Теория вероятностей и математическая статистика, Коллоквиум IV

Версия от 12.06.2021 15:49

Содержание

1. Выборка, оценка, статистика. Несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность оценок. Пример отсутствия несмещенной оценки. Отсутсвие эффективной оценки в классе всех оценок. Единственность эффективной оценки. Состоятельность асимптотической нормальной оценки.

Предположим, нам известно, что неизвестное распределение принадлежит какому-то конкретному семейству распределений с функциями распределения F_θ, где $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Тогда задачей статистики является оценка неизвестного параметра $\theta_0 \in \Theta$, соответствующего нашему неизвестному распределению.
Например, пусть X есть случайная величина и мы знаем распределение этой случайно величины $F_\theta(t)$ с точностью до θ (например, $\mathcal{N}(0, \theta)$). Задача статистики заключается в том, чтобы оценить параметр θ.
Рассмотрим пример, показывающий, что теория вероятностей и математическая статистика изучают разные вещи:

Пример. Пусть в ящике N шаров, M из них чёрные. Мы достали из ящика n шаров. Теория вероятностей задаётся вопросом, с какой вероятностью среди вытянутых шаров есть m чёрных. Математическая статистика задаётся вопросом, сколько всего в ящике чёрных шаров (какое M), если мы достали n шаров и m из них чёрные.

1.1. Выборка, оценка, статистика.

Определение. Вектор $X = (X_1, \ldots, X_n)$ с независимыми компонентами, где каждая случайная величина имеет одно и то же распределение, называется **выборкой**.

Определение. Произвольная функция $T_n(X)$, принимающая выборку как аргумент, называется **статистикой**.

Важно то, что статистика зависит от случайных величин $X_1, \ldots, X_n$, и не зависит от θ.

Пример. Выборочное среднее $\overline{X_n}$ является статистикой

$$T(X) = \overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Когда проводится серия независимых экспериментов с функцией распределения F_θ (θ неизвестно), мы получаем выборку $X = (X_1, \ldots, X_n)$. По выборе хочется определить значение $\widehat{\theta}$, которое в каком-либо смысле близко к реальному θ.

Определение. Статистика $\widehat{\theta}(X_1, \ldots, X_n)$ со значением из множества параметров Θ называется **оценкой** неизвестного параметра.

1.2. Несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность оценок.

Хотим, чтобы оценка $\widehat{\theta}(X)$ была в каком-то смысле близка к реальному θ. Далее описаны вещи, под которыми можно понимать близость.

Определение. Оценка $\widehat{\theta}_n(X)$ является **несмещенной**, если $\mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X)\right] = \theta$.

Напомним, что последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X *по вероятности*, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[|X_n - X| \geqslant \varepsilon] = 0.$$

Определение. Оценка $\widehat{\theta}_n(X)$ является **состоятельной**, если $\widehat{\theta}_n(X) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}_\theta} \theta$ для любого $\theta \in \Theta$.

Обычно состоятельность оценки является следствием закона больших чисел.

Пример. Пусть $\widehat{\theta}_n = \overline{X_n} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ и $\mathrm{E}[X_1] = \theta$. Тогда $\widehat{\theta}_n = \overline{X_n} \xrightarrow[\text{ЗБЧ}]{\mathrm{P}} \mathrm{E}[X_1] = \theta$, откуда следует, что оценка $\widehat{\theta}_n$ состоятельная.

Напомним, что последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X *почти наверное*, если выполняется $\mathrm{P}\left[\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X\right] = 1$.

Определение. Оценка $\widehat{\theta}_n(X)$ является **сильно состоятельной**, если $\widehat{\theta}_n(X) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \theta$ для любого $\theta \in \Theta$.

Напомним, что последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X *по распределению*, если $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ в каждой точке x, где непрерывна F_X.

Определение. Оценка $\widehat{\theta}_n(X)$ является **асимптотически нормальной** оценкой параметра θ с коэффициентом $\sigma^2(\theta)$, если

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}_\theta} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta)),$$

что эквивалентно $\dfrac{\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right)}{\sigma(\theta)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}_\theta} \mathcal{N}(0,1)$.
Коэффициент $\sigma^2(\theta)$ называется асимптотической дисперсией.

Определение. Пусть K это некое множество (класс) оценок (например, K — несмещенные оценки).
Оценка $\widehat{\theta}_n(X) \in K$ является **эффективной в классе** K, если для каждого $\theta \in \Theta$ и для каждой оценки $\theta_n^* \in K$ выполняется

$$\mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right]^2 \leqslant \mathrm{E}_\theta\left[\theta_n^*(X) - \theta\right]^2.$$

Если K это класс несмещенных оценок, то условие можно переписать следующим образом:

$$\mathrm{D}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X)\right] \leqslant \mathrm{D}_\theta\left[\theta_n^*(X)\right]$$

Определение. Несмещенную оценку $\widehat{\theta}_n(X)$ в классе всех несмещенных оценок будем называть просто **эффективной**.

1.3. Пример отсутствия несмещенной оценки.

