

# Математический анализ 2, Коллоквиум IV

Версия от 15.06.2021 11:46

## Содержание

1.	Кусочно-гладкая кривая и её длина. Элемент длины для параметрически заданной кривой. Криволинейный интеграл I-го рода. . . . .	3
1.1.	Кусочно-гладкая кривая и её длина. . . . .	3
1.2.	Элемент длины для параметрически заданной кривой. . . . .	3
1.3.	Криволинейный интеграл I-го рода. . . . .	3
2.	Кусочно-гладкая поверхность и её площадь. Элемент площади для параметрически заданной поверхности. Поверхностный интеграл I-го рода. . . . .	3
2.1.	Кусочно-гладкая поверхность . . . . .	3
2.2.	Элемент площади для параметрически заданной поверхности . . . . .	4
2.3.	Поверхностный интеграл I-го рода . . . . .	4
3.	Дифференциальная 1-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую. Ориентация кривой. Криволинейный интеграл II-го рода. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода. . . . .	5
3.1.	Дифференциальная 1-форма в области пространства. . . . .	5
3.2.	Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую. . . . .	5
3.3.	Ориентация кривой. . . . .	5
3.4.	Криволинейный интеграл II-го рода. (КРИ-2) . . . . .	6
3.5.	Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода. . . . .	6
4.	Формула Грина и её приложение к вычислению площади криволинейной фигуры. Внешний дифференциал 2-мерной 1-формы и краткая запись формулы Грина. . . . .	6
4.1.	Формула Грина . . . . .	7
4.2.	Внешний дифференциал 2-мерной 1-формы . . . . .	8
4.3.	Краткая запись формулы Грина . . . . .	8
5.	Дифференциальная 2-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность. Ориентация поверхности и вектор нормали. Поверхностный интеграл II-го рода. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода. . . . .	8
5.1.	Ориентация поверхности и вектор нормали . . . . .	8
5.2.	Дифференциальная 2-форма в области пространства . . . . .	8
5.3.	Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность . . . . .	9
5.4.	Поверхностный интеграл II-го рода . . . . .	9
5.5.	Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода . . . . .	9
6.	Формула Остроградского-Гаусса и её приложение к вычислению объема тела. Внешний дифференциал 3-мерной 2-формы, дивергенция векторного поля и краткая запись формулы Остроградского-Гаусса. . . . .	10
7.	Формула Стокса. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы, ротор векторного поля и краткая запись формулы Стокса. . . . .	10
7.1.	Формула Стокса . . . . .	10

8.	Комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Определения экспоненты $e^z$ и тригонометрических функций $\sin z$ , $\cos z$ . Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$ , $\operatorname{Ln} z$ . . . . .	11
8.1.	Комплексная плоскость. . . . .	11
8.2.	Сфера Римана и стереографическая проекция. . . . .	11
8.3.	Функция комплексной переменной. . . . .	12
8.4.	Определения экспоненты $e^z$ и тригонометрических функций $\sin z$ , $\cos z$ . . . . .	12
8.5.	Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$ , $\operatorname{Ln} z$ . . . . .	13
9.	Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции. Условия Коши–Римана и голоморфность. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Интегральная формула Коши. . . . .	13
9.1.	Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции. . . . .	13
9.2.	Условия Коши–Римана и голоморфность. . . . .	14
9.3.	Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой. . . . .	14
9.4.	Теорема Коши. . . . .	14
9.5.	Интегральная формула Коши. . . . .	14
10.	Голоморфная функция нескольких переменных. Голоморфность композиции (в том числе: суммы, произведения, частного) голоморфных функций. Голоморфность обратной функции. . . . .	15
11.	Аналитическая функция. Аналитичность голоморфной функции. Неравенство Коши для коэффициентов ряда. Радиус сходимости ряда как максимальный радиус круга, в котором функция голоморфна. Теорема Лиувилля. . . . .	16
12.	Бесконечная дифференцируемость и голоморфность аналитической функции. Нуль аналитической функции и его порядок. Изолированность нуля аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции. . . . .	17
13.	Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$ . Теорема Сохоцкого о существенно особой точке. . . . .	19
13.1.	Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность. . . . .	19
13.2.	Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке. . . . .	19
13.3.	Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$ . . . . .	20
13.4.	Теорема Сохоцкого о существенно особой точке. . . . .	20
14.	Ряд Лорана и его сходимость. Единственность разложения Лорана. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек. . . . .	21
14.1.	Ряд Лорана и его сходимость. . . . .	21
14.2.	Единственность разложения Лорана. . . . .	21
14.3.	Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек. . . . .	22
15.	Вычет голоморфной функции в однозначной особой точке. Теорема Коши о вычетах. Вычет как коэффициент $c_{-1}$ ряда Лорана. Вычисления вычета в полюсе. . . . .	23

## 1. Кусочно-гладкая кривая и её длина. Элемент длины для параметрически заданной кривой. Криволинейный интеграл I-го рода.

### 1.1. Кусочно-гладкая кривая и её длина.

**Определение. Область** — это открытое связное (грубо говоря, любые две точки множества могут быть соединены ломаной) множество в  $\mathbb{R}^k$ .

**Определение. Замкнутая область** — это замыкание некоторой области.

**Определение. Жорданова область** — это ограниченная область, измеримая по Жордану.

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^k$  (где  $k \leq m$ ) — замкнутая жорданова область, и  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  — непрерывно дифференцируемая инъективная функция. Рассмотрим  $x \in \mathbb{R}^m$  и  $u \in G$  и определим  $x$  следующим образом:

$$x := \varphi(u) \iff x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_k),$$

причем матрица якоби

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial u_k} \end{pmatrix}$$

имеет максимальный ранг в каждой точке  $u \in G$ .

**Определение.** Образ  $\varphi(G)$  называется **гладкой кривой** при  $k = 1$ .

**Определение.** Если  $L_i$  это гладкая кривая, то их объединение  $L = \bigsqcup_{i=1}^n L_i$  называется **кусочно-гладкой кривой**.

### 1.2. Элемент длины для параметрически заданной кривой.

Пусть даны отрезок  $G = [a; b]$ , непрерывно дифференцируемое отображение  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  и гладкая кривая  $L$ , которая задается через  $G$  и  $\varphi$ .

**Определение.** Длина кривой  $L$  определяется следующим образом

$$\mu(L) := \int_G \sqrt{\det \left( \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right)^T \cdot \left( \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right)} du = \int_a^b \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right| du.$$

### 1.3. Криволинейный интеграл I-го рода.

[Ссылка на лекцию.](#)

Пусть  $L$  — гладкая кривая в  $\mathbb{R}^m$ , то есть  $L = \varphi([a; b])$ , и рассмотрим некую функцию  $f : L \rightarrow \mathbb{R}$ , которая задана на точках кривой.

**Определение.** Криволинейный интеграл первого рода определяется следующим образом:

$$\int_L f(x) dl = \int_a^b f(\varphi(u)) \cdot \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right| du.$$

$dl := \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right| du$  — элемент длины.

## 2. Кусочно-гладкая поверхность и её площадь. Элемент площади для параметрически заданной поверхности. Поверхностный интеграл I-го рода.

### 2.1. Кусочно-гладкая поверхность

**Определение. Область** — это открытое связное (грубо говоря, любые две точки множества могут быть соединены ломаной) множество в  $\mathbb{R}^k$ .

**Определение.** **Замкнутая область** — это замыкание некоторой области.

**Определение.** **Жорданова область** — это ограниченная область, измеримая по Жордану.

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^k$  (где  $k < m$ ) — замкнутая жорданова область, и  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  — непрерывно дифференцируемая инъективная функция. Рассмотрим  $x \in \mathbb{R}^m$  и  $u \in G$  и определим  $x$  следующим образом:

$$x := \varphi(u) \iff x_i = \varphi_i(u_1, \dots, u_k),$$

причем матрица якоби

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial u_k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial x_m}{\partial u_k} \end{pmatrix}$$

имеет максимальный ранг в каждой точке  $u \in G$ .

**Определение.** Образ  $\varphi(G)$  называется **гладкой  $k$ -мерной поверхностью** (при  $k > 1$ ).

**Определение.** Если  $S_i$  это гладкая поверхность, то их объединение  $S = \bigsqcup_{i=1}^n S_i$  называется **кусочно-гладкой поверхностью**.

## 2.2. Элемент площади для параметрически заданной поверхности

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^2$  — это замкнутая жорданова область,  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$  — параметризующее отображение.

