделать, потому что распределение V не зависит от θ . Теперь поскольку при любом X наша функция монотонна, то данная оценка равносильна тому, что $P_\theta(\hat{\theta}_1(X) \leq \theta \leq \hat{\theta}_2(X)) \geq 1 - \alpha$ — чисто из-за монотонности по θ .

Пример. $X_j \sim \mathcal{U}(0, \theta) \Rightarrow \theta^{-1}X_j \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Это уже центральная статистика, однако она зависит всего от одного элемента выборки. Рассмотрим $X_{(n)} = \max_{1 \leq j \leq n} X_j$: $P_\theta(\theta^{-1}X_{(n)} \leq t) = P_\theta(\max_{1 \leq j \leq n} \theta^{-1}X_j \leq t) = \prod_{j=1}^n P_\theta(\underbrace{\theta^{-1}X_j}_{\sim \mathcal{U}(0,1)} \leq t) = t^n$

Теперь грубо попробуем оценить, куда там наша статистика попадает:

$$P_\theta(\underbrace{t}_{t_1} \leq \theta^{-1}X_{(n)} \leq \underbrace{1}_{t_2}) = 1 - t^n = 1 - \alpha \Rightarrow t = \alpha^{\frac{1}{n}}$$

Теперь попробуем вытащить отсюда θ :

$$P_\theta(\alpha^{\frac{1}{n}} \leq \theta^{-1}X_{(n)} \leq 1) = 1 - \alpha$$

$$P_\theta(\frac{\alpha^{\frac{1}{n}}}{X_{(n)}} \leq \theta^{-1} \leq \frac{1}{X_{(n)}}) = 1 - \alpha$$

$$P_\theta(\underbrace{X_{(n)}}_{\hat{\theta}_1(X)} \leq \theta \leq \underbrace{\frac{X_{(n)}}{\alpha^{\frac{1}{n}}}}_{\hat{\theta}_2(X)}) = 1 - \alpha$$

Теперь посмотрим на длину полученного доверительного интервала:

$$(\alpha^{-\frac{1}{n}} - 1)X_{(n)}$$

Что мы можем сказать про $\alpha^{-\frac{1}{n}} - 1$? Разложим это дело по Тейлору:

$$\alpha^{-\frac{1}{n}} - 1 \sim e^{-\frac{\ln \alpha}{n}} - 1 \sim \frac{-\ln \alpha}{n} = O(\frac{1}{n}) \rightarrow \infty$$

Получается длина доверительного интервала с ростом количества элементов выборки стремится к нулю. Получается мы построили что-то более менее разумное.

Часто в роли центральной статистики можно взять следующую лабуду: $V(X, \theta) = -\sum_{j=1}^n \ln F_\theta(X_j)$ — это сумма независимых распределений, поэтому достаточно показать что одно не зависит от θ — тогда в силу независимости сумма тоже будет не зависеть от θ :

$P_\theta(-\ln F_\theta(X_j) \leq t) = P_\theta(F_\theta(X_j) \geq e^{-t}) = P_\theta(X_j \geq F_\theta^{-1}(e^{-t})) = 1 - F_\theta(F_\theta^{-1}(e^{-t})) = 1 - e^{-t}$, а это экспоненциальное распределение. Сумма экспоненциальных распределений это Гамма распределение $\Rightarrow V(X, \theta) = \Gamma(n, 1)$

3. Построение асимптотических доверительных интервалов

Пусть у нас есть $\hat{\theta}_n(X)$ — асимптотически нормальная оценка θ с асимптотической дисперсией $\sigma^2(\theta)$. Это значит, что

$$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n(X) - \theta)}{\sigma(\theta)} \xrightarrow{d_\theta} Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Теперь мы хотим получить доверительный интервал. Если бы у нас $\sigma(\theta)$ была константой, то мы могли бы уже привычно взять там квантили нормального распределения, туды сюды и получить интервал:

$$P_\theta(t_1 \leq \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n(X) - \theta)}{\sigma(\theta)} \leq t_2) \rightarrow \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = 1 - \alpha.$$