Пример. Пусть X_i это случайная величина Бернулли, то есть X_i принимает значение 1 с вероятностью $p \in (0;1)$ и 0 с вероятностью $1-p$, и $\theta = \sin(p)$.
Запишем математическое ожидание оценки по определению:

$$\mathrm{E}\left[\widehat{\theta}_n(X)\right] = \sum_{(x_1,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n} \widehat{\theta}_n(x_1,\ldots,x_n)\cdot p^{x_1+\cdots+x_n}\cdot(1-p)^{n-x_1-\cdots-x_n}.$$

То есть математическое ожидание оценки это некий полином от p, а полином не может быть равняться $\sin p$, поэтому оценка не может быть несмещенной. Вместо синуса можно было рассмотреть что-то другое.

1.4. Отсутсвие эффективной оценки в классе всех оценок.

Утверждение. Не существует эффективной оценки в классе всех оценок.

Доказательство. Пусть $\widehat{\theta}_n(X)$ эффективна в классе всех оценок. Тогда должно выполняться

$$\mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right]^2 \leqslant \mathrm{E}_\theta\left[\theta_n^*(X) - \theta\right]^2$$

для любой $\theta_n^*(X)$. В том числе, это должно выполняться для любой $\theta_n^*(X) = C = \mathrm{const}$:

$$\mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right]^2 \leqslant \mathrm{E}_\theta\left[C - \theta\right]^2.$$

Это неравенство также должно выполняться для любого θ. В частности, для $\theta = C$. Тогда

$$\mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right]^2 \leqslant 0.$$

Это означает, что $\widehat{\theta}_n(X) = C$ почти наверное. Но мы ведь могли взять и другое $C' \neq C$ и ровно по тем же соображениям получить

$$\widehat{\theta}_n(X) = C \neq C' = \widehat{\theta}_n(X).$$

Пришли к противоречию. ■

Следующего утверждения нет в программе коллоквиума, но тем не менее оно полезное.

Утверждение. Если эффективная оценка существует, то она единственная.

Доказательство. Пусть $\widehat{\theta}_n(X)$ и $\theta_n^*(X)$ — эффективные оценки.
Тогда по определению эффективности:

- $\mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X)\right] = \theta = \mathrm{E}_\theta\left[\theta_n^*\right]$ для любого θ.
- $\mathrm{D}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X)\right] \leqslant \mathrm{D}_\theta\left[\tilde{\theta}(X)\right]$ и $\mathrm{D}_\theta\left[\theta_n^*(X)\right] \leqslant \mathrm{D}_\theta\left[\tilde{\theta}(X)\right]$ для любой несмещенной $\tilde{\theta}_n(X)$.

Рассмотрим полусумму $T_n = \dfrac{\widehat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}$. T_n является несмещенной оценкой (по свойству для суммы математического ожидания).
Кратко напомним, что $\mathrm{cov}(\xi, \nu)$ это билинейная форма и по неравенству параллелограмма

$$\mathrm{cov}(\xi+\nu, \xi+\nu) + \mathrm{cov}(\xi-\nu, \xi-\nu) = 2 \cdot \mathrm{cov}(\xi, \xi) + 2 \cdot \mathrm{cov}(\nu, \nu).$$

Делим обе части на 4, вспоминаем, что $\mathrm{D}[\xi] = \mathrm{cov}(\xi, \xi)$, и получаем

$$\mathrm{D}\left[\frac{\xi+\nu}{2}\right] + \mathrm{D}\left[\frac{\xi-\nu}{2}\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{D}[\xi] + \frac{1}{2}\,\mathrm{D}[\nu].$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_\theta\left[\frac{\widehat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right] &= \frac{\mathrm{D}[\widehat{\theta}_n(X)] + \mathrm{D}[\theta_n^*(X)]}{2} - \mathrm{D}_\theta\left[\frac{\widehat{\theta}_n(X) - \theta_n^*(X)}{2}\right] \\ \text{[вычитается неотрицательное значение (дисперсия)]} &\leqslant \frac{\mathrm{D}[\widehat{\theta}_n(X)] + \mathrm{D}[\theta_n^*(X)]}{2} \\ \text{[так как оценки эффективные]} &\leqslant \mathrm{D}_\theta\left[\frac{\widehat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right]. \end{aligned}$$

Последнее равенство может показаться неочевидным. Так как $\widehat{\theta}_n(X)$ это эффективная оценка, выполняется неравенство

$$\mathrm{D}_\theta[\widehat{\theta}_n(X)] \leqslant \mathrm{D}_\theta\left[\frac{\widehat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right] \iff \frac{1}{2}\,\mathrm{D}_\theta[\widehat{\theta}_n(X)] \leqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{D}_\theta\left[\frac{\widehat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right].$$

Аналогичное неравенство получается и для оценки $\theta_n^*(X)$. Суммируем эти два неравенства и получаем

$$\frac{\mathrm{D}_\theta[\widehat{\theta}_n(X)] + \mathrm{D}_\theta[\theta_n^*(X)]}{2} \leqslant \mathrm{D}_\theta\left[\frac{\widehat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right].$$

Мы закончили тем же, с чего и начали. Тогда все неравенства это равенство. Значит, $\mathrm{D}_\theta\left[\dfrac{\widehat{\theta}_n(X) - \theta_n^*(X)}{2}\right] = 0$.
Из этого следует, что

$$\widehat{\theta}_n(X) - \theta_n^*(X) = \mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X) - \theta_n^*(X)\right] = \mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X)\right] - \mathrm{E}_\theta\left[\theta_n^*(X)\right] = \theta - \theta = 0.$$

Получается, $\widehat{\theta}_n(X) = \theta_n^*(X)$ почти наверное. ∎

1.5. Состоятельность асимптотической нормальной оценки.

