Metoda Divide Et Impera

PREZENTARE GENERALA

Metoda „Divide et Impera" constă în:

- împărțirea problemei inițiale în subprobleme de același tip, două sau mai multe, de obicei de dimensiuni egale;
- rezolvarea subproblemelor recursiv, prin aceeași metoda, sau direct pentru subproblemele pentru care rezultatul poate fi calculat, de regula atunci cand dimensiunea subproblemelor este sub un prag ε;
- combinarea rezultatelor obținute pentru subprobleme, pentru a determina rezultatul problemei inițiale.

Obs: 1. Subproblemele sunt independente si se pot rezolva in paralel.

2. Dependentele dintre probleme pot fi reprezentate intr-un arbore. Un nod va reprezenta o subproblema, radacina fiind asociata problemei initiale. Fiecare nod va avea ca descendenti subproblemele in care este impartita problema pe care o reprezinta. Frunzele sunt subproblemele care se pot rezolva direct. Algoritmul divide et impera este o **parcurgere in post-ordine** a acestui arbore.

ALGORITMUL GENERAL

```
function DivImp(p, u)
        if (u - p) <= ε
                r = Rezolva(p, u)
        else
                m  =  Interm(p, u);
                r1  =  DivImp(p, m);
                r2  =  DivImp(m + 1, u);
                r  =  Combina(r1, r2)
        return r
end
```

PROBLEMA 1

Aplicatie MergeSort: Sa se afle numarul de inversiuni dintr-un vector

O inversiune intr-un vector $v = (v_1, \dots, v_n)$ este o pereche (v_i, v_j) cu $i < j$ si $v_i > v_j$.
Sa se numere cate inversiuni contine vectorul v.

v = (9 , 6, 12, 3, 5, 8, 4, 7, 1, 2).
Numarul total de inversiuni din v este 8 + 5 + 7 + 2 + 3 + 4 + 2 + 2 + 0 + 0 = 33

Solutie complexitate timp O(n log n): T(n) = 2T(n/2) + O(n)

Pasul 1 impartirea problemei initiale in subprobleme:
Se imparte vectorul in doi vectori $vs = (v_1, \dots, v_m)$ si $vd = (v_{m+1}, \dots, v_n)$, unde $m = \lfloor n/2 \rfloor$.

vs = (9 , 6, 12, 3, 5)
vs = (8 , 4, 7, 1, 2)

Pasul 2 **rezolvarea subproblemelor**
Se obtin nrs si nrd numarul de inversiuni din vs respectiv din vd. Pentru exemplul de mai sus

nrs = 3 + 2 + 2 + 0 + 0 = 7
nrd = 4 + 2 + 2 + 0 + 0 = 8

Pasul 3 **recombinarea rezultatelor** Numarul total de inversiuni este $nrs + nrd + nrm$, unde nm este numarul de inversiuni care se formeaza cu perechi (a, b) unde $a \in vs$ si $b \in vd$.

Cum calculam eficient nrm?
O(n) – costul interclasarii lui vs si vd (presupunand ca acestea au fost sortate)

Este suficient sa numaram in cate inversiuni apare fiecare element din vs sau in cate inversiuni apare fiecare element din vd.
Spre exemplu se observa ca 9 este mai mare decat toate cele 5 elemente ale lui vd.

vs = (9 , 6, 12, 3, 5)
vd = (8 , 4, 7, 1, 2)

(9,8) (9,4) … => 5 inversiuni

7 este mai mic decat 2 valori din vs. Am obtine acelasi numar de inversiuni in care apare 7 indiferent de pozitia unde ar fi acesta sau valorile 9,12 in vs respectiv in vd.

vs = (….., 9, ….. 12 , …..)
vd = (….., 7, ……) => 2 inversiuni.

Obs: In plus fata de calculul valorilor nrs si nrd la rezolvarea subproblemelor presupune ca se va face si sortarea vectorilor vs si vd.
Numarul de inversiuni in care apare un element x din vs, se calculeaza in timpul interclasarii lui vs cu vd, atunci cand elementul x este adaugat in vectorul rezultat dupa cum se arata in cele ce urmeaza.

Presupunem ca se ajunge la pasul in care se compara un element x de pe pozitia i din vs cu un element y de pe pozitia j din vd.

vs = (A x B)

vd = (C y D)

Daca x < y, x este adaugat in vectorul rezultat iar i = i + 1. Vectorul sortat va contine dupa acest pas (interclasare(A, C) , x).

