Metoda Divide et Impera

desparte şi stăpâneşte

Metoda Divide et Impera

- Constă în
  - **împărţirea repetată** a unei probleme de dimensiuni mari în mai multe subprobleme **de acelaşi tip**

Metoda Divide et Impera

- Constă în
  - **împărţirea repetată** a unei probleme de dimensiuni mari în mai multe subprobleme **de acelaşi tip**
  - **rezolvarea** acestor subprobleme (în acelaşi mod sau prin rezolvare directă, dacă au dimensiune mică)

Metoda Divide et Impera

- Constă în
  - **împărţirea repetată** a unei probleme de dimensiuni mari în mai multe subprobleme **de acelaşi tip**
  - **rezolvarea** acestor subprobleme (în acelaşi mod sau prin rezolvare directă, dacă au dimensiune mică)
  - **combinarea rezultatelor** obţinute pentru a determina rezultatul corespunzător problemei iniţiale.

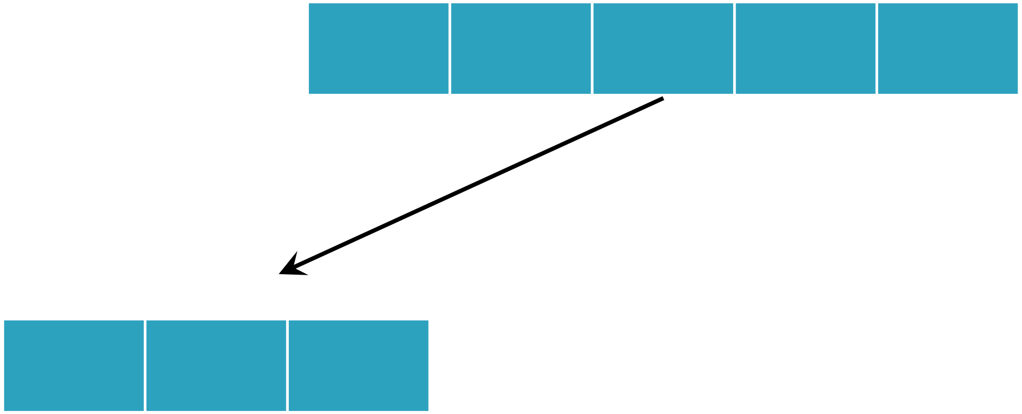
Schema generală

```
function DivImp(p,u)          – pentru a[p..u]
    if u-p<ε
        r ← RezolvaDirect(p,u)
    else
        m ← Pozitie(p,u); – de obicei mijlocul
        r1 ← DivImp(p,m);
        r2 ← DivImp(m+1,u);
        r ← Combina(r1,r2)
    return r
end
```

