



Universidade Estadual de Londrina Departamento de Computação

<u>Programa de Mestrado em Computação</u> <u>Módulo 3 - Processamento Digital de</u> <u>Imagens</u>

Autor: Prof. Dr. Alan Salvany Felinto

email: alan@uel.br

(2017)

Sumário



- Transformações Rígidas: Translação, rotação e escala;
- Deformação;
- Filtros espaciais: Média, Laplaciano, Mediana, Sobel;
- Bibliografia.



Preenchimento de Regiões



Pixel 4-conectado

| | 1 | |
|---|---|---|
| 4 | p | 2 |
| | 3 | |

Pixel 8-conectado

| 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|
| 8 | p | 4 |
| 7 | 6 | 5 |

Algoritmo recursivo para o preenchimento de regiões definido pela cor de fundo dos objetos contidos na imagem

Dados de entrada:

(x,y) - Coordenadas do ponto no interior da regiãovalor_velho - Valor antigo associado a cor do pixel (x,y)valor_novo - Valor que substituirá o valor antigo do pixel



Preenchimento de Regiões



```
Procedimento Flood_fill_4(x1,y1,valor_velho,valor_novo:inteiro);
início
 se PixeldaImagem[x1,y1]=valor_velho então
 início
   PixeldaImagem[x1,y1] := valor_novo;
   flood_fill_4(x1,y1-1,valor_velho,valor_novo);
   flood_fill_4(x1,y1+1,valor_velho,valor_novo);
   flood_fill_4(x1-1,y1,valor_velho,valor_novo);
   flood_fill_4(x1+1,y1,valor_velho,valor_novo);
 fim;
fim;
```



Preenchimento de Regiões



Preenchimento de regiões definidas pelas bordas

Dados de entrada:

(x, y) - Coordenadas do ponto no interior da região valor_borda - cor da borda que delimita a região valor_novo - cor de preenchimento da região

```
Procedimento boundary_fill_4(x1,y1,valor_borda,valor_novo:inteiro);
início
 se ((PixeldaImage[x1,y1]<>valor_borda) E PixeldaImage[x1,y1]<>valor_novo))
    então
 início
     PixeldaImage[x1,y1] = valor_novo;
     boundary_fill_4(x1,y1-1,valor_borda,valor_novo);
     boundary_fill_4(x1,y1+1,valor_borda,valor_novo);
     boundary_fill_4(x1-1,y1,valor_borda,valor_novo);
     boundary_fill_4(x1+1,y1,valor_borda,valor_novo);
 fim;
fim:
```

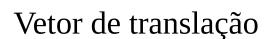


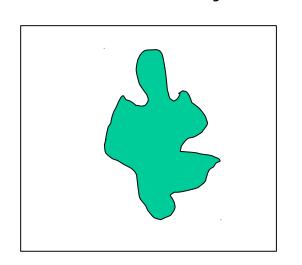
Transformadas Geométricas 2D (Translação)

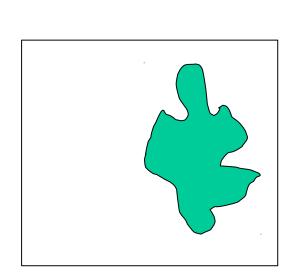


Translação:

$$P' = T(\triangle x, \triangle y) * P$$







Vetor de translação
$$\begin{vmatrix}
x' \\ y' \\ 1
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1
\end{vmatrix} * \begin{vmatrix}
x \\ y \\ 1
\end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}
x' = x + \Delta x \\ y' = y + \Delta y
\end{cases}$$

$$\triangle x = 30$$

$$\triangle y = 0$$



Escala (2D)



$$P' = E(Ex, Ey) *P \implies \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_x & 0 & 0 \\ 0 & E_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x' = x * E_x \\ y' = y * E_y \end{bmatrix}$$

Ao aumentarmos uma imagem deves-se interpolar os pontos inexistentes (Veja Zoom do módulo 8 parte 2)

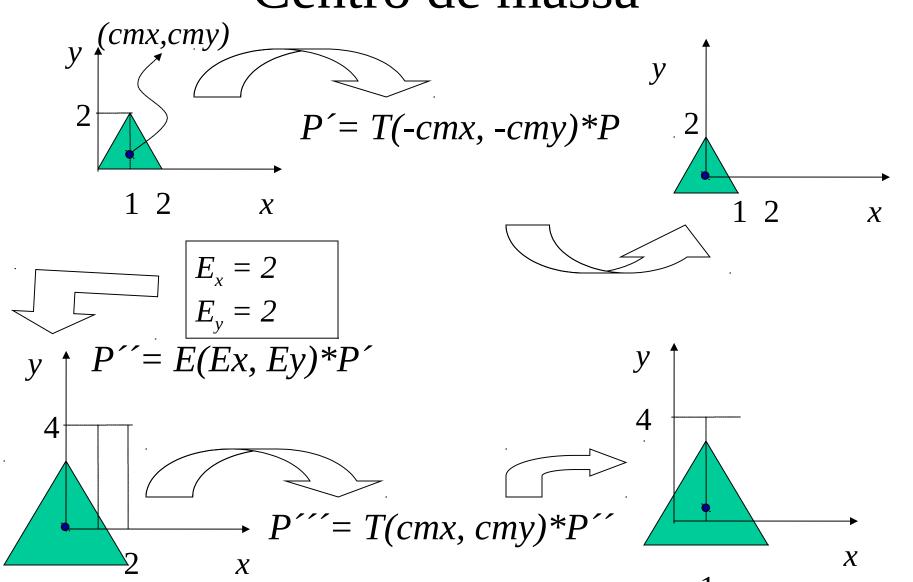
Obs: A transformação em escala, além de alterar as dimensões do objeto, também produz o efeito da translação

