Теория вероятностей и математическая статистика, Коллоквиум IV

Версия от 13.06.2021 17:43

Содержание

1. Выборка, оценка, статистика. Несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность оценок. Пример отсутствия несмещенной оценки. Отсутсвие эффективной оценки в классе всех оценок. Единственность эффективной оценки. Состоятельность асимптотической нормальной оценки. 2
   - 1.1. Выборка, оценка, статистика. 2
   - 1.2. Несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность оценок. 2
   - 1.3. Пример отсутствия несмещенной оценки. 3
   - 1.4. Отсутсвие эффективной оценки в классе всех оценок. 3
   - 1.5. Состоятельность асимптотической нормальной оценки. 4
2. Метод моментов и его состоятельность. Метод максимального правдоподобия. Энтропия и состоятельность оценки максимального правдоподобия. 5
   - 2.1. Метод моментов. 5
   - 2.2. Метод максимального правдоподобия. 5
3. Информация Фишера и неравенство Рао-Крамера. Критерий равенства в неравенстве Рао-Крамера. 8
4. Доверительные интервалы. Различимые методы построения доверительных интервалов (с помощью неравенств на вероятность больших уклонений, с помощью центральной статистики, с помощью асимптотически нормальной оценки). Примеры. 9
   - 4.1. Доверительные интервалы 9
   - 4.2. Различимые методы построения доверительных интер-валов (с помощью неравенств на вероятность больших уклонений, с помощью цен-тральной статистики, с помощью асимптотически нормальной оценки) 10
5. Построение точных доверительных интервалов для параметров нормального распределения. 12
6. Проверка гипотез. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень значимости и мощность статистического критерия. Пример построения критерия с помощью доверительного интервала. Нижняя оценка суммы вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода. 13
   - 6.1. Проверка гипотез. 13
   - 6.2. Ошибки 1-го и 2-го рода. 13
   - 6.3. Уровень значимости и мощность статистического критерия. 14
   - 6.4. Пример построения критерия с помощью доверительного интервала. 14
   - 6.5. Нижняя оценка суммы вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода. 14
7. Теорема Неймана-Пирсона и пример её применения. 15
   - 7.1. Теорема Неймана-Пирсона. 15
   - 7.2. Пример применения теоремы Неймана-Пирсона. 15
8. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко-Кантелли. 16

1. Выборка, оценка, статистика. Несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность оценок. Пример отсутствия несмещенной оценки. Отсутсвие эффективной оценки в классе всех оценок. Единственность эффективной оценки. Состоятельность асимптотической нормальной оценки.

Предположим, нам известно, что неизвестное распределение принадлежит какому-то конкретному семейству распределений с функциями распределения F_θ, где $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^k$. Тогда задачей статистики является оценка неизвестного параметра $\theta_0 \in \Theta$, соответствующего нашему неизвестному распределению.
Например, пусть X есть случайная величина и мы знаем распределение этой случайно величины $F_\theta(t)$ с точностью до θ (например, $\mathcal{N}(0, \theta)$). Задача статистики заключается в том, чтобы оценить параметр θ.
Рассмотрим пример, показывающий, что теория вероятностей и математическая статистика изучают разные вещи:

Пример. Пусть в ящике N шаров, M из них чёрные. Мы достали из ящика n шаров. Теория вероятностей задаётся вопросом, с какой вероятностью среди вытянутых шаров есть m чёрных. Математическая статистика задаётся вопросом, сколько всего в ящике чёрных шаров (какое M), если мы достали n шаров и m из них чёрные.

1.1. Выборка, оценка, статистика.

Определение. Вектор $X = (X_1, \dots, X_n)$ с независимыми компонентами, где каждая случайная величина имеет одно и то же распределение, называется **выборкой**.

Определение. Произвольная функция $T_n(X)$, принимающая выборку как аргумент, называется **статистикой**.

Важно то, что статистика зависит от случайных величин $X_1, \dots, X_n$, и не зависит от θ.

Пример. Выборочное среднее $\overline{X_n}$ является статистикой

$$T(X) = \overline{X_n} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}.$$

Когда проводится серия независимых экспериментов с функцией распределения F_θ (θ неизвестно), мы получаем выборку $X = (X_1, \dots, X_n)$. По выборе хочется определить значение $\widehat{\theta}$, которое в каком-либо смысле близко к реальному θ.

Определение. Статистика $\widehat{\theta}(X_1, \dots, X_n)$ со значением из множества параметров Θ называется **оценкой** неизвестного параметра.

1.2. Несмещенность, состоятельность, асимптотическая нормальность и эффективность оценок.

Хотим, чтобы оценка $\widehat{\theta}(X)$ была в каком-то смысле близка к реальному θ. Далее описаны вещи, под которыми можно понимать близость.

Определение. Оценка $\widehat{\theta}_n(X)$ является **несмещенной**, если $\mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X)\right] = \theta$.

Напомним, что последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X *по вероятности*, если для любого $\varepsilon > 0$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[|X_n - X| \geqslant \varepsilon] = 0.$$

Определение. Оценка $\widehat{\theta}_n(X)$ является **состоятельной**, если $\widehat{\theta}_n(X) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}_\theta} \theta$ для любого $\theta \in \Theta$.

Обычно состоятельность оценки является следствием закона больших чисел.

Пример. Пусть $\widehat{\theta}_n = \overline{X_n} = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ и $\mathrm{E}[X_1] = \theta$. Тогда $\widehat{\theta}_n = \overline{X_n} \xrightarrow[\text{ЗБЧ}]{\mathrm{P}} \mathrm{E}[X_1] = \theta$, откуда следует, что оценка $\widehat{\theta}_n$ состоятельная.

Напомним, что последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X *почти наверное*, если выполняется $\mathrm{P}\left[\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X\right] = 1$.

Определение. Оценка $\widehat{\theta}_n(X)$ является **сильно состоятельной**, если $\widehat{\theta}_n(X) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.н.}} \theta$ для любого $\theta \in \Theta$.

Напомним, что последовательность случайных величин X_n сходится к случайной величине X *по распределению*, если $\lim\limits_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$ в каждой точке x, где непрерывна F_X.

Определение. Оценка $\widehat{\theta}_n(X)$ является **асимптотически нормальной** оценкой параметра θ с коэффициентом $\sigma^2(\theta)$, если

$$\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}_\theta} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta)),$$

что эквивалентно $\dfrac{\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right)}{\sigma(\theta)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}_\theta} \mathcal{N}(0, 1)$.
Коэффициент $\sigma^2(\theta)$ называется асимптотической дисперсией.

Определение. Пусть K это некое множество (класс) оценок (например, K — несмещенные оценки).
Оценка $\widehat{\theta}_n(X) \in K$ является **эффективной в классе** K, если для каждого $\theta \in \Theta$ и для каждой оценки $\theta_n^* \in K$ выполняется

$$\mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right]^2 \leqslant \mathrm{E}_\theta\left[\theta_n^*(X) - \theta\right]^2.$$

Если K это класс несмещенных оценок, то условие можно переписать следующим образом:

$$\mathrm{D}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X)\right] \leqslant \mathrm{D}_\theta\left[\theta_n^*(X)\right]$$

Определение. Несмещенную оценку $\widehat{\theta}_n(X)$ в классе всех несмещенных оценок будем называть просто **эффективной**.

1.3. Пример отсутствия несмещенной оценки.

Пример. Пусть X_i это случайная величина Бернулли, то есть X_i принимает значение 1 с вероятностью $p \in (0; 1)$ и 0 с вероятностью $1 - p$, и $\theta = \sin(p)$.
Запишем математическое ожидание оценки по определению:

$$\mathrm{E}\left[\widehat{\theta}_n(X)\right] = \sum_{(x_1,\dots,x_n)\in\{0,1\}^n} \widehat{\theta}_n(x_1,\dots,x_n) \cdot p^{x_1+\dots+x_n} \cdot (1-p)^{n-x_1-\dots-x_n}.$$

То есть математическое ожидание оценки это некий полином от p, а полином не может быть равняться $\sin p$, поэтому оценка не может быть несмещенной. Вместо синуса можно было рассмотреть что-то другое.

