Estatística Inferencial
Testes de Hipóteses

Os exercícios foram extraídos dos livros:

Bussab, WO; Morettin, PA. Estatística Básica. São Paulo: Editora Saraiva, 2006 (5ª Edição).

Magalhães, MN; Lima, ACP. Noções de Probabilidade e Estatística. São Paulo: EDUSP, 2008.

1. O consumo médio de gasolina num certo tipo de automóvel é de 15 km por litro, segundo informações da montadora. Uma revista especializada verificou o consumo de 25 desses veículos, escolhidos ao acaso. Admita que o consumo siga o modelo Normal com variância igual a 9 (km por litro)^2.

   a) Formule o problema como um teste de hipótese para verificar a afirmação da montadora.
   b) Qual seria a região crítica se $\alpha = 0.06$? Encontre os valores de consumo médio de combustível que limitam a região crítica.
   c) Para uma amostra com $\bar{y} = 17$, o consumo difere ou não da afirmação da montadora? Justifique a sua resposta.

2. Uma máquina automática para encher pacotes de café enche-os segundo uma distribuição normal, com média μ e desvio padrão sempre igual a 20 gramas. A máquina foi regulada para $\mu = 500$ gramas. Periodiamente, coletamos uma amostra de 16 pacotes e verificamos se a produção está sob controle.

   a) Formule o problema como um teste de hipótese.
   b) Defina a região crítica se $\alpha = 0.01$.
   c) Se para a amostra coletada $\bar{y} = 492$ g, qual a conclusão a respeito da regulagem da máquina?

3. Uma máquina deve produzir peças com diâmetro de 2 centímetros. Entretanto, variações acontecem e vamos assumir que o diâmetro dessas peças siga o modelo Normal com variância igual a $0.09cm^2$. Para testar se a máquina está bem regulada, uma amostra de 100 peças é coletada.

   a) Formule o problema como um teste de hipótese.
   b) Qual seria a região crítica se $\alpha = 0.02$?
   c) Se para essa amostra $\bar{y} = 2.02$, qual a conclusão a respeito da regulagem da máquina?
   d) (**Novo item adicionado à lista**) Suspeita-se que a máquina esteja produzindo peças com variabilidade acima do estabelecido $\sigma^2 = 0.09cm^2$. Uma nova amostra de 100 peças resultou num desvio-padrão amostral de $s = 0.33$. Estabeleça e teste ao nível de 10% de significância a hipótese adequada.

4. O atual tempo de travessia com balsas entre Santos e Guarujá é considerado uma variável aleatória com distribuição Normal de média 10 minutos e desvio padrão de 3 minutos. Uma nova balsa vai entrar em operação e desconfia-se que será mais lenta que as anteriores, isto é, haverá aumento na média especificada pelo modelo acima.

   a) Especifique as hipóteses em discussão.
   b) Interprete os erros tipo I e tipo II no contexto do problema.
   c) Para uma amostra de 20 tempos de travessia com a nova balsa, obtenha a região crítica considerando um nível de 5%.

d) Calcule a probabilidade do erro tipo II, se a nova balsa demora, em média, 2 minutos a mais que as anteriores para completar a travessia. Depois calcule para 3 e 4 minutos a mais.

5. Suponha que queiramos testar $H_0 : \mu = 50$ versus $H_1 : \mu > 50$, onde μ é a média de uma variável aleatória Normal com desvio padrão igual a 10. Extraída uma amostra de $n = 36$ elementos da população, observou-se $\bar{y} = 53$. Faça o teste utilizando os níveis 1%, 2% 5% e 10%.

6. Um criador tem constatado uma proporção de 10% do rebanho com verminose. O veterinário alterou a dieta dos animais e acredita que a doença diminuiu de intensidade. Um exame em 100 cabeças do rebanho, escolhidas ao acaso, indicou 8 delas com verminose.

   a) Formule o problema como um teste de hipótese para verificar a afirmação do veterinário.
   b) Qual a região crítica se $\alpha = 0.08$? Encontre o(s) valor(es) de proporção que limita(m) a região crítica.
   c) Considere a amostra observada. A dieta proposta pelo veterinário tem efeito na redução da verminose do rebanho? Justifique a sua resposta.

