Avaliação 1

Daniel Krügel

2023-04-17

Introdução

Para este trabalho com data de entrega do dia 17/04/2023 foi utilizado como editor de texto a linguagem markdown e para criação de tabelas e a facilitação da exibição de alguns calculos a linguagem R. Tentarei ser o mais claro possível neste trabalho, porém caso seja necessário tenho as anotações feitas por mim durante a execução do trabalho que seram enviadas ao email ary.sabbag@ufpr.br (e-mail encontrado no website departamental) em formato de PDF.

Resolução do problema para 2 jogadores

Dado que temos

$$X(t) = z_1 + z_2$$

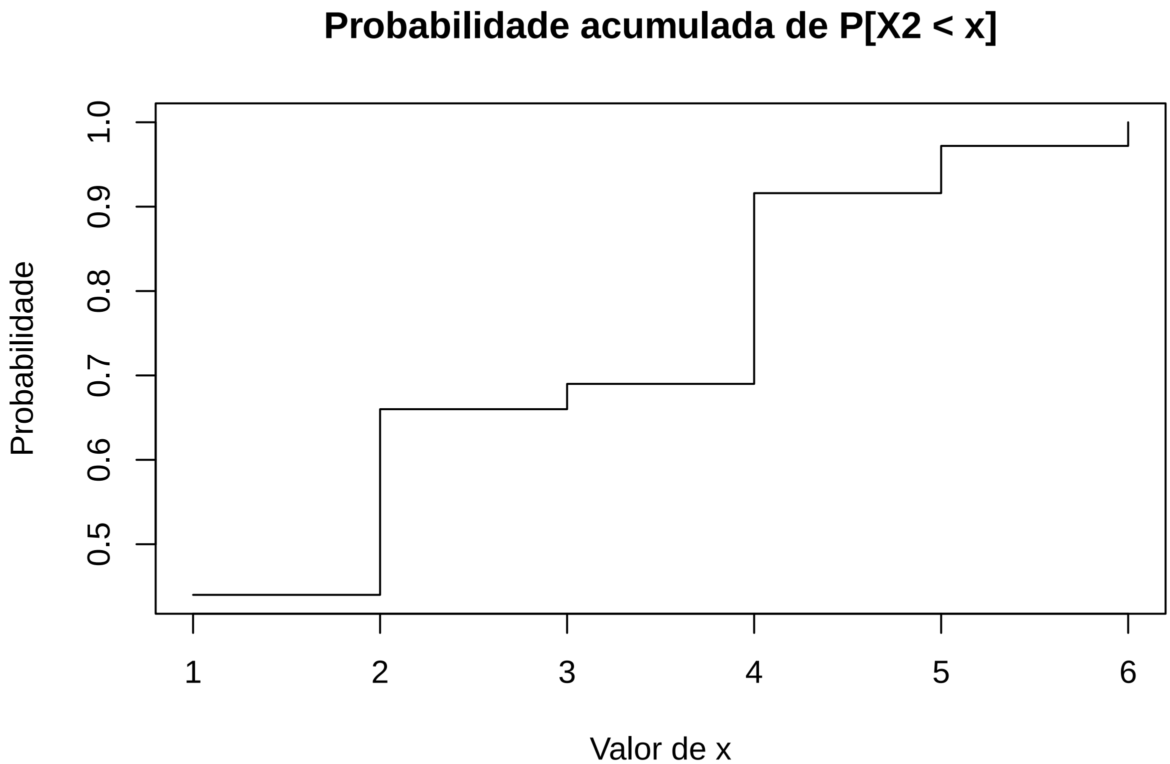
onde X(t) equivale o que será pago pela banca e cada um dos Z o que cada jogador receberá após t jogadas.

É conhecido neste problema o quanto cada um receberá após a jogada de um dado, portanto todas as probabilidades de resultados serão derivadas da multiplicação ponto a ponto de cada uma das probabilidades, também conhecido como o Teorema de Faurier, teorema do qual o teorema de convolução é derivado.