1.4. Отсутсвие эффективной оценки в классе всех оценок.

Утверждение. Не существует эффективной оценки в классе всех оценок.

Доказательство. Пусть $\widehat{\theta}_n(X)$ эффективна в классе всех оценок. Тогда должно выполняться

$$\mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right]^2 \leqslant \mathrm{E}_\theta\left[\theta_n^*(X) - \theta\right]^2$$

для любой $\theta_n^*(X)$. В том числе, это должно выполняться для любой $\theta_n^*(X) = C = \mathrm{const}$:

$$\mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right]^2 \leqslant \mathrm{E}_\theta\left[C - \theta\right]^2.$$

Это неравенство также должно выполняться для любого θ. В частности, для $\theta = C$. Тогда

$$\mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right]^2 \leqslant 0.$$

Это означает, что $\widehat{\theta}_n(X) = C$ почти наверное. Но мы ведь могли взять и другое $C' \neq C$ и ровно по тем же соображениям получить

$$\widehat{\theta}_n(X) = C \neq C' = \widehat{\theta}_n(X).$$

Пришли к противоречию. ∎

Следующего утверждения нет в программе коллоквиума, но тем не менее оно полезное.

Утверждение. Если эффективная оценка существует, то она единственная.

Доказательство. Пусть $\widehat{\theta}_n(X)$ и $\theta_n^*(X)$ — эффективные оценки.
Тогда по определению эффективности:

- $\mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X)\right] = \theta = \mathrm{E}_\theta\left[\theta_n^*\right]$ для любого θ.
- $\mathrm{D}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X)\right] \leqslant \mathrm{D}_\theta\left[\tilde{\theta}(X)\right]$ и $\mathrm{D}_\theta\left[\theta_n^*(X)\right] \leqslant \mathrm{D}_\theta\left[\tilde{\theta}(X)\right]$ для любой несмещенной $\tilde{\theta}_n(X)$.

Рассмотрим полусумму $T_n = \dfrac{\widehat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}$. T_n является несмещенной оценкой (по свойству для суммы математического ожидания).
Кратко напомним, что $\mathrm{cov}(\xi, \nu)$ это билинейная форма и по неравенству параллелограмма

$$\mathrm{cov}(\xi+\nu, \xi+\nu) + \mathrm{cov}(\xi-\nu, \xi-\nu) = 2\cdot\mathrm{cov}(\xi,\xi) + 2\cdot\mathrm{cov}(\nu,\nu).$$

Делим обе части на 4, вспоминаем, что $\mathrm{D}[\xi] = \mathrm{cov}(\xi,\xi)$, и получаем

$$\mathrm{D}\left[\frac{\xi+\nu}{2}\right] + \mathrm{D}\left[\frac{\xi-\nu}{2}\right] = \frac{1}{2}\,\mathrm{D}[\xi] + \frac{1}{2}\,\mathrm{D}[\nu].$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{D}_\theta\left[\frac{\widehat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right] &= \frac{\mathrm{D}[\widehat{\theta}_n(X)] + \mathrm{D}[\theta_n^*(X)]}{2} - \mathrm{D}_\theta\left[\frac{\widehat{\theta}_n(X) - \theta_n^*(X)}{2}\right] \\ \text{[вычитается неотрицательное значение (дисперсия)]} &\leqslant \frac{\mathrm{D}[\widehat{\theta}_n(X)] + \mathrm{D}[\theta_n^*(X)]}{2} \\ \text{[так как оценки эффективные]} &\leqslant \mathrm{D}_\theta\left[\frac{\widehat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right].\end{aligned}$$

Последнее равенство может показаться неочевидным. Так как $\widehat{\theta}_n(X)$ это эффективная оценка, выполняется неравенство

$$\mathrm{D}_\theta[\widehat{\theta}_n(X)] \leqslant \mathrm{D}_\theta\left[\frac{\widehat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right] \iff \frac{1}{2}\,\mathrm{D}_\theta[\widehat{\theta}_n(X)] \leqslant \frac{1}{2}\,\mathrm{D}_\theta\left[\frac{\widehat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right].$$

Аналогичное неравенство получается и для оценки $\theta_n^*(X)$. Суммируем эти два неравенства и получаем

$$\frac{\mathrm{D}_\theta[\widehat{\theta}_n(X)] + \mathrm{D}_\theta[\theta_n^*(X)]}{2} \leqslant \mathrm{D}_\theta\left[\frac{\widehat{\theta}_n(X) + \theta_n^*(X)}{2}\right].$$

Мы закончили тем же, с чего и начали. Тогда все неравенства это равенство. Значит, $\mathrm{D}_\theta\left[\dfrac{\widehat{\theta}_n(X) - \theta_n^*(X)}{2}\right] = 0$.
Из этого следует, что

$$\widehat{\theta}_n(X) - \theta_n^*(X) = \mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X) - \theta_n^*(X)\right] = \mathrm{E}_\theta\left[\widehat{\theta}_n(X)\right] - \mathrm{E}_\theta\left[\theta_n^*(X)\right] = \theta - \theta = 0.$$

Получается, $\widehat{\theta}_n(X) = \theta_n^*(X)$ почти наверное. ■

1.5. Состоятельность асимптотической нормальной оценки.

Утверждение. Если оценка асимптотически нормальная, то она состоятельная.

Доказательство. Пусть $\widehat{\theta}_n(X)$ — асимптотически нормальная оценка параметра θ.
По определению асимптотической нормальности $\sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right) \xrightarrow{\mathrm{d}_\theta} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$.
Про сходимость по распределению произведения мы знаем, что если один из пределов сходится к константе, то верна арифметика:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot Z \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} 0\cdot Z = 0.$$

Тогда
$$\widehat{\theta}_n(X) - \theta = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{n}\left(\widehat{\theta}_n(X) - \theta\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}_\theta} 0 \cdot \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta)) = 0.$$
Так как есть сходимость по распределению к константе, то есть сходимость по вероятности к константе (факт с предыдущего коллоквиума):
$$\widehat{\theta}_n(X) - \theta \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}_\theta} 0 \iff \widehat{\theta}_n(X) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{P}_\theta} \theta,$$
а это и есть определение состоятельности. ■

2. Метод моментов и его состоятельность. Метод максимального правдоподобия. Энтропия и состоятельность оценки максимального правдоподобия.

2.1. Метод моментов.

Пусть $(X_1, \dots, X_n)$ — выборка, где X_i задано распределением F_θ. Хотим найти состоятельную оценку параметра θ. Пусть g — непрерывная функция, причём $\mathbb{E}_\theta\left(|g(X_1)|\right) < \infty$. Посчитаем матожидание $\mathbb{E}_\theta\left(g(X_1)\right) = f(\theta)$. Предположим, что $\exists\, f^{-1}$, и она непрерывна. Т.к. на практике мы не знаем параметр θ, то мы не можем посчитать такое матожидание. Но мы можем приближённо посчитать $f(\theta)$ воспользовавшись ЗБЧ.
По ЗБЧ
$$\frac{g(X_1) + \ldots + g(X_n)}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}_\theta\left(g(X_1)\right) = f(\theta)$$
Теперь в силу обратимости f можно получить сходимость к θ:
$$f^{-1}\left(\frac{g(X_1) + \ldots + g(X_n)}{n}\right) \xrightarrow{P} \theta$$
Оценкой параметра θ назовём функцию $\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = f^{-1}\left(\dfrac{g(X_1) + \ldots + g(X_n)}{n}\right)$. Состоятельность оценки очевидна. Вместо ЗБЧ можно применять УЗБЧ, и получить сильную состоятельность.

2.2. Метод максимального правдоподобия.

Определение 1. Обобщённой плотностью ρ_X случайной величины X назовём функцию плотности X, если случайная величина является непрерывно, или функцию $\rho_X(t) = P(X = t)$ в случае, если X имеет дискретное распределение.

