



TERCEIRA AVALIAÇÃO DE PROBABILIDADES A (CE084)

Prof. Benito Olivares Aguilera

04 de agosto de 2021

- 1. (20 pts.) Objetivo:** Avaliar conceitos de convergência de sequências de variáveis aleatórias e teoremas limite.

Responda da forma mais completa possível:

- a) Existe alguma sequência de variáveis aleatórias na qual não seja possível aplicar a Lei dos Grandes Números? Explique.
- b) Explique a importância da Função Característica para efeitos de convergência.
- c) Qual a importância da distribuição original das variáveis aleatórias X_i 's no Teorema Central do Limite?
- c) Explique como uma companhia de seguros poderia utilizar a Lei dos Grandes Números para calcular os prêmios a serem pagos por determinado sinistro.

- 2. (15 pts.) Objetivo:** Avaliar o conceito de convergência em distribuição.

Seja $\{c_n\}$, $n = 1, 2, \dots$, uma sequência de números reais tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = c$, sendo c uma constante finita.

Seja X_1, X_2, \dots uma sequência de variáveis aleatórias tal que $X_n \xrightarrow{D} N(0, 2)$.
Encontre o limite em distribuição de $X_n + c_n$.

- 3. (30 pts.) Objetivo:** Avaliar a aplicação de teoremas limite.

Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas tais que $EX_1 = 0$ e $EX_1^2 = 2$.

a) Calcule o limite de $Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2}}$.

b) Seja $Y_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{2n}}$.

Mostre que $\phi_{Y_n}(t) \rightarrow e^{-t^2/2}$

4. (35 pts.) **Objetivo:** Avaliar a aplicação de teoremas limite.

Sejam X_1, X_2, \dots variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas,

com $X_i \sim N(0,1)$. Seja S_n a variável aleatória dada por $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$.

- a) Encontre a distribuição de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$.
- b) Utilize a Lei fraca de Tchebychev para encontrar o limite de $\frac{S_n}{n}$.
- c) Comprove, pela definição desse tipo de convergência, que o limite calculado em b) é correto.

DURAÇÃO DA AVALIAÇÃO: 2 ½ HORAS.