cmx = centro de massa em x = média aritmética das coordenadas x<math>cmy = centro de massa em y = média aritmética das coordenadas y



Escala ao longo do Centro de massa



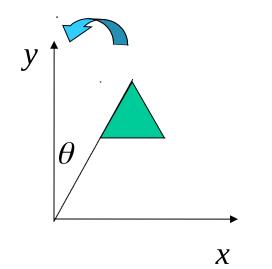


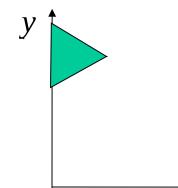


Rotação (2D)



$$P' = R(\theta) * P \Longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) - \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x * \cos(\theta) - y * \sin(\theta) \\ y' = x * \sin(\theta) + y * \cos(\theta) \end{cases}$$





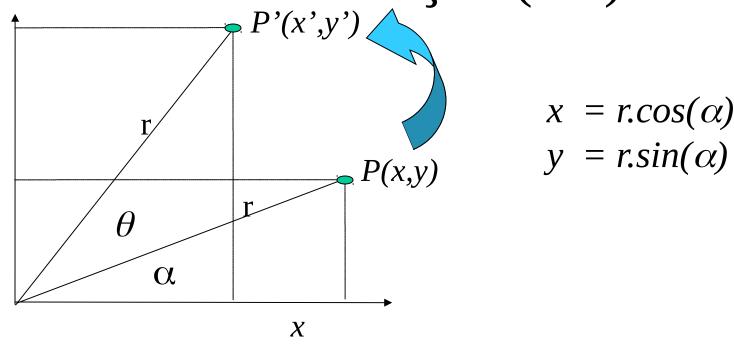
Existem problemas de rotação por ser um espaço discreto.

X









$$x' = r.\cos(\alpha + \theta) = r.\cos(\alpha).\cos(\theta) - r.\sin(\alpha).\sin(\theta)$$

 $y' = r.\sin(\alpha + \theta) = r.\cos(\alpha).\sin(\theta) + r.\sin(\alpha).\cos(\theta)$

$$x' = x.cos(\theta) - y.sin(\theta)$$

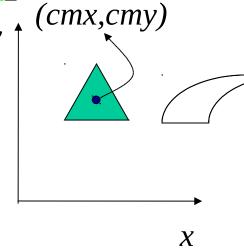
 $y' = x.sin(\theta) + y.cos(\theta)$



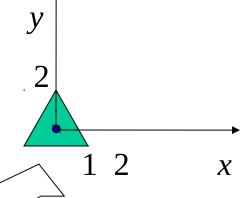
Rotação ao redor do

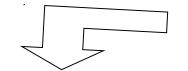


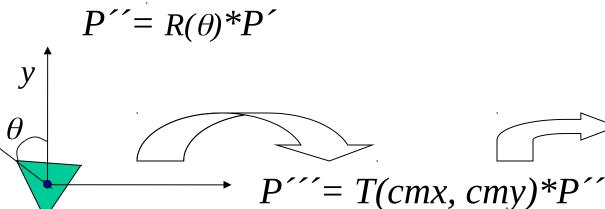




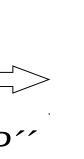
P' = T(-cmx, -cmy)*P

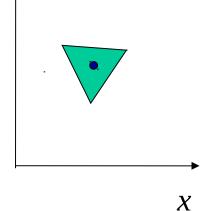






X







Composições de Transformações Rígidas 2D



Dois exemplos:

Escala ao redor do centro de massa do objeto P' = T(cmx, cmy) * E(Ex, Ey) * T(-cmx, -cmy) * P

Uma única matriz 3x3 que resulta em duas translações e uma escala Rotação ao redor do centro de massa do objeto $P' = T(cmx, cmy) * R(\theta) * T(-cmx, -cmy) * P$

** Qual é a matriz para se produzir espelhamento (Flip) horizontal ou vertical?

** Quais são os problemas e/ou restrições que devemos nos preocupar ao aplicarmos transformações geométricas em uma imagem ?



