Tema 2

Exercițiul 1

Efectuăm aruncări succesive a două zaruri echilibrate și suntem interesați in găsirea probabilității evenimentului ca suma 5 (a fețelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7. Pentru aceasta presupunem că aruncările sunt independente.

1. Calculați pentru inceput probabilitatea evenimentului E_n: in primele $n-1$ aruncări nu a apărut nici suma 5 și nici suma 7 iar in a n-a aruncare a apărut suma 5. Concluzionați.
2. Aceeași intrebare, dar inlocuind 5 cu 2.

Exercițiul 2

Maria este anul II și urmează cursul de probabilități. Știm că la sfârșitul fiecărei săptămâni ea poate fi sau la zi cu materia sau să rămână în urmă. Dacă este la zi cu materia într-o săptămână dată atunci probabilitatea ca ea să fie la zi cu materia (sau să rămână în urmă) în săptămâna ce urmează este de 0.8 (respectiv 0.2). Dacă este rămasă în urmă cu materia într-o săptămână dată atunci șansa ca ea să ajungă cu materia la zi este 0.4 iar ca să rămână în urmă este de 0.6. Știind că atunci când a început cursul era cu materia la zi care este probabilitatea ca ea să fie cu materia la zi și după trei săptămâni? Dar la sfârșitul cursului (cursul are 14 săptămâni)?

Exercițiul 3

Fie X o variabilă aleatoare a cărei repartiție este:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Să se scrie repartițiile variabilelor $3X+7$, X^2, X^3, $X+X^2$ și să se calculeze probabilitățile $\mathbb{P}\left(X > -\frac{1}{3}\right)$ și $\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{4} | X \geq -\frac{1}{2}\right)$.

Exercițiul 4

Fie X o variabilă aleatoare cu valori in $\mathbb{N}$, așa incat $p_n = \mathbb{P}(X=n) > 0$ pentru toți $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătați că pentru $\lambda > 0$ următoarele afirmații sunt echivalente:
   i) X este o variabilă Poisson de parametru λ
   ii) Pentru toți $n \geq 1$ avem $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$
b) Dacă $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ determinați
   i) Valoarea k pentru care $\mathbb{P}(X=k)$ este maximă.
   ii) Valoarea lui λ care maximizează $\mathbb{P}(X=k)$, pentru k fixat.

Exercițiul 5

Fie X o variabilă discretă astfel încât $\mathbb{P}(X=k) = \frac{(1-p)^k}{-k\log(p)}$ dacă $k \geq 1$ și $\mathbb{P}(X=0) = 0$, cu $0 < p < 1$. Să se calculeze $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ și $Var[X]$.

Exercițiul 6

Bobby Fischer și Boris Spassky joacă un meci de șah în care primul jucător care câștigă o partidă câștigă și meciul. Regula spune că după 10 remize succesive meciul se declară egal. Știm că o partidă poate fi câștigată de Fischer cu probabilitatea de 0.4, câștigată de Spassky cu probabilitatea de 0.3 și este remiză cu probabilitatea de 0.3, independent de rezultatele din partidele anterioare.

a) Care este probabilitatea ca Fischer să câștige meciul?

b) Care este funcția de masă a duratei meciului (durata se măsoară în număr de partide jucate)?

Exercițiul 7

Un administrator de reprezentanță de mașini comandă uzinei Dacia N mașini, numărul aleator X de mașini pe care il poate vinde reprezentanța sa intr-un an fiind un număr intreg intre 0 și $n \geq N$, toate avand aceeași probabilitate. Mașinile vandute de administrator ii aduc acestuia un beneficiu de a unități monetare pe mașină iar mașinile nevandute ii aduc o pierdere de b unități. Calculați valoarea medie a caștigului G reprezentanței de mașini și deduceți care este comanda optimă.

Exercițiul 8

Calculați probabilitatea $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}[X])$ știind că X este o variabilă aleatoare Binomială care verifică $\mathbb{E}[X] \notin \mathbb{N}$ și $\mathbb{E}[X] = 2Var(X)$.