

Математический анализ 2, Коллоквиум IV

Версия от 13.06.2021 21:26

Содержание

1. Кусочно-гладкая кривая и её длина. Элемент длины для параметрически заданной кривой. Криволинейный интеграл I-го рода.	3
2. Кусочно-гладкая поверхность и её площадь. Элемент площади для параметрически заданной поверхности. Поверхностный интеграл I-го рода.	3
3. Дифференциальная 1-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую. Ориентация кривой. Криволинейный интеграл II-го рода. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода.	3
4. Формула Грина и её приложение к вычислению площади кривой. Внешний дифференциал 2-мерной 1-формы и краткая запись формулы Грина.	3
5. Дифференциальная 2-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность. Ориентация поверхности и вектор нормали. Поверхностный интеграл II-го рода. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода.	3
6. Формула Остроградского-Гаусса и её приложение к вычислению объема тела. Внешний дифференциал 3-мерной 2-формы, дивергенция векторного поля и краткая запись формулы Остроградского-Гаусса.	3
7. Формула Стокса. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы, ротор векторного поля и краткая запись формулы Стокса.	3
8. Комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$	3
9. Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции. Условия Коши-Римана и голоморфность. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.	6
10. Голоморфная функция нескольких переменных. Голоморфность композиции (в том числе: суммы, произведения, частного) голоморфных функций. Голоморфность обратной функции.	6
11. Аналитическая функция. Аналитичность голоморфной функции. Неравенство Коши для коэффициентов ряда. Радиус сходимости ряда как максимальный радиус круга, в котором функция голоморфна. Теорема Лиувилля.	7
12. Бесконечная дифференцируемость и голоморфность аналитической функции. Нуль аналитической функции и его порядок. Изолированность нуля аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции.	8
13. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.	8
13.1. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность.	8
13.2. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке.	8
13.3. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$	9
13.4. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.	9

14. Ряд Лорана и его сходимость. Единственность разложения Лорана. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.	10
15. Вычет голоморфной функции в однозначной особой точке. Теорема Коши о вычетах. Вычет как коэффициент c_{-1} ряда Лорана. Вычисления вычета в полюсе.	10

1. Кусочно-гладкая кривая и её длина. Элемент длины для параметрически заданной кривой. Криволинейный интеграл I-го рода.
2. Кусочно-гладкая поверхность и её площадь. Элемент площади для параметрически заданной поверхности. Поверхностный интеграл I-го рода.
3. Дифференциальная 1-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 1-формы на гладкую кривую. Ориентация кривой. Криволинейный интеграл II-го рода. Выражение криволинейного интеграла II-го рода через криволинейный интеграл I-го рода.
4. Формула Грина и её приложение к вычислению площади кривой. Внешний дифференциал 2-мерной 1-формы и краткая запись формулы Грина.
5. Дифференциальная 2-форма в области пространства. Перенесение дифференциальной 2-формы на гладкую поверхность. Ориентация поверхности и вектор нормали. Поверхностный интеграл II-го рода. Выражение поверхностного интеграла II-го рода через поверхностный интеграл I-го рода.
6. Формула Остроградского-Гаусса и её приложение к вычислению объема тела. Внешний дифференциал 3-мерной 2-формы, дивергенция векторного поля и краткая запись формулы Остроградского-Гаусса.
7. Формула Стокса. Внешний дифференциал 3-мерной 1-формы, ротор векторного поля и краткая запись формулы Стокса.
8. Комплексная плоскость, сфера Римана и стереографическая проекция. Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z$, $\cos z$. Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}$, $\operatorname{Ln} z$.

Комплексная плоскость.

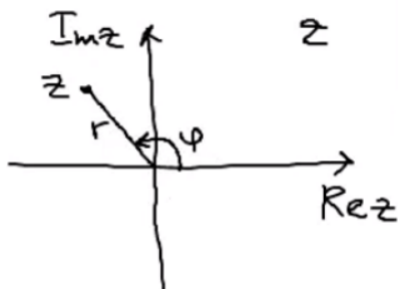
Формально вводим символ i , такой что $i^2 = -1$.

Определение. Линейная комбинация обычной единицы и мнимой единицы с вещественными коэффициентами называется *комплексным числом* $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$.

Действительная часть числа z : $\operatorname{Re} z = x$, мнимая часть числа z : $\operatorname{Im} z = y$.

