# Математический анализ 2, Коллоквиум IV

Версия от 13.06.2021 14:26

## Содержание

1. **Кусочно-гладкая кривая и её длина. Элемент длины для параметрически заданной кривой. Криволинейный интеграл I-го рода.**

2. **Кусочно-гладкая поверхность и её площадь. Элемент площади для параметрически заданной поверхности. Поверхностный интеграл I-го рода.**

3. **Дифференциальная 1-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую. Ориентация кривой. Криволинейный интеграл II-го рода. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода.**

4. **Формула Грина и её приложение к вычислению площади клоской фигуры. Внешний дифференциал 2-мерный 1-формы и краткая запись формулы Грина.**

5. **Дифференциальная 2-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность. Ориентация поверхности и вектор нормали. Поверхностный интеграл II-го рода. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода.**

6. **Формула Остроградского-Гаусса и её приложение к вычислению объема тела. Внешний дифференциал 3-мерной 2-формы, дивергенция векторного поля и краткая запись формы Остроградского-Гаусса.**

7. **Формула Стокса. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы, ротор векторного поля и краткая запись формулы Стокса.**

8. **Комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Определения экспоненты $e^z$ и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$.**

9. **Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции. Условия Коши-Римана и голоморфность. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.**

10. **Голоморфная функция нескольких переменных. Голоморфность композиции (в том числе: суммы, произведения, частного) голоморфных функций. Голоморфность обратной функции.**

**Определение.** Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – область определения
$f : D \to \mathbb{R}^2$ – непрерывно дифференцируема.
$f$ называется голоморфной в $D$, если она удовлетворяет условию Коши-Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

**Определение.** Пусть $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ – области определения. Функция $F : G_1 \times G_2 \to \mathbb{C}$:

$$F(z_1, z_2) = U(x_1, y_1, x_2, y_2) + iV(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

называется голоморфной, если она непрерывно дифференцируема и голоморфна по каждой переменной в отдельности.

**Теорема.** Пусть $D \subseteq \mathbb{C}$ – область, $\varphi_1 : D \to G_1$, $\varphi_2 : D \to G_2$ – голоморфны.
Тогда $f(z) = F(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ – голоморфна.

*Доказательство.* Для удобства будем иметь в виду, что $\varphi_k(z) = \xi_k(x,y) + i\eta_k(x,y)$, $k \in \{1,2\}$ и $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$
Тогда

$$u'_x = U'_{x_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial x} + U'_{y_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial x} + U'_{x_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial x} + U'_{y_1}\frac{\partial \eta_2}{\partial x} = V'_{y_1}\frac{\partial \eta_1}{\partial y} + (-V'_{x_1}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right) + V'_{y_2}\frac{\partial \eta_2}{\partial y} + (-V'_{x_2}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right) = v'_y$$

Аналогично, $u'_y = -v'_x$ ■

**Следствие.** Голоморфны следующие функции:

1. $F(z_1, z_2) = az_1 + bz_2$
2. $F(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$
3. $F(z_1, z_2) = \dfrac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$

**Теорема.** Пусть $w = f(z)$, $w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$ и $f$ – голоморфна в окрестности точки $z_0$.
Тогда в некоторой окрестности точки $w_0$ существует единственная обратная функция $f^{-1}(w) : f^{-1}(w_0) = z_0$, которая является голоморфной.

*Доказательство.* Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, тогда:

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases}, \text{ причем} \begin{cases} u_0 = u(x_0,y_0) \\ v_0 = v(x_0,y_0) \end{cases}$$

Посчитаем Якобиан отображения в $z_0$:

$$\left.\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix}\right|_{z_0} = |f'(z_0)|^2 > 0 \implies \text{Существует единственное обратное отображение по теореме о неявной функции}$$

Найдем матрицу Якоби обратного отображения:

$$\left.\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}\right|_{w_0} = \left.\begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}^{-1}\right|_{z_0} = \frac{1}{|f'(z_0)^2|}\begin{pmatrix} v'_y & -u'_y \\ -v'_x & u'_x \end{pmatrix}$$

Рассмотрим элементы на главных диагоналях первой и последней матриц. Т.к. исходное отображение голоморфно, то $v'_y = u'_x$, а значит и $x'_u = y'_u$.
Аналогично, рассмотрев элементы на побочных диагоналях, получим, что $x'_v = -y'_u$. Условие Коши-Римана выполнено, значит, обратная функция является голоморфной. ■

11. **Аналитическая функция. Аналитичность голоморфной функции. Неравенство Коши для коэффициентов ряда. Радиус сходимости ряда как максимальный радиус круга, в котором функция голоморфна. Теорема Лиувилля.**

12. **Бесконечная дифференцируемость и голоморфность аналитической функции. Нуль аналитической функции и его порядок. Изолированность нуля аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции.**

13. **Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\dfrac{1}{f(z)}$. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.**

14. **Ряд Лорана и его сходимость. Единственность разложения Лорана. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.**

15. **Вычет голоморфной функции в однозначной особой точке. Теорема Коши о вычетах. Вычет как коэффициент $c_{-1}$ ряда Лорана. Вычисления вычета в полюсе.**