§3. Методы численного решения задач линейной алгебры
часть 3

Численные методы

8. Метод прогонки

Метод применяется для решения СЛАУ с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & & 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & b_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_{n-2} \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \cdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{pmatrix}$$

Выразим из *1-го* уравнения x_1:

$$x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1, \quad \alpha_1 = -\frac{c_1}{b_1}, \quad \beta_1 = \frac{d_1}{b_1};$$

подставим x_1 во *2-е* уравнение и выразим из него x_2:

$$x_2 = \alpha_2 x_3 + \beta_2, \quad \alpha_2 = -\frac{c_2}{b_2 + a_2\alpha_1}, \quad \beta_2 = \frac{d_2 - a_2\beta_1}{b_2 + a_2\alpha_1};$$

подставим x_{n-1} в *n-е* уравнение и выразим из него x_n:

$$x_n = \beta_n = \frac{d_n - a_n\beta_{n-1}}{b_n + a_n\alpha_{n-1}}.$$

Алгоритм метода

Прямая прогонка: вычисление прогоночных коэффициентов $\alpha_k,\ k=\overline{1,n-1}$ и $\beta_k,\ k=\overline{1,n}$ по следующим формулам:

$$k=1:\quad \gamma_1=b_1,\qquad \alpha_1=-\frac{c_1}{\gamma_1},\quad \beta_1=\frac{d_1}{\gamma_1};$$

$$k=\overline{2,n-1}:$$

$$\gamma_k=b_k+a_k\alpha_{k-1},\qquad \alpha_k=-\frac{c_k}{\gamma_k},\quad \beta_k=\frac{d_k-a_k\beta_{k-1}}{\gamma_k};$$

$$k=n:\quad \gamma_n=b_n+a_n\alpha_{n-1},\qquad \beta_n=\frac{d_n-a_n\beta_{n-1}}{\gamma_n}.$$

Обратная прогонка: вычисление неизвестных $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$ по формулам:

$$x_n = \beta_n, \quad x_k = \beta_k + \alpha_k x_{k+1}, \qquad k = n-1, \cdots 1.$$

Теорема (достаточное условие применимости метода прогонки).

Пусть $a_1 = 0$ и $c_n = 0$ (для единой формы записи).

Пусть коэффициенты СЛАУ удовлетворяют условиям диагонального преобладания $|b_k| \geq |a_k| + |c_k|, k = \overline{1, n}$,

причем хотя бы для одного k выполнено строгое неравенство.

Тогда алгоритм метода прогонки корректен ($\gamma_k \neq 0 \;\; \forall \;\; k = \overline{1, n}$) и устойчив ($|\alpha_k| \leq 1 \;\; \forall \;\; k = \overline{1, n}$).

Пример

Проверить выполнение достаточных условий и решить систему методом прогонки:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = -1, \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = -8, \\ 2x_2 - 3x_3 = -14. \end{cases}$$

<u>Решение.</u> Достаточное условие выполнено:

$$\begin{cases} 2 > |-1|, \\ |-4| > 2 + 1, \\ |-3| > 2. \end{cases}$$

Прямая прогонка:

- $\gamma_1 = b_1 = 2, \ \ \alpha_1 = -\frac{c_1}{\gamma_1} = -\frac{(-1)}{2} = \frac{1}{2}, \quad \beta_1 = \frac{d_1}{\gamma_1} = -\frac{1}{2};$
- $\gamma_2 = b_2 + a_2\alpha_1 = -4 + 2 \cdot \frac{1}{2} = -3,$

$$\alpha_2 = -\frac{c_2}{\gamma_2} = -\frac{1}{(-3)} = \frac{1}{3}, \quad \beta_2 = \frac{d_2 - a_2\beta_1}{\gamma_2} = \frac{-8 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}{(-3)} = \frac{7}{3};$$