7. Uma estação de televisão afirma que 60% dos televisores estavam ligados no seu programa especial da última segunda-feira. Uma rede competidora deseja contestar essa afirmação e decide usar uma amostra de 200 famílias para um teste.

   a) Formule o problema como um teste de hipótese para verificar a afirmação da estação de televisão.
   b) Qual a região crítica do teste para um nível de significância $\alpha = 5\%$?
   c) Admita que, com a pesquisa feita com as 200 pessoas, obtivemos 104 pessoas que estavam assistindo ao programa. O que podemos dizer a respeito da afirmação da estação de televisão?
   d) Calcule o p-valor do teste para o problema apresentado.

8. Um fabricante afirma que seus cigarros contêm não mais que 30 mg de nicotina. Uma amostra de 25 cigarros fornece média de 31.5 mg e devio padrão 3 mg.

   a) No nível de 5%, os dados refutam ou não afirmação do fabricante?
   b) Calcule o p-valor do teste.

9. Os novos operários de uma empresa são treinados a operarem uma máquina, cujo tempo Y (em horas) de aprendizado é anotado. Observou-se que Y segue de perto a distribuição $N(25, 100)$. Uma nova técnica de ensino, que deve melhorar o tempo de aprendizado, foi testada em 16 novos empregados, os quais apresentaram 20.5 horas como tempo médio de aprendizado. Usando o p-valor, você diria que a nova técnica é melhor que a anterior?

10. O consumidor de um certo produto acusou o fabricante, dizendo que mais de 20% da unidades fabricadas apresentam defeito. Para embasar sua acusação, ele usou uma amostra de tamanho $n = 50$ na qual 27% eram defeituosas. Mostre se fabricante poderia refutar a acusação com um teste estatístico de hipótese. Use um nível de significância de 10%.

Respostas

1.

a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 15 \\ H_1 : \mu \neq 15 \end{cases}$$

b) Região crítica:

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{y}_{c1} = 15 - 1.88 \frac{3}{\sqrt{25}} = 13.87$$

$$\bar{y}_{c2} = 15 + 1.88 \frac{3}{\sqrt{25}} = 16.13$$

A região crítica é dada por $RC = \{\bar{y} \in \mathbb{R} | \bar{y} < 13.87 \cup \bar{y} > 16.13\}$.

c) O consumo difere, pois a média observada pertence a região crítica. Logo, rejeita-se a hipótese nula de que o consumo de combustível é de 15 km por litro, ao nível de confiança de 94%.

2.

a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 500 \\ H_1 : \mu \neq 500 \end{cases}$$

b) Região crítica:

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{y}_{c1} = 500 - 2.58 \frac{20}{\sqrt{16}} = 487.10$$

$$\bar{y}_{c2} = 500 + 2.58 \frac{20}{\sqrt{16}} = 512.90$$

A região crítica é dada por $RC = \{\bar{y} \in \mathbb{R} | \bar{y} < 487.10 \cup \bar{y} > 512.90\}$.

c) Não rejeitamos a hipótese nula de que a máquina está produzindo pacotes com peso médio de 500 g, ao nível de confiança de 99%.

3.

a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 2 \\ H_1 : \mu \neq 2 \end{cases}$$

b) Região crítica:

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\bar{y}_{c1} = 2 - 2.33\frac{0.3}{\sqrt{100}} = 1.93$$

$$\bar{y}_{c2} = 2 + 2.33\frac{0.3}{\sqrt{100}} = 2.07$$

A região crítica é dada por $RC = \{\bar{y} \in \mathbb{R} | \bar{y} < 1.93 \cup \bar{y} > 2.07\}$.

c) Não rejeitamos a hipótese nula de que a máquina está regulada e produzindo peças dentro do padrão desejado, ao nível de confiança de 98%.

d)

- Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : \sigma^2 = 0.09 \\ H_1 : \sigma^2 > 0.09 \end{cases}$$

- Região crítica para $\alpha = 0.1$: $RC = \{\chi^2 > 117.41\}$.
- Estatística de teste:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{99 \cdot 0.33^2}{0.09} = 119.79$$

- Conclusão: Rejeitamos a hipótese nula de que a máquina está regulada e produzindo peças com variabilidade dentro do padrão desejado, ao nível de 10% de significância.