Transformadas Geométricas 3D (Translação)



Translação:

$$P' = T(\Delta x, \Delta y, \Delta y) *P$$



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + \Delta x \\ y' = y + \Delta y \\ z' = z + \Delta z \end{cases}$$

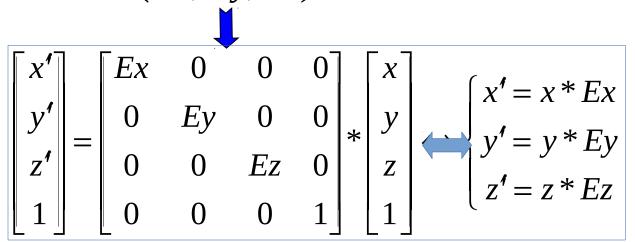


Escala 3D



Escala:

$$P' = E(Ex, Ey, Ez) * P$$



Escala ao redor do centro de massa do objeto P' = T(cmx, cmy, cmz)*E(Ex, Ey,Ez)*T(-cmx, -cmy, -cmz)*P



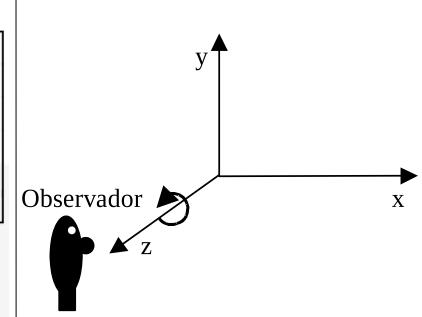
Rotação (eixo z fixo)



$$P' = Rz(\alpha) *P$$
 (sentido de x para y)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \cos(\alpha) - y \sin(\alpha) \\ y' = x \sin(\alpha) + y \cos(\alpha) \\ z' = z \end{cases}$$



Rotação ao redor do centro de massa do objeto $P' = T(cmx, cmy, cmz) * Rz(\alpha) * T(-cmx, -cmy, -cmz) * P$



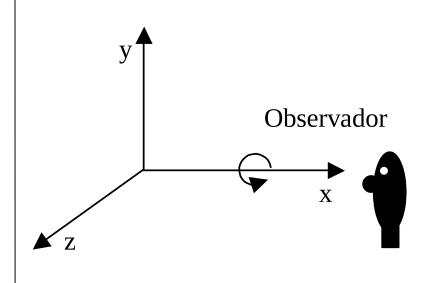
Rotação (eixo x fixo)



$$P' = Rx(\alpha) * P$$
 (sentido de y para z)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = x \\ y' = y \cos(\alpha) - z \sin(\alpha) \\ z' = y \sin(\alpha) + z \cos(\alpha) \end{cases}$$



Rotação ao redor do centro de massa do objeto $P' = T(cmx, cmy, cmz) * Rx(\alpha) * T(-cmx, -cmy, -cmz) * P$



📗 Rotação (eixo y fixo)

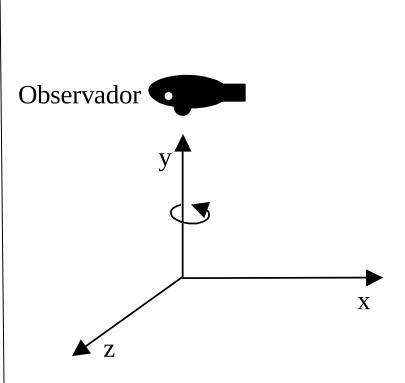


$$P' = Ry(\alpha) * P \text{ (sentido de z para x)}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & 0 & \sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\alpha) & 0 & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = z \sin(\alpha) + x \cos(\alpha) \\ y' = y \\ z' = z \cos(\alpha) - x \sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow z$$



Rotação ao redor do centro de massa do objeto $P' = T(cmx, cmy, cmz) * Ry(\alpha) * T(-cmx, -cmy, -cmz) * P$

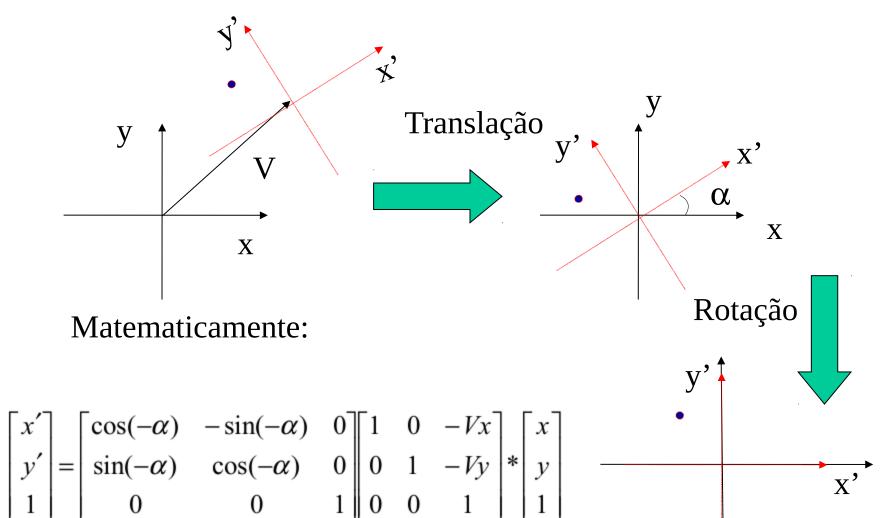
Transformação genérica ao redor do centro de massa:

 $P' = T(cmx, cmy, cmz) * Rz(\alpha) * Ry(\beta) * Rx(\theta) * T(-cmx, -cmy, -cmz) * P$



Transformações de coordenadas (x,y) para (x',y')







🔰 Projeções no plano da Imagem 🏋



Restrições:

Considere a projeção em uma superfície plana ao invés de uma superfície curva e utilizando raios projetores lineares e não curvos.

Projeções geométricas planares paralelas ortográficas:

$$x' = x, y' = y e z' = 0,$$

desconsidera-se o eixo z.



Projeções no plano da Imagem



Projeções geométricas planares em perspectiva:

- Plano de projeção
- Centro de projeção (CP)

Obs: Se o centro de projeção estiver infinitamente afastado do plano de projeção então tem-se a projeção paralela, se o CP estiver a uma distância finita do plano de projeção então tem-se a projeção em perspectiva.

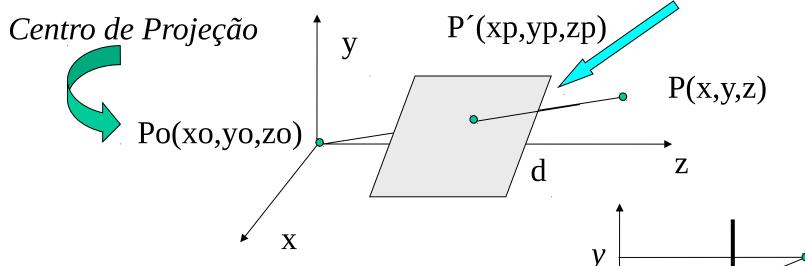


Projeções geométricas planares



em perspectiva

Plano de projeção



Por semelhança de triângulos temos:

$$\frac{x_p}{z_p} = \frac{x}{z}, \qquad \frac{y_p}{z_p} = \frac{y}{z}$$

Como $Z_n = d$ tem-se:

$$x_p = \frac{d.x}{z} = \frac{x}{z/d}, \qquad y_p = \frac{d.y}{z} = \frac{y}{z/d}$$



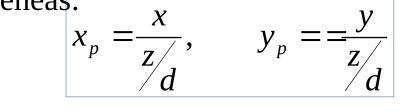
Projeções geométricas planares em perspectiva

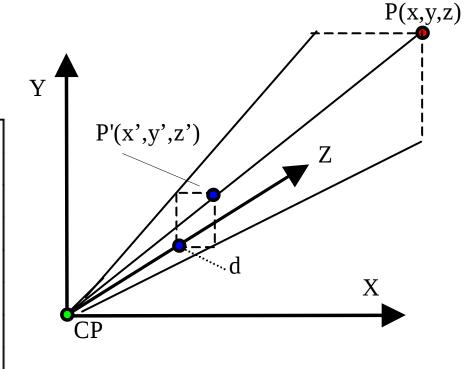


Transformando em coordenadas homogêneas:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

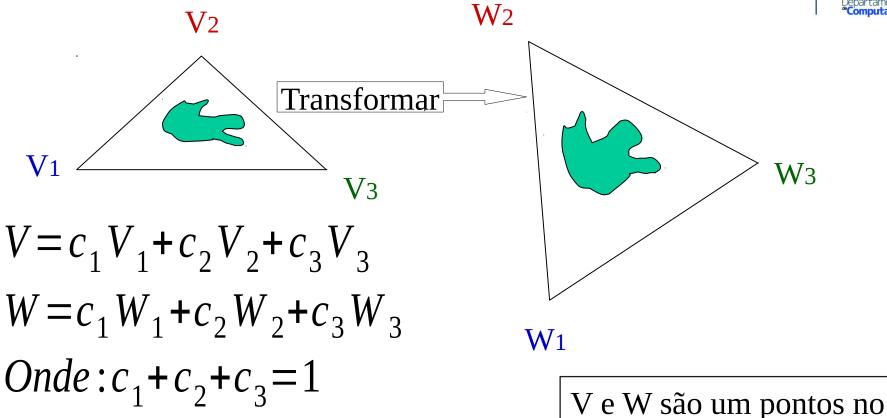
$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \frac{z}{d} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{X}{W} \\ \frac{Y}{W} \\ \frac{Z}{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{\frac{z}{d}} \\ \frac{y}{\frac{z}{d}} \\ \frac{y}{\frac{z}{d}} \\ 1 \end{bmatrix}$$





