ATIVIDADE DE FREQUÊNCIA 06

Denny Andrew da Silva GRR20207044

1. a) Suponha que X possua densidade $f_X(x)$. Seja $Y = bX + c$, com $b > 0$, $c \in \mathbb{R}$. Prove que a densidade de Y é dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-c}{b}\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

SOLUÇÃO:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(bX + c \leq y)$$

$$= P\left(X \leq \frac{y-c}{b}\right) = F_X\left(\frac{y-c}{b}\right)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X\left(\frac{y-c}{b}\right).$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = f_X\left(\frac{y-c}{b}\right) \frac{d}{dy}\left[\frac{y-c}{b}\right] = f_X\left(\frac{y-c}{b}\right) \cdot \frac{1}{b}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-c}{b}\right), \quad y \in \mathbb{R}, \ b > 0$$

Denny Andrial da Silva GRR 20207044

b) Aplique a fórmula anterior para o caso $X \sim N(0,1)$, $b=\sigma$, $c=\mu$. Qual a distribuição de Y?

SOLUÇÃO:

$X \sim N(0,1) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\}$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{b} f_X\left(\frac{y-c}{b}\right)$$

Considerando $b=\sigma$ e $c=\mu$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sigma} f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \Rightarrow Y \sim N(\mu, \sigma^2)$$

2. Se $X \sim \exp\left(\frac{1}{2}\right)$, encontre a densidade de $Y = X^{\frac{1}{2}}$. Tal distribuição é chamada Weibull de parâmetros 2 e $\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO:

$X \sim \exp\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}x}$

$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(X \leq y^2) = F_X(y^2)$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(y^2) = f_X(y^2) \cdot 2y = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}y^2} \cdot 2y = \boxed{y e^{-\frac{1}{2}y^2}}$$