4.

a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 10 \\ H_1 : \mu > 10 \end{cases}$$

b) Erro Tipo I: rejeitar $H_0 | H_0 V$, ou seja, não rejeitar que a média de tempo para travessia aumentou, mas na verdade continua com média de 10 minutos. Erro Tipo II: não rejeitar $H_0 | H_0 F$, ou seja, não rejeitar que a média de tempo para travessia não aumentou, ($\mu = 10$), mas na verdade ela aumentou.

c)

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{c1} &= 10 + 1.64\frac{3}{\sqrt{20}} = \\ &= 11.10. \end{aligned}$$

A região crítica é dada por $RC = \{\bar{y} \in \mathbb{R} | \bar{y} > 11.10\}$.

d)

$$\begin{aligned} \beta(12) &= P(\text{erro tipo II}) \\ &= P(\text{não rejeitar} \quad H_0 | H_0 \quad \text{falsa}) \\ &= P(\bar{y}_c \leq 11.10 | \mu = 12.0) \\ &= P\left(\frac{\bar{y}_c - 12}{\sqrt{3^2/20}}\right) \\ &= P(z \leq -1.34) \\ &= 0.090. \end{aligned}$$

Assim, em sendo $\mu = 12.0$ estaríamos concluindo de forma equivocada que H_0 não deveria ser rejeitada, com probabilidade de 0.090. Para 3 e 4 minutos a mais, temos que a probabilidade é 0.002 e ≈ 0, respectivamente.

---

5. Sabemos que $\bar{Y} \sim N(\mu, 10^2/36)$.

- Para 1%:

$$z_c = \frac{\bar{y}_c - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \rightarrow \quad \bar{y}_c = \mu + z_c\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\begin{aligned}\bar{y}_c &= 50 + 2.33\frac{10}{\sqrt{36}} = \\ &= 53.88.\end{aligned}$$

- Para 2%:

$$\begin{aligned}\bar{y}_c &= 50 + 2.06\frac{10}{\sqrt{36}} = \\ &= 53.43.\end{aligned}$$

- Para 5%:

$$\begin{aligned}\bar{y}_c &= 50 + 1.64\frac{10}{\sqrt{36}} = \\ &= 52.73.\end{aligned}$$

- Para 10%:

$$\begin{aligned}\bar{y}_c &= 50 + 1.28\frac{10}{\sqrt{36}} = \\ &= 52.13.\end{aligned}$$

Nos níveis de 1% e 2% não rejeitamos, mas rejeitamos nos níveis de 5% e 10%.

---

6. Sabemos que $\hat{p} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$.

a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.10 \\ H_1 : p < 0.10 \end{cases}$$

b) Região crítica:

$$z_c = \frac{\hat{p}_c - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \quad \rightarrow \quad \hat{p}_c = p - z_c\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\hat{p}_c = 0.10 - 1.41\sqrt{\frac{0.10(1-0.10)}{100}} = 0.058.$$

A região crítica é dada por $RC = \{\hat{p} \in [0, 1] | \hat{p} < 0.058\}$.

c) (**Conclusão foi reescrita**) Note que é necessário calcular a proporção amostral de animais com verminose como $\hat{p} = \frac{8}{100} = 0.08$. Não há evidência suficiente para afirmar que a incidência diminuiu, uma vez que o valor de proporção observado na amostra $\hat{p} = 0.08$ não está dentro da região de rejeição da hipótese nula.

