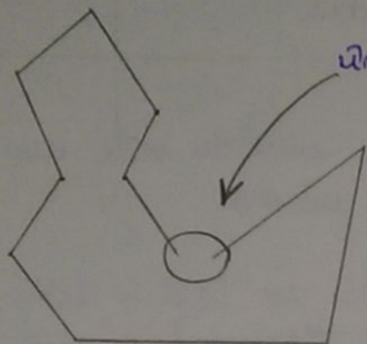
CURS 5

10.11.2016

GEOMETRIE COMPUTAȚIONALĂ

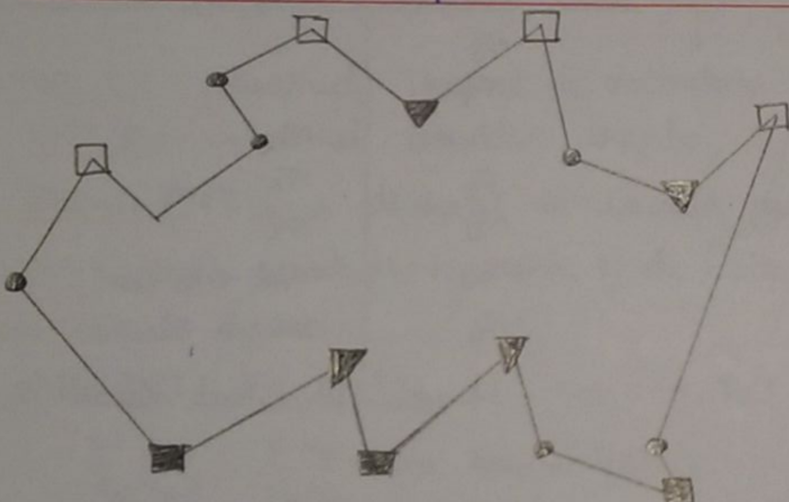
Ora trecută: triangularea poligoanelor Y monotone

De ce un poligon nu e Y-monoton.



în acest vârf am o întrerupere sus/jos
- strică Y-monotonia

CLASIFICAREA vârfurilor într-un POLIGON



□ – „start"

■ – „end"

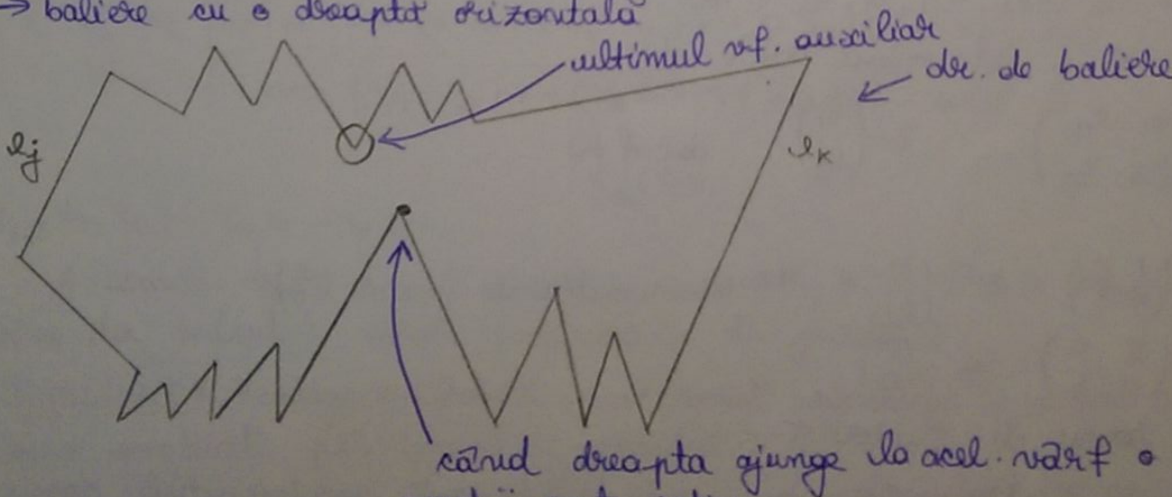
• – „vf. regulat"

▼ – „vf. de tip merge ↑↓"

▲ – „vf. de tip split ↗↘"

IDEEA DE PRINCIPIU

→ baliere cu o dreaptă orizontală



când dreapta ajunge la acel. vârf o serie de muchii sunt active

muchie „la stânga" (e_j)
muchie „la dreapta" (e_k)

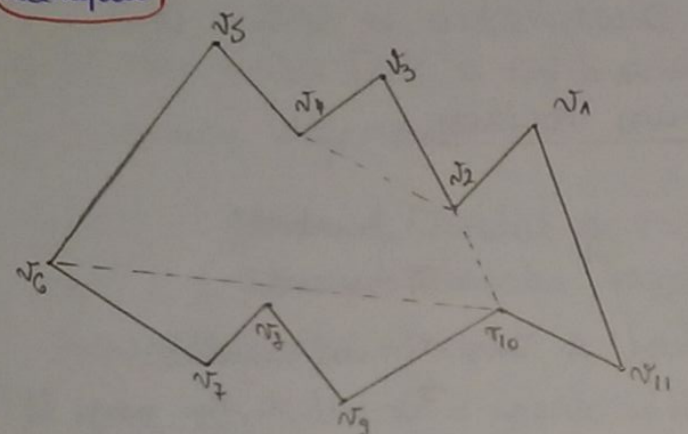
Pentru orice muchie "e" e definit un vârf aux(e): cel mai de jos vârf cu proprietatea că e situat deasupra liniei de baleere și segmentul orizontal e inclus în poligon.

