UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

GABARITO TERCEIRA AVALIAÇÃO DE PROBABILIDADES A (CE084)

Prof. Benito Olivares Aguilera 04 de agosto de 2021

1. (20 pts.) Responda da forma mais completa possível:

a) Existe alguma sequência de variáveis aleatórias na qual não seja possível aplicar a Lei dos Grandes Números? Explique.

SOL: (QUESTÃO ABERTA). Vamos supor que temos uma sequência de variáveis aleatórias independentes. Uma exigência para atender à Lei dos Grandes Números é que a sequência seja integrável, isto é, que a esperança seja finita. Se tivermos uma sequência de variáveis independentes cuja esperança não seja finita, por ex. uma sequência de variáveis Cauchy, essa sequência não obedecerá a Lei dos Grandes Números.

b) Explique a importância da Função Característica para efeitos de convergência.

SOL: (QUESTÃO ABERTA). A convergência de uma sequência de Funções Características corresponde à convergência em distribuição da sequência de variáveis aleatórias correspondentes. Esse limite é válido, pois a FC identifica de forma única uma distribuição.

c) Qual a importância da distribuição original das variáveis aleatórias $X_i{'}$s no Teorema Central do Limite?

SOL: (QUESTÃO ABERTA). No Teorema Central do Limite a distribuição das variáveis aleatórias que formam a sequência é irrelevante, pois independentemente de qual ela seja, a sequência padronizada tenderá em distribuição para uma Normal Padrão. No caso especial em que a distribuição original seja normal, a distribuição limite será exatamente normal, e não mais "aproximadamente normal".

d) Explique como uma companhia de seguros poderia utilizar a Lei dos Grandes Números para calcular os prêmios a serem pagos por determinado sinistro.

SOL: (QUESTÃO ABERTA). A ideia é que o mútuo de um grande número de riscos independentes faz com que o valor médio dos sinistros a ser pago (prêmio) tenda a seu valor médio teórico. Quanto maior o número de segurados, maior a probabilidade de acerto nesse cálculo.

2. (15 pts.) Seja $\{c_n\}$, $n = 1,2,\cdots$, uma sequência de números reais tal que $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, sendo c uma constante finita.

Seja $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias tal que $X_n \xrightarrow{D} N(0,2)$.
Encontre o limite em distribuição de $X_n + c_n$.

SOL: Como $X_n \xrightarrow{D} N(0,2)$, então $\varphi_{X_n}(t) \longrightarrow e^{-2t^2/2}$.

Agora,

$$\varphi_{X_n+c_n}(t) = E\left[e^{it(X_n+c_n)}\right] = e^{itc_n}E\left[e^{itX_n}\right] = e^{itc_n}\varphi_{X_n}(t) \longrightarrow e^{itc} \cdot e^{-2t^2/2} = e^{itc-2t^2/2}$$

Vemos que essa FC corresponde a uma distribuição $N(c,2)$.

Portanto, $X_n + c_n \xrightarrow{D} N(c,2)$.

OBS: Notar que o Teorema de Slutsky não pode ser aplicado nesse caso, pois a sequência $\{c_n\}$ não é aleatória, então não pode ser afirmado que $c_n \xrightarrow{P} c$.

3. (30 pts.) Sejam X_1, X_2, ...variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas tais que $EX_1 = 0$ e $EX_1^2 = 2$.

a) Calcule o limite de $Z_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2 + \ldots + X_n^2}}$.

SOL: Denotemos

$$S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$
$$Q_n = {X_1}^2 + {X_2}^2 + \cdots + {X_n}^2.$$

Então, $Z_n = S_n/\sqrt{Q_n}$.
Como as va's X_i's são iid, então as X_1^2's também são iid.
Pelo Teorema Central do Limite tem-se que:

$$\frac{S_n - ES_n}{\sqrt{varS_n}} = \frac{S_n}{\sqrt{2n}} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Ainda,

$$\sqrt{2}\,\frac{S_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{D} N(0,2) \qquad (*).$$

[OBS: Como $\frac{S_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{D} Z$, onde $Z \sim N(0,1)$, então $\sqrt{2}\,\frac{S_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{D} \sqrt{2}Z \sim N(0,2)$.]

Também, pela Lei Forte de Kolmogorov, tem-se que:

$$\frac{Q_n}{n} = \frac{{X_1}^2 + {X_2}^2 + \cdots + {X_n}^2}{n} \xrightarrow{qc} EX_1^2 = 2.$$

Pela continuidade da função raiz:

$$\sqrt{\frac{Q_n}{n}} = \sqrt{\frac{{X_1}^2 + {X_2}^2 + \cdots + {X_n}^2}{n}} \xrightarrow{P} \sqrt{2} \quad (**).$$

Agora, aplicando o Teorema de Slutsky a $(*)$ e $(**)$, o limite em distribuição será:

$$Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{Q_n}} = \frac{\sqrt{2}\,S_n/\sqrt{2n}}{\sqrt{Q_n/n}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

OBS: Cuidado, notar que a LGN não pode ser aplicada diretamente, pois

$$Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{Q_n}} \neq \frac{S_n/n}{\sqrt{Q_n/n}}.$$

b) Seja $Y_n = \dfrac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{\sqrt{2n}}$. Mostre que $\phi_{Y_n}(t) \to e^{-t^2/2}$

SOL: Como mostrado no item a),

$$Y_n = \frac{S_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{D} N(0,1).$$

Pelo Teorema da Continuidade, o limite da FC de Y_n será a FC de uma v.a. $N(0,1)$. Isto é,

$$\emptyset_{Y_n} \rightarrow e^{-t^2/2}.$$

4. (35 pts.) Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes identicamente distribuídas, com $X_i \sim N(0,1)$. Seja S_n a variável aleatória dada por $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

a) Encontre a distribuição de $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$.

SOL: A FC será:

$$\phi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) = \phi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \phi_{X_1+X_2+\cdots+X_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \prod_{i=1}^{n} e^{-\left(t/\sqrt{n}\right)^2/2} = \left[e^{-t^2/2n}\right]^n$$

$$= e^{-t^2/2}.$$

Portanto, $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

b) Utilize a Lei fraca de Tchebychev para encontrar o limite de $\frac{S_n}{n}$.

SOL: Vamos checar os pressupostos da Lei fraca de Tchebychev.

i) Como as variáveis $X_i{}'$s são independentes, então elas também são independentes 2 a 2.

ii) Como $varX_i = 1, \forall i$, podemos afirmar que as variáveis $X_i{}'$s possuem variância finita e uniformemente limitada (pois $varX_i \le 1, \forall i$).

Então, a sequência satisfaz a Lei dos Grandes Números, isto é:

$$\frac{S_n - ES_n}{n} \xrightarrow{P} 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} 0.$$

c) Comprove, pela definição desse tipo de convergência, que o limite calculado em b) é correto.

SOL: Pela definição de convergência em probabilidade devemos provar que:

$\forall \varepsilon > 0$: $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 0\right| \ge \varepsilon\right) = P\left(\frac{S_n}{n} \ge \varepsilon\right) \longrightarrow 0$, quando $n \to \infty$.

Prova: Pela Desigualdade de Tchebychev tem-se que:

$P\left(\frac{S_n}{n} \ge \varepsilon\right) = P(S_n \ge n\varepsilon) \le \frac{varS_n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{n}{n^2\varepsilon^2} = \frac{1}{n\varepsilon^2} \longrightarrow 0$, quando $n \to \infty$.