CE225 - Modelos Lineares Generalizados

Cesar Augusto Taconeli

30 de outubro, 2022

Aula 4 - Família exponencial de distribuições

Componente aleatório de um modelo linear generalizado

- O componente aleatório de um modelo linear generalizado consiste em uma variável aleatória y, por meio de um conjunto de observações independentes $y_1, y_2, ..., y_n$, com distribuição pertencente à *família exponencial de diatribuições*.

Componente aleatório de um modelo linear generalizado

- O componente aleatório de um modelo linear generalizado consiste em uma variável aleatória y, por meio de um conjunto de observações independentes $y_1, y_2, ..., y_n$, com distribuição pertencente à *família exponencial de diatribuições*.

- Mais especificamente, assumimos que a função (densidade) de probabilidades de y possa ser expressa na forma:

$$f(y_i;\theta_i,\phi) = exp\left\{\frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{\phi} + c(y_i;\phi)\right\},$$

sendo usualmente chamada de *forma canônica da família exponencial*, ou *família exponencial de dispersão*.

Componente aleatório de um modelo linear generalizado

- O parâmetro θ_i é chamado *parâmetro natural* (ou *parâmetro canônico*) e ϕ o *parâmetro de dispersão* da distribuição.

Componente aleatório de um modelo linear generalizado

- O parâmetro θ_i é chamado *parâmetro natural* (ou *parâmetro canônico*) e ϕ o *parâmetro de dispersão* da distribuição.

- A família exponencial contempla diversas distribuições uni e bi-paramétricas, por exemplo as distribuições binomial, poisson, normal, gama e normal inversa.

Algumas propriedades da família exponencial de dispersão

- Para deduzir a esperança e a variância de uma variável aleatória com distribuição pertencente à família exponencial, recorremos a alguns resultados da teoria da verossimilhança.

Algumas propriedades da família exponencial de dispersão

- Para deduzir a esperança e a variância de uma variável aleatória com distribuição pertencente à família exponencial, recorremos a alguns resultados da teoria da verossimilhança.

- Seja y uma única observação de $f(y;\theta,\phi)$. Sob condições de regularidade, atendidas pela família exponencial de dispersão, valem os seguintes resultados:

$$E\left\{\frac{\partial \log f\left(y;\theta,\phi\right)}{\partial\theta}\right\} = 0; \tag{1}$$

$$E\left[\left\{\frac{\partial \log f\left(y;\theta,\phi\right)}{\partial\theta}\right\}^2\right] = -E\left\{\frac{\partial^2 \log f\left(y;\theta,\phi\right)}{\partial\theta^2}\right\}. \tag{2}$$

Algumas propriedades da família exponencial de dispersão

- Usando os resultados (1) e (2), verifica-se que, para as distribuições pertencentes à família exponencial, tem-se $E(y_i)$ e $Var(y_i)$ dadas por:

$$E(y_i) = \mu_i = b'(\theta_i) = \frac{\partial b(\theta_i)}{\partial \theta_i}$$

Algumas propriedades da família exponencial de dispersão

- Usando os resultados (1) e (2), verifica-se que, para as distribuições pertencentes à família exponencial, tem-se $E(y_i)$ e $Var(y_i)$ dadas por:

$$E(y_i) = \mu_i = b'(\theta_i) = \frac{\partial b(\theta_i)}{\partial \theta_i}$$

e

$$Var(y_i) = \phi \times b''(\theta_i) = \phi \times \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_i}.$$

Algumas propriedades da família exponencial de dispersão

- Assim, a variância de y_i pode ser fatorada em dois componentes:

Algumas propriedades da família exponencial de dispersão

- Assim, a variância de y_i pode ser fatorada em dois componentes:
  - O primeiro (ϕ) está associado exclusivamente à dispersão de y_i (não à sua média);

Algumas propriedades da família exponencial de dispersão

- Assim, a variância de y_i pode ser fatorada em dois componentes:

  - O primeiro (ϕ) está associado exclusivamente à dispersão de y_i (não à sua média);

  - O segundo, usualmente denotado por $V(\mu_i) = b''(\theta_i)$ e chamado *função de variância*, é função da média da distribuição, e exprime a relação variância-média de y.