**Определение.** **Площадь поверхности  $S$**  определяется как

$$\mu(S) := \iint_G \sqrt{\det \begin{pmatrix} \left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|^2 & \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle \\ \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle & \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|^2 \end{pmatrix}} du dv = \iint_G \sqrt{\left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|^2 \cdot \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|^2 - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle^2} du dv.$$

## 2.3. Поверхностный интеграл I-го рода

[Ссылка на лекцию.](#)

Рассмотрим поверхность  $S := \varphi(G)$ , заданную через замкнутую жорданову область  $G \subset \mathbb{R}^2$  и параметризующее отображение  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

Задана некая функция  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ , которая с одной стороны может принимать  $x \in \mathbb{R}^m$ , а с другой стороны  $u \in G$ :

$$f(x) = f(x_1, x_2, x_3) = f(\varphi_1(u, v), \varphi_2(u, v), \varphi_3(u, v)) = f(\varphi(u, v)).$$

**Определение.** Элемент площади определяется как

$$ds := \sqrt{\left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|^2 \cdot \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|^2 - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle^2} du dv.$$

Поверхностный интеграл первого рода определяется следующим образом:

$$\int_S f(x) ds = \iint_G f(\varphi(u, v)) \cdot \sqrt{\left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|^2 \cdot \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|^2 - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle^2} du dv.$$

### 3. Дифференциальная 1-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую. Ориентация кривой. Криволинейный интеграл II-го рода. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода.

#### 3.1. Дифференциальная 1-форма в области пространства.

**Определение.** Пусть в области  $D \subset \mathbb{R}^n$  определены функции:  $a_1, \dots, a_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ . Тогда **линейной дифференциальной формой**, или **дифференциальной 1-формой** называется следующая линейная комбинация дифференциалов:

$$\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = a_1(\bar{x})dx_1 + \dots + a_n(\bar{x})dx_n.$$

$$(\omega(\bar{x}, d\bar{x}) \text{ — функция от двух векторов, } d\bar{x} = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix} \text{ — вектор, составленный из дифференциалов})$$

Если ввести векторное поле  $\bar{a} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , то соответствующую линейную дифференциальную форму можно записать короче:

$$\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = \langle \bar{a}(\bar{x}), d\bar{x} \rangle$$

Подчеркнём, что линейная дифференциальная форма может быть дифференциалом некоторой функции, а может и не быть. Понятно, что далеко не всякая линейная комбинация дифференциалов окажется дифференциалом какой-то функции.

Физический смысл и примеры: [бац](#).

#### 3.2. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую.

Пусть  $G \subset \mathbb{R}^n$  — произвольный ограниченный промежуток,  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывно дифференцируемое, инъективное и локально инъективное отображение, то есть задаёт гладкую кривую  $L = \varphi(G)$ .

Пусть в  $D \subset \mathbb{R}^n$  определена линейная дифференциальная форма  $\omega(\bar{x}, d\bar{x})$  и пусть  $L \subset D$ .

Введём понятие перенесения функции и формы с помощью отображения  $\varphi$ . Функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  и линейная дифференциальная форма  $\omega$  посредством отображения  $\varphi$  переносятся на кривую  $L$  следующим образом:

$$f(\bar{x}) = f(\varphi(u))$$

Тем самым, мы перешли от функции, заданной в некоторой области пространства, к функции, заданной на кривой.

**Обозначение 1.**  $(\varphi^* f)(u) := f(\varphi(u))$ .

Аналогично перенос посредством отображения  $\varphi$  действует на линейную дифференциальную форму  $\omega$ :

$$\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = \omega(\varphi(u), \frac{d\varphi}{du} \cdot du)$$

**Обозначение 2.**  $(\varphi^* \omega)(u, du) := \omega(\varphi(u), \frac{d\varphi}{du} \cdot du)$ .

#### 3.3. Ориентация кривой.

Пусть  $\psi : H \rightarrow \mathbb{R}^n$  — другая параметризация кривой  $L$ . Тогда

$$(\varphi^* \omega)(u, du) := \omega(\varphi(u), \frac{d\varphi}{du} \cdot du) =$$

Заметим, что  $\bar{x} \in L$  может представляться как  $\varphi(u)$  и как  $\psi(v)$ .

$$= \omega(\psi(v), \underbrace{\frac{d\bar{x}}{dv} \cdot \frac{dv}{du}}_{\frac{d\psi}{dv}} \cdot du) = \omega(\psi(v), \frac{d\psi}{dv} \cdot dv) = (\psi^* \omega)(v, dv)$$

При этом обратим внимание на то, что когда мы делаем замену переменной в дифференциале, якобиан берётся по модулю, поэтому здесь важно, будут ли параметризация функцией  $\varphi$  и параметризация функцией  $\psi$  задавать одинаковую ориентацию или разную ориентацию.

Если эти параметризации задают одинаковую ориентацию на кривой  $L$ , то  $\frac{dv}{du} > 0$ , значит,  $\frac{dv}{du} = \left| \frac{dv}{du} \right|$  — одномерный якобиан. При этом, в случае одинаковой ориентации, как видно из выкладок (а выкладки сделаны для случая с одинаковой ориентацией), дифференциальная форма не зависит от параметризации.

В противном случае (в случае смены ориентации кривой) знак дифференциальной формы меняется.

Что вообще является ориентацией?

**Определение. Ориентацией** является направление движения по кривой.

(Маевский это явно на доске не записывал, но там идёт пример чё то про интегралы. Ссылка на всякий случай: [буп.](#))

### 3.4. Криволинейный интеграл II-го рода. (КРИ-2)

Пусть  $\bar{a}(\bar{x}) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  — непрерывное векторное поле,  $L$  — гладкая кривая в  $D$  с фиксированной ориентацией, тогда:

**Определение. КРИ-2** от дифференциальной формы  $\omega = \langle \bar{a}, d\bar{x} \rangle$  называется:

$$\int_L \omega = \int_L \langle \bar{a}, d\bar{x} \rangle = \int_L a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n = \int_G (\varphi^* \omega) = \int_G \langle \bar{a}, \frac{d\varphi}{du} \rangle du = \int_G (a_1 \frac{d\varphi_1}{du} + \dots + a_n \frac{d\varphi_n}{du}) du$$

( $G$  — всё ещё произвольный одномерный ограниченный промежуток)

В предыдущем пункте мы показали, что дифференциальная форма в случае фиксированной ориентации не зависит от параметризации, поэтому определение корректно.

### 3.5. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода.

Напоминание про КРИ-1:

$$\int_L f(x) dl = \int_G f(\varphi(u)) \left| \frac{d\varphi}{du} \right| du$$

(в силу локальной инъективности  $\left| \frac{d\varphi}{du} \right| \neq 0$ ) Теперь выражение:

$$\underbrace{\int_L \omega}_{\text{КРИ-2}} = \int_G \langle \bar{a}, \frac{d\varphi}{du} \rangle du = \int_G \langle \bar{a}, \frac{d\varphi/du}{|d\varphi/du|} \left| \frac{d\varphi}{du} \right| \rangle du = \underbrace{\int_L \langle \bar{a}, \bar{l} \rangle dl}_{\text{КРИ-1}},$$

где  $\bar{l} = \frac{d\varphi/du}{|d\varphi/du|}$  — единичный вектор касательной к кривой в данной точке.

Заметим, что ориентация задаётся вектором  $\bar{l}$  (ну то есть там либо  $\bar{l}$ , либо  $-\bar{l}$ ).

## 4. Формула Грина и её приложение к вычислению площади куска фигуры. Внешний дифференциал 2-мерный 1-формы и краткая запись формулы Грина.

**Определение.** Область  $D \subset \mathbb{R}^2$  называется  $y$ -проектором (то есть проектируемой вдоль оси  $y$ ), если она задается неравенствами:

$$D : a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x),$$

$h_1, h_2$  - непрерывные функции,  $h_1(x) \leq h_2(x)$

Аналогично вводится  **$x$ -проектор**.

