DISTRIBUIÇÃO T-STUDENT COM PARÂMETROS DE LOCAÇÃO E ESCALA

Daniel Krügel, UFPR, Brasil, danikrugel@gmail.com

Resumo

Este trabalho faz parte do projeto integrador da disciplina de Inferência Estatística – CE085, ministrada pelo Prof. Wagner Hugo Bonat. O Conteúdo do artigo é a descrição de uma distribuição de probabilidade e é voltado para alunos da graduação de Estatística e deve de ser compreensível para qualquer leito com conhecimento na área de exatas.

Palavras-chave: Distribuição; Probabilidade; T-student; Não-generalizada.

1. Introdução

A distribuição de t-student com parâmetros de locação e escala (também chamada de *“non-generalized t sudent distribution”* no inglês) é a própria distribuição T porém parametrizada a fim de ser mais propícias a mais situações. Ela contínua com o conceito de graus de liberdade, e adiciona dois parâmetros, um para, na prática, definir onde será o centro da distribuição e outro para controlar a variância.

2. Função densidade e espaço paramétrico

A função de densidade pode ser descrita por:

$$p(x|\nu,\mu,\sigma) \;=\; \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi\sigma}}\left(1+\frac{\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, (\mathrm{x} \in \mathrm{R}, -\infty \ \leq \mathrm{x} \leq +\infty\ )$$

Respectivamente nós temos os graus de liberdade (ν), o parâmetro de locação (μ) e o parâmetro de escala (σ). Detalhando os espaços paramétricos nós encontramos:

$$f = \{f_x(x|\mu);\ -\infty \ \leq \mu \leq +\infty\}$$

$$f = \{f_x(x|\sigma);\ 0 \ \leq \sigma \leq +\infty\}$$

A esperança da distribuição, também conhecida como valor esperado se dá apenas pelo parâmetro de locação.

$$E[X] = \ \mu$$

As distribuições da família de parâmetros de escala têm algo em comum, todas tem este parâmetro multiplicando algo para o calculo de variância, neste caso é a própria variância da distribuição T-student.

$$Var[X] = \ \sigma^2\left(\frac{\nu}{\nu-2}\right)$$

3. Aplicação da função densidade de probabilidade no R

Para aplicar a densidade no R eu utilizei o pacote “ExtraDistr” que a partir da sua versão 1.8.7 pode ser encontrada utilizando a função:

plst(x, df, mu = 0, sigma = 1)

Para ilustrar a função de densidade temos esse gráfico da acumulada aplicada com x variando entre [-50,50] com 14 graus de liberdade, locação igual a 5 e escala igual a 13.