Algumas propriedades da família exponencial de dispersão

- Assim, a variância de y_i pode ser fatorada em dois componentes:
  - O primeiro (ϕ) está associado exclusivamente à dispersão de y_i (não à sua média);
  - O segundo, usualmente denotado por $V(\mu_i) = b''(\theta_i)$ e chamado *função de variância*, é função da média da distribuição, e exprime a relação variância-média de y.
- Cada distribuição pertencente à família exponencial tem sua particular função de variância e vice-versa (teorema da unicidade das funções de variância).

Algumas propriedades da família exponencial de dispersão

- A distribuição conjunta de $y_1, y_2, ..., y_n$ é dada por:

$$f(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\theta}, \phi) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \theta_i, \phi) = \exp\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\theta_i - \sum_{i=1}^{n} b(\theta_i)}{\phi}\right\}$$
$$\times \exp\sum_{i=1}^{n} c(y_i; \phi),$$

de maneira que, pelo teorema da fatoração de Neyman-Fisher, tem-se que $\sum_{i=1}^{n} y_i$ é uma estatística suficiente para θ_i se ϕ for conhecido.

Algumas propriedades da família exponencial de dispersão

- A distribuição conjunta de $y_1, y_2, ..., y_n$ é dada por:

$$f(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{\theta}, \phi) = \prod_{i=1}^{n} f(y_i; \theta_i, \phi) = \exp\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n} y_i\theta_i - \sum_{i=1}^{n} b(\theta_i)}{\phi}\right\}$$
$$\times \exp\sum_{i=1}^{n} c(y_i; \phi),$$

de maneira que, pelo teorema da fatoração de Neyman-Fisher, tem-se que $\sum_{i=1}^{n} y_i$ é uma estatística suficiente para θ_i se ϕ for conhecido.

- Na sequência são ilustradas algumas distribuições pertencentes à família exponencial.

Distribuição binomial

- Uma variável aleatória x_i tem distribuição binomial se sua função de probabilidades é dada por:

$$f(x_i; n_i, \pi_i) = \binom{n_i}{x_i} \pi_i^{x_i} (1 - \pi_i)^{n_i - x_i}; \quad x_i = 0, 1, 2, ..., n_i; \quad 0 < \pi_i < 1,$$

em que x_i corresponde à contagem de *sucessos* em n_i observações independentes de um experimento binário.

Distribuição binomial

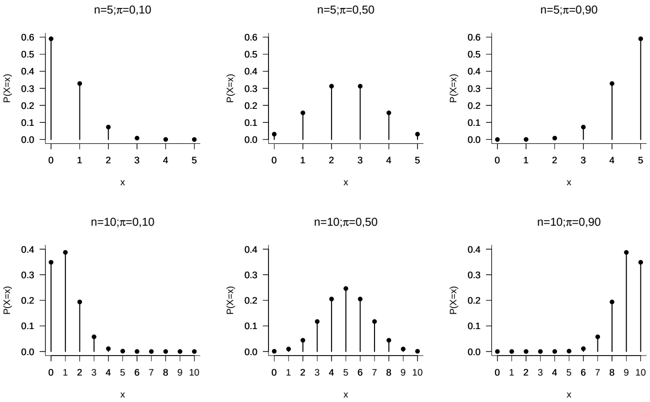

Figura 1: Ilustração - distribuição binomial

Distribuição binomial

- Podemos expressar a distribuição binomial, de maneira alternativa, pela variável $y_i = \frac{x_i}{n_i}$, a fração amostral de sucessos, com função de probabilidades:

$$f(y_i; n_i, \pi_i) = \binom{n_i}{n_i y_i} \pi_i^{n_i y_i} (1-\pi_i)^{n_i - (n_i y_i)}; y_i = 0, \frac{1}{n_i}, \frac{2}{n_i}, ..., 1; 0 < \pi_i < 1.$$

Distribuição binomial (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$, $b(\theta_i) = log(1 + e^{\theta_i})$;

Distribuição binomial (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$, $b(\theta_i) = log(1 + e^{\theta_i})$;
  - $\phi = \frac{1}{n_i}$, $c(y_i, \phi) = \binom{n_i}{n_i y_i}$;

