Un algoritm pentru răspunsul la interogări

În cele ce urmează, ne propunem să stabilim un algoritm de calcul al probabilităţilor condiţionate a posteriori ale variabilelor de interogare. Algoritmul găsit va fi de tip înlănţuire înapoi prin faptul că pleacă de la variabila de interogare şi urmează drumurile de la acel nod până la nodurile dovezi. Datorită complicaţiilor care se pot naşte atunci când două drumuri diferite converg la acelaşi nod, algoritmul pe care îl vom prezenta se referă numai la *reţele unic conectate*, cunoscute şi sub denumirea de **polyarbori**. Reamintim faptul că, în astfel de reţele, există cel mult un drum nedirecţionat între oricare două noduri ale reţelei. Algoritmii pentru reţele generale, asupra cărora nu ne vom opri în cadrul restrâns al acestui curs, vor folosi algoritmii referitori la polyarbori ca principală subrutină.

Fig. 5.4 prezintă o reţea generică unic conectată. În această reţea nodul X are părinţii $\mathbf{U} = U_1 \ldots U_m$ şi fiii $\mathbf{Y} = Y_1 \ldots Y_n$. Corespunzător fiecărui fiu şi fiecărui părinte a fost desenat un dreptunghi care include toţi descendenţii nodului şi toţi strămoşii lui (cu excepţia lui X). Proprietatea de *unică conectare* înseamnă că toate dreptunghiurile sunt disjuncte şi că nu există legături care să le conecteze între ele. Se presupune că X este variabila de interogare şi că există o mulţime E de variabile dovezi[1]. Se urmăreşte calcularea probabilităţii condiţionate

$$P(X \mid E)$$

---

[1] $E = \left\{E_X^-, E_X^+\right\} = \left\{U_1, \ldots, U_m, Y_1, \ldots, Y_n\right\}$, mulţime de variabile aleatoare discrete.

Aceasta reţea este partiţionată în conformitate cu părinţii şi cu fiii variabilei de interogare X. Pentru a concepe un algoritm, va fi util să ne putem referi la diferite porţiuni ale dovezilor, astfel:

- E_X^+ reprezintă **suportul cauzal** pentru X - variabilele dovezi aflate ”deasupra” lui X, care sunt conectate la X prin intermediul părinţilor săi.
- E_X^- reprezintă **suportul probatoriu** pentru X - variabilele dovezi aflate ”dedesubtul” lui X şi care sunt conectate la X prin intermediul fiilor săi.

