

d-phi-enc (HackTM CTF)

Кулигин Данил и Борзенко Михаил

БФУ им. Иммануила Канта ИФМНиИТ
Компьютерная безопасность, 3 курс

1 июля 2023 г.

Условие задачи d-phi-enc

Описание с CryptoHack

- Описание к заданию: *"В CTF есть много людей, которые ошибочно шифруют p , q в RSA. Но на этот раз..."*
- Так же к задаче прилагаются файлы *chall.py* и *output.txt*. *output.txt* содержит n - произведение p и q , *enc_d* - зашифрованная секретная экспонента, *enc_phi* - зашифрованная функция Эйлера, *enc_flag* - зашифрованное сообщение. В *chall.py* содержится код для генерации этих значений и открытая экспонента e
- Понятно, что нам нужно каким-то образом извлечь d или ϕ на основе *enc_d* и *enc_phi*.

Анализ задачи d-phi-enc

Предварительный анализ

- Для начала проведем анализ данных нам чисел и проверим криптосистему на уязвимость к изученным нами атакам, в числе которых: Атака повторным шифрованием, Атака Винера, Атака встреча посередине, Атака методом Ферма.

Нам даны:

$n = 2447638356...$

$enc_d = 2385197103...$

$enc_phi = 3988439673...$

$enc_flag = 2403368891...$

$e = 3$

- Упрощая, нам дано n длиной 2048 бит. Также мы знаем, что длина p и q равна 1024 бита. Очевидно, что разложить n на множители вряд ли будет эффективным решением.

Анализ задачи d-phi-enc

Предварительный анализ

- Атака “встреча посередине” не будет успешной, т. к. обычно она срабатывает при малой длине сообщения ($l < 64$ бит) и наличии разложения на два примерно равных множителя, битовая длина которых меньше $l/2$.
- Атака методом Ферма также не принесёт результатов, т. к. данная атака могла бы быть успешна, если p и q “близкие” друг к другу числа (половина старших цифр числа равны).
- Атака Винера гарантированно успешна, при $d < d_{\text{кр}}$, где $d_{\text{кр}} = n^{1/4}/\sqrt{2a}$, $a = (h+1)/\sqrt{h}$, $h = p/q$.

Анализ задачи d-phi-enc

Предварительный анализ

- Как мы можем заметить, для вычисления $d_{кр}$ требуется знать p и q , а мы их пока что не знаем, но мы знаем точно, что попытка атаки Винера (метод которой заключается в разложении дроби e/n в цепную дробь для последующего нахождения d) не принесла результата.
- Атака повторным шифрованием также не дала быстрого результата, из чего можем сделать вывод, что порядок e по модулю сообщения достаточно велик.

Решение задачи d-phi-enc

Теоретические расчёты

- Из алгоритма работы RSA мы знаем, что d это обратное число к e по модулю $\varphi(n)$.

$$\begin{aligned}e \cdot d &\equiv 1 \pmod{\varphi(n)} \\e \cdot d &= k_1 \cdot \varphi(n) + 1\end{aligned}$$

- Т. к. $d < n$ и $e = 3$ можем сделать вывод, что $0 < k_1 < 3$.
Далее распишем d_{enc} используя сравнение выше.

$$\begin{aligned}d_{enc} &\equiv d^3 \pmod{n} \\e^3 \cdot d_{enc} &\equiv e^3 \cdot d^3 \pmod{n} \\27d_{enc} &\equiv (e \cdot d)^3 \pmod{n} \\27d_{enc} &\equiv (k_1 \cdot \varphi(n) + 1) \pmod{n} \\27d_{enc} &\equiv (k_1^3 \cdot \varphi^3(n) + 3k_1^2 \cdot \varphi^2(n) + 3k_1 \cdot \varphi(n) + 1) \pmod{n}\end{aligned}$$

Решение задачи d-phi-enc

Теоретические расчёты

- Заменяем $\varphi^3(n)$ на φ_{enc} , т. к. $e = 3$, а сравнение выполняется по модулю n , также как и шифрование.

$$27d_{enc} \equiv (k1^3 \cdot \varphi_{enc} + 3k1^2 \cdot \varphi^2(n) + 3k1 \cdot \varphi(n) + 1) \pmod{n}$$

- Перенеся всё в одну сторону можно получить квадратное сравнение от $\varphi(n)$

$$3k1^2 \cdot 2(n) + 3k1 \cdot (n) + k1^3 \cdot \varphi_{enc} - 27d_{enc} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

Решение задачи d-phi-enc

Теоретические расчёты

- Все переменные кроме $\varphi(n)$ даны. Однако, т.к. n не является простым числом, то решить такое сравнение можно только через систему сравнений по модулям множителей n , но в нашем случае множители неизвестны. Поэтому попробуем расписать $\varphi(n)$ для упрощения решения.

