Математический анализ 2, Коллоквиум IV

Версия от 14.06.2021 07:34

Содержание

1. **Кусочно-гладкая кривая и её длина. Элемент длины для параметрически заданной кривой. Криволинейный интеграл I-го рода.**

2. **Кусочно-гладкая поверхность и её площадь. Элемент площади для параметрически заданной поверхности. Поверхностный интеграл I-го рода.**

3. **Дифференциальная 1-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую. Ориентация кривой. Криволинейный интеграл II-го рода. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода.**

4. **Формула Грина и её приложение к вычислению площади клоской фигуры. Внешний дифференциал 2-мерный 1-формы и краткая запись формулы Грина.**

5. **Дифференциальная 2-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность. Ориентация поверхности и вектор нормали. Поверхностный интеграл II-го рода. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода.**

6. **Формула Остроградского-Гаусса и её приложение к вычислению объема тела. Внешний дифференциал 3-мерной 2-формы, дивергенция векторного поля и краткая запись формы Остроградского-Гаусса.**

7. **Формула Стокса. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы, ротор векторного поля и краткая запись формулы Стокса.**

8. **Комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$.**

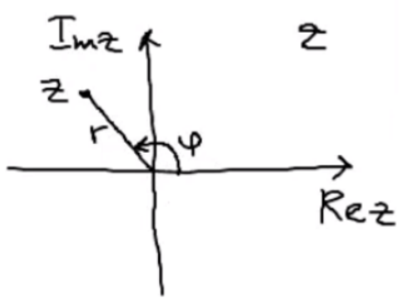
Комплексная плоскость.

Формально вводим символ i, такой что $i^2 = -1$.

Определение. Линейная комбинация обычной единицы и мнимой единицы с вещественными коэффициентами называется *комплексном числом* $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.
Действительная часть числа z : $\operatorname{Re} z = x$, мнимая часть числа z : $\operatorname{Im} z = y$.

Определение. Каждому комплексному числу z ставится в соответствии *сопряженное* $\overline{z} = x - iy$.

Можно еще задать комплексное число геометрически:



Определение. Тогда *модуль* числа z – $r = |z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Аргумент* числа z – угол φ, такой что $x = |z| \cos \varphi$, $y = |z| \sin \varphi$.

На этом моменте впервые встает вопрос о многозначности функций.

Определение. Если мы хотим говорить про однозначно выбираемый аргумент, то пишут $\varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$ или $(-\pi; \pi]$ – *главное значение* аргумента. При этом, $\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ – *полный (или многозначный)* аргумент.

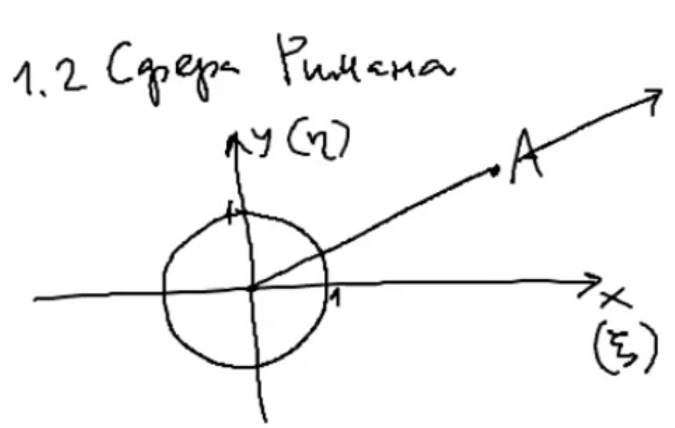
Определение. *Тригонометрическая запись* комплексного числа: $z = |z| \cdot (\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$.

Определение. *Показательная форма записи*: комплексного числа: $z = |z| \cdot e^{i \operatorname{Arg} z}$.

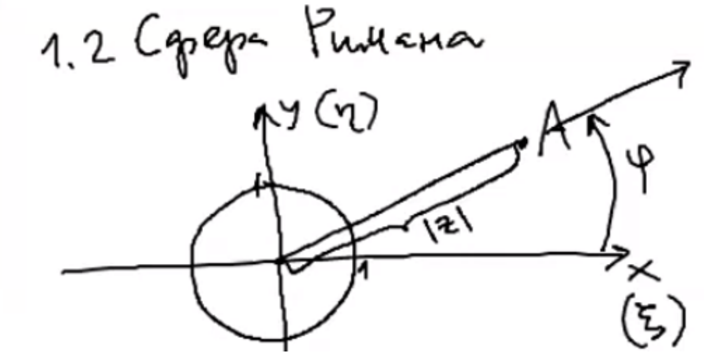
Комлпексную плоскость обычно обозначают $\mathbb{C}$.