Определение. Каждому комплексному числу z ставится в соответствии *сопряженное* $\bar{z} = x - iy$.

Можно еще задать комплексное число геометрически:



Определение. Тогда *модуль* числа z — $r = |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$. *Аргумент* числа z — угол φ , такой что $x = |z| \cos \varphi$, $y = |z| \sin \varphi$.

На этом моменте впервые встает вопрос о многозначности функций.

Определение. Если мы хотим говорить про однозначно выбираемый аргумент, то пишут $\varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$ или $(-\pi; \pi]$ – *главное значение* аргумента. При этом, $\varphi = \text{Arg } z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ – *полный (или многозначный)* аргумент.

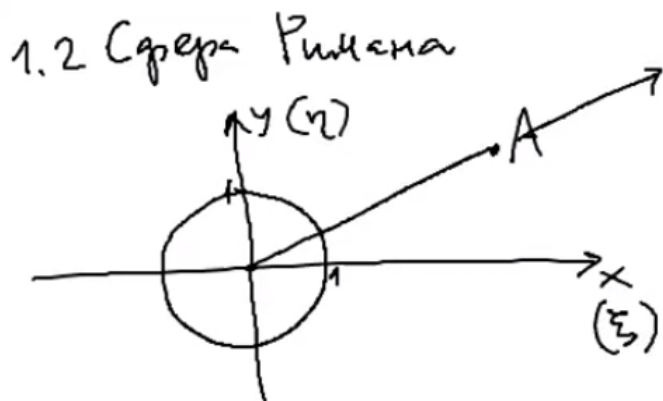
Определение. Тригонометрическая запись комплексного числа: $z = |z| \cdot (\cos \text{Arg } z + i \sin \text{Arg } z)$.

Определение. Показательная форма записи: комплексного числа: $z = |z| \cdot e^{i \text{Arg } z}$.

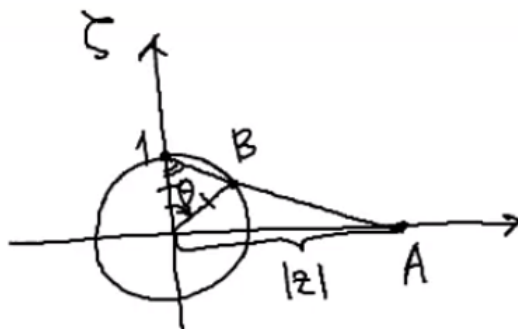
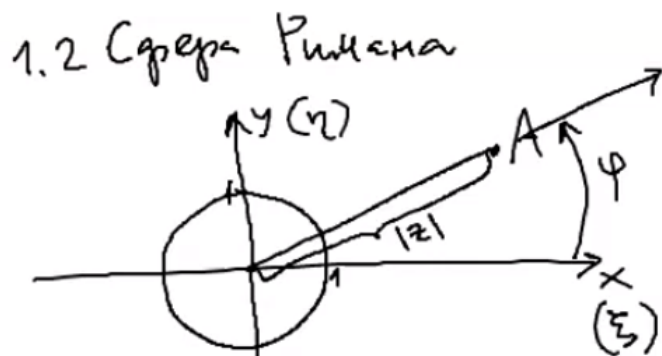
Комплексную плоскость обычно обозначают \mathbb{C} .

Сфера Римана и стереографическая проекция.

На рисунке не окружность, а сфера единичная.



Рассматриваем вертикальное сечение в плоскости, содержащей ось ζ и прямую, проходящую через начало координат и точку A . Наша сфера выглядит следующим образом (рисунок справа):



Определение. Отображение $B \mapsto A$ – *стереографическая проекция*. Но для нас будет более важным обратное отображение.

Заметим, что $|z| = \tan \frac{\pi - \theta}{2}$ и $\varphi = \arg z$.

Отсюда несложно вывести (по словам Маевского Е.В.), что $\xi = \frac{2x}{1 + |z|^2}, \eta = \frac{2y}{1 + |z|^2}, \zeta = \frac{|z|^2 - 1}{1 + |z|^2}$.

Обратные формулы: $x = \frac{\xi}{1 - \zeta}$ и $y = \frac{\eta}{1 - \zeta}$.

