Chapter 8

Curs 8

8.1 Legea tare a numerelor mari

Teorema 8.1.1 *Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare independente două câte două şi identic distribuite cu $M(|X_1|) < \infty$. Atunci*

$$\frac{S_n}{n} \overset{a.s.}{\to} \mu,$$

unde $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ şi $\mu = M(X_1)$.

Pentru demonstraţie, avem nevoie demonstrăm mai întâi următoarele două leme:

Demonstraţie. Deoarece X_n^+ şi X_n^- verifică ipotezele teoremei, şi $X_n = X_n^+ - X_n^-$, fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $X_n \geq 0$, $n \geq 1$.

Să arătăm mai întăi că pentru a demonstra concluzia teoremei, este suficient să arătăm că

$$\frac{T_n}{n} \overset{a.s.}{\to} \mu,$$

unde $T_n = Y_1 + \ldots + Y_n$ şi $Y_k = X_k 1_{\{|X_k| \leq k\}}$, $k, n \geq 1$.

Pentru aceasta, să observăm că

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|X_k| > k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(|X_1| > k) \leq \int_0^{\infty} P(|X_1| > t)\, dt = M(|X_1|) < +\infty,$$

şi deci din Lema Borel-Cantelli obţinem

$$P(X_k \neq Y_k \text{ i.o.}) = P(|X_1| > k \text{ i.o.}) = 0.$$

Rezultă deci că pentru aproape toţi $\omega \in \Omega$ avem

$$|S_n(\omega) - T_n(\omega)| \leq R(\omega) < +\infty, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

de unde rezultă

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n}-\frac{T_n}{n}\right)=0 \qquad a.s.,$$

şi deci pentru a demonstra concluzia teoremei este suficient să arătăm că $\frac{T_n}{n}\overset{a.s.}{\to}\mu$.

În continuare, să arătăm că pentru a demonstra că $\frac{T_n}{n}\overset{a.s.}{\to}\mu$ este suficient să arătăm că această convergenţă are loc pentru un subşir convenabil ales, adică

$$\frac{T_{n_k}}{n_k}\overset{a.s.}{\to}\mu,$$

unde $n_k=\left[\alpha^k\right]$, $k=1,2,\ldots$ şi $\alpha>1$.

Într-adevăr, deoarece variabilele aleatoare X_n sunt ne-negative, rezultă că $Y_n=X_n 1_{\{|X_n|\le n\}}\ge 0$, $n\ge 1$, şi deci avem:

$$\frac{T_{n_k}}{n_{k+1}}\le\frac{T_n}{n}\le\frac{T_{n_{k+1}}}{n_k},$$

oricare ar fi $n_k\le n\le n_{k+1}$, $k=1,2,\ldots$.

Trecând la limită cu $k\to\infty$, şi observând că $\lim_{k\to\infty}\frac{n_{k+1}}{n_k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\left[\alpha^{k+1}\right]}{\left[\alpha^k\right]}=\alpha$, avem

$$\frac{1}{\alpha}\lim_{k\to\infty}\frac{T_{n_k}}{n_{k+1}}\le\lim\inf_{n\to\infty}\frac{T_n}{n}\le\lim\inf_{n\to\infty}\frac{T_n}{n}\le\lim_{k\to\infty}\frac{T_{n_{k+1}}}{n_k}=\alpha\mu,$$

oricare ar fi $\alpha>1$, de unde trecând la limită cu $\alpha\searrow 1$ obţinem

$$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n}=\mu \qquad a.s.$$

Rămâne deci să arătăm că $\frac{T_{n_k}}{n_k}\overset{a.s.}{\to}\mu$, unde $n_k=\left[\alpha^k\right]$.

