2015

Московский ордена Ленина, ордена Октябрьской Революции и
ордена Трудового Красного Знамени
Государственный Технический Университет имени Н.Э.Баумана

Учебное пособие

К ВЫПОЛНЕНИЮ ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ И ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ ПО КУРСУ «ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ»

КРУГЛОВ Г. В.

Оглавление

Исходные данные задания

№	$F_д$, кГц	Интегратор	Дифференциатор	Резонатор и режекторный фильтр		фильтр Баттерворта		
		τ/T	τ/T	f_0, Гц	B, Гц	f_0, Гц	f_1, Гц	L, дБ
1	10	0.70	10.2	1900	100	1900	$=f_0*2$	21
2	10	9.30	0.84	2100	70	2100		22
3	10	1.08	30.9	2200	150	2200		17
4	5	28.0	1.12	550	45	550		10.7
5	5	14.1	1.26	750	43	750		11
6	10	32.8	1.44	2150	115	2150		21.3
7	5	16.0	0.90	670	55	670		11
8	5	0.92	14.2	950	78	950		14
9	10	1.48	27.8	1800	95	1800		20
10	5	0.84	9.08	380	34	380		16
11	10	38.0	1.50	2210	221	2210		22
12	10	1.19	31.5	2450	230	2450		22
13	5	11.4	0.64	380	20	380		9
14	5	10.6	0.78	770	87	770		12
15	5	19.2	0.89	930	93	930		13
16	10	32.1	1.04	2070	200	2070		18
17	10	1.46	26.6	2340	115	2340		13
18	5	0.74	13.9	530	47	530		13
19	10	1.33	23.3	1960	100	1960		18
20	10	20.5	1.28	1520	136	1520		15
21	5	9.90	0.76	400	19	400		10
22	5	13.3	0.91	600	100	600		11
23	5	1.06	12.7	800	100	800		9
24	5	1.26	9.18	1000	130	1000		13
25	10	1.36	25.9	2700	74	2700		11
26	10	34.7	1.24	2120	80	2120		14

Введение

Содержанием домашнего задания является расчет пяти типов цифровых фильтров (ЦФ): ЦФ, эквивалентные дифференцирующей и интегрирующей RC-цепям, цифровой резонатор, ЦФ нижних частот с максимально плоской амплитудно-частотной характеристикой (фильтр Баттерворта), и режекторный фильтр на основе всепропускающего.

Правильность выполненного расчета проверяется в ходе лабораторной работы "Цифровые фильтры", где рассчитанные устройства реализуются на лабораторной установке.

Как известно, ЦФ могут быть реализованы с помощью рекурсивной (содержащей обратные связи с выхода на вход) или нерекурсивной схем.

В зависимости от заданных требований к импульсной характеристике дифференцирующий и интегрирующий фильтры могут реализовываться с помощью нерекурсивной или рекурсивной схем, то есть как фильтры КИХ или БИХ (подробнее см. ниже). Цифровой резонатор и фильтр Баттерворта реализуются с помощью рекурсивной схемы, то есть являются фильтрами БИХ.

Для синтеза цифрового резонатора рекомендуется разновидность метода прямого синтеза – по полюсам системной функции. Для синтеза дифференциатора, интегратора и фильтра Баттерворта рекомендуется метод расчета "по аналоговому прототипу". В зависимости от того, какая характеристика - импульсная (ИХ) или амплитудно-частотная (АЧХ) - используется для описания фильтра-прототипа, применяются две разновидности этого метода: для интегрирующего и дифференцирующего фильтров заданной считается ИХ и используется метод инвариантной импульсной характеристики, для фильтра Баттерворта задается АЧХ и используется метод билинейного преобразования.

Следует иметь в виду, что если по результатам расчета методом инвариантной импульсной характеристики для интегрирующего или дифференцирующего фильтров выбирается нерекурсивная (КИХ) схема, то ее ИХ не может, строго говоря, рассматриваться как полностью эквивалентная ИХ фильтра-прототипа, поскольку последняя бесконечна. Однако, точный расчет фильтров с КИХ, не имеющих прототипов в классе аналоговых устройств, достаточно сложен, поэтому возникающей погрешностью на практике пренебрегают.