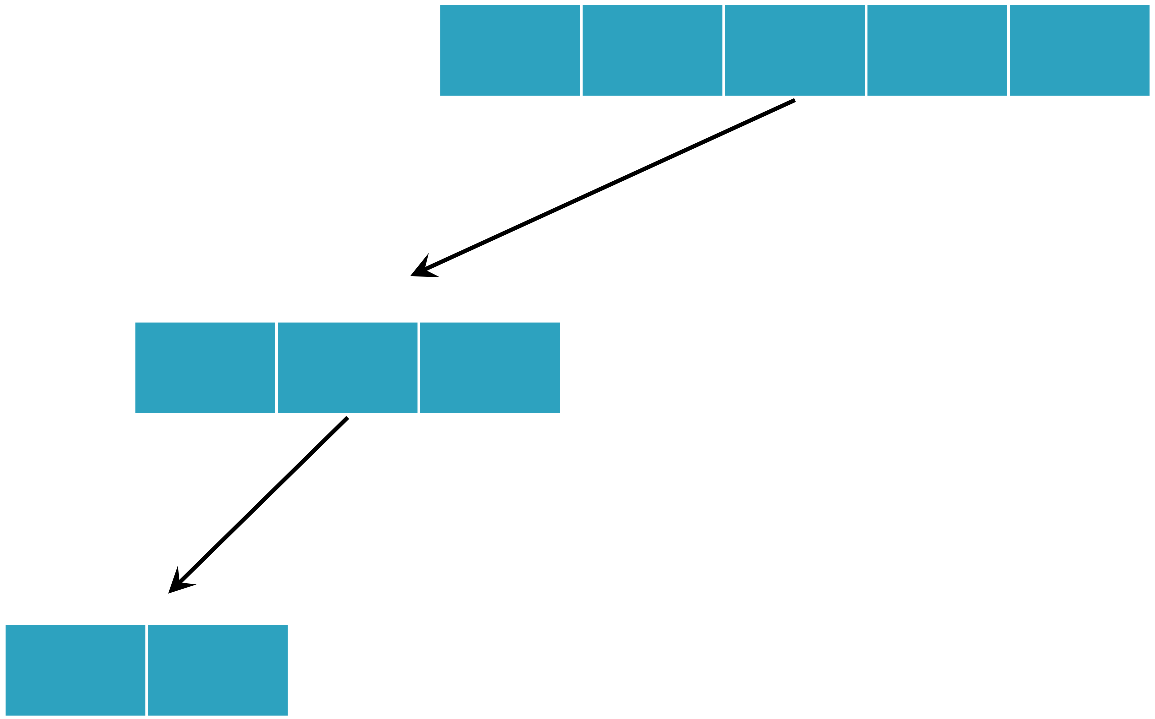
- **Apel:** `DivImp(1,n)`

Metoda Divide et Impera

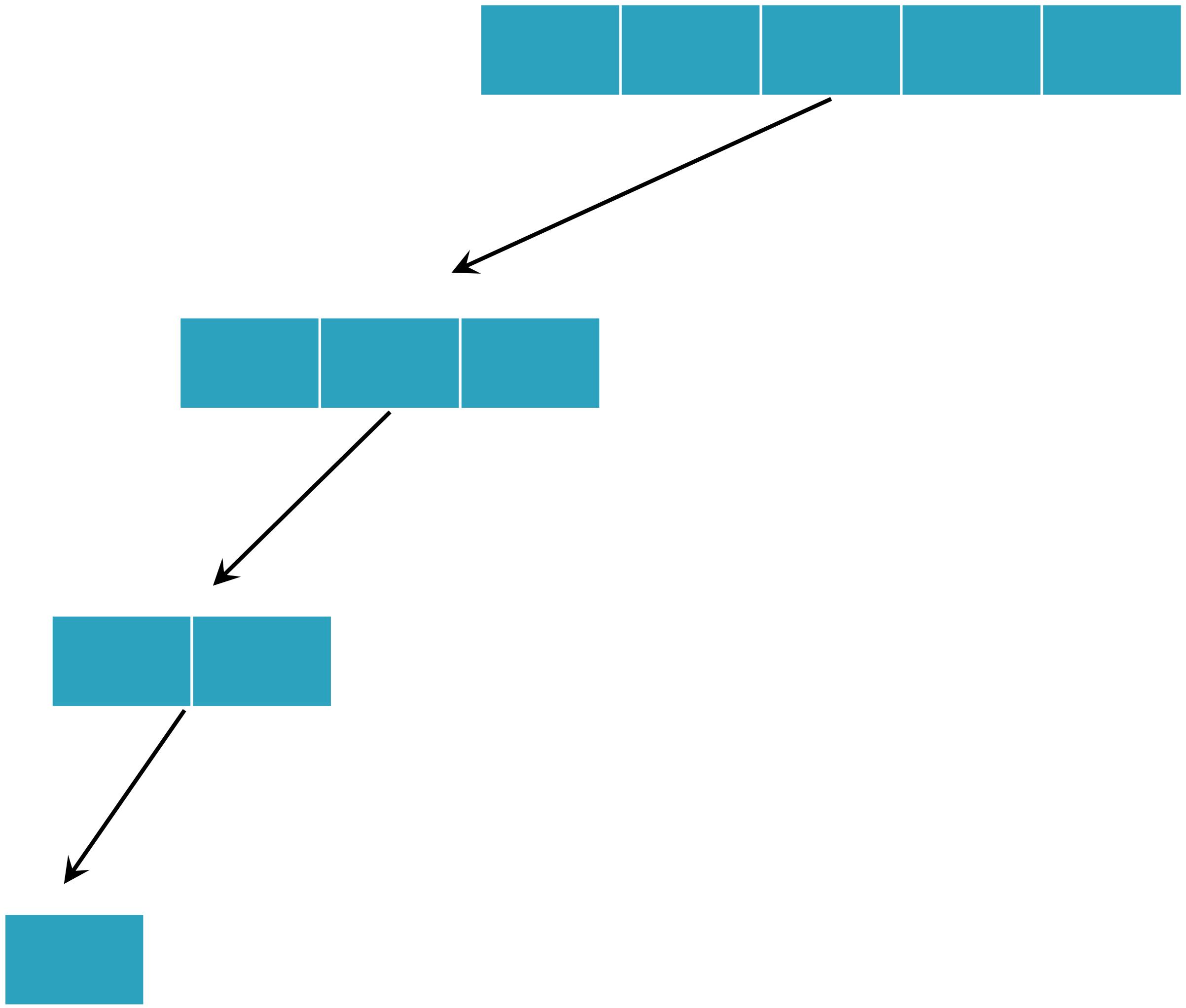
Metoda Divide et Impera



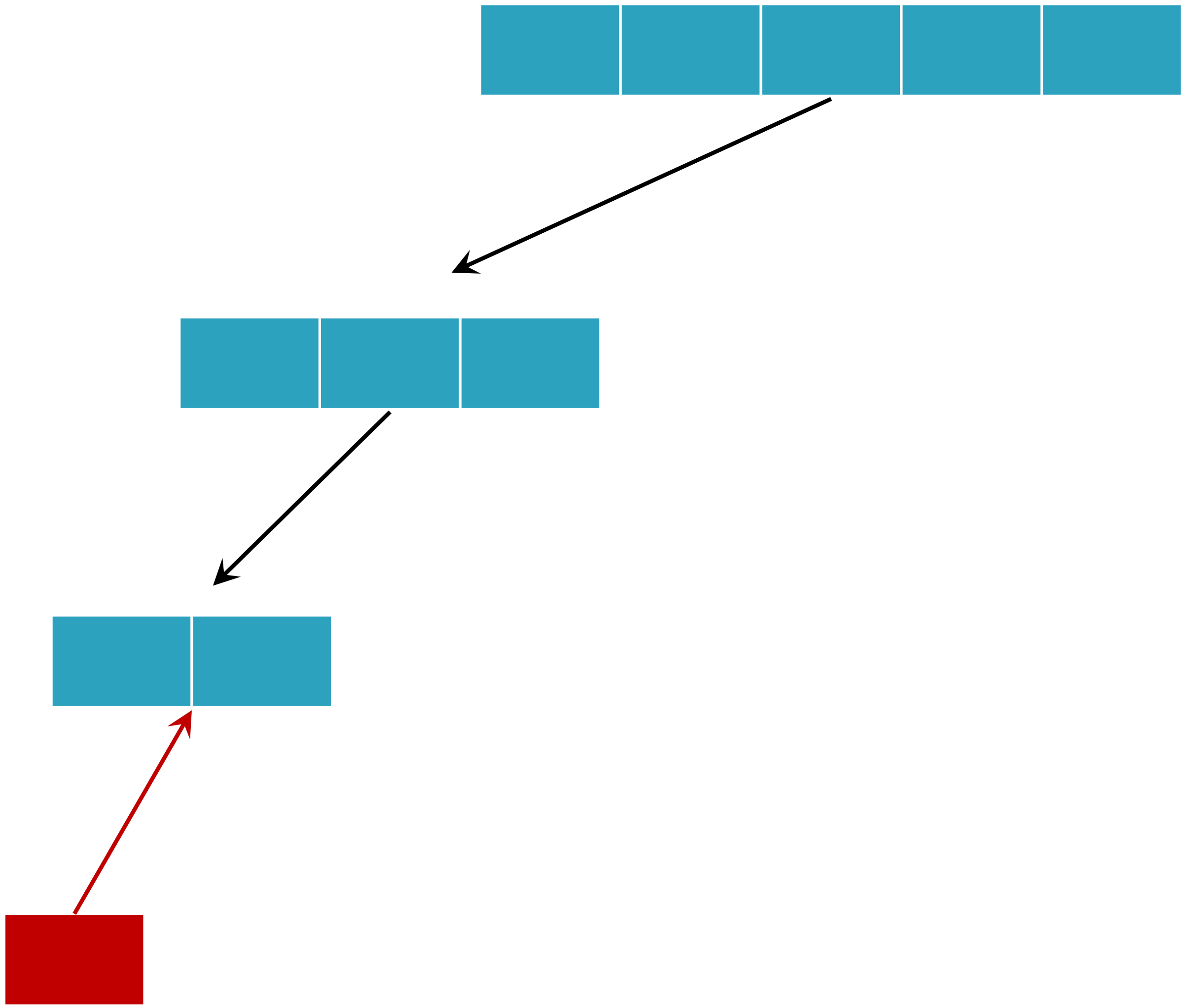
Metoda Divide et Impera



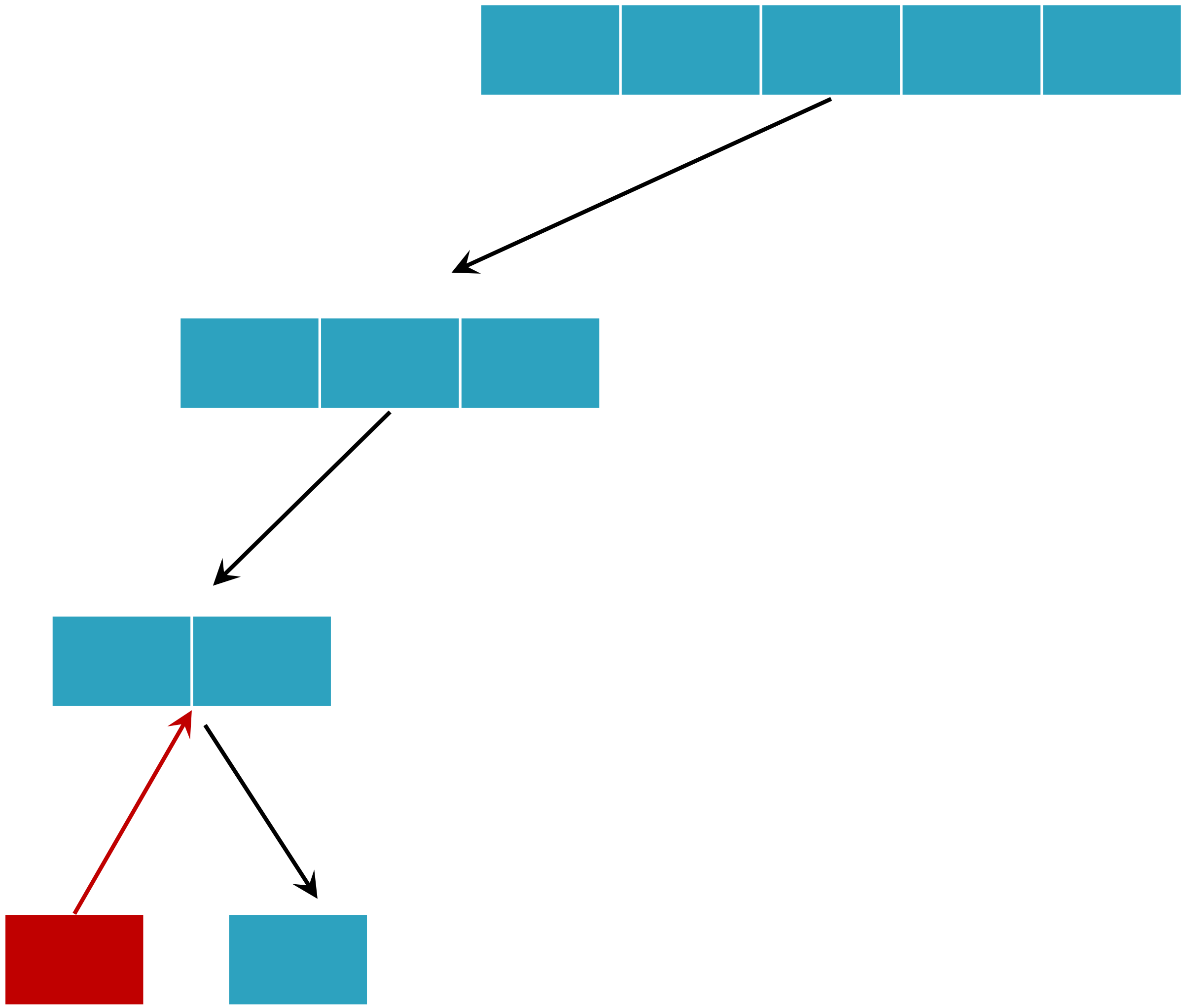
Metoda Divide et Impera



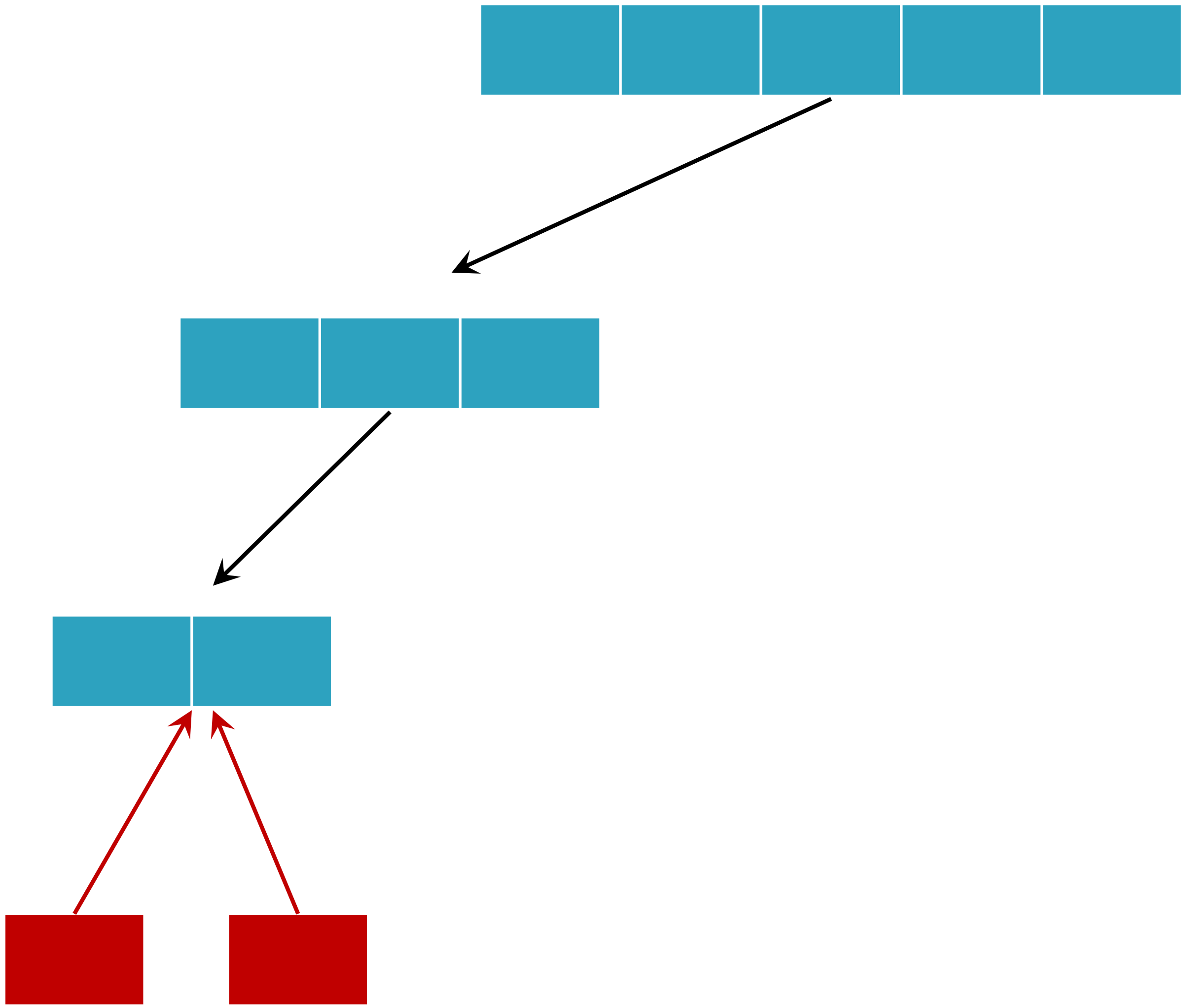
Metoda Divide et Impera



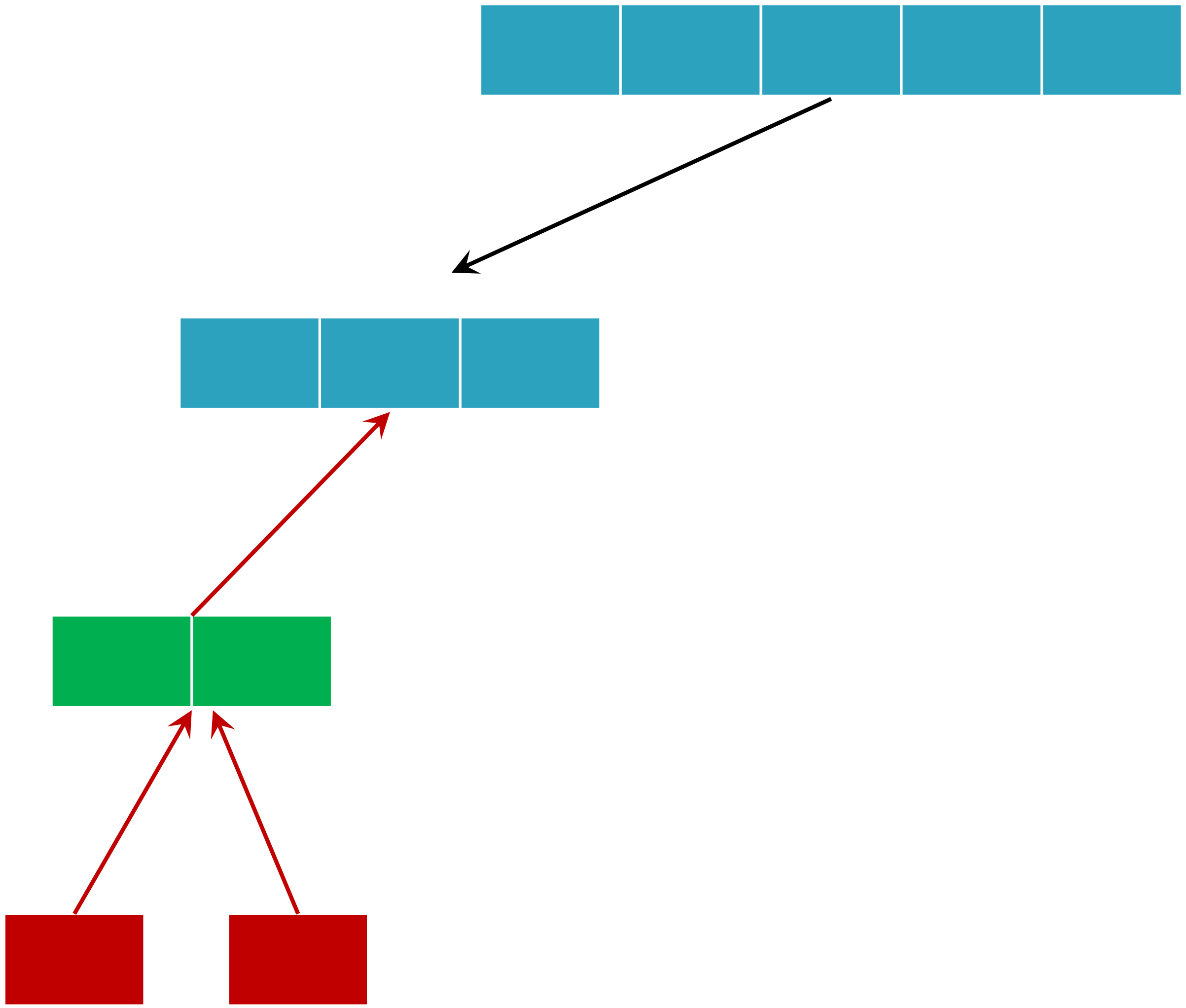
Metoda Divide et Impera



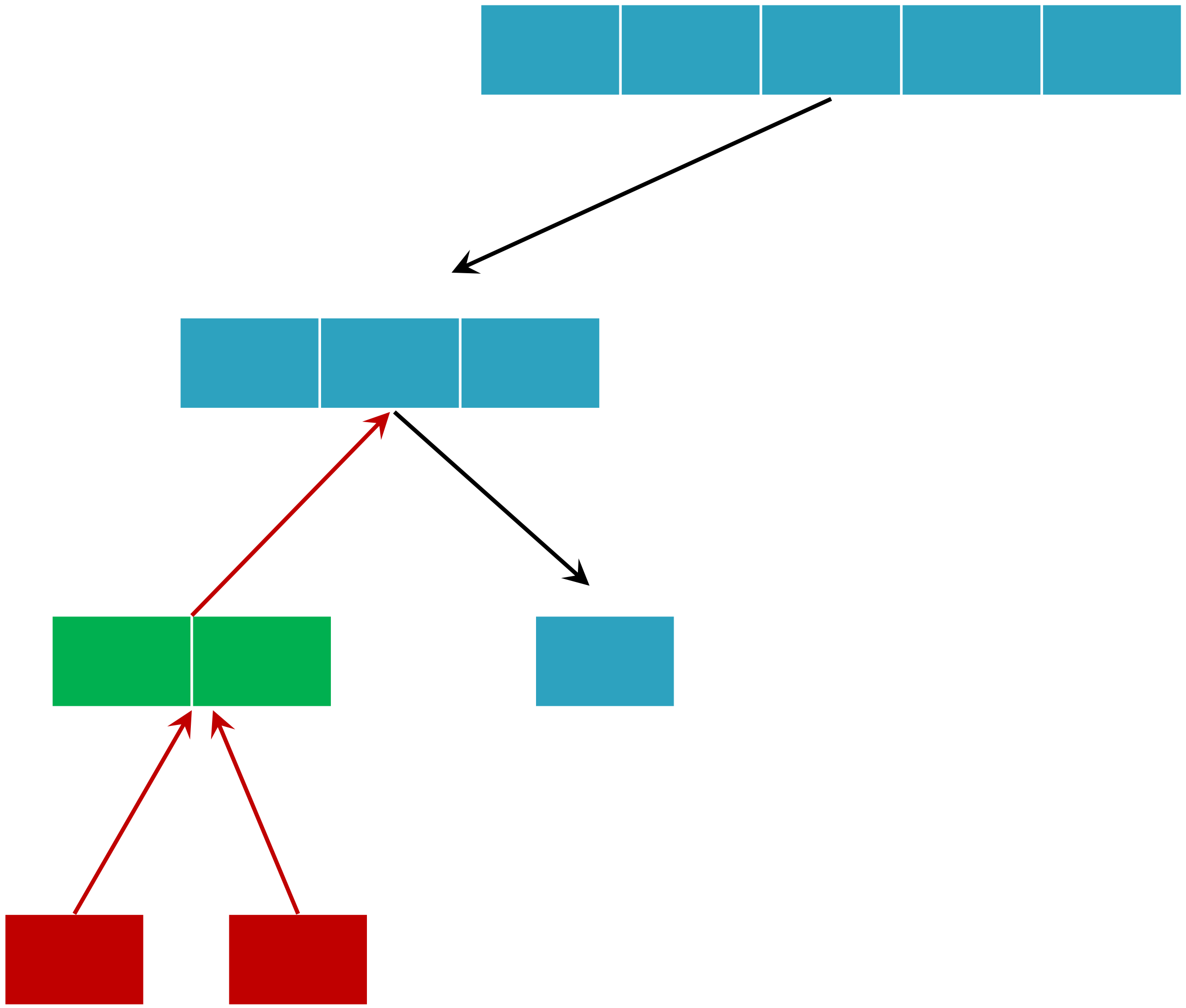
Metoda Divide et Impera



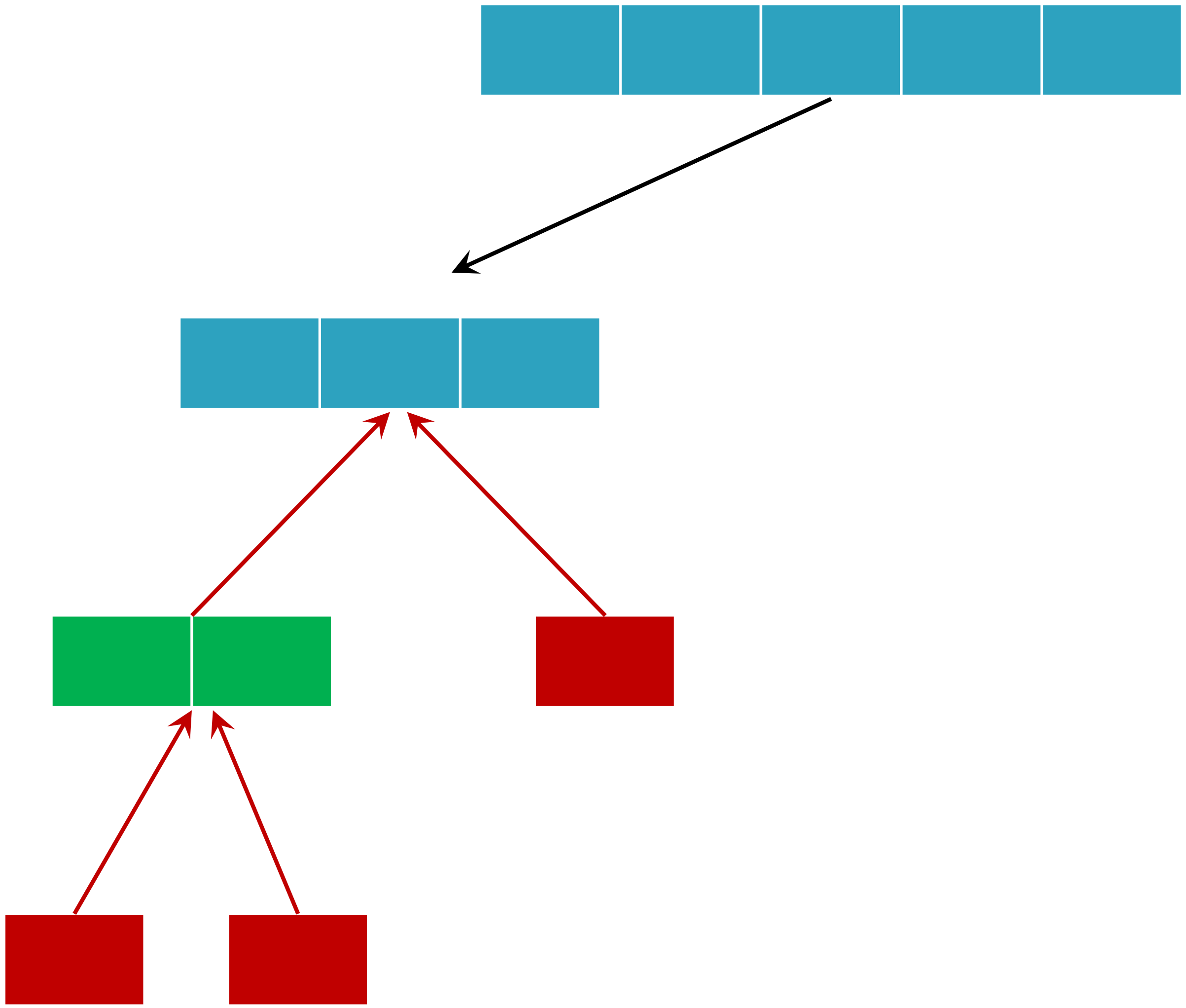
Metoda Divide et Impera



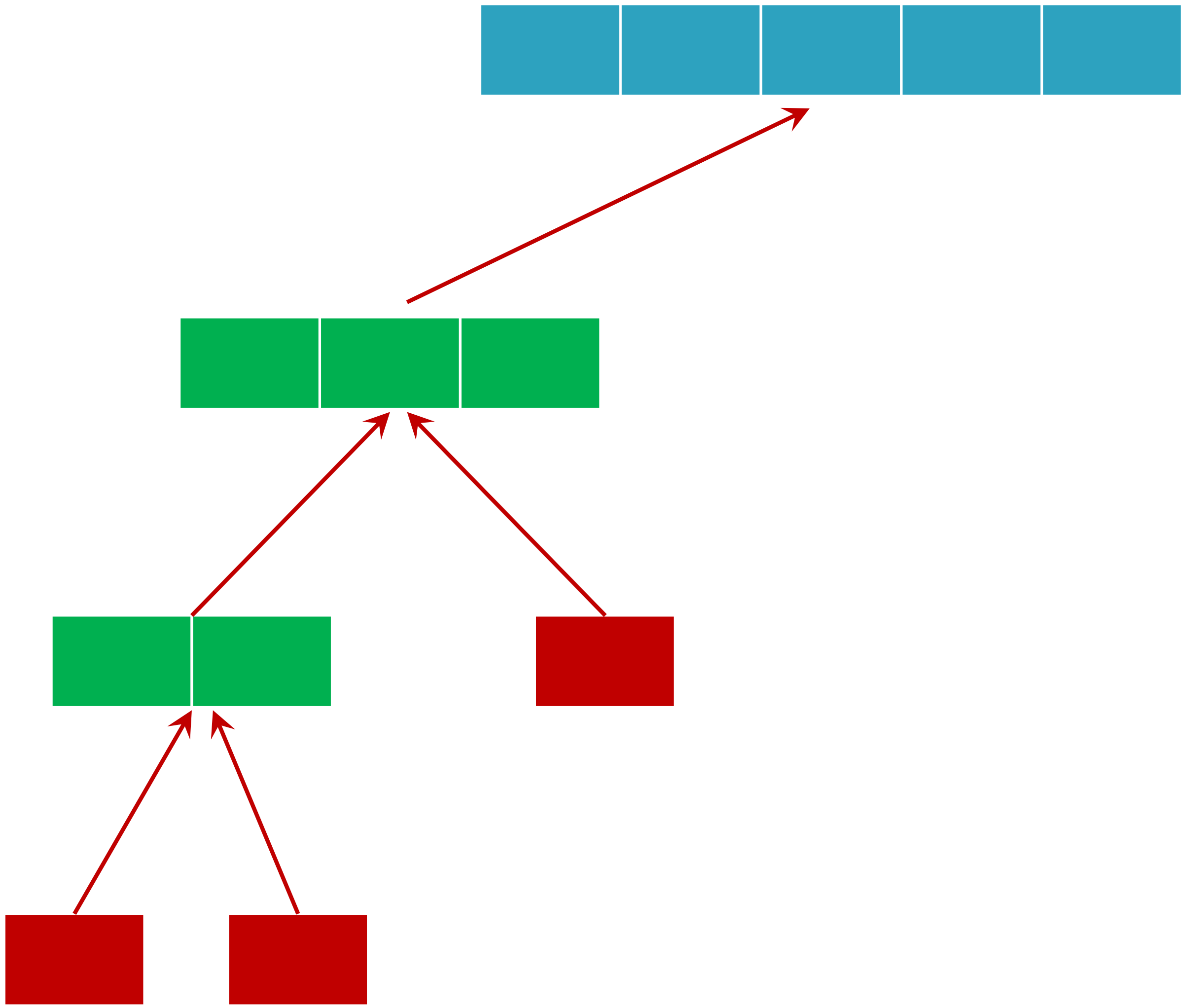
Metoda Divide et Impera



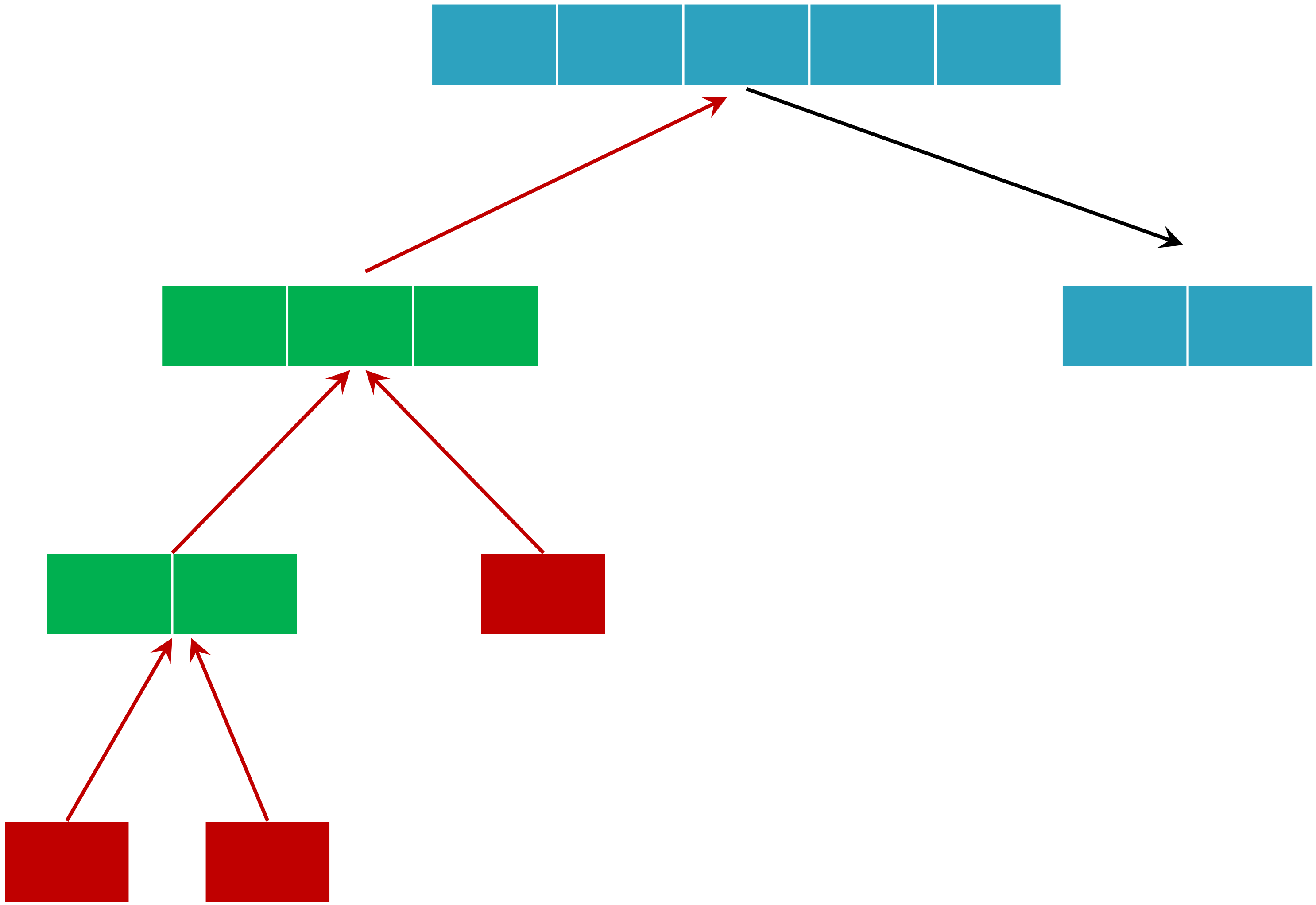
Metoda Divide et Impera



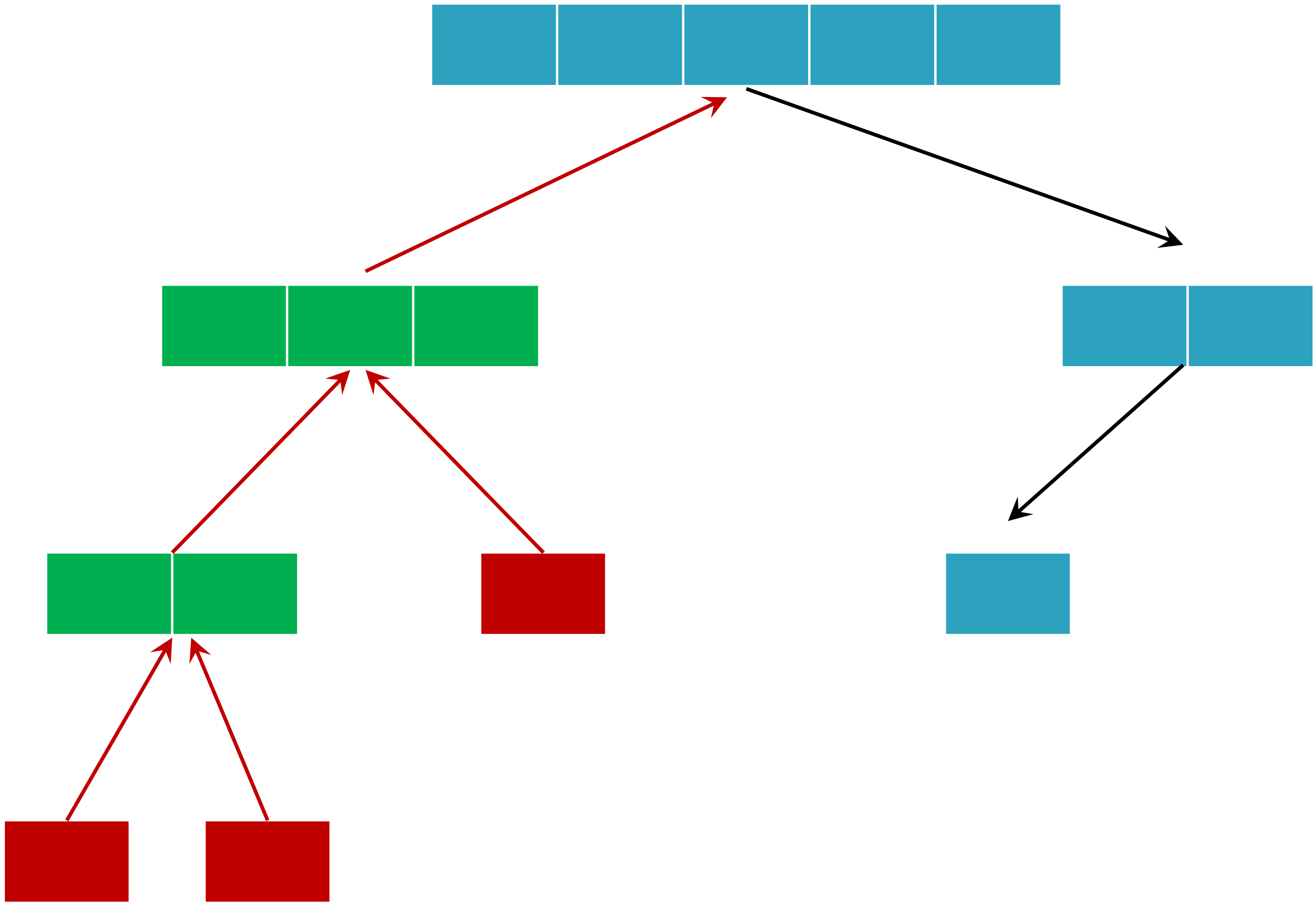
Metoda Divide et Impera



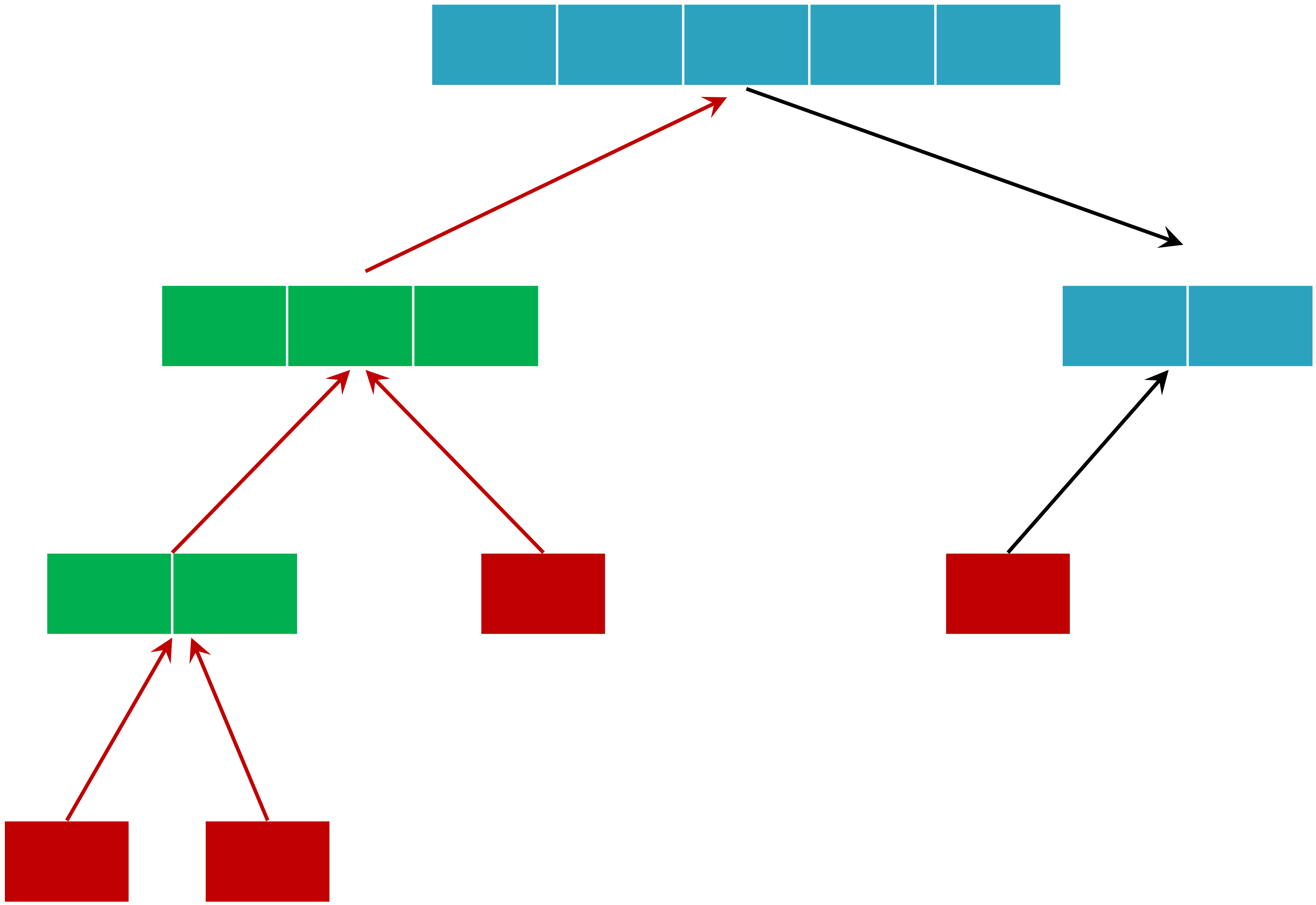
Metoda Divide et Impera



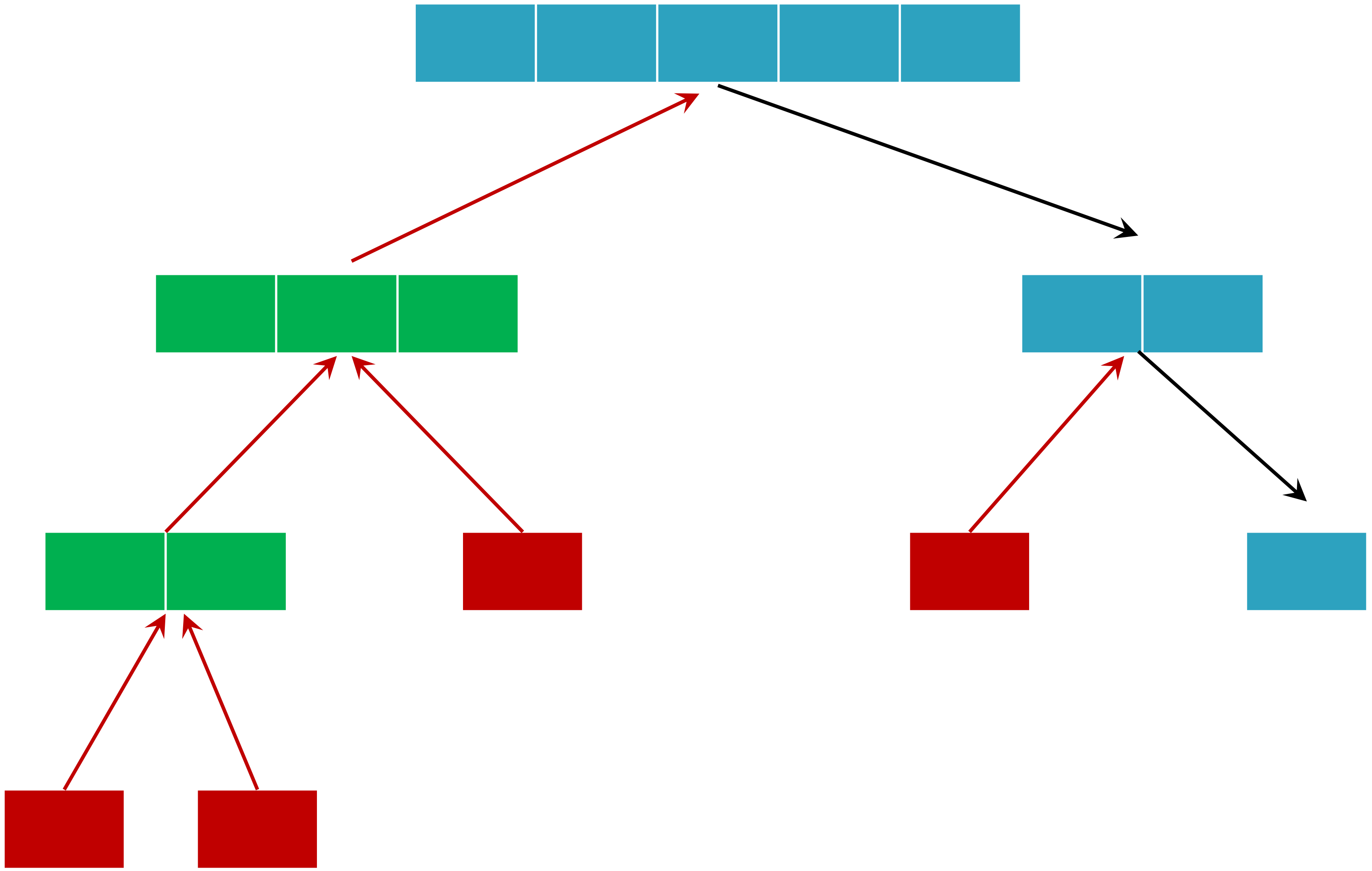
Metoda Divide et Impera



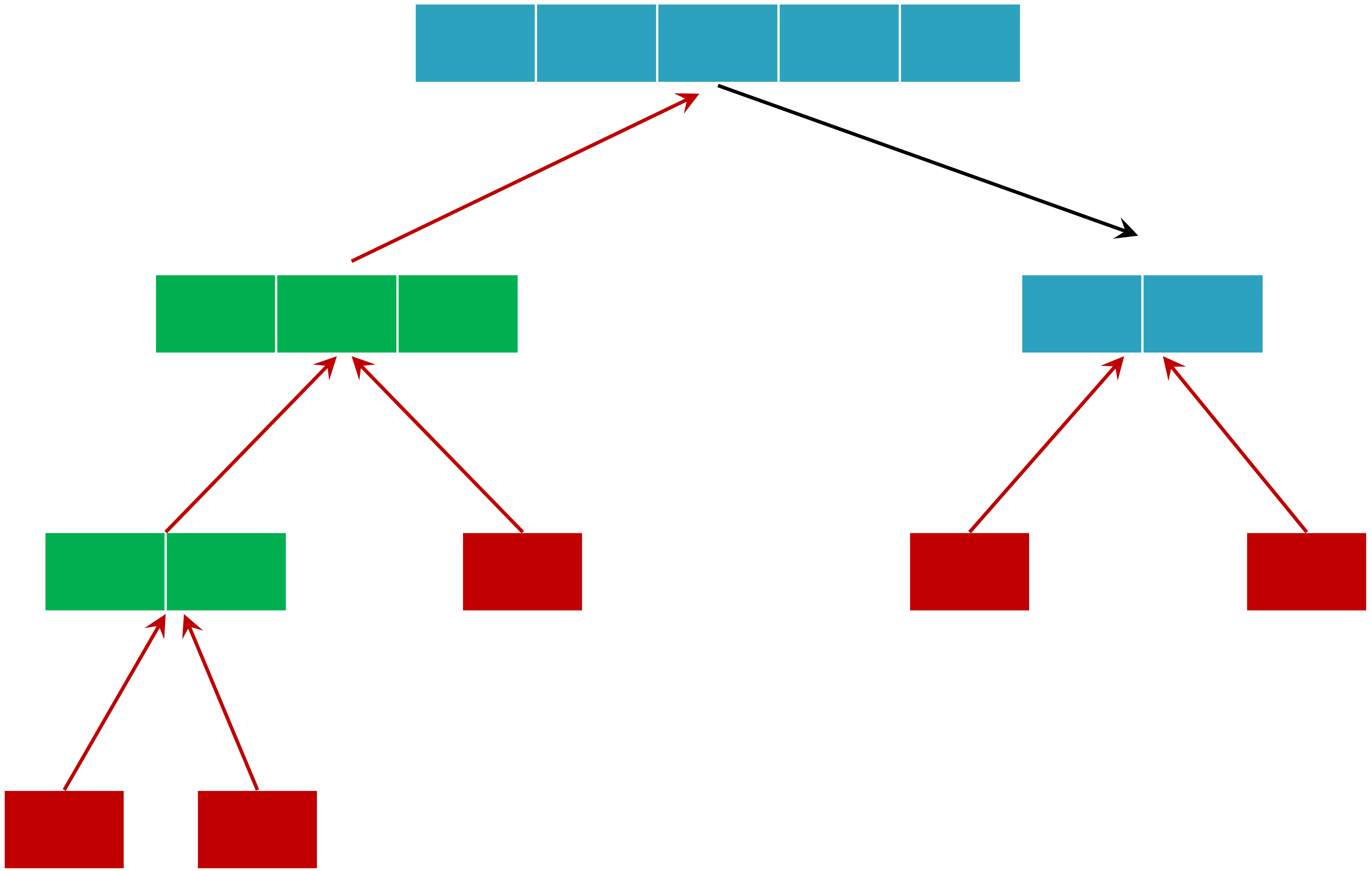
Metoda Divide et Impera



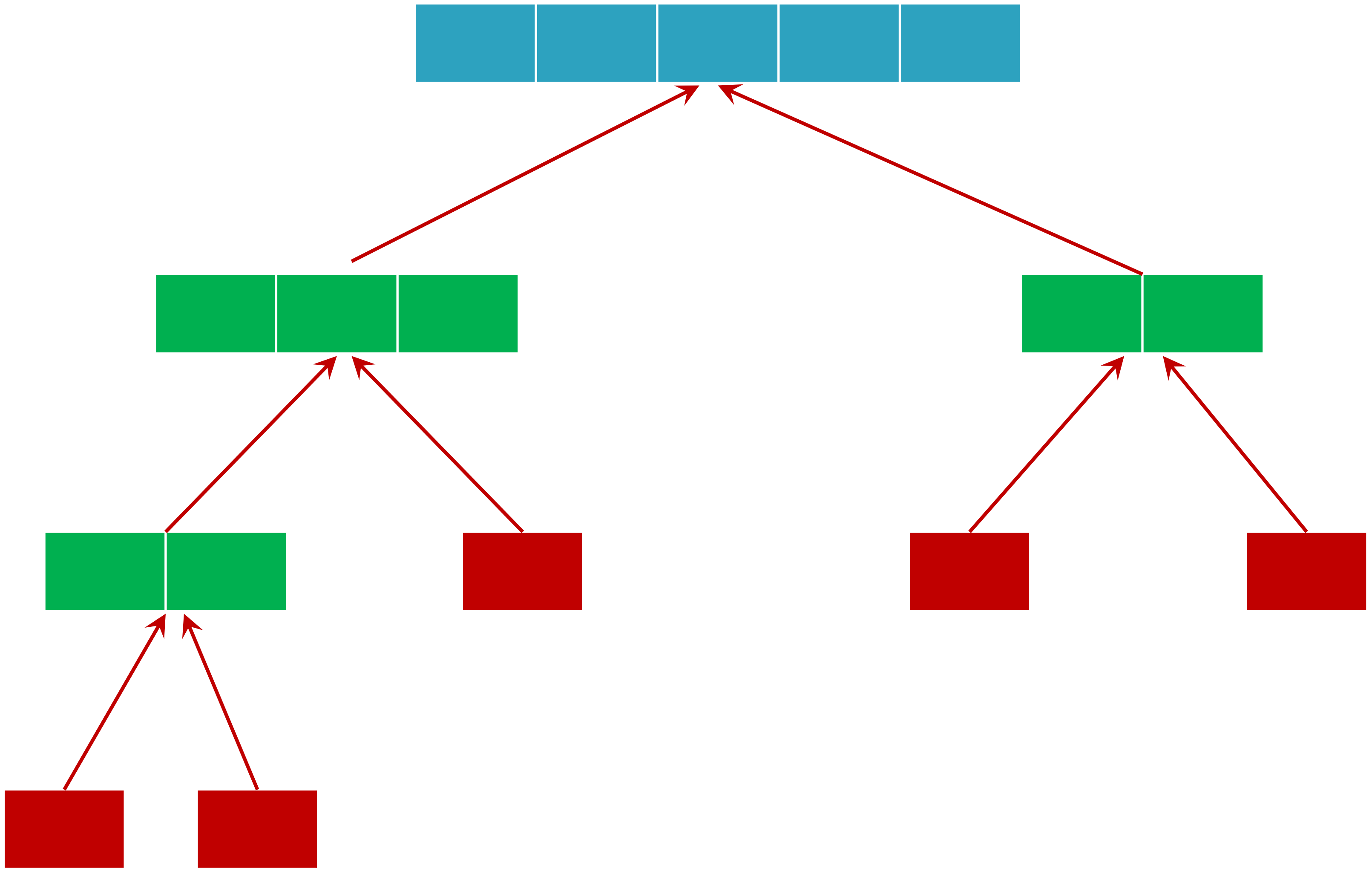
Metoda Divide et Impera



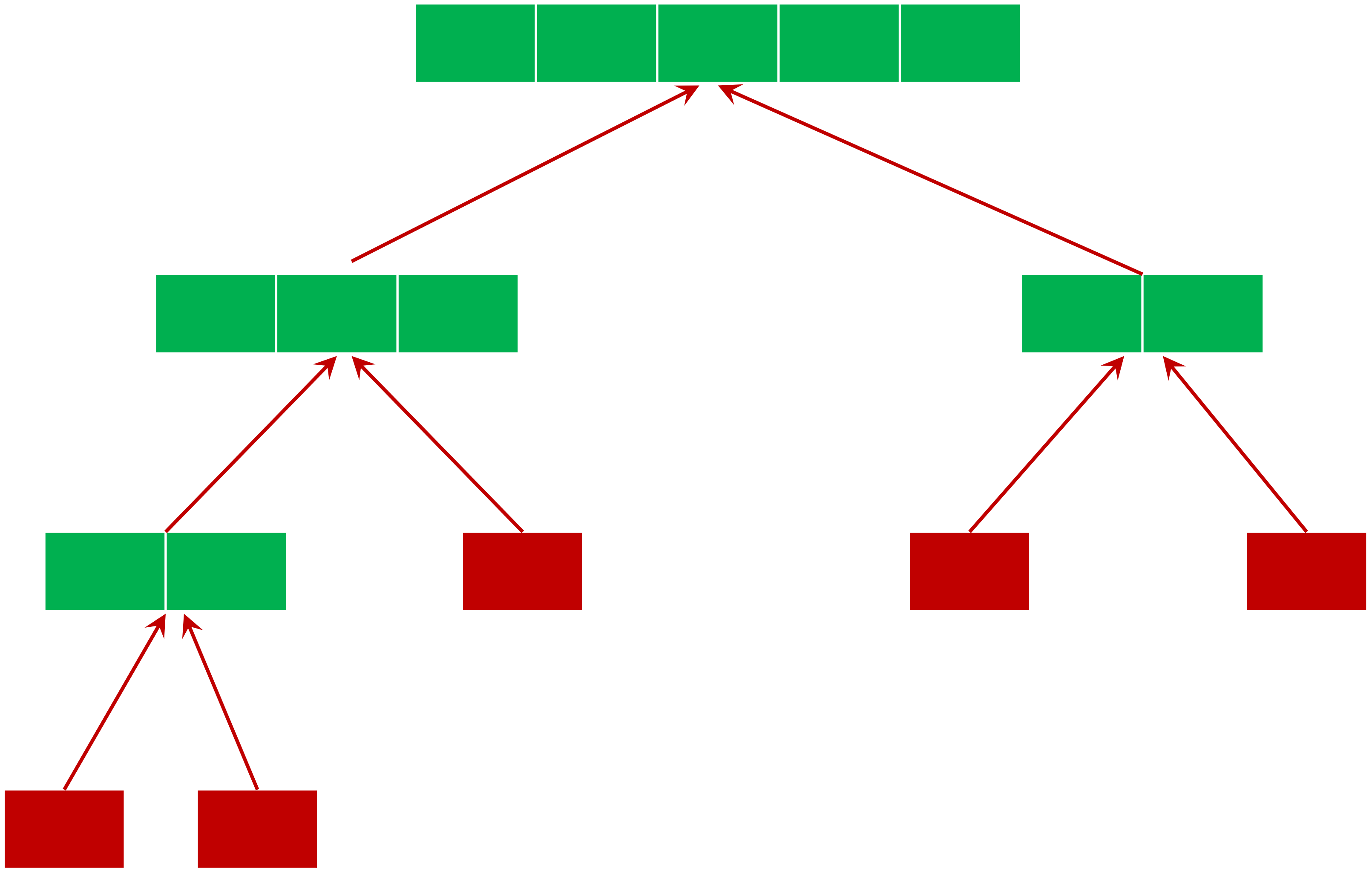
Metoda Divide et Impera



Metoda Divide et Impera



Metoda Divide et Impera



Metoda Divide et Impera

- **În termeni de arbori**, DI constă în
  - **construirea dinamică a unui arbore** (prin împărţirea în subprobleme)

  urmată de