Realizando as multiplicações teremos o seguinte dataframe:

```
##    x P[X2 = x] P[X2 <= x]
## 1  0     16/36      0.440
## 2  1      8/36      0.660
## 3  2      1/36      0.690
## 4  6      8/36      0.916
## 5  7      2/36      0.972
## 6 12      1/36      1.000
```

Considerando essa tabela de valores acumulados podemos dar uma olhada no gráfico de probabilidades acumu-



lada:

O Xc equivale ao preço pago pelos 2 jogadores para que a banca não quebre com probabilidade epsolon, portanto o Xc que nos dará uma chance aceitável da banca se manter aberta $1 - \epsilon$ é de 6 unidades monetárias, dando 3 unidades para cada jogador

Esperança

Para calcularmos o valor esperado de pagamentos da banca, utilizaremos a fórmula dada em sala, que não passa do calculo do primeiro momento de uma distribuição discreta:

$$\sum_{t=1}^{n} x_t * X(t)$$

Em código do R ficará:

```
px2xV2 <- c(16/36,8/36,1/36,8/36,2/36,1/36)
Ex2 <- sum(df2$x * px2xV2)
Ex2
```

```
## [1] 2.333333
```

Variancia

Para a variância utilizaremos o teorema:

$$Var(\mu) = E[\mu^2] - (E[\mu])^2$$

Ou seja a variância de uma variável aleatória é o segundo momento menos o quadrado do primeiro, portando utilizando o R para fazer este calculo e exibi-lô para o senhor fica:

```r
# Calculo da variância de x2
SegMomento2 <- sum((df2$x^2)*px2xV2)
SegMomento2
```

```
## [1] 15.05556
```

```r
Varx2 <- SegMomento2 - (Ex2^2)
Varx2
```

```
## [1] 9.611111
```

Calculos para 3 jogadores

$$X(t) = Z_1 + Z_2 + Z_3$$

Aqui seguiremos a mesma lógica de como foi feito para 2 jogadores, como sabemos pelo teorema de convolução que a soma de 3 variáveis aleatórias recai novamente em uma soma de duas, neste caso será dada por:

$$f[z_3 \otimes (z_1 + z_2)]$$

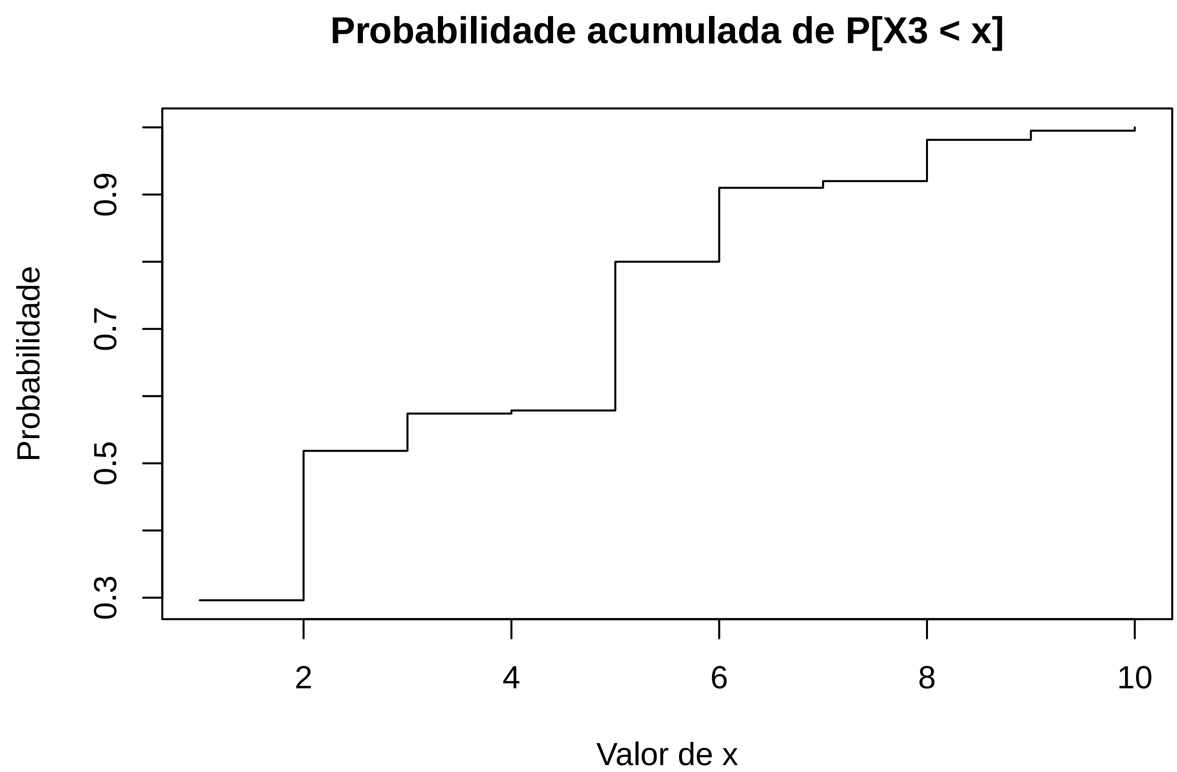
No R isto será exibido pela seguinte tabela:

```
##             0           1           6
## 0  0.29629630 0.074074074 0.074074074
## 1  0.14814815 0.037037037 0.037037037
## 2  0.01851852 0.004629630 0.004629630
## 6  0.14814815 0.037037037 0.037037037
## 7  0.03703704 0.009259259 0.009259259
## 12 0.01851852 0.004629630 0.004629630
```

Para olharmos para a função de distribuição acumulada temos a seguinte tabela:

```
##     x P[X3 = x] P[X3 = x] calculado P[X3 <= x]
## 1   0    64/216          0.29629630     0.2962
## 2   1    48/216          0.22222222     0.5185
## 3   2    12/216          0.05555556     0.5740
## 4   3     1/216          0.00462963     0.5786
## 5   6    48/216          0.22222222     0.8000
## 6   7    24/216          0.11111111     0.9100
## 7   8     3/216          0.01388889     0.9200
## 8  12    12/216          0.05555556     0.9814
## 9  13     3/216          0.01388889     0.9950
## 10 18     1/216          0.00462963     1.0000
```

Vamos dar uma olhada no gráfico da função distribuição acumulada de:



Seguindo a mesma lógica usada para 2 jogadores o Xc que me dará um valor de $P[x_c <= 1 - \epsilon]$ é aproximadamente 7. Dando um valor para cada jogador de aproximadamente $7/3 = 2{,}33$

Esperança

Como a quantidade média paga pela banca é a esperança de $X_3(t)$ utilizarei o R para fazer este calculo:

```
Ex3 <- sum(df3V2$x * px3xV2)
Ex3
```

```
## [1] 3.5
```

Variancia

Utilizarei o mesmo pensamento que da versão com 2 jogadores para o calculo de variancia de $X_3(t)$

```
# Calculo da variância para 3 jogadores

SegMomento3 <- sum((df3V2$x^2)*px3xV2)
SegMomento3
```

```
## [1] 26.66667
```

```
Varx3 <- SegMomento3 - (Ex3^2)
Varx3
```

```
## [1] 14.41667
```

Calculando para 4 jogadores

! Atenção !

Como tive pouco tempo para me planejar para a realização deste trabalho, há um erro nas probabilidades de 4 jogadores, alguma das combinações de probabilidades foi deixada de lado, por conta disso os calculos estão incorretos e a acumulada não resulta em 1 quando somado todos os elementos da sigma algebra.

