UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

GABARITO SEGUNDA AVALIAÇÃO DE PROBABILIDADES A (CE084)

Prof. Benito Olivares Aguilera 07 de julho de 2021

Primeiro, escreva em sua prova os valores a serem utilizados de:

a = ________, ***b*** = ________ e ***c*** = ________.

1. (35 pts.) **Objetivo:** Avaliar a relação entre modelos de probabilidade.

Um novo tratamento para certa indica uma proporção de cura de ***c*** %. Dentre os pacientes que têm esta doença, sorteamos 15 pacientes que serão submetidos ao tratamento.

a) Calcule a probabilidade exata de todos os pacientes serem curados e a probabilidade de pelo menos dez pacientes não serem curados.

SOL: Vamos supor que os indivíduos submetidos ao tratamento são (ou não) curados independentemente uns dos outros com probabilidade de cura constante e igual a $c/100$. Definindo X: número de pacientes curados dentre os 15 escolhidos, temos que X terá distribuição Binomial com parâmetros $n = 15$ e $p = c/100$.

A probabilidade de todos os 15 serem curados é

$$P(X = 15) = \binom{15}{15}\left(\frac{c}{100}\right)^{15}\left(1-\frac{c}{100}\right)^{15-15} = \left(\frac{c}{100}\right)^{15}$$

Por exemplo, suponhamos que c % for 75%, ou seja $p = 0.75$, então temos que $P(X = 15) = (0.75)^{15} = 0.0133$.

Agora notemos que os eventos "pelo menos 10 **não curados**" e "no máximo 5 **curados**" são equivalentes. Logo,

$$P(X \le 5) = \sum_{k=0}^{5} P(X = k) = \sum_{k=0}^{5}\binom{15}{k}\left(\frac{c}{100}\right)^{k}\left(1-\frac{c}{100}\right)^{15-k}.$$

Por exemplo, se $p = 0.75$,

$$P(X \le 5) = \sum_{k=0}^{5} P(X = k) = \sum_{k=0}^{5}\binom{15}{k}(0.75)^{k}(0.25)^{15-k} = 0.00079$$

b) Calcule o item a) usando uma aproximação de Poisson.

SOL: Seja $Y \sim Poisson(\lambda)$, sendo $\lambda = np = 15 \times (c/100)$.

$$\mathrm{P(X = 15) \approx P(Y = 15)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\cdot\lambda^{15}}{15!}.$$

Por exemplo, se $p = c/100 = 0.75$, então $\lambda = 11.25$ e nesse caso

$\mathrm{P(X = 15) \approx P(Y = 15) = 0.0582.}$

Também,

$P(X \leq 5) \approx P(Y \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} P(Y = k) = \sum_{k=0}^{5} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k!}} = 0.0322.$

OBS: Não é conveniente aqui usar complementar, pois para calcular $P(X > 5)$ teríamos de usar uma série, pois uma v.a. Poisson assume infinitos valores.

c) Calcule o item a) usando uma aproximação Normal.

SOL: Seja $V \sim N(\mu, \sigma^2)$, sendo $\mu = np = 15 \times (c/100)$ e $\sigma^2 = np(1 - p) = 15 \times (c/100)\left(1 - \frac{c}{100}\right).$

$\mathrm{P(X = 15) \approx P(14.5 < V < 15.5) = P}\left(\frac{14.5 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{15.5 - \mu}{\sigma}\right).$

Por exemplo, se $p = c/100 = 0.75$, então $\mu = 11.25$ e $\sigma = \sqrt{2.8125} = 1.677.$

$\mathrm{P(X = 15) \approx P(14.5 < V < 15.5) = P(}\ 1.93 \leq Z \leq 2.53) = 0.0211.$

Também,

$$P(X \leq 5) \approx P(Y \leq 5.5) = P(Z \leq -3.42) = 0.00031.$$

O resumo dos valores obtidos para $p = 0.75$ pode ser visto no quadro a seguir:

Evento	**Probabilidade**	**Valor Exato (Binomial)**	**Aprox. Poisson**	**Aprox. Normal**
Todos curados	$\mathrm{P(X = 15)}$	0.0133	0.0582	0.0211
Pelo menos 10 não curados	$P(X \leq 5)$	0.00079	0.0322	0.00031

2. (30 pts.) **Objetivo:** Avaliar a utilização de um modelo normal de probabilidade.

Seja $X \sim N(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$.

a) Encontre os valores de θ tal que $P(|X - \boldsymbol{b}| < \theta) = \boldsymbol{a}/10$.