Тогда мы могли бы просто взять такие $\Phi(t_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ и $\Phi(t_1) = \frac{\alpha}{2}$ и получить, что

$$P_\theta(\hat{\theta}_n(X) - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(\theta)}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n(X) + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(\theta)}{\sqrt{n}}) \rightarrow 1 - \alpha$$

Но тут есть проблема — у нас слева и справа есть $\sigma(\theta)$ в числителе, что совершенно ломает корректность статистики, мы ведь хотим чтобы штуки слева и справа от θ в неравенстве не зависели от θ . Как это решать? Очень просто, перейти от $\sigma(\theta)$ к состоятельной оценке $\sigma(\theta)$. Возможны следующие случаи:

(а) σ — непрерывная функция

Тогда $\sigma(\hat{\theta}_n(X)) \xrightarrow{P_\theta} \sigma(\theta)$ и мы можем везде в наших рассуждениях заменить $\sigma(\theta)$ на $\sigma(\hat{\theta}_n(X))$ и сходимость сохранится:

$$P_\theta(\hat{\theta}_n(X) - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(\hat{\theta}_n(X))}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n(X) + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(\hat{\theta}_n(X))}{\sqrt{n}}) \rightarrow 1 - \alpha$$

(б) Изначально было ЦПТ

$$\hat{\theta}_n(X) = \overline{X_n}, \sigma^2(\theta) = \mathbb{D}_\theta X$$

В таком случае мы можем использовать выборочную дисперсию в качестве состоятельной оценки дисперсии:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_j - \overline{X_n})^2 \text{ — выборочная дисперсия}$$

(с) Можно поправить нашу асимптотическую дисперсию: подобрать такую функцию φ , что

$$\sqrt{n}(\varphi(\hat{\theta}_n(X)) - \varphi(\theta)) \rightarrow \underbrace{\mathcal{N}(0, 1)}_{=\varphi'(\theta) \cdot \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))} \implies \varphi'^2(\theta) \sigma^2(\theta) = 1$$

Билет 5

Построение точных доверительных интервалов для параметров нормального распределения.

Матожидание.

Оцениваем параметры случайной величины $\sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ по выборке X_1, \dots, X_n :

1. σ — известно. Оцениваем матожидание a :

Центрируем и нормируем случайную величину разности оценки и параметра:

$$\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - a}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1) \text{ — центральная статистика}$$

Пусть для $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ верно, что $\Phi(t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$, тогда

$$P_\theta \left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - a)}{\sigma} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P_\theta \left(\underbrace{\bar{X}_n - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_1(x)} \leq a \leq \underbrace{\bar{X}_n + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_2(x)} \right) = 1 - \alpha$$

2. σ не известно.

Лемма. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(a, \text{diag}(\sigma^2))$, $\text{diag}(\sigma^2) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2 \end{pmatrix}$, $\{X_j\}$ независимы, $\mathbb{D}X_j = \sigma^2$, $\mathbb{E}X_j = a$.

Тогда \bar{X}_n и $\sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2$ независимы.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $\mathbb{E}X_j = a = 0$.

Рассмотрим $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \star & \dots & \star \\ \star & \dots & \star \end{pmatrix}$ — ортогональную, и случайную величину $u = UX \sim \mathcal{N}(0, \text{diag}(\sigma^2))$,

$$(U^* C_x U = U^* \text{diag}(\sigma^2) U = \sigma^2 U^* I U = \sigma^2 U^* U = \sigma^2 I = \text{diag}(\sigma^2))$$

$\{u_\sigma\}$ — незав., $\mathbb{E}u_j = 0$, $\mathbb{D}u_j = \sigma^2$.

