

Como visto anteriormente a função T student com parâmetros de locação e escala se comportava bem utilizando de 4 a 10 graus de liberdade para o estudo de retornos na bolsa de valores brasileira, então vou fixar os graus de liberdade em 8 para achar as funções de verossimilhança e log verossimilhança. Utilizando softwares de matemática simbólica, como Wolfram Alpha, para auxiliar na simplificação e algumas operações eu obtive os seguintes resultados:

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma} | x, \nu = 8) = \prod_{i=1}^n \frac{\gamma(9)}{\gamma(4)\sqrt{8\pi}\hat{\sigma}} \left[ \left( 1 + 1/8 \left( \frac{(x_i - \hat{\mu})^2}{\hat{\sigma}} \right)^2 \right) \right]^{-7/2}$$

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma} | x, \nu = 8) = \prod_{i=1}^n \frac{1680\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{\hat{\sigma}} \left[ \frac{(x_i - \hat{\mu})^2}{8\hat{\sigma}^2} + 1 \right]^{\frac{7}{2}}}$$

Resultando finalmente em:

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma} | x, \nu = 8) = \frac{\left( 1680\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^n}{(\sqrt{\hat{\sigma}})^n \prod_{i=1}^n \left[ \frac{(x_i - \hat{\mu})^2}{8\hat{\sigma}^2} + 1 \right]^{\frac{7}{2}}}$$

Como o produtório não pode ser simplificado, vamos carregar ele adiante. Agora vamos para a função de log-verossimilhança:

$$l(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \log \left( 1680\sqrt{\frac{2}{\pi}} \right)^n - \log \left\{ \prod_{i=1}^n \left( \frac{(x_i - \hat{\mu})^2}{8\hat{\sigma}^2} \right)^{\frac{7}{2}} \right\} + n \log \sqrt{\hat{\sigma}}$$

Para as funções escore, as derivadas parciais da função log ficam um pouco bagunçadas, graças a este produtório:

$$U(\mu | x, \sigma, \nu = 8) = - \frac{\frac{d}{d\mu} \left( \prod_{i=1}^n \left( \frac{(x_i - \hat{\mu})^2}{8\hat{\sigma}^2} \right)^{\frac{7}{2}} \right)}{\prod_{i=1}^n \left( \frac{(x_i - \hat{\mu})^2}{8\hat{\sigma}^2} \right)^{\frac{7}{2}}}$$

$$U(\sigma | x, \mu, \nu = 8) = \frac{-n}{2\sigma} - \frac{\frac{d}{d\sigma} \left( \prod_{i=1}^n \left( \frac{(x_i - \hat{\mu})^2}{8\hat{\sigma}^2} \right)^{\frac{7}{2}} \right)}{\prod_{i=1}^n \left( \frac{(x_i - \hat{\mu})^2}{8\hat{\sigma}^2} \right)^{\frac{7}{2}}}$$

