

Математический анализ 2, Коллоквиум IV

Версия от 13.06.2021 17:02

Содержание

1. Кусочно-гладкая кривая и её длина. Элемент длины для параметрически заданной кривой. Криволинейный интеграл I-го рода.	2
2. Кусочно-гладкая поверхность и её площадь. Элемент площади для параметрически заданной поверхности. Поверхностный интеграл I-го рода.	2
3. Дифференциальная 1-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую. Ориентация кривой. Криволинейный интеграл II-го рода. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода.	2
4. Формула Грина и её приложение к вычислению площади кривой. Внешний дифференциал 2-мерной 1-формы и краткая запись формулы Грина.	2
5. Дифференциальная 2-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность. Ориентация поверхности и вектор нормали. Поверхностный интеграл II-го рода. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода.	2
6. Формула Остроградского-Гаусса и её приложение к вычислению объема тела. Внешний дифференциал 3-мерной 2-формы, дивергенция векторного поля и краткая запись формулы Остроградского-Гаусса.	2
7. Формула Стокса. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы, ротор векторного поля и краткая запись формулы Стокса.	2
8. Комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$	2
9. Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции. Условия Коши-Римана и голоморфность. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.	2
10. Голоморфная функция нескольких переменных. Голоморфность композиции (в том числе: суммы, произведения, частного) голоморфных функций. Голоморфность обратной функции.	2
11. Аналитическая функция. Аналитичность голоморфной функции. Неравенство Коши для коэффициентов ряда. Радиус сходимости ряда как максимальный радиус круга, в котором функция голоморфна. Теорема Лиувилля.	3
12. Бесконечная дифференцируемость и голоморфность аналитической функции. Нуль аналитической функции и его порядок. Изолированность нуля аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции.	5
13. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.	5
14. Ряд Лорана и его сходимость. Единственность разложения Лорана. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.	5
15. Вычет голоморфной функции в однозначной особой точке. Теорема Коши о вычетах. Вычет как коэффициент c_{-1} ряда Лорана. Вычисления вычета в полюсе.	5

1. Кусочно-гладкая кривая и её длина. Элемент длины для параметрически заданной кривой. Криволинейный интеграл I-го рода.
2. Кусочно-гладкая поверхность и её площадь. Элемент площади для параметрически заданной поверхности. Поверхностный интеграл I-го рода.
3. Дифференциальная 1-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую. Ориентация кривой. Криволинейный интеграл II-го рода. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода.
4. Формула Грина и её приложение к вычислению площади криволинейной фигуры. Внешний дифференциал 2-мерной 1-формы и краткая запись формулы Грина.
5. Дифференциальная 2-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность. Ориентация поверхности и вектор нормали. Поверхностный интеграл II-го рода. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода.
6. Формула Остроградского-Гаусса и её приложение к вычислению объема тела. Внешний дифференциал 3-мерной 2-формы, дивергенция векторного поля и краткая запись формулы Остроградского-Гаусса.
7. Формула Стокса. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы, ротор векторного поля и краткая запись формулы Стокса.
8. Комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$.
9. Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции. Условия Коши-Римана и голоморфность. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.
10. Голоморфная функция нескольких переменных. Голоморфность композиции (в том числе: суммы, произведения, частного) голоморфных функций. Голоморфность обратной функции.

Определение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – область определения

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ – непрерывно дифференцируема.

f называется голоморфной в D , если она удовлетворяет условию Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Определение. Пусть $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ – области определения. Функция $F : G_1 \times G_2 \rightarrow \mathbb{C}$:

$$F(z_1, z_2) = U(x_1, y_1, x_2, y_2) + iV(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

называется голоморфной, если она непрерывно дифференцируема и голоморфна по каждой переменной в отдельности.

Теорема. Пусть $D \subseteq \mathbb{C}$ – область, $\varphi_1 : D \rightarrow G_1$, $\varphi_2 : D \rightarrow G_2$ – голоморфны.

Тогда $f(z) = F(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ – голоморфна.

Доказательство. Для удобства будем иметь в виду, что $\varphi_k(z) = \xi_k(x, y) + i\eta_k(x, y)$, $k \in \{1, 2\}$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

Тогда

$$u'_x = U'_{x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + U'_{y_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + U'_{x_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + U'_{y_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = V'_{y_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + (-V'_{x_1}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right) + V'_{y_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + (-V'_{x_2}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right) = v'_y$$

Аналогично, $u'_y = -v'_x$ ■

Следствие. Голоморфны следующие функции:

1. $F(z_1, z_2) = az_1 + bz_2$
2. $F(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$
3. $F(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$

Теорема. Пусть $w = f(z)$, $w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$ и f – голоморфна в окрестности точки z_0 .

Тогда в некоторой окрестности точки w_0 существует единственная обратная функция $f^{-1}(w) : f^{-1}(w_0) = z_0$, которая является голоморфной.

