§3. Методы численного решения задач линейной алгебры часть 2

Численные методы

➨4. $LU-$ разложение матрицы

Теорема (об $LU-$ разложении). Пусть все угловые миноры матрицы A отличны от нуля $\left(\Delta_j \neq 0, j = \overline{1, n}\right)$. Тогда матрицу A можно представить единственным образом в виде произведения $A = LU$, где L − нижняя треугольная матрица с ненулевыми диагональными элементами, а U − верхняя треугольная матрица с диагональными элементами, равными единице.

Следствие. Метод Гаусса можно применять тогда и только тогда, когда все угловые миноры матрицы отличны от нуля.

Замечание. Данный критерий проверить достаточно трудно. Поэтому на практике проверяют выполнение следующего условия.

Если в матрице A преобладают диагональные элементы, то есть

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{n} |a_{ij}| \qquad \forall\, i = \overline{1, n},$$

то все угловые миноры этой матрицы отличны от нуля.

Напомним, что прямой ход метода Гаусса состоит в преобразовании исходной СЛАУ $Ax = b$ в эквивалентную систему $Cx = y$:

$$(C|y) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2n} & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & y_n \end{array}\right)$$

где C − верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали.

- На *1-м* шаге прямого хода метода Гаусса исключение неизвестного x_1 эквивалентно умножению матричного уравнения $Ax = b$ слева на матрицу L_1:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1/a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21}/a_{11} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1}/a_{11} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

После *1-го* шага получим систему:

$$\underbrace{(L_1 A)}_{C} x = \underbrace{L_1 b}_{y}.$$

- На *2-м* шаге прямого хода метода Гаусса исключение неизвестного x_2 эквивалентно умножению матричного уравнения $Ax = b$ слева на матрицу L_2:

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_{22}^{(1)} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -a_{n2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

После *2-го* шага получим систему:

$$\underbrace{(L_2 L_1 A)}_{C} x = \underbrace{L_2 L_1 b}_{y}.$$

- После *n-го* шага метода Гаусса СЛАУ $Ax = b$ примет вид

$$\underbrace{(L_n L_{n-1} \cdots L_2 \, L_1 A)}_{C} \, x = \underbrace{L_n L_{n-1} \cdots L_2 L_1 b}_{y}.$$

Обозначим $U \equiv C = L_n L_{n-1} \cdots L_2 \, L_1 A$ − верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали и представим матрицу A в виде:

$$A = EA = \underbrace{(L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{n-1}^{-1} L_n^{-1})}_{L} \, \underbrace{(L_n L_{n-1} \cdots L_2 \, L_1 A)}_{U} = LU,$$

где L − нижняя треугольная матрица.

- Таким образом, решение СЛАУ $LUx = b$ сводится к последовательному решению двух систем:
- $Ly = b -$ с нижней треугольной матрицей (из *1-го* уравнения системы находят y_1, затем подставляют это значение во *2-е* уравнение, из которого находят y_2 и т. д.);
- $Ux = y -$ с верхней треугольной матрицей (из *n-го* уравнения системы находят x_n, затем подставляют это значение в *(n-1)-е* уравнение, из которого находят x_{n-1} и т. д.).

Алгоритм нахождения $LU-$ разложение матрицы A

$$l_{i1} = a_{i1},$$

$$l_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}\,, \qquad i \geq j > 1;$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}},$$

$$u_{ij} = \frac{1}{l_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}\right), \qquad 1 < i < j.$$

5. Пример (решение СЛАУ методом Гаусса без выбора главного элемента)

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 22, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 7x_4 = 38, \\ 4x_1 + x_2 - x_4 = 8, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 20. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы (прямой ход):

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 22 \\ 3 & 5 & 1 & 7 & 38 \\ 4 & 1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 22 \\ 0 & -1 & -8 & -5 & -28 \\ 0 & -7 & -12 & -17 & -80 \\ 0 & -2 & -4 & -5 & -24 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 22 \\ 0 & 1 & 8 & 5 & 28 \\ 0 & 0 & 44 & 18 & 116 \\ 0 & 0 & 12 & 5 & 32 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 22 \\ 0 & 1 & 8 & 5 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 9/22 & 29/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1/11 & 4/11 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 22 \\ 0 & 1 & 8 & 5 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 9/22 & 29/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1/11 & 4/11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 22 \\ 0 & 1 & 8 & 5 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 9/22 & 29/11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right).$$

