Model 2020 rezolvat

Exercițiul 1. Determinați coordonatele carteziene ale punctului M de coordonate polare $\rho = 6; \theta = \frac{\pi}{6}$, respectiv coordonatele polare ale punctului $N(-4, 4)$

Rezolvare. Relațiile care leagă reprezentarea carteziană a unui punct de cea polară sunt

$$x = \rho \, cos \, \theta$$
$$y = \rho \, sin \, \theta$$

Înlocuind, obținem că

$$x = 6 \cdot cos \, \frac{\pi}{6} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$
$$y = 6 \cdot sin \, \frac{\pi}{6} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

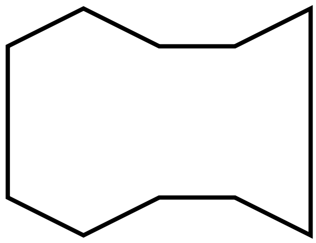
Pentru că a găsi coordonatele polare plecând de la cele carteziene, înlocuim în relațiile de mai sus și rezolvăm sistemul de ecuații care apare:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \rho^2 \, cos^2 \, \theta + \rho^2 \, sin^2 \, \theta = \\ &= \rho^2 (cos^2 \, \theta + sin^2 \, \theta) = \rho^2 \\ \iff 16 + 16 &= \rho^2 \\ \iff \rho &= \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$\square$

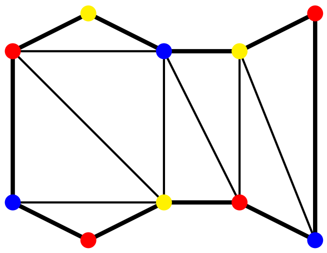
Exercițiul 2. Aplicați metoda din demonstrația teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere pentru în cazul poligonului $P_1P_2 \dots P_{10}$, unde $P_1 = (3,4)$, $P_2 = (4,6)$, $P_3 = (5,4)$, $P_4 = (6,4)$, $P_5 = (7,6)$ iar $P_6, \dots, P_{10}$ sunt respectiv simetricele punctelor $P_5, \dots, P_1$ față de axa O_x.

Rezolvare. Pentru a găsi simetricul unui punct față de axa O_x este suficient să schimbăm semnul coordonatei y. Începem prin a face un desen:



Reprezentarea grafică a galeriei de artă

Metoda descrisă în teorema galeriei de artă ne cere să găsim o triangulare a poligonului, și apoi să colorăm fiecare vârf în una din trei culori, astfel încât să **nu** existe două vârfuri cu aceeași culoare învecinate.



O triangulare posibilă, cu vârfuri colorate

Alegem să punem camere în fiecare vârf de culoare galbenă, de exemplu, și acestea ar acoperi tot poligonul. □

Exercițiul 3. Dați exemple de mulțimi de puncte din planul $\mathbb{R}^2$ pentru care diagramele Voronoi asociate conțin exact 4 muchii de tip semidreaptă, dar în configurații diferite (două diagrame Voronoi au configurații diferite dacă **nu** pot fi obținute una din cealaltă fără a introduce sau elimina vârfuri sau muchii).