Pentru $\alpha>1$ şi $\varepsilon>0$ arbitrar fixaţi, din inegalitatea lui Cebâşev avem:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\left|\frac{T_{n_k}}{n_k}-\mu\right|>\varepsilon\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}P\left(\left|T_{n_k}-\mu n_k\right|>\varepsilon n_k\right)\\ &\le \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma^2\left(T_{n_k}\right)}{\varepsilon^2 n_k^2}\\ &= \varepsilon^{-2}\sum_{k=1}^{\infty}n_k^{-2}\sum_{m=1}^{n_k}\sigma^2\left(Y_m\right),\end{aligned}$$

deoarece variabilele aleatoare $Y_1, Y_2, \ldots$ sunt independente. Din teorema Fubini, obţinem:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\left|\frac{T_{n_k}}{n_k} - \mu\right| > \varepsilon\right) &= \varepsilon^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma^2\left(Y_m\right) \sum_{k: n_k = [\alpha^k] \geq m} n_k^{-2} \\
&\leq \varepsilon^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma^2\left(Y_m\right) \sum_{k: \alpha^k \geq m} \alpha^{-2k} \\
&\leq \varepsilon^{-2} \sum_{m=1}^{\infty} \sigma^2\left(Y_m\right) m^{-2} \frac{1}{1-\alpha^{-2}} \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2\left(1-\alpha^{-2}\right)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sigma^2\left(Y_m\right)}{m^2}.
\end{aligned}$$

Să arătăm acum că

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma^2\left(Y_k\right)}{k^2} \leq 4M\left(\left|X_1\right|\right) < +\infty.$$

Pentru aceasta, să observăm că

$$\sigma^2\left(Y_k\right) \leq M\left(Y_k^2\right) = \int_0^{\infty} 2xP\left(\left|Y_k\right| > x\right) dx \leq \int_0^k 2xP\left(\left|X_1\right| > x\right) dx,$$

şi din teorema Fubini obţinem

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sigma^2\left(Y_k\right)}{k^2} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \int_0^k 2xP\left(\left|X_1\right| > x\right) dx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \int_0^{\infty} 1_{\{x<k\}} 2xP\left(\left|X_1\right| > x\right) dx \\
&= \int_0^{\infty} 2xP\left(\left|X_1\right| > x\right) \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} 1_{\{x<k\}} dx \\
&\leq \int_0^{\infty} 2xP\left(\left|X_1\right| > x\right) \sum_{k=[x]+1}^{\infty} k^{-2} dx.
\end{aligned}$$

Să observăm că pentru $x \geq 1$, avem:

$$2x \sum_{k=[x]+1}^{\infty} k^{-2} \leq 2x \int_{[x]}^{\infty} y^{-2} dy = \frac{2x}{[x]} \leq 4,$$

iar pentru $0 \leq x < 1$ avem

$$2x \sum_{k=[x]+1}^{\infty} k^{-2} \leq 2 \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} = 2 + 2 \sum_{k=2}^{\infty} k^{-2} \leq 4,$$

şi deci obţinem

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sigma^2\left(Y_k\right)}{k^2} &\leq \int_0^{\infty}2x\sum_{k=[x]+1}^{\infty}k^{-2}P\left(\left|X_1\right|>x\right)dx \\ &\leq 4\int_0^{\infty}2xP\left(\left|X_1\right|>x\right)dx \\ &= 4M\left(X_1\right)<+\infty.\end{aligned}$$

Am arătat deci că

$$\sum_{k=1}^{\infty}P\left(\left|\frac{T_{n_k}}{n_k}-\mu\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{4M\left(X_1\right)}{\varepsilon^2\left(1-\alpha^{-2}\right)}<+\infty,$$

oricare ar fi $\varepsilon>0$ şi $\alpha>1$.