Определение 2. Пусть $X = (X_1, \dots, X_n)$ — выборка из распределения с обобщённой плотностью ρ_θ. Обобщённая плотность вектора X называется функцией правдоподобия, и имеет вид
$$p(X, \theta) = \rho_\theta(X_1) \cdot \ldots \cdot \rho_\theta(X_n)$$
Функцию $\ln p(X, \theta)$ называют логарифмической функцией правдоподобия и обозначают $L(X, \theta)$.

Определение 3. Пусть ρ_0, ρ_1 — положительные вероятностные плотности. Выражение
$$\int \ln \frac{\rho_1(x)}{\rho_0(x)} \cdot \rho_1(x) dx$$
называется энтропией распределения с плотностью ρ_1 относительно распределения с плотностью ρ_0.

Замечание. Здесь и далее интергралы без пределов интегрирования обозначают интегрирование по множеству, на котором задано распределение. Они вовсе не означают неопределённый интеграл.

Следующее утверждение показывает, что энтропия в некотором смысле оценивает расстояние между распределениями:

Лемма. (Информационное неравенство)
Пусть ρ_0, ρ_1 — положительные вероятностные плотности. Тогда
$$\int \ln \frac{\rho_1(x)}{\rho_0(x)} \cdot \rho_1(x) dx \geqslant 0$$
Равенство достигается тогда и только тогда, когда $\rho_0 = \rho_1$.

Доказательство. Домножим обе части неравенства на (-1) и будем выводить оценку сверху:

$$\int \ln \frac{\rho_0(x)}{\rho_1(x)} \cdot \rho_1(x)dx \overset{?}{\leqslant} 0$$

Воспользуемся неравенством $\ln x \leqslant x-1$ (очевидно, если, например, посмотреть на графики этих функций: у них есть единственное пересечение в точке $x=1$):

$$\ln \frac{\rho_0(x)}{\rho_1(x)}\rho_1(x) \leqslant \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-1\right)\rho_1 = \rho_0 - \rho_1$$

Проинтегрируем обе части:

$$\int \ln \frac{\rho_0(x)}{\rho_1(x)} \cdot \rho_1(x)dx \leqslant \int \rho_0(x)dx - \int \rho_1(x)dx$$

Оба интеграла слева равны 1, в силу того, что под интегралами стоят плотности. Таким образом оценку сверху мы доказали, найдём теперь, когда достигается равенство.
Пусть в неравенстве достиглось равенство, т.е. известно, что

$$\int \ln \frac{\rho_0(x)}{\rho_1(x)} \cdot \rho_1(x)dx = 0 \qquad\qquad \int \rho_0(x)dx - \int \rho_1(x)dx = 0 \iff \int \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-1\right)dx = 0$$

Тогда

$$\int \left(\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-1\right) - \ln\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)\rho_1 dx = 0$$

Так как $\ln x \leqslant x-1$, то $0 \leqslant x - 1 - \ln x$, и функция в скобках неорицательна. Теперь очевидно, что 0 достигается только в случае $\rho_0 = \rho_1$:

$$\left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-1\right) - \ln\frac{\rho_0}{\rho_1} = 0 \iff \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}-1\right) = \ln\frac{\rho_0}{\rho_1} \iff \rho_0 = \rho_1$$

■

Вывели утверждение, которое показывает, что энтропия, в некотором смысле оценивает расстояние между плотностями, т.е. расстояние между распределениями. Теперь будем применять это утверждение для построения оценки.
Пусть есть выборка $X = (X_1, \ldots, X_n)$ из распределения с обобщённой плотностью ρ_θ. Пусть реальное значение параметра θ равно θ_1. Рассмотрим функцию следующего вида:

$$W(\theta) = \mathbb{E}_{\theta_1} \ln \rho_\theta(X_1) = \int \ln \rho_\theta(x)\rho_{\theta_1}(x)dx$$

Можно показать, что $W(\theta) \leqslant W(\theta_1)\,\forall\,\theta$, действительно:

$$W(\theta) - W(\theta_1) = \int \ln \rho_\theta(x)\rho_{\theta_1}(x)dx - \int \ln \rho_{\theta_1}(x)\rho_{\theta_1}(x)dx = \int \ln \frac{\rho_\theta(x)}{\rho_{\theta_1}(x)}\rho_{\theta_1}(x)dx \leqslant 0$$

Причём наибольшее значение $W(\theta)$ достигается при $\theta = \theta_1$. Таким образом можно естественно оценить реальный параметр, если найти точку максимума функции $W(\theta)$. В чём проблема: мы не знаем ρ_{θ_1}, и потому функция $W(\theta)$ нам так же не известна. Решение проблемы: $W(\theta)$ это некоторое матожидание. По ЗБЧ известно, что выборочное среднее по вероятности сходится к матожиданию. Т.е.

$$\frac{\ln \rho_\theta(X_1) + \ldots + \ln \rho_\theta(X_n)}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}_{\theta_1} \ln \rho_\theta(X_1) = W(\theta)$$

Немного преобразуем левую часть:

$$\frac{\ln \rho_\theta(X_1) + \ldots + \ln \rho_\theta(X_n)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ln \rho_\theta(X_i) = \frac{1}{n}L(X,\theta)$$

Таким образом, вместо того, чтобы искать максимум неизвестной функции, мы будем искаль максимум того, что к ней приближается, и найденное значение и будем называть **оценкой максимального правдоподобия**.

Определение 4. Оценкой максимального правдоподобия параметра θ называется максимум функции $L(X,\theta)$.

Предложение. (Состоятельность оценки максимального правдоподобия.)
Пусть $\theta \in (a,b)$, и на этом отрезке функция $\theta \to L(X,\theta)$ имеет единственную точку локального максимума $\hat{\theta}$. Тогда $\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta_0$.

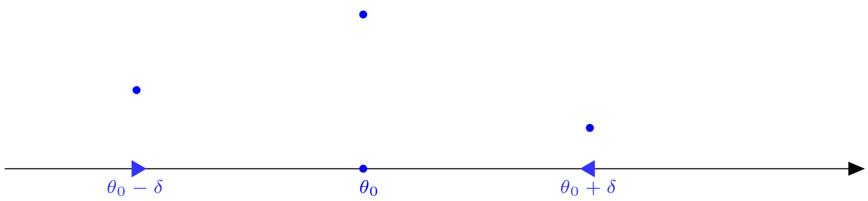
Доказательство. Будем пользоваться тем, что $\frac{1}{n}L(X,\theta) \xrightarrow{P} W(\theta)$. Хотим доказать, что $P(|\hat{\theta}-\theta_0| \geqslant \delta) \to 0 \,\forall\, \delta > 0$ (просто определение сходимости по вероятности). Рассмотрим точки $\theta_0-\delta, \theta_0+\delta$. Про эти точки известно следующее:

$$\begin{cases} W(\theta_0) > W(\theta_0-\delta) \xleftarrow{P} \frac{1}{n}L(X,\theta_0-\delta) \\ W(\theta_0) > W(\theta_0+\delta) \xleftarrow{P} \frac{1}{n}L(X,\theta_0+\delta) \end{cases}$$

Можно ожидать, что при достаточно большом n, с вероятностью, близкой к 1 будут выполнены неравенства

$$\begin{cases} \frac{1}{n}L(X,\theta_0) > \frac{1}{n}L(X,\theta_0-\delta) \\ \frac{1}{n}L(X,\theta_0) > \frac{1}{n}L(X,\theta_0+\delta) \end{cases}$$

Посмотрим теперь на функцию $\theta \to L(X,\theta)$:



