Estatística Inferencial
Distribuições multivariadas e Teoremas Limites

Distribuições multivariadas

1. Considere um vetor bivariado de variáveis aleatórias normalmente distribuído, com $\mathrm{E}(Y_1) = 0$, $\mathrm{E}(Y_2) = 4$, $\mathrm{V}(Y_1) = 1$, $\mathrm{V}(Y_2) = 9$ e $Cov(Y_1, Y_2) = 2$.
   a) Escreva a função de densidade probabilidade.
   b) Implemente tal densidade computacionalmente.
   c) Desenhe o gráfico da função de densidade bivariada.

2. Medidas de colesterol foram tomadas em um grande conjunto de pacientes que tiveram ataque do coração. Para cada paciente, medidas foram tomadas no dia 0, 2 e 4 dias após o ataque. Denote as respectivas v.a por X_0, X_2 e X_4. O vetor de médias foi $\boldsymbol{\mu_0} = (259.5, \mu_2 = 230.8, \mu_4 = 221.5)^\top$. A matriz de covariância é a seguinte:
$$\begin{bmatrix} 2276 & 1508 & 813 \\ 1508 & 2206 & 1349 \\ 813 & 1349 & 1865 \end{bmatrix}.$$
   a) Suponha que estamos interessados na distribuição de $X_0 - X_2$. Encontre esta distribuição sua média e variância. (Resposta: média 28.7 e variância 1466).
   b) Suponha que um paciente apresentou $\mu_0 = 260$. Calcule o valor esperado para X_2 e X_4 e suas respectivas variâncias. Forneça um intervalo de confiança com 95% de confiança.
   c) Calcule a probabilidade de X_4 ser maior que 270 para um paciente que chegou com colesterol de 250.
   d) Obtenha a matriz de correlação.

3. Um dado é lançado 12 vezes. Seja X_i o número de jogadas em que cada i caiu para cimaa, para $i = 1, \ldots, 6$.
   a) Calcule a esperança de X_i.
   b) Calcule a variância de X_i.
   c) Calcule a probabilidade de cada uma das faces cair para cima exatamente duas vezes.
   d) Implemente um código computacional ilustrando essa situação. Tente de forma aproximada calcular a probabilidade do item c).

Desigualdades

1. Suponha que a nota média dos alunos de Estatística Inferencial é de 70%. Dê um limite superior para a proporção de estudante que vão tirar nota de pelo menos 90%. Resposta: $\frac{7}{9}$.

2. Uma moeda é viciada de tal forma que a probabilidade de cair cara é de 0.20. Suponha que a moeda é lançada 20 vezes. Encotre um limite para a probabilidade de se obter ao mesmos 16 caras. Compare esse limite com a verdadeira probabilidade calculada usando a distribuição Binomial. Como você considera tal aproximação? Resposta: Limite $\frac{1}{4}$.

3. Considere uma variável aleatória X que toma o valor 0 com probabilidade $\frac{24}{25}$ e o valor 1 com probabilidade $\frac{1}{25}$. Calcule a $\mathrm{E}(X)$ e um limite superior para $\mathrm{P}(X \geq 5)$. Resposta: $\mathrm{P}(X \geq 5) = \frac{1}{25}$.
4. Suponha que uma moeda é lançada 100 vezes. Encontre um limite superior para a probabilidade do número de caras seja de no minimo 60 ou no máximo 40. Resposta: $\mathrm{E}(X) = 50$ e $\mathrm{V}(X) = 25$. $P(X < 40 \cup X > 60) = P(|X - \mu| \geq 10) \leq \frac{25}{10^2}$.

Lei dos grandes números e Teorema Central do limite

1. Seja $Y_1, \ldots, Y_n$ uma v.a iid da distribuição de Poisson com parâmetro λ.
   a) Mostre que a média amostral converge em probabilidade para λ quando $n \to \infty$.
   b) Encontre a distribuição aproximada da média amostral nesta situação.
   c) Faça uma ilustração computacional e compare a distribuição empírica com a distribuição aproximada.
2. Seja $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a iid com $\mathrm{E}(Y_i) = \mu$ e $\mathrm{V}(Y_i) = \sigma^2 < \infty$.
   a) Mostre que $\overline{\sigma}^2 \xrightarrow{P} \sigma^2$ onde $\overline{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \mu)^2$.
   b) Obtenha a distribuição aproximada de $\overline{\sigma}^2$.
   c) Faça uma ilustração computacional da distribuição aproximada conforme o tamanho da amostra cresce. Use $n = 50$, 250 e 1000.
   d) Compare computacionalmente a distribuição aproximada com a distribuição exata apresentada na semana 3.
3. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ v.a's iid com $\mathrm{E}(Y_i) = \mu$ e $\mathrm{V}(Y_i) = \sigma^2 < \infty$.
   a) Argumente sobre a seguinte afirmação: Para $n \to \infty$
   $$t = \frac{\overline{Y} - \mu}{s/\sqrt{n}} \xrightarrow{D} Z \sim N(0, 1).$$
   b) Faça uma ilustração computacional da distribuição aproximada conforme o tamanho da amostra cresce. Use $n = 50$, 250 e 1000.
   c) Compare computacionalmente a distribuição aproximada com a distribuição exata da estatística t apresentada na semana 3.
4. Sejam X_n e Y_n v.a's independentes com distribuição de Poisson de parâmetros n e m, respectivamente.
   a) Mostre que $R = \frac{(X_n - n) - (Y_n - m)}{\sqrt{X_n + Y_m}} \to Z \sim N(0, 1)$.
   b) Ilustre o resultado de a) computacionalmente e compare com a distribuição empírica de R.
   c) Comente sob os potenciais usos da estatística R na construção de teste de hipóteses, conforme discutido na semana 4.