Deformação





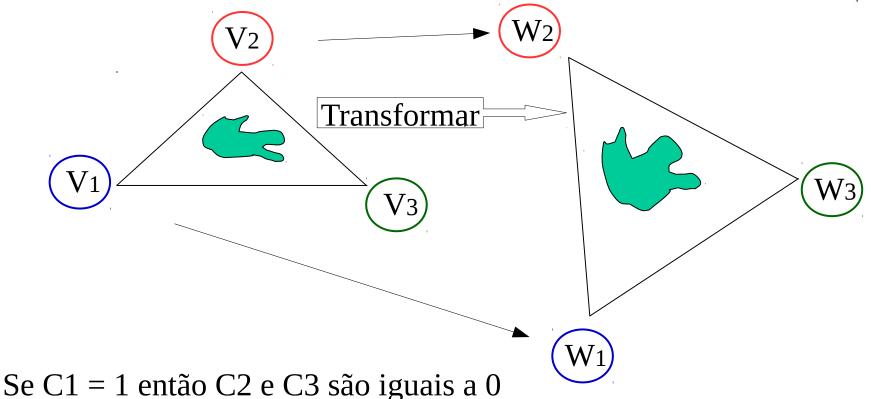
e são valores não negativos.

espaço 2d (x,y).

Para cada ponto de V(x,y) existe associado uma cor Obs: Para implementar o algoritmo escolha o passo de variação de C₁, C₂ e C₃

Deformação





Neste caso V1 está associado a W1 e por tanto a cor do pixel em V1 será atribuída a posição W1.

Se $C1 = \frac{1}{2}$ e $C2 = \frac{1}{2}$ então C3 = 0. Então a cor que está na metade entre V1 e V2 será atribuída as coordenadas localizada na metade entre W1 e W2

Imageamento Estéreo



Projeção do Espaço 3D para o espaço 2D

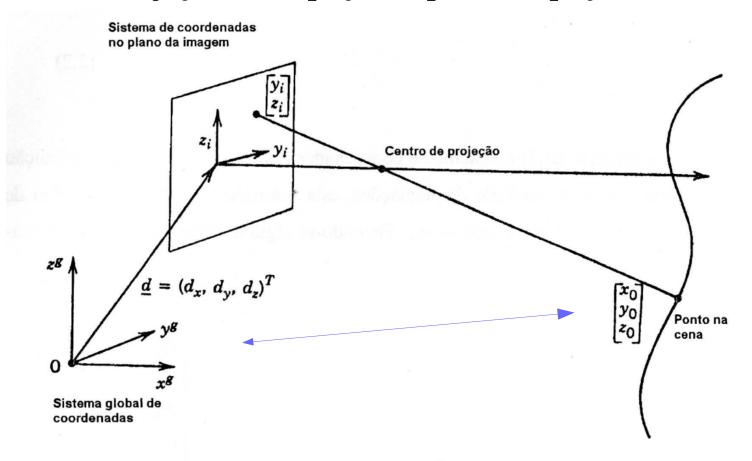


Figura - Sistema Global de Coordenadas (Schalkoff (1989))

Projeção do Espaço 3D para o espaço 2D



$$\begin{bmatrix} w_i y_i \\ w_i z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$
 Note que $x_i = 0$ que é o plano da imagem, portanto não há necessidade de ser calculado

Ao isolarmos y_i , e z_i no sistema de Equações , temos:

$$y_i = \frac{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}}{a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}} \quad e \quad z_i = \frac{a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}}{a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}}$$

Na Equação anterior o sistema de coordenadas homogêneas permite a atribuição a₃₄ = 1 sem alterar o resultado das equações, esta normalização é imposta a fim de garantir uma solução única para os a_{ij} .

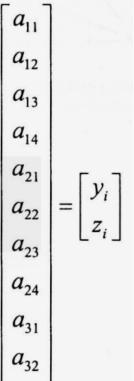
Projeção do Espaço 3D para o espaço 2D



Fazendo-se algumas manipulações algébricas tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_0 & y_0 & z_0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -(y_i x_0) & -(y_i y_0) & -(y_i z_0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_0 & y_0 & z_0 & 1 & -(z_i x_0) & -(z_i y_0) & -(z_i z_0) \end{bmatrix} \begin{vmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \end{vmatrix} =$$

- A cada ponto $[y_i, z_i]^T$ na imagem, que corresponde a um ponto $[k_o, y_o, z_o]^T$ da cena, forma-se um sistema de 2 equações e 11 incógnitas.
- Há a necessidade de no mínimo 6 pontos para solucionar esse sistema de equação linear.



Utilizando Câmeras em Estéreo para Obter a Informação da Profundidade



No caso da utilização de duas câmeras em estéreo, tem-se dois sistemas usando o mesmo sistema global de coordenadas $[x_{,},y_{,},z_{,}]^{T}$.

Considere $A_k = [a_{kij}]$, onde k = 1,2, e k representa as câmeras.