SOL:

$$P(|X-b|<\theta) = a/10 \Longrightarrow P(-\theta < X - b < \theta) = P\left(\frac{-\theta}{\sqrt{a}} < Z < \frac{\theta}{\sqrt{a}}\right) = \frac{a}{10}.$$

Como a densidade de Z é simétrica, podemos calcula essa probabilidade como:

$$P(|X-b|<\theta) = 1 - 2P\left(Z < \frac{-\theta}{\sqrt{a}}\right) = \frac{a}{10}$$

$$\Longrightarrow 2P\left(Z < \frac{-\theta}{\sqrt{a}}\right) = 1 - \frac{a}{10}$$

$$\Longrightarrow P\left(Z < \frac{-\theta}{\sqrt{a}}\right) = \frac{10-a}{20}.$$

Da tabela Normal podemos encontrar o quantil z que deixa uma área de $(10-a)/20$ à esquerda e logo fazemos:

$$z = \frac{-\theta}{\sqrt{a}} \Longrightarrow \theta = -z\sqrt{a}.$$

Por exemplo, suponha que $a = 3$ e $b = 6$. Então,

$$P(|X-6|<\theta) = P(-\theta < X - 6 < \theta) = P\left(\frac{-\theta}{\sqrt{3}} < Z < \frac{\theta}{\sqrt{3}}\right) = 0.3.$$

Assim, temos de procurar na tabela Normal valores simétricos em relação a zero que deixem uma área contida de 0.3 ou, equivalentemente, por simetria, a área contida entre 0 e esse ponto deve ser de 0.15. Ainda, por complementação teríamos que a área à esquerda desse ponto deve ser de $0.5 - 0.15 = 0.35$. Vemos que tal ponto seria aproximadamente -0.38. Temos assim que:

$$\frac{-\theta}{\sqrt{3}} = -0.38 \Longrightarrow \theta = 0.658.$$

b) Encontre a distribuição da variável aleatória $Y = \boldsymbol{a}X - \boldsymbol{b}$.

SOL: <u>1ª Forma</u>: A FGM de X é da forma $M_X(t) = e^{bt + at^2/2}$.

Por propriedade da FGM,

$$M_Y(t) = M_{aX-b}(t) = e^{-bt}M_X(at) = e^{-bt} \cdot e^{b(at)+a(at)^2/2} = e^{(a-1)bt + a^3t^2/2}.$$

Da Tabela, podemos identificar essa FGM resultante como correspondente a uma distribuição $N\big((a-1)b, a^3\big)$.

2ª Forma: Deve ser justificado que já foi provado em aulas que a soma ou a combinação linear de Normais é também Normal; logo podemos afirmar que $Y = aX - b \sim N(\mu_Y, \sigma_Y^2)$.

Aqui, $\mu_Y = EY = E(aX - b) = aEX - b = ab - b = (a-1)b$,

$$\sigma_Y^2 = varY = var(aX - b) = a^2 varX = a^2 \cdot a = a^3.$$

Portanto, $Y = aX - b \sim N\left((a-1)b, a^3\right)$.

c) Baseado nos seus valores para os parâmetros, dê uma aplicação do que poderia representar seu modelo para X neste caso.

SOL: Escolher uma magnitude que represente uma variável contínua e que sabidamente tenha um comportamento Normal, isto é, poucos indivíduos com valores muito pequenos, poucos indivíduos com valores muito grandes, e a maioria dos indivíduos numa faixa intermediária de valores. Alguns exemplos seriam altura, peso, pressão arterial, QI, etc. Deve ser explicado por qué a média b e a variância a são razoáveis nesse caso.

3. (35 pts.) **Objetivo:** Avaliar o conceito de distribuição de uma função de variável aleatória.

Seja $X \sim U(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$, se $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$, ou $X \sim U(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$, se $\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}$.
Encontre a distribuição de $Y = X - \boldsymbol{a}$ utilizando:

a) o método da função distribuição acumulada.

SOL: Se $X \sim U(a, b) \Longrightarrow f_X(x) = \frac{1}{b-a}, a < x < b$ e $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}, a < x < b$.

Agora, notar que se $a < X < b$ então $0 < Y < b - a$. A FDA de Y será:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X - a \leq y) = P(X \leq y + a) = F_X(y + a)$$

$$= \frac{(y + a) - a}{b - a} = \frac{y}{b - a}, 0 < y < b - a.$$

Podemos identificar essa função como sendo a FDA de uma distribuição Uniforme em $(0, b - a)$, para $a \neq b$.

Em resumo, se $X \sim U(a, b) \Longrightarrow Y = X - a \sim U(0, b - a)$.

b) o método da FGM.

SOL: Se $X \sim U(a, b) \Longrightarrow M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)}$.

Por propriedade da FGM,

$$M_Y(t) = M_{X-a}(t) = e^{-at} M_X(t) = e^{-at} \cdot \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b - a)} = \frac{e^{(b-a)t} - 1}{t(b - a)}.$$

Da Tabela podemos concluir que essa é a FGM de uma distribuição $U(0, b - a)$.