В действительном матанализе мы фактически имели две бесконечности (для нас было важно направление): $+\infty$ и $-\infty$. В комплексном матанализе чаще всего не имеет значения, в каком направлении мы идем в бесконечность. Поэтому рассматривается просто *бесконечно удаленная точка* и обозначается $z \rightarrow \infty$. Это означает, что $|x|, |y| \rightarrow \infty$.

Можно заметить, что если мы захотим добавить бесконечно удаленную точку к комплексной плоскости, то ей будет соответствовать северный полюс на сфере Римана. Если мы добавим к комплексной плоскости бесконечно удаленную точку, то это называется *замкнутой комплексной плоскостью*: $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. И вот как раз замкнутую комплексную плоскость очень удобно представлять, как сферу Римана.

Стало непонятно, надо ли теxать про сходимостъ последовательности, поэтому ссылка с таймкодом на лекцию: [ТЫК](#).

Функция комплексной переменной.

Определение. Функция комплексной переменной $w = f(z)$ – отображение, заданное на одной комплексной плоскости и принимающее значения на другой комплексной плоскости.

Считаем, что $w = u + iv$, тогда становится понятно, что $f(z) = u(z) + iv(z)$, где $u(z), v(z)$ – вещественные функции от комплексной переменной. Еще можно представлять функцию от z как функцию от двух переменных: $f(z) = \tilde{f}(x, y)$. Тогда $\tilde{f}(x, y) = \tilde{u}(x, y) + i\tilde{v}(x, y)$.

Замена переменной:

$$\begin{cases} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{z + \bar{z}}{2} \\ y = \frac{z - \bar{z}}{2i} \end{cases}$$

$$\text{Тогда } f(z) = \tilde{f}\left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i}\right).$$

Определения экспоненты e^z и тригонометрических функций $\sin z, \cos z$.

Определение. Экспонента e^z в комплексном случае задается двумя эквивалентными способами:

$$\begin{aligned} 1) e^z &:= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \quad \forall z \\ 2) e^z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \end{aligned}$$

На основе этого определения доказываются все те же известные нам алгебраические свойства экспоненты для комплексного случая.

Тогда можем написать, что $w = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \implies u = e^x \cos y, v = e^x \sin y$.

Определение. Косинус в комплексном случае тоже задается двумя эквивалентными способами:

$$\begin{aligned} 1) \cos z &:= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ 2) \cos z &:= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \end{aligned}$$

С помощью этих формул можно получить следующее:

$$\cos z = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} = \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \implies u = \cos x \operatorname{ch} y, v = -\sin x \operatorname{sh} y$$

Определение. Синус в комплексном случае тоже задается двумя эквивалентными способами:

$$\begin{aligned} 1) \sin z &:= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\ 2) \sin z &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} \end{aligned}$$

С помощью этих формул можно получить следующее:

$$\sin z = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \implies u = \sin x \operatorname{ch} y, v = \cos x \operatorname{sh} y$$

Определения многозначных функций $\sqrt[n]{z}, \operatorname{Ln} z$.

Определение. Комплексным корнем n -ой степени $\sqrt[n]{z}, z \neq 0$ называется каждое число $w : w^n = z$, где $n = 2, 3, 4, \dots$

Определение. Полным натуральным логарифмом $\operatorname{Ln} z, z \neq 0$ называется каждое число $w : e^w = z$. Составим $z = |z| \cdot e^{i \operatorname{Arg} z} \implies \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + i2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Это пример бесконечнозначной функции.

9. Дифференциал, дифференцируемость и производная комплексной функции. Условия Коши-Римана и голоморфность. Интеграл от голоморфной функции по кусочно-гладкой кривой. Теорема Коши. Интегральная формула Коши.
10. Голоморфная функция нескольких переменных. Голоморфность композиции (в том числе: суммы, произведения, частного) голоморфных функций. Голоморфность обратной функции.

Определение. Пусть $D \subseteq \mathbb{R}^2$ – область определения

$f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ – непрерывно дифференцируема.

f называется голоморфной в D , если она удовлетворяет условию Коши-Римана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

Определение. Пусть $G_1, G_2 \subseteq \mathbb{C}$ – области определения. Функция $F : G_1 \times G_2 \rightarrow \mathbb{C}$:

$$F(z_1, z_2) = U(x_1, y_1, x_2, y_2) + iV(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

называется голоморфной, если она непрерывно дифференцируема и голоморфна по каждой переменной в отдельности.