Далее $|u|$ — вторая векторная норма, т.е. $|u| = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$. К слову, вторая норма — унитарно-инвариантна, поэтому $|u| = |UX| = |X|$ в силу ортогональности U .

$$\begin{aligned} \sum_{j=2}^n u_j^2 &= |u|^2 - u_1^2 = |u|^2 - \left(\frac{\sum X_j}{\sqrt{n}} \right)^2 = |X|^2 - n \bar{X}_n^2 \text{ (т.к. } U \text{ — орт.)} \\ \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2 &= \sum_{j=1}^n X_j^2 - 2n \bar{X}_n \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j + n \bar{X}_n^2 = \sum_{j=1}^n X_j^2 - n \bar{X}_n^2 \\ \sum_{j=2}^n u_j^2 &= \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2 \text{ — независимо с } u_1 = \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \bar{X}_n \end{aligned}$$

При этом $\sum_{j=2}^n u_j^2 = \sigma^2 \sum_{j=2}^n (\sigma^{-1} u_j)^2$, и $\sigma^{-1} u_j \sim \mathcal{N}(0, 1)$, то есть

$$\chi_n^2 = \sum_{j=1}^n (X_j - \bar{X}_n)^2 = \sum_{j=1}^n \xi_k^2, \{ \xi_k \} \text{ — незав., } \xi_k \sim \mathcal{N}(0, 1),$$

где χ_n^2 — распределение χ -квадрат с n степенями свободы, распределение величины $\sum_{j=1}^n \eta_j^2$, η_j — независимые нормально распределенные с параметрами 0 и 1 величины.

В итоге \bar{X}_n и $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{X}_n)^2$ независимы и $\sigma^{-2} s^2 \sim \frac{1}{n-1} \chi_{n-1}^2$. ■

Так как σ неизвестна, заменим ее на $\sqrt{s^2}$ и получим статистику:

$$T_{n-1}(X) = \frac{\sqrt{n}(X_n - a)}{\sqrt{s^2}} = \frac{\frac{\sqrt{n}(X_n - a)}{\sigma}}{\sqrt{\sigma^2 s^2}} \sim \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{n-1} \chi_{n-1}^2}},$$

ξ и χ независимы.

$T_n = \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{n} \chi_n^2}}$ — распределение Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы.

Его плотность:

$$\varrho(x) = C_n \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-n/2}$$

Т.к. плотность симметрична, можем выбрать 1 квантиль:

$$F_{T_{n-1}}(t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2}, \quad F_{T_{n-1}}(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$$

Попадаем в случай 1 с известной дисперсией:

$$P_\theta \left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - a)}{\sqrt{s^2}} \leq t_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = 1 - \alpha \Leftrightarrow P_\theta \left(\underbrace{\bar{X}_n - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_1(x)} \leq a \leq \underbrace{\bar{X}_n + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_2(x)} \right) = 1 - \alpha$$

Дисперсия.

Из доказательства леммы выше:

$$\sigma^{-2}(n-1)S_n^2 \sim \chi_{n-1}^2$$

Выберем $x_{\alpha/2}$ и $x_{1-\alpha/2}$ такое, что $F_{\chi_{n-1}^2}(x_{\alpha/2}) = \alpha/2$ и $F_{\chi_{n-1}^2}(1 - x_{\alpha/2}) = 1 - \alpha/2$ ($F_{\chi_{n-1}^2}$ — функция распределения случайной величины χ_{n-1}^2). Тогда

$$P \left(x_{\alpha/2} \leq \frac{(n-1)S_n^2}{\sigma^2} \leq x_{1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha,$$

и интервал уровня $1 - \alpha$ имеет вид

$$\left(\frac{\sqrt{n-1} S_n}{\sqrt{x_{1-\alpha/2}}}, \frac{\sqrt{n-1} S_n}{\sqrt{x_{\alpha/2}}} \right).$$

Билет 6

Проверка гипотез. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень значимости и мощность статистического критерия. Пример построения критерия с помощью доверительного интеграла. Нижняя оценка суммы вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода.

Проверка гипотез

Пусть есть выборка X_1, \dots, X_n с распределением P_θ .

Определение. Предположения о значениях θ и называются статистическими гипотезами.