Ясно, что на интервале $(\theta_0-\delta, \theta_0+\delta)$ сущетвует точка, значение в которой строго больше, чем на концах, а значит, функция имеет на этом отрезке точку локального максимума. Т.е. для точки локального максимума $\hat{\theta}$ выполнено $|\hat{\theta}-\theta_0| < \delta$. Чтобы завершить доказательство, нужно обосновать фразу "при достаточно большом n, с вероятностью, близкой к 1...". Другими словами, хотим доказать, что

$$P\left(\frac{1}{n}L(X,\theta_0-\delta) < \frac{1}{n}L(X,\theta_0)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Положим $W(\theta_0) - W(\theta_0-\delta) = \varepsilon > 0$. Из ЗБЧ следует, что

$$\begin{cases} P\left(\left|\frac{1}{n}L(X,\theta_0-\delta) - W(\theta_0-\delta)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\right) \to 0 \\ P\left(\left|\frac{1}{n}L(X,\theta_0) - W(\theta_0)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\right) \to 0 \end{cases}$$

Поймём, почему из этого следует, что $P\left(\frac{1}{n}L(X,\theta_0-\delta) \geqslant \frac{1}{n}L(X,\theta_0)\right) \to 0\,(*)$. Пусть величины $\frac{1}{n}L(X,\theta_0-\delta)$ и $W(\theta_0-\delta)$ отличаются менее, чем на $\frac{\varepsilon}{4}$. Аналогично для $\frac{1}{n}L(X,\theta_0)$ и $W(\theta_0)$. Тогда верна следующая цепочка равенств:

$$W(\theta_0) \leqslant \frac{1}{n}L_n(X,\theta_0) + \frac{\varepsilon}{4} \overset{(1)}{\leqslant} \frac{1}{n}L_n(X,\theta_0-\delta) + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant W(\theta_0-\delta) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Переход (1) следует из неравенства $(*)$. Тогда мы получаем, что $W(\theta_0) - W(\theta_0-\delta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Но $W(\theta_0) - W(\theta_0-\delta) = \varepsilon$, и получается противоречие. Значит, или $\frac{1}{n}L(X,\theta_0-\delta)$ и $W(\theta_0-\delta)$ отличаются более, чем на $\frac{\varepsilon}{4}$, или же величины $\frac{1}{n}L(X,\theta_0)$ и $W(\theta_0)$. Но тогда мы получаем, что исход из события $\{\frac{1}{n}L(X,\theta_0-\delta) \geqslant \frac{1}{n}L(X,\theta_0)\}$ лежит в объединении

$$\{\left|\frac{1}{n}L(X,\theta_0-\delta) - W(\theta_0-\delta)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\} \cup \{\left|\frac{1}{n}L(X,\theta_0) - W(\theta_0)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\}$$

А вероятность таких событий стремится к нулю. Теперь методом пристального взгляда можно заметить, что мы всё доказали. ■

3. Информация Фишера и неравенство Рао-Крамера. Критерий равенства в неравенстве Рао-Крамера.

Определение. Информация Фишера $I(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \right)^2$

Выведение и альтернативные варианты (здесь θ_0 — реальный параметр):

$$L(x,\theta) \overset{\text{ф-ла Тейлора}}{\simeq} L(x, \hat{\theta}_n(x)) + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L(x, \hat{\theta}_n(x))}_{\leqslant 0 \text{ тк точка максимума}} \left(\theta - \hat{\theta}_n(x) \right)^2$$

Точка максимума близка к параметру, посмотрим на вторую производную в реальном параметре:

$$-\mathbb{E}_{\theta_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L(x, \theta_0) = -\mathbb{E}_{\theta_0} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta_0)}{P(x, \theta_0)} \right) = -\mathbb{E}_{\theta_0} \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(x, \theta_0)}{P(x, \theta_0)} - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta_0) \right)^2}{P(x, \theta_0)^2} \right) \ominus$$

$$\left[\text{трюки с производными так как } \left(\frac{a}{b} \right)' = \frac{a'}{b} - \frac{ab'}{b^2}, \text{ но здесь } a = b' \implies \left(\frac{b'}{b} \right)' = \frac{b''}{b} - \frac{(b')^2}{b^2} \right]$$

$$\ominus - \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(x, \theta_0)}{P(x, \theta_0)} - \frac{\left(\frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta_0) \right)^2}{P(x, \theta_0)^2} \right) P(x, \theta_0) dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(x, \theta_0) dx + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta_0)}{P(x, \theta_0)} \right)^2 P(x, \theta_0) dx$$

Предположим, что выполнены условия регулярности

- $P(x, \theta)$ дважды непрерывно дифференцируема по θ
- $P(x, \theta) > 0$ на каком-то множесте иксов (прямая, отрезок, точки в дискретном случае) $\forall \theta$
- Производную и интеграл можно переставить

Из этого следует

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} P(x, \theta) dx = 1 \implies \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta) dx = \frac{\partial 1}{\partial \theta} = 0, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(x, \theta) dx = 0$$

Итак

$$-\mathbb{E}_{\theta_0} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} L(x, \theta_0) = \underbrace{-\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} P(x, \theta_0) dx}_{=0} + \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta_0)}{P(x, \theta_0)} \right)^2 P(x, \theta_0) dx = \mathbb{E}_{\theta_0} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta_0) \right)^2 = I(\theta)$$

В дискретном случае меняем интегралы на суммы
Предположения про $P(x, \theta)$ очень натуральны, поэтому их никто не проверяет

Утверждение. Пусть выполнены условия регулярности.
Тогда $I(\theta) = \mathbb{D}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \right) = ni(\theta)$ и $i(\theta) = \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \rho_\theta(X_1) \right)^2$ — информация Фишера выборки из одного элемента

Доказательство.

$$\mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta)}{P(x, \theta)} P(x, \theta) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \theta} P(x, \theta) dx = 0 \implies \mathbb{D}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \right) = \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) = \sum_i \underbrace{\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \rho_\theta(X_i)}_{\substack{\text{независимые} \\ \text{одинаково распределенные}}} \implies \mathbb{D}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} L(x, \theta) \right) = n \mathbb{D}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \rho_\theta(X_1) \right) = n \mathbb{E}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln \rho_\theta(X_1) \right)^2 = ni(\theta)$$

■

Теорема. Неравенство Рао-Крамера Пусть выполняются условия регулярности, а $\theta_n(x)$ — несмещенная оценка $\tau(\theta)$ (как правило $\tau(\theta) = \theta$, но иногда мы пытаемся оценить не саму θ, а какую-то функцию θ), тогда

$$\mathbb{D}_\theta(\theta_n(x)) \geqslant \frac{(\tau'(\theta))^2}{I(\theta)}$$

Неравенство нужно чтобы находить эффективные оценки: там где достигается равенство, так и оценка эффективна.

Доказательство.

$$\tau(\theta) = \mathbb{E}_\theta(\theta_n(x)) = \int\limits_{\mathbb{R}_n} \theta_n(x) P(x,\theta) dx$$

$$\tau'(\theta) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta_n(x) \frac{\partial}{\partial\theta} P(x,\theta) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \theta_n(x) \frac{\partial}{\partial\theta} P(x,\theta) dx - \tau(\theta) \overbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial\theta} P(x,\theta) dx}^{=0} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\theta_n(x) - \tau(\theta)) \frac{\partial}{\partial\theta} P(x,\theta) dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\theta_n(x) - \tau(\theta)) \underbrace{\frac{\frac{\partial}{\partial\theta} P(x,\theta)}{P(x,\theta)}}_{=\frac{\partial}{\partial\theta}\ln P(x,\theta) = \frac{\partial}{\partial\theta} L(x,\theta)} P(x,\theta) dx = \mathbb{E}_\theta \left((\theta_n(x) - \tau(\theta)) \frac{\partial}{\partial\theta} L(x,\theta) \right) \overset{\text{Коши-Буняковский}}{\leqslant}$$

$$\leqslant \sqrt{\mathbb{E}_\theta\left(\theta_n(x) - \tau(\theta)\right)^2} \sqrt{\mathbb{E}_\theta\left(\frac{\partial}{\partial\theta} L(x,\theta)\right)^2} = \sqrt{\mathbb{D}_\theta\left(\theta_n(x)\right)} \sqrt{I(\theta)}$$

$$\tau'(\theta) \leqslant \sqrt{\mathbb{D}_\theta\left(\theta_n(x)\right)} \sqrt{I(\theta)} \implies (\tau'(\theta))^2 \leqslant \mathbb{D}_\theta\left(\theta_n(x)\right) I(\theta)$$

