ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Дисциплина:
«Прикладная математика»

Отчет по лабораторной работе №4
Методы решения СЛАУ

Студенты:
Никитин Александр, M32041
Игнатьев Андрей, M32041
Курепин Даниил, M32041

Преподаватель:
Гомозова Валерия Эдуардовна

Задачи:

1. Реализовать метод Гаусса с выбором ведущего элемента для решения СЛАУ.

2. Реализовать алгоритм LU-разложения с использованием разреженно-строчного (разреженно-столбцового) формата хранения матрицы, а также метод решения СЛАУ с использованием LU-разложения.

3. Реализовать итерационный метод решения СЛАУ (метод Зейделя, Якоби или верхней релаксации на выбор).

4. Провести исследование реализованных методов на системах с матрицами $A^{(k)}$, число обусловленности которых регулируется за счет изменения диагонального преобладания. Внедиагональные элементы матрицы $A^{(k)}$ выбираются случайным образом из множества

   $$a_{ij} \in \{0, -1, -2, -3, -4\},$$

   а диагональные элементы определяются из условия

   $$a_{ii} = \begin{cases} -\sum_{i \neq j} a_{ij} & if \quad i > 1 \\ -\sum_{i \neq j} a_{ij} + 10^{-k} & if \quad i = 1, \end{cases}$$

   где сумма вычисляется *только по строке.*

   Для исследования работы методов рекомендуется решать СЛАУ вида:

   $$A^{(k)} x^k = F^k$$

   где для определения правой части F^k рассматривается вектор $x^k = (1, 2, \ldots, n)^T$, что позволяет в дальнейшем сравнивать точное и приближенное решение.
5. Оценить зависимость числа обусловленности и точности полученного решения в зависимости от параметра k.

6. Провести аналогичные исследования на матрицах Гильберта, которые строятся согласно формуле

   $$a_{ij} = \frac{1}{i + j - 1}, \qquad i, j = 1, .., n$$

   где n - размерность матрицы.
7. Сравнить между собой прямые и итерационные методы по эффективности методов в зависимости от размеров n матрицы:

   $$n \in \{10, 50, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5\}$$

Теория

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента — это один из методов решения систем линейных уравнений. Он используется для того, чтобы решить систему линейных уравнений вида Ax=b, где A - квадратная матрица коэффициентов, b - вектор правой части уравнения, а x - вектор неизвестных.

Алгоритм метода Гаусса с выбором ведущего элемента заключается в следующем:

1. На каждой итерации выбирается главный элемент - элемент с наибольшим по модулю значением в текущем столбце, начиная с диагонального элемента. Формула для нахождения главного элемента в k-м столбце:

$$max_{i=k}^{n}|a_{ik}|$$

2. Если главный элемент не является диагональным элементом, то производится перестановка строк, чтобы главный элемент стал на диагонали. Формула для перестановки строк:

$$a_{[i,k],:} \leftrightarrow a_{[m,k],:}$$

$$b_i \leftrightarrow b_m$$

3. Выполняется приведение матрицы к треугольному виду путем вычитания из строк соответствующих им строк, умноженных на коэффициенты таким образом, чтобы в этих строках обнулились все элементы, кроме диагональных. Формула приведения матрицы к треугольному виду:

$$a_{j,:} = a_{j,:} - \frac{a_{jk}}{a_{kk}} a_{k,:} \quad \text{для } j = k+1, \dots, n$$

$$b_j = b_j - \frac{a_{jk}}{a_{kk}} b_k \quad \text{для } j = k+1, \dots, n$$

4. Затем, решается система линейных уравнений с треугольной матрицей с помощью обратного хода метода Гаусса. Формула для обратного хода метода Гаусса:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j\right) \quad \text{для } i = n-1, \dots, 0$$

В итоге метод Гаусса с выбором ведущего элемента позволяет решать системы линейных уравнений с матрицами, которые могут быть плохо обусловлены или содержать нулевые элементы на диагонали. Он является одним из наиболее эффективных методов решения систем линейных уравнений и находит применение во многих областях, таких как математическое моделирование, экономика, физика и т. д.

Алгоритм LU-разложения

Алгоритм LU-разложения (разложение матрицы на нижнетреугольную и верхнетреугольную) - это метод решения систем линейных уравнений, который заключается в представлении исходной матрицы коэффициентов системы уравнений в виде произведения двух треугольных матриц:

$$A = LU,$$

где L - нижнетреугольная матрица, а U - верхнетреугольная матрица.

