Estatística Inferencial
Verossimilhança e estimação pontual

Componentes dos modelos probabilísticos

1. Para cada uma das distribuições de probabilidade abaixo escreva a função de probabilidade ou densidade probabilidade, identifique o suporte, a esperança, a variância, os parâmetros e o espaço paramétrico.
   a) Distribuição Poisson de parâmetro λ.
   b) Distribuição binomial de parâmetros n e p.
   c) Distribuição exponencial de parâmetro λ.
   d) Distribuição normal de parâmetros μ e σ^2.
   e) Distribuição gama de parâmetros α e β.
   f) Distribuição uniforme de parâmetros a e b.
   g) Distribuição binomial negativa de parâmetros μ e ϕ.
   h) Distribuição log-normal de parâmetros μ e σ^2.
   i) Distribuição inversa Gaussiana de parâmetros μ e σ^2.
   j) Distribuição Tweeedie de parâmetros μ, ϕ e p.

Especificação de modelos

2. Para cada uma das situações abaixo proponha uma distribuição de probabilidade adequada e justifique sua escolha baseado em aspectos do fenômeno aleatório e características da distribuição. Descreva quais aspectos da inferência estatística podem estar associados com cada uma das situações mencionadas.
   a) Itens em uma linha de produção são classificados quanto a sua adequação aos padrões de produção. Apenas as condições conforme ou não-conforme são possíveis.
   b) Uma pesquisa de mercado visa identificar o potencial de um novo negócio em uma cidade. Para isto um questionário com perguntas em uma escala likert de cinco níveis foi construído e aplicado a uma amostra de tamanho n da população de interesse.
   c) Número de carros que chegam a um caixa automático de um banco durante um período de uma hora nas manhãs de fins de semana.
   d) Ocorrência de defeitos relevantes em uma rodovia um mês após sua construção.
   e) Medidas antropométricas (peso e altura) são tomadas em crianças do nono ano de escolas públicas brasileiras. Deseja-se caracterizar tais medidas para auxiliar na construção de equipamentos escolares de tamanho adequado.
   f) Deseja-se estudar a distribuição do número de horas que um equipamento eletrônico funciona antes de apresentar defeitos com o objetivo de estabelecer um prazo razoável de garantia.
   g) Número de quilômetros rodados que um novo pneu é capaz de rodar antes de apresentar defeitos.

Propriedades de estimadores

3. Seja $Y_i \sim B(n, p)$ para $i = 1, \ldots, n$ iid. Considere o estimador $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ para p.
   a) Mostre que $\hat{p}$ é não-viciado para p.
   b) Encontre a variância de $\hat{p}$.
   c) Encontre o erro quadrático médio de $\hat{p}$.

d) Mostre que $\hat{p}$ é médio quadrático consistente.
e) Mostre que $\hat{p}$ é consistente em probabilidade.

4. Seja $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $i = 1, \ldots, n$ iid. Considere o estimador $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ para μ.

    a) Mostre que $\hat{\mu}$ é não-viciado para μ.
    b) Encontre a variância de $\hat{\mu}$.
    c) Encontre o erro quadrático médio de $\hat{\mu}$.
    d) Mostre que $\hat{\mu}$ é médio quadrático consistente.
    e) Mostre que $\hat{\mu}$ é consistente em probabilidade.

5. Seja $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $i = 1, \ldots, n$ iid. Considere o estimador $\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu)^2$ para μ. Note que μ é fixo e assumido como conhecido.

    a) $\hat{\sigma}^2$ é viciado para σ^2?
    b) Encontre a variância de $\hat{\sigma}$.
    c) Encontre o erro quadrático médio de $\hat{\sigma}^2$.
    d) Mostre que $\hat{\sigma}^2$ é médio quadrático consistente.
    e) Mostre que $\hat{\sigma}^2$ é consistente em probabilidade.

6. Seja $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ para $i = 1, \ldots, n$ iid. Considere o estimador $\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\mu})^2$ para σ^2.

    a) Mostre que $\hat{\sigma}^2$ é não-viciado para σ^2.
    b) Encontre a variância de $\hat{\sigma}^2$.
    c) Encontre o erro quadrático médio de $\hat{\sigma}^2$.
    d) Mostre que $\hat{\sigma}^2$ é médio quadrático consistente.
    e) Mostre que $\hat{\sigma}^2$ é consistente em probabilidade.

7. Sejam $Y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, para $i = 1, \ldots, n$.

    a) Mostre que o estimador $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ é não viciado para μ.
    b) Mostre que o estimador $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\mu})^2$ é viciado para σ^2 e determine o seu viés.
    c) Mostre que o estimador $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\mu})^2$ é não viciado para σ^2.
    d) Compare os estimadores para σ^2 em b) e c) em termos assintóticos. O que você pode concluir?

8. Mostre que a média das duas primeiras observações de um conjunto de n observações independentes é não-viciado mas não é consistente, para estimar a média populacional.

9. Determine a condição dos coeficientes a_i, de tal forma que a combinação linear $\sum a_i Y_i$ seja não viciada para $\mathrm{E}(Y)$.

10. Mostre que se T é uma estimativa não viciada para θ, então $aT + b$ é uma estimativa não-viciada de $a\theta + b$. E T^2 é uma estimativa não-viciada para θ^2? Justifique.

11. Seja Y o número de sucessos em n ensaios Bernoulli com parâmetro p. Determine o erro quadrático médio na estimação de p por cada um dos estimadores $T_1 = Y/n$ e $T_2 = (Y + 1)/(n + 2)$. Um estimador é melhor do que outro?

Verossimilhança e estimação pontual

12. Para cada uma das distribuições de probabilidade abaixo escreva a função de verossimilhança e log-verossimilhança.
    a) Distribuição Poisson de parâmetro λ.
    b) Distribuição binomial de parâmetros n e p.
    c) Distribuição exponencial de parâmetro λ.
    d) Distribuição normal de parâmetros μ e σ^2.
    e) Distribuição gama de parâmetros α e β.
    f) Distribuição uniforme de parâmetros a e b.
    g) Distribuição binomial negativa de parâmetros μ e ϕ.
    h) Distribuição log-normal de parâmetros μ e σ^2.

- i) Distribuição inversa Gaussiana de parâmetros μ e σ^2.
- j) Distribuição Tweeedie de parâmetros μ, ϕ e p.

13. Para cada uma das situações abaixo encontre o estimador de máxima verossimilhança.
    - a) Distribuição Poisson de parâmetro λ.
    - b) Distribuição binomial de parâmetros n(conhecido) e p.
    - c) Distribuição exponencial de parâmetro λ.
    - d) Distribuição normal de parâmetros μ e σ^2(conhecido).
    - e) Distribuição normal de parâmetros μ(conhecido) e σ^2.
    - f) Distribuição gama de parâmetros α(conhecido) e β.
    - g) Distribuição gama de parâmetros α e β(conhecido).
    - h) Distribuição gama de parâmetros α e β(conhecido).
    - i) Distribuição binomial negativa de parâmetros μ e ϕ(conhecido).
    - j) Distribuição log-normal de parâmetros μ e σ^2.

No caso de distribuição com mais de um parâmetro espere até a semana 9