DISTRIBUIÇÃO T-STUDENT COM PARÂMETROS DE LOCAÇÃO E ESCALA

Daniel Krügel, UFPR, Brasil, danikrugel@gmail.com

Resumo

Este trabalho faz parte do projeto integrador da disciplina de Inferência Estatística – CE085, ministrada pelo Prof. Wagner Hugo Bonat. O Conteúdo do artigo é a descrição de uma distribuição de probabilidade e é voltado para alunos da graduação de Estatística e deve de ser compreensível para qualquer leito com conhecimento na área de exatas.

Palavras-chave: Distribuição; Probabilidade; T-student; Não-generalizada.

1. Introdução

A distribuição de t-student com parâmetros de locação e escala (também chamada de *"non-generalized t sudent distribution"* no inglês) é a própria distribuição T porém parametrizada a fim de ser mais propícias a mais situações. Ela contínua com o conceito de graus de liberdade, e adiciona dois parâmetros, um para, na prática, definir onde será o centro da distribuição e outro para controlar a variância.

2. Função densidade e espaço paramétrico

A função de densidade pode ser descrita por:

$$p(x|\nu,\mu,\sigma) \ = \ \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi\sigma}}\left(1+\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, (x \in \mathrm{R}, -\infty \ \leq x \leq +\infty\ )$$

Respectivamente nós temos os graus de liberdade (ν), o parâmetro de locação (μ) e o parâmetro de escala (σ). Detalhando os espaços paramétricos nós encontramos:

$$f\ = \{f_x(x|\mu);\ -\infty\ \leq \mu \leq +\infty\}$$

$$f\ = \{f_x(x|\sigma);\ 0 < \sigma \leq +\infty\}$$

A esperança da distribuição, também conhecida como valor esperado se dá apenas pelo parâmetro de locação.

$$E[X] = \ \mu$$

As distribuições da família de parâmetros de escala têm algo em comum, todas tem este parâmetro multiplicando algo para o calculo de variância, neste caso é a própria variância da distribuição T-student.

$$Var[X] = \ \sigma^2\left(\frac{\nu}{\nu-2}\right)$$

3. Aplicação da função densidade de probabilidade no R

Para aplicar a densidade no R eu utilizei o pacote "ExtraDistr" que a partir da sua versão 1.8.7 pode ser encontrada utilizando a função:

plst(x, df, mu = 0, sigma = 1)

Para ilustrar a função de densidade temos esse gráfico da acumulada aplicada com x variando entre [-50,50] com 14 graus de liberdade, locação igual a 5 e escala igual a 13.

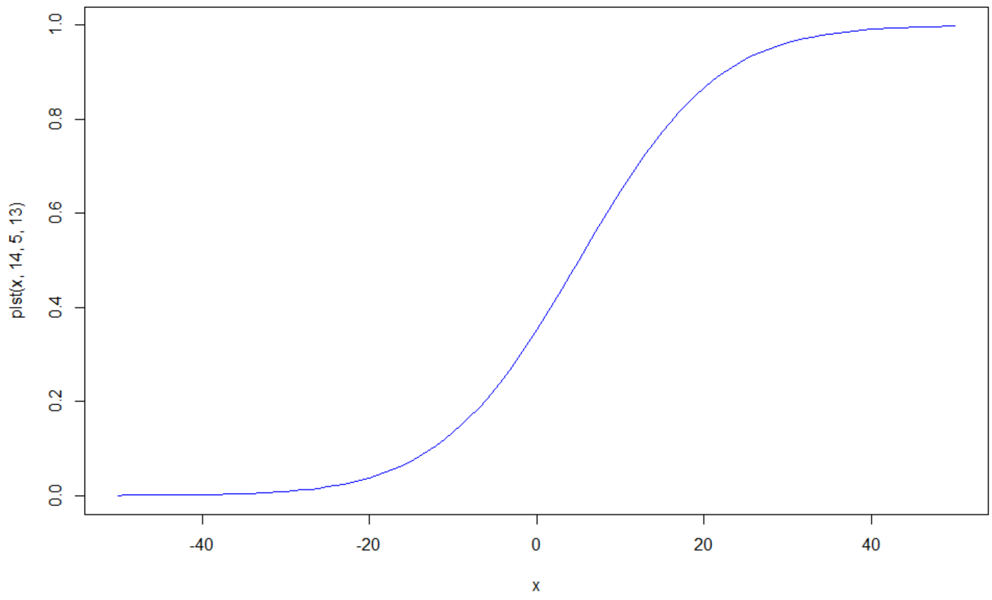

Figura 1 – Densidade acumulada

Para gerar números pseudoaleatórios utilizando esta função de probabilidade podemos utilizar o mesmo pacote citado e utilizar a função rlst(). Segundo Bergmann e Oliveira (2013), a distribuição t-student de locação e escala se adequa ao retorno do mercado de ações brasileiros utilizando entre 4 e 10 graus de liberdade, portanto a partir de agora irei fixar os graus de liberdade em 8, um motivo para isso é para diminuir o peso das caudas, facilitando a visualização dos gráficos e posteriormente nos cálculos. Utilizando o R para gerar um conjunto de dados com 1000 observações com os parâmetros de locação e escala iguais a 10 e 1 nós temos as seguintes observações:

```r
library(extraDistr)
set.seed(89)
x <- rlst(1000,df = 8, mu = 10, sigma = 1 )
hist(x, breaks = 15,
     main= "Histograma dos dados gerados com rlst",
     ylab = "Frequência")

curve(dlst(x,8,10,1), 6, 14,
      xlab = "Valor de X",
      ylab = "Probabilidade",
      main = "Densidade da função lst (x|8,10,1)")
```