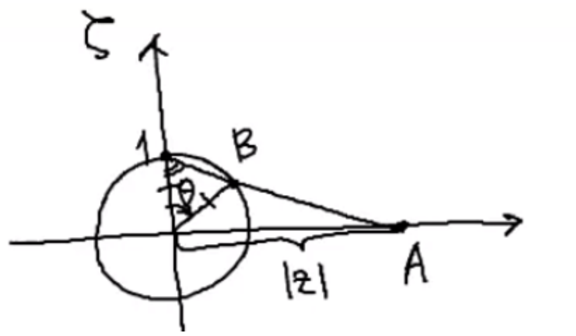
Сфера Римана и стереографическая проекция.

На рисунке не окружность, а сфера единичная.



Рассматриваем вертикальное сечение в плоскости, содержащей ось ζ и прямую, проходящую через начало координат и точку A. Наша сфера выглядит следующим образом (рисунок справа):





Определение. Отображение $B \longmapsto A$ – *стереографическая проекция.* Но для нас будет более важным обратное отображение.

Заметим, что $|z| = \operatorname{tg} \dfrac{\pi - \theta}{2}$ и $\varphi = \arg z$.

Отсюда несложно вывести (по словам Маевского Е.В.), что $\xi = \dfrac{2x}{1 + |z|^2}, \eta = \dfrac{2y}{1 + |z|^2}, \zeta = \dfrac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}$.

Обратные формулы: $x = \dfrac{\xi}{1 - \zeta}$ и $y = \dfrac{\eta}{1 - \zeta}$.

В действительном матанализе мы фактически имели две бесконечности (для нас было важно направление): $+\infty$ и $-\infty$. В комплексном матанализе чаще всего не имеет значения, в каком направлении мы идем в бесконечность. Поэтому рассматривается просто *бесконечно удаленная точка* и обозначается $z \to \infty$. Это означает, что $|x|, |y| \to \infty$.

Можно заметить, что если мы захотим добавить бесконечно удаленную точку к комплексной плоскости, то ей будет соответствовать северный полюс на сфере Римана. Если мы добавим к комплексной плоскости бесконечно удаленную точку, то это называется *замкнутой комплексной плоскостью*: $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. И вот как раз замкнутую комплексную плоскость очень удобно представлять, как сферу Римана.

Стало непонятно, надо ли техать про сходимость последовательности, поэтому ссылка с таймкодом на лекцию: тык.

Функция комплексной переменной.

Определение. *Функция комплексной переменной* $w = f(z)$ – отображение, заданное на одной комплексной плоскости и принимающее значения на другой комплексной плоскости.

Считаем, что $w = u + iv$, тогда становится понятно, что $f(z) = u(z) + iv(z)$, где $u(z), v(z)$ – вещественные функции от комплексной переменной. Еще можно представлять функцию от z как функцию от двух переменных: $f(z) = \widetilde{f}(x, y)$. Тогда $\widetilde{f}(x, y) = \widetilde{u}(x, y) + i\widetilde{v}(x, y)$.
Замена переменной:

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \overline{z} = x - iy \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{z + \overline{z}}{2} \\ y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i} \end{cases}$$

Тогда $f(z) = \widetilde{f}\left(\dfrac{z + \overline{z}}{2}, \dfrac{z - \overline{z}}{2i}\right)$.

Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$.

Определение. *Экспонента* e^z в комплексном случае задается двумя эквивалентными способами:

1) $e^z := \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n \ \forall z$
2) $e^z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

На основе этого определения доказываются все те же известные нам алгебраические свойства экспоненты для комплексного случая.

Тогда можем написать, что $w = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \implies u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$.

Определение. Косинус в комплексном случае тоже задается двумя эквивалентными способами:

1) $\cos z := \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$
2) $\cos z := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$

С помощью этих формул можно получить следующее:

$$\cos z = \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) + e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i\sin x \operatorname{sh} y \implies u = \cos x \operatorname{ch} y, v = -\sin x \operatorname{sh} y$$

Определение. Синус в комплексном случае тоже задается двумя эквивалентными способами:

1) $\sin z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
2) $\cos z := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!}$

С помощью этих формул можно получить следующее:

$$\sin z = \frac{e^{-y}(\cos x + i\sin x) - e^{y}(\cos x - i\sin x)}{2i} = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y \implies u = \sin x \operatorname{ch} y, v = \cos x \operatorname{sh} y$$

Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$.

Определение. *Комплексным корнем n–ой степени* $\sqrt[n]{z}$, $z \neq 0$ называется каждое число $w : w^n = z$, где $n = 2, 3, 4, \ldots$

Определение. *Полным натуральным логарифмом* $\operatorname{Ln} z$, $z \neq 0$ называется каждое число $w : e^w = z$. Составим $z = |z| \cdot e^{i \operatorname{Arg} z} \implies \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z = \ln|z| + i\arg z + i2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Это пример бесконечнозначной функции.

9. Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции. Условия Коши-Римана и голоморфность. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.

10. Голоморфная функция нескольких переменных. Голоморфность композиции (в том числе: суммы, произведения, частного) голоморфных функций. Голоморфность обратной функции.

Определение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – область определения
$f : D \to \mathbb{R}^2$ – непрерывно дифференцируема.
f называется голоморфной в D, если она удовлетворяет условию Коши-Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Определение. Пусть $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ – области определения. Функция $F : G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}$:

$$F(z_1, z_2) = U(x_1, y_1, x_2, y_2) + iV(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

называется голоморфной, если она непрерывно дифференцируема и голоморфна по каждой переменной в отдельности.

Теорема. Пусть $D \subseteq \mathbb{C}$ – область, $\varphi_1 : D \to G_1$, $\varphi_2 : D \to G_2$ – голоморфны.
Тогда $f(z) = F(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ – голоморфна.

Доказательство. Для удобства будем иметь в виду, что $\varphi_k(z) = \xi_k(x, y) + i\eta_k(x, y)$, $k \in \{1, 2\}$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$
Тогда

$$u'_x = U'_{x_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + U'_{y_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + U'_{x_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + U'_{y_1}\frac{\partial \eta_2}{\partial x} = V'_{y_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial y} + (-V'_{x_1}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right) + V'_{y_2}\frac{\partial \eta_2}{\partial y} + (-V'_{x_2}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right) = v'_y$$

Аналогично, $u'_y = -v'_x$ ∎

Следствие. Голоморфны следующие функции:

1. $F(z_1, z_2) = az_1 + bz_2$
2. $F(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$
3. $F(z_1, z_2) = \dfrac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$

Теорема. Пусть $w = f(z)$, $w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$ и f – голоморфна в окрестности точки z_0.
Тогда в некоторой окрестности точки w_0 существует единственная обратная функция $f^{-1}(w) : f^{-1}(w_0) = z_0$, которая является голоморфной.

Доказательство. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}, \text{ причем} \begin{cases} u_0 = u(x_0, y_0) \\ v_0 = v(x_0, y_0) \end{cases}$$

Посчитаем Якобиан отображения в z_0:

$$\left.\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}\right|_{z_0} = |f'(z_0)|^2 > 0 \implies \text{Существует единственное обратное отображение по теореме о неявной функции}$$

Найдем матрицу Якоби обратного отображения:

$$\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}\Bigg|_{w_0} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}^{-1}\Bigg|_{z_0} = \frac{1}{|f'(z_0)^2|}\begin{pmatrix} v'_y & -u'_y \\ -v'_x & u'_x \end{pmatrix}$$

Рассмотрим элементы на главных диагоналях первой и последней матриц. Т.к. исходное отображение голоморфно, то $v'_y = u'_x$, а значит и $x'_u = y'_u$.

Аналогично, рассмотрев элементы на побочных диагоналях, получим, что $x'_v = -y'_u$. Условие Коши-Римана выполнено, значит, обратная функция является голоморфной. ■

11. Аналитическая функция. Аналитичность голоморфной функции. Неравенство Коши для коэффициентов ряда. Радиус сходимости ряда как максимальный радиус круга, в котором функция голоморфна. Теорема Лиувилля.

Определение. Функция называется аналитической в точке z_0, если $\exists\{c_n\} \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z-z_0)^k,\ |z-z_0| < \delta$$

Теорема. Если функция f голоморфна в окрестности z_0, то она аналитична в z_0.

Доказательство. Пусть $|z-z_0| < \varepsilon < \delta$, $L = \{\zeta : |\zeta - z_0| = \varepsilon\}$

Тогда по формуле Коши: $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}d\zeta =$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\left(1 + \frac{z-z_0}{\zeta-z_0} + \dots + \left(\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^n + \frac{\left(\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{n+1}}{1-\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}}\right)d\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta\right)\cdot(z-z_0)^k + \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_L f(\zeta)\cdot\frac{\left(\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right)^{n+1}}{\zeta - z}d\zeta}_{r_n(z,z_0)}$$

Пусть $M = \sup\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon}|f(\zeta)|$, а также заметим, что $|\zeta - z| \geqslant |\zeta - z_0| - |z-z_0| = \varepsilon(1-\alpha)$, тогда:

$$|r_n(z,z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\oint\limits_L |f(\zeta)|\cdot\frac{\left|\dfrac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right|^{n+1}}{|\zeta-z|}dl \leqslant \frac{M\cdot\alpha^{n+1}}{2\pi\cdot\varepsilon(1-\alpha)}\cdot\underbrace{2\pi\varepsilon}_{\text{длина кривой}} \leqslant \frac{M\cdot\alpha^{n+1}}{\varepsilon(1-\alpha)} \to 0 \text{ при } n\to\infty$$

Значит, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, $c_k = \dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_L \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta$ при $\forall z : |z-z_0| < \delta$.