- $\gamma_3 = b_3 + a_3\alpha_2 = -3 + 2 \cdot \frac{1}{3} = -\frac{7}{3},$

$$\beta_3 = \frac{d_3 - a_3\beta_2}{\gamma_3} = \frac{-14 - 2 \cdot \frac{7}{3}}{\left(-\frac{7}{3}\right)} = 8.$$

Обратная прогонка:

$$x_3 = \beta_3 = 8,$$

$$x_2 = \beta_2 + \alpha_2 x_3 = \frac{7}{3} + \frac{1}{3} \cdot 8 = 5,$$

$$x_1 = \beta_1 + \alpha_1 x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 5 = 2.$$

Ответ: $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$

9. Итерационные методы решения СЛАУ:

Метод Якоби

Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$, $\det A \neq 0$.

Приведем систему к виду, удобному для итераций. Для этого выразим неизвестное x_i из *i-го* уравнения:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1, \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j\right), \qquad a_{ii} \neq 0.$$

В результате получим систему:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \beta_{12} & \beta_{13} & \cdots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & 0 & \beta_{23} & & \beta_{2n} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \beta_{n3} & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

где

$$\beta_{ij} = \begin{cases} -\dfrac{a_{ij}}{a_{ii}}, & j \neq i \\ 0, & j = i \end{cases}, \qquad i, j = \overline{1, n};$$

$$c_i = \frac{b_i}{a_{ii}}, \qquad i = \overline{1, n}.$$

- Обозначим: $B = \left(\beta_{ij}\right) \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $c = (c_i) \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$

и запишем систему в матричной форме $x = Bx + c$.

Выберем начальное приближение $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots, x_n^{(0)}\right)^T$

и подставим его в правую часть системы $x = Bx + c$.

Вычисляя полученное выражение, находим *1-е* приближение:

$$x^{(1)} = Bx^{(0)} + c \quad \text{и т. д.}$$

$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k = 0,1,\cdots$	– расчетная формула метода Якоби

➨Теорема (достаточное условие сходимости)

Пусть $\|B\| < 1,$ тогда

1) решение $\bar{x}$ системы $x = Bx + c$ существует и единственно;
2) при любом начальном приближении $x^{(0)}$ метод Якоби сходится и справедлива оценка погрешности:

$$\left\|x^{(n)} - \bar{x}\right\| \le \|B\|^n \cdot \left\|x^{(0)} - \bar{x}\right\|.$$

➨Отметим, что 1) $\|\cdot\|$ – любая из норм $\|\cdot\|_1$ или $\|\cdot\|_\infty$;

2) условие $\|B\| < 1$ означает, что матрица A системы $Ax = b$ удовлетворяет условию диагонального преобладания;

3) при $\|B\| < 1$ метод Якоби сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q = \|B\|$.

- Апостериорная оценка погрешности:

Если $\|B\| < 1$, то $\left\|x^{(n)} - \bar{x}\right\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|} \cdot \left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\|$.

- Критерий окончания итерационного процесса:

Пусть требуется найти решение с точностью ε, то есть

$$\left\|x^{(n)} - \bar{x}\right\| < \varepsilon.$$

Тогда из апостериорной оценки погрешности получаем, что вычисления следует вести до выполнения неравенства

$$\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\| < \varepsilon_1, \qquad \text{где} \qquad \varepsilon_1 = \frac{1-\|B\|}{\|B\|}\varepsilon.$$

Замечание

Если $\|B\| \approx 1$, то $\frac{1-\|B\|}{\|B\|} \ll 1$ и $\varepsilon_1 \ll \varepsilon$. Применение критерия $\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\| < \varepsilon$ приведет к преждевременному окончанию итерационного процесса. Величина $\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\|$ оказывается малой вследствие медленной сходимости метода, а не вследствие хорошего приближения $x^{(n-1)}$ и $x^{(n)}$ к решению.

10. Итерационные методы решения СЛАУ:

Метод Зейделя

Метод представляет собой модификацию метода Якоби.

Представим матрицу B в виде суммы нижней (B_1) и верхней (B_2) треугольных матриц: $B = B_1 + B_2$.

