Уравнение Ляпунова:

- $A^T * H + H * A = -I$ - непрерывный случай
- $A_d^T * H_d * A_d - H_d = -I$ - дискретный случай

Решение уравнения - матрица H. Если все собственные значения положительны, то система устойчива.

Показатели устойчивости:

- $\varkappa(A) = ||H||$ - непрерывный случай
- $\varkappa_d(A_d) = ||H_d||$ - дискретный случай

s = poly(0, ‘s’)

T0 = 0.79
n = 3

ПИ-регулятор
T = 0

    K = 1.5
    Ti = 2.375
    Wtmp = K * (1+ 1 / (Ti * s)) * (1 / ((1+s*T0)^n))

T = 1.5

    K = 0.9
    Ti = 4
    e = 1 + (-s * 1.5) + ((-s*1.5)^2) / 2
    Wtmp = K * (1+ 1 / (Ti * s)) * (e / ((1+s*T0)^n))

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} +$$

kappa_c = 9.4209436
kappa_d = 184.31064

ПИД-регулятор
T = 0

    K = 10
    Ti = 2
    Td = Ti / 4
    Tc = Td / 8
    Wtmp = K * (1+ 1 / (Ti * s) + (Td * s) / (1 + Tc * s)) * (1 / ((1+s*T0)^n))

T = 1.5

    K = 0.8
    Ti = 2.65
    Td = Ti / 4
    Tc = Td / 8
    e = 1 + (-s * 1.5) + ((-s*1.5)^2) / 2
    Wtmp = K * (1+ 1 / (Ti * s) + (Td * s) / (1 + Tc * s)) * (e / ((1+s*T0)^n))

kappa_c = 8.4882798
kappa_d = 312.99425

W = Wtmp / (1 + Wtmp)

Sys = syslin(‘c’, W)
https://help.scilab.org/docs/6.1.0/ru_RU/syslin.html

tau = 0.1
Sysd = dscr(Sys,tau)
[A, B, C, D] = abcd(Sys)
[Ad, Bd, Cd, Dd] = abcd(Sysd)

I = eye(A)

https://help.scilab.org/lyap
H = lyap(A, -I, 'c')
Hd = lyap(Ad, -I, 'd’)

Теорема 8. *Пусть спектр* $\{\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A)\}$ *матрицы* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *не имеет точек, симметричных относительно мнимой оси:* $\lambda_i(A)+\overline{\lambda_j(A)} \neq 0$, *где черта обозначает комплексное сопряжение. И пусть* $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *— решение матричного уравнения Ляпунова*

$$A^\top H + HA = -I. \tag{4.22}$$

Тогда: 1) *матрица* H *существует и единственна;*

2) *она симметрична* $H^\top = H$;

3) *устойчивость (гурвицевость) матрицы* A *влечет строгую положительную определенность* $H > 0$;

4) *обратно, если* $H > 0$, *то матрица* A *устойчива.*

Для матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ определим ее характеристический многочлен $a(\lambda) \doteq \det(\lambda I - A)$.

Определение. Матрица A называется *гурвицевой*, или *устойчивой*, если устойчив характеристический многочлен $a(\lambda)$.

проверим симметричность:
H == H'

Известно, что любая вещественная симметричная квадратная матрица $H = H^\top$ допускает разложение $H = P\Lambda P^\top$, где P — ортогональная матрица ($P^\top P = I$) и $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ — диагональная матрица из собственных чисел H, которые все вещественны. Если H положительно определена, то все λ_i положительны, и наоборот.

https://help.scilab.org/docs/2024.0.0/ru_RU/spec.html
найдем собственные числа H:

```
J = spec(H)
Jd = spec(Hd)
```

Если все Ji > 0 , то H > 0

```
J > 0
```

Значит, А устойчива, значит система устойчива
Найдем количественную меру устойчивости:

Следствие 5. *При условии устойчивости матрицы A верны равенства*

$$\varkappa(A) = \sup_{v(0)\neq 0} \frac{\int_0^\infty v(t)^\top v(t)dt}{v(0)^\top v(0)} = \sup_{v(0)\neq 0} \frac{v(0)^\top H v(0)}{v(0)^\top v(0)} = \|H\|.$$

```
kappa=norm(H,2)
```

Физический смысл kappa :

Чем менее устойчиво решение $v(t)$, тем больше его норма.

Показатель устойчивости $\varkappa(A) = \|H\| = \frac{1}{2(1+a)}$ зависит от a: чем больше a, тем более устойчива система.