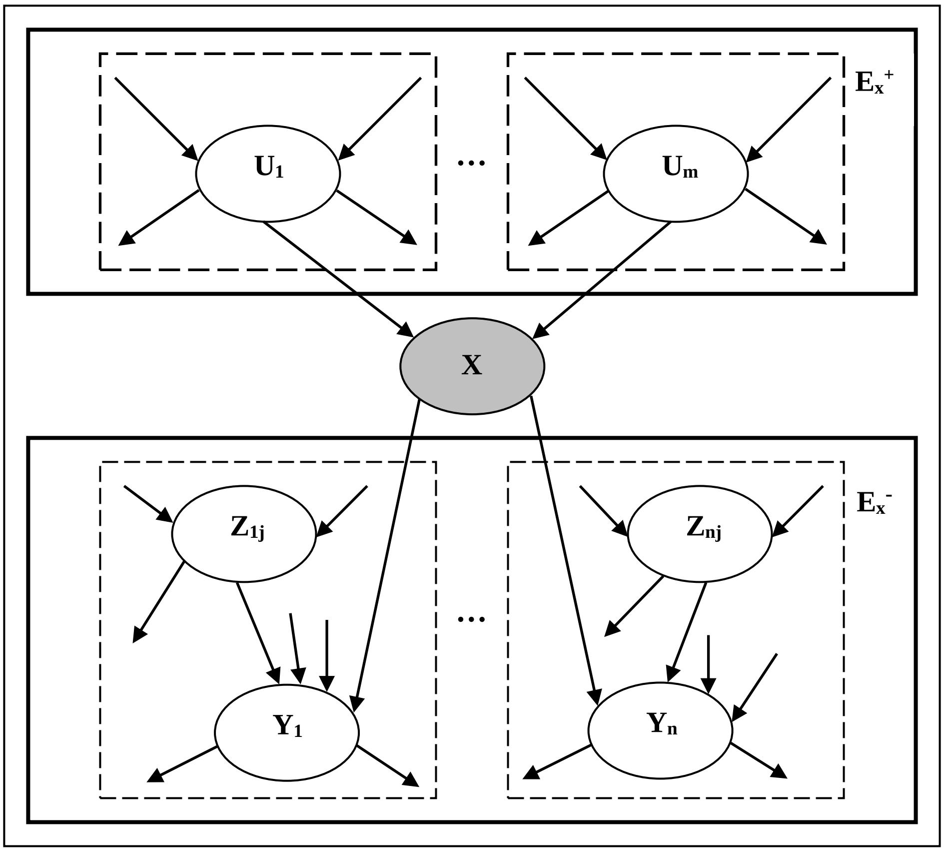

Fig. 5.4

Notaţia $E_{U_i \backslash X}$ va fi folosită pentru a se face referire la toate dovezile conectate cu nodul U_i, mai puţin cele prin drumul de la X . Cu această ultimă notaţie, putem partiţiona pe E_X^+ în $E_{U_1 \backslash X}, \ldots, E_{U_m \backslash X}$ şi deci putem exprima pe E_X^+ sub forma următoare:

$$E_X^+ = \bigcup_{i=1}^{m} E_{U_i \backslash X} \qquad (1)$$

În mod similar, $E_{Y_i \backslash X}$ semnifică mulţimea tuturor dovezilor conectate la Y_i prin intermediul părinţilor săi, *cu excepţia* lui X . Mulţimea E_X^- poate fi deci partiţionată în mulţimile $E_{Y_1 \backslash X}, \ldots, E_{Y_n \backslash X}$ şi este de forma

$$E_X^- = \bigcup_{i=1}^{n} E_{Y_i \backslash X} \qquad (2)$$

Se observă că mulţimea tuturor dovezilor E poate fi scrisă ca E_X (toate dovezile conectate la X) şi ca $E_{X \backslash}$ (toate dovezile conectate la X , fără excepţie).

Strategia generală pentru calculul lui $P\left(X \mid E\right)$ este atunci următoarea:

- Exprimă $P\left(X \mid E\right)$ în termenii contribuţiilor lui E_X^+ şi E_X^- .
- Calculează contribuţia mulţimii E_X^+ calculând efectul ei asupra părinţilor lui X şi apoi transmiţând acest efect lui X . (Calcularea efectului asupra fiecărui părinte al lui X este o secvenţă recursivă a problemei calculării efectului asupra lui X).
- Calculează contribuţia mulţimii E_X^- calculând efectul ei asupra fiilor lui X şi apoi transmiţând acest efect lui X . (Calcularea

efectului asupra fiecărui fiu al lui X reprezintă o secvenţă recursivă a problemei calculării efectului asupra lui X).

Totalitatea dovezilor, E, constă din dovezile aflate ”deasupra” lui X şi din cele aflate ”dedesubtul” lui X, întrucât s-a făcut presupunerea că X însuşi nu se află în E. Prin urmare, avem

$$P(X \mid E) = P\left(X \mid E_X^-, E_X^+\right)$$

Pentru a separa contribuţiile lui E_X^+ şi E_X^-, vom aplica versiunea condiţionată a regulii lui Bayes, păstrând pe E_X^- ca dovadă fixată în fundal:

$$P\left(X \mid E_X^-, E_X^+\right) = \frac{P\left(X \mid E_X^+\right) P\left(E_X^- \mid X, E_X^+\right)}{P\left(E_X^- \mid E_X^+\right)}$$

Întrucât X d-separă în cadrul reţelei pe E_X^+ de E_X^-, putem folosi independenţa condiţionată pentru a simplifica al doilea termen al numărătorului. De asemenea, putem trata $1/P\left(E_X^- \mid E_X^+\right)$ ca pe o constantă de normalizare, obţinând:

$$P(X \mid E) = \alpha\, P\left(X \mid E_X^+\right) P\left(E_X^- \mid X\right) \qquad (3)$$

Prin urmare, este necesar să calculăm cei doi termeni $P\left(X \mid E_X^+\right)$ şi $P\left(E_X^- \mid X\right)$. Vom începe prin tratarea primului, care se calculează relativ uşor.