Утверждение. Если оценка асимптотически нормальная, то она состоятельная.

Доказательство. Пусть $\widehat{\theta}_n(X)$ — асимптотически нормальная оценка параметра θ.
По определению асимптотической нормальности $\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right) \xrightarrow{\mathrm{d}_\theta} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$.
Про сходимость по распределению произведения мы знаем, что если один из пределов сходится к константе, то верна арифметика:

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot Z \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} 0 \cdot Z = 0.$$

Тогда
$$\widehat{\theta}_n(X)-\theta=\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n(X)-\theta\right)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}_\theta}0\cdot\mathcal{N}(0,\sigma^2(\theta))=0.$$
Так как есть сходимость по распределению к константе, то есть сходимость по вероятности к константе (факт с предыдущего коллоквиума):
$$\widehat{\theta}_n(X)-\theta\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}_\theta}0\iff\widehat{\theta}_n(X)\xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}_\theta}\theta,$$
а это и есть определение состоятельности. ∎

2. Метод моментов и его состоятельность. Метод максимального правдоподобия. Энтропия и состоятельность оценки максимального правдоподобия.

2.1. Метод моментов.

Пусть $(X_1,\ldots,X_n)$ — выборка, где X_i задано распределением F_θ. Хотим найти состоятельную оценку параметра θ. Пусть g — непрерывная функция, причём $\mathbb{E}_\theta\left(|g(X_1)|\right)<\infty$. Посчитаем матожидание $\mathbb{E}_\theta\left(g(X_1)\right)=f(\theta)$. Предположим, что $\exists\, f^{-1}$, и она непрерывна. Т.к. на практике мы не знаем параметр θ, то мы не можем посчитать такое матожидание. Но мы можем приближённо посчитать $f(\theta)$ воспользовавшись ЗБЧ.
По ЗБЧ
$$\frac{g(X_1)+\ldots+g(X_n)}{n}\xrightarrow{P}\mathbb{E}_\theta\left(g(X_1)\right)=f(\theta)$$
Теперь в силу обратимости f можно получить сходимость к θ:
$$f^{-1}\left(\frac{g(X_1)+\ldots+g(X_n)}{n}\right)\xrightarrow{P}\theta$$
Оценкой параметра θ назовём функцию $\hat{\theta}(X_1,\ldots,X_n)=f^{-1}\left(\dfrac{g(X_1)+\ldots+g(X_n)}{n}\right)$. Состоятельность оценки очевидна. Вместо ЗБЧ можно применять УЗБЧ, и получить сильную состоятельность.

2.2. Метод максимального правдоподобия.

Определение 1. Обобщённой плотностью ρ_X случайной величины X назовём функцию плотности X, если случайная величина является непрерывно, или функцию $\rho_X(t)=P(X=t)$ в случае, если X имеет дискретное распределение.

Определение 2. Пусть $X=(X_1,\ldots,X_n)$ — выборка из распределения с обобщённой плотностью ρ_θ. Обобщённая плотность вектора X называется функцией правдоподобия, и имеет вид
$$p(X,\theta)=\rho_\theta(X_1)\cdot\ldots\cdot\rho_\theta(X_n)$$
Функцию $\ln p(X,\theta)$ называют логарифмической функцией правдоподобия и обозначают $L(X,\theta)$.

Определение 3. Пусть ρ_0,ρ_1 — положительные вероятностные плотности. Выражение
$$\int\ln\frac{\rho_1(x)}{\rho_0(x)}\cdot\rho_1(x)dx$$
называется энтропией распределения с плотностью ρ_1 относительно распределения с плотностью ρ_0.

Замечание. Здесь и далее интергралы без пределов интегрирования обозначают интегрирование по множеству, на котором задано распределение. Они вовсе не означают неопределённый интеграл.

Следующее утверждение показывает, что энтропия в некотором смысле оценивает расстояние между распределениями:

Лемма. (Информационное неравенство)
Пусть ρ_0,ρ_1 — положительные вероятностные плотности. Тогда
$$\int\ln\frac{\rho_1(x)}{\rho_0(x)}\cdot\rho_1(x)dx\geqslant0$$
Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\rho_0=\rho_1$.

Доказательство. Домножим обе части неравенства на (-1) и будем выводить оценку сверху:

$$\int \ln \frac{\rho_0(x)}{\rho_1(x)} \cdot \rho_1(x) dx \overset{?}{\leqslant} 0$$

Воспользуемся неравенством $\ln x \leqslant x-1$ (очевидно, если, например, посмотреть на графики этих функций: у них есть единственное пересечение в точке $x=1$):

$$\ln \frac{\rho_0(x)}{\rho_1(x)} \rho_1(x) \leqslant \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right) \rho_1 = \rho_0 - \rho_1$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \ln \frac{\rho_0(x)}{\rho_1(x)} \cdot \rho_1(x) dx \leqslant \int \rho_0(x) dx - \int \rho_1(x) dx$$

Оба интеграла слева равны 1, в силу того, что под интегралами стоят плотности. Таким образом оценку сверху мы доказали, найдём теперь, когда достигается равенство.
Пусть в неравенстве достиглось равенство, т.е. известно, что

$$\int \ln \frac{\rho_0(x)}{\rho_1(x)} \cdot \rho_1(x) dx = 0 \qquad \int \rho_0(x) dx - \int \rho_1(x) dx = 0 \iff \int \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right) dx = 0$$