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= (p-1) \cdot (q-1) = pq - p - q + 1 = n - p - q + 1 \\ &\varphi(n) - (p+q) + 1 \pmod{n}\end{aligned}$$

Решение задачи d-phi-enc

Теоретические расчёты

- Обозначим $x = p + q$, тогда

$$3k1^2 \cdot \varphi^2(n) + 3k1 \cdot \varphi(n) + k1^3 \cdot \varphi_{enc} - 27d_{enc} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

$$3k1^2 \cdot (1 - x)^2 + 3k1 \cdot (1 - x) + k1^3 \cdot \varphi_{enc} - 27d_{enc} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

$$3k1^2 \cdot (1 - 2 \cdot x + x^2)^2 + 3k1 \cdot (1 - x) + k1^3 \cdot \varphi_{enc} - 27d_{enc} + 1 \equiv 0 \pmod{n}$$

$$3k1^2 \cdot x^2 + (-6k1^2 - 3k1)x + (3k1^2 + 3k1 + k1^3 \cdot \varphi_{enc} - 27d_{enc} + 1) \equiv 0 \pmod{n} \quad (1)$$

Решение задачи d-phi-enc

Теоретические расчёты

- Далее зная что $x = p + q$, можем сделать вывод что x гораздо меньше n . Допустим $p > q$.

$$x^2 = (p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2 \cdot p \cdot q = p^2 + q^2 + 2n$$

- Зная что p, q сгенерированы длиной 1024 бит, $p/q < 2$.

Можем записать такое неравенство:

$$p \leq 2 \cdot q, \text{ следовательно } p^2 \geq 4 \cdot q^2. \text{ А также } q^2 \leq n$$

$$p^2 + q^2 + 2 \cdot n \leq 4 \cdot q^2 + q^2 + 2 \cdot n$$

$$x^2 \leq 5 \cdot q^2 + 2 \cdot n$$

$$x^2 \leq 5 \cdot n + 2 \cdot n$$

$$x^2 \leq 7 \cdot n$$

Решение задачи d-phi-enc

Теоретические расчёты

- Используя коэффициент a из квадратного сравнения (1) распишем неравенство для x^2 .

$$3k_1^2 \cdot x^2 \leq 3 \cdot 2^2 \cdot x^2, \text{ так как } k_1 \leq 2.$$

$$3k_1^2 \cdot x^2 \leq 12 \cdot 7 \cdot n$$

$$3k_1^2 \cdot x^2 \leq 84 \cdot n$$

$$3k_1^2 \cdot x^2 + (-6k_1^2 - 3k_1)x + (3k_1^2 + 3k_1 + k_1^3 \cdot \varphi_{enc} - 27d_{enc} + 1) < 84n$$

- Мы знаем все числа из \mathbf{b} и \mathbf{c} коэффициентов неравенства выше, делаем вывод что \mathbf{b} и \mathbf{c} отрицательны, поэтому меняем знак на строгий.

$$3k_1^2 \cdot x^2 + (-6k_1^2 - 3k_1) \cdot x + (3k_1^2 + 3k_1 + k_1^3 \cdot \varphi_{enc} - 27d_{enc} + 1) = k_2 \cdot n, \text{ где } k_2 \leq 84, k_2 \in \mathbb{Z}.$$

Решение задачи d-phi-enc

Теоретические расчёты

- Таким образом мы можем перебрать все возможные k^2 чтобы решить уравнение, корнем которого будет x ,
 $x = p + q$.
- Для решения таска нам нужно знать $\varphi(n)$, оно находится с помощью выражения ниже, но мы также можем подсчитать p и q чтобы проверить наше решение $p \cdot q = n$.
 $\varphi(n) = n - p - q + 1$, домножим на p и перенесем всё в одну сторону.

$$pn - p^2 - pq + p - p \cdot \varphi(n) = 0$$

$$p^2 - pn - p + p \cdot \varphi(n) + n = 0$$

$$p^2 - p \cdot (n - \varphi(n) + 1) + n = 0$$

Решение задачи d-phi-enc

Теоретические расчёты

- Решением данного квадратного уравнения будут p и q .
Далее мы можем проверить выражение $p \cdot q = n$ и переходить к финальному шагу.
Вычисляем $d = e^{-1} \pmod{\varphi(n)}$
Вычисляем флаг: $flag = enc_flag^d \pmod{n}$
- С помощью функции `long_to_bytes` вычисляем текстовое значение флага, которое равно:
`b"HackTM{Have you warmed up? If not, I suggest you consider the case where e=65537, although I don't know if it's solvable. Why did I say that? Because I have to make this flag much longer to avoid solving it just by calculating the cubic root of enc_flag.}"`