Elementul x are valoarea mai mare decat toate valorile din subvectorul C si mai mica decat toate elementele din subvectorul D. Astfel pentru a numara toate inversiunile in care apare x impreuna cu elemente din vd, e suficient sa numaram cate elemente are subvectorul C (adica j - 1).

vs = (3, 5, 6, 9, 10)
vs = (1, 2, 4, 7, 8)

Dupa 5 pasi ai algoritmului de interclasare

V = (1 , 2 , 3 , 4, 5) iar i = 3 (vs[i] = 6) si j=4 (vs[j] = 7).
La acest pas este adaugat 6 in vectorul final si vom numara inversiunile in care apare acesta
(j – 1 = 3 inversiuni)

Alternativ se pot numara inversiunile in care apare fiecare element din subvectorul drept.

Implementare: merge sort, implementare alternativa: cu arbori de intervale (vezi laborator).

PROBLEMA 2

Aplicatie QuickSort: Mediana unui vector (al k-lea minim)

Dat un vector a de n numere şi un indice $k, 1 \leq k \leq n$, sa se determine al k-lea cel mai mic element din vector.

A i -a statistică de ordine a unei mulțimi de n elemente este al k-lea cel mai mic element.

Minimul = prima statistică de ordine
Maximul = a n-a statistică de ordine

Mediana = o valoare v cu proprietatea că numărul de elemente din mulțime mai mici decât v este egal cu numărul de elemente din mulțime mai mari decât v. Dacă n este impar, atunci mediana este a $\lfloor n/2 \rfloor$-a statistică de ordine, altfel, prin convenție mediana este media aritmetică dintre a $\lfloor n/2 \rfloor$-a statistică și a ($\lfloor n/2 \rfloor$+1)-a statistică de ordine.

Solutie complexitate timp mediu de executie O(n)

Pasul 1 impartirea problemei initiale in subprobleme:

Se alege un element *x* (pivot) se gaseste pozitia (*m*) pivotului in vectorul sortat:

- toate elementele aflate la stânga poziţiei *m* vor fi mai mici decât *x*;
- toate elementele aflate la dreapta poziţiei m vor fi mai mari decât *x*.

Astfel daca *m* = *k* pivotul ales este al k-lea minim.

Pasul 2 rezolvarea subproblemelor

Daca *m* < *k* al *k*-lea minim se afla intre elementele situate in dreapta pivotului, intre pozitiile [*m+1*,*n*]

Daca *m* > *k* al k-lea minim se afla intre elementele situate in stanga pivotului, intre pozitiile [*1*,*m-1*]

```
function kmin(p,u)
      m = pozRand(p,u);
      if (m = k) return a[m]
            if(m < k)
                  return kmin(m+1,u)
            else
                  return kmin(p,m-1)
      end
```

Timpul mediu de executare al acestui algoritm este O(n). Mai exact se poate demonstra prin inducție că pentru o constantă c suficient de mare avem T(n) < cn. (vezi curs)

PROBLEMA 3

Mediana vectorului obtinut prin interclasarea a doi vectori sortati

Se dau doi vectori a și b de lungime n, cu elementele ordonate crescător. Să se determine mediana vectorului obținut prin interclasarea celor doi vectori.

Solutie complexitate timp O(log n) fara a interclasa vectorii

Nu este necesar sa efectuăm procedura de interclasare care are complexitatea: O(n).

Vom compara medianele celor doi vectori. În funcție de rezultat, problema se reduce la aceeași problemă pentru subvectori ai vectorilor inițiali. Dimensiunea problemei se va reduce la jumatate.

Astfel, fie **m1** mediana vectorului a și **m2** mediana vectorului b

Observație. Mediana unui vector sortat cu n elemente se poate calcula în timp constant, fiind chiar elementul de pe poziția $\lfloor n/2 \rfloor$ (pozițiile sunt numerotate de la 0), dacă n este impar, sau media aritmetică a elemetelor de pe pozițiile $\lfloor n/2 \rfloor - 1$ și $\lfloor n/2 \rfloor$, dacă n este par

- Dacă ma = mb atunci această valoare este mediana
- Dacă ma > mb atunci mediana se află în unul din subvectorii a[0.. $\lfloor n/2 \rfloor$], b[$\lfloor (n-1)/2 \rfloor .. n-1$]
- Dacă ma < mb atunci mediana se află în unul din subvectorii a[$\lfloor (n-1)/2 \rfloor .. n-1$], b[0.. $\lfloor n/2 \rfloor$]

Mediana noii probleme = mediana problemei iniţiale deoarece se elimina (n-1)/2 elemente mai mici decât mediana şi tot (n-1)/2 elemente mai mari decât mediana.

