UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

EXAME DE PROBABILIDADE A (CE084)

Prof. Benito Olivares Aguilera 11 de agosto de 2021

Escreva em sua prova os valores a serem utilizados de:
$\boldsymbol{a}$ = ________, $\boldsymbol{b}$ = ________ e $\boldsymbol{c}$ = ________.

1. (30 pts.) Responda, de forma clara e completa, as seguintes questões:

a) Qual o papel de uma sigma-álgebra para o cálculo de probabilidades?

b) Um evento A pode ser independente dele mesmo? Prove ou justifique formalmente.

c) Sejam A, B e C eventos do mesmo espaço de probabilidade. Prove formalmente que
$$P[(A \cup B)/C] = P(A/C) + P(B/C), \text{ se } A \cap B = \emptyset.$$

d) Cinco pontos são escolhidos, independentemente e ao acaso, do intervalo $[0,1]$. Seja X o número de pontos que pertencem ao intervalo $[0, \boldsymbol{c}/100]$. Qual a distribuição de X?

e) Se $X_n \xrightarrow{D} X$, encontre o limite em distribuição de $\boldsymbol{a}X_n + \boldsymbol{b}$, justificando <u>formalmente</u> seus cálculos.

2. (30 pts.) Seja $X \sim U(-\boldsymbol{b}, b)$.

a) Mostre que a função característica de X pode ser escrita como
$$\varphi_X(t) = \frac{sen\,(\boldsymbol{b}t)}{\boldsymbol{b}t}.$$

b) Essa função característica viola a propriedade $\varphi_X(0) = 1$? Explique.

c) Defina $Y = \alpha X + \beta$. Encontre condições sobre α e β de forma que $Y \sim U(0,1)$.

3. (40 pts.) Seja $X \sim U(0,1)$. Defina $Y = \sqrt{X + \boldsymbol{a}}$.

a) Faça o gráfico da função distribuição e da função densidade de Y.

b) Seja $Y_1, Y_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição de Y. Encontre o limite em probabilidade de
$$\bar{Y}_n = \frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{n}.$$

c) Seja $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição de X. Construa um Teorema Central do Limite específico para essa sequência.

DURAÇÃO DA AVALIAÇÃO: 2 ¼ HORAS.