Resolução

$$X_4(t) = z_1 + z_2 + z_3 + z_4$$

O caso de 4 jogadores, assim como o de 3 jogadores recai em uma soma de duas variáveis aleatórias, sendo elas z_4 e $(z_1 + z_2 + z_3)$ portanto o tma de faurier recai na seguinte equação:

$$f[z_4 \otimes (z_1 + z_2 + z_3)]$$

A multiplicação ponto a ponto recai na seguinte tabela:

```
##              0            1            6
## 0  0.197530864 0.0493827160 0.0493827160
## 1  0.148148148 0.0370370370 0.0370370370
## 2  0.037037037 0.0092592593 0.0092592593
## 3  0.003086420 0.0007716049 0.0007716049
## 6  0.148148148 0.0370370370 0.0370370370
## 7  0.074074074 0.0185185185 0.0185185185
## 8  0.009259259 0.0023148148 0.0023148148
## 12 0.037037037 0.0092592593 0.0092592593
## 13 0.009259259 0.0023148148 0.0023148148
## 18 0.003086420 0.0007716049 0.0007716049
```

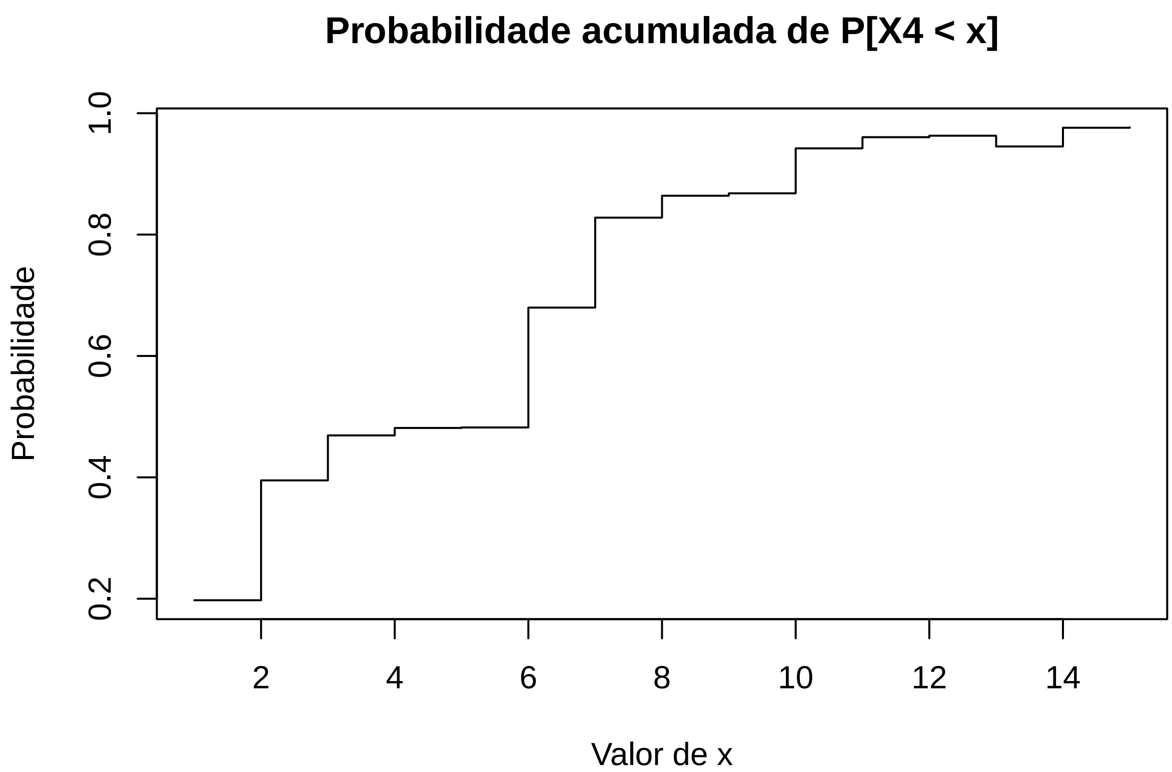
Fazendo a acumulada da sigma algebra teremos a seguinte tabela:

```
##     x P[X4 = x] P[X4 = x] calculado P[X4 <= x]
## 1   0  256/1296        0.1975308642     0.1975
## 2   1  256/1296        0.1975308642     0.3950
## 3   2   96/1296        0.0740740741     0.4691
## 4   3   16/1296        0.0123456790     0.4814
## 5   4    1/1296        0.0007716049     0.4822
## 6   6  256/1296        0.1975308642     0.6797
## 7   7  192/1296        0.1481481481     0.8279
## 8   8   48/1296        0.0370370370     0.8640
## 9   9    4/1296        0.0030864198     0.8680
## 10 12   96/1296        0.0740740741     0.9421
## 11 13   24/1296        0.0185185185     0.9605
## 12 14    3/1296        0.0023148148     0.9629
## 13 18   16/1296        0.0123456790     0.9452
## 14 19    1/1296        0.0007716049     0.9760
## 15 24    1/1296        0.0007716049     0.9767
```