**Определение.** Область называется **проектируемой**, если она является  $x$ - и  $y$ -проектируемой.

**Определение.** Область  $D$  называется **простой**, если она есть объединение конечного числа проектируемых областей.

#### 4.1. Формула Грина

**Теорема.** Пусть  $D$  - простая область с кусочно гладкой границей  $L = \partial D$ , ориентация которой соответствует ориентации области  $D$ . Пусть  $P, Q$  непрерывно дифференцируемы в  $D$ . Тогда:

$$\oint_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

*Доказательство.* 1. Рассмотрим  $y$ -проектируемую область  $D : a \leq x \leq b, h_1(x) \leq y \leq h_2(x)$

$$\begin{aligned} - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dxdy &= - \int_a^b dx \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = - \int_a^b dx (P(x, h_2(x)) - P(x, h_1(x))) = \\ &= - \int_a^b P(x, h_2(x)) dx + \int_a^b P(x, h_1(x)) dx + \int_a^a Pdx + \int_b^b Pdx = \\ &= \int_b^a P(x, h_2(x)) dx + \int_a^b P(x, h_1(x)) dx + \int_a^a Pdx + \int_b^b Pdx = \oint_{\partial D} Pdx \end{aligned}$$

2. Аналогично для  $x$ -проектируемой области  $D$  получим

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_{\partial D} Qdy$$

3.  $D$  -  $x$ - и  $y$ -проектируемая область, то

$$\oint_{\partial D} (Pdx + Qdy) = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

4. (Нет четкой формулировки, записано со слов лектора)

$D$  - простая область. В соседних областях по границе будем интегрировать в правильном направлении. Двойные интегралы (правые части) частей простой области будут складываться по аддитивности. Криволинейные интегралы (при разбиении в суммы) дадут интегралы по внешним границам и интегралы по внутренним границам. Интегралы по всем внутренним кусочкам границы будут взаимно уничтожаться (так как при обходе в противоположных направлениях будут давать разные знаки).

■

## 4.2. Внешний дифференциал 2-мерной 1-формы

**Определение.**  $\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = a_1(\bar{x}) dx_1 + \dots + a_n(\bar{x}) dx_n$

$a_1, \dots, a_n$  - непрерывно дифференцируемы

Внешним дифференциалом формы  $\omega$  называется:

$$d\omega = da_1 \wedge dx_1 + \dots + da_n \wedge dx_n,$$

где  $da_1 = \frac{\partial a_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial a_1}{\partial x_n} dx_n$  - обычный дифференциал.

Операция  $\wedge$  линейна и кососимметрична:

$$dx_1 \wedge dx_2 = -dx_2 \wedge dx_1 \Rightarrow dx_1 \wedge dx_1 = 0$$

**Пример.**  $d(Pdx + Qdy) = dP \wedge dx + dQ \wedge dy = \left( \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$

## 4.3. Краткая запись формулы Грина

$$\begin{aligned} \iint_D d(x, y) dx \wedge dy &= \iint_D f(x, y) dx dy \\ \Rightarrow \oint_{\partial D} \omega &= \iint_D d\omega, \omega = Pdx + Qdy \end{aligned}$$

## 5. Дифференциальная 2-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность. Ориентация поверхности и вектор нормали. Поверхностный интеграл II-го рода. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода.

Пункты переставлены местами для лучшей понимабельности.

### 5.1. Ориентация поверхности и вектор нормали

Пусть  $G$  - область в  $\mathbb{R}^k$  с фиксированным базисом  $u = \{u_1, \dots, u_k\}$ . Пусть  $\varphi: G \rightarrow \mathbb{R}^m$  - непр. дифф. инъективное и локально инъективное отображение.

**Определение.** Ориентацией поверхности  $S = \varphi(G)$  называется ориентация исходного базиса  $u = \{u_1, \dots, u_k\}$ .

В каждой точке поверхности  $S$  задан базис  $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial u_k}$ .  
Рассмотрим случай  $k = 2, m = 3$ .

**Определение.** Вектором нормали к поверхности  $S$  называется векторное произведение  $\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \times \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}$ .

### 5.2. Дифференциальная 2-форма в области пространства

Пусть  $D$  - область в  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение.** Дифференциальной 2-формой называется линейная комбинация базисных 2-форм вида  $dx_i \wedge dx_j$ :

$$\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = \sum_{i < j} a_{ij}(x) \cdot dx_i \wedge dx_j$$

где  $a_{ij}: D \rightarrow \mathbb{R}$



Например, при  $n = 3$ :

$$\omega = a_{12}dx_1 \wedge dx_2 + a_{13}dx_1 \wedge dx_3 + a_{23}dx_2 \wedge dx_3$$

### 5.3. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность

Пусть  $G$  - Жорданова область в  $\mathbb{R}^2$ . Пусть  $\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}^n$  есть непр. дифф. инъективное и локально инъективное отображение.  $S = \varphi(G)$  - гладкая поверхность.

Пусть  $S \subset D$ , где  $D$  - область с заданной дифференциальной 2-формой :

$$\omega(\bar{x}, d\bar{x}) = \sum_{i < j} a_{ij}(x) \cdot dx_i \wedge dx_j$$

**Определение.** Переносом  $\omega$  на поверхность  $S$  называется применение операции  $\varphi^*$ , действующей следующим образом :

$$(\varphi^*\omega)(u, du) = \omega(x, dx) \Big|_{x=\varphi(u), \quad dx=\frac{\partial\varphi}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial u_2} du_2}$$

Выражение выше можно раскрыть следующим образом. Так как  $\varphi$  - векторная функция и  $x_i = \varphi_i(u_1, u_2)$

$$dx_i = \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_2} du_2$$

$$dx_i \wedge dx_j = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_i}{\partial u_2} \\ \frac{\partial\varphi_j}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_j}{\partial u_2} \end{vmatrix} du_1 \wedge du_2$$

Подставим вышенаписанное в определение 2-формы

$$(\varphi^*\omega)(u, du) = \sum_{i < j} a_{ij}(\varphi(u)) \cdot \det \left( \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)} \right) du_1 \wedge du_2$$

### 5.4. Поверхностный интеграл II-го рода

В терминах обозначений из предыдущего пункта.

**Определение.** Поверхностным интегралом II-го рода называется выражение

$$\iint_S \omega(x, dx) = \iint_S \sum_{i < j} a_{ij}(x) \cdot dx_i \wedge dx_j = \left[ \begin{array}{c} \text{подставляем } \varphi, \text{ которая} \\ \text{параметризует поверхность } S \end{array} \right] = \iint_G (\varphi^*\omega)(u, du)$$

В развернутой записи

$$\iint_G (\varphi^*\omega)(u, du) = \iint_G \sum_{i < j} a_{ij}(\varphi(u)) \cdot \det \left( \frac{\partial(x_i, x_j)}{\partial(u_1, u_2)} \right) du_1 du_2$$

### 5.5. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода

В терминах обозначений из предыдущего пункта.

Сведем поверхностный интеграл II-го рода к интегралу I-го рода на следующем примере для  $n = 3$  (как на лекции)

$$\iint_S \sum_{i < j} a_{ij}(x) \cdot dx_i \wedge dx_j = \iint_S v_1 dy \wedge dz + v_2 dz \wedge dx + v_3 dx \wedge dy$$

**Утверждение.** Сведение интеграла выше к интегралу I-го рода.

$$\iint_S v_1 dy \wedge dz + \dots = [ \text{параметризация } \bar{\varphi}(u_1, u_2) ] = \iint_G \left( v_1 \left( \frac{\partial y}{\partial u_1} \frac{\partial z}{\partial u_2} - \frac{\partial y}{\partial u_2} \frac{\partial z}{\partial u_1} \right) + \dots \right) \cdot du_1 du_2 =$$

$$= \iint_G \begin{vmatrix} v_1 & \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ v_2 & \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \\ v_3 & \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} \end{vmatrix} du_1 du_2 = \iint_G \left\langle \bar{v}, \left[ \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right] \right\rangle du_1 du_2$$

Пусть теперь  $\bar{n}$  - вектор нормали

$$\bar{n} = \frac{\left[ \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right]}{\left| \left[ \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right] \right|}$$

Тогда страшную штуку (5.5.) выше можно переписать так:

$$= \iint_G \langle \bar{v}, \bar{n} \rangle \underbrace{\left| \left[ \frac{\partial x}{\partial u_1}, \frac{\partial x}{\partial u_2} \right] \right|}_{ds} du_1 du_2 = \underbrace{\iint_S \langle \bar{v}, \bar{n} \rangle \cdot ds}_{\text{пов. инт. I рода}}$$

где  $[x, y]$  - векторное произведение,  $ds$  - элемент площади поверхности

## 6. Формула Остроградского-Гаусса и её приложение к вычислению объема тела. Внешний дифференциал 3-мерной 2-формы, дивергенция векторного поля и краткая запись формы Остроградского-Гаусса.

**Теорема.** (Формула Остроградского-Гаусса)

Пусть  $D$  - замкнутая жорданова область, ограниченная кусочно гладкой поверхностью  $S = \partial D$ , также пусть  $\omega = Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy$  - непрерывно дифференцируемая 2-форма в  $D$ .

Тогда  $\iint_{\partial D} \omega = \iiint_D d\omega$ .

Доказательство не было рассмотрено на лекции.

**Определение.** Внешним дифференциалом называется выражение  $d\omega = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$ .

**Определение.** Выражение  $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$  называется *дивергенцией* векторного поля. Обозначение:  $\text{div}(P, Q, R)$

Более подробная запись формулы Остроградского-Гаусса:  $\iint_S Pdy \wedge dz + Qdz \wedge dx + Rdx \wedge dy = \iiint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$

## 7. Формула Стокса. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы, ротор векторного поля и краткая запись формулы Стокса.