Так как $\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$ голоморфна в кольце $\varepsilon_1 \leqslant |z-z_0| \leqslant \varepsilon_2$, то $\oint\limits_{|z-z_0|=\varepsilon_2}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta - \oint\limits_{|z-z_0|=\varepsilon_1}\dfrac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{k+1}}d\zeta = 0 \implies c_k$ не зависит от ε. ■

Следствие. (Неравенство Коши)

$|c_k| \leqslant \oint\limits_L \dfrac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z_0|^{k+1}}dl \leqslant \dfrac{M}{2\pi\varepsilon^{k+1}}\cdot 2\pi\varepsilon = \dfrac{M}{\varepsilon^k}$, подставим M:

$|c_k| \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon^k}\cdot\sup\limits_{|z-z_0|=\varepsilon}|f(z)|\ \forall\varepsilon < \delta$

Теорема. Пусть $f(z)$ голоморфна в $|z-z_0| < r$, но не является голоморфной в круге большего радиуса, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k$, $|z-z_0| < R = \dfrac{1}{\overline{\lim}_{k\to\infty}\sqrt[k]{|c_k|}}$. Тогда $R = r$.

Доказательство. Пусть $M = \sup\limits_{|z-z_0|=\varepsilon}|f(z)|$, $|c_k| \leqslant \dfrac{M}{\varepsilon^k}\ \forall\varepsilon < r$

$\overline{\lim}\sqrt[k]{|c_k|} \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon} \implies R \geqslant \varepsilon\ \forall\varepsilon < r \implies R \geqslant.$

Но если $R > r$, то ряд сходится в z: $|z - z_0| > r$, что противоречит условию.
Значит, $R = r$. ■

Теорема. (Лиувилля)
Если функция $f(z)$ голоморфна и ограничена на $\mathbb{C}$, то она – константа.

Доказательство. Пусть $M = \sup\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|$, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$
Так как $|c_k| \leqslant \dfrac{M}{\varepsilon^k}$ $\forall\varepsilon$, то при $\varepsilon \to \infty$ получаем, что $c_1 = c_2 = \cdots = 0 \implies f(z) = c_0$ ■

12. Бесконечная дифференцируемость и голоморфность аналитической функции. Нуль аналитической функции и его порядок. Изолированность нуля аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции.

Предложение. Пусть $f(z)$ - аналитическая в точке z_0. Значит, функция $f(z)$ представима в окрестности z_0 в виде ряда $\sum\limits_{k=0}^{\inf} c_k(z - z_0)^k$, $|z - z_0| < \delta$. Тогда ряд будет абсолютно сходиться $\forall z : |z - z_0| = \varepsilon < \delta \implies \sum\limits_{k=0}^{\inf} |c_k|\varepsilon^k$. Отсюда следует $\exists A > 0 : |c_k|\varepsilon^k \leqslant A \implies |c_k| \leqslant \dfrac{A}{\varepsilon^k}$.
Покажем что аналитическая функция дифференцируема. Рассмотрим $|z - z_0| \leqslant \varepsilon_1 < \varepsilon < \delta$. Берём приращение $0 < |h| < \varepsilon - \varepsilon_1$.

$$\frac{(z + h) - f(z)}{h} = \sum_{k=1}^{\inf} c_k \frac{(z - z_0 + h)^k - (z - z_0)^k}{h}$$

$$\frac{(z - z_0 + h)^k - (z - z_0)^k}{h} = k(z-z_0)^{k-1}+c_k^2 h(z-z_0)^{k-2}+\cdots+c_k^k h^{k-1} = \sum_{k=1}^{\inf} kc_k(z-z_0)^{k-1}+hc_2+h\sum_{k=3}^{\inf} c_k(c_k^2(z-z_0+\cdots+c_k^k h^{k-2}))$$

