§3. Методы численного решения задач линейной алгебры часть 1

Численные методы

1. Основные сведения из линейной алгебры

- **Матричная форма записи СЛАУ:** $Ax = b$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов $a_{ij} \in \mathbb{R}$;

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$ – вектор правых частей;

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – искомый вектор.

Нормы векторов и матриц:

l_1 – норма:	l_2 – норма (евклидова):	l_∞ – норма:
$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$	$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$	$\|x\|_\infty = \max_{1\le k\le n} \|x_k\|$

Нормы одного и того же вектора эквивалентны:

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \alpha \|x\|_\infty, \quad \alpha > 0.$$

- Нормой матрицы A, подчиненной норме векторов, введенной в $\mathbb{R}^n$, называется число $\|A\| = \max\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Каждой из векторных норм $\|x\|$ соответствует своя подчиненная норма матрицы A:

1. $$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|}_{\text{сумма модулей элементов } j-\text{го столбца}};$$

2. $\|A\|_2 = \sqrt{\max\limits_{1 \le k \le n} \lambda_{A^T A}^{(k)}}$,

где $\lambda_{A^T A}^{(k)}$ − собственные числа матрицы $A^T A$;

на практике используют оценку: $\|A\|_2 \le \|A\|_E$;

3. $\|A\|_\infty = \max\limits_{1 \le i \le n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|}_{\text{сумма модулей элементов } i\text{−ой строки}}.$

Пример. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ найти нормы:

$\|A\|_1$, $\|A\|_\infty$ и оценку для $\|A\|_2$.

<u>Решение.</u>

1. $\|A\|_1 = \max\{1+3, |-2|+4\} = 6;$
2. $\|A\|_\infty = \max\{1+|-2|, 3+4\} = 7;$
3. $\|A\|_2 \le \|A\|_E = \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2+4^2} = \sqrt{30};$

$\|A\|_2 = \sqrt{5(3+\sqrt{5})}$ – точное значение.

2. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$: $\det A \neq 0$
(СЛАУ имеет единственное решение)
и запишем расширенную матрицу системы:

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$$

Прямой ход: преобразование исходной СЛАУ $Ax = b$ в эквивалентную систему $Cx = y$:

$$(C|y) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & c_{12} & \cdots & c_{1n} & y_1 \\ 0 & 1 & \cdots & c_{2n} & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & y_n \end{array}\right)$$

где C – верхняя треугольная матрица с единицами на главной диагонали:

Обратный ход: последовательное нахождение неизвестных $x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1$ из системы $Cx = y$.

Прямой ход (алгоритм):

Шаг 1: $a_{11} \neq 0$ – главный элемент *1*-го шага;

исключим неизвестное x_1 из уравнений с номерами $i = \overline{2, n}$, для этого разделим *1*-е уравнение на $a_{11} \neq 0$ и вычтем из i-го $(i = \overline{2, n})$ уравнения *1*-е уравнение, умноженное на a_{i1} $(i = \overline{2, n})$;

Шаг 2: $a_{22}^{(1)} \neq 0$ – главный элемент *2*-го шага;

исключим неизвестное x_2 из уравнений с номерами $i = \overline{3, n}$, для этого разделим *2*-е уравнение на $a_{22}^{(1)} \neq 0$ и вычтем из i-го $(i = \overline{3, n})$ уравнения *2*-е уравнение, умноженное на $a_{i2}^{(1)}$ $(i = \overline{3, n})$;

<u>Шаг (n-1):</u> $a_{n-1,n-1}^{(n-2)} \neq 0$ – главный элемент *(n-1)*-го шага; исключим неизвестное x_{n-1} из уравнения с номером $i = n$, для этого разделим *(n-1)*-е уравнение на $a_{n-1,n-1}^{(n-2)} \neq 0$ и вычтем из *n*-го уравнения *(n-1)*-е уравнение, умноженное на $a_{n,n-1}^{(n-2)}$;

<u>Шаг n:</u> $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$; разделим *n*-е уравнение на $a_{nn}^{(n-1)} \neq 0$.

Обратный ход (алгоритм):

из *n*-го уравнения находим неизвестное $x_n = y_n$,

затем в *(n-1)*-е уравнение подставляем найденное значение x_n и вычисляем $x_{n-1} = y_{n-1} - c_{n-1,n}x_n$ и т.д.

Расчетные формулы обратного хода:

$$x_n = y_n,$$

$$x_i = y_i - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j\,, \qquad i = (n-1), (n-2), \cdots, 1.$$

Ограничение метода: предположение $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$;

если $a_{kk}^{(k-1)} \approx 0$, то в процессе вычислений возможен неконтролируемый рост погрешности.

