UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

LISTA 2 - PROBABILIDADE B (CE087)

Prof. Benito Olivares Aguilera 2021-2

DISTRIBUIÇÃO E ESPERANÇA CONDICIONAL.

1. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & 0 \le y \le x \le 1 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

a) Calcule $f_{Y|X=x}(y)$. Reconhece essa distribuição?

b) Quanto vale $E(Y/X=x)$?

c) Qual a distribuição de $E(Y/X)$?

d) Calcule a densidade e a esperança de X dado Y.

2. Sejam X e Y variáveis aleatórias com densidade conjunta

$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda y}, 0 \le x \le y \\ 0, c.c. \end{cases}$$

a) Calcule $f(y\,|\,x)$. Reconhece essa distribuição?
b) Quanto vale $E(Y/X=x)$?
c) Qual a distribuição de Y?
d) Calcule $f(x\,|\,y)$. Reconhece essa distribuição?
e) Quanto vale $E(X/Y=y)$?

3. Denote por $p(x,y)$ a probabilidade $P(X=x, Y=y)$. Dadas as probabilidades

$p(0,10) = p(0,20) = 2/18$; $p(1,10) = p(1,30) = 3/18$; $p(1,20) = p(2,30) = 4/18$.

a) Calcule a distribuição de Y dada X.
b) Calcule $P(Y>10\,|\,X=1)$.

4. Seja $(X,Y) \sim U(R)$, sendo $R = \{(x,y)/\ 0 < x < y < 1\}$.
?– Calcule e identifique as distribuições condicionais de $X|Y$ e $Y|X$.

5. Suponha que $X \sim N(\mu,1)$ e $Y/X=x \sim N(x/2, \sigma^2)$.

a) Qual a distribuição de $Z = E(Y/X)$?
b) Quanto vale $E(Y)$?

6. Considere o seguinte experimento de duas etapas: primeiro, escolhe-se um ponto *x* de acordo com a distribuição uniforme em (0,1); depois, escolhe-se um ponto y de acordo com a distribuição uniforme em (-*x*, *x*). Se o vetor aleatório (*X*,*Y*) representa o resultado do experimento,

a) Qual será a densidade conjunta de *X* e *Y*?
b) A densidade marginal de *Y*?
c) A densidade condicional de *X* dada *Y*?

7. Sejam *X* e *Y* variáveis aleatórias independentes com distribuição $X \sim N(0,1)$ e $Y \sim N(1,4)$. Qual a distribuição do vetor (*X*,*Y*)? E a distribuição condicional de $2X/\ Y=y$?

8. Suponha que o número de passas num bolo inglês tenha distribuição de Poisson de parâmetro 60. Um jogador compra um bolo tira todas as passas uma por uma e reparte as passas entre ele e você da seguinte maneira: depois da extração de cada passa ele joga uma moeda equilibrada, dando a passa a você se der cara, comendo ele mesmo a passa se der coroa. Qual a distribuição do número de passas que você recebe? A esperança?

9. Sejam *X* e *Y* independente tais que $X \sim Bin(m,p)$ e $Y \sim Bin(n,p)$.
Obtenha a esperança condicional de *X* dada $X+Y$.

10. Um inseto deposita um grande número de ovos, cuja probabilidade individual de sobrevivência é *p*. Assuma que o número de ovos depositados tem uma distribuição Poisson (λ). Em média, quantos ovos sobrevivem?

11. Seleciona-se ao acaso (i.e conforme à distribuição uniforme) um número entre 0 e1. Se *x* é o número selecionado, lança-se n vezes (independentemente) uma moeda com probabilidade "*x*" de dar cara. Seja *Y* a variável aleatória que representa o número de caras obtidas.
Calcule a esperança e a variância de *Y*.

12. Um ponto *Y* é escolhido de acordo com o modelo Uniforme em $[0,1]$. A seguir, um outro ponto *X* é escolhido, também segundo o modelo Uniforme no intervalo $[0,Y]$. Encontrar *EX*.

13. Sejam *X* e *Y* variáveis aleatórias com segundos momentos finitos, e seja *Z* uma outra variável aleatória. Demonstrar a seguinte fórmula

$$Cov(X,Y)=E\{Cov(X,Y)/Z\}+Cov(E(X/Z),E(Y/Z))$$

onde, por definição, $Cov(X,Y)/Z) =E(XY/Z)-E(X/Z)E(Y/Z)$.

14. Sejam *X* e *Y* integráveis. Prove que *X* e $Y - E(Y/X)$ são não correlacionadas.

15. Sejam X e Y variáveis aleatórias tais que Y tem esperança finita.
Demonstre que $VarY=E[Var(Y/X)]+Var[E(Y/X)]$, i.e., a variância de Y é a soma da esperança da variância condicional e a variância da esperança condicional.

16. Sejam X_1, X_2 variáveis aleatórias independentes, cada uma com distribuição geométrica definida por

$$P(X_i = n) = p(1-p)^n, n = 0,1,2 \dots ; i = 1,2.$$

.

a) Calcule $P(X_1 = X_2)$ e $P(X_1 < X_2)$.

b) Determine a esperança condicional de X_1 dada X_1+X_2 .

17. A densidade conjunta de X e Y é dada por $f(x,y) = 4e^{-2y}, 0 < x < y, y > 0$.
Obtenha $E(2X/Y)$, $E(X^2/Y)$ e $E[E(Y/Y)]$.

18. Sejam X e Y va's com densidade conjunta $f(x,y) = 8xy,\ 0 < x < y < 1$.
Obtenha a esperança e variância de X/Y.

19. Seja $Y \sim N(0,4)$ e seja X uma variável aleatória tal que

$$E(X|Y) = aY + b,\ \text{a, b} \in \mathbb{R}.$$

Encontre as constantes a e b de forma que $E(X) = 1$ e $E(XY) = 2$.

20. Se $Y \sim Bernoulli(p)$, $E(X|Y = 0) = 1$ e $E(X|Y = 1) = 2$, obtenha $E(X)$.

21. Mostre que se $X_1, X_2, \dots, X_n$ são variáveis aleatórias iid $\exp(\lambda_i)$ e $Y = \min X_i$, então $Y \sim \exp(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

22. Sejam Y_1 e Y_n o mínimo e o máximo de uma amostra aleatória $X_1, X_2, \dots, X_n$ extraída de uma distribuição $U(a,b)$.

a) Mostre que a densidade conjunta de Y_1 e Y_n para $n = 3$ é dada por

$$f(y_1, y_n) = \frac{6}{(b-a)^2}(y_n - y_1), a < y_1 < y_n < b\ .$$

b) Estenda o resultado para n geral.

c) Mostre que para o caso de $U(0,1)$ tem-se que

$$cov(Y_1, Y_n) = \frac{1}{(n+1)^2(n+2)}.$$