Теорема. Пусть $D \subseteq \mathbb{C}$ – область, $\varphi_1 : D \rightarrow G_1$, $\varphi_2 : D \rightarrow G_2$ – голоморфны.

Тогда $f(z) = F(\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ – голоморфна.

Доказательство. Для удобства будем иметь в виду, что $\varphi_k(z) = \xi_k(x, y) + i\eta_k(x, y)$, $k \in \{1, 2\}$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$

Тогда

$$u'_x = U'_{x_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial x} + U'_{y_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} + U'_{x_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial x} + U'_{y_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} = V'_{y_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} + (-V'_{x_1}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_1}{\partial y}\right) + V'_{y_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial y} + (-V'_{x_2}) \cdot \left(-\frac{\partial \xi_2}{\partial y}\right) = v'_y$$

Аналогично, $u'_y = -v'_x$ ■

Следствие. Голоморфны следующие функции:

1. $F(z_1, z_2) = az_1 + bz_2$
2. $F(z_1, z_2) = z_1 \cdot z_2$
3. $F(z_1, z_2) = \frac{z_1}{z_2}$, $z_2 \neq 0$

Теорема. Пусть $w = f(z)$, $w_0 = f(z_0)$, $f'(z_0) \neq 0$ и f – голоморфна в окрестности точки z_0 .

Тогда в некоторой окрестности точки w_0 существует единственная обратная функция $f^{-1}(w) : f^{-1}(w_0) = z_0$, которая является голоморфной.

Доказательство. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, тогда:

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}, \text{ причем } \begin{cases} u_0 = u(x_0, y_0) \\ v_0 = v(x_0, y_0) \end{cases}$$

Посчитаем Якобиан отображения в z_0 :

$$\left| \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix} \right|_{z_0} = |f'(z_0)|^2 > 0 \implies \text{Существует единственное обратное отображение по теореме о неявной функции}$$

Найдем матрицу Якоби обратного отображения:

$$\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \Big|_{w_0} = \begin{pmatrix} u'_x & u'_y \\ v'_x & v'_y \end{pmatrix}^{-1} \Big|_{z_0} = \frac{1}{|f'(z_0)|^2} \begin{pmatrix} v'_y & -u'_y \\ -v'_x & u'_x \end{pmatrix}$$

Рассмотрим элементы на главных диагоналях первой и последней матриц. Т.к. исходное отображение голоморфно, то $v'_y = u'_x$, а значит и $x'_u = y'_u$.

Аналогично, рассмотрев элементы на побочных диагоналях, получим, что $x'_v = -y'_u$. Условие Коши-Римана выполнено, значит, обратная функция является голоморфной. ■

11. Аналитическая функция. Аналитичность голоморфной функции. Неравенство Коши для коэффициентов ряда. Радиус сходимости ряда как максимальный радиус круга, в котором функция голоморфна. Теорема Лиувилля.

Определение. Функция называется аналитической в точке z_0 , если $\exists \{c_n\} \in \mathbb{C}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot (z - z_0)^k, \quad |z - z_0| < \delta$$

Теорема. Если функция f голоморфна в окрестности z_0 , то она аналитична в z_0 .

Доказательство. Пусть $|z - z_0| < \varepsilon < \delta$, $L = \{\zeta : |\zeta - z_0| = \varepsilon\}$

$$\text{Тогда по формуле Коши: } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(1 + \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} + \dots + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^n + \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} \right) d\zeta =$$

$$= \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) \cdot (z - z_0)^k + \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_L f(\zeta) \cdot \frac{\left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^{n+1}}{\zeta - z} d\zeta}_{r_n(z, z_0)}$$

Пусть $M = \sup_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} |f(\zeta)|$, а также заметим, что $|\zeta - z| \geq |\zeta - z_0| - |z - z_0| = \varepsilon(1 - \alpha)$, тогда:

$$|r_n(z, z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_L |f(\zeta)| \cdot \frac{\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right|^{n+1}}{|\zeta - z|} dl \leq \frac{M \cdot \alpha^{n+1}}{2\pi \cdot \varepsilon(1 - \alpha)} \cdot \underbrace{2\pi\varepsilon}_{\text{длина кривой}} \leq \frac{M \cdot \alpha^{n+1}}{\varepsilon(1 - \alpha)} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

Значит, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, $c_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta$ при $\forall z : |z - z_0| < \delta$.