  - **parcurgerea în postordine a arborelui** (prin asamblarea rezultatelor parţiale).

Exemplu – cmmdc al elementelor unui vector

```
function DivImp(p,u)
    if u-p<2
        r ← Cmmdc2(a[p],a[u])
    else
        m ← ⌊(p+u)/2⌋;
        r1 ← DivImp(p,m);
        r2 ← DivImp(m+1,u);
        r ← Cmmdc2 (r1,r2)
    return r
end;
```

Metoda Divide et Impera

- Probleme pentru care știm deja algoritmi polinomiali
  – complexitate mai bună

Exemple clasice (de recapitulat)

- Căutare binară
- Sortarea prin interclasare (Merge Sort)
- Sortarea rapidă (Quick Sort)
- Problema turnurilor din Hanoi

Exemplele din acest curs:

- Numărarea inversiunilor dintr-un vector
- Al k-lea minim al unei mulțimi (statistici de ordine)
- Mediana a doi vectori sortați
- Cele mai apropiate două puncte dintr-o mulțime de puncte din plan
- Înmulțirea a două numere

Aplicaţii sortări

Numărare inversiuni

Problemă

Se consideră un vector cu n elemente distincte.

Să de determine numărul de inversiuni din acest vector

- **Inversiune** = pereche (i, j) cu proprietatea că $i < j$ şi $a_i > a_j$
- **Exemplu** `1,2,11,9,4,6`

  `5 inversiuni`

Aplicații

- **Măsură a diferenței între două liste ordonate**
- **“Gradul de ordonare” al unui vector**
- **Probleme de analiză a clasificărilor (ranking)**
  - Asemănarea între preferințele a doi utilizatori – sugestii de utilizatori cu preferințe similare