Решение задачи d-phi-enc

Код для решения данной задачи

```
from Crypto.Util.number import long_to_bytes

n = 2447638356...
enc_d = 2385197103...
enc_phi = 3988439673...
enc_flag = 2403368891
e = 3

for k1 in range(1, 3):
    a = 3*(k1^2)
    b = -(6*(k1^2)+3*k1)
    c = 3*(k1^2) + 3*k1 + (k1^3)*enc_phi - 27*int(enc_d) + 1

    #f = a*(x^2) + b*x + c
    det = b^2 - 4*a*c
    for k2 in range(85):
        c -= n
        det = b^2 - 4*a*c
        if (is_square(det)): break
    if (is_square(det)): break
```

Решение задачи d-phi-enc

Код для решения данной задачи

```
qrs_det = sqrt(b^2 - 4*a*c)
print("qrs_det=", qrs_det)

cand_x = (-1*b + qrs_det)/(2*a) #x=p+q
phi = n - cand_x + 1
print("phi=", phi)

p = ((n + 1 - phi) + sqrt(((n + 1 - phi) ^ 2) - 4 * n))/ 2
q = n // p
print("p:␣", type(p), p)
print("q:␣", type(q), q)
assert(p*q == n)

d = pow(e, -1, phi)
print("flag=", (pow(enc_flag, d, n)))
```

Концепция RSA

Математическая модель

- Асимметричные криптографические системы основаны на так называемых односторонних функциях с секретом. Например, операция возведения числа в степень по модулю:

$$\begin{aligned}c &\equiv f(m) \equiv m^e \pmod{n} \\ m &\equiv f^{-1}(c) \equiv c^d \pmod{n} \\ d &\equiv e^{-1} \pmod{\varphi(n)}\end{aligned}$$

Концепция RSA

Математическая модель

- Асимметричные криптографические системы основаны на так называемых односторонних функциях с секретом. Например, операция возведения числа в степень по модулю:

$$\begin{aligned}c &\equiv f(m) \equiv m^e \pmod{n} \\ m &\equiv f^{-1}(c) \equiv c^d \pmod{n} \\ d &\equiv e^{-1} \pmod{\varphi(n)}\end{aligned}$$

- ***c*** получено возведением в степень по модулю числа ***m***. Назовём это действие шифрованием
m - открытый текст, а ***c*** - шифртекст
Пара чисел (***e***, ***n***) - открытый ключ
d - закрытый ключ

Концепция RSA

Математическая модель

- Пусть $n = p \cdot q$, где p и q – некоторые разные простые числа. Для такого n функция Эйлера имеет вид:

$$\varphi(n) = (p - 1) \cdot (q - 1)$$

Концепция RSA

Математическая модель

- Пусть $n = p \cdot q$, где p и q – некоторые разные простые числа. Для такого n функция Эйлера имеет вид:

$$\varphi(n) = (p - 1) \cdot (q - 1)$$

- Выберем такое число e :

$$e \in [3, \varphi(n) - 1]$$
$$\text{НОД}(e, \varphi(n) - 1) = 1$$

Вычислим d :

$$d \equiv e^{-1} \pmod{\varphi(n)}$$

Концепция RSA

Математическая модель

- Возьмём в качестве сообщения число $m \in [1, n - 1]$
Чтобы зашифровать его, необходимо возвести его в степень e по модулю n

$$c \equiv m^e \pmod{n}$$

Отметим также, что $c \in [1, n - 1]$, как и m . Расшифруем шифртекст, возведя его в степень закрытого ключа d :

$$m' \equiv c^d \pmod{n}$$

Используемая литература



Математика криптографии и теория шифрования. Лекция 13: Квадратичное сравнение.

<https://intuit.ru/studies/courses/552/408/lecture/9370>



RSA: от простых чисел до электронной подписи

<https://habr.com/ru/post/534014/>



Криптоанализ RSA. Сонг Ян, 2011 год. ISBN 978-5-93972-873-7.



The CrypTool Book: Learning and Experiencing Cryptography with CrypTool and SageMath. Prof. Bernhard Esslinger and the Development Team of the Open-Source Software CrypTool. Edition 12 (2018).

<https://www.cryptool.org>