■

Равенство достигается когда достигается равенство в Коши-Буняковском, то есть

$$\theta_n(x) - \tau(\theta) = \underbrace{c_n(\theta)}_{\text{const}} \frac{\partial}{\partial\theta} L(x,\theta)$$

Пример в ситуации бернулли:

$$\frac{\partial}{\partial\theta} L(x,\theta) = \frac{\sum_i X_i - n\theta}{\theta(1-\theta)} = \underbrace{\frac{n}{\theta(1-\theta)}}_{\text{const}} (\bar{X}_n - \theta) \implies \text{в Рао-Крамере достигается равенство} \implies \bar{X}_n \text{ эфф оценка}$$

Если (в случае оценки θ, то есть $\tau(\theta) = \theta$) существует несмещенная оценка $\hat{\theta}_n$, на которой достигается равенство в Рао-Крамере, то это оценка максимального правдоподобия

$$\hat{\theta}_n(x) - \theta = c_n(\theta) \frac{\partial}{\partial\theta} L(x,\theta) \quad \text{Возьмем } \theta = \theta^*(x) \text{ оценка макс правдоподобия} \implies \frac{\partial}{\partial\theta} L(x, \theta^*(x)) = 0 \implies \hat{\theta}_n(x) = \theta^*(x)$$

4. Доверительные интервалы. Различимые методы построения доверительных интервалов (с помощью неравенств на вероятность больших уклонений, с помощью центральной статистики, с помощью асимптотически нормальной оценки). Примеры.

4.1. Доверительные интервалы

Знать, что оценка $\hat{\theta}_n(X)$ состоятельна (сходится по вероятности к θ) это, конечно, круто, но особо много информации о ней нам не даёт. Нам хотелось бы знать как быстро она куда-то там сходится – хотим для фиксированного $\alpha \in (0,1)$ и фиксированного $\varepsilon > 0$ знать такой номер n, что $P_\theta(|\hat{\theta}_n(X) - \theta| < \varepsilon) > 1 - \alpha$.

Определение. $(\hat{\theta}_1(X), \hat{\theta}_2(X))$ — доверительный интервал уровня доверия $1 - \alpha$, если

$$P_\theta(\theta \in (\hat{\theta}_1(X), \hat{\theta}_2(X))) \geqslant 1 - \alpha$$

$$P_\theta(\hat{\theta}_1(X) \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_2(X)) \geqslant 1 - \alpha$$

Определение. Последовательность оценок $\hat{\theta}_1^n(X), \hat{\theta}_2^n(X)$ образует асимтотический доверительный интервал, если $\liminf\limits_{n\to\infty} P_\theta(\hat{\theta}_1^n(X) \leqslant \theta \leqslant \hat{\theta}_2^n(X)) \geqslant 1 - \alpha$

Пример. Пусть есть выборка из случайных величин с нормальным распределением $X_j \sim \mathcal{N}(\theta, 1)$.
Знаем, что $\overline{X}_n = \dfrac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P_\theta} \theta$ (ЗБЧ) — среднее хорошо приближает θ.

Посмотрим на разность эмпирического среднего и реальной θ: $\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\theta=\dfrac{\overbrace{(X_1-\theta)}^{\sim\mathcal{N}(0,1)}+\cdots+\overbrace{(X_n-\theta)}^{\sim\mathcal{N}(0,1)}}{n}\sim\mathcal{N}(0,\dfrac{1}{n})$
$\implies \sqrt{n}(\dfrac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\theta)\sim\mathcal{N}(0,1)$
Теперь по таблице значений функции распределения нормального закона найдём квантили $z_{\frac{\alpha}{2}}$ и $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$: $\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}})=\dfrac{\alpha}{2}, \Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}})=1-\dfrac{\alpha}{2}$.
$\implies$

$$P_\theta(z_{\frac{\alpha}{2}}\leqslant\sqrt{n}(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}-\theta)\leqslant z_{1-\frac{\alpha}{2}})=\Phi(z_{1-\frac{\alpha}{2}})-\Phi(z_{\frac{\alpha}{2}})=1-\frac{\alpha}{2}-\frac{\alpha}{2}=1-\alpha$$
$$P(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}-\overline{X_n}\leqslant-\theta\leqslant\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}-\overline{X_n})=1-\alpha$$
$$P(\overline{X_n}-\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\leqslant\theta\leqslant\overline{X_n}-\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}})=1-\alpha$$

Заметим, что мы взяли симметричный интервал: $z_{\frac{\alpha}{2}}=-z_{1-\frac{\alpha}{2}}$. В таком случае наш интервал принимает вид: $(\overline{X_n}-\dfrac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}},\overline{X_n}+\dfrac{z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}})$. В таком случае длина этого интервала равна $\mathrm{O}(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$
Но зачем мы решили взять симметричный интервал? Вспомним, что мы от него хотим: минимальной длины. А какой интервал на графике нормального распределения будет захватывать нужную площадь и при этом быть самым коротким среди всех? Правильно, симметричный с центром в пике колокола нормального распределения.

4.2. Различимые методы построения доверительных интер-валов (с помощью неравенств на вероятность больших уклонений, с помощью цен-тральной статистики, с помощью асимптотически нормальной оценки)

1. Неравенства Чебышёва или Чернова

   $X_1,\ldots,X_n\sim\mathrm{Bern}(\theta), P(X_j=1)=\theta$

   Чебышёв:
   $P_\theta(|\overline{X_n}-\theta|\geqslant\varepsilon)\leqslant\dfrac{\mathbb{D}X_1}{n\varepsilon^2}=\dfrac{\theta(1-\theta)}{n\varepsilon^2}\leqslant\dfrac{1}{4n\varepsilon^2}=\alpha\implies\varepsilon=\dfrac{1}{\sqrt{2n\alpha}}\implies P_\theta(\overline{X_n}-\dfrac{1}{\sqrt{2n\alpha}}<\theta<\overline{X_n}+\dfrac{1}{\sqrt{2n\alpha}})\geqslant1-\alpha.$

   Чернов: $P_\theta(|\overline{X_n}-\theta|\geqslant\varepsilon)\leqslant2e^{-\frac{n\varepsilon^2}{4}}=\alpha$
   $-\dfrac{n\varepsilon^2}{4}=\ln\dfrac{\alpha}{2}$
   $\varepsilon=2\sqrt{-\dfrac{\ln\frac{\alpha}{2}}{n}}$
   $\implies P_\theta(\overline{X_n}-2\sqrt{-\dfrac{\ln\frac{\alpha}{2}}{n}}<\theta<\overline{X_n}+2\sqrt{-\dfrac{\ln\frac{\alpha}{2}}{n}})\geqslant1-\alpha$

   Заметим, что в обоих оценках мы получили, что длина интервала равна $\mathrm{O}(\dfrac{1}{\sqrt{n}})$, но несложно заметить, что константа Чернова значительно лучше, чем у Чебышёва.

2. Метод центральной статистики

   Определение. $\mathrm{V}(X,\theta)$ называется центральной статистикой, если:

   (a) её распределение не зависит от θ: $P_\theta(\mathrm{V}(X,\theta)\leqslant t)=F(t)$

   (b) $\forall X:\theta\mapsto\mathrm{V}(X,\theta)$ — монотонная

   Пусть у нас есть такая статистика. Вопрос: как с её помощью строить доверительные интервалы? Предельно просто: подберём числа t_1 и t_2 таким образом, чтобы $P_\theta(t_1\leqslant\mathrm{V}(X,\theta)\leqslant t_2)\geqslant1-\alpha$. Мы можем так сделать, потому что распределение V не зависит от θ. Теперь поскольку при любом X наша функция монотонна, то данная оценка равносильна тому, что $P_\theta(\hat{\theta}_1(X)\leqslant\theta\leqslant\hat{\theta}_2(X))\geqslant1-\alpha$ — чисто из-за монотонности по θ.