Доказательство. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}, \text{ причем } \begin{cases} u_0 = u(x_0, y_0) \\ v_0 = v(x_0, y_0) \end{cases}$$

Посчитаем Якобиан отображения в z_0 :

$$\begin{vmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{vmatrix} \bigg|_{z_0} = |f'(z_0)|^2 > 0 \implies \text{Существует единственное обратное отображение по теореме о неявной функции}$$

Найдем матрицу Якоби обратного отображения:

$$\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \bigg|_{w_0} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}^{-1} \bigg|_{z_0} = \frac{1}{|f'(z_0)|^2} \begin{pmatrix} v'_y & -u'_y \\ -v'_x & u'_x \end{pmatrix}$$

Рассмотрим элементы на главных диагоналях первой и последней матриц. Т.к. исходное отображение голоморфно, то $v'_y = u'_x$, а значит и $x'_u = y'_u$.

Аналогично, рассмотрев элементы на побочных диагоналях, получим, что $x'_v = -y'_u$. Условие Коши-Римана выполнено, значит, обратная функция является голоморфной. ■

11. Аналитическая функция. Аналитичность голоморфной функции. Неравенство Коши для коэффициентов ряда. Радиус сходимости ряда как максимальный радиус круга, в котором функция голоморфна. Теорема Лиувилля.

Определение. Функция называется аналитической в точке z_0 , если $\exists \{c_n\} \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k, |z - z_0| < \delta$$

Теорема. Если функция f голоморфна в окрестности z_0 , то она аналитична в z_0 .

Доказательство. Пусть $|z - z_0| < \varepsilon < \delta$, $L = \{\zeta : |\zeta - z_0| = \varepsilon\}$

Тогда по формуле Коши: $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta =$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \dots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n + \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right) d\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^k + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_L f(\zeta) \cdot \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{\zeta - z} d\zeta}_{r_n(z, z_0)}$$

Пусть $M = \sup_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} |f(\zeta)|$, а также заметим, что $|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| = \varepsilon(1 - \alpha)$, тогда:

$$|r_n(z, z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_L |f(\zeta)| \cdot \frac{\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^{n+1}}{|\zeta - z|} dl \leq \frac{M \cdot \alpha^{n+1}}{2\pi \cdot \varepsilon(1 - \alpha)} \cdot \underbrace{2\pi\varepsilon}_{\text{длина кривой}} \leq \frac{M \cdot \alpha^{n+1}}{\varepsilon(1 - \alpha)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Значит, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, $c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$ при $\forall z : |z - z_0| < \delta$.

Так как $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ голоморфна в кольце $\varepsilon_1 \leq |z - z_0| \leq \varepsilon_2$, то $\oint_{|z - z_0| = \varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta - \oint_{|z - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = 0 \implies c_k$

не зависит от ε . ■

Следствие. (Неравенство Коши)

$$|c_k| \leq \oint_L \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{k+1}} dl \leq \frac{M}{2\pi\varepsilon^{k+1}} \cdot 2\pi\varepsilon = \frac{M}{\varepsilon^k}, \text{ подставим } M:$$

$$|c_k| \leq \frac{1}{\varepsilon^k} \cdot \sup_{|z - z_0| = \varepsilon} |f(z)| \quad \forall \varepsilon < \delta$$

Теорема. Пусть $f(z)$ голоморфна в $|z - z_0| < r$, но не является голоморфной в круге большего радиуса, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, $|z - z_0| < R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$. Тогда $R = r$.

Доказательство. Пусть $M = \sup_{|z - z_0| = \varepsilon} |f(z)|$, $|c_k| \leq \frac{M}{\varepsilon^k} \quad \forall \varepsilon < r$

$$\overline{\lim} \sqrt[k]{|c_k|} \leq \frac{1}{\varepsilon} \implies R \geq \varepsilon \quad \forall \varepsilon < r \implies R \geq r.$$

Но если $R > r$, то ряд сходится в $z : |z - z_0| > r$, что противоречит условию.

Значит, $R = r$. ■

Теорема. (Лиувилля)

Если функция $f(z)$ голоморфна и ограничена на \mathbb{C} , то она – константа.

Доказательство. Пусть $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

Так как $|c_k| \leq \frac{M}{\varepsilon^k} \quad \forall \varepsilon$, то при $\varepsilon \rightarrow \infty$ получаем, что $c_1 = c_2 = \dots = 0 \implies f(z) = c_0$ ■

12. Бесконечная дифференцируемость и голоморфность аналитической функции. Нуль аналитической функции и его порядок. Изолированность нуля аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции.
13. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.
14. Ряд Лорана и его сходимость. Единственность разложения Лорана. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.
15. Вычет голоморфной функции в однозначной особой точке. Теорема Коши о вычетах. Вычет как коэффициент c_{-1} ряда Лорана. Вычисления вычета в полюсе.