Como comentado a cima, faltou alguma das combinações de probabilidade na hora de calcular a acumulada, por isso falta aproximadamente 3% para que a acumulada dê 1.

Porém seguirei com as questões mesmo sabendo deste erro para ter alguma entrega.

Utilizando a mesma lógica que as questôes anteriores o X crítico é de 12, com uma probabilidade de ruína de (1-0,94) 0.06, tendo como custo unitário para cada jogador algo em torno de $12/4 = 3$ unidades monetárias.



Esperança

A ideia de pagamento médio segue o mesmo que as anteriores, portanto:

```
Ex4 <- sum(df4V2$x * px4xV2)
Ex4
```

```
## [1] 4.349537
```

Variância

```
SegMomento4 <- sum((df4V2$x^2)*px4xV2)
SegMomento4
```

```
## [1] 36.58102
```

```
Varx4 <- SegMomento4 - (Ex4^2)
Varx4
```

```
## [1] 17.66255
```

Para 3000 jogadores

Como temos um n muito grande, podemos utilizar o teorema central do limite para aproximar o resultado em uma normal média 0 e desvio padrão 1 Portanto teremos

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + ... + z_n$$

Onde z1, z2, z3... zn são idependentes e identicamente distribuídas onde $E[z_i] = \mu$ e $var[z_i] = \sigma$š podemos tirar que:

$$E[S_n] = E[\sum_{i=1}^{n} z_i] = \sum_{i=1}^{n} E[z_i] = \sum_{i=1}^{n} \mu = n\mu$$

$$Var[S_n] = Var[\sum_{i=1}^{n} z_i] = \sum_{i=1}^{n} E[z_i] = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2 = n\sigma^2$$

Portanto:

$$S_n \approx N(n * \mu, n * \sigma)$$

No R para um jogador:

```
x <- c(0,1,6)
prob <- c(4/6,1/6,1/6)

espX <- sum(x*prob)
segMomentoX <- sum((x^2) * prob)

varianciaX <- segMomentoX - espX^2
(data.frame("Esperança" = espX, "2Momento" = segMomentoX, "Variancia" = varianciaX))
```

```
##   Esperança X2Momento Variancia
## 1  1.166667  6.166667  4.805556
```

Utilizando os resultados já denotados anteriormente, temos que $\mu = 1,6666$ e $\sigma^2 = 4,8055$ portanto precisaremos multiplicar para n, no nosso caso $n = 3000$

```
n <- 3000
exp3000 <- espX * n
var3000 <- varianciaX * n
dp3000 <- sqrt(var3000)

TCL <- exp3000 + (1.28 * dp3000)
TCL/n
```

```
## [1] 1.217896
```

Utilizei 1,28 pela acumulada de uma normal (0,1) acumulado para que sobre 0.1 a esquerda da distribuição.

Para 3000 jogadores teremos o valor unitário de cada jogo em 1,21 unidades monetárias.