### 7.1. Формула Стокса

**Теорема.** Пусть  $S$  - ориентированная кусочно гладкая поверхность с краем  $L = \partial S$ , лежащая в области  $D$ .

$\omega = Pdx + Qdy + Rdz$  - непрерывно дифференцируема в  $D$ .

Тогда

$$\oint_{\partial S} \omega = \iint_S d\omega - \text{краткая запись}$$

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz \wedge dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

*Доказательство.* 1. Пусть  $S = \varphi(G)$ , где  $G$  - прямоугольник на плоскости параметров  $(u_1, u_2)$ . Тогда

$$\oint_{\partial S} \omega = \{ \text{крив. инт. на пл-ти} \} = \iint_G d(\varphi^* \omega) = \{ \text{Формула Грина} \} \iint_G \varphi^*(d\omega) = \iint_S d\omega$$

2. В общем случае поверхность разбивается на прямоугольники и интегралы по ним суммируются. ■

**Определение.** Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы  $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$  – это  $d\omega = (\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z})dy \wedge dz + (\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x})dz \wedge dx + (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy$  – ротор

**8. Комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Определения экспоненты  $e^z$  и тригонометрических функций  $\sin z, \cos z$ . Определения многозначных функций  $\sqrt[n]{z}, \operatorname{Ln} z$ .**

### 8.1. Комплексная плоскость.

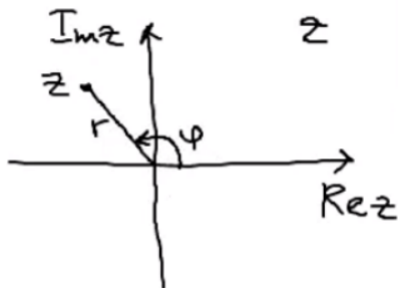
Формально вводим символ  $i$ , такой что  $i^2 = -1$ .

**Определение.** Линейная комбинация обычной единицы и мнимой единицы с вещественными коэффициентами называется *комплексным числом*  $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$ .

Действительная часть числа  $z$ :  $\operatorname{Re} z = x$ , мнимая часть числа  $z$ :  $\operatorname{Im} z = y$ .

**Определение.** Каждому комплексному числу  $z$  ставится в соответствии *сопряженное*  $\bar{z} = x - iy$ .

Можно еще задать комплексное число геометрически:



**Определение.** Тогда *модуль* числа  $z$  –  $r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ . *Аргумент* числа  $z$  – угол  $\varphi$ , такой что  $x = |z| \cos \varphi, y = |z| \sin \varphi$ .

На этом моменте впервые встает вопрос о многозначности функций.

**Определение.** Если мы хотим говорить про однозначно выбираемый аргумент, то пишут  $\varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$  или  $(-\pi; \pi]$  – *главное значение* аргумента. При этом,  $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  – *полный (или многозначный) аргумент*.

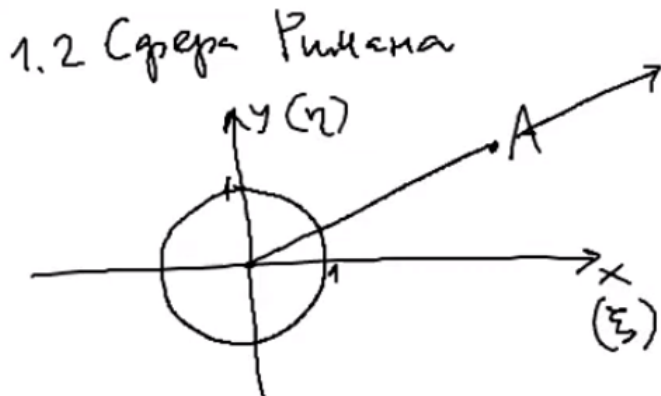
**Определение.** *Тригонометрическая запись* комплексного числа:  $z = |z| \cdot (\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$ .

**Определение.** *Показательная форма записи:* комплексного числа:  $z = |z| \cdot e^{i \operatorname{Arg} z}$ .

Комплексную плоскость обычно обозначают  $\mathbb{C}$ .

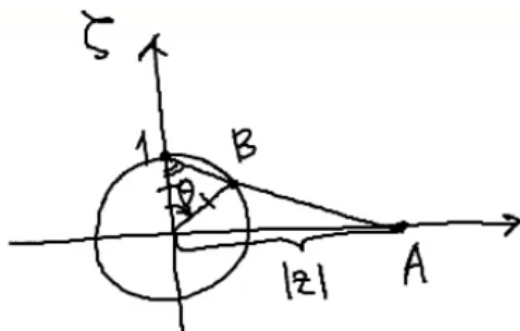
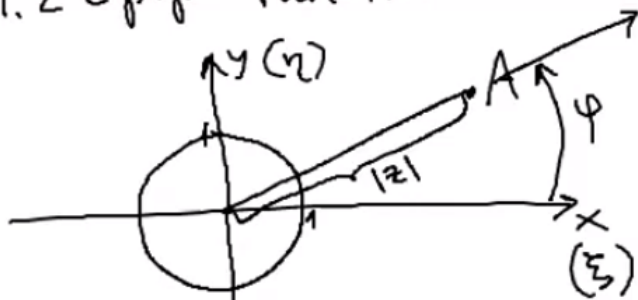
### 8.2. Сфера Римана и стереографическая проекция.

На рисунке не окружность, а сфера единичная.



Рассматриваем вертикальное сечение в плоскости, содержащей ось  $\zeta$  и прямую, проходящую через начало координат и точку  $A$ . Наша сфера выглядит следующим образом (рисунок справа):

## 1.2 Сфера Римана



**Определение.** Отображение  $B \mapsto A$  – *стереографическая проекция*. Но для нас будет более важным обратное отображение.

Заметим, что  $|z| = \operatorname{tg} \frac{\pi - \theta}{2}$  и  $\varphi = \arg z$ .

Отсюда несложно вывести (по словам Маевского Е.В.), что  $\xi = \frac{2x}{1 + |z|^2}$ ,  $\eta = \frac{2y}{1 + |z|^2}$ ,  $\zeta = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}$ .

Обратные формулы:  $x = \frac{\xi}{1 - \zeta}$  и  $y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$ .

В действительном матанализе мы фактически имели две бесконечности (для нас было важно направление):  $+\infty$  и  $-\infty$ . В комплексном матанализе чаще всего не имеет значения, в каком направлении мы идем в бесконечность. Поэтому рассматривается просто *бесконечно удаленная точка* и обозначается  $z \rightarrow \infty$ . Это означает, что  $|x|, |y| \rightarrow \infty$ .

Можно заметить, что если мы захотим добавить бесконечно удаленную точку к комплексной плоскости, то ей будет соответствовать северный полюс на сфере Римана. Если мы добавим к комплексной плоскости бесконечно удаленную точку, то это называется *замкнутой комплексной плоскостью*:  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . И вот как раз замкнутую комплексную плоскость очень удобно представлять, как сферу Римана.

Стало непонятно, надо ли теxать про сходимость последовательности, поэтому ссылка с таймкодом на лекцию: [ТЫК](#).

### 8.3. Функция комплексной переменной.

**Определение.** *Функция комплексной переменной*  $w = f(z)$  – отображение, заданное на одной комплексной плоскости и принимающее значения на другой комплексной плоскости.

Считаем, что  $w = u + iv$ , тогда становится понятно, что  $f(z) = u(z) + iv(z)$ , где  $u(z), v(z)$  – вещественные функции от комплексной переменной. Еще можно представлять функцию от  $z$  как функцию от двух переменных:  $f(z) = \tilde{f}(x, y)$ . Тогда  $\tilde{f}(x, y) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$ .

Замена переменной:

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$$

Тогда  $f(z) = \tilde{f}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right)$ .

### 8.4. Определения экспоненты $e^z$ и тригонометрических функций $\sin z, \cos z$ .

**Определение.** Экспонента  $e^z$  в комплексном случае задается двумя эквивалентными способами:

- 1)  $e^z := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad \forall z$
- 2)  $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

На основе этого определения доказываются все те же известные нам алгебраические свойства экспоненты для комплексного случая.

Тогда можем написать, что  $w = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \implies u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$ .

