Universidade Estadual de Londrina
Departamento de Computação

Programa de Mestrado em Computação

Módulo 7 – Transformada Hotelling (PCA-KLT)

Autor: Prof. Dr. Alan Salvany Felinto
email: alan@uel.br

(2017)

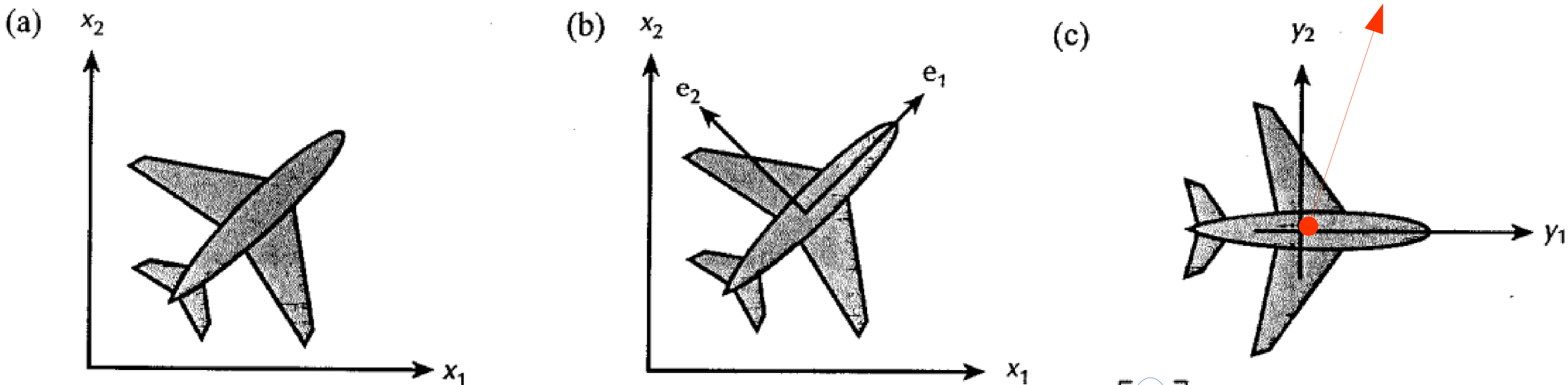
Sumário

- Estudo de Caso
- Média
- Matriz de Covariância
- Autovalor e autovetor
- Matriz mudança de Base
- Transformada de Hotelling, PCA ou Karhunen-Loeve (KLT)
- Exercícios
- Referências Bibliográficas

Estudo de Caso

Matriz mudança de base de tal forma que alinhe os dados na direção de maior dispersão.

Centro de massa



Considere um conjunto de vetores:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Para o estudo de caso, considere as coordenadas dos pixeis na imagem, $\mathbf{x}$ = (coordenada x_1, coordenada x_2)^T

Valor Esperado

Cálculo do valor médio:

Onde $\boldsymbol{M}$ é a quantidade de amostras. No caso exposto, é a quantidade de pixeis na imagem. Portanto $\mathbf{m_x}$ no estudo de caso é o centro de massa (baricentro) do objeto de interesse.

$\mathbf{m_x}$ = (média em x_1, média em x_2).
$\mathbf{m_x}$ = valor esperado

$$\mathbf{m_x} = E\{\mathbf{X}\} \quad \left\{ \quad \mathbf{m_x} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\mathbf{x}_k \right.$$

Para conhecer o comportamento das medidas calcula-se a a matriz de covariância, que contem as variância e as covariâncias dos dados.

Podemos construir a matriz Covariância utilizando $\mathbf{m_x}$:

$$\mathbf{C_x} = \frac{1}{M}\sum_{k=1}^{M}\mathbf{x}_k\mathbf{x}_k^T - \mathbf{m_x}\mathbf{m_x}^T$$

Exemplo Numérico

Propriedades:

-A matriz de covariância é simétrica.

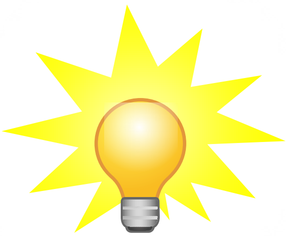
- Se a matriz de Covariância$_{(nxn)}$ for real e simétrica, existirá n autovalores associados a n autovetores [Noble 1969].

Transformada

Se **Cx** é real e simétrica então existe n autovetores ortonormais, associado a n autovalores

Autovetor e Autovalor

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$



$$T\vec{v} = \lambda\vec{v} \qquad (1)$$

Bhaskara

$$\det(M-\lambda I)=0 \qquad (2)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1) Calcule o autovalor utilizando a EQ 2.

2) Com o autovalor calculado encontre o autovetor utilizando a EQ 1.