Figura 1 – Código do R utilizado para gerar os dados e histograma

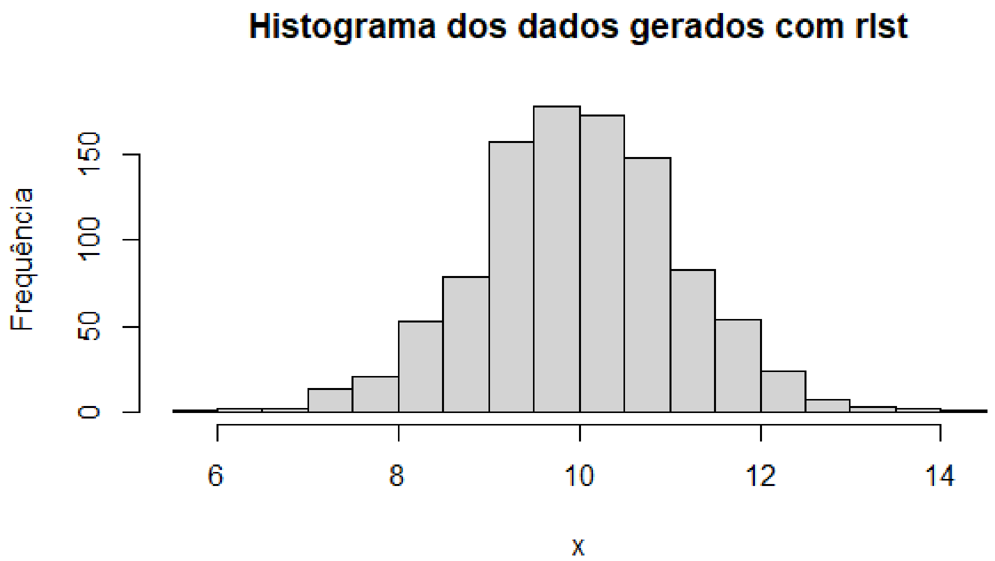

Figura 2 – Histograma com os dados gerados com o pacote ExtraDistr

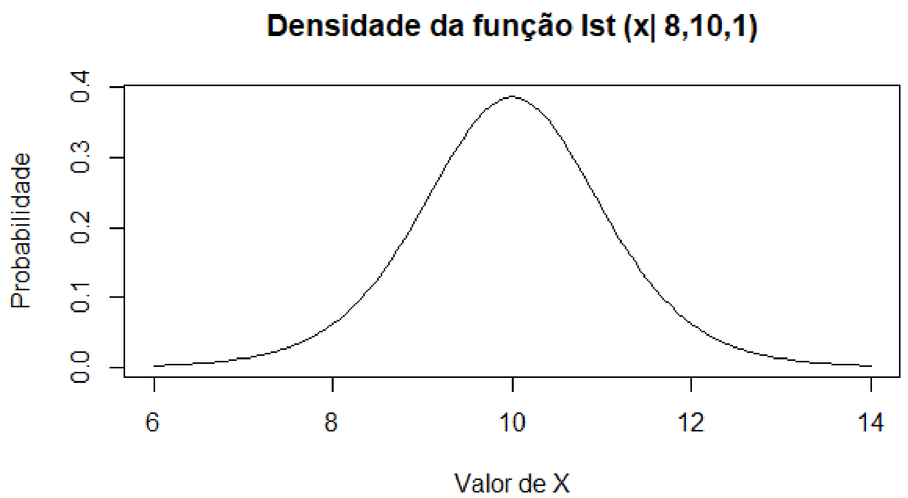

Figura 3 – Densidade da função T-student não generalizada com os valores gerados

4. Funções de verossimilhança

Para o calculo da função de verossimilhança me foi instruído pelo professor Wagner a fixar os graus de liberdade em um valor, continuei a utilizar 8 e construí uma função para os parâmetros restantes utilizando softwares de matemática simbólica como o Wolfram Alpha e o Symbolab pra auxiliar nos cálculos e obtive o seguinte desenvolvimento:

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma} | x, \nu = 8) = \prod f(\mu, \sigma \,| x_i, \nu = 8)$$

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma} | x, \nu = 8\ ) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma(9)}{\gamma(4)\sqrt{8\pi\hat{\sigma}}} \left[\left(1 + 1/8 \left(\frac{(x_i - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}} \right)^2 \right) \right]^{-7/2}$$

$$L(\hat{\mu},\hat{\sigma}|x,\nu=8)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1680\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{\hat{\sigma}}\left[\frac{(x_i-\hat{\mu})^2}{8\hat{\sigma}^2}+1\right]^{\frac{7}{2}}}$$

