UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPTO. DE ESTATÍSTICA

PRIMEIRA AVALIAÇÃO DE PROBABILIDADE A (CE084)

Prof. Benito Olivares Aguilera 09 de junho de 2021

1. (20 pts.) Resolva formalmente as questões a seguir:

a) Se $P(A \cup B) = 0.7$; $P(A) = 0.2$ e $P(B) = x$, determine o valor de x nos seguintes casos:

i) A e B são disjuntos

R: $P(A \cap B) = \Phi$, logo $P(A \cup B) = P(A) + P(B) \Rightarrow 0.7 = 0.2 + x \Rightarrow x = 0.5$

ii) A e B são independentes

R: Aqui $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Como

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B)$

$\Rightarrow 0.7 = 0.2 + x - 0.2x \Rightarrow 0.8x = 0.5 \Rightarrow x = 0.625$

iii) $P(A/B) = 0.6.$

R:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(B)} \Rightarrow 0.6x = 0.2 + x - 0.7 \Rightarrow x = 1.25$$

Como x é uma probabilidade, não pode ser maior que um. Logo, dados $P(A \cup B) = 0.7$ e $P(A) = 0.2$, não existe $P(B)$ que faça com que $P(A/B) = 0.6$.

---

b) Demonstre que o evento vazio é independente de qualquer evento.

R: Seja A um evento qualquer. Sabemos que $A \cap \emptyset = \emptyset$, portanto

$P(\emptyset \cap A) = P(\emptyset) = 0 = 0 \times P(A) = P(\emptyset)P(A).$

Assim, $P(\emptyset \cap A) = P(\emptyset)P(A)$ e logo A e $\emptyset$ são independentes.

---

c) Demonstre que não existe um evento A tal que $P(A)P(A^c) = 3/4.$

R: Seja $x = P(A)$, então precisamos resolver a equação $x(1-x) = 3/4$, ou equivalentemente $x^2 - x + 3/4 = 0$, a qual não possui raízes reais. Logo não existe tal evento A.

2. (20 pts.) Um teste para COVID 19 tem a propriedade de que 97% das pessoas com a doença reagem positivamente, enquanto 2% das pessoas sem a doença obtêm resultado positivo (falso positivo). Admita que 5% dos pacientes de um hospital são portadores da doença. Qual a probabilidade de que um paciente do hospital, escolhido ao acaso, que reage positivamente a esse teste, realmente tenha a doença?

R: Sejam os eventos
C: o paciente tem Covid, P(C) = 0.05
$\overline{C}$: o paciente não tem Covid, P($\overline{C}$) = 0.95
T: o teste resulta positivo, $P(T/C) = 0.97$ e $P(T/\overline{C}) = 0.02$.
Usando o Teorema de Bayes:

$$P(C/T) = \frac{P(T/C)P(C)}{P(T/C)P(C) + P(T/\overline{C})P(\overline{C})} = \frac{0.97 \times 0.05}{0.97 \times 0.05 + 0.02 \times 0.95} = 0.7185.$$

Logo a probabilidade solicitada é de 71.85%.

3. (30 pts.) Um jogador altera uma moeda de forma que “sair cara” é três vezes mais provável que “sair coroa”. Considere duas jogadas independentes com essa moeda.

a) Determine o espaço de probabilidade.

R: Devemos encontrar os três elementos de um espaço de probabilidade: $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Denotemos por C o evento “sair cara” e por K o evento “sair coroa”. Então o espaço amostral pode ser descrito como
$$\Omega = \{CC, CK, KC, KK\}.$$
- Como Ω é finito, a sigma-álgebra será o conjunto potência ou das partes $\mathcal{P}(\Omega)$.
- As probabilidades dos eventos elementares são $P(C)$ e $P(K)$. Pelo enunciado temos que $P(C)=3P(K)$ e como $P(C)+P(K)=1$, então $P(K)=1/4$ e $P(C)=3/4$.

Usando independência podemos calcular as probabilidades dos eventos de Ω:

$$P(CC) = P(C)P(C) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}.$$

Analogamente,

$$P(CK) = P(KC) = \frac{3}{16} \text{ e } \mathrm{P(KK)} = \frac{1}{16}.$$

---

b) Encontre a probabilidade de sair no máximo uma cara.

R:

$$\begin{aligned} P(\text{no máximo uma cara}) = P(\text{nenhuma ou uma cara}) &= P(KK) + P(CK) + P(KC) \\ &= \frac{1}{16} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{7}{16} \end{aligned}.$$

---

c) Encontre a probabilidade de dois resultados iguais.

