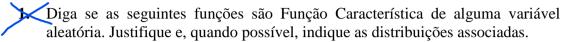
5ª LISTA DE EXERCICIOS CE084 – PROBABILIDADES A

Prof. Benito Olivares Aguilera

2021/1



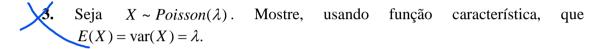
i)
$$e^{-t/2}$$

ii)
$$e^{-ita}$$
, a cte.

i)
$$e^{-t/2}$$
 ii) e^{-ita} , a cte. iii) $\frac{e^{-t^2/2}}{4} (e^{it} + 1)^2$ iv) $-1 + \frac{\lambda}{\lambda - it}$

iv)
$$-1 + \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

Seja X uma variável aleatória cuja função característica é dada por $\varphi_x(t) = \cos(at)$, sendo a > 0. Encontre a distribuição de X.



Obtenha a função característica do modelo Geométrico de parâmetro p e use-a para determinar a média e a variância.

Sejam $X_1, X_2,...$ variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas, com $X_i \sim \exp(\lambda)$. Mostre que $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$ (Distribuição Gama).

Se $X \sim B(n, p)$, calcule a função característica de X. Mostre que se $X \sim B(n, p)$ e $Y \sim B(m, p)$, sendo X e Y independentes, então $X + Y \sim B(n + m, p)$.

Calcule EX^3 e EX^4 , onde $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. (Sugestão: Calcule primeiro para N(0,1)e logo use linearidade.)

Sejam $X_1, X_2,...$ variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas, com $X_i \sim N(0,1)$. Encontre a distribuição de $\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i$.

(*) Seja X uma variável aleatória com distribuição Cauchy padrão, isto é, sua densidade é dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, x \in \mathbb{R}.$$

- a) O que ocorre com sua FGM? (ver Exerc. 4, seção 5.4, Magalhães).
- b) E com sua função característica? (ver Exerc. 60, seção 5.6, Magalhães).
- c) Podemos calcular os momentos de X a partir da sua função característica?
- d) Mostre que $\varphi_{2X}(t) = {\varphi_X}^2(t)$. Conclua que $\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t) \Rightarrow X$ e Y
- e) Encontre a distribuição da média amostral $\overline{X_n} = S_n/n$, sendo as X_i 's variáveis iid Cauchy Padrão.

- **16.** Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes com distribuição comum $\exp(\lambda)$. Usando funções características, mostre que:
- *X-Y* é simétrica em torno de zero.
- b) X-Y segue o modelo Laplace com parâmetros $\mu = 0$ e λ .
- Seja X uma variável aleatória de média μ e variância σ^2 (sendo ambos parâmetros finitos). Obtenha um limitante para $P(|X \mu| < 2\sigma)$.
- 12. Resolva justificando claramente as passagens:
- a) Sejam X₁, X₂, ... variáveis aleatórias independentes com distribuição comum dada por $X_k \sim U(0.1 + \frac{1}{L})$. Encontre o limite em distribuição de X_n .
 - b) Sejam $X_1, X_2, ...$ variáveis aleatórias iid com $E(X_1)=1$ Calcule o limite em distribuição de $Y_n = \log(\overline{X}_n)$.
- 13. Sejam X1, X2, ... variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição N(0,1).

Qual o limite e o tipo de convergência para Zn, onde

$$Z_n = \frac{U_n}{V_n}$$
, sendo que

$$Z_n = \frac{\sigma_n}{V_n}, \text{ sendo que}$$

$$U_n = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2 \quad \text{e} \quad V_n = (X_1 - 1)^2 + (X_2 - 1)^2 + ... + (X_n - 1)^2 ?$$

- 14. Sejam X₁, X₂, ...variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com distribuição exp(1/2).
- a) Calcule o terceiro momento de X_n usando a Função Característica.
- b) Qual o limite de $\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$? Qual o tipo de convergência?
- Calcule o limite de Z_n quando $n \rightarrow \infty$ e diga qual o tipo de convergência:

$$Z_{n} = \frac{X_{1} + X_{2} + ... + X_{n}}{X_{1}^{3} + X_{2}^{3} + ... + X_{n}^{3}}.$$

15. Sejam X₁, X₂, ...variáveis aleatórias independentes com distribuição comum Poisson de parâmetro 1. Prove que $Y_n = \ln Z_n \rightarrow \frac{1}{2} \ln 2$, sendo

$$Z_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{\sqrt{n(X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2)}}.$$

Qual o tipo de convergência?

Nejam $X_1, X_2, ...v.a.$'s iid com distribuição $N(\mu, \sigma^2)$. Para n fixo, seja.

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

- a) Encontre o limite de \overline{X}_n usando a Lei Fraca de Tchebychev.
- b) Comprove, pela definição de convergência, que o limite calculado em a) é correto.



- 17. Sejam X_1 , X_2 , ... variáveis aleatórias independentes com distribuição comum $\exp(1/2)$.
- Qual o limite de $\frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$? Qual o tipo de convergência? Justifique!

$$Z_{n} = \frac{X_{1} + X_{2} + ... + X_{n}}{X_{1}^{3} + X_{2}^{3} + ... + X_{n}^{3}}.$$

- Qual o limite de $Z_n = \frac{\sqrt{n}(X_1 + X_2 + ... + X_n 2n)}{X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2}$? Qual o tipo de convergência?
- Prove que $U_n = \sqrt{n}(\overline{X}_n^2 4)$ converge em distribuição para N(0,64) (aqui \overline{X}_n é a média amostral).
- e) Exeontre o limite da Função Característica de U_n .

(**Ajuda**: Se X~Exp(
$$\lambda$$
), então $EX^k = \frac{k!}{\lambda^k}$, $k = 1, 2, ...$)