⚠ Variază ⚠ Poate fi marginea superioară

STATUT al DREPTELOR de BALIERE

→ muchii „active" și pentru fiecare muchie pointer câte un aux
→ „ordine" în statut → struct de date: arbore

Exemplu



aux($\overrightarrow{v_5 v_6}$) $= e_5$

eveniment	aux(e_5)
v_5	v_5
v_3	v_5
v_1	v_5
v_4	$v_4 + v_2v_4$
v_2	v_2
v_{10}	$v_{10} + v_2v_{10}$
v_6	$- \ + v_{10}v_6$

↳ am terminat muchia $v_5 v_6$

TRANSFORMĂRI AFINE

$\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2)$,
unde $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{21}, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

A da φ e echivalent cu a da

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad \det A \neq 0$$

Exemple

(i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$; φ translație de vector $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zoom de factor 5

FAPT: φ e transformare $\Rightarrow \varphi$ păstrează combinațiile comune $\Rightarrow$ φ duce Δ în $\Delta \Rightarrow$ păstrează acoperirile convexe

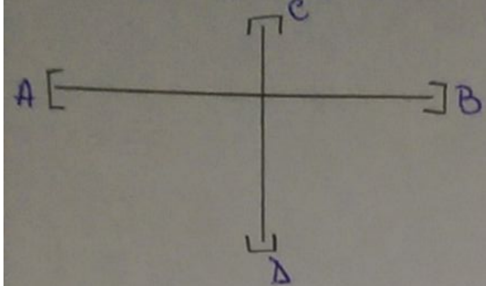
Intersecție de segmente (în $\mathbb{R}^2$)

a) Cum se stabilește dacă două segmente se intersectează?

b) Cum se determină punctele de intersecție (dacă există)?

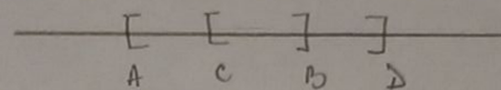
Input: $A = (X_A, Y_A)$ $B = (X_B, Y_B)$, $C, D, \ldots$

a) Testăm dacă se intersectează $[AB]$ și $[CD]$



$[AB]$ și $[CD]$ se intersectează în interior $\Leftrightarrow$ A și B sunt de o parte și de alta a lui $[CD]$ și C și D sunt de o parte și de alta a lui $[AB]$.

Cazuri degenerate:



VAR I: folosind testul de orientare

VAR II: folosind ecuația dreptei

REGULĂ: Fie o dreaptă de ecuație generală, $f(x,y)=0$, $M=(X_M, Y_M)$, $N=(X_N, Y_N)$ sunt de o parte și de alta a dreptei $d \Leftrightarrow f(M)$ și $f(N)$ au semne opuse.

CONCRET: Fie $A=(X_A, Y_A)$, $B=(X_B, Y_B)$ două puncte distincte

$$\frac{X - X_A}{X_B - X_A} = \frac{Y - Y_A}{Y_B - Y_A} \text{ (cu convenție)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X & X_A & X_B \\ Y & Y_A & Y_B \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (X - X_A)(Y_B - Y_A) = (Y - Y_A)(X_B - X_A) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(Y_B - Y_A)X + (X_A - X_B)Y + X_B Y_A - X_A Y_B}_{f_{AB}(X,Y)} = 0$$

$f_{AB}(X_C, Y_C) = Y_B X_C - Y_A X_C + \ldots$

A stabili dacă C și D sunt de o parte și de alta a dreptei AB revine la calculul unor polinoame de gradul II.

CONCLUZIE: Pentru a stabili dacă două segmente se intersectează trebuie evaluate polinoame de gradul II.

b) Cum determinăm punctul de intersecție dintre [AB] și [CD]?

$M \in AB \iff M = (1-\lambda)A + \lambda B, \lambda \in \mathbb{R}$

$M \in [AB] \Rightarrow M = (1-\lambda)A + \lambda B, \lambda \in [0,1]$

Analog pentru N (cu μ în loc de λ)

$\mu \in AB \cap CD \iff \exists\, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ a.î. $(1-\lambda)A + \lambda B = (1-\mu)C + \mu D$

în coordonate: $\begin{cases} (1-\lambda)x_A + \lambda x_B = (1-\mu)x_C + \mu x_D \\ (1-\lambda)y_A + \lambda y_B = (1-\mu)y_C + \mu y_D \end{cases}$

Sistemul: $\begin{cases} (x_B - x_A)\lambda + \cancel{(x_C - x_D)\mu = } x_C - \cancel{x_A} \\ (y_B - y_A)\lambda + (y_C - y_D)\mu = y_C - y_A \end{cases}$

$\Delta = \begin{vmatrix} x_B - x_A & x_C - x_D \\ y_B - y_A & y_C - y_D \end{vmatrix}$ = polinom de grad II

Pp. $\Delta \neq 0$

$\lambda = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} x_C - x_A & x_C - x_D \\ y_C - y_A & y_C - y_D \end{vmatrix}$

$\Rightarrow$ Calculul soluției sistemului revine la evaluarea unor rapoarte de forma $\frac{\text{pol II}}{\text{pol gr. II}}$

$\rightarrow$ Cele două drepte se intersectează într-un singur punct $\iff$ $\iff$ sistemul e S.C.D. (compatibil determinat)

$\rightarrow$ Cele două segmente se intersectează într-un singur punct $\iff$ $\iff \lambda, \mu \in [0, 1]$

În final determinarea efectivă a coordonatelor punctelor de intersecție revine la $\frac{\text{pol. gr. II}}{\text{pol. gr. II}}$

($(1-\lambda)A + \lambda B$ de exemplu)