Тогда

$$\int \left(\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right) - \ln \frac{\rho_0}{\rho_1}\right) \rho_1 dx = 0$$

Так как $\ln x \leqslant x - 1$, то $0 \leqslant x - 1 - \ln x$, и функция в скобках неорицательна. Теперь очевидно, что 0 достигается только в случае $\rho_0 = \rho_1$:

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right) - \ln \frac{\rho_0}{\rho_1} = 0 \iff \left(\frac{\rho_0}{\rho_1} - 1\right) = \ln \frac{\rho_0}{\rho_1} \iff \rho_0 = \rho_1$$

■

Вывели утверждение, которое показывает, что энтропия, в некотором смысле оценивает расстояние между плотностями, т.е. расстояние между распределениями. Теперь будем применять это утверждение для построения оценки.
Пусть есть выборка $X = (X_1, \ldots, X_n)$ из распределения с обобщённой плотностью ρ_θ. Пусть реальное значение параметра θ равно θ_1. Рассмотрим функцию следующего вида:

$$W(\theta) = \mathbb{E}_{\theta_1} \ln \rho_\theta(X_1) = \int \ln \rho_\theta(x) \rho_{\theta_1}(x) dx$$

Можно показать, что $W(\theta) \leqslant W(\theta_1) \,\forall\, \theta$, действительно:

$$W(\theta) - W(\theta_1) = \int \ln \rho_\theta(x) \rho_{\theta_1}(x) dx - \int \ln \rho_{\theta_1}(x) \rho_{\theta_1}(x) dx = \int \ln \frac{\rho_\theta(x)}{\rho_{\theta_1}(x)} \rho_{\theta_1}(x) dx \leqslant 0$$

Причём наибольшее значение $W(\theta)$ достигается при $\theta = \theta_1$. Таким образом можно естественно оценить реальный параметр, если найти точку максимума функции $W(\theta)$. В чём проблема: мы не знаем ρ_{θ_1}, и потому функция $W(\theta)$ нам так же не известна. Решение проблемы: $W(\theta)$ это некоторое матожидание. По ЗБЧ известно, что выборочное среднее по вероятности сходится к матожиданию. Т.е.

$$\frac{\ln \rho_\theta(X_1) + \ldots + \ln \rho_\theta(X_n)}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}_{\theta_1} \ln \rho_\theta(X_1) = W(\theta)$$

Немного преобразуем левую часть:

$$\frac{\ln \rho_\theta(X_1) + \ldots + \ln \rho_\theta(X_n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \rho_\theta(X_i) = \frac{1}{n} L(X, \theta)$$

Таким образом, вместо того, чтобы искать максимум неизвестной функции, мы будем искаль максимум того, что к ней приближается, и найденное значение и будем называть **оценкой максимального правдоподобия**.

Определение 4. Оценкой максимального правдоподобия параметра θ называется максимум функции $L(X, \theta)$.

Предложение. (Состоятельность оценки максимального правдоподобия.)
Пусть $\theta \in (a, b)$, и на этом отрезке функция $\theta \to L(X, \theta)$ имеет единственную точку локального максимума $\hat{\theta}$. Тогда $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta_0$.

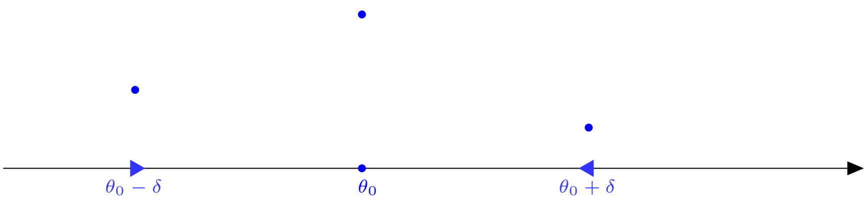
Доказательство. Будем пользоваться тем, что $\frac{1}{n}L(X,\theta) \xrightarrow{P} W(\theta)$. Хотим доказать, что $P(|\hat\theta - \theta_0| \geqslant \delta) \to 0 \,\forall\, \delta > 0$ (просто определение сходимости по вероятности). Рассмотрим точки $\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta$. Про эти точки известно следующее:

$$\begin{cases} W(\theta_0) > W(\theta_0 - \delta) \xleftarrow{P} \frac{1}{n}L(X,\theta_0 - \delta) \\ W(\theta_0) > W(\theta_0 + \delta) \xleftarrow{P} \frac{1}{n}L(X,\theta_0 + \delta) \end{cases}$$

Можно ожидать, что при достаточно большом n, с вероятностью, близкой к 1 будут выполнены неравенства

$$\begin{cases} \frac{1}{n}L(X,\theta_0) > \frac{1}{n}L(X,\theta_0 - \delta) \\ \frac{1}{n}L(X,\theta_0) > \frac{1}{n}L(X,\theta_0 + \delta) \end{cases}$$

Посмотрим теперь на функцию $\theta \to L(X,\theta)$:



Ясно, что на интервале $(\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ сущетвует точка, значение в которой строго больше, чем на концах, а значит, функция имеет на этом отрезке точку локального максимума. Т.е. для точки локального максимума $\hat\theta$ выполнено $|\hat\theta - \theta_0| < \delta$. Чтобы завершить доказательство, нужно обосновать фразу "при достаточно большом n, с вероятностью, близкой к 1...". Другими словами, хотим доказать, что

$$P\left(\frac{1}{n}L(X,\theta_0 - \delta) < \frac{1}{n}L(X,\theta_0)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Положим $W(\theta_0) - W(\theta_0 - \delta) = \varepsilon > 0$. Из ЗБЧ следует, что

$$\begin{cases} P\left(\left|\frac{1}{n}L(X,\theta_0 - \delta) - W(\theta_0 - \delta)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\right) \to 0 \\ P\left(\left|\frac{1}{n}L(X,\theta_0) - W(\theta_0)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\right) \to 0 \end{cases}$$

Поймём, почему из этого следует, что $P\left(\frac{1}{n}L(X,\theta_0 - \delta) \geqslant \frac{1}{n}L(X,\theta_0)\right) \to 0\,(*)$. Пусть величины $\frac{1}{n}L(X,\theta_0 - \delta)$ и $W(\theta_0 - \delta)$ отличаются менее, чем на $\frac{\varepsilon}{4}$. Аналогично для $\frac{1}{n}L(X,\theta_0)$ и $W(\theta_0)$. Тогда верна следующая цепочка равенств:

$$W(\theta_0) \leqslant \frac{1}{n}L_n(X,\theta_0) + \frac{\varepsilon}{4} \overset{(1)}{\leqslant} \frac{1}{n}L_n(X,\theta_0 - \delta) + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant W(\theta_0 - \delta) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Переход (1) следует из неравенства $(*)$. Тогда мы получаем, что $W(\theta_0) - W(\theta_0 - \delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Но $W(\theta_0) - W(\theta_0 - \delta) = \varepsilon$, и получается противоречие. Значит, или $\frac{1}{n}L(X,\theta_0 - \delta)$ и $W(\theta_0 - \delta)$ отличаются более, чем на $\frac{\varepsilon}{4}$, или же величины $\frac{1}{n}L(X,\theta_0)$ и $W(\theta_0)$. Но тогда мы получаем, что исход из события $\{\frac{1}{n}L(X,\theta_0 - \delta) \geqslant \frac{1}{n}L(X,\theta_0)\}$ лежит в объединении

$$\{\left|\frac{1}{n}L(X,\theta_0 - \delta) - W(\theta_0 - \delta)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\} \cup \{\left|\frac{1}{n}L(X,\theta_0) - W(\theta_0)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\}$$

А вероятность таких событий стремится к нулю. Теперь методом пристального взгляда можно заметить, что мы всё доказали. ■

3. Информация Фишера и неравенство Рао-Крамера. Критерий равенства в неравенстве Рао-Крамера.

4. Доверительные интервалы. Различимые методы построения доверительных интервалов (с помощью неравенств на вероятность больших уклонений, с помощью центральной статистики, с помощью асимптотически нормальной оценки). Примеры.

4.1. Доверительные интервалы

Знать, что оценка $\hat{\theta}_n(X)$ состоятельна (сходится по вероятности к θ) это, конечно, круто, но особо много информации о ней нам не даёт. Нам хотелось бы знать как быстро она куда-то там сходится – хотим для фиксированного $\alpha \in (0,1)$ и фиксированного $\varepsilon > 0$ знать такой номер n, что $P_\theta(|\hat{\theta}_n(X) - \theta| < \varepsilon) > 1 - \alpha$.

Определение. $(\hat{\theta}_1(X), \hat{\theta}_2(X))$ — доверительный интервал уровня доверия $1-\alpha$, если

$$P_\theta(\theta \in (\hat{\theta}_1(X), \hat{\theta}_2(X))) \geqslant 1 - \alpha$$

$$P_\theta(\hat{\theta}_1(X) \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_2(X)) \geqslant 1 - \alpha$$

Определение. Последовательность оценок $\hat{\theta}_1^n(X), \hat{\theta}_2^n(X)$ образует асимтотический доверительный интервал, если $\liminf\limits_{n\to\infty} P_\theta(\hat{\theta}_1^n(X) \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_2^n(X)) \geqslant 1 - \alpha$

Пример. Пусть есть выборка из случайных величин с нормальным распределением $X_j \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$.
Знаем, что $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{P_\theta} \theta$ (ЗБЧ) — среднее хорошо приближает θ.

Посмотрим на разность эмпирического среднего и реальной θ: $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \theta = \dfrac{\overbrace{(X_1 - \theta)}^{\sim\mathcal{N}(0,1)} + \cdots + \overbrace{(X_n - \theta)}^{\sim\mathcal{N}(0,1)}}{n} \sim \mathcal{N}(0, \dfrac{1}{n})$
$\implies \sqrt{n}(\dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \theta) \sim \mathcal{N}(0,1)$
Теперь по таблице значений функции распределения нормального закона найдём квантили $z_{\frac{\alpha}{2}}$ и $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$: $\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = \dfrac{\alpha}{2}, \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
$\implies$

$$P_\theta(z_{\frac{\alpha}{2}} \leqslant \sqrt{n}(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \theta) \leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}}) - \Phi(z_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$
$$P(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} - \overline{X_n} \leqslant -\theta \leqslant \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} - \overline{X_n}) = 1 - \alpha$$
$$P(\overline{X_n} - \frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leqslant \theta \leqslant \overline{X_n} - \frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

Заметим, что мы взяли симметричный интервал: $z_{\frac{\alpha}{2}} = -z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. В таком случае наш интервал принимает вид: $(\overline{X_n} - \dfrac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}, \overline{X_n} + \dfrac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}})$. В таком случае длина этого интервала равна $O(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$
Но зачем мы решили взять симметричный интервал? Вспомним, что мы от него хотим: минимальной длины. А какой интервал на графике нормального распределения будет захватывать нужную площадь и при этом быть самым коротким среди всех? Правильно, симметричный с центром в пике колокола нормального распределения.