Distribuição binomial (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$, $b(\theta_i) = log(1 + e^{\theta_i})$;
  - $\phi = \frac{1}{n_i}$, $c(y_i, \phi) = \binom{n_i}{n_i y_i}$;
  - $E(y_i) = \mu_i = b'(\theta_i) = \pi_i$;

Distribuição binomial (gabarito)

- Neste caso, temos que:
    - $\theta_i = log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$, $b(\theta_i) = log(1 + e^{\theta_i})$;
    - $\phi = \frac{1}{n_i}$, $c(y_i, \phi) = \binom{n_i}{n_i y_i}$;
    - $E(y_i) = \mu_i = b'(\theta_i) = \pi_i$;
    - $V(\mu_i) = b''(\theta_i) = \mu_i(1 - \mu_i)$;

Distribuição binomial (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$, $b(\theta_i) = log(1+e^{\theta_i})$;
  - $\phi = \frac{1}{n_i}$, $c(y_i, \phi) = \binom{n_i}{n_i y_i}$;
  - $E(y_i) = \mu_i = b'(\theta_i) = \pi_i$;
  - $V(\mu_i) = b''(\theta_i) = \mu_i(1-\mu_i)$;
  - $Var(y_i) = \frac{\mu_i(1-\mu_i)}{n_i}$.

Distribuição binomial

- Algumas notas sobre a distribuição binomial:

Distribuição binomial

- Algumas notas sobre a distribuição binomial:
  - A distribuição binomial é usada, principalmente, na modelagem de dados binários ou de proporções discretas;

Distribuição binomial

- Algumas notas sobre a distribuição binomial:
    - A distribuição binomial é usada, principalmente, na modelagem de dados binários ou de proporções discretas;
    - É bem aproximada pela distribuição *Normal*$(\pi, \frac{\pi(1-\pi)}{m})$ quando $m\pi > 0.5$ e $0.1 \leq \pi \leq 0.9$ ou $m\pi > 25$, para qualquer valor de π.

Distribuição Poisson

- Uma variável aleatória discreta y_i tem distribuição de Poisson se sua função de probabilidades é dada por:

$$f(y_i; \mu_i) = \frac{e^{-\mu_i} \mu_i^{y_i}}{y_i!},$$

com $y_i = 0, 1, 2, ...; \ \mu_i > 0.$

Distribuição Poisson (gabarito)

- Neste caso, temos que:

Distribuição Poisson (gabarito)

- Neste caso, temos que:
    - $\theta_i = log\left(\mu_i\right), b(\theta_i) = e^{\theta_i};$

Distribuição Poisson (gabarito)

- Neste caso, temos que:

  - $\theta_i = log\left(\mu_i\right), b(\theta_i) = e^{\theta_i};$

  - $\phi = 1,\ c(y_i, \phi) = -log(y_i!);$

Distribuição Poisson (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = log\left(\mu_i\right), b(\theta_i) = e^{\theta_i};$
  - $\phi = 1,\ c(y_i, \phi) = -log(y_i!);$
  - $E(y_i) = b'(\theta_i) = \mu_i;$

Distribuição Poisson (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = log\left(\mu_i\right), b(\theta_i) = e^{\theta_i};$
  - $\phi = 1,\ c(y_i, \phi) = -log(y_i!);$
  - $E(y_i) = b'(\theta_i) = \mu_i;$
  - $V(\mu_i) = b''(\theta_i) = \mu_i;$

Distribuição Poisson (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = log\left(\mu_i\right), b(\theta_i) = e^{\theta_i}$;
  - $\phi = 1,\ c(y_i, \phi) = -log(y_i!)$;
  - $E(y_i) = b'(\theta_i) = \mu_i$;
  - $V(\mu_i) = b''(\theta_i) = \mu_i$;
  - $Var(y_i) = \phi V(\mu_i) = \mu_i$.