Тогда

$x^{(k+1)} = B_1 x^{(k+1)} + B_2 x^{(k)} + c$, $k = 0,1,\cdots$	– расчетная формула метода Зейделя

- На *(k+1)-й* итерации компоненты вектора $x^{(k+1)}$ вычисляются по формулам:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_{12}x_2^{(k)} + \beta_{13}x_3^{(k)} + \beta_{14}x_4^{(k)} + \cdots + \beta_{1n}x_n^{(k)} + c_1,$$
$$x_2^{(k+1)} = \beta_{21}x_1^{(k+1)} + \beta_{23}x_3^{(k)} + \beta_{24}x_4^{(k)} + \cdots + \beta_{2n}x_n^{(k)} + c_2,$$
$$x_3^{(k+1)} = \beta_{31}x_1^{(k+1)} + x_2^{(k+1)} + \beta_{34}x_4^{(k)} + \cdots + \beta_{3n}x_n^{(k)} + c_3.$$

- Теорема (достаточное условие сходимости).

Пусть $\|B\| < 1$. Тогда при любом начальном приближении $x^{(0)}$ метод Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем $q \leq \|B\|$.

Теорема (об оценке погрешности)

Пусть $\|B_1\| + \|B_2\| < 1$.

Тогда при любом начальном приближении $x^{(0)}$ метод Зейделя сходится и справедлива оценка погрешности:

$$\|x^{(n)} - \bar{x}\| \le q^n \cdot \|x^{(0)} - \bar{x}\|,$$

где $q = \frac{\|B_2\|}{1-\|B_1\|} < 1$.

Теорема.

Пусть A – симметричная и положительно определенная матрица. Тогда при любом начальном приближении $x^{(0)}$ метод Зейделя сходится со скоростью геометрической прогрессии.

- Апостериорная оценка погрешности:

Если $\|B\| < 1$, то $\left\|x^{(n)} - \bar{x}\right\| \le \frac{\|B_2\|}{1-\|B\|} \cdot \left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\|, n \ge 1.$

- Критерий окончания итерационного процесса:

Пусть требуется найти решение с точностью ε, то есть

$$\left\|x^{(n)} - \bar{x}\right\| < \varepsilon.$$

Тогда из апостериорной оценки погрешности получаем, что вычисления следует вести до выполнения неравенства

$$\left\|x^{(n)} - x^{(n-1)}\right\| < \varepsilon_2, \qquad \text{где} \qquad \varepsilon_2 = \frac{1-\|B\|}{\|B_2\|}\varepsilon.$$

Геометрическая интерпретация метода Зейделя

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Данные уравнения задают на плоскости две прямые.