Calculo do autovalor e autovetor

…………………

Transformada de hotelling

Como C_x é real e simétrica é possível calcular **n** autovetores ortonormais.

Crie uma matriz A, sendo que as linhas são os autovetores ordenadas de maneira decrescente de acordo com os autovalores correspondentes

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_x)$$
$$\mathbf{m}_y = 0$$
$$\mathbf{C}_y = \mathbf{A}\mathbf{C}_x\mathbf{A}^T.$$

Transformada de Hotelling
(obtenção da rotação do estudo de caso)

Como as linhas de A são vetores ortonormais então: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$

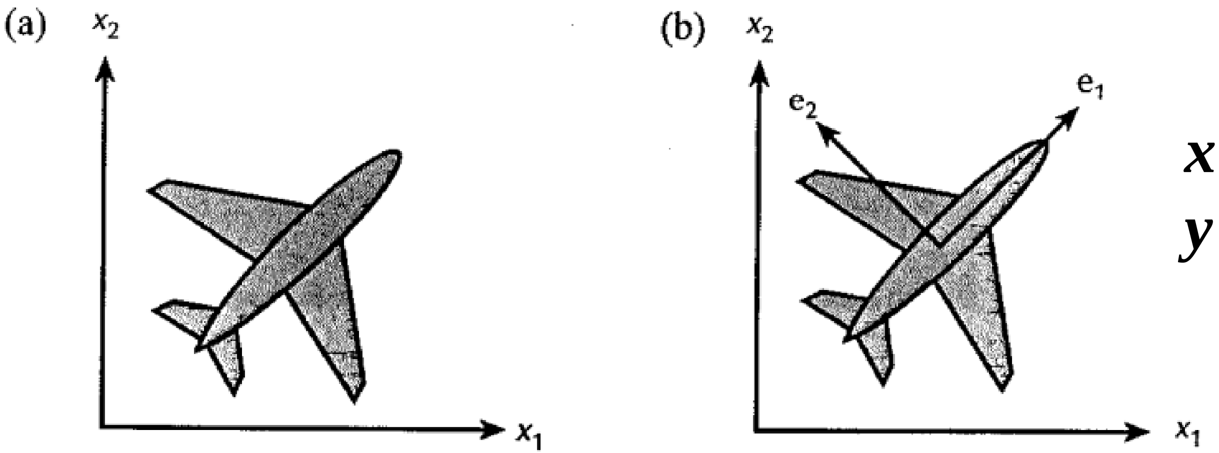
$$\mathbf{C}_y = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & 0 \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ 0 & & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{y} + \mathbf{m}_x.$$

Transformada inversa

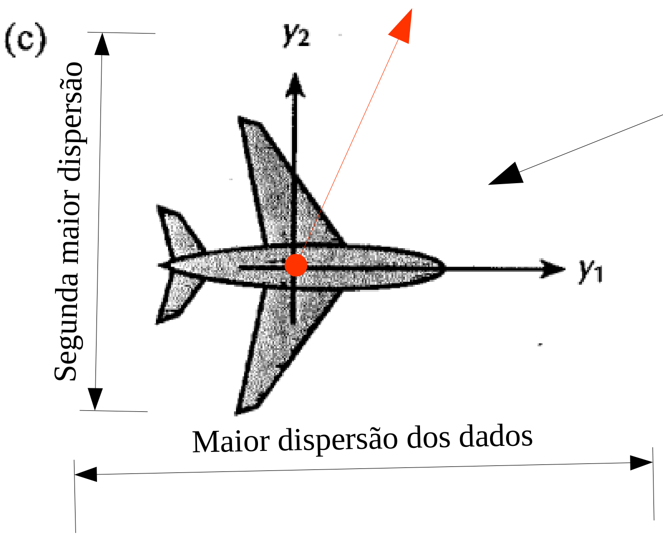
Matriz de covariância com variáveis descorrelacionadas (Valores zeros fora da diagonal principal), formada pelos autovalores em ordem decrescente.

PCA



x - Coordenadas originais
y - Coordenadas calculadas

Centro de massa



$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{m}_{\mathbf{x}})$$

OBS: Dados alinhados pela maior dispersão dos dados

Transformada de hotelling

Montando a matriz A_k com somente k autovalores associados aos k maiores autovalores. Neste caso os vetores y terão dimensão k.