Distribuição Poisson

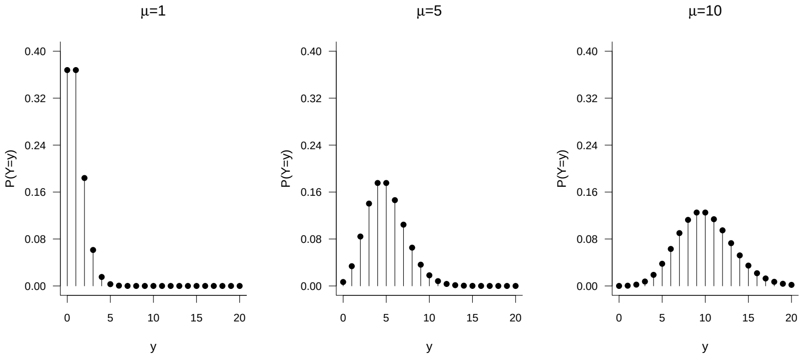

Figura 2: Ilustração - distribuição de Poisson

Distribuição Poisson

- Algumas notas sobre a distribuição de Poisson:

Distribuição Poisson

- Algumas notas sobre a distribuição de Poisson:

    - Se eventos ocorrem independente e aleatoriamente no tempo (ou espaço), com taxa média de ocorrência constante, a distribuição atribui probabilidades ao número de eventos por intervalo de tempo (ou região do espaço);

Distribuição Poisson

- Algumas notas sobre a distribuição de Poisson:
  - Se eventos ocorrem independente e aleatoriamente no tempo (ou espaço), com taxa média de ocorrência constante, a distribuição atribui probabilidades ao número de eventos por intervalo de tempo (ou região do espaço);
  - Proporciona, em geral, uma descrição satisfatória de dados cuja variância é proporcional à média;

Distribuição Poisson

- Algumas notas sobre a distribuição de Poisson:
  - Se eventos ocorrem independente e aleatoriamente no tempo (ou espaço), com taxa média de ocorrência constante, a distribuição atribui probabilidades ao número de eventos por intervalo de tempo (ou região do espaço);
  - Proporciona, em geral, uma descrição satisfatória de dados cuja variância é proporcional à média;
  - Surge como caso limite para a distribuição binomial quando $n \to \infty$ e $\pi \to 0$ (matendo fixo $\mu = n\pi$);

Distribuição Poisson

- Algumas notas sobre a distribuição de Poisson:
    - Se eventos ocorrem independente e aleatoriamente no tempo (ou espaço), com taxa média de ocorrência constante, a distribuição atribui probabilidades ao número de eventos por intervalo de tempo (ou região do espaço);
    - Proporciona, em geral, uma descrição satisfatória de dados cuja variância é proporcional à média;
    - Surge como caso limite para a distribuição binomial quando $n \to \infty$ e $\pi \to 0$ (matendo fixo $\mu = n\pi$);
    - É bem aproximada pela distribuição $Normal(\mu, \mu)$ para μ suficientemente grande.

Distribuição normal

- Uma variável aleatória contínua y_i tem distribuição normal se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(y_i;\mu_i,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(y_i-\mu_i)^2}{2\sigma^2}\right\},$$

com $-\infty < y_i < \infty;\ \ -\infty < \mu_i < \infty;\ \ \sigma > 0.$

Distribuição Normal (gabarito)

- Neste caso, temos que:

Distribuição Normal (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = \mu_i$, $b(\theta_i) = \frac{\theta_i^2}{2}$;

Distribuição Normal (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = \mu_i$, $b(\theta_i) = \frac{\theta_i^2}{2}$;
  - $\phi = \sigma^2$, $c(y_i, \phi) = -\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{\sigma^2} + log(2\pi\sigma^2)\right]$

Distribuição Normal (gabarito)

- Neste caso, temos que:

  - $\theta_i = \mu_i$, $b(\theta_i) = \frac{\theta_i^2}{2}$;
  - $\phi = \sigma^2$, $c(y_i, \phi) = -\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{\sigma^2} + log(2\pi\sigma^2)\right]$
  - $E(y_i) = b'(\theta_i) = \mu_i$;

Distribuição Normal (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = \mu_i$, $b(\theta_i) = \frac{\theta_i^2}{2}$;
  - $\phi = \sigma^2$, $c(y_i, \phi) = -\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{\sigma^2} + log(2\pi\sigma^2)\right]$
  - $E(y_i) = b'(\theta_i) = \mu_i$;
  - $V(\mu_i) = b''(\theta_i) = 1$;

Distribuição Normal (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = \mu_i$, $b(\theta_i) = \frac{\theta_i^2}{2}$;
  - $\phi = \sigma^2$, $c(y_i, \phi) = -\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{\sigma^2} + log(2\pi\sigma^2)\right]$
  - $E(y_i) = b'(\theta_i) = \mu_i$;
  - $V(\mu_i) = b''(\theta_i) = 1$;
  - $Var(y_i) = \phi V(\mu_i) = \sigma^2$.