  - Asemănări dintre rezultatele întoarse de motoare diferite de căutare pentru aceeași cerere
  - **collaborative filtering**

Aplicații

- Suficient să presupunem că prima clasificare este

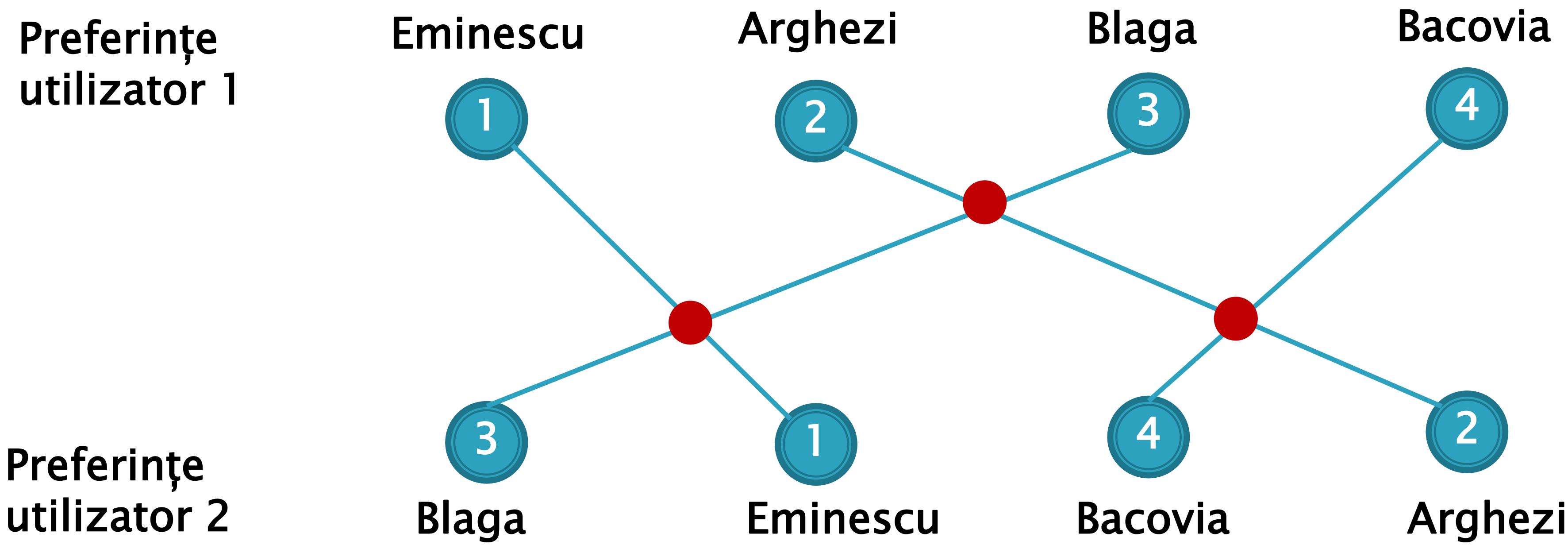
  `1, 2, 3, …, n`

- Gradul de asemănare dintre clasificări = numărul de inversiuni din a doua clasificare

Aplicații

Preferințe utilizator 1	Eminescu 1	Arghezi 2	Blaga 3	Bacovia 4
Preferințe utilizator 2	3 Blaga	1 Eminescu	4 Bacovia	2 Arghezi

Aplicații



3 inversiuni

Numărare inversiuni

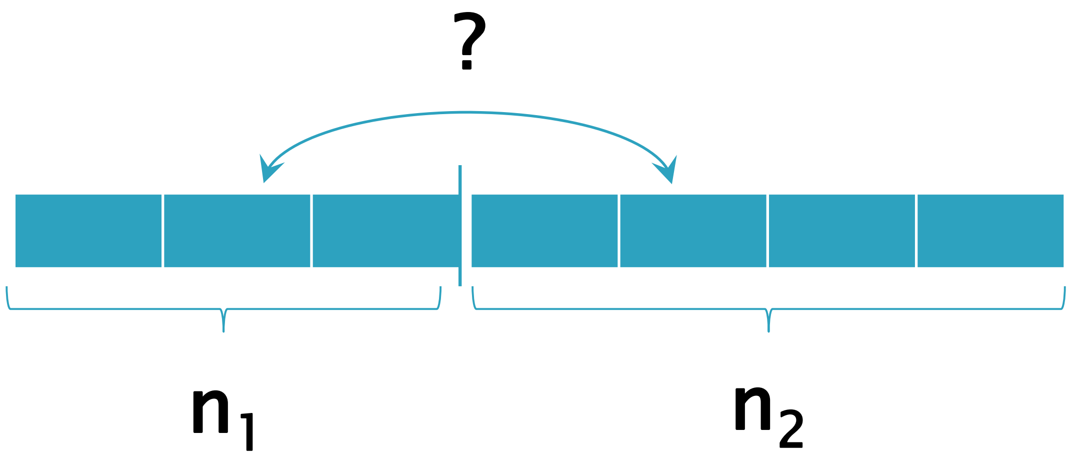
Numărul maxim de inversiuni ?

Numărare inversiuni

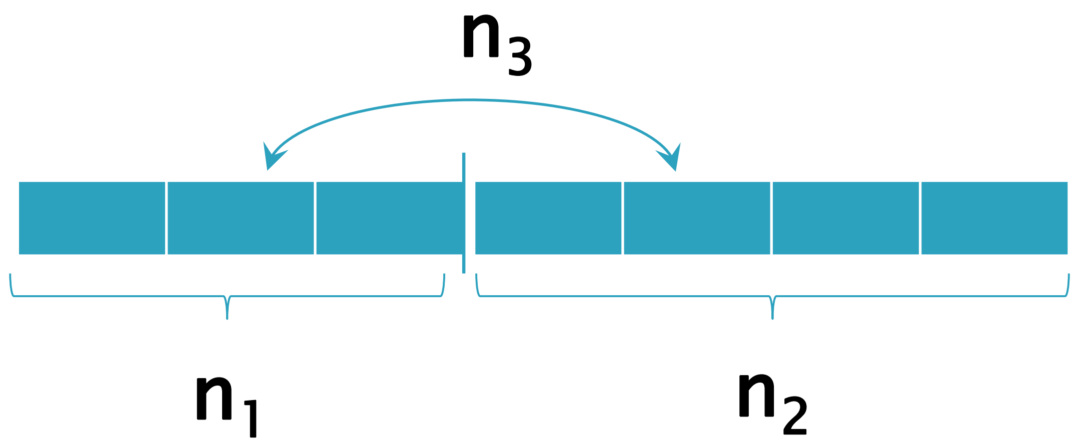
- **Algoritm $\Theta(n^2)$** – evident

Numărare inversiuni

- Algoritm Divide et Impera

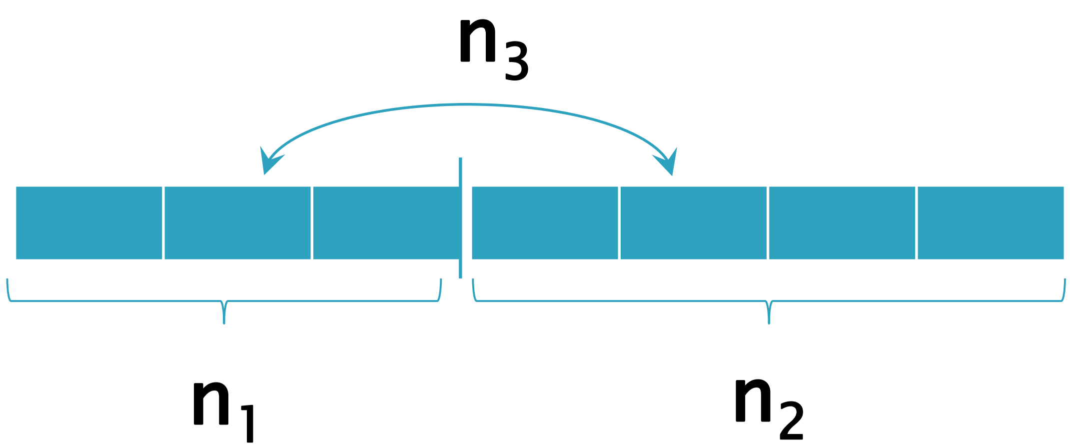


$$n_1 + n_2 + \ ?$$

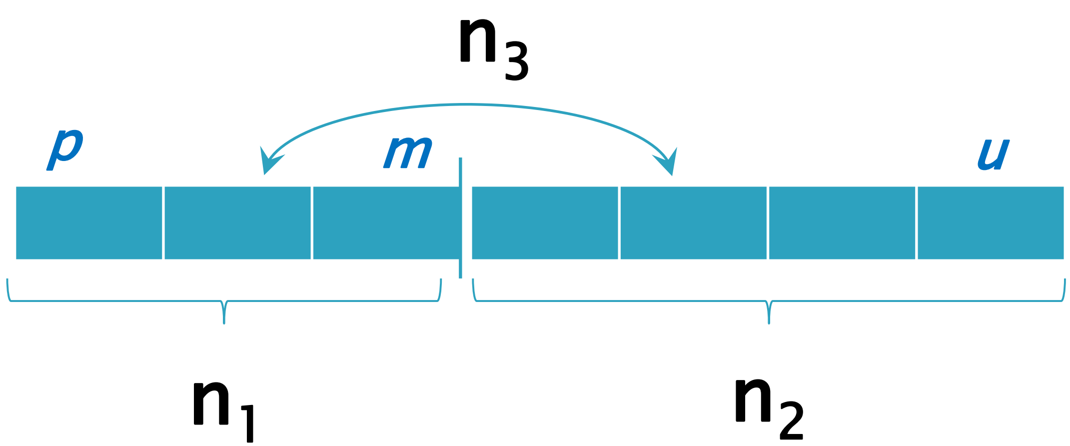


$$n_1+n_2+n_3$$

Cum calculăm eficient n_3?

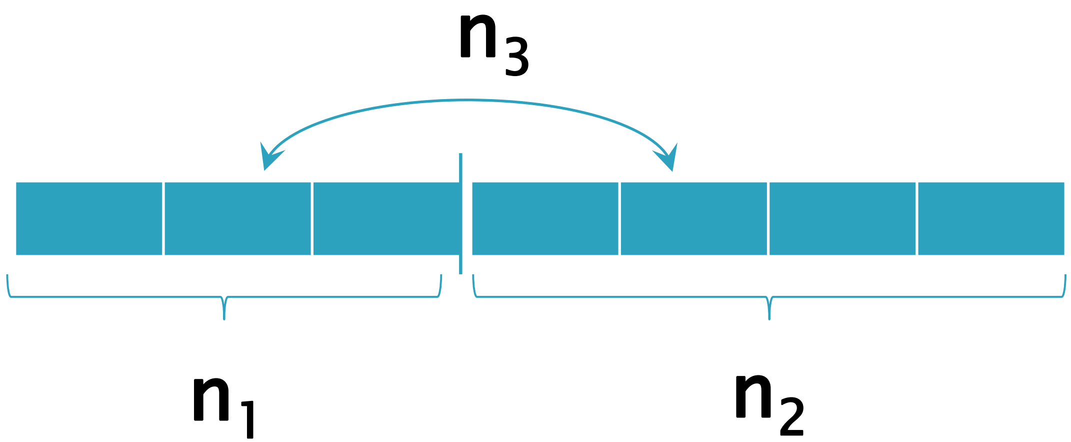


Cum calculăm eficient n_3?



Cum calculăm eficient n_3?

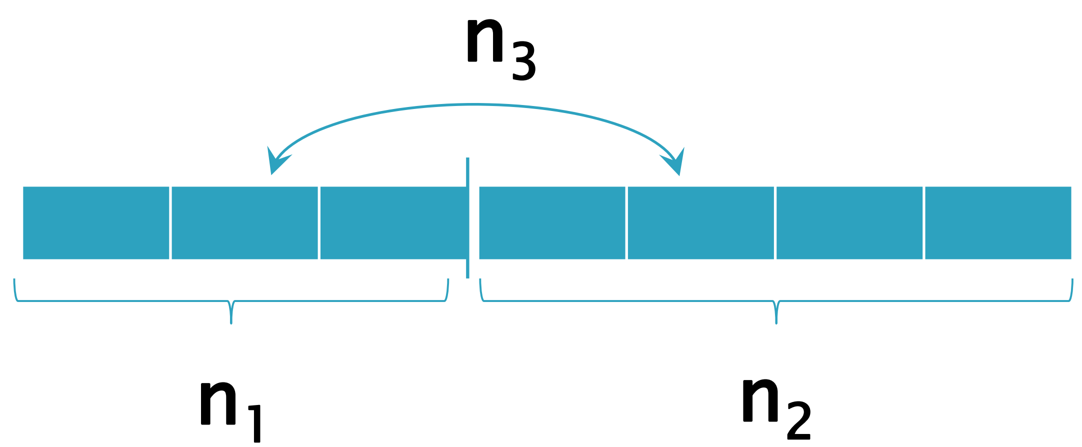
- **Încercare**: Considerăm fiecare pereche (i,j) cu i în subvectorul stâng și j în cel drept



Cum calculăm eficient n_3?

- **Încercare**: Considerăm fiecare pereche (i,j) cu i în subvectorul stâng și j în cel drept

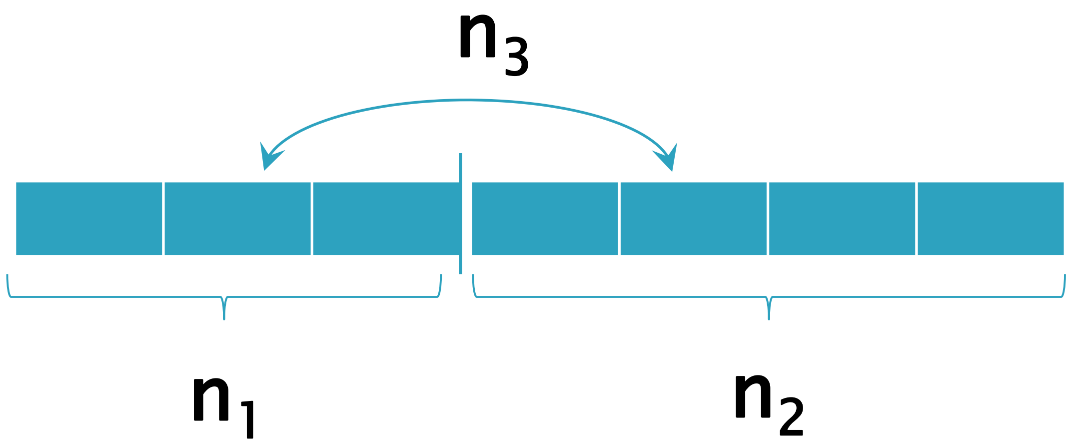
$$T(n) = 2T(n/2)+cn^2$$



Cum calculăm eficient n_3?