   Пример. $X_j\sim\mathcal{U}(0,\theta)\implies\theta^{-1}X_j\sim\mathcal{U}(0,1)$. Это уже центральная статистика, однако она зависит всего от одного элемента выборки. Рассмотрим $X_{(n)}=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}X_j$: $P_\theta(\theta^{-1}X_{(n)}\leqslant t)=P_\theta(\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\theta^{-1}X_j\leqslant t)=\prod\limits_{j=1}^{n}P_\theta(\underbrace{\theta^{-1}X_j}_{\sim\mathcal{U}(0,1)}\leqslant t)=t^n$

Теперь грубо попробуем оценить, куда там наша статистика попадает:

$P_\theta(\underbrace{t}_{t_1} \leqslant \theta^{-1}X_{(n)} \leqslant \underbrace{1}_{t_2}) = 1 - t^n = 1 - \alpha \implies t = \alpha^{\frac{1}{n}}$

Теперь попробуем вытащить отсюда θ:

$P_\theta(\alpha^{\frac{1}{n}} \leqslant \theta^{-1}X_{(n)} \leqslant 1) = 1 - \alpha$

$P_\theta(\frac{\alpha^{\frac{1}{n}}}{X_{(n)}} \leqslant \theta^{-1} \leqslant \frac{1}{X_{(n)}}) = 1 - \alpha$

$P_\theta(\underbrace{X_{(n)}}_{\hat\theta_1(X)} \leqslant \theta \leqslant \underbrace{\frac{X_{(n)}}{\alpha^{\frac{1}{n}}}}_{\hat\theta_2(X)}) = 1 - \alpha$

Теперь посмотрим на длину полученного доверительного интервала:

$(\alpha^{-\frac{1}{n}} - 1)X_{(n)}$

Что мы можем сказать про $\alpha^{-\frac{1}{n}} - 1$? Разложим это дело по Тейлору:

$\alpha^{-\frac{1}{n}} - 1 \sim e^{-\frac{\ln\alpha}{n}} - 1 \sim \frac{-\ln\alpha}{n} = \underline{\mathrm{O}}(\frac{1}{n}) \to \infty$

Получается длина доверительного интервала с ростом количества элементов выборки стремится к нулю. Получается мы построили что-то более менее разумное.

Часто в роли центральной статистики можно взять следующую лабуду: $\mathrm{V}(X, \theta) = -\sum\limits_{j=1}^{n} \ln F_\theta(X_j)$ — это сумма независимых распределений, поэтому достаточно показать что одно не зависит от θ — тогда в силу независимости сумма тоже будет не зависеть от θ:

$P_\theta(-\ln F_\theta(X_j) \leqslant) = P_\theta(F_\theta(X_j) \geqslant e^{-t}) = P_\theta(X_j \geqslant F_\theta^{-1}(e^{-t})) = 1 - F_\theta(F_\theta^{-1}(e^{-t})) = 1 - e^{-t}$, а это экспоненциальное распределение. Сумма экспоненциальных распределений это Гамма распределение $\implies \mathrm{V}(X, \theta) = \Gamma(n, 1)$

3. Построение асимптотических доверительных интервалов

Пусть у нас есть $\hat\theta_n(X)$ — асимптотически нормальная оценка θ с асимптотической дисперсией $\sigma^2(\theta)$. Это значит, что

$\frac{\sqrt{n}(\hat\theta_n(X) - \theta)}{\sigma(\theta)} \xrightarrow{d_\theta} Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Теперь мы хотим получить доверительный интервал. Если бы у нас $\sigma(\theta)$ была константой, то мы могли бы уже привычно взять там квантили нормального распределения, туды сюды и получить интервал:

$P_\theta(t_1 \leqslant \frac{\sqrt{n}(\hat\theta_n(X) - \theta)}{\sigma(\theta)} \leqslant t_2) \to \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = 1 - \alpha.$

Тогда мы могли бы просто взять такие $\Phi(t_2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ и $\Phi(t_1) = \frac{\alpha}{2}$ и получить, что

$P_\theta(\hat\theta_n(X) - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(\theta)}{\sqrt{n}} \leqslant \theta \leqslant \hat\theta_n(X) + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(\theta)}{\sqrt{n}}) \to 1 - \alpha$

Но тут есть проблема — у нас слева и справа есть $\sigma(\theta)$ в числителе, что совершенно ломает корректность статистики, мы ведь хотим чтобы штуки слева и спрва от θ в неравенстве не зависили от θ. Как это решать? Очень просто, перейти от $\sigma(\theta)$ к состоятельной оценке $\sigma(\theta)$. Возможны следующие случаи:

(a) σ — непрерывная функция

Тогда $\sigma(\hat\theta_n(X)) \xrightarrow{P_\theta} \sigma(\theta)$ и мы можем везде в наших рассуждениях заменить $\sigma(\theta)$ на $\sigma(\hat\theta_n(X))$ и сходимость сохранится:

$P_\theta(\hat\theta_n(X) - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(\hat\theta_n(X))}{\sqrt{n}} \leqslant \theta \leqslant \hat\theta_n(X) + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma(\hat\theta_n(X))}{\sqrt{n}}) \to 1 - \alpha$

(b) Изначально было ЦПТ

$\hat\theta_n(X) = \overline{X_n}, \sigma^2(\theta) = \mathbb{D}_\theta X$

В таком случае мы можем использовать выборочную дисперсию в качестве состоятельной оценки дисперсии:

$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X_n})^2$ — выборочная дисперсия

(c) Можно поправить нашу асимптотическую дисперсию: подобрать такую функцию φ, что $\sqrt{n}(\varphi(\hat{\theta}_n(X)) - \varphi(\theta)) \to \underbrace{\mathcal{N}(0,1)}_{=\varphi'(\theta)\cdot\mathcal{N}(0,\sigma^2(\theta))} \implies \varphi'^2(\theta)\sigma^2(\theta) = 1$

5. Построение точных доверительных интервалов для параметров нормального распределения.

Оцениваем параметры случайной величины $\sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$ по выборке $X_1, \ldots, X_n$:

1. σ — известно. Оцениваем матожидание a:

   Центрируем и нормируем случайную величину разности оценки и параметра:

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X_n} - a}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1) \text{ — центральная статистика}$$

   Пусть для $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ верно, что $\Phi\left(t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \dfrac{\alpha}{2}$, тогда

$$P_\theta\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - a)}{\sigma} \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \;\Leftrightarrow\; P_\theta\left(\underbrace{\overline{X_n} - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_1(x)} \le a \le \underbrace{\overline{X_n} + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sigma}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_2(x)}\right) = 1 - \alpha$$

2. σ не известно.

   Лемма. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n) \sim \mathcal{N}\left(a, \operatorname{diag}(\sigma^2)\right)$, $\operatorname{diag}(\sigma^2) = \begin{pmatrix} \sigma^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sigma^2 \end{pmatrix}$, $\{X_j\}$ независимы, $\mathbb{D}X_j = \sigma^2$, $\mathbb{E}X_j = a$.

   Тогда $\overline{X_n}$ и $\sum\limits_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X_n})^2$ независимы.

   Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $\mathbb{E}X_j = a = 0$.