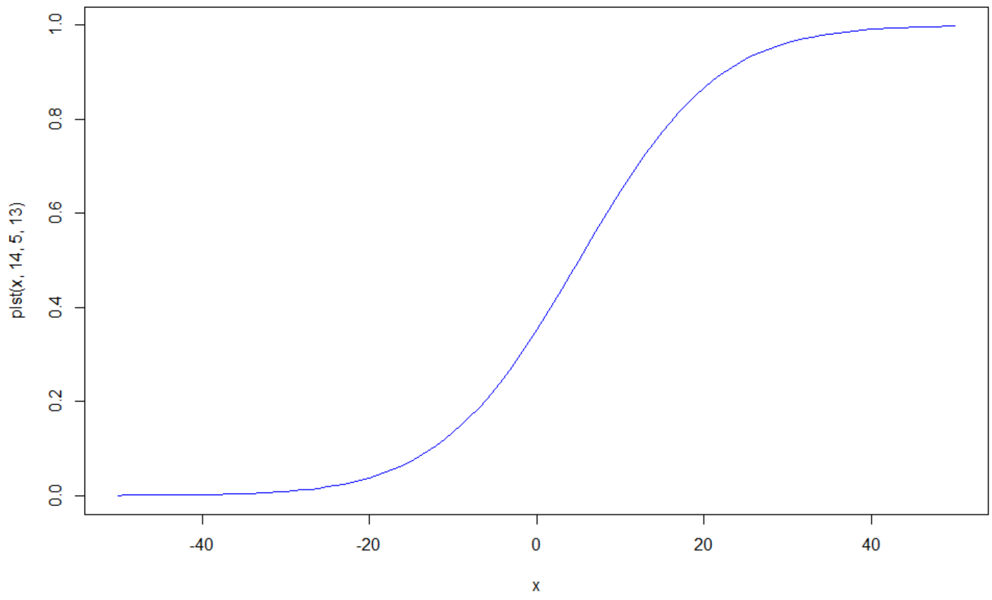

Gráfico 1 – Densidade acumulada

Para gerar números pseudoaleatórios utilizando esta função de probabilidade podemos utilizar o mesmo pacote citado e utilizar a função rlst(). Segundo Bergmann e Oliveira (2013), a distribuição t-student de locação e escala se adequa ao retorno do mercado de ações brasileiros utilizando entre 4 e 10 graus de liberdade, portanto a partir de agora irei fixar os graus de liberdade em 8, um motivo para isso é para diminuir o peso das caudas, facilitando a visualização dos gráficos e posteriormente nos cálculos. Utilizando o R para gerar um conjunto de dados com 1000 observações com os parâmetros de locação e escala iguais a 10 e 1 nós temos as seguintes observações:

```
library(extraDistr)
set.seed(89)
x <- rlst(1000,df = 8, mu = 10, sigma = 1 )
hist(x, breaks = 15,
     main= "Histograma dos dados gerados com rlst",
     ylab = "Frequência")

curve(dlst(x,8,10,1), 6, 14,
      xlab = "Valor de X",
      ylab = "Probabilidade",
      main = "Densidade da função lst (x|8,10,1)")
```

Figura 1 – Código do R utilizado para gerar os dados e histograma

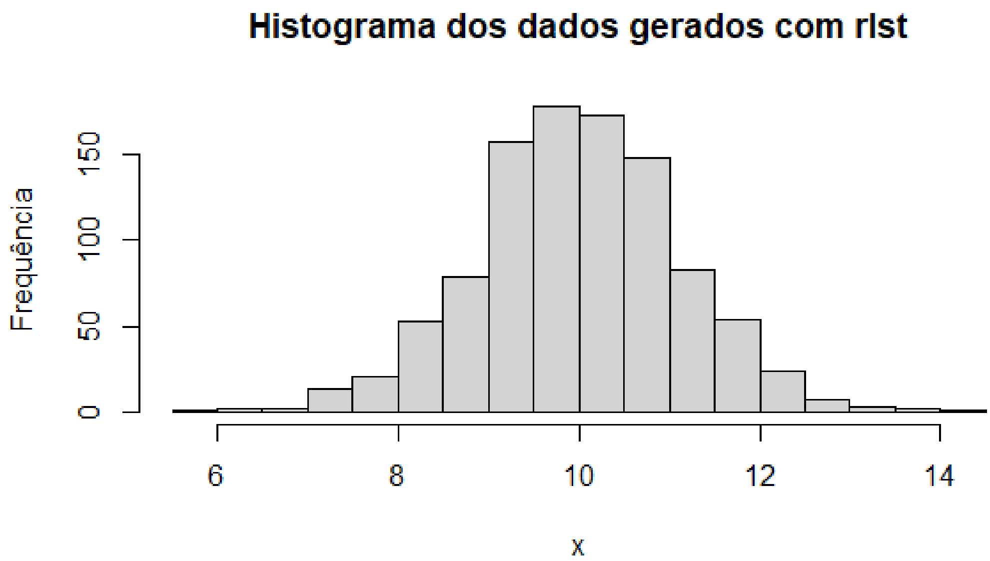

Gráfico 2 – Histograma com os dados gerados com o pacote ExtraDistr

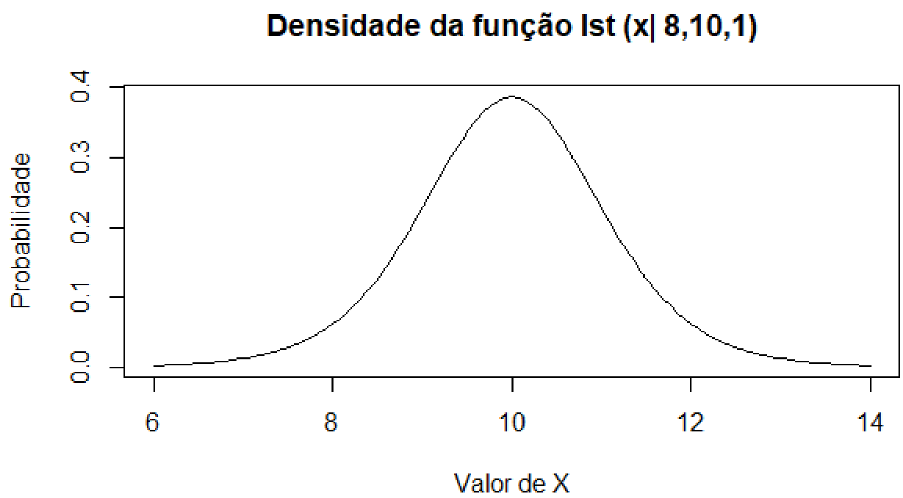

Gráfico 3 – Densidade da função T-student não generalizada com os valores gerados

4. Funções de verossimilhança

Para o calculo da função de verossimilhança me foi instruído pelo professor Wagner a fixar os graus de liberdade em um valor, continuei a utilizar 8 e construí uma função para os parâmetros restantes utilizando softwares de matemática simbólica como o Wolfram Alpha e o Symbolab pra auxiliar nos cálculos e obtive o seguinte desenvolvimento:

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma} | x, \nu = 8) = \prod f(\mu, \sigma \,| x_i, \nu = 8)$$