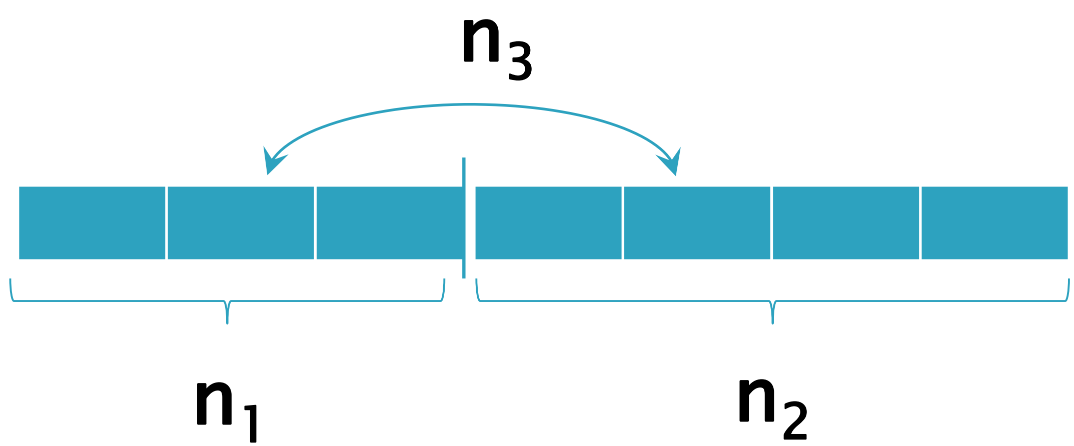
- **Încercare**: Considerăm fiecare pereche (i,j) cu i în subvectorul stâng și j în cel drept

  $T(n) = 2T(n/2)+cn^2$ – tot $O(n^2)$

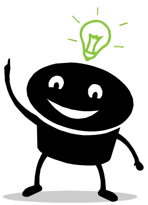


Cum calculăm eficient n_3?

Dacă subvectorii stâng şi drept sunt **sortaţi crescător**, numărarea inversiunilor (i,j) date de elemente din subvectori diferiţi se poate face la interclasare

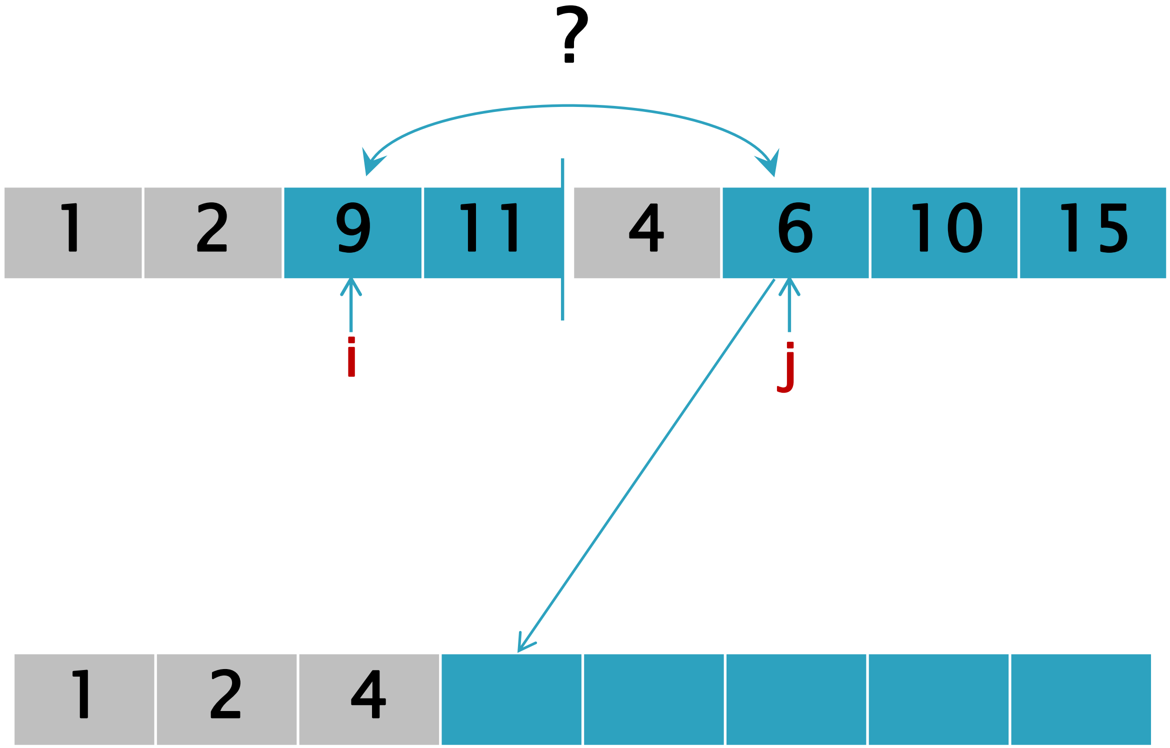


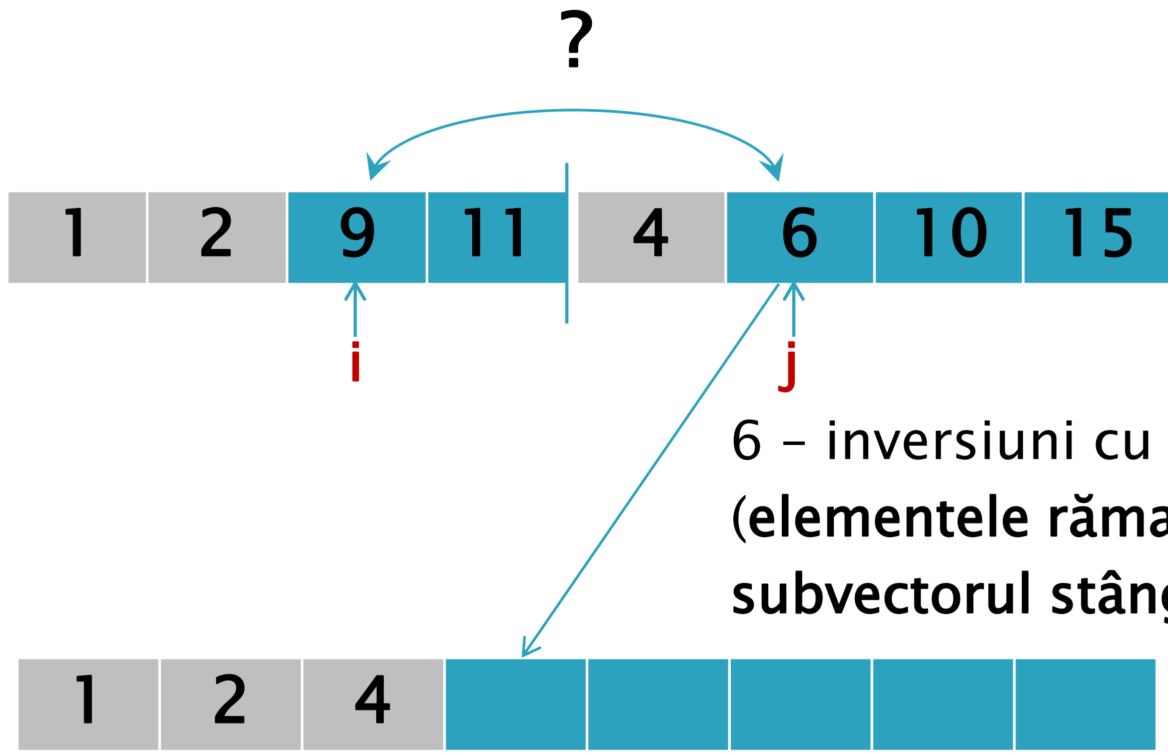
Cum calculăm eficient n_3?



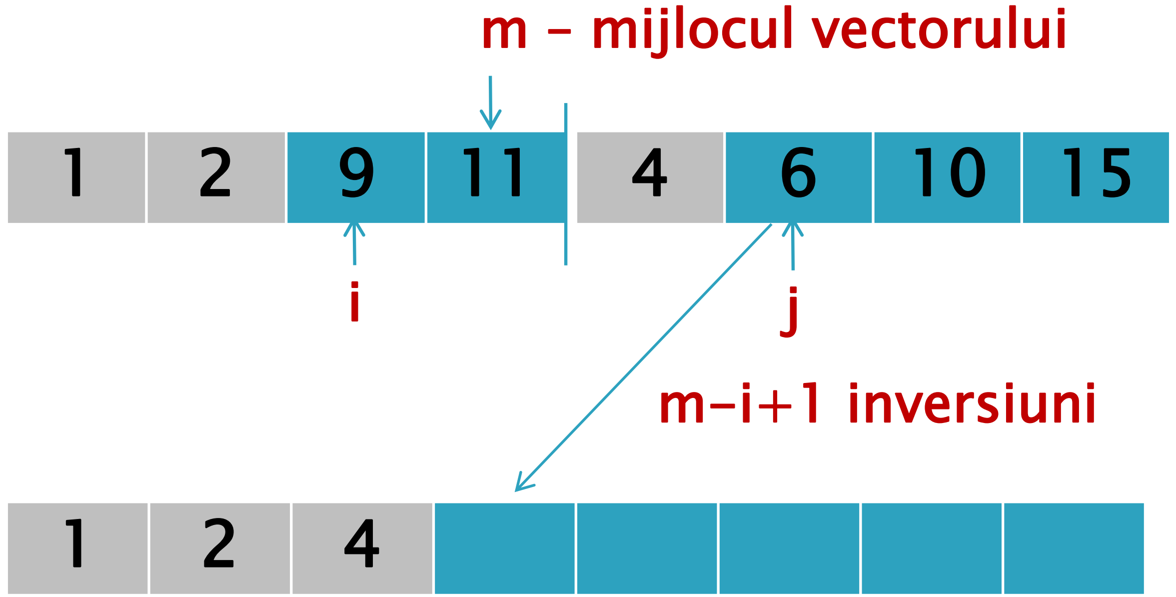
Dacă subvectorii stâng şi drept sunt **sortaţi crescător**, numărarea inversiunilor (i,j) date de elemente din subvectori diferiţi se poate face la interclasare

$$T(n) = 2T(n/2)+cn \Rightarrow T(n) = O(n \log n)$$


?
1
2
9
11
4
6
10
15
i
j
1
2
4

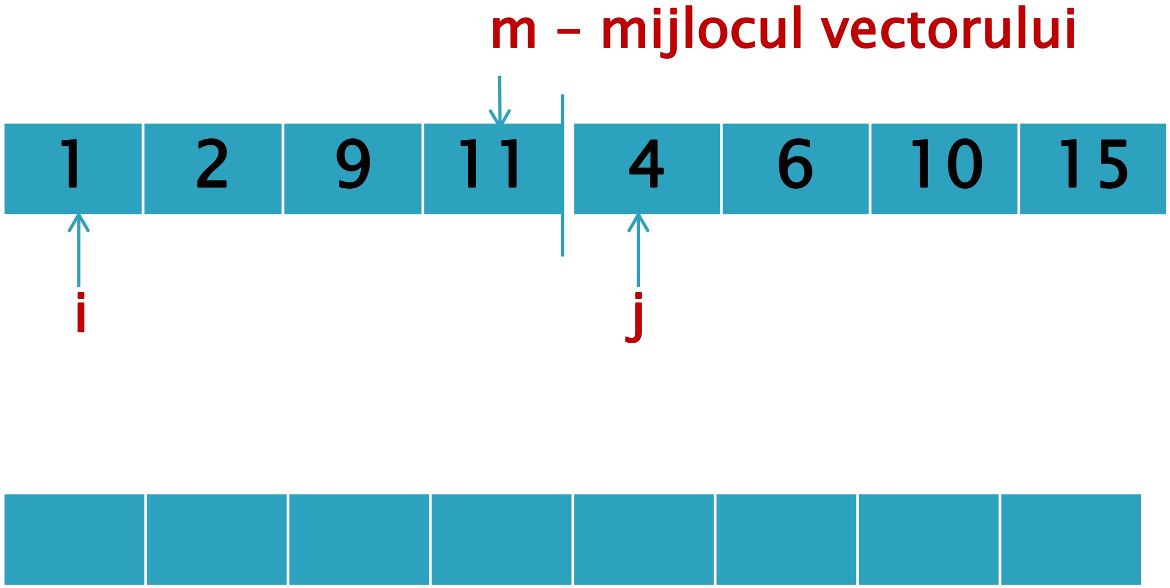


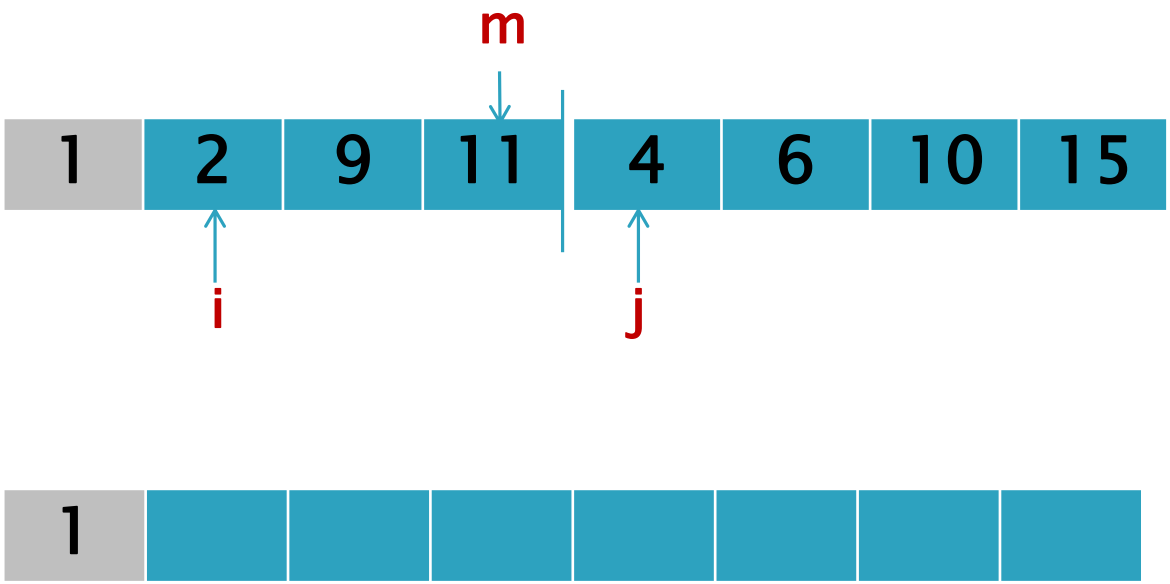
6 – inversiuni cu 9 si 11 (**elementele rămase în subvectorul stâng**)