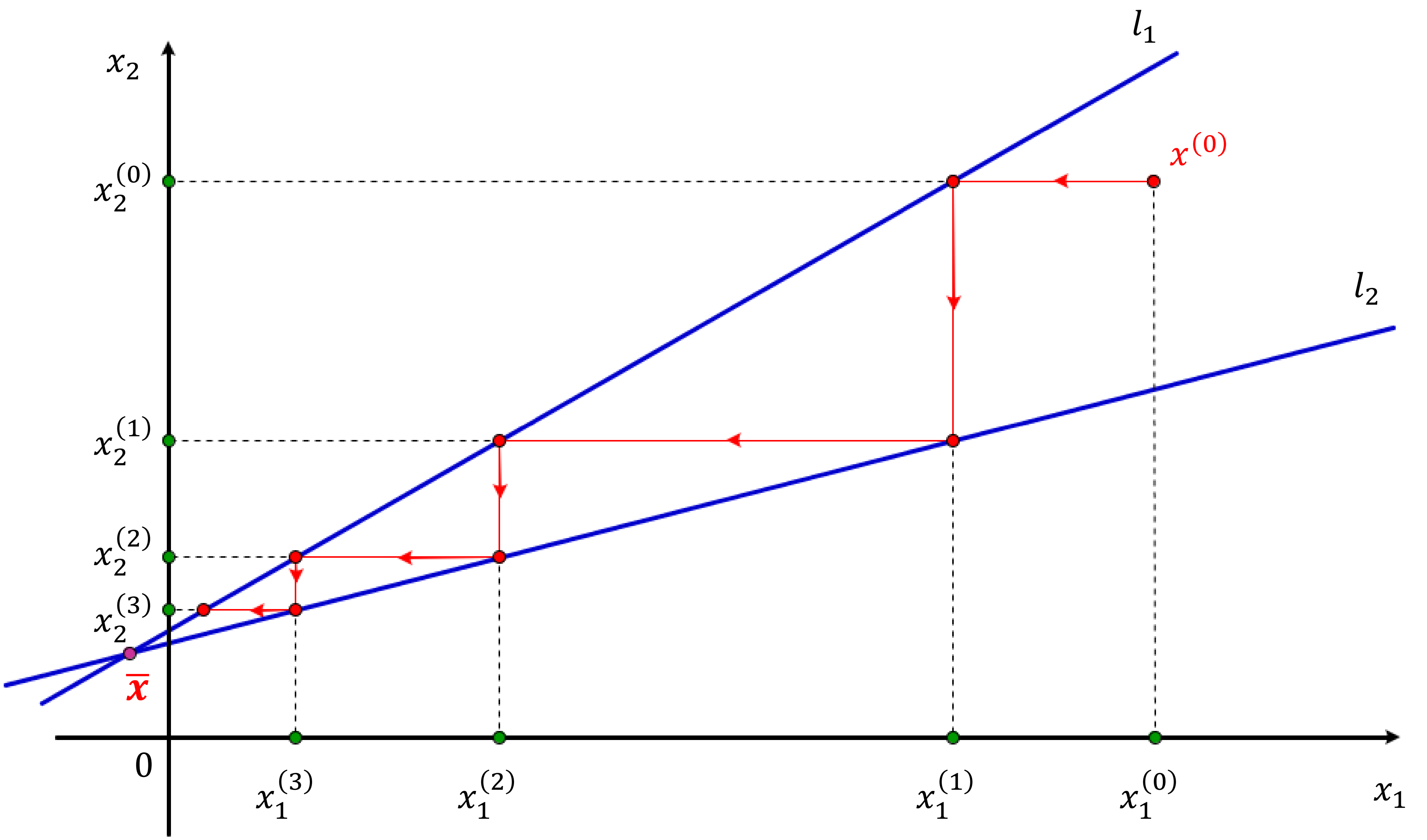
Приведем систему к виду, удобному для итераций:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \dfrac{b_1}{a_{11}} \\[2ex] x_2 = -\dfrac{a_{21}}{a_{22}}x_1 + \dfrac{b_2}{a_{22}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \beta_{12}x_2 + c_1 \\ x_2 = \beta_{21}x_1 + c_2 \end{cases}$$

Начальное приближение: $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)^T$.

Расчетная формула: $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \beta_{12} x_2^{(k)} + c_1 \\ x_2^{(k+1)} = \beta_{21} x_1^{(k+1)} + c_2 \end{cases}$

- $x_1^{(1)} = \beta_{12} x_2^{(0)} + c_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(0)} + \frac{b_1}{a_{11}}$ – абсцисса точки пересечения двух прямых: l_1 и $x_2 = x_2^{(0)}$;
- $x_2^{(1)} = \beta_{21} x_1^{(1)} + c_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(1)} + \frac{b_2}{a_{22}}$ – ордината точки пересечения двух прямых: l_2 и $x_1 = x_1^{(1)}$.



l_1
l_2
x_2
x_1
$x^{(0)}$
$x_2^{(0)}$
$x_2^{(1)}$
$x_2^{(2)}$
$x_2^{(3)}$
$\bar{x}$
0
$x_1^{(3)}$
$x_1^{(2)}$
$x_1^{(1)}$
$x_1^{(0)}$