UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

EXAME DE PROBABILIDADE A (CE084)

Prof. Benito Olivares Aguilera 11 de agosto de 2021

1. (30 pts.) Responda, de forma clara e completa, as seguintes questões:

a) Qual o papel de uma sigma-álgebra para o cálculo de probabilidades?
SOL. (QUESTÃO ABERTA) Uma sigma-álgebra é a estrutura matemática que serve para fornecer os eventos aleatórios, ou seja os objetos aos quais podemos atribuir uma probabilidade. Ela é parte fundamental de um espaço de probabilidade.

b) Um evento A pode ser independente dele mesmo? Prove ou justifique formalmente.
SOL: Para um evento A ser independente dele mesmo deveríamos ter que:

$$P(A \cap A) = P(A) \cdot P(A).$$

Como $(A \cap A) = A$ teríamos que

$P(A) = P(A) \cdot P(A) \Longrightarrow P(A)[1 - P(A)] = 0.$

Essa igualdade só será satisfeita se $P(A) = 0$ (evento impossível) ou $P(A) = 1$ (evento certo).

c) Sejam A, B e C eventos do mesmo espaço de probabilidade. Prove formalmente que

$$P[(A \cup B)/C] = P(A/C) + P(B/C), \text{ se } A \cap B = \emptyset.$$

SOL: Por definição de probabilidade condicional:

$$P[(A \cup B)/C] = \frac{P[(A \cup B) \cap C]}{P(C)} = \frac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]}{P(C)}.$$

Como $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow (A \cap B) \cap C = (A \cap C) \cap (B \cap C) = \emptyset$. Assim,

$$P[(A \cup B)/C] = \frac{P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]}{P(C)} = \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)}$$
$$= P(A/C) + P(B/C).$$

d) Cinco pontos são escolhidos, independentemente e ao acaso, do intervalo $[0,1]$. Seja X o número de pontos que pertencem ao intervalo $[0, \boldsymbol{c}/100]$. Qual a distribuição de X?
SOL: Cada uma das cinco escolhas de um ponto representa um ensaio de Bernoulli, pois o ponto escolhido pertence, ou não, ao intervalo em questão. Dessa forma temos que $X \sim Bin(5, p)$, sendo p a probabilidade do ponto pertencer ao intervalo $[0, \boldsymbol{c}/100]$. Essa probabilidade pode ser calculada utilizando a definição geométrica como:

$$p = \frac{comp([0, \boldsymbol{c}/100])}{comp([0,1])} = \frac{\boldsymbol{c}}{100}.$$

e) Se $X_n \xrightarrow{D} X$, encontre o limite em distribuição de $\boldsymbol{a}X_n + \boldsymbol{b}$, justificando formalmente seus cálculos.

SOL: Se $X_n \xrightarrow{D} X \Longrightarrow \varphi_{X_n} \xrightarrow{n\to\infty} \varphi_X$.

Agora, $\varphi_{aX_n+b}(t) = e^{ibt}\varphi_{aX_n}(t) = e^{ibt}\varphi_{X_n}(at) \xrightarrow{n\to\infty} e^{ibt}\varphi_X(at)$.

Essa última FC corresponde à variável aleatória $aX + b$.

Logo podemos concluir que se

$$X_n \xrightarrow{D} X \Longrightarrow aX_n + b \xrightarrow{D} aX + b.$$

2. (30 pts.) Seja $X \sim U(-\boldsymbol{b}, b)$.

a) Mostre que a função característica de X pode ser escrita como

$$\varphi_X(t) = \frac{sen\ (\boldsymbol{b}t)}{\boldsymbol{b}t}.$$

SOL: Se $X \sim U(-b, b) \Longrightarrow \varphi_X(t) = \frac{e^{ibt} - e^{-ibt}}{it(2b)}$.

Pela Fórmula de Euler temos que:

$$e^{\pm ibt} = \cos(bt) \pm i\,\mathrm{sen}(bt).$$

Substituindo na FC temos que:

$$\varphi_X(t) = \frac{\cos(bt) + i\,\mathrm{sen}(bt) - \cos(bt) + i\,\mathrm{sen}(bt)}{2ibt} = \frac{2i\,\mathrm{sen}(bt)}{2ibt} = \frac{\mathrm{sen}(bt)}{bt}.$$

b) Essa função característica viola a propriedade $\varphi_X(0) = 1$? Explique.

SOL.: Embora, sobre os números reais não seja possível avaliar diretamente $\varphi_X(t)$ em $t = 0$, se considerarmos uma vizinhança de zero a FC satisfaz a propriedade pois $\lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{sen}(bt)}{bt} = 1$.

OBS: O tratamento desse tipo de indeterminação sobre os números complexos (polos) é diferente dos números reais.

c) Defina $Y = \alpha X + \beta$. Encontre condições sobre α e β de forma que $Y \sim U(0,1)$.

SOL.:

Como $X \sim U(-b, b) \Longrightarrow M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{-bt}}{2bt}$.