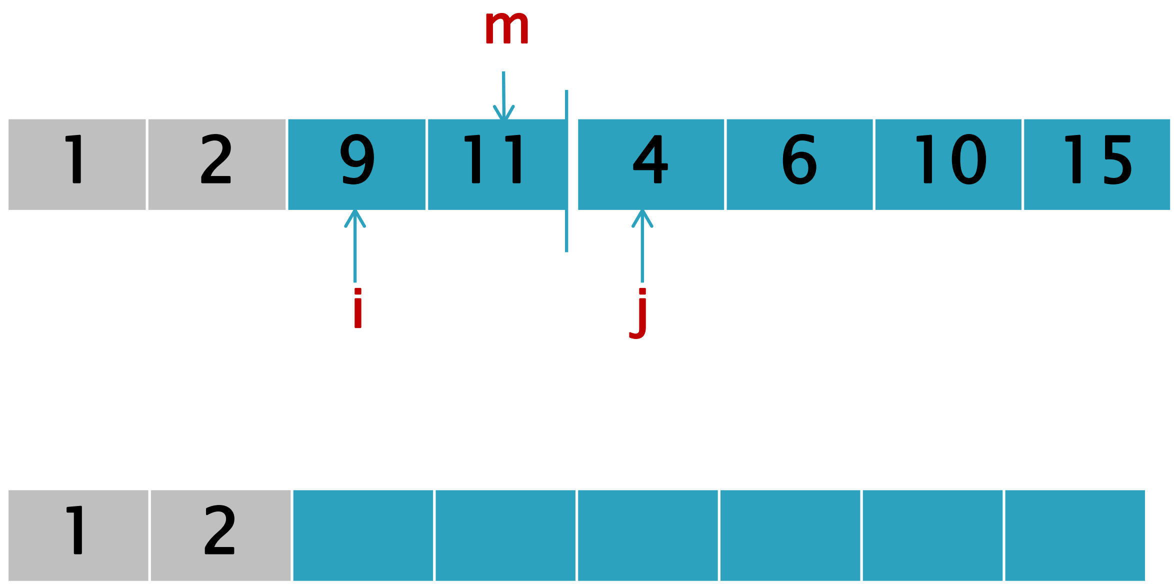


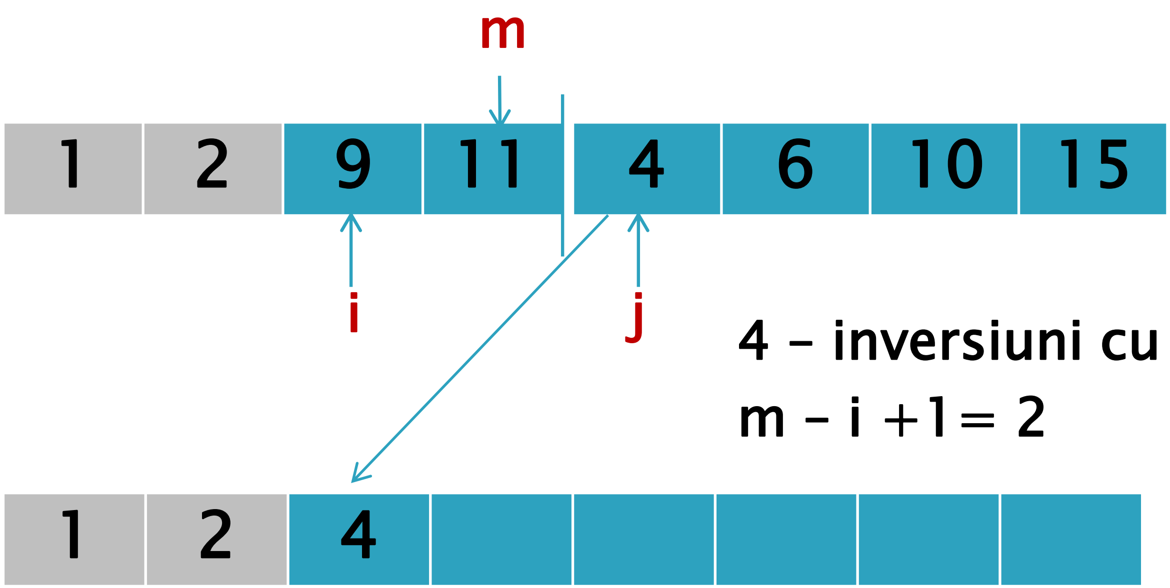
- a[j] determină m – i + 1 inversiuni

Exemplu – numărarea inversiunilor la interclasare


m – mijlocul vectorului
1
2
9
11
4
6
10
15
i
j


m
1 2 9 11 4 6 10 15
i
j
1

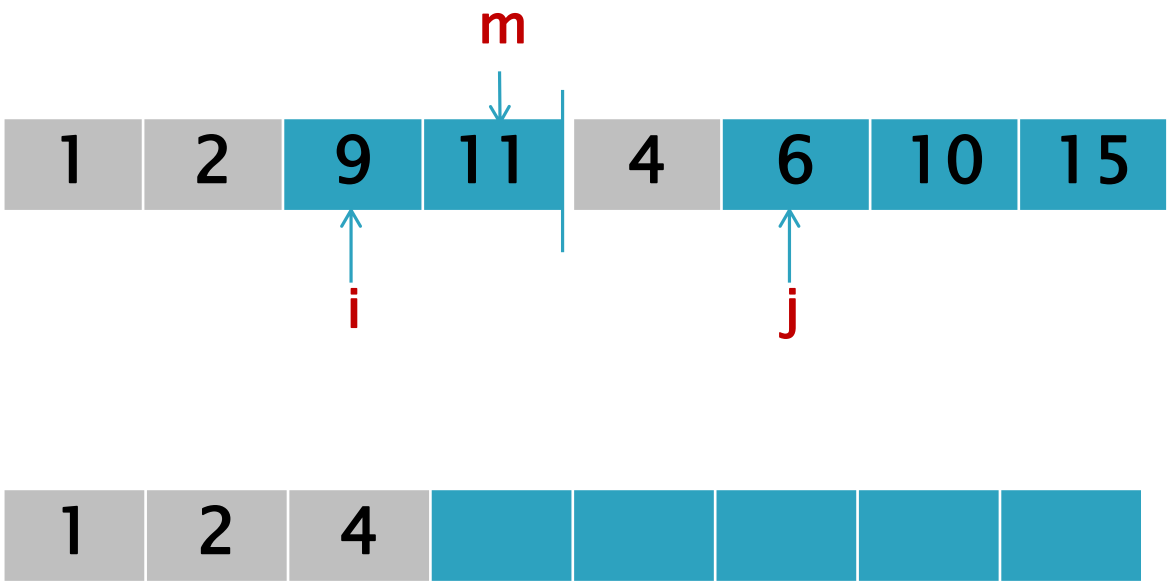

m
1
2
9
11
4
6
10
15
i
j
1
2



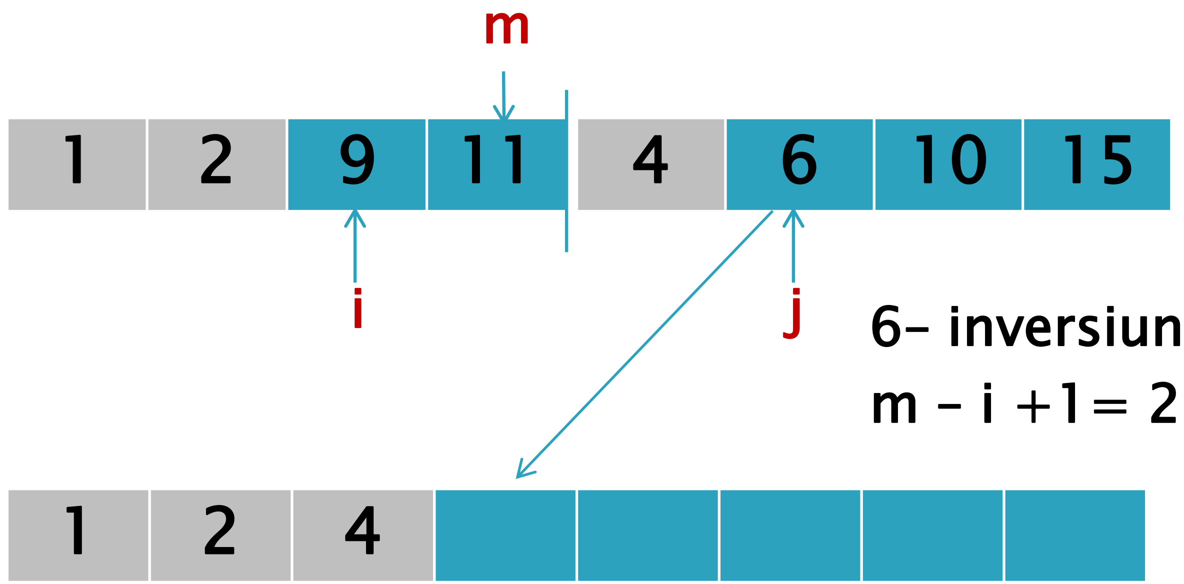
4 – inversiuni cu 9 si 11

m – i +1= 2

Inversiuni = 2



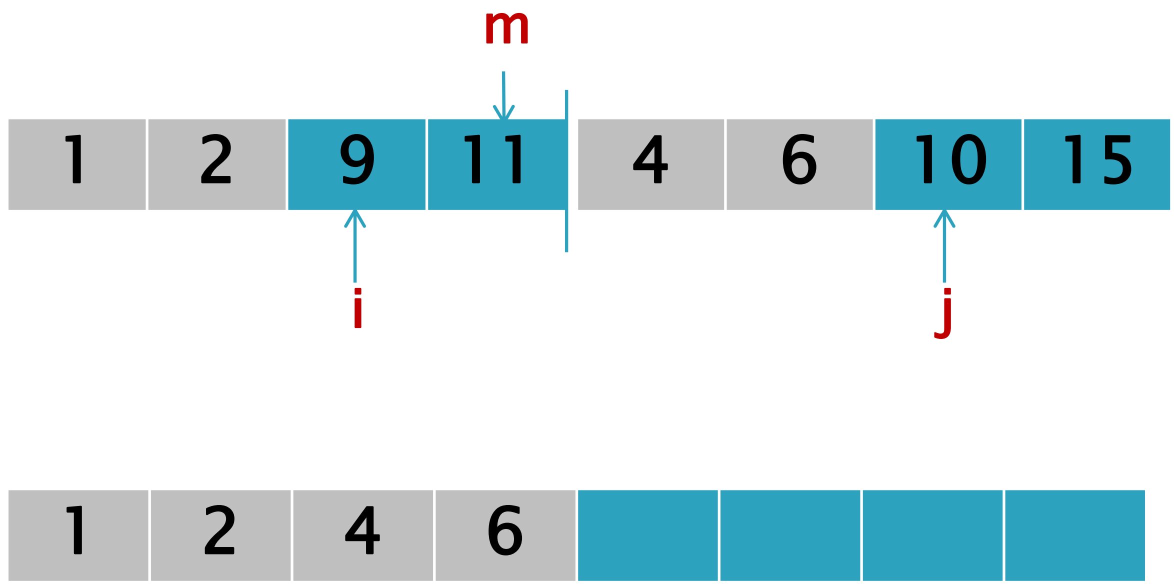
Inversiuni = 2



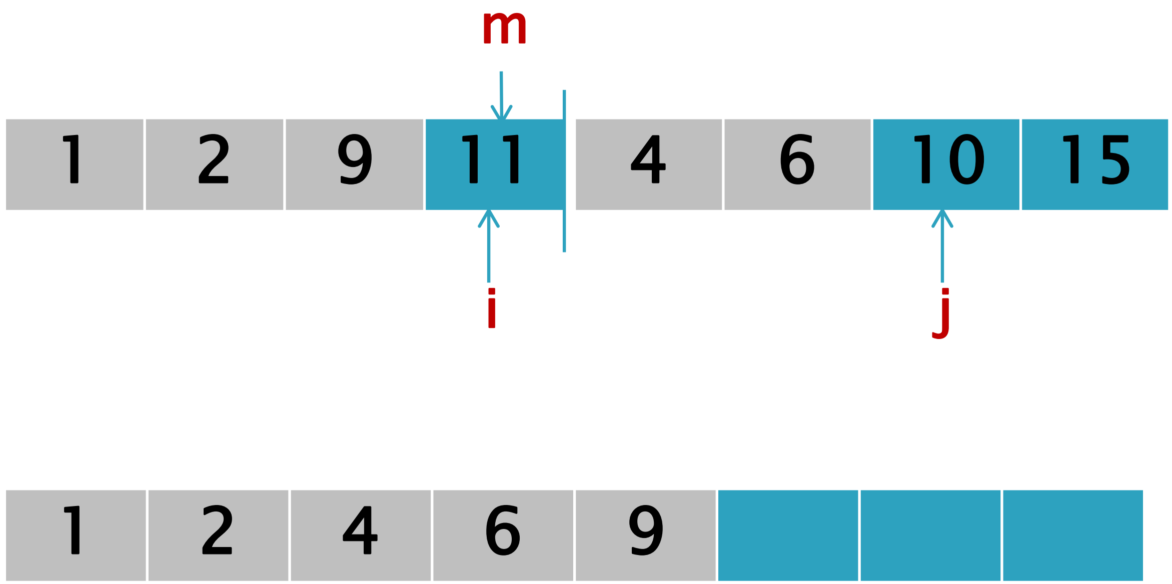
6- inversiuni cu 9 si 11

m - i +1= 2

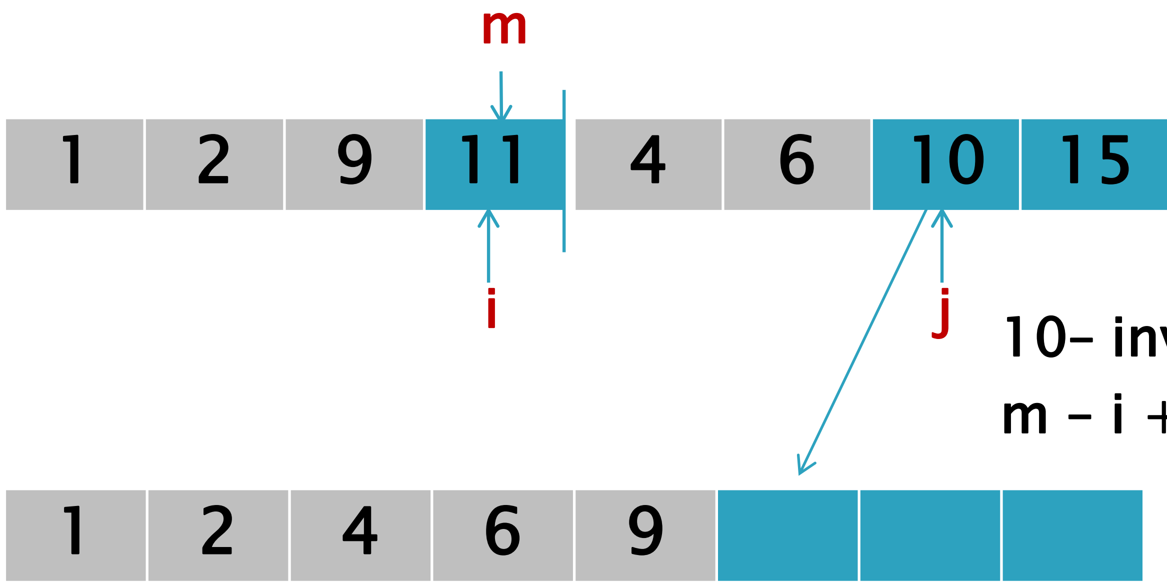
Inversiuni = 2 + 2



Inversiuni = 2 + 2



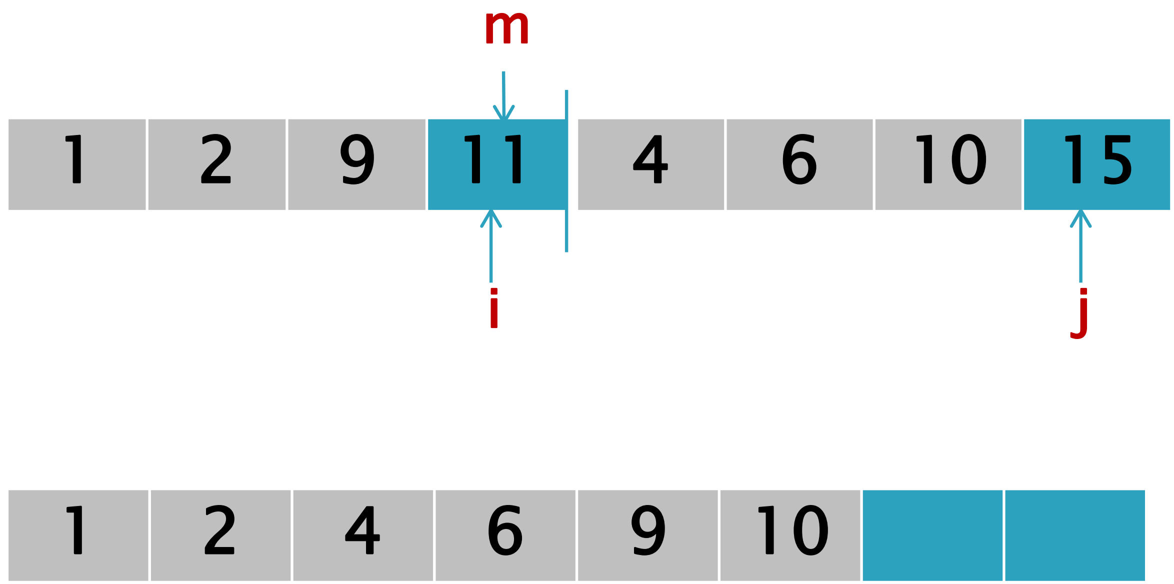
Inversiuni = 2 + 2



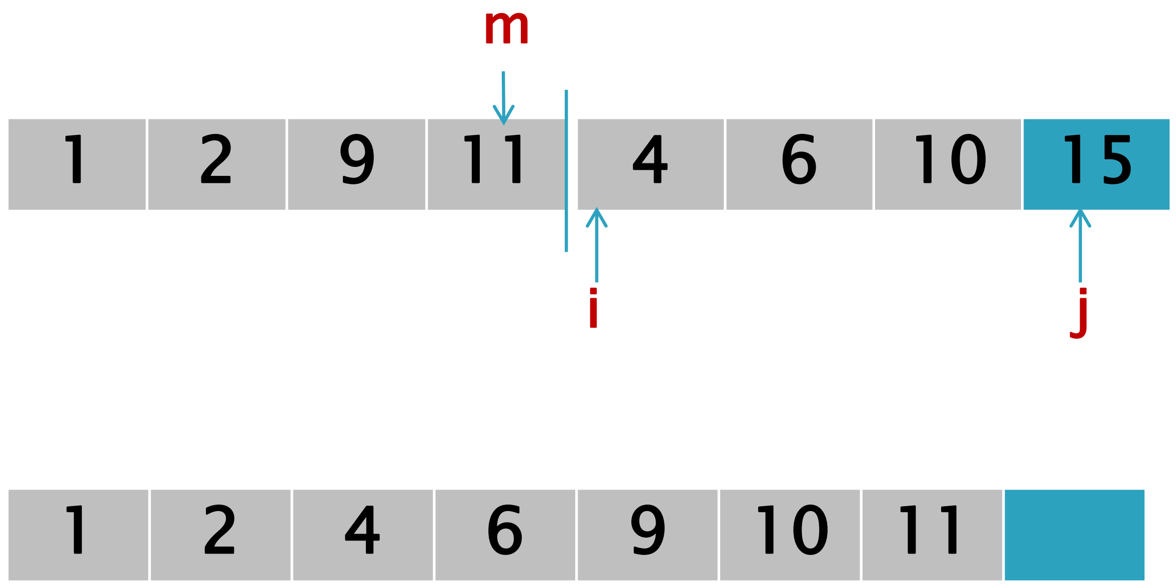
10- inversiuni cu 11

m - i +1= 1

Inversiuni = 2 + 2 + 1



Inversiuni = 2 + 2 + 1



Inversiuni = 2 + 2 + 1

1	2	9	11	4	6	10	15

15- nicio inversiune

1	2	4	6	9	10	11	

Inversiuni = 2 + 2 + 1 + 0

1	2	9	11	4	6	10	15

1	2	4	6	9	10	11	15

Inversiuni = 2 + 2 + 1 + 0 = 5

Algoritm

```
int nrInv(int p,int u){
    if (p == u){
        return 0;
    }
    else {
        int m = (p+u)/2;
        int n1 = nrInv(p,m);
        int n2 = nrInv(m+1,u);
        return interclasare(p,m,u)+n1+n2;
    }
}
```

- **Apel:** **nrInv(0,n-1);**

```
int interclasare(int p,int m,int u){
     int *b=new int[u-p+1];
     int i=p,j=m+1, k=0,nr=0;
     while ((i<=m)&&(j<=u)){
           if (a[i]<=a[j]){ b[k]=a[i]; i++;}
           else{ b[k]=a[j]; j++;
                 nr = nr + (m-i+1);
           }
           k++;
      }
     while(i<=m){ b[k]=a[i]; k++; i++; }
     while(j<=u){ b[k]=a[j]; k++; j++; }
     for (i=p;i<=u;i++)
           a[i]=b[i-p];
     return nr;
  }
```

- **Inversiuni_1.cpp**

Complexitate

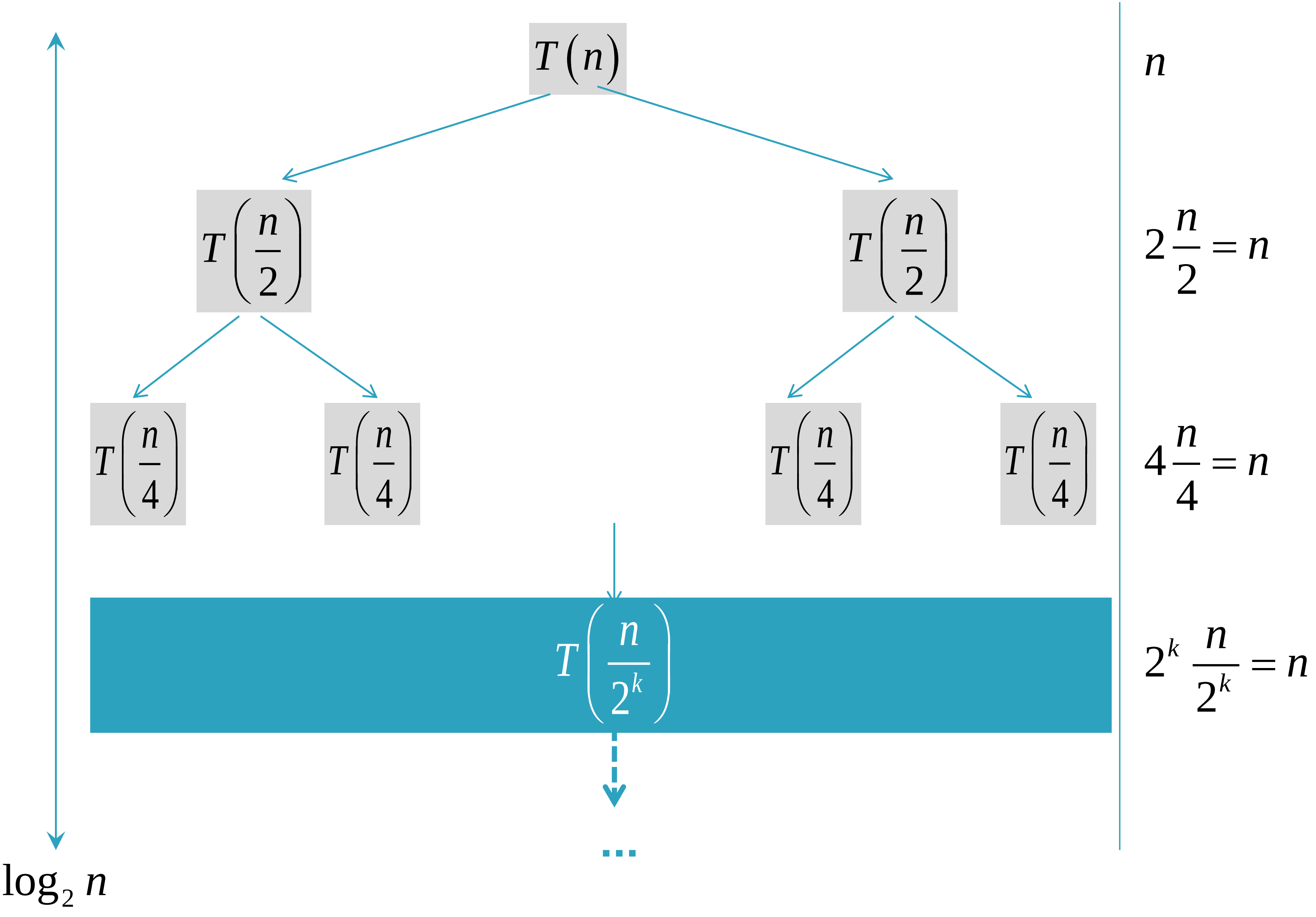
$$T(n) = T(2^k) = 2\ T(2^{k-1}) + c\cdot 2^k =$$

$$= 2\ [2T(2^{k-2}) + c\cdot 2^{k-1}] + c\cdot 2^k = 2^2T(2^{k-2}) + 2\cdot c\cdot 2^k$$