A inversa é um valor aproximado de $\boldsymbol{x}$: $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_K^T \mathbf{y} + \mathbf{m}_\mathbf{x}$

Importante o erro quadrático médio entre $\boldsymbol{x}$ e $\hat{\mathbf{x}}$ é dado por:

$$e_{ms} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j - \sum_{j=1}^{K} \lambda_j$$

$$= \sum_{j=K+1}^{n} \lambda_j$$

Onde **n** é a dimensão dos vetores do tipo x

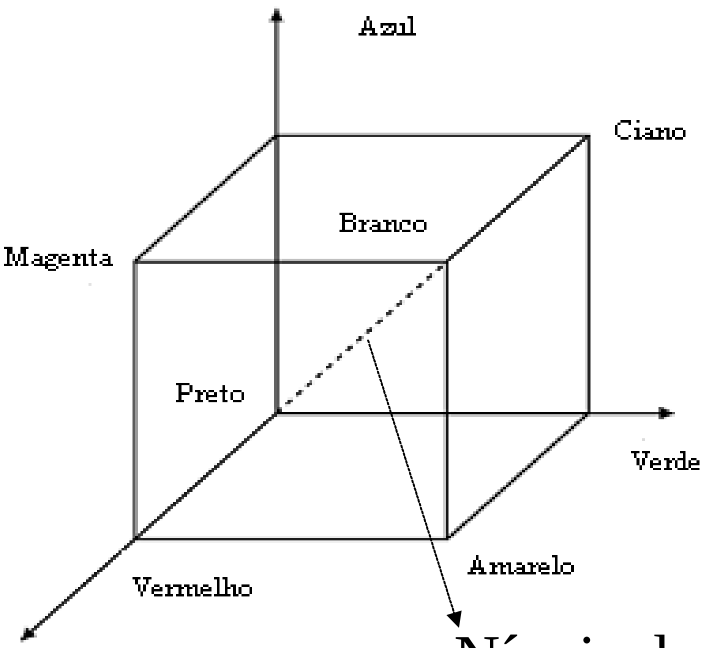
se $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{n}$, Indica que o erro é zero

Com as escolhas dos maiores autovalores tem-se a diminuição do erro quadrático médio.

O erro quadrático é uma medida para a tomada de decisão de diminuição da dimensão do problema.

Um exemplo de aplicação de PCA em Imagem

A transformação de RGB para níveis de cinza não garante um bom contraste na imagem (grande variância nos valores de Níveis de cinza na imagem)



Níveis de Cinza

Quanto maior o contraste dos objetos na imagem, melhor será o processo da segmentação de imagem

RGB para um novo Espaço

Considere uma imagem NXM, assim sendo, tem-se NxM amostras. Cada amostra possui 3 canais (R,G, B). Na transformada de Hotelling, considere $x_k = [R_k\ G_k\ B_k]^T$. Em que k varia de 1 até NxM.

Utilizando a componente principal (autovetor, da matriz de covariância, que possui associado o maior autovalor), obtém-se o vetor que possui a direção de maior espalhamento das cores, portanto, este vetor representa o canal com um melhor contraste.
O novo canal calculado será a nova representação em nível de cinza.

Resumo: para cada (R,G, B) obtêm-se um novo canal *Y*
De acordo com a seguinte fórmula.

$Y = A_{1x3}(x-m_x)$ em que *A* é formado pelo autovetor associado ao maior autovalor.

PCA no OpenCV

https://docs.opencv.org/trunk/d3/d8d/classcv_1_1PCA.html

https://docs.opencv.org/trunk/d1/dee/tutorial_introduction_to_pca.html

Exercícios

1) Utilizando OpenCV e a transformada de Hotelling, faça o alinhamento de um objeto em uma imagem.

2) Utilizando a transformada de Hotelling. Calcule a transformação que fornece o maior espalhamento das cores de uma imagem. Essa transformação Y = T(R,G,B).

Faça um programa que mostre a imagem transformada em níveis de cinza e mostra, também a imagem com o canal Y.

Bibliografias

- [Castleman (1996)] Castleman, K. R. Digital Image Processing. Prentice Hall pp-667. 1996.
- [Gonzalez (1993)] Gonzalez, R. F.; Woods, R. E. Digital Image Processing. Addison-Wesley, p 716. 1993.
- [Gonzalez (2010)] Gonzalez, R. F.; Woods, R. E. Processamento Digital de Imagens , 3ª edição, Pearson Prentice Hall, 624p. 2010.
- [Hearn (1997)] Hearn, D; Baker, M. P. Computer Graphics, C Version. Prentice Hall, 2ª edição, p. 650. 1997.
- [FOLEY_90] Foley, James D. et al : Computer Graphics - Principles and Practice, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [PERSIANO_89] Persiano, R.C.M.; Oliveira, A.A.F. :Introdução à Computação Gráfica, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 1989.
- [Pratt (1991)] Pratt, Willian K. Digital Image Processing. A Wiley-Interscience Publication, 2a edição. 698 p. 1991.