Задание после лекции 4

Курепин Даниил Денисович

М32041

Задание 1

Вывести соотношение неопределенности из эффекта Доплера.

Решение:

Эффект Доплера – это изменение частоты излучения при движении источника излучения.

Выведем соотношение неопределенности из эффекта Доплера, которое записывается, как: $\rho_x \cdot \Delta x \geq h$.

Допустим, что источник излучения с частотой ω движется на нас со скоростью равной V, то получается, что он сместится за $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (период колебания) на расстояние:

$l = V \cdot t = \frac{2\pi V}{\omega}$.

В этот же промежуток времени фронт волны, излученный в момент времени t = 0 сместится на $\frac{2\pi c}{\omega}$. Таким образом расстояние между двумя фронтами волны, отличающимися по фазе на 2pi есть по определению дина волны в неподвижной системе координат: $\lambda' = \frac{2\pi c}{\omega} - \frac{2\pi V}{\omega}$.

$$\omega' = \frac{2\pi c}{\lambda'} = \frac{2\pi c \cdot w}{2\pi(c - v)} = \frac{c \cdot \omega}{(c - v)}$$

Из предыдущих выражений следует, что для измеряемой неподвижным наблюдателем частоты излучения : $\omega' = \frac{2\pi c}{\omega}{}' \approx \left(1 + \frac{v}{c}\right)\omega$.

Но если регистрировать отраженную волну, то эффект удваивается (например, в схеме радара):

$$\omega' = \left(1 + \frac{2v}{c}\right)\omega \ .$$

Мы считаем, что частота падающего излучения задана и необходимо измерить изменение частоты возвращающегося излучения. Для этого необходимо регистрировать отраженную волну в течение некоторого времени $\tau = \frac{1}{\Delta\omega}$. Благодарю этому измерению мы сможем найти скорость частицы с точностью $\Delta v = \frac{c}{2}\frac{\Delta\omega}{\omega}$.

Следовательно, координаты частицы после этого измерения мы будем знать с точностью $\Delta x = \Delta V\tau \sim \frac{c}{2\omega}$. Таким образом, полученное значение будет близко к длине волны, что логично.

В результате измерения к импульсу частицы добавляется изменение импульса отраженного фотона $\Delta^{p} = 2\frac{h\omega}{c}$.

Произведение двух последних выражений даст нам соотношение неопределенности:

$\rho_x \cdot \Delta x \geq h$.

(Источник)

Задание 2

Пояснить парадокс ЭПР (парадокс Эйнштейна, Подольского, Розана). Как этот парадокс можно объяснить?

Решение:

Парадокс Эйнштейна-Подольского-Розена – парадокс, предложенный для указания на неполноту квантовой механики с помощью мысленного эксперимента, заключающегося в измерении параметров микрообъекта косвенным образом, без непосредственного воздействия на данный объект.

В чем заключается суть парадокса ЭПР?

Согласно соотношению неопределенностей Гейзенберга, нет возможности точно измерить координату частицы и ее импульс. Предполагая, что причиной неопределённости является то, что измерение одной величины вносит принципиально неустранимые возмущения в состояние и производит искажение значения другой величины, можно предположить гипотетический способ, которым соотношение неопределенности можно обойти:

Допустим, что две одинаковые частицы **А** и **В** образовались в результате распада третьей частицы **С**. В данном случае, по закону сохранения импульса, суммарный импульс **А** и **В** $p_A + p_B$ должен быть равен их исходному импульсы третьей частицы p_C. Другими словами, импульсы двух частицы должны быть связаны. В таком случае, это нам дает возможность измерить импульс одной частицы **А** и по закону сохранения импульса:

$p_B = p_C - p_B$ рассчитать импуль второй частицы **В** , не внося в ее движение никаких возмущений. Теперь, измерив координату второй частицы, можно получить для этой частицы двух неизмеримых одновременно величин, что по законам квантовой механики невозможно. Исходя из этого, можно сделать вывод, что соотношение неопределенности не является абсолютным, а законы квантовой механики являются неполными и должны быть в будущем уточнены.

В случае, если же законы квантовой механики не нарушаются, то измерение импульса одной частицы равносильно измерению импульса второй частицы. Однако это создает впечатление мгновенного воздействия частицы на вторую в противоречии с принципом причинности (один из самых общих физических принципов, устанавливающий допустимые пределы влияния событий друг на друга).

