

ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ для подготовки к РК (МОДУЛЬ 2)

по дисциплине "Численные методы" для спец. РЛ-1, 4к., 8с. (2022г.)

Теоретическая часть

1. Какой итерационный метод называют одношаговым? Что называют порядком сходимости метода? Сформулируйте теорему о сходимости одношагового итерационного метода, обладающего линейной скоростью сходимости.
2. Опишите построение итерационной последовательности в методе простой итерации. Дайте геометрическую интерпретацию метода. Сформулируйте теорему о сходимости данного метода и теорему об апостериорной оценке погрешности; запишите критерий окончания. Опишите процедуру приведения уравнения $f(x) = 0$ к виду, удобному для применения метода простой итерации.
3. Опишите метод Ньютона с выводом расчетной формулы. Дайте геометрическую интерпретацию. Сформулируйте теорему о сходимости метода Ньютона и теорему об апостериорной оценке погрешности. Запишите критерий окончания итерационного процесса.
4. Опишите метод секущих и дайте геометрическую интерпретацию. Какой итерационный метод называют: а) одношаговым; б) k -шаговым? Сформулируйте теорему о сходимости метода секущих.
5. Опишите метод бисекции (половинного деления) и запишите критерий окончания. Какова скорость сходимости данного метода? Ответ обоснуйте.
6. Запишите постановку задачи интерполяции функций. Получите интерполяционный многочлен Лагранжа. Сформулируйте теорему о погрешности интерполяции и следствие из нее.
7. Сформулируйте определение сплайна степени m . Что называют дефектом сплайна? Опишите метод интерполяции функций кубическими сплайнами.
8. Опишите общую схему метода неопределенных коэффициентов для получения формулы численного дифференцирования. Постройте формулу вычисления 1-ой производной, точную для многочленов 2-ой степени; получите оценку погрешности. Запишите формулу вычисления 2-ой центральной разностной производной и укажите ее порядок точности.
9. Запишите формулу для вычисления центральной разностной производной и укажите ее порядок точности. В чем состоит геометрический смысл центральной разностной производной?
10. Опишите метод Рунге для получения формулы численного дифференцирования более высокого порядка точности.
11. Получите квадратурную формулу центральных прямоугольников, дайте геометрическую интерпретацию. Сформулируйте и докажите теорему об оценке погрешности.
12. Получите квадратурную формулу трапеций, дайте геометрическую интерпретацию. Сформулируйте и докажите теорему об оценке погрешности.
13. Получите формулу Симпсона, дайте геометрическую интерпретацию. Сформулируйте теорему об оценке погрешности.
14. Построение квадратурной формулы интерполяционного типа. Приведите пример (формула трапеций в случае переменного шага). Сформулируйте теорему об оценке погрешности.
15. Какую формулу называют квадратурной формулой Гаусса? Получите квадратурную формулу Гаусса, точную для многочлена 3-й степени. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что квадратурная формула является формулой Гаусса. Запишите правило Рунге практической оценки погрешности для простейших квадратурных формул.
16. Опишите метод численного интегрирования осциллирующих функций (формулы Филона).
17. Опишите метод Эйлера решения задачи Коши для ОДУ. Приведите геометрическую интерпретацию. Какой порядок аппроксимации имеет данный метод? Ответ обоснуйте.
18. Запишите расчетные формулы семейства Рунге-Кутты 2-го порядка точности. Дайте геометрическую интерпретацию.
19. Опишите метод "стрельбы" решения краевой задачи.
20. Опишите разностный метод решения краевой задачи. Сформулируйте и докажите теорему о порядке аппроксимации разностной схемы.

Задачи

1. С помощью метода Ньютона найдите 1-е и 2-е приближения к точному решению уравнения $\frac{1}{2}e^{x-2} - 1 = 0$ на отрезке $[0; 4]$. За начальное приближение принять точку $M_0(4; \frac{e}{2} - 1)$. Дайте геометрическую интерпретацию и укажите скорость сходимости данного метода.

2. С помощью метода Ньютона найдите 1-е и 2-е приближения к точному решению уравнения $\sqrt{x^3} - 2 = 0$ на отрезке $[0; 4]$. За начальное приближение принять точку $M_0(4; 6)$. Дайте геометрическую интерпретацию и укажите скорость сходимости данного метода.

3. С помощью метода секущих найдите 2-е и 3-е приближения к точному решению уравнения $x^2 - 4 = 0$ на отрезке $[0; 4]$. За начальные приближения принять точки $M_0(4; 12)$ и $M_1(3; 5)$. Дайте геометрическую интерпретацию и укажите скорость сходимости данного метода.

4. Постройте интерполяционный многочлен Лагранжа для функции $y = \cos x$ на отрезке $[-\pi/4; \pi/4]$ по 3-м точкам (в расчетах использовать равномерную сетку). Оцените погрешность интерполяции.

5. Применяя правило Рунге, повысьте порядок точности численного дифференцирования функции $y = \lg(x)$ в точке $x = 3$ с использованием центральной разностной производной.

x	1	2	3	4	5
$y(x)$	0	0.301	0.478	0.602	0.699

6. Вычислите значение определенного интеграла $I = \int_{1/2}^2 (3 - 5x)dx$ с помощью квадратурной формулы центральных прямоугольников (при расчетах использовать равномерную сетку $x_i, i = \overline{0, 3}$).

7. Вычислите значение определенного интеграла $I = \int_{1/2}^2 (3 - 7x)dx$ с помощью квадратурной формулы трапеций (при расчетах использовать равномерную сетку $x_i, i = \overline{0, 3}$).

8. Вычислите значение определенного интеграла $I = \int_0^1 (x^3 + x + 2)dx$ с помощью квадратурной формулы Симпсона (при расчетах использовать равномерную сетку $x_i, i = \overline{0, 4}$).