Din lema Borel-Cantelli, rezultă că $P\left(\left|\frac{T_{n_k}}{n_k}-\mu\right|>\varepsilon \quad i.o.\right)=0$, şi cum $\varepsilon>0$ a fost arbitrar ales, rezultă că

$$\frac{T_{n_k}}{n_k}\overset{a.s.}{\to}\mu,$$

încheiând demonstraţia. ■

Observaţia 8.1.2 *Se poate arăta (a se vedea exerciţiile) că legea tare a numerelor mari are loc mai general, şi atunci când media $M\left(X_i\right)$ există şi este infinită (adică atunci când $M\left(X_i^+\right)$, $M\left(X_i^-\right)$ există, una din valori fiind $+\infty$ iar cealaltă valoare fiind finită).*

EXERCIŢII

Exerciţiul 8.1.1 *Să se arate că dacă $X_1, X_2, \ldots$ sunt variabile aleatoare independente şi identic distribuite, cu $M\left(X_i^+\right) = +\infty$ şi $M\left(X_i^-\right) < +\infty$, atunci*

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \stackrel{a.s.}{\to} \infty$$

Exerciţiul 8.1.2 *Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare independente şi identic distribuite, cu $0 < X_i < \infty$, $i \geq 1$ şi $\mu = M(X_1) \leq \infty$. Să se arate că*

$$\frac{N_t}{t} \stackrel{a.s.}{\to} \frac{1}{\mu},$$

unde $N_t = \sup\{n : S_n \leq t\}$ şi $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $t > 0$ şi $n \geq 1$.

Indicaţie: *se foloseşte faptul că $S_{N_t} \leq t \leq S_{N_t+1}$ şi lgea slabă a numerelor mari.*

Exerciţiul 8.1.3 *Fie $X_1, X_2, \ldots$ şi $Y_1, Y_2, \ldots$ două şiruri de variabile aleatoare independente, fiecare şir având aceeaşi distribuţie, şi având medii finite. Să se arate că*

$$\frac{R_t}{t} \stackrel{a.s.}{\to} \frac{M(X_1)}{M(X_1) + M(Y_1)},$$

unde $R_t = \sup\{X_1 + \ldots + X_n : X_1 + \ldots + X_n + Y_1 + \ldots + Y_{n-1} \leq t\}$, $t > 0$. (mai precis suma lui X_i cuprinsă pentru care suma $X_i + Y_i$ este cuprinsă în intervalul $[0, t]$)

Exerciţiul 8.1.4 (Teorema Glivenko-Cantelli) *Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare independente şi identic distribuite având funcţia de distribuţie F, şi fie*

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} 1_{\{X_m \leq x\}}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

frecvenţa observată a valorilor ce sunt mai mici sau egale cu x (funcţia de distribuţie empirică/observată a variabilelor aleatoare $X_1, X_2, \ldots$). Să se arate că

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \stackrel{a.s.}{\to} 0,$$

adică funcţia de distribuţie empirică F_n converge uniform a.s. la funcţia de distribuţie F a variabilelor aleatoare $X_1, X_2, \ldots$

Indicaţie: *se consideră variabilele aleatoare $Y_1, Y_2, \ldots$, $Y_n = 1_{\{X_n \leq x\}}$, $n \geq 1$, şi se aplică legea slabă a numerelor mari.*

Exerciţiul 8.1.5 (Teorema lui Shannon) *Fie $X_1, X_2, \ldots$ variabile aleatoare discrete independente şi identic distribuite, cu valori in $\{1, 2, \ldots, r\}$, $P(X_i = k) = p(k)$, $k = 1, \ldots, r$. Să se arate că*

$$-\frac{1}{n} \log P(X_1 \ldots X_n = c_1 \ldots c_n) \stackrel{a.s}{\to} H = -\sum_{k=1}^{r} p(c_k) \log p(c_k),$$

*unde $c_1, \ldots, c_k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ (constanta H se numeşte **entropia** cuvântului $c = c_1 c_2 \ldots c_k$, şi este o măsură a caracterului aleatoriu al acestuia).*

Indicaţie: *se consideră $Y_i = P\left(X_i = c_i\right)$ şi se aplică legea tare a numerelor mari.*