Assim,

$$M_Y(t) = M_{\alpha X + \beta}(t) = e^{\beta t} M_X(\alpha t) = e^{\beta t} \cdot \frac{e^{b\alpha t} - e^{-b\alpha t}}{2b\alpha t} = \frac{e^{(\beta + b\alpha)t} - e^{(\beta - b\alpha)t}}{2b\alpha t}.$$

O problema exige que $Y \sim U(0,1)$, logo

$$M_Y(t) = \frac{e^t - 1}{t}.$$

Comparando ambas expressões para $M_Y(t)$ deve-se ter que

$$\begin{cases} \beta + b\alpha = 1 \\ \beta - b\alpha = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $\alpha = 1/2b$ e $\beta = 1/2$.

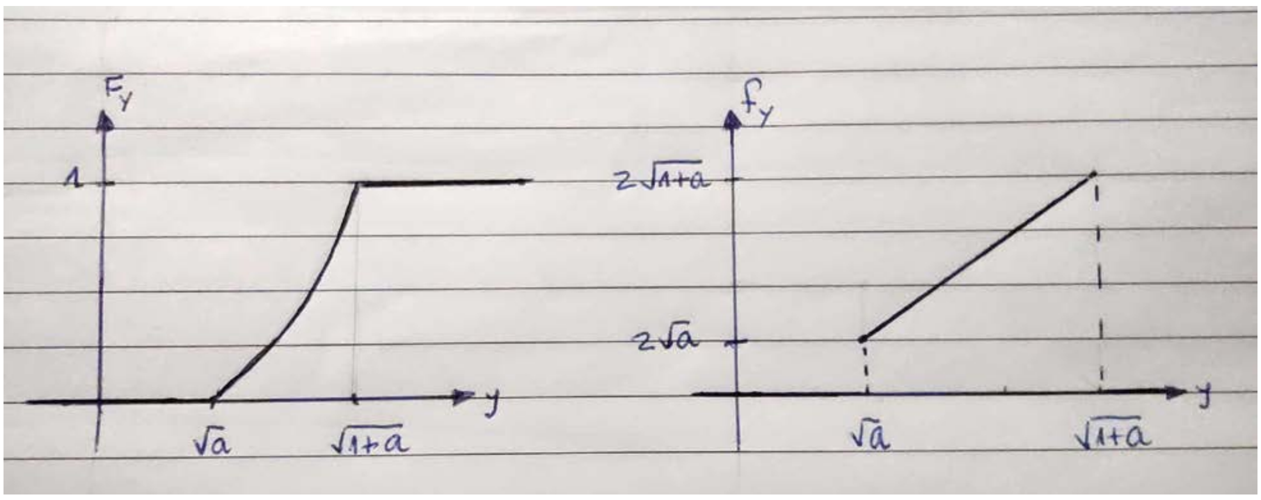
OBS: O mesmo resultado pode ser obtido utilizando a FDA de Y.

3. (40 pts.) Seja $X \sim U(0,1)$. Defina $Y = \sqrt{X + \boldsymbol{a}}$.

a) Faça o gráfico da função distribuição e da função densidade de Y.
SOL.: Como $X \in (0,1) \Longrightarrow Y \in \left(\sqrt{a}, \sqrt{1+a}\right)$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\sqrt{X+a} \leq y\right) = P(X + a \leq y^2) = P(X \leq y^2 - a)$$
$$= F_X(y^2 - a) = y^2 - a, \quad \sqrt{a} \leq y \leq \sqrt{1+a}.$$

Derivando obtemos a densidade:
$f_Y(y) = 2y, \quad \sqrt{a} \leq y \leq \sqrt{1+a}.$
Os gráficos aparecem na seguinte figura:



b) Seja $Y_1, Y_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição de Y. Encontre o limite em probabilidade de

$$\bar{Y}_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n}.$$

SOL.: Aqui as va's aleatórias $Y_1, Y_2, \cdots$ são independentes com distribuição comum dada por $f_Y(y)$ calculada em a) e integráveis, pois

$$\mu = EY = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{1+a}} y f_Y(y) dy = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{1+a}} 2y^2 dy = \frac{2}{3} y^3 \Bigg|_{\sqrt{a}}^{\sqrt{1+a}} = \frac{2}{3}\left[(1+a)^{3/2} - a^{3/2}\right] < \infty.$$

Pela **Lei fraca de Kintchine** (pois as variáveis são iid e integráveis):

$$\bar{Y}_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n} \xrightarrow{P} EY_1 = \frac{2}{3}\left[(1+a)^{3/2} - a^{3/2}\right].$$

c) Seja $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição de X. Construa um Teorema Central do Limite específico para essa sequência.

SOL: Seja $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
Como $X_i \sim U(0,1), \forall i \Longrightarrow EX_i = 1/2$ e $varX_i = 1/12$, então $ES_n = n/2$ e $varS_n = n/12$.

Pelo **Teorema Central do Limite para variáveis aleatórias iid** tem-se que

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{varS_n}} = \frac{S_n - n/2}{\sqrt{n/12}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$