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma} | x, \nu = 8\ ) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\gamma(9)}{\gamma(4)\sqrt{8\pi\hat{\sigma}}} \left[\left(1 + 1/8 \left(\frac{(x_i - \hat{\mu})}{\hat{\sigma}} \right)^2 \right) \right]^{-7/2}$$

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}|x, \nu = 8) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1680\sqrt{\frac{2}{\pi}}}{\sqrt{\hat{\sigma}}\left[\frac{(x_i - \hat{\mu})^2}{8\hat{\sigma}^2} + 1\right]^{\frac{7}{2}}}$$

Resultando finalmente em:

$$L(\hat{\mu}, \hat{\sigma}|x, \nu = 8) = \frac{\left(1680\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^n}{\left(\sqrt{\hat{\sigma}}\right)^n \prod_{i=1}^{n}\left[\frac{(x_i - \hat{\mu})^2}{8\hat{\sigma}^2} + 1\right]^{\frac{7}{2}}}$$

Aplicando um logaritmo nesta função nós chegamos na chamada função log verossimilhança, que é dada por:

$$\mathrm{l}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}) = \mathrm{n}\log\left(1680\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right) - \frac{7}{2}\sum_{i=1}^{n}\log\left(\frac{(x_i - \hat{\mu})^2}{8\hat{\sigma}^2} + 1\right) + \mathrm{n}\log\sqrt{\hat{\sigma}}$$

As funções escore podem ser encontradas através das derivadas parciais da $\mathrm{l}(\mu, \sigma)$ resultando em:

$$\mathrm{U}(\mu|x, \sigma, \nu = 8) = \frac{-7}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{2\mu - x_i}{(x_i - \mu)^2 + 8\sigma^2}$$

$$U(\sigma|x, \mu, \nu = 8) = \frac{-n}{2\sigma} - \frac{7}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \mu)^2}{\frac{(x_i - \mu)^2}{2} + 4\sigma^3}$$

Logo de cara é possível perceber que não é possível utilizar o método do Estimador de Máxima Verossimilhança e encontrar um estimador fechado para ambos os parâmetros utilizando calculo diferencial integral, portanto partirei para uma solução computacional utilizando o R. O pacote “ExtraDistr” já mencionado anteriormente vai ser utilizado, tanto para gerar os dados, quanto implementar a função log verossimilhança, e o pacote básico do R, “stats4” para fazer a otimização da função log. O código completo fica:

```r
#Gerando valores aleatórios usando rlst() com df = 8
set.seed(123)
x <- extraDistr::rlst(100, 8, mu = 10, sigma = 1)

#Adicionando a log verossimilhança ao R
lstLL <- function(mu, sigma){
  -sum(extraDistr::dlst(x, 8, mu, sigma, log = TRUE)
  )
}

#maximizando a função log utilizando o método MLE incluso no R
stats4::mle(lstLL, start = list(mu = 11, sigma = 0.5), method = "L-BFGS-B")
```

Figura 2 – Código em R para método EMV

Note que a função mle() utiliza o método “L-BFGS-B” que limita a memória a memória do computador, o BFGS pode ser utilizado também porém apresenta um erro maior porém testa mais valores caso necessário, como nesta situação eu mesmo gerei os dados, utilizei um método mais rápido. O output deste código no console do R é o seguinte:

```
Call:
stats4::mle(minuslogl = lstLL, start = list(mu = 11, sigma = 0.5),
    method = "L-BFGS-B")

Coefficients:
       mu     sigma
10.060617  1.006074
```

Figura 3 – Resultado do código apresentado na figura 2

4. Utilizações da distribuição

Agora que a função já foi descrita vamos para alguns usos dela, por ser uma derivação da distribuição clássica T-Student ela é apropriada para variáveis contínuas, porém é necessário que tenhamos mais do que dois graus de liberdade, isto se dá pelo cálculo da variância, caso tenhamos 2 graus de liberdade a variância se torna infinita, e menor do que isto, negativa.

Na última década as variações da T-student chamaram muita atenção no estudo de mercado de ações, a T-student com parâmetros de locação e escala em específico foi utilizada em alguns artigos, entre eles: Models on international portofolio risk management (ku, 2008); princing of European options (Cassidy et ak., 2010); models for insurance loss data (Brazauskas and Kleefeld, 2011); modeling of Brazilian stock returns (Bergmann and de Oliveira, 2013); modeling of stocks returns in Nigeria (Shittu et al., 2014)

Em particular "modeling of Brazilian stock returns" o autor pontua que houveram trabalhos que comprovam empiricamente que esta distribuição é melhor adaptada no cenário de mercados de ações em curtos períodos, menores do que em um mês, o famoso "Day trade", do que outras distribuições como a logística, exponencial ou a discreta misturada Normal, isto se dá a ela ter uma kurtosis positiva em excesso.

5. Referências

1. *Jackman, S. (2009). Bayesian Analysis for the Social Sciences. Wiley. p. 507.*