Расчет фильтров методом инвариантной импульсной характеристики

Расчет фильтра проводится в несколько этапов:

1. Определение ИХ цифрового фильтра.
2. Расчет коэффициентов нерекурсивной схемы фильтра.
3. Определение числа звеньев нерекурсивного фильтра; решение вопроса о необходимости перехода к рекурсивной схеме.
4. Определение системной функции рекурсивного ЦФ.
5. Проверка рекурсивного фильтра на устойчивость.

Расчет ЦФ, эквивалентного дифференцирующей RC цепи

Определение импульсной характеристики ЦФ

Метод инвариантной импульсной характеристики предполагает, что отсчеты ИХ ЦФ получаются путем дискретизации ИХ аналогового фильтра-прототипа. При этом следует учитывать [4], что АЧХ полученного ЦФ будет образована путем наложений АЧХ аналогового фильтра. При этом, если полоса пропускания аналогового фильтра простирается до частот, больших половины частоты дискретизации, АЧХ ЦФ будет сильно искажаться. Так как дифференцирующая цепь является фильтром верхних частот, то при прямом применении метода период АЧХ ЦФ будет равен сумме АЧХ аналоговой дифференцирующей цепи и равномерной во всей полосе частот АЧХ.

Для правильного расчета используется модификация метода, где задается переходная характеристика (ПХ) аналогового фильтра. ПХ затем подвергается дискретизации, а ИХ ЦФ получается как разность дискретных ПХ, сдвинутых друг относительно друга на один отсчет. Данный метод является, по сути, модификацией метода конечных разностей.

Переходная характеристика дифференцирующей цепи

$$g(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

где τ – постоянная времени.

Следовательно, ИХ ЦФ равна 1 при *k=0,* а при *k > 0* имеет вид

$$h(kT) = g(kT) - g\big((k-1)T\big) =$$
$$= exp\left(-\frac{kT}{\tau}\right) - exp\left(-\frac{(k-1)T}{\tau}\right) =$$
$$= exp\left(-\frac{kT}{\tau}\right)\left(1 - exp\left(\frac{T}{\tau}\right)\right)$$

Расчет коэффициентов нерекурсивного фильтра

Для определения коэффициентов нерекурсивного ЦФ напишем уравнение цифровой фильтрации, то есть представление выходного сигнала $y(kT)$ как свертки входного сигнала $x(kT)$ и импульсной характеристики $h(kT)$:

$$y(kT) = \sum_{i=0}^{k} h(iT) \cdot x\big((k-i)T\big)$$

Отсюда видно, что коэффициенты ЦФ равны:

$$a_0 = 1$$
$$a_k = exp\left(-\frac{kT}{\tau}\right) \cdot \left(1 - exp\left(\frac{T}{\tau}\right)\right)$$

Определение числа звеньев нерекурсивного фильтра

Будем считать, что импульсная характеристика описывается с достаточной точностью, если последний экспоненциальный коэффициент меньше первого в 20 раз. Тогда необходимое число звеньев фильтра N определяется условием

$$\forall k \geq N: \left|\frac{a_k}{a_1}\right| < 0.05$$

Если число звеньев нерекурсивного фильтра, определяемое этим неравенством велико (более десяти), то необходим переход к рекурсивной схеме.

Определение системной функции рекурсивного фильтра

Для определения коэффициентов рекурсивного фильтра воспользуемся системной функцией, которая как известно, является z-преобразованием импульсной характеристики:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT) \cdot z^{-k}$$

Подставляя в данное выражение полученную ИХ ЦФ и пользуясь формулой для суммы членов бесконечной геометрической прогрессии, получаем

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) \cdot z^{-1}}$$

Сопоставляя полученную формулу с общим выражением системной функции рекурсивного фильтра

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} a_m z^{-m}}{1 - \sum_{n=1}^{N} b_n z^{-n}}$$

нетрудно получить

$a_0 = 1$

$a_1 = -1$

$b_1 = exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$

Проверка устойчивости рекурсивного фильтра

Поскольку рекурсивный фильтр является системой с обратной связью, необходимо проверить ее на устойчивость. Для устойчивой схемы должно выполняться условие

$$|z_i| \leq 1$$

где z_i - полюсы (корни знаменателя) системной функции. Если расчет показывает, что рекурсивный фильтр неустойчив, следует использовать нерекурсивную схему.