Vom calcula $P\left(X \mid E_X^+\right)$ luând în consideraţie toate configuraţiile posibile ale părinţilor lui X, precum şi cât de probabile sunt acestea fiind dată mulţimea E_X^+. În cazul fiecărei configuraţii date, probabilitatea lui X se cunoaşte direct din tabelul probabilităţilor condiţionate.

Fie $\mathbf{U}$ vectorul părinţilor $U_1,\ldots,U_m$ şi fie $\mathbf{u}$ o atribuire de valori pentru aceştia[2]. În calculele care urmează vom folosi faptul că $E_{U_i \setminus X}$ d-separă pe U_i de toate celelalte dovezi din E_X^+. Ţinând cont de acest fapt şi de formula (1), obţinem egalitatea:

$$P\left(\{U_i = u_i\} \mid E_X^+\right) = P\left(\{U_i = u_i\} \mid E_{U_i \setminus X}\right) \quad i = \overline{1,m} \qquad (4)$$

Luând în consideraţie evenimentul sigur, putem exprima probabilitatea $P\left(X \mid E_X^+\right)$ sub următoarea formă:

$$P\left(X \mid E_X^+\right) = P\left(X \bigcap \bigcup_{(u_1,\ldots,u_m)} \{U_1 = u_1,\ldots,U_m = u_m\} \mid E_X^+\right) \qquad (5)$$

Întrucât membrul drept din (5) reprezintă probabilitatea unei reuniuni de mulţimi disjuncte, avem:

$$P\left(X \mid E_X^+\right) = \sum_{(u_1,\ldots,u_m)} P\left(X \bigcap \{U_1 = u_1,\ldots,U_m = u_m\} \mid E_X^+\right) \qquad (6)$$

Aplicând, în continuare, versiunea condiţionată a formulei de înmulţire a probabilităţilor membrului drept din (6), obţinem:

$$P\left(X \mid E_X^+\right) = \sum_{(u_1,\ldots,u_m)} P\left(\{U_1 = u_1,\ldots,U_m = u_m\} \mid E_X^+\right) \cdot$$

$$\cdot P\left(X \mid \{U_1 = u_1,\ldots,U_m = u_m\}, E_X^+\right) \qquad (7)$$

---

[2] Spre exemplu, dacă există doi părinţi Booleeni, U_1 şi U_2, atunci $\mathbf{u}$ trece peste patru atribuiri posibile, dintre care una este [true, false].

Probabilitatea $P\left(\left\{U_1 = u_1,\ldots,U_m = u_m\right\} \mid E_X^+\right)$, care intervine în membrul drept al formulei (7), poate fi explicitată dacă se ţine cont de independenţa variabilelor aleatoare $U_1,\ldots,U_m$, precum şi de faptul că $E_{U_i\setminus X}$ d-separă pe U_i de toate celelalte dovezi din E_X^+, care a fost partiţionat în $E_{U_1\setminus X},\ldots,E_{U_m\setminus X}$. Întrucât $U_1,\ldots,U_m$ sunt independente,

$$P\left(\left\{U_1 = u_1,\ldots,U_m = u_m\right\} \mid E_X^+\right) = \prod_{i=1}^{m} P\left(\left\{U_i = u_i\right\} \mid E_X^+\right) \tag{8}$$

şi, ţinând cont de (1), avem:

$$\prod_{i=1}^{m} P\left(\left\{U_i = u_i\right\} \mid E_X^+\right) = \prod_{i=1}^{m} P\left(\left\{U_i = u_i\right\} \mid E_{U_i\setminus X}\right) \tag{9}$$

Cea de-a doua probabilitate condiţionată care intervine în membrul drept al formulei (7) poate fi explicitată ţinându-se cont de faptul că U d-separă pe X de E_X^+:

$$P\left(X \mid \left\{U_1 = u_1,\ldots,U_m = u_m\right\}, E_X^+\right) = P\left(X \mid \left\{U_1 = u_1,\ldots,U_m = u_m\right\}\right) \tag{10}$$

Ţinând cont de (7), (8), (9) şi (10), obţinem:

$$P\left(X \mid E_X^+\right) = \sum_{(u_1,\ldots,u_m)} P\left(X \mid \left\{U_1 = u_1,\ldots,U_m = u_m\right\}\right) \prod_{i=1}^{m} P\left(\left\{U_i = u_i\right\} \mid E_{U_i\setminus X}\right) \tag{11}$$