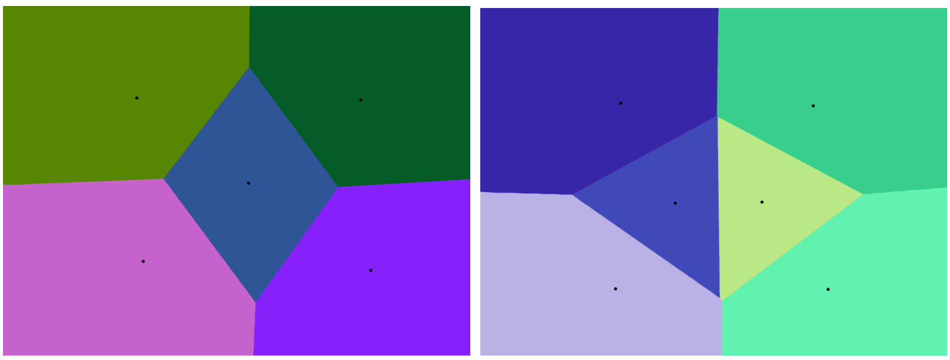
Rezolvare. Numărul de semidrepte dintr-o diagramă Voronoi corespunde numărului de puncte de pe învelitoarea convexă a vârfurilor (proprietatea aceasta a fost menționată la curs, se poate găsi și pe internet). Trebuie să alegem două mulțimi de puncte, care să aibă ambele o învelitoare convexă formată din 4 puncte, dar putem avea un număr diferit de puncte în interiorul învelitoarei.

De exemplu, să zicem că luăm punctele

$$A = \{ (-2,-2), (2,-2), (2,2), (-2,2) \}$$

care formează un dreptunghi, și cele două mulțimi ar putea fi:

$$\begin{aligned} M_1 &= A \cup \{ (0,0) \} \\ M_2 &= A \cup \{ (-1,0), (1,0) \} \end{aligned}$$



$\square$

Exercițiul 4. Fie MNP un triunghi cu vârfurile $M = (x_M, y_M)$, $N = (x_N, y_N)$ și $P = (x_P, y_P)$ și fie δ o dreaptă de ecuație $ax + by + c = 0$. Stabiliți și justificați care este complexitatea algebrică a calculelor pentru a stabili dacă:

a) dreapta intersectează laturile triunghiului;

b) dreapta trece prin centrul de greutate al triunghiului.

Rezolvare. La a) putem testa dacă intersectează cel puțin una dintre cele trei laturi.

Ca să vedem dacă dreapta intersectează un segment (o latură), putem să folosim testul de orientare între un segment de pe dreaptă (determinat orice două puncte de pe dreaptă) și capetele segmentului. Dacă capetele sunt pe părți diferite ale dreptei, atunci dreapta se intersectează cu segmentul.

Per total, complexitatea algebrică a acestei probleme este mărginită de testul de orientare, care folosește *polinoame de gradul 2*.

Pentru b), coordonatele centrului de greutate $G = (x_G, y_G)$ se pot calcula ca media aritmetică a coordonatelor vârfurilor. Determinarea mediei aritmetice se face printr-un polinom de gradul 1.

Pentru a verifica dacă dreapta trece prin acest punct este suficient să îl înlocuim în ecuația dreptei, și obținem condiția:

$$ax_G + by_G + c = 0$$

Datorită termenilor ca ax_G sau by_G este un *polinom de gradul 2* (am presupus că parametrii dreptei a, b, c sunt și ei date de intrare, deci variabile în această expresie). $\square$

Exercițiul 5. Explicați de ce complexitatea-timp a algoritmului de determinare a intersecției a două regiuni convexe IntersecteazăRegiuniConvexe este $\mathcal{O}(n\,log\,n)$ (complexitatea-timp a algoritmului Overlay de suprapunere a straturilor tematice este presupusă cunoscută).

Rezolvare. Din curs avem că algoritmul Overlay are complexitatea

$$\mathcal{O}(n\,log\,n + k\,log\,n)$$

unde n este numărul total al vârfurilor al straturilor tematice, iar k depinde de complexitatea intersecției.