Distribuição normal

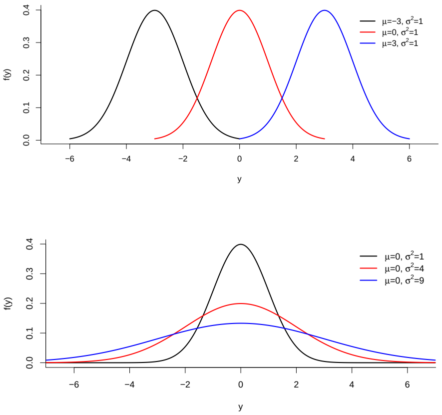

Figura 3: Ilustração - distribuição normal

Distribuição gama

- Uma variável aleatória contínua y_i tem distribuição gama se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(y_i;\mu_i,\nu) = \frac{\left(\frac{\nu}{\mu_i}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu)} y_i^{\nu-1} \exp\left\{-\frac{y_i \nu}{\mu_i}\right\},$$

com $y_i > 0$, $\mu_i > 0$, $\nu > 0$ e $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

Distribuição gama

- Uma variável aleatória contínua y_i tem distribuição gama se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(y_i;\mu_i,\nu) = \frac{\left(\frac{\nu}{\mu_i}\right)^{\nu}}{\Gamma(\nu)} y_i^{\nu-1} \exp\left\{-\frac{y_i\nu}{\mu_i}\right\},$$

com $y_i > 0$, $\mu_i > 0$, $\nu > 0$ e $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

- Uma das parametrizações alternativas da distribuição gama é a seguinte:

$$f(y;\alpha,\beta) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} exp\left\{-\beta y\right\},$$

tal que a equivalência das duas parametrizações decorre de $\mu = \frac{\alpha}{\beta}$ e $\nu = \alpha$.

Distribuição gama

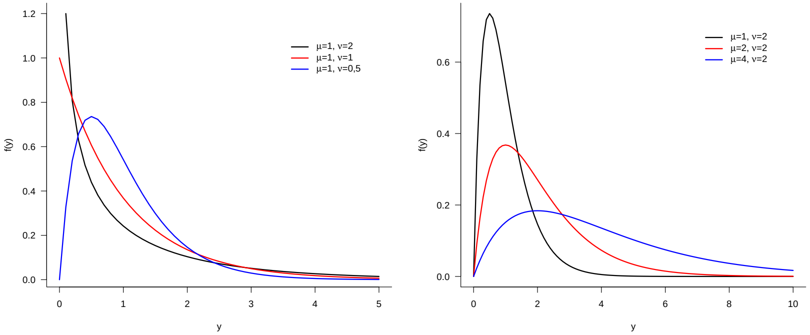

Figura 4: Ilustração - distribuição gama

Distribuição gama

- A distribuição gama é usada na análise de dados contínuos não negativos em que a variância aumenta conforme a média, particularmente no caso em que o coeficiente de variação é aproximadamente constante.

Distribuição gama (gabarito)

- Neste caso, temos que:

Distribuição gama (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = -\frac{1}{\mu_i}$, $b(\theta_i) = -log(-\theta_i)$;

Distribuição gama (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = -\frac{1}{\mu_i}$, $b(\theta_i) = -log(-\theta_i)$;
  - $\phi = \nu^{-1}$, $c(y_i, \phi) = \nu log(\nu y_i) - log(y_i) - log(\Gamma(\nu))$

Distribuição gama (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = -\frac{1}{\mu_i}$, $b(\theta_i) = -log(-\theta_i)$;
  - $\phi = \nu^{-1}$, $c(y_i, \phi) = \nu log(\nu y_i) - log(y_i) - log(\Gamma(\nu))$
  - $E(y_i) = b'(\theta_i) = \mu_i$;