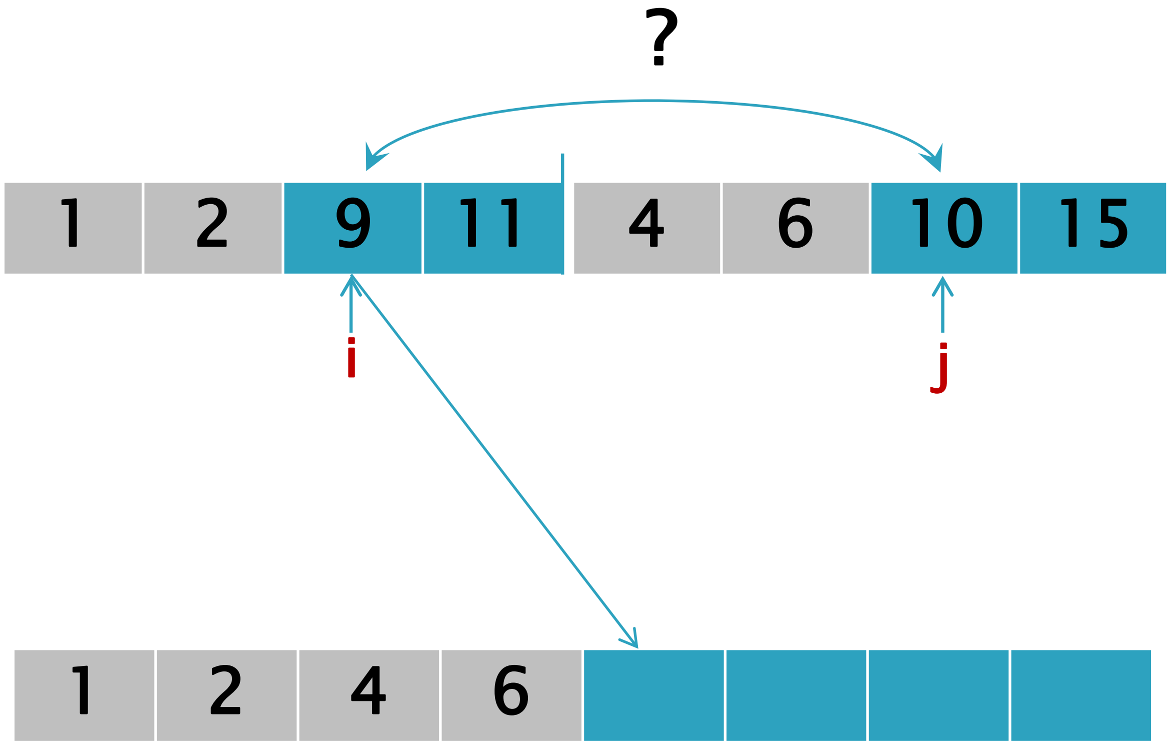
$$= \ldots = 2^iT(2^{k-i}) + i\cdot c\cdot 2^k =$$

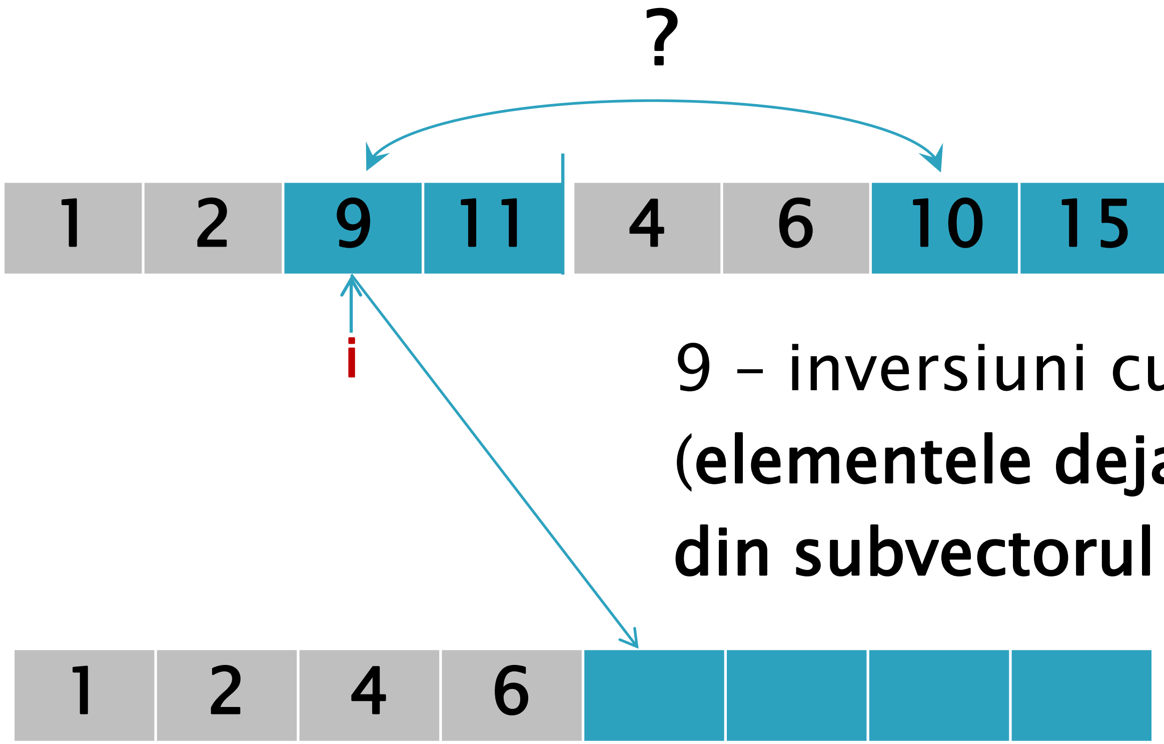
$$= 2^kT(1) + k\cdot c\cdot 2^k = nt_0 + c\cdot\ n\ \cdot \log_2 n$$

- **Arbore subprobleme**

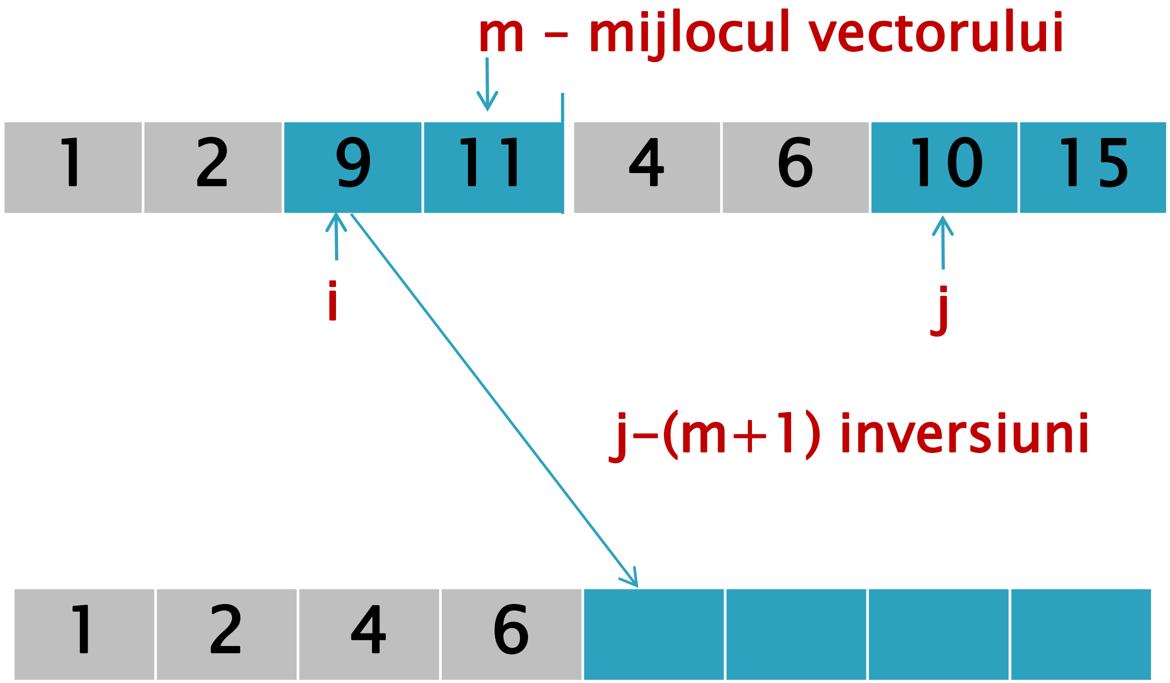

$T(n)$
$T\left(\frac{n}{2}\right)$
$T\left(\frac{n}{2}\right)$
$T\left(\frac{n}{4}\right)$
$T\left(\frac{n}{4}\right)$
$T\left(\frac{n}{4}\right)$
$T\left(\frac{n}{4}\right)$
$T\left(\frac{n}{2^k}\right)$
...
$\log_2 n$
n
$2\frac{n}{2}=n$
$4\frac{n}{4}=n$
$2^k\frac{n}{2^k}=n$

- **Variianta 2** – puteam număra inversiunile dintre subvectori şi atunci când un element când a[i] cu i $\leq$ m (din subvectorul stâng) este adăugat în vectorul rezultat.


?
1
2
9
11
4
6
10
15
i
j
1
2
4
6



9 – inversiuni cu 4 si 6 (**elementele deja adăugate din subvectorul drept**)



- a[i] determină j – m – 1 inversiuni

```
int interclasare(int p,int m,int u){
      int *b=new int[u-p+1];
      int i=p,j=m+1, k=0,nr=0;
      while ((i<=m)&&(j<=u)){
            if (a[i]<=a[j]){ b[k]=a[i]; i++;
                  nr = nr + (j-m-1);
            }
            else{ b[k]=a[j];j++;    }
            k++;
      }
      while(i<=m){ b[k]=a[i]; k++; i++;
            nr = nr + (j-m-1);
      }
      while(j<=u){ b[k]=a[j]; k++; j++; }
      for (i=p;i<=u;i++)
            a[i]=b[i-p];
      return nr;
}
```

- **Temă** – Propuneți un algoritm similar pentru determinarea numărului de inversiuni ale unui vector oarecare (ale cărui elemente **nu sunt neapărat distincte**)

Statistici de ordine

Dat un vector a de n numere şi un indice k, $1 \le k \le n$, să se determine al k-lea cel mai mic element din vector.

Statistici de ordine

A i-a statistică de ordine a unei mulțimi = al i-lea cel mai mic element.

- **Minimul** = prima statistică de ordine
- **Maximul** = a n-a statistică de ordine

Statistici de ordine

- **Mediana** = punctul de la jumătatea unei mulțimi
  = o valoare v a.î. numărul de elemente din mulțime mai mici decât v este egal cu numărul de elemente din mulțime mai mari decât v.

Statistici de ordine

- **Mediana**

Dacă n este impar, atunci mediana este a $\lceil n/2 \rceil$–a statistică de ordine, altfel, prin <u>**convenție**</u> mediana este **media aritmetică** dintre a $\lfloor n/2 \rfloor$–a statistică și a $(\lfloor n/2 \rfloor + 1)$–a statistică de ordine

1	12	15	16	38	40

15,5

- **Mediană inferioară / superioară**

Statistici de ordine – utilitate

- **Statistică**
- **Mediana** – pentru o mulţime $A=\{a_1,\ldots,a_n\}$

  valoarea μ care minimizează expresia

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \mu - a_i \right|$$

este mediana (inf/sup)

Statistici de ordine

Idee

Al k-lea minim

Statistici de ordine

Idee

Al k-lea minim – folosim poziţionarea de la quicksort (**pivot aleator**)

Statistici de ordine

Fie m poziţia pivotului

- Dacă m = k, pivotul este al k-lea minim
-
-

Statistici de ordine

Fie m poziţia pivotului

- Dacă m = k, pivotul este al k-lea minim
- Dacă m > k, al k-lea minim este în stânga pivotului (al k-lea minim din stanga)
-

Statistici de ordine

Fie m poziţia pivotului

- Dacă $m = k$, pivotul este al k-lea minim
- Dacă $m > k$, al k-lea minim este în stânga pivotului (al k-lea minim din stanga)
- Dacă $m < k$, al k-lea minim este în dreapta pivotului (al $(k-m)$-lea minim din dreapta)

```
//pentru numerotare de la 0
 int selKMin(int a[], int p, int u){
     int m = pozRandom(p,u);
     if(m == k-1) return a[m];
     if(m < k-1) return selKMin(a,m+1,u);
     return selKMin(a,p,m-1);
  }

 int selKMin(){
     return selKMin(a,0,n-1);
  }
```

- **AlKMinim.cpp**

$k = 2$

10	2	6	12	4	11

poziţionare pivot

4	2	6	10	12	11

$m = 4 > k \Longrightarrow$ stânga

$k = 2$

10	2	6	12	4	11

poziţionare pivot

4	2	6	10	12	11

$m = 4 > k \longrightarrow$ stânga

4	2	6

poziţionare pivot

2	4	6

$m = 2 = k \longrightarrow$ stop;

pivotul este al k-lea minim

Complexitate

- **Timpul mediu**

$$T(n) = n - 1 + \frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} T(\max\{m-1, n-m\})$$

Complexitate

- **Timpul mediu**

$$\begin{cases} T(n) = n - 1 + \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{m=1}^{n} T(\max\{m-1, n-m\}) \\ \qquad \le n - 1 + \dfrac{\mathbf{2}}{n}\displaystyle\sum_{\boldsymbol{m}=\frac{\boldsymbol{n}}{\mathbf{2}}}^{n-1} T(m) \end{cases}$$

$$T(n) \le cn,\ c \ge 4$$

– se demonstrează prin inducţie

Statistici de ordine

Algoritm O(n) caz defavorabil

Statistici de ordine

Algoritm O(n) caz defavorabil

Idee

În algoritmul anterior `selKMin` **se foloseşte în loc de pivot aleatoriu un pivot calculat astfel:**

Statistici de ordine

Algoritm O(n) caz defavorabil

Idee

În algoritmul anterior `selKMin` **se foloseşte în loc de pivot aleatoriu un pivot calculat astfel:**

_ se împarte vectorul în grupe de 5 (cu cel mult o excepţie – ultimul grup)

- se formează un vector `mediane[]` având ca elemente mediana fiecărui grup
- se calculează mediana acestui vector folosind aceeaşi funcţie `selKMin(mediane,`$\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$ `,`$\left\lceil \frac{n}{10} \right\rceil$`)`

Statistici de ordine

Algoritm O(n) caz defavorabil

- TEMĂ (1p-primele 10)

- Implementare + justificare corectitudine + justificare complexitate
- De ce grupe de minim 5 (de ce nu functioneaza aceeași idee și pentru grupe de 3)?
- mai puţin eficient în practică

- Cormen

Mediana a doi vectori sortaţi

Mediana a doi vectori sortați

Se dau doi vectori a și b de lungime n, cu elementele ordonate crescător. Să se determine mediana vectorului obținut prin interclasarea celor doi vectori.

Mediana a doi vectori sortați

Exemplu: n = 5

1	12	15	16	38
2	13	17	30	45

Mediana a doi vectori sortați

Exemplu: n = 5

1 12 15 16 38

2 13 17 30 45

1 2 12 13 15 16 17 30 38 45

Mediana (15+16)/2 = 15,5

Mediana a doi vectori sortați

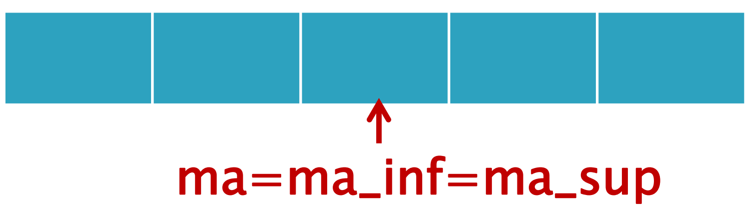
- **Algoritm O(n)** – interclasăm vectorii şi apoi aflăm mediana în timp constant (din elementele de la mijlocul vectorului, conform definiţiei)

Mediana a doi vectori sortați

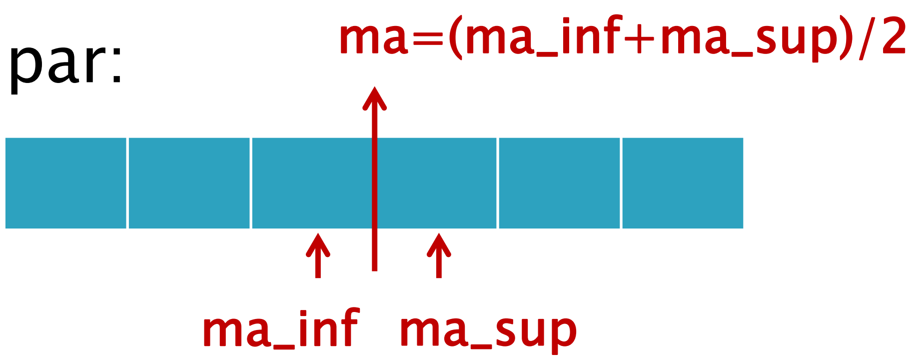
- **Algoritm O(log n)**

- Fie `ma_inf, ma_sup, ma` mediana inferioară, superioară, respectiv mediana vectorului `a`
- `mb_inf, mb_sup, mb –` similar pentru vectorul `b`
- `c –` vectorul obținut prin interclasare

- n impar:



- n par:

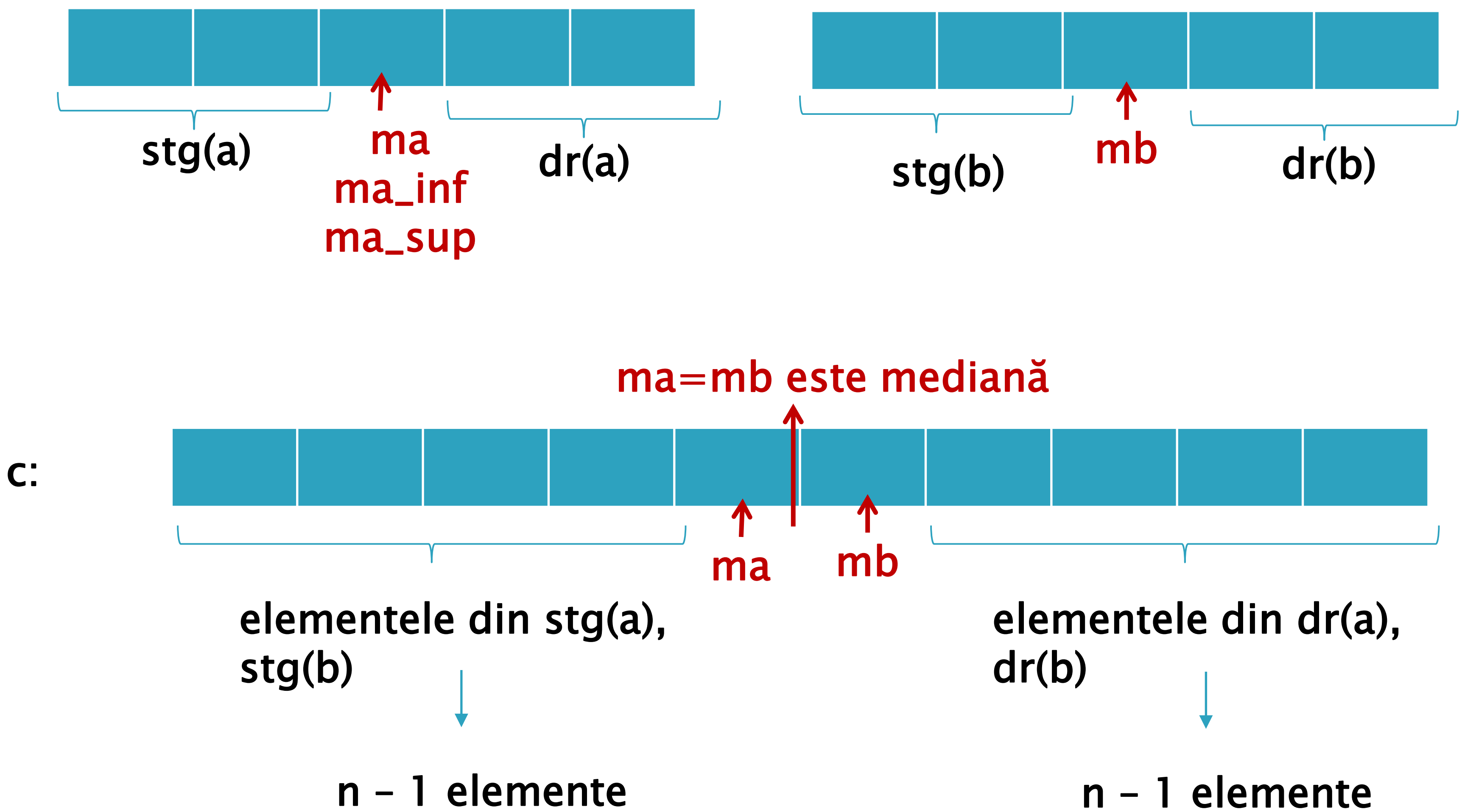


Comparăm ma şi mb

- $ma = mb \Rightarrow mc = ma = mb$?