Manipulando-se as equações obtém-se:

$$P\underline{x_0} = \underline{F}$$
 Onde:
$$\begin{bmatrix} a_{134}y_{i1} - a \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} a_{111} - a_{131}y_{i1} & a_{112} - a_{132}y_{i1} & a_{113} - a_{133}y_{i1} \\ a_{121} - a_{131}z_{i1} & a_{122} - a_{132}z_{i1} & a_{123} - a_{133}z_{i1} \\ a_{211} - a_{231}y_{i2} & a_{212} - a_{232}x_{i2} & a_{213} - a_{233}y_{i2} \\ a_{221} - a_{231}z_{i2} & a_{222} - a_{232}z_{i2} & a_{223} - a_{233}z_{i2} \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{0} = \begin{bmatrix} x_{0} \\ y_{0} \\ z_{0} \end{bmatrix}, \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} a_{134}y_{i1} - a_{114} \\ a_{134}z_{i1} - a_{124} \\ a_{234}y_{i2} - a_{214} \\ a_{234}z_{i2} - a_{224} \end{bmatrix},$$

 $[y_{i},z_{i}]^{T}$ =coordenadas em pixeis da imagem obtida a partir da câmera 1. $[y_{:},z_{:}]^T$ = coordenadas em pixeis da imagem obtida a partir da câmera 2.

Visão Estério



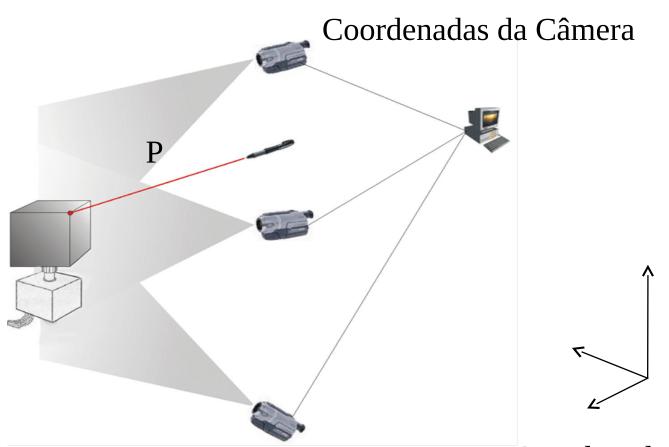
$$P = \begin{bmatrix} a_{111} - a_{131}y_{i1} & a_{112} - a_{132}y_{i1} & a_{113} - a_{133}y_{i1} \\ a_{121} - a_{131}z_{i1} & a_{122} - a_{132}z_{i1} & a_{123} - a_{133}z_{i1} \\ a_{211} - a_{231}y_{i2} & a_{212} - a_{232}x_{i2} & a_{213} - a_{233}y_{i2} \\ a_{221} - a_{231}z_{i2} & a_{222} - a_{232}z_{i2} & a_{223} - a_{233}z_{i2} \end{bmatrix}, \quad \underline{x}_{0} = \begin{bmatrix} x_{0} \\ y_{0} \\ z_{0} \end{bmatrix}, \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} a_{134}y_{i1} - a_{114} \\ a_{134}z_{i1} - a_{124} \\ a_{234}y_{i2} - a_{214} \\ a_{234}z_{i2} - a_{224} \end{bmatrix},$$

- 4 equações e 3 incógnitas ($[k_o, y_o, z_o]^T$).
- Dados os pontos em estéreo ($[y_{i1},z_{i1}]^T$ e $[y_{i2},z_{i2}]^T$) calcula-se o ponto correspondente no espaço 3D.
- E como faríamos se usássemos mais de duas câmeras ?
- Qual é a vantagem de se utilizar mais de 2 câmeras ?