Distribuição gama (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = -\frac{1}{\mu_i}$, $b(\theta_i) = -log(-\theta_i)$;
  - $\phi = \nu^{-1}$, $c(y_i, \phi) = \nu log(\nu y_i) - log(y_i) - log(\Gamma(\nu))$
  - $E(y_i) = b'(\theta_i) = \mu_i$;
  - $V(\mu_i) = b''(\theta_i) = \mu_i^2$;

Distribuição gama (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = -\frac{1}{\mu_i}$, $b(\theta_i) = -log(-\theta_i)$;
  - $\phi = \nu^{-1}$, $c(y_i, \phi) = \nu log(\nu y_i) - log(y_i) - log(\Gamma(\nu))$
  - $E(y_i) = b'(\theta_i) = \mu_i$;
  - $V(\mu_i) = b''(\theta_i) = \mu_i^2$;
  - $Var(y_i) = \phi V(\mu_i) = \nu^{-1}\mu_i^2$.

Distribuição normal inversa

- Uma variável aleatória contínua tem distribuição normal inversa se sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(y_i;\mu_i,\tau)=\sqrt{\frac{\tau}{2\pi y_i^3}}exp\left\{-\frac{\tau\left(y_i-\mu_i\right)^2}{2\mu^2 y_i}\right\},$$

com $y_i>0$, $\mu_i>0$, $\tau>0$.

Distribuição normal inversa

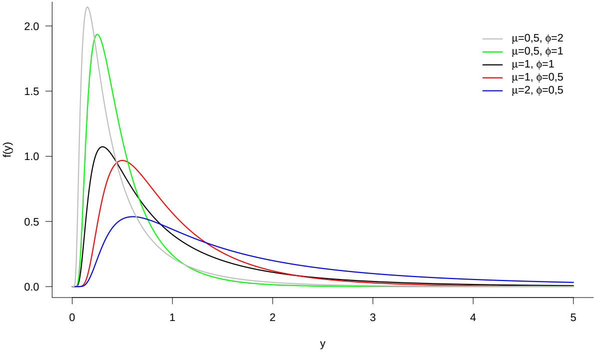

Figura 5: Ilustração - distribuição normal inversa

Distribuição normal inversa

- A distribuição normal inversa se aplica a análise de dados contínuos, não negativos com distribuição acentuadamente assimétrica.

Distribuição normal inversa (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = -\frac{1}{2\mu_i^2}$, $b(\theta_i) = -(-2\theta_i)^{1/2}$;

Distribuição normal inversa (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = -\frac{1}{2\mu_i^2}$, $b(\theta_i) = -(-2\theta_i)^{1/2}$;
  - $\phi = 1/\tau$, $c(\phi, y) = -\frac{1}{2}\left[\log\left(2\pi y^3 + \frac{1}{\phi y}\right)\right]$

Distribuição normal inversa (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = -\frac{1}{2\mu_i^2}$, $b(\theta_i) = -(-2\theta_i)^{1/2}$;
  - $\phi = 1/\tau$, $c(\phi, y) = -\frac{1}{2}\left[\log\left(2\pi y^3 + \frac{1}{\phi y}\right)\right]$
  - $E(y_i) = b'(\theta_i) = \mu_i$;

Distribuição normal inversa (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = -\frac{1}{2\mu_i^2}$, $b(\theta_i) = -(-2\theta_i)^{1/2}$;
  - $\phi = 1/\tau$, $c(\phi, y) = -\frac{1}{2}\left[\log\left(2\pi y^3 + \frac{1}{\phi y}\right)\right]$
  - $E(y_i) = b'(\theta_i) = \mu_i$;
  - $V(\mu_i) = b''(\theta_i) = \mu_i^3$;

Distribuição normal inversa (gabarito)

- Neste caso, temos que:
    - $\theta_i = -\frac{1}{2\mu_i^2}$, $b(\theta_i) = -(-2\theta_i)^{1/2}$;
    - $\phi = 1/\tau$, $c(\phi, y) = -\frac{1}{2}\left[\log\left(2\pi y^3 + \frac{1}{\phi y}\right)\right]$
    - $E(y_i) = b'(\theta_i) = \mu_i$;
    - $V(\mu_i) = b''(\theta_i) = \mu_i^3$;
    - $Var(y_i) = \tau V(\mu_i) = \tau\mu_i^3$.