При $k \geqslant 3$: $c_k^2\varepsilon_{k-2} + c_k^3\varepsilon_1^{k-3}|h| + \cdots + c_k^k|h|^{k-2} \leqslant c_k^2(\varepsilon_1 + |h|)^{k-2}$.
Теперь возьмём по модулю третью сумму: $|h\sum\limits_{k=3}^{\inf} c_k(c_k^2(z - z_0 + \cdots + c_k^k h^{k-2}))| \leqslant \sum\limits_{k=3}^{\inf} \dfrac{A}{\varepsilon^k}\dfrac{k(k-1)}{2}(\varepsilon_1 + |h|)^{k-2}$; так как $\dfrac{\varepsilon_1 + |h|}{\varepsilon} < 1$, то полученный ряд сходится. Взяв $h \to 0$, получим $f'(z) = \sum\limits_{k=1}^{\inf} kc_k(z - z_0)^{k-1}$. Мы обосновали что комплексную аналитическую функцию можно почленно дифференцировать. В таком случае, можно заметить, что f' - тоже аналитическая функция, а значит $f''(z) = \sum\limits_{k=2}^{\inf} k(k-1)c_k(z - z_0)^{k-2}$, ч.т.д.
Мы получили, что f бесконечно дифференцируема, а из дифференцируемости вытекает её голоморфность. $f(z)$ имеет производную, это равносильно условиям Коши-Римана, кроме того $f'(z)$ непрерывна, а это даёт голоморфность.

Нуль аналитической функции, его порядок и изолированность.
Пусть в z_0 значение аналитической функции $f(z_0)$ равно 0. В этом случае z_0 называется нулём функции $f(z)$. Тогда в разложении в ряд Тейлора будет отсутствовать свободный член $c_0 = 0$. В случае когда отсутствуют все слагаемые, содержащие $(z - z_0)^i, i < n$, где n - некоторое число, то разложение будет иметь вид $f(z) = \sum\limits_{k=n}^{\inf} c_k(z - z_0)^k$, а сама точка z_0 будет называться нулём порядка n.
Под изолированностью нуля какой-либо функции подразумевается существование такой окрестности нуля, что в ней отсутствуют другие нули.

Теорема. Теорема (прим. техера: подготовительная) единственности аналитической функции.
Если f аналитична в точке z_0 и z_0 является предельной точкой последовательности нулей функции f, т.е. $\exists z_n : z_n \to z_0, f(z_n) = 0 \forall n$, то $f(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки z_0.

Доказательство. Так как f непрерывна, то $f(z_0) = 0 \implies$ в разложении $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\inf} c_k(z - z_0)^k$ некоторое количество начальных коэффициентов будет равно нулю: $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$, т.е. $f(z) = (z - z_0)^n(c_{n+1} + c_{n+2}(z - z_0) + \dots)$. Получили, что z_0 - это ноль функции f кратности n.
Рассмотрим сумму в скобках. Она задаёт голоморфную функцию $g(z)$. Значит, $g(z)$ - непрерывна, и так как $c_{n+1} \neq 0$, то существует такая окрестность $|z - z_0| < \varepsilon : |g(z)| > 0$. $\implies$ в круге радиуса $|z - z_0| < \varepsilon$ нет дургих нулей функции, т.е. z_0 - ноль аналитической функции должен быть изолированным. А это противоречит тому, что у нас n нулей, т.е. такого n не существует, а значит $f(z) = 0$ в некоторой окрестности z. ■

Отсюда перейдём непосредственно к самой теореме о единственности.

Теорема. Теорема (прим. техера: основная) единственности аналитической функции.
Если две функции $f_1(z), f_2(z) \in \Sigma D$ совпадают на множестве ε, которое имеет хотя бы одну предельную точку $z_0 \in D$, то $f_1(z) = f_2(z)$ всюду в D.

Доказательство. Рассмотрим $f = f_1 - f_2$. Покажем, что $f \equiv 0$ в D. Т.е. требуется доказать, что множество $F = z \in D : f(z) = 0$, в которое включено ε совпадёт с D. Предельная точка z_0 является нулём функции f в силу непрерывности. Из теоремы доказанной ранее получим, что $f \equiv 0$ в некоторой окрестности z_0, ибо в противном случае эта точка не могла бы быть предельной для множества нулей f. Таким образом, получим, что ядро множества F непусто - оно содержит в себе точку z_0. По построению F открыто, но при этом замкнуто относительно области D. По ранее доказанной теореме можем сказать, что взяв точку $b \in D$, мы получим предельную точку для F, а потому $f(b) \equiv 0$, т.е. $b \in F$. Так как по определению области D связно, то имеем $F = D$. А значит $f \equiv 0$ на всей D, и $f_1(z) = f_2(z)$. ■

13. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\dfrac{1}{f(z)}$. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.

13.1. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность.

Определение. Точка z_0 называется изолированной особой точкой однозначного характера функции f, если $\exists \delta : f$ голоморфна в проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$, но не является голоморфной ни в каком круге $|z - z_0| < r$

Классификация:

- $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C} \iff$ устранимая особенность
- $\exists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty \iff$ полюс
- $\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \iff$ существенная особенность

13.2. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке.

