UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

1ª LISTA DE EXERCICIOS CE084 – CÁLCULO DE PROBABILIDADES A

Prof. Benito Olivares Aguilera 2021/1

1. Sendo A, B e C subconjuntos quaisquer, expresse em notação matemática os conjuntos cujos elementos:
a) Estão em A e B, mas não em C.
b) Não estão em nenhum deles.
c) Estão, no máximo, em dois deles.
d) Estão em A, mas no máximo em um dos outros.
e) Estão na interseção dos três conjuntos e no complementar de A.

2. Sendo A e B subconjuntos quaisquer, define-se o conjunto **diferença simétrica** entre A e B como $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$. Mostre que:
a) $A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = (A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$.
b) $A\Delta B = B\Delta A$
c) $(A\Delta B) \cup (A \cap B) = A \cup B$.

3. Para cada um dos seguintes experimentos, descreva um espaço de probabilidade que sirva de modelo:

a) Seleciona-se um ponto, ao acaso, do quadrado unitário $\{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1)\}$

b) Retiram-se cartas sucessivamente de um baralho de 52 cartas, ao acaso e com reposição, até retirar-se o primeiro rei. Registra-se o número total de retiradas.

c) Quinze bolas são retiradas, ao acaso e com reposição, de uma urna contendo 5 bolas vermelhas, 9 bolas pretas, e uma bola branca. Observa-se o número de vezes que ocorre cada cor

d) O experimento (c) é realizado sem reposição

e) Suponhamos que dez cartas estejam numeradas de 1 até 10. Das dez cartas, retira-se uma de cada vez, ao acaso e sem reposição, até retirar o primeiro número par. Conta-se o número de retiradas necessárias.

f) Retiram-se 4 cartas, ao acaso, de um baralho de 52 cartas. Registra-se o número de reis na amostra. Considere os casos em que:
i) As retiradas são feitas sem reposição

ii) As retiradas são feitas com reposição

4. Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos aleatórios. A partir dos Axiomas de Kolmogorov mostre que

a) $P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} P(A_K{}^c)$.

b) Se $P(A_k) \geq 1 - \varepsilon$, para $k=1, 2, \ldots, n$, então $P(\bigcap_{k=1}^{n} A_k) \geq 1 - n\varepsilon$.

c) $P(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{\infty} P(A_K{}^c)$.

5. Sejam A, B e C eventos aleatórios num mesmo espaço de probabilidade. Mostre que

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

b) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

6. Considere dois eventos A e B mutuamente exclusivos, com P(A) = 0,3 e P(B) = 0,5. Calcule:

a) $P(A \cap B)$.

b) $P(A \cup B)$.

c) $P(A/B)$.

d) $P((A \cup B)^c)$.

7. Se A e B são independentes, prove que também são independentes:

a) A e B^c

b) A^c e B

c) A^c e B^c.

8. Sejam $B_1, \ldots, B_n$ eventos aleatórios independentes com $p_k = P(B_k)$, $k=1,\ldots,n$. Obtenha a probabilidade dos seguintes eventos, em termos das probabilidades p_k:

a) A ocorrência de nenhum dos B_k.

b) A ocorrência de pelo menos um dos B_k.

c) A ocorrência de exatamente um dos B_k.

e) A ocorrência de todos os B_k.

9. Se P(B) = 0,4; P(A) = 0,7 e $P(A \cap B)$= 0,3; calcule $P(A/B^c)$.

10. Verifique se são válidas as afirmações:

a) Se P(A) = 1/3 e P(B/A) = 3/5 então A e B não podem ser disjuntos.

b) Se P(A) = 1/2 , P(B/A) = 1 e P(A/B) = 1/2 então A não pode estar contido em B.

11. As preferências de homens e mulheres por cada gênero de filme alugado em uma locadora de vídeos, estão apresentadas na próxima tabela.

Sexo \ Filme	Comédia	Romance	Policial

Homens	136	92	248
Mulheres	102	195	62

Sorteando-se ao acaso uma dessas locações de vídeo, calcule a probabilidade de:

a) Uma mulher ter alugado um filme policial;
b) O filme alugado ser uma comédia;
c) Um homem ter alugado ou o filme ser um romance;
d) O filme ser policial dado que foi alugado por um homem.

12. Escolhe-se ao acaso um número entre 1 e 50. Se o número é primo, qual a probabilidade que ele seja ímpar?

13. Una urna contém *a* bolas azuis e *b* bolas brancas. Una bola é retirada ao acaso e depois devolvida à urna junto com mais *c* bolas da mesma cor. A seguir, uma segunda bola é retirada aleatoriamente da urna. Qual a probabilidade que ela seja azul?

14. Duas máquinas A e B produzem 3000 peças em um dia. A máquina A produz 1000 peças, das quais 3 % são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2000, das quais 1 % são defeituosas. Da produção total em um dia uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina A?

15. Em um teste de múltipla escolha, a probabilidade do aluno saber a resposta certa é p. Havendo m escolhas, se ele sabe a resposta ele responde corretamente com probabilidade 1; se não sabe ele responde corretamente com probabilidade $1/m$. Qual a probabilidade que ele sabia a resposta, dado que a pergunta foi respondida corretamente? Calcule o limite desta probabilidade se (i) $m \to \infty$ com p fixo e (ii) $p \to 0$ com m fixo.