Объяснение парадокса ЭПР:

С точки зрения авторов эксперимента ЭПР, можно одновременно точно измерить координату и импульс частицы. В это же время в квантовой механике утверждается, что это невозможно. На основании этого Эйнштейн, Подольский и Розен сделали вывод о неполноте квантовой теории. На самом деле, эксперимент, описанный ЭПР не противоречит квантовой механике и легко анализируется с ее помощью:

В квантовой механике в рездьтате измерения происходит изменение состояния системы. Если у частицы измеряется импульс ρ, значит, она переходит в состояние, описываемое волновой функцией $\psi_p(x)$. Повторные измерения импульса в этом состоянии всегда будут приводить к одному и тому же ρ. В данном случае, можно говорить, что частица $\psi_p(x)$ характеризуется определенным значением импульса ρ.

В состоянии $\psi_p(x)$ можно сколько угодно точно измерить координату частицы, обнаружив ее с вероятностью $\left|\psi_p(x)\right|^2$ в некоторой точке пространства x. Тем не менее, состояние частица после такого измерения изменится: она перейдет в состояние с определлнным значением координаты x.

В частности, если после измерения x снова измерить импульс, то получится значение, которое, вероятно, будет отличаться от начального.

Следовательно:

1) *Непосредственно перед измерением координаты импульс имеет определенное значение.*
2) *В момент измерения получается определенное значение координаты. Однако не следует, что координата и импульс в момент измерения x имеет совместные, одновременно известные значения.*

В эксперименте ЭПР после измерения импульса у первой частицы вторая частица также переходит состояние с определенным импульсом. У нее можно измерить координату, одна сразу после такого измерения импульс частица изменится, поэтому говорить, что произошло одновременное измерение координаты и импульса смысла не имеет.

(Источник)

Задание 3

(III) Show that the uncertainty principle holds for a "wave packet" that is formed by two waves of similar wavelength λ_1 and λ_2. To do so, follow the argument leading up to Eq. 16–8, but use as the two waves $\psi_1 = A \sin k_1 x$ and $\psi_2 = A \sin k_2 x$. Then show that the width of each "wave packet" is $\Delta x = 2\pi/(k_1 - k_2) = 2\pi/\Delta k$ (from $t = 0.05$ s to $t = 0.15$ s in Fig. 16–17). Finally, show that $\Delta x\, \Delta p = h$ for this simple situation.

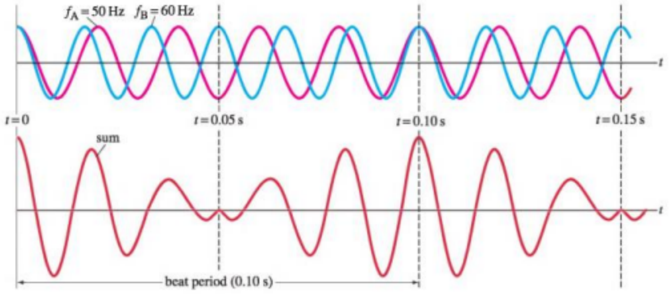

FIGURE 16–17 Beats occur as a result of the superposition of two sound waves of slightly different frequency.

Решение:

Пусть $\psi_1 = A \cdot \sin(K_1 x)$; $\psi_2 = A \cdot \sin(K_2 x)$

Значит, $\psi = \psi_1 + \psi_2 = A\sin(k_1 x) + A\sin(k_2 x) = 2A\sin\left(\frac{k_1+k_2}{2}x\right)\cos\left(\frac{k_1-k_2}{2}x\right)$

Из выражения выше получаем: $2A\sin\left(\frac{k_1+k_2}{2}x\right) \cdot \cos\left(\frac{\Delta k}{2} \cdot x\right)$

Рассмотрим случай $\frac{\Delta k}{2}x = 0$

Тогда $\cos(\frac{\Delta k}{2}x) = 0$ => $x = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k\right) \cdot \frac{2}{\Delta k}$

Можно вывести зависимость, поскольку $\psi_1 + \psi_2$ является периодической функцией: $x(k) = \frac{(2\pi-1)\pi}{\Delta k}$.

Поскольку при $\cos(\frac{\Delta k}{2}x)$ функция $\psi = 0$, расстояние между соседними значениями будет шириной волнового пакета: $\Delta x = x(k+1) - x(k) = \frac{(2\pi+1)\pi}{\Delta k} - \frac{(2\pi-1)\pi}{\Delta k} = \frac{2\pi}{\Delta k}$.

Итого, $\Delta x \cdot \Delta p = \Delta x \cdot h \cdot \Delta k = \Delta x \cdot \frac{2\pi}{\Delta x} \cdot h = 2\pi \cdot h = h$ => $\Delta x \cdot \Delta p = h$ ч.т.д