Теорема. Если z_0 – устранимая особенность функции f и $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$, то $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ a, & z = z_0. \end{cases}$
голоморфна в окрестности точки z_0

Доказательство. Пусть f голоморфна в $0 < |z - z_0| < \delta$, $\varepsilon_1 < \varepsilon < \delta$ и $\varepsilon_1 < |z - z_0| < \varepsilon$ Тогда по формуле Коши, получаем, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \underbrace{=}_{(*_1)} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \underbrace{=}_{(*_2)} \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \begin{bmatrix} \text{при } \varepsilon_1 \to 0 \\ z \neq z_0 \end{bmatrix}$$

Объяснения:
$(*_1)$: Граница множества D состоит из двух окружностей: внешней (радиуса ε, которая обходится в положительном

направлении (против часовой стрелки) и внутренней (радиуса ε_1), которая обходится в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Заодно сразу поменяем знак перед интегралом по внутренней окружности, для того, чтобы написать его в положительном направлении.
$(*_2)$: Оценим сверху модуль второго интеграла:

$$\underbrace{\left|\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta\right|}_{\text{интеграл второго рода}} \leqslant \frac{1}{2\pi i}\underbrace{\oint\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon_1}\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right|dl}_{\text{интеграл первого рода}}$$

Затем оценим саму подынтегральную функцию:

$$\left.\begin{array}{c} f(\zeta)=a+o(1) \text{ при } \varepsilon_1\to 0 \\ |\zeta-z|\geqslant|\underbrace{t-z_0}_{\text{число}}|-\varepsilon_1 \\ \oint\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon_1} dl = 2\pi\varepsilon_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\underbrace{\oint\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon_1}\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\right|dl}_{\text{интеграл первого рода}} \xrightarrow[\varepsilon_1\to 0]{} 0$$

Вернемся к получившемуся выражению для функции $f(z)$
Так как мы перешли к пределу, мы можем сказать, что во всех точка z, включая z_0, можно понимать левую часть выражения как $\tilde{f}(z)$, тогда получим:

$$\widetilde{f}(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta-z_0|=\varepsilon}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta \quad \begin{bmatrix}\text{при } \varepsilon_1\to 0 \\ |z-z_0|<\delta\end{bmatrix}$$

Если мы применим к данному интегралу рассуждения, которые мы применяли при доказательстве аналитичности голоморфной функции (11 билет), получим, что функция представленная данным образом аналитична в точке z_0, а отсюда следует, что она голоморфна в точке z_0. Ну и напоследок, если мы в этот интеграл вместо z подставим z_0, в силу произвольности ε, устремив ε к нулю, мы получим, что $\widetilde{f}(z_0)=a$. ■

13.3. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$.

Определение. Полюс это точка, такая что в проколотой окрестности этой точки функция голоморфна, а в самой этой точке в пределе получается бесконечное значение.

Пускай $f(z)\xrightarrow[z\to z_0]{}\infty$, то есть z_0 – полюс
Рассмотрим функцию $g(z)=\dfrac{1}{f(z)}$, тогда $g(z)\xrightarrow[z\to z_0]{} 0$ и $g(z)$ будет голоморфной в проколотой окрестности точки z_0 (так как $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности точки z_0 и не обращается в 0), отсюда делаем вывод, что $g(z)$ имеет устранимую особенность.

Доопределим функцию $g(z)$ в точке z_0, получим новую функцию $\widetilde{g}(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{f(z)}, & z\neq z_0, \\ 0, & z=z_0.\end{cases}$ которая будет голоморфной в точке z_0, а значит будет аналитической, мы можем представить ее в виде степенного ряда:

$$\widetilde{g}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^k \text{ так как } \widetilde{g}(z_0)=0 \text{ то } c_0=..=c_n=0, c_{n+1}\neq 0\Rightarrow\widetilde{g}(z)=(z-z_0)^n\underbrace{(c_{n+1}+c_{n+2}(z-z_0)+..)}_{h(z)}$$

Определение. В такой ситуации говорят, что $\widetilde{g}(z)$ имеет нуль $n-$ого порядка.

Распишем тогда как будет выглядеть изначальная функция $f(z)$:

$$f(z)=\frac{1}{g(z)}=\frac{1}{(z-z_0)^n}\cdot\underbrace{\frac{1}{h(z)}}_{\text{голоморфна в } z_0}$$

Определение. Число n в полученном выражении называется называется порядком полюса. Функция $f(z)$ имеет полюс $n-$ого порядка.

13.4. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.

Теорема. Если z_0 − существенно особая точка функции f, то

$$\forall a \in \overline{\mathbb{C}}\ \exists\{z_n\}\colon z_n \to z_0,\ f(z_n) \to a$$

Доказательство.