4.2. Различимые методы построения доверительных интер-валов (с помощью неравенств на вероятность больших уклонений, с помощью цен-тральной статистики, с помощью асимптотически нормальной оценки)

1. Неравенства Чебышёва или Чернова

   $X_1, \ldots, X_n \sim \mathrm{Bern}(\theta), P(X_j = 1) = \theta$

   Чебышёв:

   $P_\theta(|\overline{X_n} - \theta| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{D}X_1}{n\varepsilon^2} = \dfrac{\theta(1-\theta)}{n\varepsilon^2} \leqslant \dfrac{1}{4n\varepsilon^2} = \alpha \implies \varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{2n\alpha}} \implies P_\theta(\overline{X_n} - \dfrac{1}{\sqrt{2n\alpha}} < \theta < \overline{X_n} + \dfrac{1}{\sqrt{2n\alpha}}) \geqslant 1 - \alpha.$

Чернов: $P_\theta(|\overline{X_n}-\theta|\geqslant\varepsilon)\leqslant 2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{4}}=\alpha$
$-\dfrac{n\varepsilon^2}{4}=\ln\dfrac{\alpha}{2}$
$\varepsilon=2\sqrt{-\dfrac{\ln\frac{\alpha}{2}}{n}}$
$\implies P_\theta(\overline{X_n}-2\sqrt{-\dfrac{\ln\frac{\alpha}{2}}{n}}<\theta<\overline{X_n}+2\sqrt{-\dfrac{\ln\frac{\alpha}{2}}{n}})\geqslant 1-\alpha$

Заметим, что в обоих оценках мы получили, что длина интервала равна $\mathrm{O}(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$, но несложно заметить, что константа Чернова значительно лучше, чем у Чебышёва.

2. Метод центральной статистики

Определение. $\mathrm{V}(X,\theta)$ называется центральной статистикой, если:

(a) её распределение не зависит от θ: $P_\theta(\mathrm{V}(X,\theta)\leqslant t)=F(t)$

(b) $\forall X:\theta\mapsto\mathrm{V}(X,\theta)$ — монотонная

Пусть у нас есть такая статистика. Вопрос: как с её помощью строить доверительные интервалы? Предельно просто: подберём числа t_1 и t_2 таким образом, чтобы $P_\theta(t_1\leqslant\mathrm{V}(X,\theta)\leqslant t_2)\geqslant 1-\alpha$. Мы можем так сделать, потому что распределение V не зависит от θ. Теперь поскольку при любом X наша функция монотонна, то данная оценка равносильна тому, что $P_\theta(\hat\theta_1(X)\leqslant\theta\leqslant\hat\theta_2(X))\geqslant 1-\alpha$ — чисто из-за монотонности по θ.

Пример. $X_j\sim\mathcal{U}(0,\theta)\implies\theta^{-1}X_j\sim\mathcal{U}(0,1)$. Это уже центральная статистика, однако она зависит всего от одного элемента выборки. Рассмотрим $X_{(n)}=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}X_j$: $P_\theta(\theta^{-1}X_{(n)}\leqslant t)=P_\theta(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\theta^{-1}X_j\leqslant t)=\prod\limits_{j=1}^{n}P_\theta(\underbrace{\theta^{-1}X_j}_{\sim\mathcal{U}(0,1)}\leqslant t)=t^n$

Теперь грубо попробуем оценить, куда там наша статистика попадает:

$P_\theta(\underbrace{t}_{t_1}\leqslant\theta^{-1}X_{(n)}\leqslant\underbrace{1}_{t_2})=1-t^n=1-\alpha\implies t=\alpha^{\frac{1}{n}}$

Теперь попробуем вытащить отсюда θ:

$P_\theta(\alpha^{\frac{1}{n}}\leqslant\theta^{-1}X_{(n)}\leqslant 1)=1-\alpha$
$P_\theta(\dfrac{\alpha^{\frac{1}{n}}}{X_{(n)}}\leqslant\theta^{-1}\leqslant\dfrac{1}{X_{(n)}})=1-\alpha$
$P_\theta(\underbrace{X_{(n)}}_{\hat\theta_1(X)}\leqslant\theta\leqslant\underbrace{\dfrac{X_{(n)}}{\alpha^{\frac{1}{n}}}}_{\hat\theta_2(X)})=1-\alpha$

Теперь посмотрим на длину полученного доверительного интервала:

$(\alpha^{-\frac{1}{n}}-1)X_{(n)}$

Что мы можем сказать про $\alpha^{-\frac{1}{n}}-1$? Разложим это дело по Тейлору:

$\alpha^{-\frac{1}{n}}-1\sim e^{-\frac{\ln\alpha}{n}}-1\sim\dfrac{-\ln\alpha}{n}=\underline{\mathrm{O}}(\dfrac{1}{n})\to\infty$

Получается длина доверительного интервала с ростом количества элементов выборки стремится к нулю. Получается мы построили что-то более менее разумное.