**Определение.** Косинус в комплексном случае тоже задается двумя эквивалентными способами:

$$1) \cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$2) \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

С помощью этих формул можно получить следующее:

$$\cos z = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \implies u = \cos x \operatorname{ch} y, v = -\sin x \operatorname{sh} y$$

**Определение.** Синус в комплексном случае тоже задается двумя эквивалентными способами:

$$1) \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$2) \sin z := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

С помощью этих формул можно получить следующее:

$$\sin z = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \implies u = \sin x \operatorname{ch} y, v = \cos x \operatorname{sh} y$$

## 8.5. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}, \operatorname{Ln} z$ .

**Определение.** Комплексным корнем  $n$ -ой степени  $\sqrt[n]{z}, z \neq 0$  называется каждое число  $w : w^n = z$ , где  $n = 2, 3, 4, \dots$

**Определение.** Полным натуральным логарифмом  $\operatorname{Ln} z, z \neq 0$  называется каждое число  $w : e^w = z$ . Составим  $z = |z| \cdot e^{i \operatorname{Arg} z} \implies \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + i2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ . Это пример бесконечнозначной функции.

## 9. Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции. Условия Коши–Римана и голоморфность. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.

### 9.1. Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции.

**Определение.** Функция  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2, D \subseteq \mathbb{R}^2$  называется дифференцируемой (в общем случае) в точке  $(x_0, y_0)$ , если

$$\Delta f := \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

Тогда  $P$  – матрица Якоби, т.е.  $P = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \Big|_{(x_0, y_0)}$ .

В комплексном случае:  $\Delta f := \Delta u + i \Delta v = p \Delta z + q \Delta \bar{z} + o(|\Delta z|) \implies$

$$\implies p = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{1}{2i} \left( = \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad q = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left( -\frac{1}{2i} \right) \left( = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right)$$

**Определение.** Тогда  $p \Delta z + q \Delta \bar{z}$  – это дифференциал функции  $f$ .

**Определение.**  $\mathbb{R}$ -дифференцируемая функция называется  $\mathbb{C}$ -дифференцируемой, если ее дифференциал  $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}$  является  $\mathbb{C}$  – линейным, т.е.  $df = \frac{\partial f}{\partial z} dz$ .

Следовательно, получим следующее равенство:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left( -\frac{1}{2i} \right) = 0 \iff \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \text{– условия Коши–Римана}$$

**Определение.** Если существует предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{(u(x,y) - u(x_0, y_0) + i(v(x,y) - v(x_0, y_0)))}{(x - x_0) + i(y - y_0)},$$

то он называется *производной*  $f$  по  $z$  и обозначается  $\frac{\partial f}{\partial z}$ .

**Определение.** (эквивалентное определение  $\mathbb{C}$ -дифференцируемости)

Пусть существует предел из определения выше (длинный такой).

Пусть  $y = y_0$ , тогда  $\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(u(x, y_0) - u(x_0, y_0) + i(v(x, y_0) - v(x_0, y_0)))}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ .

Аналогично при  $x = x_0$  получим, что  $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right)$ .

Тогда получим, что  $\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0,$

поэтому в этом случае  $\frac{\partial f}{\partial z}$  логично обозначать как  $\frac{df}{dz}$ . Тогда  $\mathbb{C}$ -дифференцируемость равносильна существованию и конечности производной  $\frac{df}{dz}$  (доказательство было в курсе МА-1).

## 9.2. Условия Коши–Римана и голоморфность.

**Определение.** Пусть  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  – область определения и  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  – непрерывно дифференцируема.  $f$  называется *голоморфной* в  $D$ , если она удовлетворяет условиям Коши–Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

## 9.3. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой.

**Определение.** Пусть  $L$  – кусочно-гладкая ориентированная (по умолчанию положительная ориентированность) кривая в области  $D$ , тогда *интеграл по кривой на комплексной плоскости* равен сумме двух криволинейных интегралов второго рода:

$$\int_L f(z) dz = \int_L (u(x, y) + iv(x, y)) \cdot (dx + i dy) := \int_L (u dx - v dy) + i \int_L (v dx + u dy)$$

## 9.4. Теорема Коши.

**Теорема.** Если функция  $f$  голоморфна в замыкании  $\bar{D}$  жордановой области  $D$ , то  $\oint_{\partial D} f(z) dz = 0$ .

*Доказательство.* Распишем интеграл по определению:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} f(z) dz &= \oint_{\partial D} (u dx - v dy) + i \oint_{\partial D} (v dx + u dy) = \text{по формуле Грина} = \\ &= \iint_D \left( -\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx \wedge dy + i \iint_D \left( -\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx \wedge dy = 0 \end{aligned}$$

Заметим, что так как функция голоморфна, то есть непрерывно дифференцируема на  $D$  и выполнены условия Коши–Римана. Тогда в силу условий Коши–Римана оба подынтегральных выражения равны нулю, и весь интеграл тоже равен нулю. ■

## 9.5. Интегральная формула Коши.

**Теорема.** (Формула Коши–Грина) Если функция  $f$  непрерывно дифференцируема в замыкании  $\bar{D}$  жордановой области  $D$ , граница области  $L = \partial D$  – кусочно-гладкая. Пусть  $z_0 \in D$ . Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{dx \wedge dy}{z - z_0}$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $\frac{f(z)}{z - z_0}$ , она непрерывна в  $\overline{D} \setminus \{z_0\}$ . Рассмотрим область  $D$  без окрестности точки  $z_0$ : если  $U_\varepsilon(z_0)$  – круг  $|z - z_0| \leq \varepsilon$ , то рассматриваемая область  $D_\varepsilon = D \setminus U_\varepsilon(z_0)$ . Ее граница  $L_\varepsilon = \partial D_\varepsilon$  получается объединением двух границ  $\partial D$  и  $\partial U_\varepsilon(z_0)$ .

Рассмотрим криволинейный интеграл по границе области  $\partial D_\varepsilon$ :

$$\oint_{\partial D_\varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \left[ df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}, dz \wedge dz = 0 \right], \text{ и по формуле Грина } = \iint_{D_\varepsilon} d \left( \frac{f(z)}{z - z_0} \right) \wedge dz = \\ = \iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f / \partial \bar{z}}{z - z_0} d\bar{z} \wedge dz$$

Переходим к обычным переменным, вычисляя матрицу Якоби:

$$\frac{\partial(\bar{z}, z)}{\partial(x, y)} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \Rightarrow \det \frac{\partial(\bar{z}, z)}{\partial(x, y)} = 2i \Rightarrow d\bar{z} \wedge dz = 2i dx \wedge dy$$

Тогда получим следующее:

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f / \partial \bar{z}}{z - z_0} d\bar{z} \wedge dz = 2i \iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{1}{z - z_0} dx \wedge dy$$

С другой стороны:

$$\oint_{L_\varepsilon} = \oint_L + \oint_{|z - z_0| = \varepsilon} = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_{|z - z_0| = \varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Интеграл по малой окружности (тот, что справа) можем посчитать. Представим  $z = z_0 + \varepsilon \cdot e^{i\varphi}$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi]$ , тогда  $f(z) = f(z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}) = f(z_0) + \bar{o}(1)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . При этом,  $dz = \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi$ . Подставляя, получим:

$$\oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_{|z - z_0| = \varepsilon} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0) + \bar{o}(1)}{\varepsilon e^{i\varphi}} \cdot \varepsilon i e^{i\varphi} d\varphi = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - i \int_0^{2\pi} f(z_0) + \bar{o}(1) d\varphi = \\ = \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) + \bar{o}(1)$$

При устремлении  $\varepsilon \rightarrow 0$  и приравняв оба значения интеграла, получаем:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{dx \wedge dy}{z - z_0}$$

■

**Замечание.**  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \frac{dx \wedge dy}{z - z_0}$  называется *главным значением* несобственного интеграла.

**Следствие.** (Интегральная формула Коши)

Если функция  $f$  голоморфна в замыкании  $\overline{D}$  жордановой области  $D$ , то  $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$ .

## 10. Голоморфная функция нескольких переменных. Голоморфность композиции (в том числе: суммы, произведения, частного) голоморфных функций. Голоморфность обратной функции.

**Определение.** Пусть  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  – область определения

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$  – непрерывно дифференцируема.

$f$  называется голоморфной в  $D$ , если она удовлетворяет условиям Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

**Определение.** Пусть  $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$  – области определения. Функция  $F : G_1 \times G_2 \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$F(z_1, z_2) = U(x_1, y_1, x_2, y_2) + iV(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

называется голоморфной, если она непрерывно дифференцируема и голоморфна по каждой переменной в отдельности.

**Теорема.** Пусть  $D \subseteq \mathbb{C}$  – область,  $\varphi_1 : D \rightarrow G_1$ ,  $\varphi_2 : D \rightarrow G_2$  – голоморфны.

Тогда  $f(z) = F(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$  – голоморфна.