Представление результатов

По результатам расчета изобразите схему фильтра (трансверсальную для нерекурсивного фильтра, каноническую для рекурсивного), указав в соответствующих ячейках полученные коэффициенты.

Расчет ЦФ, эквивалентного интегрирующей RC-цепи

Определение импульсной характеристики

Для интегрирующей RC-цепи переходная характеристика имеет вид

$$g(t) = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Повторяя операции, описанные ранее при рассмотрении дифференцирующей цепи, получаем импульсную характеристику цифрового интегрирующего фильтра:

$h(kT) = exp\left(-\frac{kT}{\tau}\right)\left(exp\left(\frac{T}{\tau}\right) - 1\right)$ при $k > 0$ и

$h(0) = g(0) = 0$ при $k = 0.$

Расчет коэффициентов нерекурсивного фильтра

По полученному выражению для ИХ ЦФ можно найти коэффициенты КИХ фильтра:

$a_0 = 0$

$a_k = exp\left(-\frac{kT}{\tau}\right)\left(exp\left(\frac{T}{\tau}\right) - 1\right)$

Определение числа звеньев нерекурсивного фильтра

Определение числа звеньев полностью аналогично процедуре для дифференцирующей цепи. Если число звеньев нерекурсивного фильтра более десяти, то необходим переход к рекурсивной схеме.

Определение системной функции рекурсивного фильтра

Схема расчета полностью аналогична схеме для дифференцирующей цепи. Нетрудно убедиться, что для интегрирующего фильтра системная функция имеет вид:

$$H(z) = \frac{\left(1 - exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)\right) z^{-1}}{1 - exp\left(-\frac{T}{\tau}\right) z^{-1}}$$

Следовательно, коэффициенты рекурсивного интегрирующего фильтра равны

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = 1 - exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$$

$$b_1 = exp\left(-\frac{T}{\tau}\right)$$

Проверка устойчивости рекурсивного фильтра

Проверка устойчивости полностью аналогична проверке для дифференцирующей цепи.

Представление результатов

По результатам расчета изобразите схему фильтра (трансверсальную для нерекурсивного фильтра, каноническую для рекурсивного), указав в соответствующих ячейках полученные коэффициенты.

Расчет цифрового резонатора

Системная функция цифрового резонатора имеет вид

$$H(z) = \frac{1}{(1 - sz^{-1})(1 - s^* z^{-1})}$$

Здесь s, s^* - полюса системной функции:

$$s = \exp(-\alpha - j\omega)$$

$$s^* = \exp(-\alpha + j\omega)$$

$$\omega_0^{\text{норм}} = 2\pi \frac{f_0}{f_д}$$

$$\alpha = \pi \cdot \frac{B}{f_д} \quad \text{(здесь B – полоса АЧХ резонатора)}$$

Раскрывая скобки в выражении для системной функции и воспользовавшись формулой Эйлера

$$\cos\varphi = \frac{\exp(j\varphi) + \exp(-j\varphi)}{2}$$

получаем системную функцию в виде

$$H(z) = \frac{1}{1 - \left(2\exp(-\alpha)\cos\omega_0^{\text{норм}}\right)z^{-1} + \exp(-2\alpha)z^{-2}}$$

Таким образом, коэффициенты системной функции цифрового резонатора будут равны:

$a_0 = 1$

$b_1 = 2\exp(-\alpha)\cos\omega_0^{\text{норм}}$

$b_2 = -\exp(-2\alpha)$

Проверка фильтра на устойчивость не требуется, так как изначально заданы полюса системной функции, лежащие внутри единичной окружности z-плоскости.