R: $P(\text{dois resultados iguais}) = P(CC) + P(KK) = \frac{9}{16} + \frac{1}{16} = \frac{10}{16}.$

---

d) Encontre a Função Distribuição Acumulada de X: número de caras nas duas jogadas.

R: Notemos que $X \in \{0,1,2\}$ e a função de probabilidade será:

$$P(X = 0) = P(KK) = 1/16, \quad P(X = 1) = P(CK) + P(KC) = 6/16 \text{ e } P(X = 2) = P(CC) = 9/16$$

Com esses valores podemos calcular:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1/16, & 0 \le x < 1 \\ 7/16, & 1 \le x < 2 \\ 1, & x \ge 2 \end{cases}$$

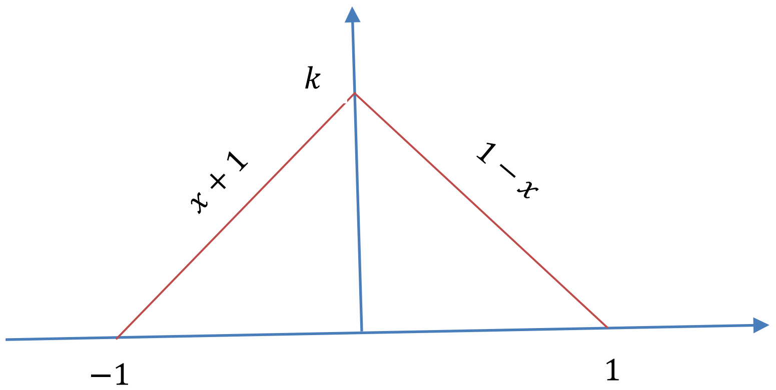
4. (30 pts.) Uma v.a. X tem densidade dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ k(x+1), & -1 \le x < 0 \\ k(1-x), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

a) Que valor deve ter a constante *k*, de modo que *f(x)* seja uma densidade?
b) Faça o gráfico de *f(x)*.

R: A densidade forma um triângulo de base 2 e altura k. A área total deve ser 1.

Usando área de um triângulo: $\frac{2k}{2} = 1 \Rightarrow \text{k} = 1$



---

c) Encontre $F_X(x)$.

R: Se $x < -1 \Longrightarrow F_X(x) = 0$ e se Se $x > 1 \Longrightarrow F_X(x) = 1$.

Se $-1 \le x \le 0$, então $F_X(x) = P(X \le x)$ corresponde geometricamente à área de um triangulo de base $x + 1$ e altura $x + 1$. Logo,

$$F_X(x) = \frac{(x+1)^2}{2}, -1 \le x \le 0.$$

Analogamente, Se $0 < x \le 1$, então $F_X(x) = P(X \le x)$ corresponde geometricamente à diferença entre a área do triangulo total, que vale 1, e a área de um triangulo de base $1 - x$ e altura $1 - x$. Logo,

$$F_X(x) = 1 - \frac{(1-x)^2}{2}, 0 \le x \le 1.$$

Assim,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1 \\ \frac{(x+1)^2}{2}, & -1 \le x \le 0 \\ 1 - \frac{(1-x)^2}{2}, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

(O mesmo resultado seria obtido por integração adequada da densidade).

---

d) Quanto valem $F_X(1)$ e $F_X(1^-)$? Justifique.

R: Como $F_X(x)$ é uma função contínua, então $F_X(1^-) = F_X(1) = 1$.

---

e) Determine $P(X \leq 0)$, $P(X = 0)$ e $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$.

R: Por simetria, $P(X \leq 0) = 1/2$,

Por se tratar de uma v.a. contínua, $P(X = 0) = 0$.

A probabilidade do evento $[-1/2 \leq X \leq 1/2]$ pode ser pensada como a área total do triângulo, que vale 1, menos as duas áreas dos triângulos laterais menores. Esses triângulos menores são idênticos, com base e altura de $1/2$, logo sua área vale $1/8$.

Portanto, $P(-1/2 \leq X \leq 1/2) = 1 - 2 \times 1/8 = \mathbf{3/4}$.

(Uma outra forma de calcular:
$P(-1/2 \leq X \leq 1/2) = F_X(1/2) - F_X(-1/2) = 7/8 - 1/8 = 3/4$.)

---

f) Sem calcular, que valor você atribuiria a EX?

R: Por simetria e supondo que a esperança existe, então a esperança coincide com o ponto de simetria da densidade $f(x)$, ou seja, $EX = 0$.

---

g) Especifique, da forma mais clara possível, como você calcularia a FGM de X.

R: $M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx = \int_{-1}^{0}(x+1)e^{tx}\,dx + \int_{0}^{1}(1-x)e^{tx}\,dx$.
Essas integrais podem ser calculadas utilizando integração por partes.