Dacă vectorii au cel mult două elemente, atunci problema se poate rezolva direct.

Idee de rezolvare in cazul in care **dimensiunile celor doi vectori nu sunt egale: cautare binara**.

a = [4 5 6 8 9 10]   n = 6

b = [1 3 5 7 12]   m = 5

Daca a[4] = 8 (elementul situat la mijlocul lui a) ar fi mediana inseamna ar trebui sa fie mai mare decat (n + m)/2 = 5 elemente din vectorul obtinut prin interclasare. Este mai mare decat 3 = i-1 (i = 4, poz pe care se afla 8) elemente din a, inseamna ca ar trebui sa fie mai mare decat 2 elemente din b. Pentru a verifica acest fapt:

Comparam a[4] cu b[2] si b[3] timp constant: b[2] = b[(n+m)/2 – i + 1]

8 > 3, 8>6. deci exista mai mult de 5 valori mai mici decat 8, deci trebuie mediana este o valoare mai mica decat 8 si va fi cautata in subvectorul 4 5 6.

PROBLEMA 4

(**Cele mai apropiate puncte in plan**) Fiind date *n* puncte in plan, prin coordonatele lor (x_i, y_i) sa se gaseasca cea mai apropiata pereche de puncte.

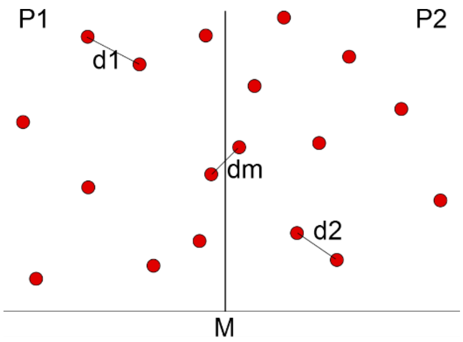
Solutie complexitate timp O(n log n): T(n) = 2T(n/2) + O(n)

Pasul 1 impartirea problemei initiale in subprobleme:

Se imparte multimea de puncte in doua submultimi P1 si P2 cu numar egal (n/2) de puncte. Se cauta mediana M. Dreapta verticala x = M va fi cea va delimita cele doua multimi de puncte. Complexitatea acestui pas este O(n).

Pasul 2 rezolvarea subproblemelor Se gaseste cea mai apropiata pereche de puncte din P1 intre care exista distanta d_1, cea mai apropiata pereche de puncte din P2, intre care exista distanta d_2. Problema initiala a fost impartita in doua subprobleme iar timpul de executie va fi

T(n) = 2T(n/2) + f(n), unde f(n) este timpul necesar recombinarii rezultatelor obtinute (timpul pentru pasul 3).



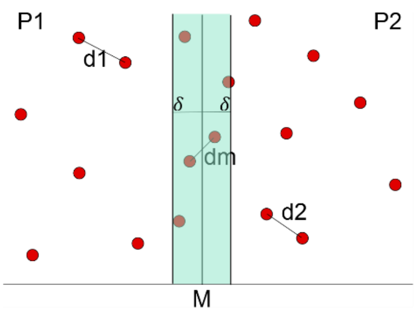
Pasul 3 recombinarea rezultatelor Se alege minimul dintre d_1, d_2 si d_m unde

d_m = min {d(A,B), pentru A ∈ P1, B ∈ P2}.

Pentru a obtine complexitatea O(n log n) vom rezolva pasul 3 in O(n) pasi (7n pasi).

Se va calcula cat mai eficient d_m (fara a se considera toate perechile de puncte (A,B) cu A ∈ P1, B ∈ P2)

Calculul distantei d_m:



Fie $\delta = \min(d_1, d_2)$. Este suficient sa consideram din P1 doar acele puncte $A(x_A, y_A)$ cu $M - x_A \leq \delta$ iar din P2 doar acele puncte $B(x_B, y_B)$ cu $x_B - M \leq \delta$. In caz contrar $d(A, B) \geq \delta$.