Часто в роли центральной статистики можно взять следующую лабуду: $\mathrm{V}(X,\theta)=-\sum\limits_{j=1}^{n}\ln F_\theta(X_j)$ — это сумма независимых распределений, поэтому достаточно показать что одно не зависит от θ — тогда в силу независимости сумма тоже будет не зависеть от θ:

$P_\theta(-\ln F_\theta(X_j)\leqslant)=P_\theta(F_\theta(X_j)\geqslant e^{-t})=P_\theta(X_j\geqslant F_\theta^{-1}(e^{-t}))=1-F_\theta(F_\theta^{-1}(e^{-t}))=1-e^{-t}$, а это экспоненциальное распределение. Сумма экспоненциальных распределений это Гамма распределение $\implies\mathrm{V}(X,\theta)=\Gamma(n,1)$

3. Построение асимптотических доверительных интервалов

Пусть у нас есть $\hat{\theta}_n(X)$ — асимптотически нормальная оценка θ с асимптотической дисперсией $\sigma^2(\theta)$. Это значит, что
$\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n(X)-\theta)}{\sigma(\theta)} \xrightarrow{d_\theta} Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

Теперь мы хотим получить доверительный интервал. Если бы у нас $\sigma(\theta)$ была константой, то мы могли бы уже привычно взять там квантили нормального распределения, туды сюды и получить интервал:

$P_\theta(t_1 \leqslant \frac{\sqrt{n}(\hat{\theta}_n(X)-\theta)}{\sigma(\theta)} \leqslant t_2) \to \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = 1-\alpha.$

Тогда мы могли бы просто взять такие $\Phi(t_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ и $\Phi(t_1) = \frac{\alpha}{2}$ и получить, что

$P_\theta(\hat{\theta}_n(X) - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(\theta)}{\sqrt{n}} \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_n(X) + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(\theta)}{\sqrt{n}}) \to 1-\alpha$

Но тут есть проблема — у нас слева и справа есть $\sigma(\theta)$ в числителе, что совершенно ломает корректность статистики, мы ведь хотим чтобы штуки слева и спрва от θ в неравенстве не зависили от θ. Как это решать? Очень просто, перейти от $\sigma(\theta)$ к состоятельной оценке $\sigma(\theta)$. Возможны следующие случаи:

(a) σ — непрерывная функция
Тогда $\sigma(\hat{\theta}_n(X)) \xrightarrow{P_\theta} \sigma(\theta)$ и мы можем везде в наших рассуждениях заменить $\sigma(\theta)$ на $\sigma(\hat{\theta}_n(X))$ и сходимость сохранится:
$P_\theta(\hat{\theta}_n(X) - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(\hat{\theta}_n(X))}{\sqrt{n}} \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_n(X) + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(\hat{\theta}_n(X))}{\sqrt{n}}) \to 1-\alpha$

(b) Изначально было ЦПТ
$\hat{\theta}_n(X) = \overline{X_n}, \sigma^2(\theta) = \mathbb{D}_\theta X$
В таком случае мы можем использовать выборочную дисперсию в качестве состоятельной оценки дисперсии:
$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X_n})^2$ — выборочная дисперсия

(c) Можно поправить нашу асимптотическую дисперсию: подобрать такую функцию φ, что
$\sqrt{n}(\varphi(\hat{\theta}_n(X)) - \varphi(\theta)) \to \underbrace{\mathcal{N}(0,1)}_{=\varphi'(\theta)\cdot\mathcal{N}(0,\sigma^2(\theta))} \implies \varphi'^2(\theta)\sigma^2(\theta) = 1$

5. Построение точных доверительных интервалов для параметров нормального распределения.

6. Проверка гипотез. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень значимости и мощность статистического критерия. Пример построения критерия с помощью доверительного интеграла. Нижняя оценка суммы вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода.

7. Теорема Неймана-Пирсона и пример её применения.

7.1. Теорема Неймана-Пирсона.

Пусть гипотеза H_0 утверждает, что плотность выборки – это f_0, а альтернативная гипотеза H_1 утверждает, что плотность выборки – это f_1.
Предположим, что $\forall\alpha \in [0,1]\ \exists t := t(\alpha) : P_0(f_1(x) \geqslant tf_0(x)) = \alpha$.

Теорема (Неймана-Пирсона)**.** В такой постановке наиболее мощный критерий уровня значимости α имеет вид $K_{t(\alpha)} := \{f_1(x) \geqslant t(\alpha)f_0(x)\}$.

Доказательство. Пусть S – тоже критерий уровня значимости α: $P_0(X \in S) \leqslant \alpha = P_0(X \in K_{t(\alpha)})$. Хотим сравнить $P_1(X \in K_{t(\alpha)}) - P_1(X \in S)$. Хотим, чтобы это было больше либо равно нуля. Это и будет означать, что у нас критерий наиболее мощный.