- $a = \infty$ Если функция ограничена в $0 < |z - z_0| < \delta$ то z_0 − устранимая особенность, но так как мы знаем, что z_0 не является устранимой особенностью, то функция f не ограничена в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$, а значит $\exists\{z_n\}:\ z_n \to z_0,\ f(z_n) \to \infty$

- Если $\forall\delta\ \exists z:\ 0 < |z - z_0| < \delta\ f(z) = a$, тогда $\exists\{z_n\}:\ 0 < |z_n - z_0| < \dfrac{1}{n}\ f(z_n) = a$ (выбрали последовательность, на которой функция в точности принимает значение a)

- $\exists\delta:\ 0 < |z - z_0| < \delta\ f(z) \neq a$ Рассмотрим функцию $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - a}$, так как $f(z)$ в некоторой проколотой окрестности не принимает значение a, то функция $g(z)$ − голоморфна в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$

  Тогда функция f выглядит следующим образом $f(z) = a + \dfrac{1}{g(z)}$ отсюда следует, что g в точке z_0 имеет существенную особенность. По первому рассмотренному случаю получаем, что для функции g верно, что $\exists\{z_n\}:\ \ g(z_n) \to \infty$, тогда $f(z_n) \to a$.

$\blacksquare$

14. Ряд Лорана и его сходимость. Единственность разложения Лорана. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.

14.1. Ряд Лорана и его сходимость.

Пускай f голоморфна в кольце $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Зафиксируем $\forall z$ и $\forall\varepsilon_1,\varepsilon_2:\ r_1 < \varepsilon_1 < |z - z_0| < \varepsilon_2 < r_2$
Рассмотрим в плоскости ζ кольцо $\varepsilon_1 \leqslant |z - z_0| \leqslant \varepsilon_2$ Тогда по формуле Коши мы получим, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta}_{(1)}\underbrace{-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta}_{(2)}$$

Рассмотрим эти два интеграла отдельно:

$$(1)\colon\ \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta\cdot\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}}d\zeta = \sum_{k=0}^{n}c_k(z - z_0)^k + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_2}f(\zeta)\frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{\zeta - z}d\zeta$$

Заметим, что модуль остаточного члена $\left|\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_2}f(\zeta)\dfrac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^{n+1}}{\zeta - z}d\zeta\right|$ стремится к нулю, а значит ряд будет сходиться

Аналогично:

$$(2)\colon\ -\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\cdot\frac{\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\cdot\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0} + .. + \left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^m + \frac{\left(\frac{\zeta - z}{z - z_0}\right)^{m+1}}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}}\right)d\zeta =$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\varepsilon_1}f(\zeta)\cdot\frac{\left(\frac{\zeta - z_0}{z - z_0}\right)^m}{z - \zeta}$$

В данном случае, дробь в числителе остаточного члена по модулю меньше 1, поэтому при возведении в степень мы будем получать число стремящееся к 0, то есть остаточный член будет стремиться к 0, а значит ряд сходится.

Объединяя (1) и (2) получаем обобщенный степенной ряд:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta,\ k \in \mathbb{Z},\ r_1 < \varepsilon < r_2$$

Определение.

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$ – ряд Лорана.

2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k (z - z_0)^k$ – правильная часть ряда Лорана

3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k}$ – главная часть ряда Лорана

14.2. Единственность разложения Лорана.

Теорема. Пусть $f(z)$ представлена в некотором кольце $r_1 < |z - z_0| < r_2$ в виде

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

Покажем, что это и есть разложение в ряд Лорана.

Доказательство.

- Для начала докажем голоморфность функции $f(z)$ в кольце:

  Заметим, что $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ и $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$ сходятся на соответствующих множествах, а мы знаем, что степенной рад внутри интервала сходимости будет сходиться абсолютно, а если мы возьмем замкнутое подмножество множества сходимости, то на нем ряд будет сходиться равномерно. Тогда в кольце $r_1 + \delta \leqslant |z - z_0| \leqslant r_2 - \delta$ наш ряд сходится абсолютно и равномерно.

  Итого получили абсолютно и равномерно сходящихся ряд, сосотящий из аналитических функций, тогда (по теореме, которую мы не доказывали) сумма ряда, а именно функция $f(z)$ – аналитическая функция, а значит она голоморфная, тогда мы можем $f(z)$ разложить в ряд Лорана.

  $$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1} (\zeta - z_0)^k$$

- Так как наш ряд сходится абсолютно и равномерно, то мы можем его проинтегрировать почленно, тогда

  $$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\zeta - z_0| < \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1} \oint\limits_{\varepsilon} (\zeta - z_0)^k d\zeta = (*)$$