Пример. $H_0: \theta \in \Theta_0$ — статистическая гипотеза

Определение. Простая гипотеза (одноточечная гипотеза) — гипотеза вида $H_0: \theta = \theta_0$, где $\Theta = \{\theta_0\}$

Определение. Гипотеза $H_1: \theta \in \Theta_1$ — альтернативная гипотеза

Пример. $H_1: \theta \in \overline{\Theta_0}$ — альтернативная гипотеза

Для проверки гипотез, строят критерий на основе критического множества как правило $\subset \mathbb{R}^n$, то есть действуют по такому принципу:

Выделяют в области значения параметров критического множества K , так, что $\forall \theta \in \Theta_0, P_\theta((X_1 \dots X_n) \in K)$ — «маленькая», тогда $X_1 \dots X_n \in K$ свидетельствует против гипотезы H_0 , то есть если $X = (X_1 \dots X_n) \in K \Rightarrow H_0$ отклоняется, иначе принимается.

Далее $X = (X_1 \dots X_n)$

Ошибки 1-го и 2-го рода

Пусть у нас есть критическое множество K . При проверке гипотез мы могли совершить две ошибки:

Определение. Ошибка первого рода: отклонение верной гипотезы H_0 , то есть это $P_{\theta \in \Theta_0}(X \in K)$. В случае простой гипотезы $P_{\theta_0}(X \in K)$

Определение. Ошибка второго рода: принятие ложной гипотезы H_0 , то есть это $P_{\theta \in \Theta_1}(X \notin K)$. В случае простой гипотезы $P_{\theta_1}(X \notin K)$

Уровень значимости и мощность статистического критерия

Определение. Критерий K имеет уровень значимости α , если вероятность ошибки первого рода меньше либо равна α , то есть $P_{\theta \in \Theta_0}(X \in K) \leq \alpha$.

Определение. Мощность критерия K это величина, равная 1 - вероятность ошибки второго рода, то есть $1 - P_{\theta \in \Theta_1}(X \notin K) = P_{\theta \in \Theta_1}(X \in K)$. В случае простой гипотезы величина $\beta = P_{\theta_1}(X \in K)$ — мощность

Если имеются два критерия K, S уровня значимости α , то K более мощный, чем S если

$$\forall \theta \in \Theta_1: P_\theta(X \in K) \geq P_\theta(X \in S)$$

Пример построения критерия с помощью доверительного интеграла

Пример. Пусть $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$

$H_0: \theta = \theta_0$

$H_1: \theta = \theta_1$

Ранее при данных условиях мы получили следующий доверительный интервал:

$$P_{\theta_0} \left(\overline{X}_n - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \theta_0 \leq \overline{X}_n + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right) = P_{\theta_0} \left(\theta_0 - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \overline{X}_n \leq \theta_0 + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha$$

Выберем критическое множество $K: \left\{ X: \overline{X}_n > \theta_0 + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right\} \cup \left\{ X: \overline{X}_n < \theta_0 - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right\}$

Тогда $P_{\theta_0}(X \in K) = 1 - (1 - \alpha) = \alpha$

Найдем ошибку второго рода:

$$\begin{aligned}
P_{\theta_1}(X \notin K) &= P_{\theta_1} \left(\theta_0 - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leq \overline{X_n} \leq \theta_0 + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \right) = \\
&= P_{\theta_1} \left(\sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \underbrace{\sqrt{n}(\overline{X_n} - \theta_1)}_{\sim \mathcal{N}(0,1)} \leq \sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) = \\
&= \Phi \left(\sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) - \Phi \left(\sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right)
\end{aligned}$$

Посмотрим, что происходит при $n \rightarrow \infty$:

1. $\theta_0 > \theta_1 \implies P_{\theta_1}(X \notin K) \rightarrow 0$
2. $\theta_0 < \theta_1 \implies P_{\theta_1}(X \notin K) \rightarrow 0$

Таким образом, мы получили состоятельный критерий.