   Рассмотрим $U = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \ldots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \star & \ldots & \star \\ \star & \ldots & \star \end{pmatrix}$ — ортогональную, и случайную величину $u = UX \sim \mathcal{N}(0, \operatorname{diag}(\sigma^2))$,

$$\left(U^* C_x U = U^* \operatorname{diag}(\sigma^2) U = \sigma^2 U^* I U = \sigma^2 U^* U = \sigma^2 I = \operatorname{diag}(\sigma^2)\right)$$

   $\{u_\sigma\}$ — незав., $\mathbb{E}u_j = 0$, $\mathbb{D}u_j = \sigma^2$.

$$\sum_{j=2}^{n} u_j^2 = |u|^2 - u_1^2 = |u|^2 - \left(\frac{\sum X_j}{\sqrt{n}}\right)^2 = |X|^2 - nX_{(n)}^2 \text{ (т.к. } U \text{ — орт.)}$$

$$\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X_n})^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 - 2n\overline{X_n}\sum_{j=1}^{n} X_j + n\overline{X_n}^2 = \sum_{j=1}^{n} X_j^2 - n\overline{X_n}^2$$

$$\sum_{j=2}^{n} u_j^2 = \sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X_n})^2 \text{ — независимо с } u_1 = \sqrt{n}X_n$$

   При этом $\sum\limits_{j=2}^{n} u_j^2 = \sigma^2 \sum\limits_{j=2}^{n}(\sigma^{-1}u_j)^2$, и $\sigma^{-1}u_j \sim \mathcal{N}(0,1)$, то есть

$$\chi_n^2 = \sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X_n}s)^2 = \sum_{j=1}^{n} \xi_k^2,\ \{\xi_k\} \text{ — незав.}, \xi_k \sim \mathcal{N}(0,1),$$

   где χ_n^2 — распределение χ-квадрат с n степенями свободы, распределение величины $\sum\limits_{j=1}^{n} \eta_j^2$, η_j — независимые нормально распределенные с параметрами 0 и 1 величины.

   В итоге $\overline{X_n}$ и $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{j=1}^{n}(x_j - \overline{X_n})^2$ независимы и $\sigma^{-2}s^2 \sim \dfrac{1}{n-1}\,\chi_{n-1^2}$. ■

Так как σ неизвестна, заменим ее на $\sqrt{s^2}$ и получим статистику:

$$T_{n-1}(X) = \frac{\sqrt{n}(X_n - a)}{\sqrt{s^2}} = \frac{\frac{\sqrt{n}(X_n - a)}{\sigma}}{\sqrt{\sigma^2 s^2}} \sim \frac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\,\chi^2_{n-1}}},$$

ξ и χ независимы.

$T_n = \dfrac{\xi}{\sqrt{\frac{1}{n}\,\chi^2_n}}$ — распределение Стьюдента с $(n-1)$ степенями свободы.

Его плотность:

$$\varrho(x) = C_n \left(1 + \frac{x^2}{n-1}\right)^{-n/2}$$

Т.к. плотность симметрична, можем выбрать 1 квантиль:

$$F_{T_{n-1}}(t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \frac{\alpha}{2},\; F_{T_{n-1}}(-t_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \frac{\alpha}{2}$$

Попадаем в случай 1 с известной дисперсией:

$$P_\theta\left(-t_{1-\frac{\alpha}{2}} \le \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n} - a)}{\sqrt{s^2}} \le t_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \alpha \;\Leftrightarrow\; P_\theta\left(\underbrace{\overline{X_n} - \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_1(x)} \le a \le \underbrace{\overline{X_n} + \frac{t_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}}_{\hat{\Theta}_2(x)}\right) = 1 - \alpha$$

6. Проверка гипотез. Ошибки 1-го и 2-го рода. Уровень значимости и мощность статистического критерия. Пример построения критерия с помощью доверительного интервала. Нижняя оценка суммы вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода.

6.1. Проверка гипотез.

Пускай есть выборка $X_1, \ldots, X_n$ с распределением P_θ.

Определение. Предположения о значениях θ и называются статистическими гипотезами.

Пример. $H_0\colon \theta \in \Theta_0$ − статистическая гипотеза

Определение. Простая гипотеза (одноточечная гипотеза) − гипотеза вида $H_0\colon \theta = \Theta_0$, где $\Theta = \{\theta_0\}$

Определение. Гипотеза $H_1\colon \theta = \Theta_1$ − альтернативная гипотеза

Пример. $H_1\colon \theta = \overline{\Theta_0}$ − альтернативная гипотеза

Для проверки гипотез, строят критерий на основе критического множества как правило $\subset \mathbb{R}^n$, то есть действуют по такому принципу:
Выделяют в области значения параметров критического множества K, так, что $\forall\theta \in \Theta_0$, $P_\theta((X_1 \ldots X_n) \in K)$ − «маленькая», тогда $X_1 \ldots X_n \in K$ свидетельствует против гипотезы H_0, то есть если $X = (X_1 \ldots X_n) \in K \Rightarrow H_0$ отклоняется, иначе принимается.
Далее $X = (X_1 \ldots X_n)$

6.2. Ошибки 1-го и 2-го рода.

Пусть у нас есть критическое множество K. При проверке гипотез мы могли совершить две ошибки:

Определение. Ошибка первого рода: отклонение верной гипотезы H_0, то есть это $\underset{\theta\in\Theta_0}{P_\theta}(X \in K)$. В случае простой гипотезы $P_{\theta_0}(X \in K)$

Определение. Ошибка второго рода: принятие ложной гипотезы H_0, то есть это $\underset{\theta\in\Theta_1}{P_\theta}(X \notin K)$. В случае простой гипотезы $P_{\theta_1}(X \notin K)$

6.3. Уровень значимости и мощность статистического критерия.

Определение. Критерий K имеет уровень значимости α, если вероятность ошибки первого рода меньше либо равна α, то есть $\underset{\theta\in\Theta_0}{P_\theta}(X \in K) \leqslant \alpha$.

Определение. Мощность критерия K это величина, равная 1 - вероятность ошибки второго рода, то есть $1 - \underset{\theta\in\Theta_1}{P_\theta}(X \notin K) = \underset{\theta\in\Theta_1}{P_\theta}(X \in K)$. В случае простой гипотезы величина $\beta = P_{\theta_1}(X \in 1)$ − мощность

Если имеются два критерия K,S уровня значимости α, то K более мощный, чем S если

$$\forall\theta \in \Theta_1 \colon P_\theta(X \in K) \geqslant P_\theta(X \in S)$$

6.4. Пример построения критерия с помощью доверительного интервала.

Пример. Пускай $X_1,\ldots,X_n \sim \mathcal{N}(\theta,1)$

$H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta = \theta_1$

Ранее при данных условиях мы получили следующий доверительный интервал:

$$P_{\theta_0}\left(\overline{X_n} - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leqslant \theta_0 \leqslant \overline{X_n} + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) = P_{\theta_0}\left(\theta_0 - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{X_n} \leqslant \theta_0 + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

Выберем критическое множество $K\colon \left\{X \colon \overline{X_n} > \theta_0 + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right\} \cup \left\{X \colon \overline{X_n} < \theta_0 - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right\}$

Тогда $P_{\theta_0}(X \in K) = 1 - (1-\alpha) = \alpha$

Найдем ошибку второго рода:

$$P_{\theta_1}(X \notin K) = P_{\theta_1}\left(\theta_0 - \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}} \leqslant \overline{X_n} \leqslant \theta_0 + \frac{Z_{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{n}}\right) =$$

$$= P_{\theta_1}\left(\sqrt{n}\,(\theta_0-\theta_1) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leqslant \underbrace{\sqrt{n}\left(\overline{X_n}-\theta_1\right)}_{\sim\mathcal{N}(0,1)} \leqslant \sqrt{n}\,(\theta_0-\theta_1) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\sqrt{n}\,(\theta_0-\theta_1) + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) - \Phi\left(\sqrt{n}\,(\theta_0-\theta_1) - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right)$$

Посмотрим, что происходит при $n \to \infty$:

1. $\theta_0 > \theta_1 \implies P_{\theta_1}(X \notin K) \to 0$
2. $\theta_0 < \theta_1 \implies P_{\theta_1}(X \notin K) \to 0$

Таким образом, мы получили состоятельный критерий.

6.5. Нижняя оценка суммы вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода.