  Вычислим отдельно интеграл $\oint\limits_{\varepsilon} (\zeta - z_0)^k d\zeta$, для этого перейдем к другой переменной интегрирования:

  $$\zeta = z_0 + \varepsilon e^{i\varphi},\ \varphi \in [0; 2\pi]$$
  $$d\zeta = \varepsilon \cdot i \cdot e^{i\varphi} d\varphi$$

  $$\oint\limits_{\varepsilon} (\zeta - z_0)^k d\zeta = \int_0^{2\pi} i \cdot \varepsilon^{k+1} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = i \cdot \varepsilon^{k+1} \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi \underbrace{=}_{\text{Формула Эйлера}} i \cdot \varepsilon^{k+1} \cdot \begin{cases} 0, & k+1 \neq 0 \\ 2\pi, & k+1 = 0 \end{cases}$$

  Возвращаясь к исходному неравенству получим, что

  $$(*) = \frac{\varepsilon}{2\pi i} \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{k+n+1} \cdot i \cdot \varepsilon^k \cdot \int_0^{2\pi} e^{i(k+1)\varphi} d\varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \cdot a_n \cdot \varepsilon^{-1} \cdot 2\pi = a_n$$

■

14.3. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.

Определение.

$$1)\ \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}\ -\ \text{ряд Лорана.}$$

$$2)\ \sum_{k=0}^{n} c_k(z-z_0)^k\ -\ \text{правильная часть ряда Лорана}$$

$$3)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}\ -\ \text{главная часть ряда Лорана}$$

Пускай z_0 – однозначно особая точка функции f. Рассмотрим ряд Лорана функции f в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k}$$

Рассмотрим множество $I = \{k \mid c_{-k} \neq 0\}$, тогда

1. z_0 – устранимая особенность $\iff$ $I = \varnothing$, т.е. все $c_{-k} = 0$
2. z_0 – полюс $\iff$ I – конечное
3. z_0 – существенная особенность $\iff$ I – бесконечное

15. Вычет голоморфной функции в однозначной особой точке. Теорема Коши о вычетах. Вычет как коэффициент c_{-1} ряда Лорана. Вычисления вычета в полюсе.

Определение. Пусть функция $f(z)$ голоморфна в $0 < |z - z_0| < \delta$, тогда вычет функции f в точке $z_0(res_{z_0} f)$ это величина, равная $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} f(z)dz$, где $0 < \varepsilon < \delta$.

Теорема. Теорема Коши о вычетах.

Пусть f голоморфна в области D всюду, за исключением конечного числа однозначных особых точек $z_1, \dots, z_n$, тогда

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f$$

Доказательство. Окружим каждую точку маленьким кругом, которые не пересекаются и не вылезают за предел множества. Каждая точка - z_i, а её круг - U_i.

Рассмотрим множество $D' = D$

$(U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n)$, тогда по теореме Коши:

$$\oint\limits_{\partial D} f(z)dz = 0 \implies \oint\limits_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \oint\limits_{\partial U_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} res_{z_k} f$$

$$(\oint\limits_{\partial U_k} f(z)dz = 2\pi i res_{z_k} f)$$

■

Теорема. Вычет как коэффициент c_{-1} ряда Лорана: $res_{z_0} f = c_{-1}$.

Доказательство. Пусть $f(z) = \sum\limits_{k=-\inf}^{\inf} c_k(z-z_0)^k$ в некоторой проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$. Так как этот ряд сходится, то мы можем его почленно проинтегрировать: $res_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\varepsilon} f(z)dz$. Возьмём замкнутое множество

$\delta < |z - z_0| < r - \delta$, тогда на этом множестве ряд будет сходиться равномерно, а значит мы можем почленно применить этот интеграл к каждому слагаемому ряда: $res_{z_0} f = \dfrac{1}{2\pi i} \oint\limits_{\varepsilon} f(z)dz = \dfrac{1}{2\pi i} \sum\limits_{k=-\inf}^{\inf} c_k \oint\limits_{|z-z_0|=\varepsilon} (z-z_0)^k dz = \dfrac{1}{2\pi i} \cdot c_{-1} \cdot 2\pi i = c_{-1}$. Здесь мы заметили, что интеграл внутри суммы обращается в $2\pi i$ при $k+1=0$, и в 0 в обратном случае. ■

Предложение. Пусть z_0 - полюс порядка n. $f(z) = \dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \dfrac{c_{-n}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots$. Домножим на $(z-z_0)^n$. Получим $f(z)(z-z_0)^n = c_{-n} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n + \dots$. Сделав разложение по Тейлору получим $c_{-1} = \dfrac{1}{(n-1)!}(f(z)(z-z_0)^n)^{(n-1)}|_{z=z_0}$. Если $n=1$, то $c_{-1} = (f(z)(z-z_0))|_{z=z_0}$, на самом деле так как у f есть неприятность в точке z_0, то как правило необходимо считать предел.