Обратный ход:

$x_4 = 4,$

$x_3 = \dfrac{29}{11} - \dfrac{9}{22} x_4 = 1,$

$x_2 = 28 - 5x_4 - 8x_3 = 0,$

$x_1 = 22 - 4x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 3.$

Ответ: $x = (3,0,1,4)^T$.

➨Пример (решение СЛАУ с применением LU– разложения матрицы A)

$A = LU$, где

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 44 & 0 \\ 2 & -2 & 12 & 1/11 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 9/22 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решая систему $Ly = b$, находим $y = \left(22, 28, \frac{29}{11}, 4\right)^T$,

затем решая систему $Ux = y$, находим $x = (3,0,1,4)^T$.

Ответ: $x = (3,0,1,4)^T$.

6. Нахождение обратной матрицы

Пусть A − квадратная матрица, $\det A \neq 0$. Нахождение обратной матрицы эквивалентно решению матричного уравнения $AX = E$, где E − единичная матрица.

Обозначения:

$$x^{(j)} = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \cdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$$ − *j-й* столбец матрицы X;

$\delta^{(j)}$ − *j-й* столбец матрицы E

(столбец, в котором *j-я* компонента равна единице, а все остальные компоненты равны нулю).

- Найдем j-*й* столбец матрицы X, решив СЛАУ:

$$Ax^{(j)} = \delta^{(j)}, \qquad j = \overline{1, n}.$$

Для решения этой СЛАУ применим метод Гаусса (без выбора главного элемента).

Прямой ход: получение разложения матрицы $A = LU$.

Обратный ход: последовательное решение систем с нижней и верхней треугольными матрицами.

Для каждого значения j сначала решается система $Ly^{(j)} = \delta^{(j)}$, а затем решается система $Ux^{(j)} = y^{(j)}$. Результат: найден j-*й* столбец матрицы X.

7. Метод квадратных корней

Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$, где $\det A \neq 0$, A – симметричная положительно определенная матрица.

Представим матрицу A в виде $A = LL^T$, где L – нижняя треугольная матрица:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix}, \quad l_{kk} > 0.$$

Решение СЛАУ $Ax = b$ сводится к последовательному решению двух систем: $Ly = b$ – с нижней треугольной матрицей;

$L^T x = y$ – с верхней треугольной матрицей.

Алгоритм нахождения матрицы L

$$j = 1:\ l_{11} = \sqrt{a_{11}},\quad l_{i1} = \frac{1}{l_{11}} a_{i1},\quad i = \overline{2, n};$$

$$j = 2:\ l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2},\ l_{i2} = \frac{1}{l_{22}}(a_{i2} - l_{i1} l_{21}),\quad i = \overline{3, n};$$

$$\ldots$$

$$j = k:\ l_{kk} = \sqrt{a_{kk} - l_{k1}^2 - l_{k2}^2 - \cdots - l_{k,k-1}^2},$$

$$l_{ik} = \frac{1}{l_{kk}}(a_{ik} - l_{i1} l_{k1} - l_{i2} l_{k2} - \cdots - l_{i,k-1} l_{k,k-1}),\quad i = \overline{k+1, n};$$

$$j = n:\ l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - l_{n1}^2 - l_{n2}^2 - \cdots - l_{n,n-1}^2}.$$

- Замечание. Можно доказать, что положительность подкоренных выражений является следствием положительной определенности матрицы A.

- Преимущества метода:

- меньшее число арифметических операций по сравнению с методом Гаусса;
- гарантированная устойчивость;
- не требуется дополнительная память для хранения элементов матрицы L: в процессе вычислений найденные элементы l_{ij} последовательно замещают элементы a_{ij}, которые используются один раз для вычисления l_{ij}.