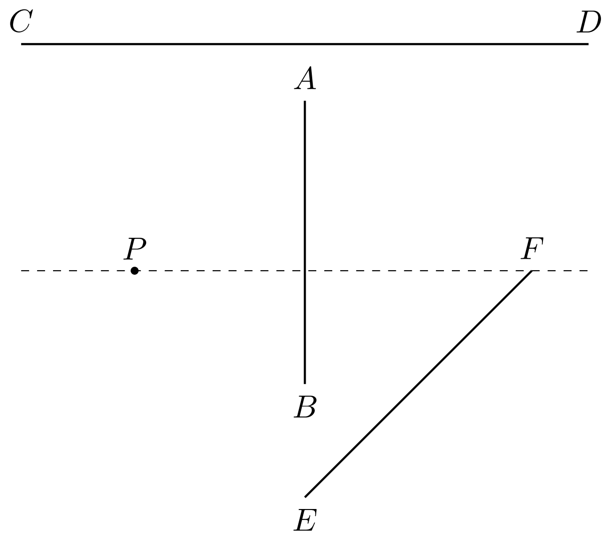
Vrem să folosim acest algoritm pentru a intersecta doua poligoane convexe. Intersecția acestora este fie mulțimea vidă, un punct, un segment sau un poligon convex. În toate aceste cazuri, numărul de vârfuri din intersecție este sigur în $\mathcal{O}(n)$. Complexitatea algoritmului Overlay în acest caz este

$$\mathcal{O}(n\,log\,n)$$

□

Exercițiul 6. Fie punctele $A = (1, 6)$, $B = (1, 1)$, $C = (-4, 7)$, $D = (6, 7)$, $E = (1, -1)$, $F = (5, 3)$, $P = (-2, 3)$, $Q = (2 - \lambda, 3)$ unde $\lambda \in \mathbb{R}$ este un parametru. Scrieți un algoritm care să determine numărul de puncte de intersecție dintre segmentul $[PQ]$ și reuniunea $[AB] \cup [CD] \cup [EF]$. Algoritmul distinge între puncte interioare ale segmentelor și extremități ale acestora.

Rezolvare. Mai întâi reprezentăm grafic punctele și segmentele indicate:



Linia întreruptă reprezintă dreapta pe care se poate găsi Q, în funcție de λ

Cu desenul în față vedem că există cinci cazuri care trebuie luate în considerare:

1. Q este la stânga lui $[AB]$, nu avem nicio intersecție

2. Q este pe $[AB]$, avem un punct de intersecție, care este și extremitatea lui $[PQ]$

3. Q este între $[AB]$ și F, avem un punct de intersecție, între $[AB]$ și $[PQ]$, și anume $(1, 3)$

4. Q coincide cu F, avem un punct de intersecție interior, ca mai sus, și un punct de intersecție care este extremitate

5. Q este la dreapta lui F, avem un punct de intersecție interior și unul care este extremitate pentru $[EF]$ dar interior lui $[PQ]$

Pentru fiecare dintre aceste cazuri putem găsi valoarea lui λ. □

Exercițiul 7. Date n puncte în plan, scrieți un algoritm de complexitate $\mathcal{O}(n\, log\, n)$ care să determine un poligon care are toate aceste puncte ca vârfuri. Explicați cum este aplicat acest algoritm pentru punctele $P_1 = (4, 2)$, $P_2 = (7, 1)$, $P_3 = (-3, 5)$, $P_4 = (3, 6)$, $P_5 = (-4, -4)$, $P_6 = (-1, 1)$, $P_7 = (2, -6)$.

Rezolvare. Dacă unim direct punctele, este posibil să obținem un poligon care se autointersectează. Putem să ne inspirăm în rezolvarea de la algoritmii de acoperire convexă, de la ideea de UPPERHULL și LOWERHULL:

1. Sortăm punctele lexicografic;
2. Găsim cel mai din stânga punct A și cel mai din dreapta punct B;
3. Partiționăm punctele în cele de deasupra lui AB și cele de sub AB, atâta timp cât nu vom avea laturi care să treacă peste această dreaptă nu vom avea autointersecții;
4. Unim unul câte unul punctele de deasupra AB ca să formăm jumătatea de sus a poligonului;
5. Unim unul câte unul punctele de sub AB ca să formăm jumătatea de jos a poligonului;
6. Reunim cele două jumătăți.

Pe exemplul dat: □