Нижняя оценка суммы вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода

Теорема. Пусть у нас есть две гипотезы:

1. $H_0 : \rho = f_0$
2. $H_1 : \rho = f_1$

Сумма ошибки первого рода и ошибки второго рода больше либо равна $1 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |f_0 - f_1| dx$

Доказательство. Найдем сумму ошибок первого и второго рода:

$$P_0(X \in K) + P_1(X \notin K) = \int_K f_0 dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus K} f_1 dx}_{1 - \int_K f_1 dx} = 1 + \int_K (f_0 - f_1) dx \geq$$

$$\begin{aligned}
&\text{Введем множество } S = \{f_0 \leq f_1\} \\
&\geq 1 + \int_{K \cap S} (f_0 - f_1) dx \geq 1 + \int_S (f_0 - f_1) dx
\end{aligned}$$

Рассмотрим отдельно интеграл $\int_S (f_0 - f_1) dx$:

$$\int_S (f_0 - f_1) dx = \int_S f_0 dx - \int_S f_1 dx = 1 - \int_{\mathbb{R}^n \setminus S} f_0 dx - 1 + \int_{\mathbb{R}^n \setminus S} f_1 dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus S} (f_1 - f_0) dx$$

В силу того, как мы выбрали множество S , можно увидеть, что

1. $\int_S (f_0 - f_1) dx = - \int_S |f_0 - f_1| dx$
2. $\int_{\mathbb{R}^n \setminus S} (f_1 - f_0) dx = - \int_{\mathbb{R}^n \setminus S} |f_0 - f_1| dx$

Тогда мы получаем, что

$$- \int_{\mathbb{R}^n \setminus S} |f_0 - f_1| dx = - \int_S |f_0 - f_1| dx = - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |f_0 - f_1| dx \implies P_0(X \in K) + P_1(X \notin K) \geq 1 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |f_0 - f_1| dx$$

■

Билет 7

Теорема Неймана-Пирсона и пример её применения.

Теорема Неймана-Пирсона

Пусть гипотеза H_0 утверждает, что плотность выборки – это f_0 , а альтернативная гипотеза H_1 утверждает, что плотность выборки – это f_1 .

Предположим, что $\forall \alpha \in [0, 1] \exists t := t(\alpha) : P_0(f_1(x) \geq t f_0(x)) = \alpha$.

Теорема (Неймана-Пирсона). В такой постановке наиболее мощный критерий уровня значимости α имеет вид $K_{t(\alpha)} := \{f_1(x) \geq t(\alpha) f_0(x)\}$.

Доказательство. Пусть S – тоже критерий уровня значимости α : $P_0(X \in S) \leq \alpha = P_0(X \in K_{t(\alpha)})$. Хотим сравнить $P_1(X \in K_{t(\alpha)}) - P_1(X \in S)$. Хотим, чтобы это было больше либо равно нулю. Это и будет означать, что у нас критерий наиболее мощный.

$$P_1(X \in K_{t(\alpha)}) - P_1(X \in S) = \int_{K_{t(\alpha)}} f_1 dx - \int_S f_1 dx = [\text{можем выкинуть пересечение, так как на пересечении эти интегралы просто сократятся}] = \int_{K_{t(\alpha)} \setminus S} f_1 dx - \int_{S \setminus K_{t(\alpha)}} f_1 dx.$$

Заметим, что на $S \setminus K_{t(\alpha)}$ выполнено $f_1 < t(\alpha) f_0$, так как это взято из дополнения к $K_{t(\alpha)}$, где по условию выполняется $f_1(x) \geq t(\alpha) f_0(x)$. Поэтому имеем: $\int_{K_{t(\alpha)} \setminus S} f_1 dx - \int_{S \setminus K_{t(\alpha)}} f_1 dx \geq t(\alpha) \int_{K_{t(\alpha)} \setminus S} f_0 dx - t(\alpha) \int_{S \setminus K_{t(\alpha)}} f_0 dx$ [снова добавим пересечение и вынесем $t(\alpha)$] $= t(\alpha) \cdot \left(\int_{K_{t(\alpha)}} f_0 dx - \int_S f_0 dx \right) = t(\alpha) \cdot (P_0(X \in K_{t(\alpha)}) - P_0(X \in S)) \geq 0$ из построения критерия S ($P_0(X \in S) \leq \alpha = P_0(X \in K_{t(\alpha)})$).