По окончании расчета изобразите каноническую схему фильтра, указав в соответствующих ячейках полученные значения коэффициентов.

Расчет ФНЧ с максимально плоской в полосе прозрачности АЧХ (фильтр Баттерворта)

Расчет фильтра Баттерворта включает в себя следующие этапы:

1. Расчет аналогового фильтра-прототипа
2. Расчет собственно цифрового фильтра
3. Проверка рассчитанного фильтра на устойчивость

Расчет фильтра-прототипа

Частотная характеристика аналогового фильтра Баттерворта описывается соотношением:

$$|K(\omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2N}}$$

Где $\omega_0 = 2\pi f_0$, f_0 – частота среза; N – порядок фильтра.

Зная частоты и величину затухания L, можно определить порядок цифрового фильтра N. Здесь величина L задается в разах, а не в дБ.

$$L^{\text{разы}} = 10^{\frac{L^{\text{дБ}}}{20}}$$

$$N \geq \frac{\lg(2L^{\text{разы}} - 1)}{2lg\frac{f_1}{f_0}}$$

Определив порядок фильтра, можно записать в операторной форме его частотный коэффициент передачи:

$$K(p) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{p}{\omega_0} - s_i\right)}$$

Здесь s_i – полюса фильтра:

$$s_i = exp\left(-j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2i-1}{2N}\right)\right)$$

Расчет цифрового фильтра

Поскольку фильтр-прототип задан частотной характеристикой, для расчета цифрового фильтра воспользуемся методом билинейного преобразования. При этом необходимо учитывать различие масштабов осей частот аналогового и цифрового фильтров.

Для цифрового фильтра заданы две характерные частоты:

- $f_0 = f_c$ – частота среза (на этой частоте коэффициент передачи фильтра уменьшается на 3дБ по сравнению с частотой $f = 0$);
- f_1, для которой задается величина затухания L [дБ].

Соответствующие им значения характерных частот аналогового фильтра-прототипа определяются формулой:

$$\omega_{0,1}^{бп} = 2f_{д} \cdot tg\left(\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{f_{0,1}}{f_{д}}\right)$$

Буквы «бп» означают «билинейное преобразование»; $f_{д}$ – частота дискретизации.

Для получения коэффициентов запишем выражение *K(p)* для полученного порядка, раскроем скобки и выполним подстановку

$$p = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

Получим системную функцию в виде

$$H(z) = \frac{\sum_{m=0}^{M} a_m z^{-m}}{1 - \sum_{n=1}^{N} b_n z^{-n}}$$

и из нее получим коэффициенты.

Пример: расчет фильтра второго порядка

$$s_1 = exp\left(-j\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 2}\right)\right) = exp\left(-j\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$s_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$K(p) = \frac{1}{\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}\frac{p}{\omega_0} + \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}$$

Выполним подстановку $p = \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$. Тогда

$$\sqrt{2}\frac{p}{\omega_0} = \sqrt{2}\frac{2T_0}{2\pi T}\frac{z-1}{z+1} = C_1\frac{z-1}{z+1}$$

$$C_1 = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\frac{T_0}{T}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 = C_2\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

$$C_2 = \frac{{T_0}^2}{T^2\pi^2}$$

$$H(z) = \frac{(z+1)^2}{(z+1)^2 + C_1(z-1)(z+1) + C_2(z-1)^2} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2}}$$

