UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

2ª LISTA DE EXERCICIOS CE084 – PROBABILIDADES A

Prof. Benito Olivares Aguilera 2021/1

1. Lança-se um dado não viciado até a obtenção do terceiro 6. Seja X o número do lançamento em que isto ocorre. Calcule:

   P(X = 10); b) P(X > 10); c) P(X = 10).

2. Considere uma urna contendo 3 bolas vermelhas e 5 pretas. Retire 3 bolas, sem reposição, e defina a variável aleatória X igual ao número de bolas pretas.
   a) Obtenha a distribuição de X.
   b) Repita o item anterior, mas considerando extrações com reposição.

   c) Obtenha a distribuição das v.a. 3X e X^2 .

3. Sabe-se que a v.a X assume os valores 1, 2 e 3 e que sua função distribuição F(x) é tal que:

   $$F(1) - F(1^-) = 1/3;\ F(2) - F(2^-) = 1/6 \text{ e } F(3) - F(3^-) = 1/2.$$

   Obter a função de probabilidade de X, a função distribuição F(x) e os gráficos respectivos.

4. Dada a função

   $$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

   a) Mostre que esta é uma densidade de probabilidade.
   b) Encontre a função de distribuição (acumulada).
   c) Calcule a probabilidade *P(X>a)*, *a* constante.

5. Um banco faz operações via Internet e, após um estudo sobre o serviço prestado, concluiu o seguinte modelo teórico para o tempo de conexão (em minutos):

   $$f(x) = \frac{1}{4} k e^{-\frac{1}{4}kx}, \quad x > 0,$$

   com k sendo 1 ou 2, dependendo do cliente ser pessoa física ou jurídica. Sabe-se que dentre os clientes que se utilizam do Internet Banking, a porcentagem dos que são classificados como pessoa física é estimada em 20%.

a) Sendo pessoa física, qual a probabilidade de mais de 2 minutos de conexão?
b) Sendo pessoa jurídica, qual a probabilidade de ficar conectado menos de 6 minutos?
c) Qual a probabilidade de um cliente ficar mais de 2 minutos conectado?
d) Se um cliente fica mais de 5 minutos conectado, qual a probabilidade dele ser pessoa jurídica?
e) Prove que o tempo de conexão não tem memória, isto é, a probabilidade de um cliente ficar mais de (t+s) minutos conectado, dado que já ficou mais de s minutos, é igual à probabilidade de ficar mais de t minutos conectado.
f) Desenhe o gráfico da função distribuição.

6. A v.a. X tem densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} cx^2, & -1 \le x \le 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Encontre o valor da constante *c*.
b) Calcule *P(X>b | X<b/2),* para *–1<b<0*.
c) Calcule o 1° Quartil da distribuição, isto é, o valor α tal que $F_X(\alpha) = 1/4$.

7. Diga sob que condições a função é uma densidade de probabilidade. Comprove e desenhe a função.

a) $f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\mu|}$, $x \epsilon \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \alpha\, \mathbb{I}_{[-1,3]}(x)$.

c) $f(x) = \beta e^{-x^2/2}, x \epsilon \mathbb{R}$.

8. Para as densidades obtidas na questão anterior, encontre o ponto de simetria, se existir.

9. Seja X uma v.a. com a distribuição a seguir

X	0	1	2
P(x)	1/2	1/4	1/4

Calcule E(X). Considere a v.a. $(X-a)^2$, e calcule $E(X-a)^2$ para a=0, ¼, ½, ¾, 1. Obtenha o gráfico de $E(X-a)^2=g(a)$. Para qual valor de a, g(a) é mínimo?

12. O tempo T, em minutos, necessário para um operário processar certa peça, é uma v.a. com a seguinte distribuição de probabilidade:

T	2	3	4	5	6	7
p	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

a) Calcule o tempo médio de processamento.

Assuma que para cada peça processada, o operário ganha um fixo de 2,00 u.m. (unidade monetária), mas se ele processa a peça em menos de 6 minutos, ganha 0,50 u.m. por cada minuto poupado. Por exemplo, se ele processa a peça em 4 minutos, recebe a quantia adicional de 1,00 u.m.

b) Encontre a distribuição, a média e a variância da v.a G: quantia em u.m. ganha por peça.

13. Suponha que um mecanismo eletrônico tenha um tempo de vida X (em unidades de 1.000 horas) que é considerado uma v.a. contínua com f.d.p.

$$f(x) = e^{-x}\ ,\ x > 0.$$

a) Suponha que o custo de fabricação de um item seja 2,00 u.m. e o preço de venda seja 5,00 u.m. O fabricante garante total devolução se x ≤ 0,9. Qual o lucro esperado por item? (R: 0.033)

b) Comprove que os momentos de X obedecem à seguinte fórmula:

$$EX^k = \frac{k!}{\lambda^k}\ , k = 1,2, \ldots$$

c) Qual a variância de X?

14. Seja X uma v.a. qualquer. É valida a igualdade $E(1/X) = 1/EX$? Justifique.

15. A funçaõ de distribuição de X é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{1}{18}(x^2 + x - 2), & 1 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$

Encontre EX.