UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

5ª LISTA DE EXERCICIOS CE084 – PROBABILIDADES A

Prof. Benito Olivares Aguilera 2021/1

1. Diga se as seguintes funções são Função Característica de alguma variável aleatória. Justifique e, quando possível, indique as distribuições associadas.

i) $e^{-t/2}$ ii) e^{-ita}, a cte. iii) $\frac{e^{-t^2/2}}{4}\left(e^{it}+1\right)^2$ iv) $-1+\dfrac{\lambda}{\lambda - it}$

2. Seja X uma variável aleatória cuja função característica é dada por $\varphi_x(t) = \cos(at)$, sendo $a > 0$. Encontre a distribuição de X.

3. Seja $X \sim Poisson(\lambda)$. Mostre, usando função característica, que $E(X) = \operatorname{var}(X) = \lambda$.

4. Obtenha a função característica do modelo Geométrico de parâmetro p e use-a para determinar a média e a variância.

5. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas, com $X_i \sim \exp(\lambda)$. Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$ (Distribuição Gama).

6. Se $X \sim B(n,p)$, calcule a função característica de X. Mostre que se $X \sim B(n,p)$ e $Y \sim B(m,p)$, sendo X e Y independentes, então $X+Y \sim B(n+m,p)$.

7. Calcule EX^3 e EX^4, onde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. (Sugestão: Calcule primeiro para $N(0,1)$ e logo use linearidade.)

8. Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas, com $X_i \sim N(0,1)$. Encontre a distribuição de $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

9. (*) Seja X uma variável aleatória com distribuição Cauchy padrão, isto é, sua densidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}.$$

a) O que ocorre com sua FGM? (ver Exerc. 4, seção 5.4, Magalhães).
b) E com sua função característica? (ver Exerc. 60, seção 5.6, Magalhães).
c) Podemos calcular os momentos de X a partir da sua função característica?
d) Mostre que $\varphi_{2X}(t) = \varphi_X{}^2(t)$. Conclua que $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) \not\Rightarrow$ X e Y independentes.
e) Encontre a distribuição da média amostral $\overline{X_n} = S_n/n$, sendo as $X_i's$ variáveis iid Cauchy Padrão.

10. Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição comum $\exp(\lambda)$. Usando funções características, mostre que:

a) X-Y é simétrica em torno de zero.

b) X-Y segue o modelo Laplace com parâmetros $\mu = 0$ e λ.

11. Seja X uma variável aleatória de média μ e variância σ^2 (sendo ambos parâmetros finitos). Obtenha um limitante para $P(|X - \mu| < 2\sigma)$.

12. Resolva justificando claramente as passagens:

a) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes com distribuição comum dada por $X_k \sim U(0, 1+\frac{1}{k})$. Encontre o limite em distribuição de X_n.

b) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias iid com $E(X_1)=1$.
Calcule o limite em distribuição de $Y_n = \log(\overline{X}_n)$. ?

Refazer

13. Sejam $X_1, X_2, \ldots$variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição N(0,1).
Qual o limite e o tipo de convergência para Zn, onde

$$Z_n = \frac{U_n}{V_n}, \text{ sendo que}$$

$$U_n = X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2 \quad \text{e} \quad V_n = (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 + \ldots + (X_n - 1)^2 \ ?$$

14. Sejam $X_1, X_2, \ldots$variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exp(1/2).

a) Calcule o terceiro momento de X_n usando a Função Característica.

b) Qual o limite de $\dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$? Qual o tipo de convergência?

c) Calcule o limite de Z_n quando $n \to \infty$ e diga qual o tipo de convergência:

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{X_1^3 + X_2^3 + \ldots + X_n^3}.$$

15. Sejam $X_1, X_2, \ldots$variáveis aleatórias independentes com distribuição comum Poisson de parâmetro 1. Prove que $Y_n = \ln Z_n \to -\frac{1}{2}\ln 2$, sendo

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{n(X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2)}}.$$

Qual o tipo de convergência?

16. Sejam $X_1, X_2, \ldots$v.a.´s iid com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Para n fixo, seja.

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

a) Encontre o limite de $\overline{X}_n$ usando a Lei Fraca de Tchebychev.

b) Comprove, pela definição de convergência, que o limite calculado em a) é correto.

17. Sejam X$_1$, X$_2$, ... variáveis aleatórias independentes com distribuição comum exp(1/2).

14 →

a) Qual o limite de $\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}$? Qual o tipo de convergência? Justifique!

b) Calcule o limite de Z$_n$ quando n→ ∞ e diga qual o tipo de convergência:

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{X_1^3 + X_2^3 + \ldots + X_n^3}.$$

c) Qual o limite de $Z_n = \frac{\sqrt{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n - 2n)}{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}$? Qual o tipo de convergência?

d) Prove que $U_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n^{\,2} - 4)$ converge em distribuição para N(0,64) (aqui $\overline{X}_n$ é a média amostral).

e) Encontre o limite da Função Característica de U_n.

(Ajuda: Se X~Exp(λ), então $EX^k = \frac{k!}{\lambda^k}, \quad k = 1,2,\ldots$)