Introducând expresia lui $P\left(X \mid E_X^+\right)$ dată de (11) în formula (3), rezultă:

$$P\left(X \mid E\right) = \alpha\, P\left(E_X^- \mid X\right) \sum_{\mathbf{u}} P\left(X \mid \mathbf{u}\right) \prod_{i=1}^{m} P\left(\left\{U_i = u_i\right\} \mid E_{U_i\setminus X}\right) \tag{12}$$

Ecuaţia (12) sugerează deja un algoritm. Astfel, $P\left(X \mid \mathbf{u}\right)$ este repartiţia lui X condiţionată de realizarea $\left(U_1 = u_1,\ldots,U_m = u_m\right)$. Valoarea acestei probabilităţi poate fi luată din tabelul de probabilităţi condiţionate asociat lui X. Calculul fiecărei probabilităţi $P\left(\{U_i = u_i\} \mid E_{U_i \setminus X}\right)$ reprezintă o secvenţă recursivă a problemei iniţiale, aceea de a calcula $P(X \mid E)$, adică $P(X \mid E_{X\setminus})$. Vom mai nota aici faptul că mulţimea variabilelor dovezi care intervin în apelarea recursivă reprezintă o submulţime a celor din apelarea iniţială, ceea ce constituie un indiciu că procedura de calcul se va termina într-un număr finit de paşi, ea reprezentând într-adevăr un algoritm.

În continuare ne propunem să calculăm probabilitatea $P\left(E_X^- \mid X\right)$, care intervine în formula (12), urmărind, în egală măsură, obţinerea unei soluţii recursive. – **CURSUL URMATOR, la sfârșitul căruia vom putea formula un algoritm pentru răspunsul la interogări.**

PARTEA A II-A

În continuare ne propunem să calculăm probabilitatea $P\left(E_X^- \mid X\right)$, care intervine în formula (12), urmărind, în egală măsură, obţinerea unei soluţii recursive.

$$P\left(X \mid E\right)=\alpha\, P\left(E_X^- \mid X\right)\sum_{\mathbf{u}} P\left(X \mid \mathbf{u}\right)\prod_{i=1}^{m} P\left(\left\{U_i=u_i\right\} \mid E_{U_i \setminus X}\right) \qquad (12)$$

Întrucât $E_{Y_i \setminus X}$ d-separă pe Y_i de toate celelalte dovezi din E_X^-, rezultă independenţa dovezilor din fiecare ”casetă Y_i” faţă de celelalte, condiţionat de X. Forma lui E_X^- este cea dată de formula (2). Datorită independenţei dovezilor de sub X avem:

$$P\left(E_X^- \mid X\right)=\prod_{i=1}^{n} P\left(E_{Y_i \setminus X} \mid X\right) \qquad (1)$$

Fie $\mathbf{Y}$ vectorul fiilor $Y_1,\ldots,Y_n$ şi fie $\mathbf{y}=\left(y_1,\ldots,y_n\right)$ o realizare a acestuia. În cele ce urmează, vom ţine cont de valorile fiilor lui $X, Y_i\ \left(i=\overline{1,n}\right)$, dar va trebui să includem şi părinţii fiecărui Y_i. Fie $\mathbf{Z}_i$ părinţii lui Y_i, alţii decât X şi fie $\mathbf{z}_i$ o atribuire de valori ale părinţilor. Luând în consideraţie evenimentul sigur $\bigcup_{\mathbf{y}_i}\left\{Y_i=y_i\right\}$ şi respectiv $\bigcup_{\mathbf{z}_i}\left\{\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\right\}$, avem:

$$P\left(E_{Y_i \setminus X} \mid X\right)=P\left(E_{Y_i \setminus X}\bigcap\bigcup_{y_i}\left\{Y_i=y_i\right\}\bigcap\bigcup_{\mathbf{z}_i}\left\{\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\right\} \mid X\right)=$$

$$=\sum_{y_i}\sum_{\mathbf{z}_i} P\left(E_{Y_i \setminus X},\left\{Y_i=y_i\right\},\left\{\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\right\} \mid X\right)$$