Теорема. Пусть у нас есть две гипотезы:

1. $H_0 : \rho = f_0$
2. $H_1 : \rho = f_1$

Сумма ошибки первого рода и ошибки второго рода больше либо равна $1 - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_0 - f_1| dx$

Доказательство. Найдем сумму ошибок первого и второго рода:

$$P_0(X \in K) + P_1(X \notin K) = \int\limits_K f_0 dx + \underbrace{\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus K} f_1 dx}_{1-\int\limits_K f_1 dx} = 1 + \int\limits_K (f_0 - f_1)dx \geqslant$$

Введем множество $S = \{f_0 \leqslant f_1\}$

$$\geqslant 1 + \int\limits_{K\cap S} (f_0 - f_1)dx \geqslant 1 + \int\limits_S (f_0 - f_1)dx$$

Рассмотрим отдельно интеграл $\int\limits_S (f_0 - f_1)dx$:

$$\int\limits_S (f_0 - f_1)dx = \int\limits_S f_0 dx - \int\limits_S f_1 dx = 1 - \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus S} f_0 \ dx - 1 + \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus S} f_1 dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus S} (f_1 - f_0)dx$$

В силу того, как мы выбрали множество S, можно увидеть, что

1. $\int\limits_S (f_0 - f_1)dx = -\int\limits_S |f_0 - f_1|dx$
2. $\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus S} (f_1 - f_0)dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus S} |f_0 - f_1|dx$

Тогда мы получаем, что

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus S} |f_0 - f_1|dx = -\int\limits_S |f_0 - f_1|dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_0 - f_1|dx \implies P_0(X \in K) + P_1(X \notin K) \geqslant 1 - \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_0 - f_1|dx$$

■

7. Теорема Неймана-Пирсона и пример её применения.

7.1. Теорема Неймана-Пирсона.

Пусть гипотеза H_0 утверждает, что плотность выборки – это f_0, а альтернативная гипотеза H_1 утверждает, что плотность выборки – это f_1.
Предположим, что $\forall \alpha \in [0,1] \ \exists t := t(\alpha) : P_0(f_1(x) \geqslant t f_0(x)) = \alpha$.

Теорема (Неймана-Пирсона)**.** В такой постановке наиболее мощный критерий уровня значимости α имеет вид $K_{t(\alpha)} := \{f_1(x) \geqslant t(\alpha) f_0(x)\}$.

Доказательство. Пусть S – тоже критерий уровня значимости α: $P_0(X \in S) \leqslant \alpha = P_0(X \in K_{t(\alpha)})$. Хотим сравнить $P_1(X \in K_{t(\alpha)}) - P_1(X \in S)$. Хотим, чтобы это было больше либо равно нуля. Это и будет означать, что у нас критерий наиболее мощный.
$P_1(X \in K_{t(\alpha)}) - P_1(X \in S) = \int\limits_{K_{t(\alpha)}} f_1 dx - \int\limits_S f_1 dx =$ [можем выкинуть пересечение, так как на пересечении эти интегралы просто сократятся] $= \int\limits_{K_{t(\alpha)} \setminus S} f_1 dx - \int\limits_{S \setminus K_{t(\alpha)}} f_1 dx$.
Заметим, что на $S \setminus K_{t(\alpha)}$ выполнено $f_1 < t(\alpha) f_0$, так как это взято из дополнения к $K_{t(\alpha)}$, где по условию выполняется $f_1(x) \geqslant t(\alpha) f_0(x)$. Поэтому имеем: $\int\limits_{K_{t(\alpha)} \setminus S} f_1 dx - \int\limits_{S \setminus K_{t(\alpha)}} f_1 dx \geqslant t(\alpha) \int\limits_{K_{t(\alpha)} \setminus S} f_0 dx - t(\alpha) \int\limits_{S \setminus K_{t(\alpha)}} f_0 dx =$ [снова добавим пересечение и вынесем $t(\alpha)$] $= t(\alpha) \cdot (\int\limits_{K_{t(\alpha)}} f_0 dx - \int\limits_S f_0 dx) = t(\alpha) \cdot (P_0(X \in K_{t(\alpha)}) - P_0(X \in S)) \geqslant 0$ из построения критерия S ($P_0(X \in S) \leqslant \alpha = P_0(X \in K_{t(\alpha)})$).

Получили: $P_1(X \in K_{t(\alpha)}) - P_1(X \in S) \geqslant 0$, что и требовалось доказать. ■

7.2. Пример применения теоремы Неймана-Пирсона.

Пример. Пусть у нас выборка из нормального закона $N(\theta, 1)$. Пусть наша гипотеза H_0 говорит, что $\theta = \theta_0$, а альтернативная гипотеза H_1 говорит, что $\theta = \theta_1 > \theta_0$.

$$f_1(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (X_j - \theta_1)^2\right)$$
$$f_0(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (X_j - \theta_0)^2\right)$$

Зададим критерий K_t из теоремы Неймана-Пирсона (ничего в 0 не обращается – сразу можем поделить):
$K_t = \left\{\dfrac{f_1}{f_0} \geqslant t\right\} = \left\{exp\left(\dfrac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n}[(X_j-\theta_0)^2-(X_j-\theta_1)^2]\right) \geqslant t\right\}$ = [логарифмируем, расскрываем скобки, умножаем на два] $= \left\{\sum\limits_{j=1}^{n}[2X_j(\theta_1-\theta_0)+n(\theta_0^2+\theta_1^2)] \geqslant 2\ln t\right\} = \left\{(\theta_1-\theta_0)\overline{X_n} \geqslant \dfrac{\ln t}{n} - \dfrac{(\theta_0^2+\theta_1^2)}{2}\right\}$ = [по условию $\theta_1 > \theta_0 \Rightarrow$ поделим]
$= \left\{\overline{X_n} \geqslant \dfrac{\dfrac{\ln t}{n} - \dfrac{(\theta_0^2+\theta_1^2)}{2}}{\theta_1-\theta_0}\right\}$

Таким образом пришли к тому, что $K_t = \left\{\dfrac{f_1}{f_0} \geqslant t\right\}$ равносильно множеству $\widetilde{K}_s = \left\{\overline{X_n} \geqslant s\right\}$. Равносильно в том смысле, что для каждого t мы можем подобрать $s(t)$, что множество K_t совпадает с $\widetilde{K}_{s(t)}$. Теперь будем искать критические множества именно в таком виде (для удобства).

Должно выполняться: $P_0(X \in K_t) = \alpha \Leftrightarrow P_0(X \in \widetilde{K}_{s(t)}) = \alpha$. А что это за вероятности? Это вероятность
$P_{\theta_0}(\overline{X_n} \geqslant s) = \alpha$
То есть, $P_{\theta_0}(\sqrt{n}(\overline{X_n}-\theta_0) \geqslant \sqrt{n}(s-\theta_0)) = \alpha$, где $\sqrt{n}(\overline{X_n}-\theta_0) \sim N(0,1)$, поэтому тут просто написано,
что $1-\Phi(\sqrt{n}(s-\theta_0)) = \alpha$.

Значит, выбираем квантиль нормального закона уровня $1-\alpha$: $Z_{1-\alpha} = \sqrt{n}(s-\theta_0) \Rightarrow$
$s = \theta_0 + \dfrac{Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$. Выразили s.

Таким образом, наше критическое множество $\left\{\overline{X_n} \geqslant \theta_0 + \dfrac{Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right\}$. Это критерий уровня значимости α.

Теперь посчитаем мощность (это же самый мощный критерий):
$P_{\theta_1}\left(\overline{X_n} \geqslant \theta_0 + \dfrac{Z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}\right) = P_{\theta_1}\left(\sqrt{n}(\overline{X_n}-\theta_1) \geqslant \sqrt{n}(\theta_0-\theta_1)+Z_{1-\alpha}\right) = 1-\Phi(\sqrt{n}(\theta_0-\theta_1)+Z_{1-\alpha})$.

Заметим, что если объём выборки n устремить к бесконечности, то точка, в которой мы берём Φ стремится к минус бесконечности (так как $(\theta_0-\theta_1) < 0$ по условию), поэтому мощность стремится к 1.

По теореме Неймана-Пирсона выписанная мощность максимальна.

8. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко-Кантелли.