- **Метод Гаусса с выбором главного элемента по столбцу** эквивалентен применению метода Гаусса к системе, в которой на каждом шаге исключения неизвестного осуществляется перестановка уравнений.

На k-ом шаге исключения найдем наибольший по модулю коэффициент при неизвестном x_k:

$$a_{mk}^{(k-1)} = \max_{k \le i \le n} \left\{ \left| a_{ik}^{(k-1)} \right| \right\}$$

и осуществим перестановку уравнений с номерами k и m.

Затем выполним исключение неизвестного x_k согласно описанному выше алгоритму.

3.Обусловленность СЛАУ

Рассмотрим СЛАУ $Ax = b$: $\det A \neq 0$.

Пусть элементы матрицы A заданы точно, а вектор правых частей − приближенно, то есть на самом деле решается система: $Ax^* = b^*$.

Получим оценки абсолютной и относительной погрешностей:

$$A(x - x^*) = b - b^* \quad \text{или} \quad x - x^* = A^{-1}(b - b^*).$$

Напомним свойство нормы матриц: $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

Оценка абсолютной погрешности

$$\Delta(x^*) = \|x - x^*\| = \|A^{-1}(b - b^*)\| \le \|A^{-1}\| \cdot \|b - b^*\| =$$

$$= \|A^{-1}\| \cdot \Delta(b^*).$$

$$\boxed{\Delta(x^*) \le \|A^{-1}\| \cdot \Delta(b^*)}$$

Оценка относительной погрешности

$$\delta(x^*) = \frac{\Delta(x^*)}{\|x\|} \le \frac{\|A^{-1}\| \cdot \Delta(b^*)}{\|x\|} \cdot \frac{\|b\|}{\|b\|} = \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|}{\|x\|} \cdot \frac{\Delta(b^*)}{\|b\|} =$$

$$= \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|}{\|x\|} \cdot \delta(b^*).$$

$$\boxed{\delta(x^*) \le \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|}{\|x\|} \cdot \delta(b^*)}$$

Величину $\nu(x) = \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|b\|}{\|x\|}$ называют *естественным числом обусловленности*.

Вычислим наибольшее значение $\nu(x)$:

$$\max_{x \neq 0} \nu(x) = \max_{x \neq 0} \frac{\|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|}{\|x\|} = \|A^{-1}\| \cdot \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} =$$

$$= \|A^{-1}\| \cdot \|A\|.$$

Величину $\nu(A) \equiv cond\ (A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|$ называют *числом обусловленности матрицы* A.

$$\boxed{\delta(x^*) \leq cond\ (A) \cdot \delta(b^*)}$$

Свойства числа обусловленности

1. $cond\ (E) = 1$, где E – единичная матрица.

Так как $E^{-1} = E$ и $\|E\| = 1$, то $cond\ (E) = \|E^{-1}\| \cdot \|E\| = 1.$

2. $cond\ (A) \geq 1.$

Так как $A \cdot A^{-1} = E$, то

$1 = \|E\| = \|A \cdot A^{-1}\| \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = cond\ (A).$

3. $cond\ (\alpha A) = cond\ (A), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$

Так как $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$, то $cond\ (\alpha A) = \|(\alpha A)^{-1}\| \cdot \|\alpha A\| =$

$= \frac{1}{|\alpha|} \cdot \|A^{-1}\| \cdot |\alpha| \cdot \|A\| = cond\ (A).$

- Величина $cond\,(A)$ является количественной мерой обусловленности СЛАУ $Ax = b$. Матрицы с большим числом обусловленности $cond\,(A) \gg 1$ называются *плохо обусловленными*.
- Величина $cond\,(A)$ зависит от выбора нормы, который осуществляется исходя из требований, предъявляемым к точности решения:

1) $\|x\|_1$ – малая суммарная ошибка в компонентах решения;
2) $\|x\|_2$ – малая среднеквадратичная ошибка;
3) $\|x\|_\infty$ – наибольшая из абсолютных ошибок

в компонентах решения должна быть малой.

Пример.

Вычислить число обусловленности матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, используя $\|\cdot\|_1 -$ норму.

<u>Решение.</u>

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le 2} \underbrace{\sum_{i=1}^{2} |a_{ij}|}_{\substack{\text{сумма модулей} \\ \text{элементов} \\ j-\text{го столбца}}} = \max\{1+3, 2+4\} = 6;$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$	$A^{-1} = \frac{1}{det\,A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$$det\,A = -2; \quad A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\|A^{-1}\|_1 = \frac{1}{2} \max\{4 + |-3|, |-2| + 1\} = \frac{7}{2};$$

$$cond_1(A) = 6 \cdot \frac{7}{2} = 21.$$

Ответ: $cond_1(A) = 21.$