Modelo Genérico de Visão Estéreo

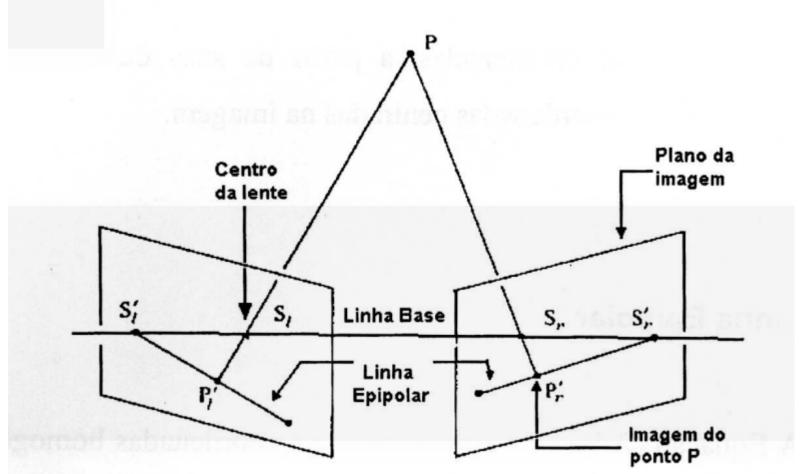




Coordenadas Mundo

Linha Epipolar



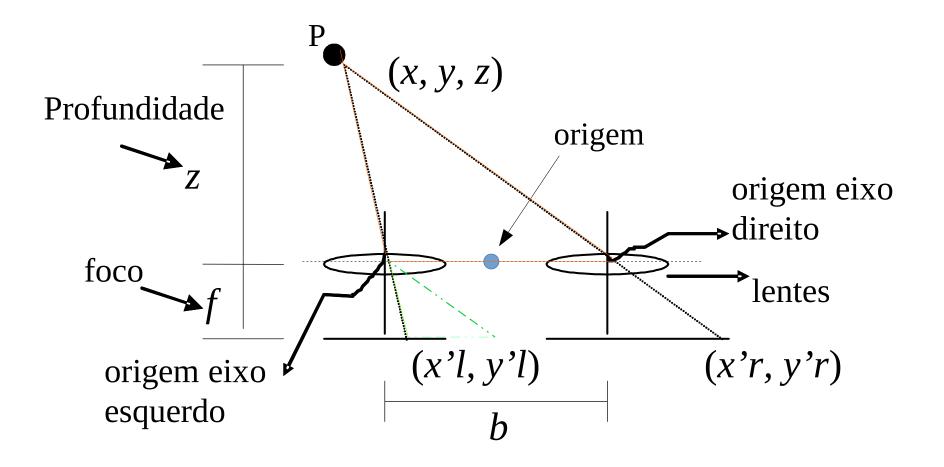


A linha epipolar é formada pela intersecção do plano da imagem com o plano formado pelos pontos S_i , S_r (centro da lente esquerda e direita respectivamente) e P (ponto de interesse na cena).



Visão Estéreo Simplificada





Semelhança de triângulos: Z/b = f/(x'r - x'l)Portanto, Z = f b/(x'r - x'l)



Processamento Digital de Imagens



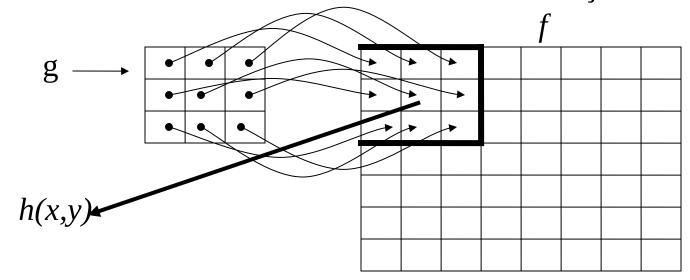
Filtragem espacial:

Convolução:

Núcleo de convolução

$$h(x,y) = f(x,y) * g(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int f(\alpha,\beta) \cdot g(x - \alpha,y - \beta) d\alpha d\beta$$

Exemplo na forma discreta com um núcleo de convolução 3x3:





Filtragem Espacial e o Filtro da Média



$$h[x][y] = f[x-1][y-1]*g[0][0] + f[x][y-1]*g[0][1] + f[x+1][y-1]*g[0][2]$$

$$+ f[x-1][y] *g[1][0] + f[x][y] *g[1][1] + f[x+1][y] *g[1][2]$$

$$+ f[x-1][y+1]*g[2][0] + f[x][y+1]*g[2][1] + f[x+1][y+1]*g[2][2]$$

Filtro da média

| 1/9 | 1/9 | 1/9 |
|-----|-----|-----|
| 1/9 | 1/9 | 1/9 |
| 1/9 | 1/9 | 1/9 |

- •Média dos pixeis vizinhos.
- •Retira ruído porém borra a imagem.
- •Quanto maior o tamanho da janela melhor é o filtro do ruído.



Laplaciano



Extração de Bordas utilizando gradiente

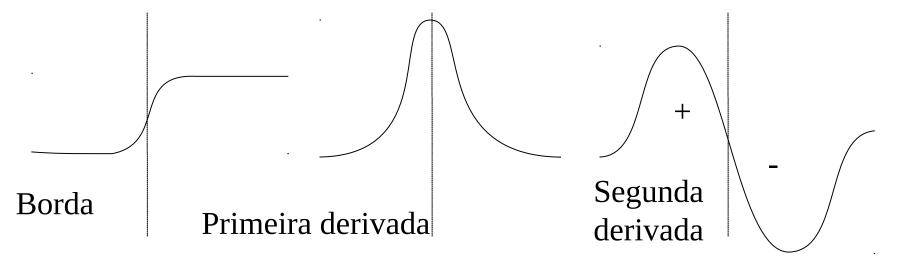
O operador laplaciano é uma derivada segunda de uma imagem

| 0 | -1 | 0 |
|----|----|----|
| -1 | 4 | -1 |
| 0 | -1 | 0 |

ou

| -1 | -1 | -1 |
|----|----|----|
| -1 | 8 | -1 |
| -1 | -1 | -1 |

Para detectar bordas procure os cruzamentos por zeros





Roberts, Sobel, Prewitt



Roberts:

| 1 | 0 |
|---|----|
| 0 | -1 |

 $R_{\scriptscriptstyle 1}$

 R_2

Utilize um limiar no resultado

$$resultado = \sqrt{R_1^2 + R_2^2}$$

Sobel

| -1 | 0 | 1 |
|----|---|---|
| -2 | 0 | 2 |
| -1 | 0 | 1 |

 R_1

 R_2

Prewitt

| -1 | -1 | -1 |
|----|----|----|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$$R_1$$

| -1 | 0 | 1 |
|----|---|---|
| -1 | 0 | 1 |
| -1 | 0 | 1 |

 R_2

Sobel



- Leitura de uma imagem
- Para os pixeis da imagem faça:
 - Para cada pixel central calcula-se R1 e R2 utilizando as matrizes do Sobel.
 - $R = raiz_quadrada (R_1^2 + R_2^2)$
 - Se (R > limiar) então o pixel é pintado de preto
 - Senão o pixel é pintado de branco.
- Mostre a imagem



Kirsch



Kirsch

| 5 | 5 | 5 |
|------------|------------|------------|
| - 3 | 0 | - 3 |
| -3 | - 3 | - 3 |

| -3 | -3 | 5 |
|------------|----|---|
| - 3 | 0 | 5 |
| -3 | -3 | 5 |
| | D | |

| | 1 | 1 |
|------------|------------|------------|
| - 3 | - 3 | - 3 |
| - 3 | 0 | 5 |
| - 3 | 5 | 5 |
| | | |

| | 1 | 1 |
|------------|------------|------------|
| -3 | - 3 | - 3 |
| - 3 | 0 | - 3 |
| 5 | 5 | 5 |
| | | |

$$R_1$$

$$R_2$$

$$R_3$$

$$R_4$$

$$R_5$$

| 5 | 5 | - 3 |
|-------|----|------------|
| 5 | 0 | - 3 |
| -3 | -3 | -3 |
| R_8 | | |

Obs:

- -Utilize um limiar no resultado.
- -A direção da borda é dada pela máscara de maior resultado

resultado =
$$\sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2 + R_6^2 + R_7^2 + R_8^2}$$



Mediana



Filtro da Mediana: ordene uma região da imagem e utilize o pixel mediano como resultado do processamento.

Exemplo:

| 10 | 20 | 100 |
|-----|----|-----|
| 200 | 5 | 15 |
| 30 | 18 | 40 |

O filtro da mediana retira ruído sem borrar a imagem, é um filtro não linear

Exercícios

1) Implemente os filtros no domínio do espaço: Média, Sobel, Mediana

2) Faça um programa que: Mostre a quantidade de manchas na imagem; pinte de azul as manchas sem buracos; e pinte de verde as manchas com buracos. Pinte de vermelho a maior mancha, Pinte de amarelo a menor mancha,

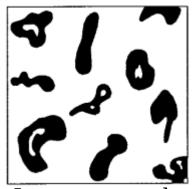
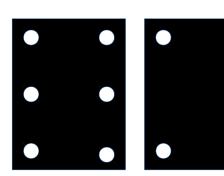


Imagem exemplo de entrada.

3) Determine se a peça possui 6 ou 4 buracos. Se a peça contiver 6 buracos classifique-a como tipo **A**, Se a peça contiver 4 buracos classifique-a como tipo **B**, caso contrário rejeite a peça classificando a como tipo **R**.



OBS:

- Pode utilizar qualquer rotina do OpenCv nos exercícios.
- Para preenchimento de regiões utilize o FloodFill do opencv.



Bibliografias



- •[Castleman (1996)] Castleman, K. R. Digital Image Processing. Prentice Hall pp-667. 1996.
- [Conci 2008] Conci, A; Azevedo, E; Leta, F. R. Computação Gráfica, volume2. Elsevier. p. 407. 2008.
- •[Gonzalez (1993)] Gonzalez, R. F.; Woods, R. E. Digital Image Processing. Addison-Wesley, p 716. 1993.
- •[Gonzalez (2009)] Rafael C. Gonzalez, Richard E. Woods. Digital Image Processing. PHI Learning Pvt. Ltd-new Delhi; 3ª edição (2009).
- •[Hearn (1997)] Hearn, D; Baker, M. P. Computer Graphics, C Version. Prentice Hall, 2^a edição, p. 650. 1997.
- •[FOLEY_90] Foley, James D. et al: Computer Graphics Principles and Practice, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- •[PERSIANO_89] Persiano, R.C.M.; Oliveira, A.A.F. :Introdução à Computação Gráfica, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda., 1989.
- •[Pratt (1991)] Pratt, Willian K. Digital Image Processing. A Wiley-Interscience Publication, 2a edição. 698 p. 1991.