*Доказательство.* Для удобства будем иметь в виду, что  $\varphi_k(z) = \xi_k(x, y) + i\eta_k(x, y)$ ,  $k \in \{1, 2\}$  и  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

Тогда

$$u'_x = U'_{x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + U'_{y_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + U'_{x_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + U'_{y_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = V'_{y_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + (-V'_{x_1}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right) + V'_{y_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + (-V'_{x_2}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right) = v'_y$$

Аналогично,  $u'_y = -v'_x$  ■

**Следствие.** Голоморфны следующие функции:

1.  $F(z_1, z_2) = az_1 + bz_2$
2.  $F(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$
3.  $F(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$ ,  $z_2 \neq 0$

**Теорема.** Пусть  $w = f(z)$ ,  $w_0 = f(z_0)$ ,  $f'(z_0) \neq 0$  и  $f$  – голоморфна в окрестности точки  $z_0$ .

Тогда в некоторой окрестности точки  $w_0$  существует единственная обратная функция  $f^{-1}(w) : f^{-1}(w_0) = z_0$ , которая является голоморфной.

*Доказательство.* Пусть  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , тогда:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}, \text{ причем } \begin{cases} u_0 = u(x_0, y_0) \\ v_0 = v(x_0, y_0) \end{cases}$$

Посчитаем Якобиан отображения в  $z_0$ :

$$\left| \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} \right|_{z_0} = |f'(z_0)|^2 > 0 \implies \text{Существует единственное обратное отображение по теореме о неявной функции}$$

Найдем матрицу Якоби обратного отображения:

$$\left( \begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \right) \Big|_{w_0} = \left( \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} \right)^{-1} \Big|_{z_0} = \frac{1}{|f'(z_0)|^2} \begin{pmatrix} v'_y & -u'_y \\ -v'_x & u'_x \end{pmatrix}$$

Рассмотрим элементы на главных диагоналях первой и последней матриц. Т.к. исходное отображение голоморфно, то  $v'_y = u'_x$ , а значит и  $x'_u = y'_u$ .

Аналогично, рассмотрев элементы на побочных диагоналях, получим, что  $x'_v = -y'_u$ . Условие Коши-Римана выполнено, значит, обратная функция является голоморфной. ■

## 11. Аналитическая функция. Аналитичность голоморфной функции. Неравенство Коши для коэффициентов ряда. Радиус сходимости ряда как максимальный радиус круга, в котором функция голоморфна. Теорема Лиувилля.

**Определение.** Функция называется аналитической в точке  $z_0$ , если  $\exists \{c_n\} \in \mathbb{C}$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k, |z - z_0| < \delta$$



**Теорема.** Если функция  $f$  голоморфна в окрестности  $z_0$ , то она аналитична в  $z_0$ .

*Доказательство.* Пусть  $|z - z_0| < \varepsilon < \delta$ ,  $L = \{\zeta : |\zeta - z_0| = \varepsilon\}$

Тогда по формуле Коши:  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left( 1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \dots + \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n + \frac{\left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right) d\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^n \left( \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^k + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_L f(\zeta) \cdot \frac{\left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{\zeta - z} d\zeta}_{r_n(z, z_0)}$$

Пусть  $M = \sup_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} |f(\zeta)|$ , а также заметим, что  $|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| = \varepsilon(1 - \alpha)$ , тогда:

$$|r_n(z, z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_L |f(\zeta)| \cdot \frac{\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^{n+1}}{|\zeta - z|} dl \leq \frac{M \cdot \alpha^{n+1}}{2\pi \cdot \varepsilon(1 - \alpha)} \cdot \underbrace{2\pi\varepsilon}_{\text{длина кривой}} \leq \frac{M \cdot \alpha^{n+1}}{\varepsilon(1 - \alpha)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Значит,  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ ,  $c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$  при  $\forall z : |z - z_0| < \delta$ .

Так как  $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$  голоморфна в кольце  $\varepsilon_1 \leq |z - z_0| \leq \varepsilon_2$ , то  $\oint_{|z - z_0| = \varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta - \oint_{|z - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = 0 \Rightarrow c_k$  не зависит от  $\varepsilon$ . ■

**Следствие.** (Неравенство Коши)

$$|c_k| \leq \oint_L \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{k+1}} dl \leq \frac{M}{2\pi\varepsilon^{k+1}} \cdot 2\pi\varepsilon = \frac{M}{\varepsilon^k}, \text{ подставим } M:$$

$$|c_k| \leq \frac{1}{\varepsilon^k} \cdot \sup_{|z - z_0| = \varepsilon} |f(z)| \quad \forall \varepsilon < \delta$$

**Теорема.** Пусть  $f(z)$  голоморфна в  $|z - z_0| < r$ , но не является голоморфной в круге большего радиуса,  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ ,  $|z - z_0| < R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$ . Тогда  $R = r$ .

*Доказательство.* Пусть  $M = \sup_{|z - z_0| = \varepsilon} |f(z)|$ ,  $|c_k| \leq \frac{M}{\varepsilon^k} \quad \forall \varepsilon < r$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} \leq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow R \geq \varepsilon \quad \forall \varepsilon < r \Rightarrow R \geq r.$$

Но если  $R > r$ , то ряд сходится в  $z : |z - z_0| > r$ , что противоречит условию.

Значит,  $R = r$ . ■

**Теорема.** (Лиувилля)

Если функция  $f(z)$  голоморфна и ограничена на  $\mathbb{C}$ , то она – константа.

*Доказательство.* Пусть  $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$ ,  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

Так как  $|c_k| \leq \frac{M}{\varepsilon^k} \quad \forall \varepsilon$ , то при  $\varepsilon \rightarrow \infty$  получаем, что  $c_1 = c_2 = \dots = 0 \Rightarrow f(z) = c_0$  ■

## 12. Бесконечная дифференцируемость и голоморфность аналитической функции. Нуль аналитической функции и его порядок. Изолированность нуля аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции.

**Предложение.** Пусть  $f(z)$  – аналитическая в точке  $z_0$ . Значит, функция  $f(z)$  представима в окрестности  $z_0$  в виде ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ ,  $|z - z_0| < \delta$ . Тогда ряд будет абсолютно сходиться  $\forall z : |z - z_0| = \varepsilon < \delta \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \varepsilon^k$ . Отсюда следует  $\exists A > 0 : |c_k| \varepsilon^k \leq A \Rightarrow |c_k| \leq \frac{A}{\varepsilon^k}$ .

Покажем что аналитическая функция дифференцируема. Рассмотрим  $|z - z_0| \leq \varepsilon_1 < \varepsilon < \delta$ . Берём приращение  $0 < |h| < \varepsilon - \varepsilon_1$ .

$$\frac{(z+h) - f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{(z-z_0+h)^k - (z-z_0)^k}{h}$$

$$\frac{(z-z_0+h)^k - (z-z_0)^k}{h} = k(z-z_0)^{k-1} + c_k^2 h(z-z_0)^{k-2} + \dots + c_k^k h^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-z_0)^{k-1} + h c_2 + h \sum_{k=3}^{\infty} c_k (c_k^2 (z-z_0 + \dots + c_k^k h^{k-2}))$$

При  $k \geq 3$ :  $c_k^2 \varepsilon_{k-2} + c_k^3 \varepsilon_1^{k-3} |h| + \dots + c_k^k |h|^{k-2} \leq c_k^2 (\varepsilon_1 + |h|)^{k-2}$ .

Теперь возьмём по модулю третью сумму:  $|h \sum_{k=3}^{\infty} c_k (c_k^2 (z-z_0 + \dots + c_k^k h^{k-2}))| \leq \sum_{k=3}^{\infty} \frac{A}{\varepsilon^k} \frac{k(k-1)}{2} (\varepsilon_1 + |h|)^{k-2}$ ; так как

$\frac{\varepsilon_1 + |h|}{\varepsilon} < 1$ , то полученный ряд сходится. Взяв  $h \rightarrow 0$ , получим  $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z-z_0)^{k-1}$ . Мы обосновали что

комплексную аналитическую функцию можно почленно дифференцировать. В таком случае, можно заметить, что  $f'$  - тоже аналитическая функция, а значит  $f''(z) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) c_k (z-z_0)^{k-2}$ , ч.т.д.

Мы получили, что  $f$  бесконечно дифференцируема, а из дифференцируемости вытекает её голоморфность.  $f(z)$  имеет производную, это равносильно условиям Коши-Римана, кроме того  $f'(z)$  непрерывна, а это даёт голоморфность.

Ноль аналитической функции, его порядок и изолированность.

Пусть в  $z_0$  значение аналитической функции  $f(z_0)$  равно 0. В этом случае  $z_0$  называется нулём функции  $f(z)$ . Тогда в разложении в ряд Тейлора будет отсутствовать свободный член  $c_0 = 0$ . В случае когда отсутствуют все слагаемые, содержащие  $(z-z_0)^i, i < n$ , где  $n$  - некоторое число, то разложение будет иметь вид  $f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$ , а сама точка  $z_0$  будет называться нулём порядка  $n$ .