Aplicând, în formula anterioară, versiunea condiţionată a formulei de înmulţire a probabilităţilor, obţinem:

$$P\left(E_{Y_i\setminus X} \mid X\right)=\sum_{y_i}\sum_{\mathbf{z}_i} P\left(\left\{Y_i=y_i,\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\right\}\mid X\right)P\left(E_{Y_i\setminus X} \mid X,\left\{Y_i=y_i,\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\right\}\right) \tag{2}$$

Mulţimea dovezilor $E_{Y_i\setminus X}$ reprezintă reuniunea a două submulţimi disjuncte şi independente de variabile aleatoare:

$$E_{Y_i\setminus X}=E^{+}_{Y_i\setminus X}\bigcup E^{-}_{Y_i}$$

Prin urmare, avem:

$$P\left(E_{Y_i\setminus X} \mid X,\left\{Y_i=y_i,\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\right\}\right)=P\left(E^{+}_{Y_i\setminus X} \mid X,\left\{Y_i=y_i,\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\right\}\right)\cdot$$
$$\cdot P\left(E^{-}_{Y_i} \mid X,\left\{Y_i=y_i,\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\right\}\right) \tag{3}$$

Dar $E^{-}_{Y_i}$ este o mulţime de variabile aleatoare independente de X şi $\mathbf{Z}_i$, iar $E^{+}_{Y_i\setminus X}$ constituie o mulţime de variabile aleatoare independente de X şi Y_i. În aceste condiţii, repartiţiile condiţionate din (15) devin:

$$P\left(E_{Y_i\setminus X} \mid X,\left\{Y_i=y_i,\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\right\}\right)=P\left(E^{-}_{Y_i} \mid \left\{Y_i=y_i\right\}\right)\cdot P\left(E^{+}_{Y_i\setminus X} \mid \left\{\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\right\}\right) \tag{4}$$

Cea de-a doua repartiţie condiţionată din membrul drept al lui (16) apare ca o repartiţie a posteriori şi poate fi exprimată cu formula lui Bayes (în versiune necondiţionată):

$$P\left(E^{+}_{Y_i\setminus X} \mid \left\{\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\right\}\right)=\frac{P\left(E^{+}_{Y_i\setminus X}\right)\cdot P\left(\left\{\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\right\}\mid E^{+}_{Y_i\setminus X}\right)}{P\left(\left\{\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\right\}\right)} \tag{5}$$

Introducând (17) în (16) obţinem:

$$P\left(E_{Y_i\setminus X} \mid X,\left\{Y_i=y_i,\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\right\}\right)=$$

$$= P\left(E_{Y_i}^- \mid \{Y_i = y_i\}\right) \cdot \frac{P\left(E_{Y_i \setminus X}^+\right) P\left(\{\mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\} \mid E_{Y_i \setminus X}^+\right)}{P\left(\{\mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\}\right)} \tag{6}$$

Introducând acum expresia lui $P\left(E_{Y_i \setminus X} \mid X, \{Y_i = y_i, \mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\}\right)$ dată de (18) în formula (14), rezultă:

$$P\left(E_{Y_i \setminus X} \mid X\right) = \sum_{y_i} \sum_{\mathbf{z}_i} P\left(\{Y_i = y_i, \mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\} \mid X\right) \cdot P\left(E_{Y_i}^- \mid \{Y_i = y_i\}\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{P\left(E_{Y_i \setminus X}^+\right) P\left(\{\mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\} \mid E_{Y_i \setminus X}^+\right)}{P\left(\{\mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\}\right)} \tag{7}$$

Revenind acum la repartiţia lui E_X^- condiţionată de X, dată de formula (13) şi luând în consideraţie (19), obţinem:

$$P\left(E_X^- \mid X\right) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{y_i} P\left(E_{Y_i}^- \mid \{Y_i = y_i\}\right) \sum_{\mathbf{z}_i} P\left(\{Y_i = y_i, \mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\} \mid X\right) \cdot$$

$$\cdot \frac{P\left(E_{Y_i \setminus X}^+\right) P\left(\{\mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\} \mid E_{Y_i \setminus X}^+\right)}{P\left(\{\mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\}\right)} \tag{8}$$