Для нахождения матриц L и U можно использовать метод Гаусса с выбором ведущего элемента, примененный к матрице A. В результате приведения матрицы A к верхнетреугольному виду получаем:

$$Ux = y,$$

где x - вектор неизвестных, а y - вектор правой части системы уравнений.

Далее, используя свойства матричных операций, можно записать матрицу A как произведение матриц L и U:

$$A = LU,$$

где

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений можно записать в виде:

$$LUx = y.$$

Так как L и U - треугольные матрицы, то систему можно решить методом прогонки, выполнив два обратных хода метода Гаусса: сначала решаем систему $Ly = b$, а затем систему $Ux = y$.

Таким образом, алгоритм LU-разложения позволяет решать системы линейных уравнений более эффективно, чем метод Гаусса, так как разложение матрицы A на матрицы L и U выполняется один раз, а затем можно решать системы с той же матрицей L и разными матрицами U.

Итерационный метод решения СЛАУ (метод Зейделя)

Итерационные методы решения систем линейных уравнений (СЛАУ) основаны на последовательном уточнении решения системы на каждой итерации. Один из таких методов - метод Зейделя.

Метод Зейделя является итерационным методом, основанным на преобразовании исходной системы линейных уравнений $Ax = b$ к виду:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

В методе Зейделя решение на каждой итерации вычисляется последовательным обновлением компонент вектора x. В отличие от метода Якоби, где все компоненты вектора x вычисляются с использованием компонент предыдущего вектора x, метод Зейделя вычисляет новые значения компонент вектора x по мере того, как они обновляются.

Алгоритм метода Зейделя выглядит следующим образом:

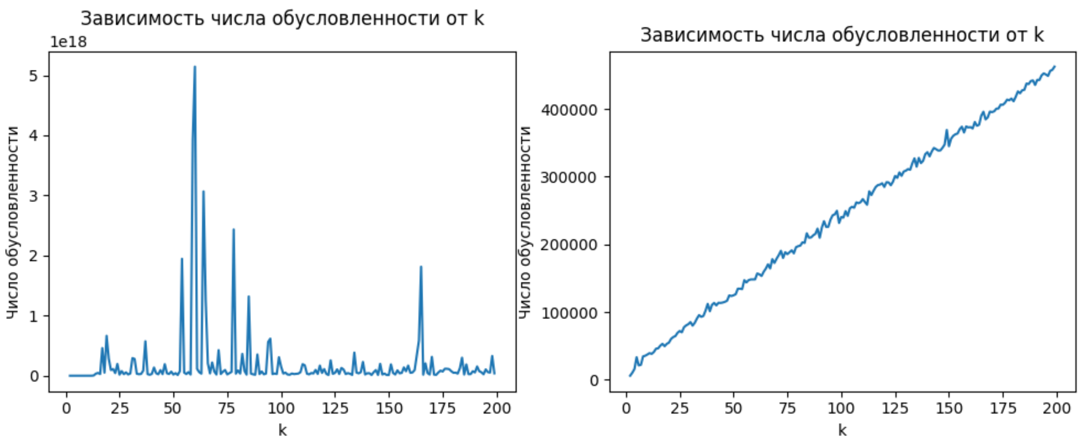
2. Выбрать начальное приближение $x^{(0)}$.
3. Вычислить новые значения компонент вектора x по формулам:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}\, x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}\, x_j^{(k)}\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

4. Если достигнуто заданное число итераций или достигнута требуемая точность, остановить процесс и вернуть найденное решение $x^{(k+1)}$, иначе вернуться к шагу 2.

Метод Зейделя является более эффективным, чем метод Якоби, потому что за одну итерацию метод Зейделя использует уже обновленные значения компонент вектора x.

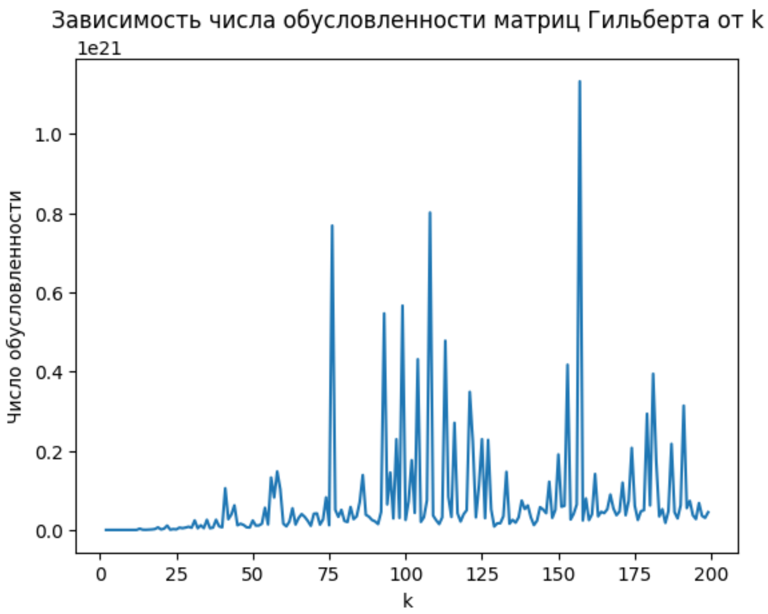
Результаты
Из пункта (4):
Мы провели исследование реализованных нами методов на системах с матрицами $A^{(k)}$, число обусловенности которых регулируется за счет изменения диагонального преобладания. Внедиаганальные методы выбираются случайный образом. Вычислим число обусловенности для каждого значения k и строим графики зависимости:



Примечание: если делать матрицы в точности как в условии, видно, что есть серьёзные проблемы, но, если немного добавить к каждому диагональному элементу, все становится нормальным и зависимость числа обусловленности от k приобретает линейный вид.

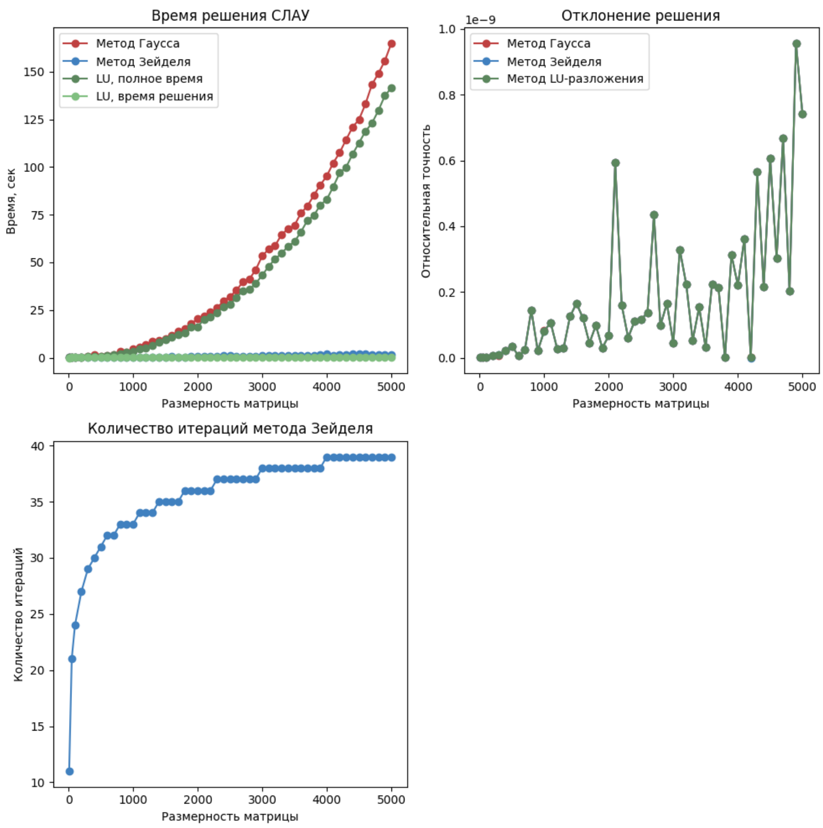
Из пункта (6):

Мы провели аналогичные исследования на матрицах Гильберта:



Из пункта (7):

В данном пункте нам предлагается сравнить наши методы (прямые и итерационные) по эффективности в зависимости от размеров n. Результаты, которые были получены и их графики:



Вывод

При решении систем линейных уравнений методами прямого типа, например, методом Гаусса или LU-разложением, точность решения зависит от числа обусловленности матрицы.
Чем выше число обусловленности матрицы, тем более неточными и неустойчивыми становятся решения системы линейных уравнений.
Это связано с тем, что при вычислениях с плохо обусловленными матрицами ошибки округления могут сильно искажать результаты.
Матрицы Гильберта — это пример плохо обусловленных матриц, которые могут приводить к большим ошибкам при решении систем линейных уравнений. Поэтому при решении систем линейных уравнений с помощью прямых методов на практике необходимо учитывать плохую обусловленность матрицы и предпринимать меры для уменьшения ошибок, например, использовать итерационные методы решения систем линейных уравнений, которые могут быть более устойчивы к плохо обусловленным матрицам.
Метод Гаусса и метод LU-разложения работают примерно одинаково по времени (LU немного быстрее), метод Зейделя значительно обходит оба этих метода при той же точности.