Так как $\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}$ голоморфна в кольце $\varepsilon_1 \leq |z - z_0| \leq \varepsilon_2$, то $\oint_{|z - z_0| = \varepsilon_2} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta - \oint_{|z - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta = 0 \implies c_k$

не зависит от ε . ■

Следствие. (Неравенство Коши)

$$|c_k| \leq \oint_L \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{k+1}} dl \leq \frac{M}{2\pi\varepsilon^{k+1}} \cdot 2\pi\varepsilon = \frac{M}{\varepsilon^k}, \text{ подставим } M:$$

$$|c_k| \leq \frac{1}{\varepsilon^k} \cdot \sup_{|z - z_0| = \varepsilon} |f(z)| \quad \forall \varepsilon < \delta$$

Теорема. Пусть $f(z)$ голоморфна в $|z - z_0| < r$, но не является голоморфной в круге большего радиуса, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$, $|z - z_0| < R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$. Тогда $R = r$.

Доказательство. Пусть $M = \sup_{|z - z_0| = \varepsilon} |f(z)|$, $|c_k| \leq \frac{M}{\varepsilon^k} \quad \forall \varepsilon < r$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} \leq \frac{1}{\varepsilon} \implies R \geq \varepsilon \quad \forall \varepsilon < r \implies R \geq r.$$

Но если $R > r$, то ряд сходится в $z: |z - z_0| > r$, что противоречит условию.

Значит, $R = r$. ■

Теорема. (Лиувилля)

Если функция $f(z)$ голоморфна и ограничена на \mathbb{C} , то она – константа.

Доказательство. Пусть $M = \sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|$, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$

Так как $|c_k| \leq \frac{M}{\varepsilon^k} \forall \varepsilon$, то при $\varepsilon \rightarrow \infty$ получаем, что $c_1 = c_2 = \dots = 0 \implies f(z) = c_0$ ■

12. Бесконечная дифференцируемость и голоморфность аналитической функции. Нуль аналитической функции и его порядок. Изолированность нуля аналитической функции. Теорема единственности аналитической функции.

13. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.

13.1. Однозначные особые точки: устранимая особенность, полюс, существенная особенность.

Определение. Точка z_0 называется изолированной особой точкой однозначного характера функции f , если

$\exists \delta: f$ голоморфна в проколотой окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$, но не является голоморфной ни в каком круге $|z - z_0| < r$

Классификация:

- $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \in \mathbb{C} \iff$ устранимая особенность
- $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \iff$ полюс
- $\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \iff$ существенная особенность

13.2. Голоморфность функции, доопределенной по непрерывности в устранимой особой точке.

Теорема. Если z_0 – устранимая особенность функции f и $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a \in \mathbb{C}$, то $\tilde{f}(z) = \begin{cases} f(z), & z \neq z_0 \\ a, & z = z_0. \end{cases}$

голоморфна в окрестности точки z_0

Доказательство. Пусть f голоморфна в $0 < |z - z_0| < \delta$, $\varepsilon_1 < \varepsilon < \delta$ и $\varepsilon_1 < |z - z_0| < \varepsilon$ Тогда по формуле Коши, получаем, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{(*)}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \stackrel{(**)}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \left[\begin{array}{l} \text{при } \varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ z \neq z_0 \end{array} \right]$$

Объяснения:

(*) : Граница множества D состоит из двух окружностей: внешней (радиуса ε , которая обходится в положительном направлении (против часовой стрелки) и внутренней (радиуса ε_1), которая обходится в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Заодно сразу поменяем знак перед интегралом по внутренней окружности, для того, чтобы написать его в положительном направлении.

(**): Оценим сверху модуль второго интеграла:

$$\underbrace{\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right|}_{\text{интеграл второго рода}} \leq \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| dl}_{\text{интеграл первого рода}}$$

Затем оценим саму подынтегральную функцию:

$$\left. \begin{array}{l} f(\zeta) = a + o(1) \text{ при } \varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ |\zeta - z| \geq \underbrace{|t - z_0|}_{\text{число}} - \varepsilon_1 \\ \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} dl = 2\pi\varepsilon_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon_1} \left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \right| dl}_{\text{интеграл первого рода}} \xrightarrow{\varepsilon_1 \rightarrow 0} 0$$