$$a_0 = a_2 = \frac{1}{1 + C_1 + C_2}$$

$$a_1 = \frac{2}{1 + C_1 + C_2}$$

$$b_1 = -\frac{2 - 2C_2}{1 + C_1 + C_2}$$

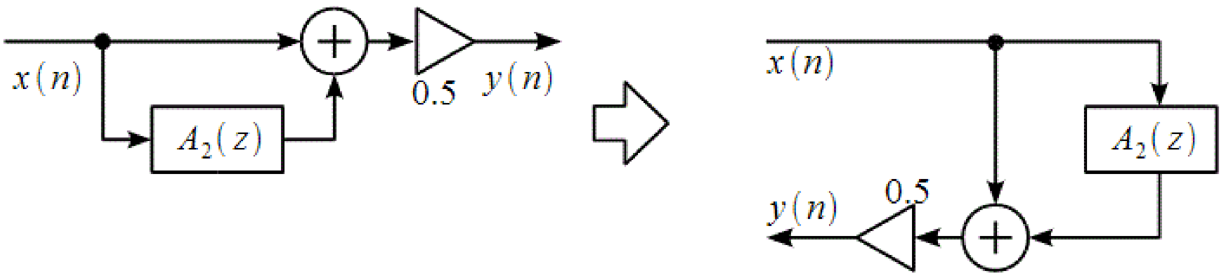
$$b_2 = -\frac{1 - C_1 + C_2}{1 + C_1 + C_2}$$

Проверка устойчивости рекурсивного фильтра

Проверка устойчивости проводится поиском значений полюсов системной функции и сравнении их модуля с единицей.

Расчет режекторного фильтра

Режекторный фильтр на основе всепропускающего имеет следующую структурную схему:



Коэффициенты всепропускающего фильтра второго порядка определяют частоту и полосу подавления.

Коэффициенты рассчитываются следующим образом:

$$k_1 = -\cos\omega_0^{\text{норм}}$$

$$k_2 = \frac{1 - \sin B^{\text{норм}}}{\cos B^{\text{норм}}}$$

B – ширина полосы подавления по уровню -3дБ

Пример расчета

Пусть даны следующие параметры:

- Частота подавления равна $f_п$ = 4кГц
- Полоса подавления B = 1кГц
- Частота дискретизации $f_д$ = 20кГц.

Рассчитаем нормированные частоту и полосу:

$$\omega_0^{\text{норм}} = 2\pi \cdot \frac{f_{\text{п}}}{f_{\text{д}}} = 2\pi \frac{4}{20} = \frac{2\pi}{5}$$

$$B^{\text{норм}} = 2\pi \cdot \frac{B}{f_{\text{д}}} = 2\pi \frac{1}{20} = \frac{\pi}{10}$$

$$k_1 = -\cos \omega_0^{\text{норм}} = -0.31$$

$$k_2 = \frac{1 - \sin B^{\text{норм}}}{\cos B^{\text{норм}}} = 0.73$$

Коэффициенты некоторых цифровых фильтров

Интегрирующая цепочка с τ =10$T_{ДИСКР}$, БИХ-фильтр.

a_0	0	b_0	1
a_1	0.1	b_1	0.9

Дифференцирующая цепочка с τ =10$T_{ДИСКР}$, БИХ-фильтр.

a_0	1	b_0	1
a_1	-1	b_1	0.9

Интегрирующая цепочка с τ =2$T_{ДИСКР}$, КИХ-фильтр.

a_0	0
a_1	0.39
a_2	0.24
a_3	0.14
a_4	0.09
a_5	0.05
a_6	0.03
a_7	0.02
a_8	0.01

Дифференцирующая цепочка с τ =2$T_{дискр}$, КИХ-фильтр.

a_0	1
a_1	-0.39
a_2	-0.24
a_3	-0.14
a_4	-0.09
a_5	-0.05
a_6	-0.03
a_7	-0.02
a_8	-0.01

Колебательный контур с резонансной частотой 0.2 и полосой 0.02 от частоты дискретизации.

a_0	1	b_0	1
a_1	0	b_1	0.58
a_2	0	b_2	-0.88

Фильтр нижних частот Баттерворта 2-го порядка с частотой среза 0.2 от частоты дискретизации.

a_0	0.2	b_0	1
a_1	0.4	b_1	0.37
a_2	0.2	b_2	-0.2

Список литературы

1. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы, М./Высшая школа, 1983, с.

2. Карташов В.Г. Основы теории дискретных сигналов и цифровых фильтров. М.: Высшая школа, 1982г. 109с.

3. Гиллемин Э.А. Синтез пассивных цепей. М. 1970.

4. Рабинер Л, Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов. М.:Мир, 1978.