Под изолированностью нуля какой-либо функции подразумевается существование такой окрестности нуля, что в ней отсутствуют другие нули.

**Теорема.** Теорема (прим. темера: подготовительная) единственности аналитической функции.

Если  $f$  аналитична в точке  $z_0$  и  $z_0$  является предельной точкой последовательности нулей функции  $f$ , т.е.  $\exists z_n : z_n \rightarrow z_0, f(z_n) = 0 \forall n$ , то  $f(z) \equiv 0$  в некоторой окрестности точки  $z_0$ .

*Доказательство.* Так как  $f$  непрерывна, то  $f(z_0) = 0 \implies$  в разложении  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-z_0)^k$  некоторое количество начальных коэффициентов будет равно нулю:  $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$ , т.е.  $f(z) = (z-z_0)^n (c_{n+1} + c_{n+2}(z-z_0) + \dots)$ . Получили, что  $z_0$  - это ноль функции  $f$  кратности  $n$ .

Рассмотрим сумму в скобках. Она задаёт голоморфную функцию  $g(z)$ . Значит,  $g(z)$  - непрерывна, и так как  $c_{n+1} \neq 0$ , то существует такая окрестность  $|z-z_0| < \varepsilon : |g(z)| > 0$ .  $\implies$  в круге радиуса  $|z-z_0| < \varepsilon$  нет других нулей функции, т.е.  $z_0$  - ноль аналитической функции должен быть изолированным. А это противоречит тому, что у нас  $n$  нулей, т.е. такого  $n$  не существует, а значит  $f(z) = 0$  в некоторой окрестности  $z$ . ■

Отсюда перейдём непосредственно к самой теореме о единственности.

**Теорема.** Теорема (прим. темера: основная) единственности аналитической функции.

Если две функции  $f_1(z), f_2(z) \in \Sigma D$  совпадают на множестве  $\varepsilon$ , которое имеет хотя бы одну предельную точку  $z_0 \in D$ , то  $f_1(z) = f_2(z)$  всюду в  $D$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $f = f_1 - f_2$ . Покажем, что  $f \equiv 0$  в  $D$ . Т.е. требуется доказать, что множество  $F = \{z \in D : f(z) = 0\}$ , в которое включено  $\varepsilon$  совпадёт с  $D$ . Предельная точка  $z_0$  является нулём функции  $f$  в силу непрерывности. Из теоремы доказанной ранее получим, что  $f \equiv 0$  в некоторой окрестности  $z_0$ , ибо в противном случае эта точка не могла бы быть предельной для множества нулей  $f$ . Таким образом, получим, что ядро множества  $F$  непусто - оно содержит в себе точку  $z_0$ . По построению  $F$  открыто, но при этом замкнуто относительно области  $D$ . По ранее доказанной теореме можем сказать, что взяв точку  $b \in D$ , мы получим предельную точку для  $F$ , а потому  $f(b) \equiv 0$ , т.е.  $b \in F$ . Так как по определению области  $D$  связно, то имеем  $F = D$ . А значит  $f \equiv 0$  на всей  $D$ , и  $f_1(z) = f_2(z)$ . ■

### 13. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$ . Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.

#### 13.1. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность.

**Определение.** Точка  $z_0$  называется изолированной особой точкой однозначного характера функции  $f$ , если  $\exists \delta : f$  голоморфна в проколотой окрестности  $0 < |z - z_0| < \delta$ , но не является голоморфной ни в каком круге  $|z - z_0| < r$

Классификация:

- $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C} \iff$  устранимая особенность
- $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff$  полюс
- $\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \iff$  существенная особенность

#### 13.2. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке.

**Теорема.** Если  $z_0$  — устранимая особенность функции  $f$  и  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$ , то  $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ a, & z = z_0. \end{cases}$

голоморфна в окрестности точки  $z_0$

*Доказательство.* Пусть  $f$  голоморфна в  $0 < |z - z_0| < \delta$ ,  $\varepsilon_1 < \varepsilon < \delta$  и  $\varepsilon_1 < |z - z_0| < \varepsilon$  Тогда по формуле Коши, получаем, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{(*)_1}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{(*)_2}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \left[ \begin{array}{l} \text{при } \varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ z \neq z_0 \end{array} \right]$$

Объяснения:

(\*)<sub>1</sub>: Граница множества  $D$  состоит из двух окружностей: внешней (радиуса  $\varepsilon$ , которая обходится в положительном направлении (против часовой стрелки) и внутренней (радиуса  $\varepsilon_1$ ), которая обходится в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Заодно сразу поменяем знак перед интегралом по внутренней окружности, для того, чтобы написать его в положительном направлении.

(\*)<sub>2</sub>: Оценим сверху модуль второго интеграла:

$$\underbrace{\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right|}_{\text{интеграл второго рода}} \leq \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| dl}_{\text{интеграл первого рода}}$$

Затем оценим саму подынтегральную функцию:

$$\left. \begin{array}{l} f(\zeta) = a + o(1) \text{ при } \varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ |\zeta - z| \geq \underbrace{|t - z_0|}_{\text{число}} - \varepsilon_1 \\ \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} dl = 2\pi\varepsilon_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| dl}_{\text{интеграл первого рода}} \xrightarrow{\varepsilon_1 \rightarrow 0} 0$$

Вернемся к получившемуся выражению для функции  $f(z)$

Так как мы перешли к пределу, мы можем сказать, что во всех точка  $z$ , включая  $z_0$ , можно понимать левую часть выражения как  $\tilde{f}(z)$ , тогда получим:

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \left[ \begin{array}{l} \text{при } \varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ |z - z_0| < \delta \end{array} \right]$$

Если мы применим к данному интегралу рассуждения, которые мы применяли при доказательстве аналитичности голоморфной функции (11 билет), получим, что функция представленная данным образом аналитична в точке  $z_0$ , а отсюда следует, что она голоморфна в точке  $z_0$ . Ну и напоследок, если мы в этот интеграл вместо  $z$  подставим  $z_0$ , в силу произвольности  $\varepsilon$ , устремив  $\varepsilon$  к нулю, мы получим, что  $\tilde{f}(z_0) = a$ . ■

### 13.3. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$ .

**Определение.** Полюс это точка, такая что в проколотой окрестности этой точки функция голоморфна, а в самой этой точке в пределе получается бесконечное значение.

Пускай  $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \infty$ , то есть  $z_0$  — полюс

Рассмотрим функцию  $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ , тогда  $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$  и  $g(z)$  будет голоморфной в проколотой окрестности точки  $z_0$  (так как  $f(z)$  голоморфна в проколотой окрестности точки  $z_0$  и не обращается в 0), отсюда делаем вывод, что  $g(z)$  имеет устранимую особенность.

Доопределим функцию  $g(z)$  в точке  $z_0$ , получим новую функцию  $\tilde{g}(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$  которая будет голоморфной

в точке  $z_0$ , а значит будет аналитической, мы можем представить ее в виде степенного ряда:

$$\tilde{g}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \text{ так как } \tilde{g}(z_0) = 0 \text{ то } c_0 = \dots = c_n = 0, c_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \tilde{g}(z) = (z - z_0)^n \underbrace{(c_{n+1} + c_{n+2}(z - z_0) + \dots)}_{h(z)}$$

**Определение.** В такой ситуации говорят, что  $\tilde{g}(z)$  имеет нуль  $n$ -ого порядка.

Распишем тогда как будет выглядеть изначальная функция  $f(z)$ :

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^n} \cdot \underbrace{\frac{1}{h(z)}}_{\text{голоморфна в } z_0}$$

**Определение.** Число  $n$  в полученном выражении называется порядком полюса. Функция  $f(z)$  имеет полюс  $n$ -ого порядка.