Вернемся к получившемуся выражению для функции $f(z)$

Так как мы перешли к пределу, мы можем сказать, что во всех точка z , включая z_0 , можно понимать левую часть выражения как $\tilde{f}(z)$, тогда получим:

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \left[\begin{array}{l} \text{при } \varepsilon_1 \rightarrow 0 \\ |z - z_0| < \delta \end{array} \right]$$

Если мы применим к данному интегралу рассуждения, которые мы применяли при доказательстве аналитичности голоморфной функции (11 билет), получим, что функция представленная данным образом аналитична в точке z_0 , а отсюда следует, что она голоморфна в точке z_0 . Ну и напоследок, если мы в этот интеграл вместо z подставим z_0 , в силу произвольности ε , устремив ε к нулю, мы получим, что $\tilde{f}(z_0) = a$. ■

13.3. Порядок полюса функции $f(z)$ и порядок нуля функции $\frac{1}{f(z)}$.

Определение. Полюс это точка, такая что в проколотой окрестности этой точки функция голоморфна, а в самой этой точке в пределе получается бесконечное значение.

Пускай $f(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \infty$, то есть z_0 — полюс

Рассмотрим функцию $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, тогда $g(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$ и $g(z)$ будет голоморфной в проколотой окрестности точки z_0 (так как $f(z)$ голоморфна в проколотой окрестности точки z_0 и не обращается в 0), отсюда делаем вывод, что $g(z)$ имеет устранимую особенность.

Доопределим функцию $g(z)$ в точке z_0 , получим новую функцию $\tilde{g}(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0. \end{cases}$ которая будет голоморфной

в точке z_0 , а значит будет аналитической, мы можем представить ее в виде степенного ряда:

$$\tilde{g}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \text{ так как } \tilde{g}(z_0) = 0 \text{ то } c_0 = \dots = c_n = 0, c_{n+1} \neq 0 \Rightarrow \tilde{g}(z) = (z - z_0)^n \underbrace{(c_{n+1} + c_{n+2}(z - z_0) + \dots)}_{h(z)}$$

Определение. В такой ситуации говорят, что $\tilde{g}(z)$ имеет нуль n -ого порядка.

Распишем тогда как будет выглядеть изначальная функция $f(z)$:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^n} \cdot \underbrace{\frac{1}{h(z)}}_{\text{голоморфна в } z_0}$$

Определение. Число n в полученном выражении называется порядком полюса. Функция $f(z)$ имеет полюс n -ого порядка.

13.4. Теорема Сохоцкого о существенно особой точке.

Теорема. Если z_0 — существенно особая точка функции f , то

$$\forall a \in \overline{\mathbb{C}} \exists \{z_n\}: z_n \rightarrow z_0, f(z_n) \rightarrow a$$

Доказательство.

- $a = \infty$ Если функция ограничена в $0 < |z - z_0| < \delta$ то z_0 — устранимая особенность, но так как мы знаем, что z_0 не является устранимой особенностью, то функция f не ограничена в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$, а значит $\exists \{z_n\} : z_n \rightarrow z_0, f(z_n) \rightarrow \infty$
- Если $\forall \delta \exists z : 0 < |z - z_0| < \delta, f(z) = a$, тогда $\exists \{z_n\} : 0 < |z_n - z_0| < \frac{1}{n}, f(z_n) = a$ (выбрали последовательность, на которой функция в точности принимает значение a)
- $\exists \delta : 0 < |z - z_0| < \delta, f(z) \neq a$ Рассмотрим функцию $g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$, так как $f(z)$ в некоторой проколотой окрестности не принимает значение a , то функция $g(z)$ — голоморфна в кольце $0 < |z - z_0| < \delta$
Тогда функция f выглядит следующим образом $f(z) = a + \frac{1}{g(z)}$ отсюда следует, что g в точке z_0 имеет существенную особенность. По первому рассмотренному случаю получаем, что для функции g верно, что $\exists \{z_n\} : g(z_n) \rightarrow \infty$, тогда $f(z_n) \rightarrow a$.

■

14. **Ряд Лорана и его сходимость. Единственность разложения Лорана. Главная часть ряда Лорана и классификация особых точек.**
15. **Вычет голоморфной функции в однозначной особой точке. Теорема Коши о вычетах. Вычет как коэффициент c_{-1} ряда Лорана. Вычисления вычета в полюсе.**