Aplicând în (20) versiunea condiţionată a formulei de înmulţire a probabilităţilor, rezultă:

$$P\left(E_X^- \mid X\right) = \prod_{i=1}^{n} \sum_{y_i} P\left(E_{Y_i}^- \mid \{Y_i = y_i\}\right) \cdot \sum_{\mathbf{z}_i} \frac{P\left(E_{Y_i \setminus X}^+\right) P\left(\{\mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\} \mid E_{Y_i \setminus X}^+\right)}{P\left(\{\mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\}\right)} \cdot$$

$$\cdot P\left(\{\mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\} \mid X\right) \cdot P\left(\{Y_i = y_i\} \mid X, \{\mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\}\right) \tag{9}$$

Dar $\mathbf{Z}$ şi X sunt d-separate, ceea ce înseamnă că $P\left(\{\mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\} \mid X\right) = P\left(\{\mathbf{Z}_i = \mathbf{z}_i\}\right)$. Putem, de asemenea, înlocui pe $P\left(E_{Y_i \setminus X}^+\right)$ cu o constantă de normalizare β_i. În aceste condiţii, egalitatea (21) devine:

$$P\left(E_X^- \mid X\right)=\prod_{i=1}^{n}\sum_{y_i}P\left(E_{Y_i}^- \mid \{Y_i=y_i\}\right)\sum_{\mathbf{z}_i}\beta_i P\left(\{\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\}\mid E_{Y_i\setminus X}^+\right)\cdot$$

$$\cdot P\left(\{Y_i=y_i\}\mid X,\{\mathbf{Z}_i=\mathbf{z}_i\}\right)$$

Combinând toţi β_i într-o unică constantă de normalizare β şi ţinând cont de semnificaţia lui $E_{Y_i\setminus X}^+$, obţinem:

$$P\left(E_X^- \mid X\right)=\beta\prod_i\sum_{y_i}P\left(E_{Y_i}^- \mid y_i\right)\sum_{\mathbf{z}_i}P\left(y_i \mid X,\mathbf{z}_i\right)\prod_j P\left(z_{ij}\mid E_{Z_{ij}\setminus Y_i}\right) \qquad (10)$$

Se observă că fiecare dintre termenii expresiei finale date de (22) este uşor de evaluat:

- $P\left(E_{Y_i}^- \mid y_i\right)$ este o secvenţă recursivă a calculării lui $P\left(E_X^- \mid X\right)$;
- $P\left(y_i \mid X,\mathbf{z}_i\right)$ se citesc din tabelul de probabilităţi condiţionate asociat lui Y_i;
- $P\left(z_{ij}\mid E_{Z_{ij}\setminus Y_i}\right)$ reprezintă o secvenţă recursivă a problemei iniţiale, adică a calculării lui $P\left(X \mid E\right)$, mai precis a lui $P\left(X \mid E_{X\setminus}\right)$.

Problema transformării acestor calcule într-un *algoritm* este relativ simplă. Vor fi necesare două subrutine de bază, care vor calcula $P\left(X \mid E_{X\setminus V}\right)$ şi respectiv $P\left(E_{X\setminus V}^- \mid X\right)$, unde prin V am notat variabila care desemnează dovezile exceptate atunci când sunt luate în consideraţie cele conectate la nodul X .

În Algoritmul 5.1 subrutina SUPORT-EXCEPT(X,V) calculează $P\left(X \mid E_{X\setminus V}\right)$ folosind o generalizare a ecuaţiei (12), în timp ce subrutina DOVEZI-EXCEPT(X,V) calculează $P\left(E_{X\setminus V}^- \mid X\right)$ folosind o generalizare a ecuaţiei (22).

Pentru a simplifica prezentarea, se va presupune că reţeaua este fixată şi deja ”aprovizionată” cu dovezi, precum şi că variabilele dovezi satisfac predicatul DOVEZI?. Probabilităţile $P(X \mid \mathbf{U})$, unde $\mathbf{U}$ reprezintă vectorul părinţilor lui X, sunt disponibile în tabelul de probabilităţi condiţionate asociat lui X. Calculul expresiilor $\alpha\ldots$ şi $\beta\ldots$ se face prin normalizare.

În general, un agent primeşte valori ale variabilelor dovezi prin intermediul senzorilor săi sau în urma unor raţionamente şi se interesează (întreabă) despre posibilele valori ale altor variabile, astfel încât să poată decide ce acţiune trebuie întreprinsă în continuare. Algoritmul 5.1 calculează distribuţia de probabilitate condiţionată pentru o variabilă de interogare dată. El reprezintă un algoritm de tip înlănţuire-înapoi pentru rezolvarea interogărilor probabiliste asupra unui polyarbore.