$P_1(X \in K_{t(\alpha)}) - P_1(X \in S) = \int\limits_{K_{t(\alpha)}} f_1 dx - \int\limits_S f_1 dx =$ [можем выкинуть пересечение, так как на пересечении эти интегралы просто сократятся] $= \int\limits_{K_{t(\alpha)} \setminus S} f_1 dx - \int\limits_{S \setminus K_{t(\alpha)}} f_1 dx.$

Заметим, что на $S \setminus K_{t(\alpha)}$ выполнено $f_1 < t(\alpha) f_0$, так как это взято из дополнения к $K_{t(\alpha)}$, где по условию выполняется $f_1(x) \geqslant t(\alpha) f_0(x)$. Поэтому имеем: $\int\limits_{K_{t(\alpha)} \setminus S} f_1 dx - \int\limits_{S \setminus K_{t(\alpha)}} f_1 dx \geqslant t(\alpha) \int\limits_{K_{t(\alpha)} \setminus S} f_0 dx - t(\alpha) \int\limits_{S \setminus K_{t(\alpha)}} f_0 dx =$ [снова добавим пересечение и вынесем $t(\alpha)$] $= t(\alpha) \cdot (\int\limits_{K_{t(\alpha)}} f_0 dx - \int\limits_S f_0 dx) = t(\alpha) \cdot (P_0(X \in K_{t(\alpha)}) - P_0(X \in S)) \geqslant 0$ из построения критерия S $(P_0(X \in S) \leqslant \alpha = P_0(X \in K_{t(\alpha)}))$.

Получили: $P_1(X \in K_{t(\alpha)}) - P_1(X \in S) \geqslant 0$, что и требовалось доказать. ∎

7.2. Пример применения теоремы Неймана-Пирсона.

Пример. Пусть у нас выборка из нормального закона $N(\theta, 1)$. Пусть наша гипотеза H_0 говорит, что $\theta = \theta_0$, а альтернативная гипотеза H_1 говорит, что $\theta = \theta_1 > \theta_0$.

$$f_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (X_j - \theta_1)^2 \right)$$
$$f_0(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (X_j - \theta_0)^2 \right)$$

Зададим критерий K_t из теоремы Неймана-Пирсона (ничего в 0 не обращается – сразу можем поделить):
$K_t = \left\{ \dfrac{f_1}{f_0} \geqslant t \right\} = \left\{ exp\left(\dfrac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^n [(X_j - \theta_0)^2 - (X_j - \theta_1)^2] \right) \geqslant t \right\} =$ [логарифмируем, расскрываем скобки, умножаем на два] $= \left\{ \sum\limits_{j=1}^n [2X_j(\theta_1 - \theta_0) + n(\theta_0^2 + \theta_1^2)] \geqslant 2 \ln t \right\} = \left\{ (\theta_1 - \theta_0)\overline{X_n} \geqslant \dfrac{\ln t}{n} - \dfrac{(\theta_0^2 + \theta_1^2)}{2} \right\} =$ [по условию $\theta_1 > \theta_0 \Rightarrow$ поделим] $= \left\{ \overline{X_n} \geqslant \dfrac{\dfrac{\ln t}{n} - \dfrac{(\theta_0^2 + \theta_1^2)}{2}}{\theta_1 - \theta_0} \right\}$

Таким образом пришли к тому, что $K_t = \left\{ \dfrac{f_1}{f_0} \geqslant t \right\}$ равносильно множеству $\widetilde{K}_s = \{ \overline{X_n} \geqslant s \}$. Равносильно в том смысле, что для каждого t мы можем подобрать $s(t)$, что множество K_t совпадает с $\widetilde{K}_{s(t)}$. Теперь будем искать критические множества именно в таком виде (для удобства).

Должно выполняться: $P_0(X \in K_t) = \alpha \Leftrightarrow P_0(X \in \widetilde{K}_{s(t)}) = \alpha$. А что это за вероятности? Это вероятность
$P_{\theta_0}(\overline{X_n} \geqslant s) = \alpha$
То есть, $P_{\theta_0}(\sqrt{n}(\overline{X_n} - \theta_0) \geqslant \sqrt{n}(s - \theta_0)) = \alpha$, где $\sqrt{n}(\overline{X_n} - \theta_0) \sim N(0, 1)$, поэтому тут просто написано,
что $1 - \Phi(\sqrt{n}(s - \theta_0)) = \alpha$.

Значит, выбираем квантиль нормального закона уровня $1 - \alpha$: $Z_{1-\alpha} = \sqrt{n}(s - \theta_0) \Rightarrow$
$s = \theta_0 + \dfrac{Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$. Выразили s.

Таким образом, наше критическое множество $\left\{ \overline{X_n} \geqslant \theta_0 + \dfrac{Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \right\}$. Это критерий уровня значимости α.

Теперь посчитаем мощность (это же самый мощный критерий):
$P_{\theta_1}\left(\overline{X_n} \geqslant \theta_0 + \dfrac{Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}} \right) = P_{\theta_1}\left(\sqrt{n}(\overline{X_n} - \theta_1) \geqslant \sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1) + Z_{1-\alpha} \right) = 1 - \Phi(\sqrt{n}(\theta_0 - \theta_1) + Z_{1-\alpha})$.

Заметим, что если объём выборки n устремить к бесконечности, то точка, в которой мы берём Φ стремится к минус бесконечности (так как $(\theta_0 - \theta_1) < 0$ по условию), поэтому мощность стремится к 1.

По теореме Неймана-Пирсона выписанная мощность максимальна.

8. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко-Кантелли.