Получили: $P_1(X \in K_{t(\alpha)}) - P_1(X \in S) \geq 0$, что и требовалось доказать. ■

Пример применения теоремы Неймана-Пирсона

Пример. Пусть у нас выборка из нормального закона $N(\theta, 1)$. Пусть наша гипотеза H_0 говорит, что $\theta = \theta_0$, а альтернативная гипотеза H_1 говорит, что $\theta = \theta_1 > \theta_0$.

$$f_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (X_j - \theta_1)^2\right)$$

$$f_0(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (X_j - \theta_0)^2\right)$$

Зададим критерий K_t из теоремы Неймана-Пирсона (ничего в 0 не обращается – сразу можем поделить):

$$K_t = \left\{ \frac{f_1}{f_0} \geq t \right\} = \left\{ \exp\left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n [(X_j - \theta_0)^2 - (X_j - \theta_1)^2]\right) \geq t \right\} = [\text{логарифмируем, раскрываем скобки, умножаем на два}] = \left\{ \sum_{j=1}^n [2X_j(\theta_1 - \theta_0) + n(\theta_0^2 - \theta_1^2)] \geq 2 \ln t \right\} = \left\{ (\theta_1 - \theta_0) \overline{X}_n \geq \frac{\ln t}{n} - \frac{(\theta_0^2 - \theta_1^2)}{2} \right\} = [\text{по условию } \theta_1 > \theta_0 \Rightarrow \text{поделим}]$$

$$= \left\{ \overline{X}_n \geq \frac{\frac{\ln t}{n} - \frac{(\theta_0^2 - \theta_1^2)}{2}}{\theta_1 - \theta_0} \right\}$$

Таким образом пришли к тому, что $K_t = \left\{ \frac{f_1}{f_0} \geq t \right\}$ равносильно множеству $\tilde{K}_s = \{\overline{X}_n \geq s\}$. Равносильно в том смысле, что для каждого t мы можем подобрать $s(t)$, что множество K_t совпадает с $\tilde{K}_{s(t)}$. Теперь будем искать критические множества именно в таком виде (для удобства).

Должно выполняться: $P_0(X \in K_t) = \alpha \Leftrightarrow P_0(X \in \tilde{K}_{s(t)}) = \alpha$. А что это за вероятности? Это вероятность $P_{\theta_0}(\overline{X}_n \geq s) = \alpha$. То есть, $P_{\theta_0}(\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0) \geq \sqrt{n}(s - \theta_0)) = \alpha$, где $\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_0) \sim N(0, 1)$, поэтому тут просто написано, что $1 - \Phi(\sqrt{n}(s - \theta_0)) = \alpha$.

Значит, выбираем квантиль нормального закона уровня $1 - \alpha$: $Z_{1-\alpha} = \sqrt{n}(s - \theta_0) \Rightarrow$
 $s = \theta_0 + \frac{Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$. Выразили s .

Таким образом, наше критическое множество $\left\{ \overline{X}_n \geq \theta_0 + \frac{Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \right\}$. Это критерий уровня значимости α .

Теперь посчитаем мощность (это же самый мощный критерий):

$$P_{\theta_1} \left(\overline{X}_n \geq \theta_0 + \frac{Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \right) = P_{\theta_1} \left(\sqrt{n}(\overline{X}_n - \theta_1) \geq \sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1) + Z_{1-\alpha} \right) = 1 - \Phi(\sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1) + Z_{1-\alpha}).$$

Заметим, что если объём выборки n устремить к бесконечности, то точка, в которой мы берём Φ стремится к минус бесконечности (так как $(\theta_0 - \theta_1) < 0$ по условию), поэтому мощность стремится к 1.

По теореме Неймана-Пирсона выписанная мощность максимальна.

Билет 8

Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко-Кантелли