---

7. Sabemos que $\hat{p} \sim N(p, \frac{p(1-p)}{n})$.

a) Hipóteses estabelecidas:

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.60 \\ H_1 : p < 0.60 \end{cases}$$

b) Região crítica:

$$z_c = \frac{\hat{p}_c - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \quad \rightarrow \quad \hat{p}_c = p + z_c\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$$

$$\hat{p}_c = 0.60 - 1.64\sqrt{\frac{0,60(1-0.60)}{200}} = 0.54.$$

A região crítica é dada por $RC = \{\hat{p} \in [0,1] | \hat{p} < 0.54\}$.

c) Na amostra de tamanho $n = 200$, temos que $\hat{p} = \frac{104}{200} = 0.52$. Assim, podemos notar que $0.52 \in RC$. Portanto, somos levados a rejeitar a hipótese nula. Isto é, há evidências de que a ausência do programa de segunda-feira não foi de 60%, mas inferior a esse número.

d) Os passos para calcular o p-valor são parecidos com aqueles já apresentados, mas a principal diferença está em não construir a região crítica. O que fazemos é apresentar a probabilidade de ocorrer valores da estatística mais extremos do que o observado, sob a hipótese nula ser verdadeira. Portanto,

$$\begin{aligned}
P(\hat{p} < 0.52 | p = 0.60) &= P\left(Z < \frac{0.52 - 0.60}{\sqrt{\frac{0.60(1-0.60)}{200}}}\right) \\
&= P(Z < -2.30) \\
&= 0.01 = 1\%.
\end{aligned}$$

8.

a) Note que foi obtido uma amostra de tamanho 25, onde a média ($\bar{Y}$) e o devio padrão (S) amostral foram calculadas. Assim, a variável padronizada segue uma distribuição t com $n-1$ graus de liberdade. Isso quer dizer que

$$T = \frac{\sqrt{n}(\bar{Y} - \mu)}{S} \sim t_{n-1}.$$

As hipóteses estabelecidas são

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 30 \\ H_1 : \mu > 30 \end{cases}$$

Por ser um teste unilateral, devemos provurar o valor de t_c tal que

$$P(T > t_c) = 0.05.$$

A partir da tabela t de Student, obtemos que $t_c = 1.711$. Isso quer dizer que a região crítica para a estatística T é $RC = [1.711; \infty)$. O valor observado da estatística é

$$\begin{aligned}
t &= \frac{\sqrt{5}(31.5 - 30)}{3} \\
&= 2.5.
\end{aligned}$$

Como t pertence a região crítica, rejeitamos H_0, ou seja, há evidências de que os cigarros contenham mais de 30 g de nicotina.

b) Para calcular o p-valor, considere que

$$\begin{aligned}
\alpha^* &= P(T > t | H_0) = P(T > 2.5 | H_0) \\
&= 0.01 = 1\%.
\end{aligned}$$

Esse valor pequeno de $\hat{\alpha}$ leva a rejeição de H_0.

---

9. Considerando que $\bar{Y} \sim N(25, 100/16)$.

As hipóteses estabelecidas são

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 25 \\ H_1 : \mu < 25 \end{cases}$$

Para calcular o p-valor, considere que a variância dada é populacional. Então,

$$\begin{aligned} \alpha^* &= P(Z < z) \\ &= P\left(\frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{20.5 - 25}{10/\sqrt{16}}\right) \\ &= P(Z < -1.8) \\ &= 0.036 \\ &= 3.60\%. \end{aligned}$$

10.

População:

Y : presença de defeito (0 - não, 1 - sim)

$Y : B(p)$

Amostra:

$$n = 50$$

$$\hat{p} = \sum_{i=1}^{50} y_i = 0.27$$

Teste de hipótese:

$$H_0 : p = 0.20 \; vs \; H_1 : p > 0.20$$

$$\alpha = 0.10 \rightarrow z_c = 1.28$$

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \frac{0.27 - 0.20}{\sqrt{\frac{0.20(1-0.20)}{50}}} = 1.24.$$

Conclusão: Como $z < z_c$, ou, equivalentemente como o p-valor é 0.108, então não rejeita-se H_0 ao nível de 10% de significância, ou seja, não há evidência suficiente na amostra para acusar o fabricante.