Algoritmul 5.1

function INTEROGARE-REŢEA(X) **return**

o distribuţie de probabilitate a valorilor lui X

input: X, o variabilă aleatoare

SUPORT-EXCEPT(X, nul)

function SUPORT-EXCEPT(X,V) **return** $P(X \mid E_{X\backslash V})$

if DOVEZI ? (X) **then return** distribuţia observată pentru X

else

calculează $P(E^{-}_{X\backslash V} \mid X)$ = DOVEZI-EXCEPT (X,V)

$\mathbf{U} \leftarrow$ PĂRINŢI $[X]$

if $\mathbf{U}$ este vid

then return $\alpha\, P\left(E_{X\backslash V}^{-} \mid X\right) P(X)$

else

pentru fiecare U_i **in** U **do**

calculează şi memorează $P\left(U_i \mid E_{U_i \backslash X}\right) =$

$=$SUPORT-EXCEPT $\left(U_i, X\right)$

return $\alpha\, P\left(E_{X\backslash V}^{-} \mid X\right) \sum_{\mathbf{u}} P(X \mid \mathbf{u}) \prod_i P\left(U_i \mid E_{U_i \backslash X}\right)$

function DOVEZI-EXCEPT (X, V) **return** $P\left(E_{X\backslash V}^{-} \mid X\right)$

$\mathbf{Y} \leftarrow$FII $[X] - V$

if $\mathbf{Y}$ este vid

then return o repartiţie uniformă

else

pentru fiecare Y_i **in** $\mathbf{Y}$ **do**

calculează $P\left(E_{Y_i}^{-} \mid y_i\right) =$DOVEZI-EXCEPT$\left(Y_i,\ \text{nul}\right)$

$\mathbf{Z}_i \leftarrow$PĂRINŢI $\left[Y_i\right] - X$

pentru fiecare Z_{ij} **in** $\mathbf{Z}_i$

calculează $P\left(Z_{ij} \mid E_{Z_{ij} \backslash Y_i}\right) =$

$=$SUPORT-EXCEPT$\left(Z_{ij}, Y_i\right)$

return $\beta \prod_i \sum_{y_i} P\left(E_{Y_i}^{-} \mid y_i\right) \sum_{\mathbf{z}_i} P\left(y_i \mid X, \mathbf{z}_i\right) \prod_j P\left(z_{ij} \mid E_{Z_{ij} \backslash Y_i}\right)$

❑

Calculele efectuate de Algoritmul 5.1 presupun apeluri recursive care se extind de la X de-a lungul tuturor drumurilor din reţea. Recursivitatea se încheie atunci când sunt atinse noduri-dovezi, noduri-rădăcină (care nu au părinţi) şi noduri-frunză (care nu au fii). Fiecare apel recursiv exclude nodul de la care s-a produs apelul, astfel încât fiecare nod din arbore este tratat o singură dată. Prin urmare, algoritmul este liniar raportat la numărul de noduri ale reţelei. Algoritmul se comportă în acest fel deoarece reţeaua dată reprezintă un *polyarbore*. Dacă ar exista mai mult de un singur drum între o pereche de noduri, atunci fie procedurile recursive ar lua în calcul aceleaşi dovezi de mai multe ori, fie execuţia nu s-ar încheia într-un număr finit de paşi.

Algoritmul prezentat, de tip înlănţuire-înapoi, este cel mai simplu algoritm pentru polyarbori. Principalul neajuns al unui asemenea algoritm este acela că el calculează repartiţia de probabilitate pentru o unică variabilă. Dacă se doreşte determinarea repartiţiilor a posteriori pentru toate variabilele care nu constituie variabile dovezi, atunci programul implementând Algoritmul 5.1 ar trebui executat pentru fiecare dintre acestea, ceea ce ar mări timpul de execuţie. În acest caz este preferabilă o abordare de tip înlănţuire-înainte, care pleacă de la variabilele dovezi. În cazul unei contabilizări adecvate, calculele pot fi efectuate într-un timp liniar. Versiunea algoritmului care foloseşte înlănţuirea-înainte poate fi privită ca reprezentând o ”propagare a mesajelor” prin reţea. Din această cauză implementarea pe calculatoare paralele este relativ simplă şi pot fi făcute analogii interesante cu propagarea mesajelor între neuronii din creier.