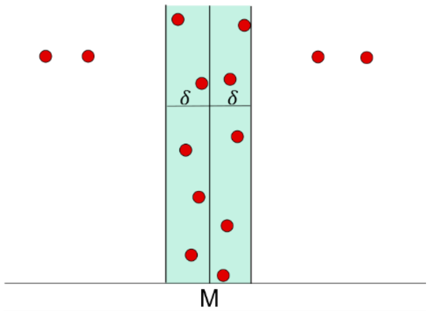
Astfel vom considera perechi de puncte cu abscisa

[M – δ, M + δ]

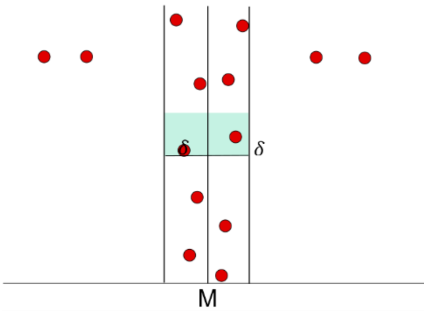
Vom nota multimea acestor puncte cu B_δ.

Daca vom considera toate perechile de puncte din multimea B_δ complexitatea obtinuta va fi O(n^2) deoarece $|B_\delta| \approx n$ (distanta dintre doua puncte pot fi mai mare decat δ chiar daca distanta dintre abscise este mai mica decat δ)

In constructia lui B_δ am luat in considerare doar distantele intre abscisele punctelor. Dar, spre exemplu, pentru un punct A cu ordonata 0 nu este necesar sa verificam decat distante $d(A,B)$ unde B este un punct cu ordonata $y_B \leq \delta$.



Este suficient sa consideram pentru fiecare punct $A(x_A, y_A)$ cu $|M - x_A| \leq \delta$ perechi formate cu puncte $B(x_B, y_B)$ din dreptunghiul de dimensiuni [2δ x δ] centrat in dreapta x = M.



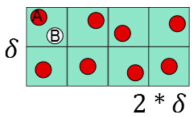
Deoarece $\delta = \min(d_1, d_2)$ intr-un astfel de dreptunghi pot fi maxim 8 puncte (*). Daca ar exista mai mult de 8 puncte cel putin 2 dintre ele ar fi la distanta mai mica decat δ.

Astfel pentru fiecare punct $A(x_A, y_A)$ cu $|M - x_A| \leq \delta$ este suficient sa consideram perechile formate cu urmatoarele 7 puncte $B(x_B, y_B)$ sortate crescator dupa ordonata.

(*) Presupunem ca ar exista doua puncte A, B in patratul din coltul din stanga sus din dreptunghiul de dimensiuni [2δ x δ] impartit in 8 patrate de latura $\delta/2$.

Atunci $d(A,B) \leq \delta$. Ceea ce ar contrazice alegerea lui δ ca fiind $\delta = \min(d_1, d_2)$. Ar insemna ca exista in P1 o pereche de puncte la distanta mai mica decat d_1.

Deci fiecare din cele 8 patrate contine maxim 1 punct.



Algoritm: X contine punctele sortate dupa abscisa, Y contine punctele sortate dupa ordonata

```
function dmin(X , Y, st, dr)

        daca |X| < 4
                d = min(perechi de elemente din X[st..dr])

        altfel
                mid=(st+dr)/2

                SY= mulțimea punctelor din Y ∩ X[st..mij]
                DY= mulțimea punctelor din Y ∩ X[mij+1..dr]
                d1=divimp(X[st..mij], SY, st, mij)
                d2=divimp(X[mij+1..dr], DY, mij+1,dr)
                d=min{d1, d2}

                LY= Y ∩ banda (cu abscisa la distanta < d de abscisa punctului X[mid])

                calculează d3 considerând punctele p din LY si perechile formate de p cu fiecare din
                cele 7 puncte care îi urmează în LY

                d=min{d, d3}

                return d
end
```

PROBLEMA 1

Se citesc trei numere naturale *n, l, r*. Se consideră un șir *v* care inițial conține numărul *n*. Asupra șirului *v* se pot face următoarele modificări: se înlocuiește elementul de pe poziția *i* din v cu elementele v[i] div 2, v[i] mod 2, v[i] div 2. Spre exemplu v = [… 5 …] va fi transformat în *v* = [… 2 1 2 …]. Se aplică succesiv astfel de transformări pană când v va conține doar valori de 0 și 1.
Să se afișeze numărul de valori egale cu 1 situate în șirul *v* final între pozițiile *l* și *r*.

Pentru n = 13 și l = 3 r = 14 se va afișa 10.
v = [13] => [6 1 6] => [3 0 3 1 3 0 3] => [1 1 **1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 1 1** 1]