Distribuição binomial negativa

- Uma variável aleatória discreta Y tem distribuição binomial negativa se a sua função de probabilidades é dada por:

$$f(y_i; \mu_i, k) = \frac{\Gamma(k + y_i)}{\Gamma(k) y_i!} \frac{\mu_i^{y_i} k^k}{(\mu_i + k)^{k + y_i}},$$

com $y_i = 0, 1, 2, ...; \ \mu_i > 0; \ k > 0.$

Distribuição binomial negativa

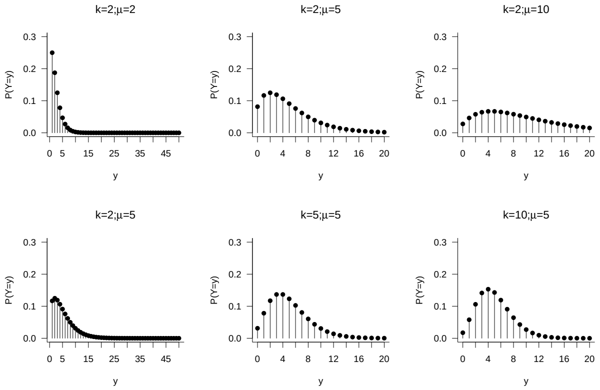

Figura 6: Ilustração - distribuição binomial negativa

Distribuição binomial negativa

- A distribuição binomial negativa é uma alternativa ao de Poisson em situações em que a variância dos dados aumenta mais rapidamente que a média;

Distribuição binomial negativa

- A distribuição binomial negativa é uma alternativa ao de Poisson em situações em que a variância dos dados aumenta mais rapidamente que a média;

- Para valores inteiros de k, usa-se a denominação *distribuição de Pascal*;

Distribuição binomial negativa

- A distribuição binomial negativa é uma alternativa ao de Poisson em situações em que a variância dos dados aumenta mais rapidamente que a média;

- Para valores inteiros de k, usa-se a denominação *distribuição de Pascal*;

- Para $k = 1$, temos como caso particular a distribuição geométrica.

Distribuição binomial negativa (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = log\left(\frac{\mu_i}{\mu_i+k}\right)$, $b(\theta_i) = -klog(1+e^{\theta_i})$;

Distribuição binomial negativa (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = log\left(\frac{\mu_i}{\mu_i+k}\right)$, $b(\theta_i) = -klog(1+e^{\theta_i})$;
  - $\phi = 1$, $c(y_i, \phi) = log\left[\frac{\Gamma(k+y_i)}{\Gamma(k)y_i!}\right]$;

Distribuição binomial negativa (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = log\left(\frac{\mu_i}{\mu_i + k}\right)$, $b(\theta_i) = -klog(1 + e^{\theta_i})$;
  - $\phi = 1$, $c(y_i, \phi) = log\left[\frac{\Gamma(k + y_i)}{\Gamma(k) y_i!}\right]$;
  - $\mu_i = b'(\theta_i) = \mu_i$;

Distribuição binomial negativa (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = log\left(\frac{\mu_i}{\mu_i+k}\right)$, $b(\theta_i) = -klog(1+e^{\theta_i})$;
  - $\phi = 1$, $c(y_i, \phi) = log\left[\frac{\Gamma(k+y_i)}{\Gamma(k)y_i!}\right]$;
  - $\mu_i = b'(\theta_i) = \mu_i$;
  - $V(\mu_i) = b''(\theta_i) = \mu_i\left(\frac{\mu_i}{k}+1\right)$;

Distribuição binomial negativa (gabarito)

- Neste caso, temos que:
  - $\theta_i = log\left(\frac{\mu_i}{\mu_i+k}\right)$, $b(\theta_i) = -klog(1+e^{\theta_i})$;
  - $\phi = 1$, $c(y_i, \phi) = log\left[\frac{\Gamma(k+y_i)}{\Gamma(k)y_i!}\right]$;
  - $\mu_i = b'(\theta_i) = \mu_i$;
  - $V(\mu_i) = b''(\theta_i) = \mu_i\left(\frac{\mu_i}{k}+1\right)$;
  - $Var(y_i) = \mu_i\left(\frac{\mu_i}{k}+1\right)$.