

Задание 1

Вывести формулу Лоренц-Лоренца:

Решение:

Вещества с частицами нескольких сортов у которых поляризуемость равна a_i и объемные концентрации равны N_i :

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} \sum_{i=1}^k N_i a_i$$

Если говорить про однородные вещества, то мы получим формула вида:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N a, \text{ где } n - \text{это показатель преломления.}$$

По первому приближению теории атомного строения, можно сказать, что для достаточность слабых полей поляризация P пропорциональна напряженностям электрического поля E .

Говоря другим языком: $P = \eta E$

(η – это диэлектрическая (магнитная) восприимчивость).

Если мы подставим данное выражение для η в уравнение $D = \varepsilon E = E + 4\pi P$, то мы сможем получить выражение вида: $\varepsilon = 1 + 4\pi\eta$.

Теперь рассмотрим эффективное поле E' , которое действует на молекулу. Среднее или наблюдаемое поле E , которое был получено усреднением по области, содержит множество молекул. Различие между этими двумя полями обусловлено промежутками между молекулами и зависит от числа молекул в единицу объема – концентрации N .

Чтобы оценить $E' - E$ можно рассмотреть отдельно молекулу и представить, что она окружена небольшой сферой, радиус которой велик по сравнению с ее линейными размерами. Тогда мы можем отдельно рассмотреть влияние на центральную молекулу вещества, находящегося снаружи и внутри этой сферы.

Если определить влияние среды, расположенной вне сферы, то становится очевидно, что можно пренебречь молекулярной структурой и считать среду непрерывной. В таком случае мы имеем право предположить, что вне сферы поляризации P , создаваемая средним электрическим полем постоянна. Значит, молекулы, которые

находятся внутри сферы, не создают какого-либо результирующего поля вблизи центральной молекулы. Это можно показать для ряда важных отдельных случаев, например, для хаотического распределения.

Исходя из выше сказанного, мы можем считать, что молекула распложена в такой сферической области, внутри которой вакуум, а вне – равномерно поляризованная среда. Далее нам нужно определить потенциал φ такой конфигурации – потенциал, создаваемый свободными зарядами, находящимися на сферической поверхности разрыва, на которой величина P меняется от значения, равного нулю внутри сферы, до постоянного значения вне сферы.

Давайте рассмотрим потенциал $\tilde{\varphi}$ дополнительной конфигурации, а если точнее, однородно поляризованной сферы, находящейся в вакууме. Суперпозиция таких двух конфигураций дает равномерно поляризованную среду, свободную от всяких границ. Следовательно, потенциал, обусловленный границей, равен нулю и в этом случае:

$\varphi + \tilde{\varphi} = 0$. Далее получим:

$$\varphi = \int \left\{ [P] * grad' \frac{1}{R} + \frac{1}{cR^2} R * [\dot{P}] \right\} dV'$$

Из выражения выше мы можем получить потенциал φ учитывая, что P постоянным:

$$\varphi = -\tilde{\varphi} = -P * \int grad' \frac{1}{R} dV'$$

Поскольку $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$.

Далее можно заменить $grad'$ на $-grad$ и тогда мы получим:

$$-\varphi = P * grad \int \frac{dV'}{R} = -P * grad \varphi_0, \text{ где } \varphi_0 = - \int \frac{dV'}{R}$$

Полученное выше выражение мы можем рассматривать как потенциал однородно заряженной сферы с плотностью заряда -1. Тогда оно удовлетворяет уравнению Пуассона.

$$\nabla^2 \varphi_0 = 4\pi$$

Теперь наши компоненты поля, которые связаны с потенциалом примут вид:

$$-\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{dx} \left[P_x * \frac{d\varphi_0}{dx} + P_y * \frac{d\varphi_0}{dy} + P_z * \frac{d\varphi_0}{dz} \right] = P_x * \frac{d^2\varphi_0}{dx^2} + P_y * \frac{d^2\varphi_0}{dxdy} + P_z * \frac{d^2\varphi_0}{dxdz}$$

Далее:

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} = \frac{d^2\varphi_0}{dxdy} = \frac{d^2\varphi_0}{dxdz} = 0$$

$$\frac{d^2\varphi_0}{dx^2} = \frac{d^2\varphi_0}{dxdy} = \frac{d^2\varphi_0}{dxdz} \text{ (Из условия симметрии в центре поля).}$$

Значит, применив уравнение Пуассона мы можем найти, что каждый член равенств выше равен $\frac{4\pi}{3}$. Соответственно, выражение для компонента поля показывает, что искомый вклад в эффективное поле равен: $-\nabla\varphi = \frac{4\pi}{3}$. Полное поле внутри сферы, которое представляет собой эффективное поле, действующее на центральную молекулу, получается при добавлении к этой величине среднего поле E :

$E' = E + \frac{4\pi}{3}P$. Тогда можно предположить, что для каждой молекулы электрический дипольный момент p , возникающий под влиянием поля, пропорционален эффективному полю E' : $p = aE'$.