### 13.4. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.

**Теорема.** Если  $z_0$  — существенно особая точка функции  $f$ , то

$$\forall a \in \overline{\mathbb{C}} \exists \{z_n\} : z_n \rightarrow z_0, f(z_n) \rightarrow a$$

*Доказательство.*

- $a = \infty$  Если функция ограничена в  $0 < |z - z_0| < \delta$  то  $z_0$  — устранимая особенность, но так как мы знаем, что  $z_0$  не является устранимой особенностью, то функция  $f$  не ограничена в кольце  $0 < |z - z_0| < \delta$ , а значит  $\exists \{z_n\} : z_n \rightarrow z_0, f(z_n) \rightarrow \infty$

- Если  $\forall \delta \exists z : 0 < |z - z_0| < \delta, f(z) = a$ , тогда  $\exists \{z_n\} : 0 < |z_n - z_0| < \frac{1}{n}, f(z_n) = a$  (выбрали последовательность, на которой функция в точности принимает значение  $a$ )

- $\exists \delta : 0 < |z - z_0| < \delta, f(z) \neq a$  Рассмотрим функцию  $g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$ , так как  $f(z)$  в некоторой проколотой окрестности не принимает значение  $a$ , то функция  $g(z)$  — голоморфна в кольце  $0 < |z - z_0| < \delta$

Тогда функция  $f$  выглядит следующим образом  $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$  отсюда следует, что  $g$  в точке  $z_0$  имеет существенную особенность. По первому рассмотренному случаю получаем, что для функции  $g$  верно, что  $\exists \{z_n\} : g(z_n) \rightarrow \infty$ , тогда  $f(z_n) \rightarrow a$ . ■

## 14. Ряд Лорана и его сходимост. Единственность разложения Лорана. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.

### 14.1. Ряд Лорана и его сходимост.

Пусть  $f$  голоморфна в кольце  $r_1 < |z - z_0| < r_2$ . Зафиксируем  $\forall z$  и  $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 : r_1 < \varepsilon_1 < |z - z_0| < \varepsilon_2 < r_2$ . Рассмотрим в плоскости  $\zeta$  кольцо  $\varepsilon_1 \leq |z - z_0| \leq \varepsilon_2$ . Тогда по формуле Коши мы получим, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{(1)} - \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta}_{(2)}$$

Рассмотрим эти два интеграла отдельно:

$$(1): \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta = \sum_{k=0}^n c_k (z - z_0)^k + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_2} f(\zeta) \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{\zeta - z} d\zeta$$

Заметим, что модуль остаточного члена  $\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_2} f(\zeta) \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{\zeta - z} d\zeta \right|$  стремится к нулю, а значит ряд будет сходиться.

Аналогично:

$$(2): -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \frac{\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \cdot \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} + \dots + \left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^m + \frac{\left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^{m+1}}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} \right) d\zeta =$$

$$= \sum_{k=1}^m \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon_1} f(\zeta) \cdot \frac{\left( \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right)^m}{z - \zeta} d\zeta$$

В данном случае, дробь в числителе остаточного члена по модулю меньше 1, поэтому при возведении в степень мы будем получать число стремящееся к 0, то есть остаточный член будет стремиться к 0, а значит ряд сходится.

Объединяя (1) и (2) получаем обобщенный степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r_1 < \varepsilon < r_2$$

**Определение.**

- 1)  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$  — ряд Лорана.
- 2)  $\sum_{k=0}^n c_k (z - z_0)^k$  — правильная часть ряда Лорана
- 3)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$  — главная часть ряда Лорана

### 14.2. Единственность разложения Лорана.

**Теорема.** Пусть  $f(z)$  представлена в некотором кольце  $r_1 < |z - z_0| < r_2$  в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Покажем, что это и есть разложение в ряд Лорана.

*Доказательство.*

- Для начала докажем голоморфность функции  $f(z)$  в кольце:

Заметим, что  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$  сходятся на соответствующих множествах, а мы знаем, что степенной ряд внутри интервала сходимости будет сходиться абсолютно, а если мы возьмем замкнутое подмножество множества сходимости, то на нем ряд будет сходиться равномерно. Тогда в кольце  $r_1 + \delta \leq |z - z_0| \leq r_2 - \delta$  наш ряд сходится абсолютно и равномерно.

Итого получили абсолютно и равномерно сходящийся ряд, состоящий из аналитических функций, тогда (по теореме, которую мы не доказывали) сумма ряда, а именно функция  $f(z)$  — аналитическая функция, а значит она голоморфная, тогда мы можем  $f(z)$  разложить в ряд Лорана.

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1}(\zeta - z_0)^k$$

- Так как наш ряд сходится абсолютно и равномерно, то мы можем его проинтегрировать почленно, тогда

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| < \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1} \oint_{\varepsilon} (\zeta - z_0)^k d\zeta = (*)$$

Вычислим отдельно интеграл  $\oint_{\varepsilon} (\zeta - z_0)^k d\zeta$ , для этого перейдем к другой переменной интегрирования:

$$\zeta = z_0 + \varepsilon e^{i\varphi}, \varphi \in [0; 2\pi]$$

$$d\zeta = \varepsilon \cdot i \cdot e^{i\varphi} d\varphi$$

$$\oint_{\varepsilon} (\zeta - z_0)^k d\zeta = \int_0^{2\pi} i \cdot \varepsilon^{k+1} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = i \cdot \varepsilon^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi \stackrel{\text{Формула Эйлера}}{=} i \cdot \varepsilon^{k+1} \cdot \begin{cases} 0, & k+1 \neq 0 \\ 2\pi, & k+1 = 0 \end{cases}$$

Возвращаясь к исходному неравенству получим, что

$$(*) = \frac{\varepsilon}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1} \cdot i \cdot \varepsilon^k \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot a_n \cdot \varepsilon^{-1} \cdot 2\pi = a_n$$

■

### 14.3. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.

**Определение.**

- 1)  $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$  — ряд Лорана.
- 2)  $\sum_{k=0}^n c_k(z - z_0)^k$  — правильная часть ряда Лорана
- 3)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$  — главная часть ряда Лорана

Пусть  $z_0$  — однозначно особая точка функции  $f$ . Рассмотрим ряд Лорана функции  $f$  в кольце  $0 < |z - z_0| < \delta$ :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

Рассмотрим множество  $I = \{k \mid c_{-k} \neq 0\}$ , тогда

1.  $z_0$  — устранимая особенность  $\iff I = \emptyset$ , т.е. все  $c_{-k} = 0$
2.  $z_0$  — полюс  $\iff I$  — конечное
3.  $z_0$  — существенная особенность  $\iff I$  — бесконечное

## 15. Вычет голоморфной функции в однозначной особой точке. Теорема Коши о вычетах. Вычет как коэффициент $c_{-1}$ ряда Лорана. Вычисления вычета в полюсе.

**Определение.** Пусть функция  $f(z)$  голоморфна в  $0 < |z - z_0| < \delta$ , тогда вычет функции  $f$  в точке  $z_0$  ( $\text{res}_{z_0} f$ ) это величина, равная  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z)dz$ , где  $0 < \varepsilon < \delta$ .

**Теорема.** Теорема Коши о вычетах.

Пусть  $f$  голоморфна в области  $D$  всюду, за исключением конечного числа однозначных особых точек  $z_1, \dots, z_n$ , тогда

$$\oint_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}_{z_k} f$$

*Доказательство.* Окружим каждую точку маленьким кругом, которые не пересекаются и не вылезают за предел множества. Каждая точка -  $z_i$ , а её круг -  $U_i$ .

Рассмотрим множество  $D' = D \setminus (U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n)$ , тогда по теореме Коши:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial D} f(z)dz = 0 &\implies \oint_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\partial U_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{res}_{z_k} f \\ &(\oint_{\partial U_k} f(z)dz = 2\pi i \text{res}_{z_k} f) \end{aligned}$$

■

**Теорема.** Вычет как коэффициент  $c_{-1}$  ряда Лорана:  $\text{res}_{z_0} f = c_{-1}$ .

*Доказательство.* Пусть  $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$  в некоторой проколотой окрестности  $0 < |z - z_0| < \delta$ . Так как этот ряд сходится, то мы можем его почленно проинтегрировать:  $\text{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon} f(z)dz$ . Возьмём замкнутое множество  $\delta < |z - z_0| < r - \delta$ , тогда на этом множестве ряд будет сходиться равномерно, а значит мы можем почленно применить этот интеграл к каждому слагаемому ряда:  $\text{res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\varepsilon} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \oint_{|z-z_0|=\varepsilon} (z - z_0)^k dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot c_{-1} \cdot 2\pi i = c_{-1}$ . Здесь мы заметили, что интеграл внутри суммы обращается в  $2\pi i$  при  $k + 1 = 0$ , и в 0 в обратном случае. ■

**Предложение.** Пусть  $z_0$  - полюс порядка  $n$ .  $f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots$ . Домножим на  $(z - z_0)^n$ . Получим  $f(z)(z - z_0)^n = c_{-n} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{n-1} + c_0(z - z_0)^n + \dots$ . Сделав разложение по Тейлору получим  $c_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} (f(z)(z - z_0)^n)^{(n-1)}|_{z=z_0}$ . Если  $n = 1$ , то  $c_{-1} = (f(z)(z - z_0))|_{z=z_0}$ , на самом деле так как у  $f$  есть неприятность в точке  $z_0$ , то как правило необходимо считать предел.