Resultando finalmente em:

$$L(\hat{\mu},\hat{\sigma}|x,\nu=8)=\frac{\left(1680\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^{n}}{\left(\sqrt{\hat{\sigma}}\right)^{n}\prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(x_i-\hat{\mu})^2}{8\hat{\sigma}^2}+1\right]^{\frac{7}{2}}}$$

Aplicando um logaritmo nesta função nós chegamos na chamada função log verossimilhança, que é dada por:

$$\mathrm{l}(\hat{\mu},\hat{\sigma})=\mathrm{n}\log\left(1680\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)-\frac{7}{2}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{(x_i-\hat{\mu})^2}{8\hat{\sigma}^2}+1\right)+\mathrm{n}\log\sqrt{\hat{\sigma}}$$

As funções escore podem ser encontradas através das derivadas parciais da $\mathrm{l}(\mu,\sigma)$ resultando em:

$$\mathrm{U}(\mu|x,\ \sigma,\ \nu=8)=\ \frac{-7}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{2\mu-x_i}{(x_i-\mu)^2+8\sigma^2}$$

$$U(\sigma|x,\mu,\nu=8)=\frac{-n}{2\sigma}-\frac{7}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i-\mu)^2}{\frac{(x_i-\mu)^2}{2}+4\sigma^3}$$

Logo de cara é possível perceber que não é possível utilizar o método do Estimador de Máxima Verossimilhança e encontrar um estimador fechado para ambos os parâmetros utilizando calculo diferencial integral, portanto partirei para uma solução computacional utilizando o R. O pacote “ExtraDistr” já mencionado anteriormente vai ser utilizado, tanto para gerar os dados, quanto implementar a função log verossimilhança, e o pacote básico do R, “stats4” para fazer a otimização da função log. O código completo fica:

```
#Gerando valores aleatórios usando rlst() com df = 8
set.seed(123)
x <- extraDistr::rlst(100, 8, mu = 10, sigma = 1)

#Adicionando a log verossimilhança ao R
lstLL <- function(mu, sigma){
  -sum(extraDistr::dlst(x, 8, mu, sigma, log = TRUE)
  )
}

#maximizando a função log utilizando o método MLE incluso no R
stats4::mle(lstLL, start = list(mu = 11, sigma = 0.5), method = "L-BFGS-B")
```

Figura 4 – Código em R para método EMV

Note que a função mle() utiliza o método “L-BFGS-B” que limita a memória a memória do computador, o BFGS pode ser utilizado também porém apresenta um erro maior porém testa mais valores caso necessário, como nesta situação eu mesmo gerei os dados, utilizei um método mais rápido. O output deste código no console do R é o seguinte:

```
Call:
stats4::mle(minuslogl = lstLL, start = list(mu = 11, sigma = 0.5),
    method = "L-BFGS-B")

Coefficients:
       mu     sigma
10.060617  1.006074
```

Figura 5 – Resultado do código apresentado na figura 4

4. Utilizações da distribuição

Agora que a função já foi descrita vamos para alguns usos dela, por ser uma derivação da distribuição clássica T-Student ela é apropriada para variáveis contínuas, porém é necessário que tenhamos mais do que dois graus de liberdade, isto se dá pelo cálculo da variância, caso tenhamos 2 graus de liberdade a variância se torna infinita, e menor do que isto, negativa.

Na última década as variações da T-student chamaram muita atenção no estudo de mercado de ações, a T-student com parâmetros de locação e escala em específico foi utilizada em alguns artigos, entre eles: Models on international portofolio risk management (ku, 2008); princing of European options (Cassidy et ak., 2010); models for insurance loss data (Brazauskas and Kleefeld, 2011); modeling of Brazilian stock returns (Bergmann and de Oliveira, 2013); modeling of stocks returns in Nigeria (Shittu et al., 2014)

Em particular “modeling of Brazilian stock returns” o autor pontua que houveram trabalhos que comprovam empiricamente que esta distribuição é melhor adaptada no cenário de mercados de ações em curtos períodos, menores do que em um mês, o famoso “Day trade”, do que outras distribuições como a logística, exponencial ou a discreta misturada Normal, isto se dá a ela ter uma kurtosis positiva em excesso.

5. Referências

Jackman, S. (2009). Bayesian Analysis for the Social Sciences. Wiley. p. 507.

Bergmann, D. R., Oliveira, M. A. (2013). Modeling the Distribution of Brazilian Stock Returns via Scaled Student-t, International Research Journal of Finance and Economics. TechniumScience. p. 27

Li, R., & Nadarajah, S. (2018). A review of Student’s t distribution and its generalizations. Empirical Economics. https://doi.org/10.1007/s00181-018-1570-0

Wikipedia contributors. (2022, April 19). Student's t-distribution. In *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. Retrieved 19:38, May 1, 2022, from https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Student%27s_t-distribution&oldid=1083494571