UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

1ª LISTA DE EXERCICIOS CE087 – CÁLCULO DE PROBABILIDADES B

Prof. Benito Olivares Aguilera — fevereiro 2022

1. [Magalhães, pag. 124] A função de distribuição conjunta de X e Y é dada por:

$$F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \text{ ou } y < 0; \\ \dfrac{x}{5}(1-e^{-y}), \ 0 \le x < 5, \ \ y \ge 0; \\ 1-e^{-y}, \ x \ge 5, \ \ y \ge 0. \end{cases}$$

a) Verifique que $F_{X,Y}$ satisfaz as condições para uma função distribuição.
b) Identifique as distribuições (marginais) das variáveis X e Y. São independentes?

2. Uma urna contêm três bolas numeradas 1,2 e 3. Duas bolas são retiradas sucessivamente da urna, ao acaso e sem reposição. Seja X o número da primeira bola retirada e Y o número da segunda.
a) Descreva a distribuição conjunta de X e Y.
b) Calcule $P(X < Y)$.

3. No lançamento de dois dados, seja X a variável aleatória que representa a soma das faces e seja Y o valor absoluto da diferença. Apresente o espaço amostral do experimento e a função de probabilidade conjunta de X e Y.

4. Sejam X e Y variáveis aleatórias relacionadas pela função:

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-(2x+\frac{y}{2})}, \ x \ge 0, \ y \ge 0 \\ 0, \qquad \text{c.c.} \end{cases}$$

a) $f(x,y)$ é uma densidade conjunta?
b) X e Y são independentes?
c) Encontre as densidades marginais de X e Y.
d) Quanto vale $P(X \le 1, Y \le 2)$?

?

5. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por:

$$f(x,y)=\begin{cases}4xy, & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\\ 0, & \text{c. c.}\end{cases}$$

a) Mostre que $f(x,y)$ é uma densidade conjunta.
b) Encontre as densidades marginais de X e Y.
c) X e Y são independentes?
d) Calcule P(X ≤ 1/2).
e) Quanto vale P(X ≤ 1/2, Y≤ 1/2)?

6. Dois tetraedros (dados com quatro faces) com as faces numeradas de 1 a 4 são lançados e os números das faces voltadas para baixo são observados. Sejam X e Y as seguintes variáveis aleatórias:

X: **maior** dos números observados;
Y: **menor** dos números observados.

a) Descreva o espaço amostral Ω para esse experimento.
b) A que eventos de Ω corresponde o evento [X=4, Y=1]?
c) Encontre a distribuição conjunta de X e Y.
d) Calcule as distribuições marginais.
e) X e Y são independentes?

7. Seja $f(x,y)=k,\ 0\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1,\ 0\le x+y\le 1.$

a) Encontre o valor da constante *k* para que *f* seja uma densidade.
b) Calcule $P(X\le 1/2, Y\le 1/2)$.
c) Calcule as densidades marginais.
d) X e Y são independentes?

8. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0\le y\le x\le 1\\ 0, & c.c.\end{cases}$$

Calcule $f_X(x)$.

9. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x,y)=\begin{cases}\lambda^2 e^{-\lambda y}, & 0\le x\le y\\ 0, & c.c.\end{cases}$$

Calcule as densidades marginais de X e Y.

10. Denote por p(x,y) a probabilidade P(X=x, Y=y). Dadas as probabilidades

p(0,10) = p(0,20) = 2/18; p(1,10) = p(1,30) = 3/18; p(1,20) = p(2,30) = 4/18.

a) Calcule a distribuição de Y dada X.
b) Calcule P(Y >10 | X =1).

11. Sejam X e Y variáveis aleatórias com distribuição conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Calcule as distribuições marginais de *X* e *Y*. Elas são independentes?

12. Considere um círculo de raio *r* e centro na origem, e suponha que um ponto é aleatoriamente selecionado no círculo. Sejam X e Y as coordenadas do ponto escolhido.

a) Determine a função densidade conjunta;
b) Encontre as densidades marginais de *X* e de *Y*;
c) Encontre a probabilidade de que a distância da origem ao ponto selecionado não seja maior do que *a* (*a>0*).

13. Numa certa confecção, uma máquina de costura industrial é utilizada, na parte da manhã, para costuras simples e na parte da tarde, para fazer arremates. Sejam as variáveis aleatórias

X: número de vezes que a máquina pára devido a problemas, na parte da manhã.

Y: número de vezes que a máquina pára devido a problemas, na parte da tarde.

A partir de longos períodos de observação, a seguinte distribuição de probabilidade conjunta de X e Y foi determinada

X \ **Y**	**0**	**1**	**2**
0	0.1	0.2	0.2
1	0.04	0.08	0.08
2	0.06	0.12	0.12

a) Encontre a Função Distribuição (Acumulada) Conjunta de X e Y
b) Encontre as distribuições marginais
c) Encontre a distribuição condicional de X dado Y=2 e a distribuição condicional de Y dado X=0.

14. A superfície de tensão X_1 e a acidez X_2 de um certo composto químico são variáveis aleatórias com densidade conjunta dada por

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{3}(3 - x_1 - x_2),\ 0 < x_1 < 1,\ 0 < x_2 < 2.$$

Verificar se a superfície de tensão depende da acidez.

15. O vetor aleatório (X, Y, Z) tem função de densidade conjunta dada por $f(x, y, z) = kxy^2z, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{2}$.

a) Encontre o valor de k.

b) Encontre todas as densidades marginais;