Тогда N - число молекул в единице объема и поляризация будет равна:

$$P = Np = NaE'.$$

Выражение для электрической восприимчивости:

$$\eta = \frac{Na}{1 - \frac{4\pi}{3}Na}$$

Мы можем подставить η в формулу диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\eta$$

Тогда формула диэлектрической проницаемости примет вид:

$$\varepsilon = \frac{1 + \frac{8\pi}{3}Na}{1 - \frac{4\pi}{3}Na}$$

Используем соотношение $\varepsilon = n^2$, тогда получим:

$$a = \frac{3}{4\pi N} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{3}{4\pi N} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$$

Из выражения выше получаем формулу Лоренц-Лоренца:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi Na}{3}$$

Ч.т.д.

Задание 2

Что такое метаматериалы? Какими свойствами они характеризуются? Где находят применение? Почему современные исследования метаматериалов сложно вести в оптическом диапазоне?

Решение:

Метаматериал – это искусственное композитное вещество, способное взаимодействовать с электромагнитными волнами так, как не могут это делать природные материалы. Свойства метаматериала обусловлены не столько свойствами составляющих его элементов, сколько искусственно созданной периодической структурой из макроскопических элементов, обладающих произвольными размерами и формой.

Свойства метаматериалов:

1. Основное свойство – отрицательный коэффициент преломления.
2. Фаза сигнала, движущегося от источника, опережает его.
3. Исчезающие волны усиливаются по мере удаления от источника.

Применение:

Из-за отрицательного показателя преломления метаматериалы идеальны для маскировки объектов, так как их невозможно обнаружить средствами радиоразведки.

Также в оптике дифракционное преломление находит широчайшее применение (суперлинза, которая позволяет решить проблему дифракционного предела разрешения стандартной оптики).

Метаматериалы могут применяться для создания более эффективных антенн и устройств для сотовых телефонов, расширения плотности хранения данных на дисках и более сложных электронных схемах.

Почему современные исследования метаматериалов сложно вести в оптическом диапазоне?

Оптический диапазон содержит очень короткие волны – несколько нанометров. Из-за этого метаматериалы, которые взаимодействуют с такими волнами, очень сложны в изготовлении и требуют невероятно высокой точности оборудования. Но если создать более крупномасштабный материал, в котором будут не оптические – 400-700 нм, а радиоволны – 7-8 см, то физика процесса от такого масштабирования не изменится, зато технология их создания станет проще. Еще, помимо этого, эффекты, которых стараются добиться ученые, часто имеют очень короткий срок действия, что делает их невозможными для рассмотрения человеком или регистрацией обычным оборудованием.

Задание 3

Что называют первым и вторым приближением дисперсии? В каких волноводах будут происходить наименьшие потери информации?

Решение:

Первым приближением в теории дисперсии называется способ перехода от уравнения дисперсионной зависимости $k(\omega)$ к уравнению переноса энергии с помощью разложения в ряд Тейлора функции $k(\omega)$ до второго слагаемого. Об этом можно сказать исходя из того, что профиль огибающей не меняется и распространяется с групповой скоростью. Энергия также переносится с групповой скоростью

Вторым приближением в теории дисперсии называется метод получения выражений зависимости для комплексной амплитуды, фазы импульса, огибающей и длительности импульса от различных параметров системы.

В каких волноводах будут происходить наименьшие потери информации?

Волноводами называются металлические трубки различного профиля, внутри которых распространяются электромагнитные волны (в миллиметровом диапазоне длин волн волноводы могут быть сделаны и из диэлектрика).

Чтобы достичь наименьших потерь энергии нужно понять из-за чего эти потери могут происходить. В основном это происходит из-за: шероховатости границ раздела волноводных слоев, потерь на поглощение, излучательных потерь.

Соответственно, чтобы потери были минимальны, нужно, чтобы волноводы были с гладкими границами раздела волноводных слоев. Хорошо подходят волноводы с большой удельной проводимостью с серебряным или золотым напылением внутренней поверхности с целью избежания окисления.