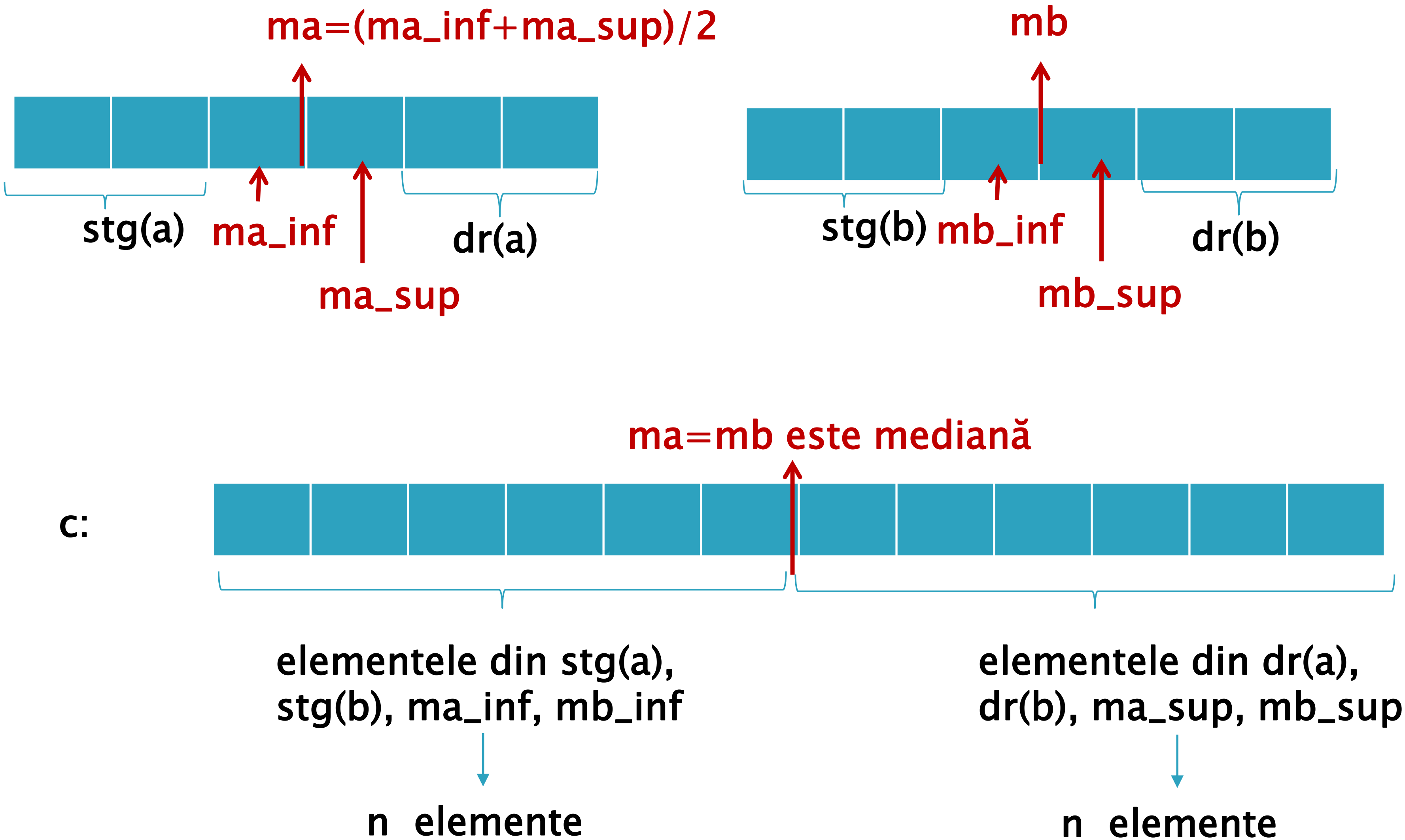
- $ma = mb \Rightarrow mc = ma = mb$

n impar

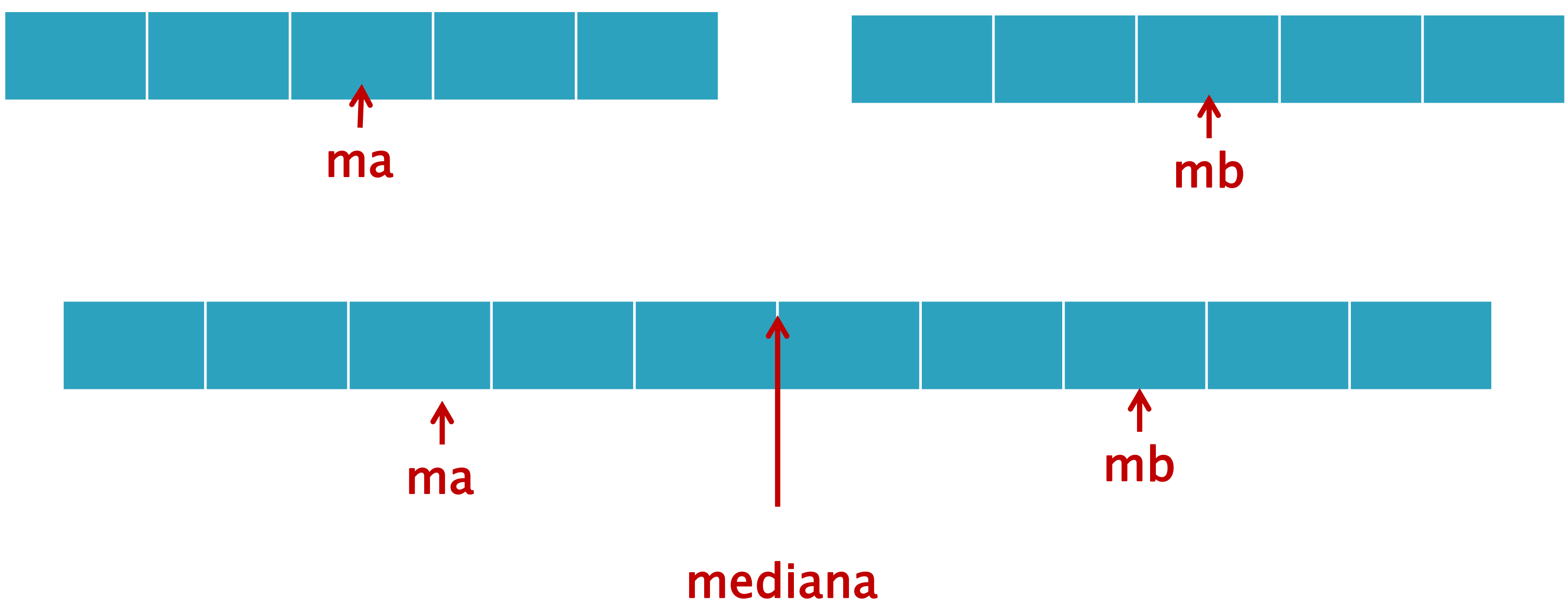


- $ma = mb \Rightarrow mc = ma = mb$

n par

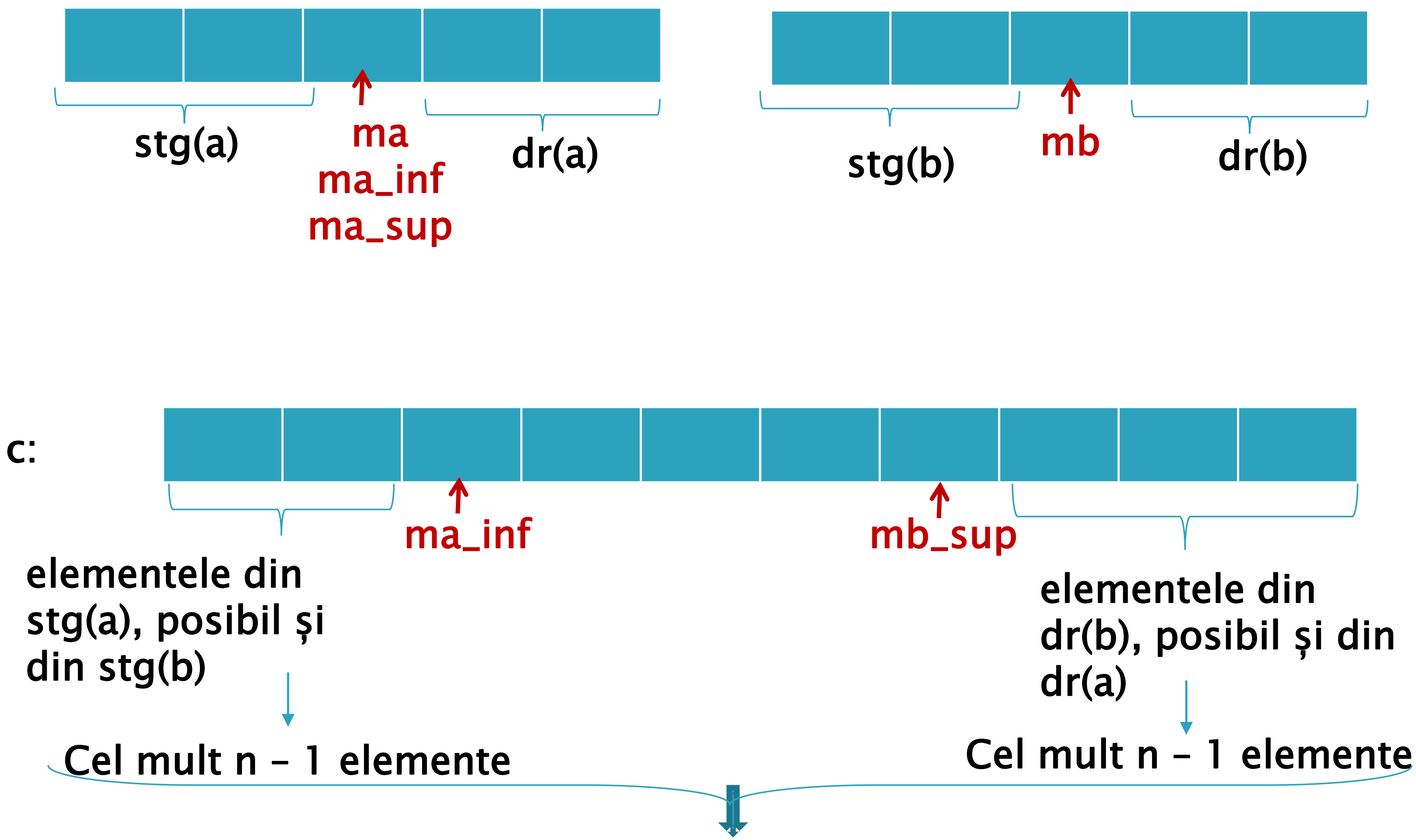


- $\mathtt{ma} < \mathtt{mb} \Rightarrow \mathtt{mc} \in [\mathtt{ma},\ \mathtt{mb}]$?



- ma < mb ⇒ mc,mc_inf,mc_sup ∈ [ma_inf, mb_sup]

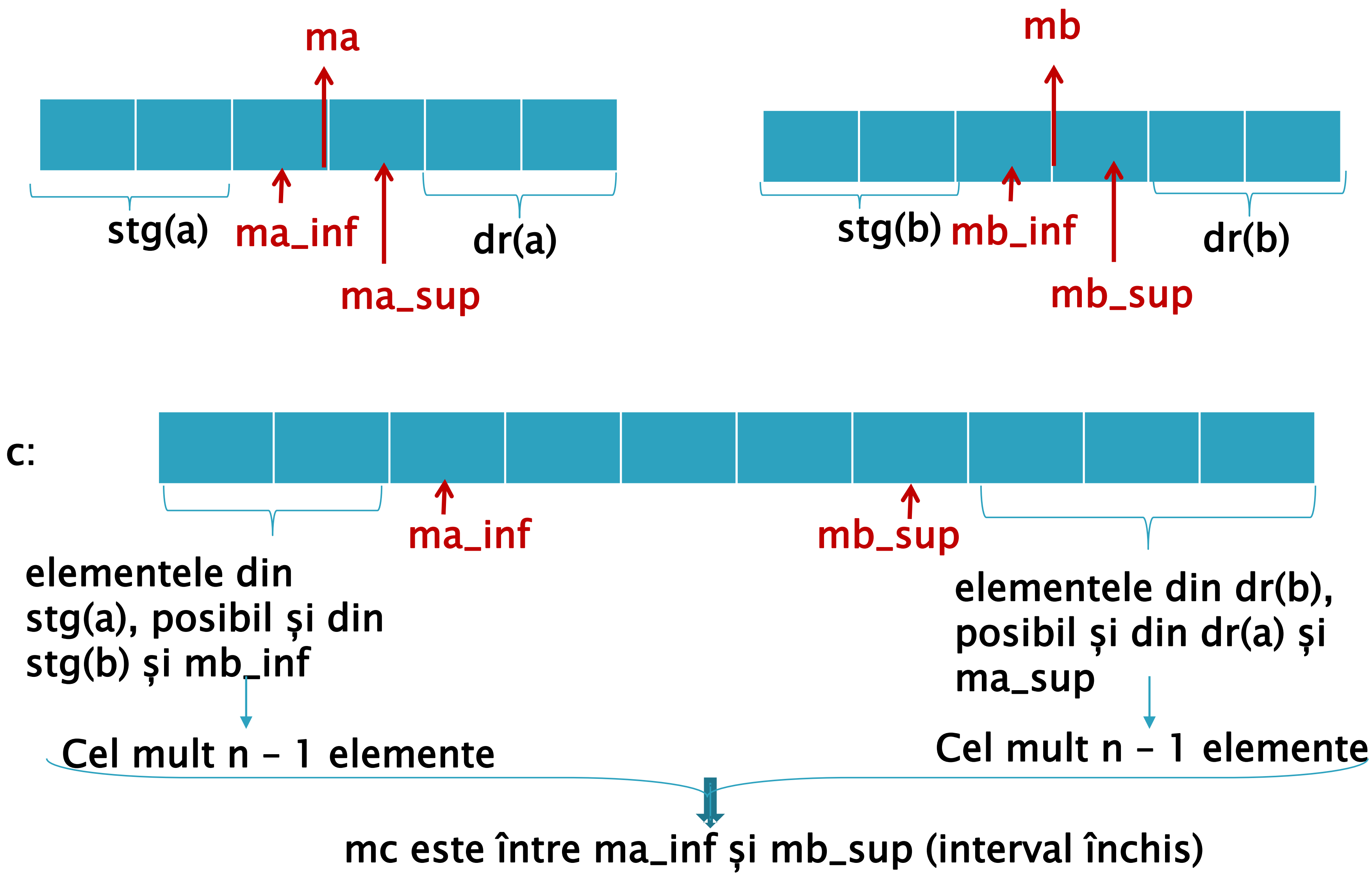
n impar



mc este între ma_inf și mb_sup (interval închis)

- ma < mb ⇒ mc,mc_inf,mc_sup ∈ [ma_inf, mb_sup]

n par



- $ma < mb \Rightarrow mc, mc\_inf, mc\_sup \in [ma\_inf,\ mb\_sup]$

Rezultă:

Pentru a determina mediana este suficient să considerăm:

- Subvectorul drept din primul vector (inclusiv mediana inferioară)
- Subvectorul stâng din al doilea vector (inclusiv mediana superioară)

- $ma < mb \Rightarrow mc, mc\_inf, mc\_sup \in [ma\_inf,\ mb\_sup]$

Rezultă:

Pentru a determina mediana este suficient să considerăm:

- Subvectorul drept din primul vector (inclusiv mediana inferioară)
- Subvectorul stâng din al doilea vector (inclusiv mediana superioară)

Astfel

- din vectorul a renunțăm la [(n-1)/2] elemente care sunt înaintea lui ma_inf (deci și a lui mc_inf) în c
- din vectorul b renunțăm **tot la** [(n-1)/2] elemente care sunt după lui mb_sup (deci și după mc_sup) în c

deci **media noilor vectori este egală cu mediana lui c**

- `ma > mb` – Similar

Mediana a doi vectori sortați

Corectitudine:

mediana noii probleme = mediana problemei inițiale

Pseudocod

- Fie `ma` mediana vectorului `a` și `mb` mediana vectorului `b`
  - Dacă `ma = mb` atunci **această valoare este mediana**

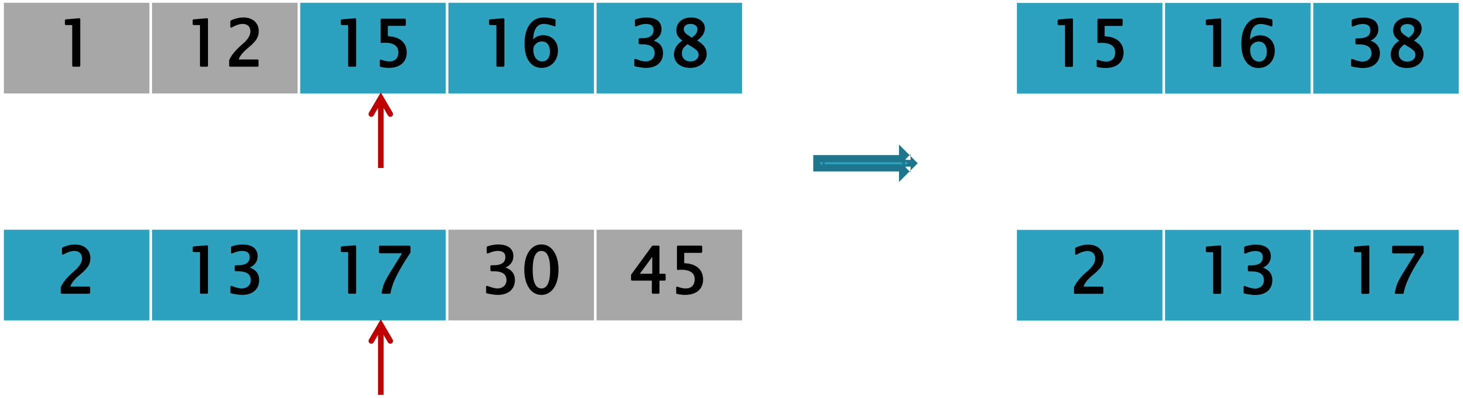
- Fie `ma` mediana vectorului `a` și `mb` mediana vectorului `b`
  - Dacă `ma = mb` atunci **această valoare este mediana**
  - Dacă `ma > mb` atunci mediana = mediana **subvectorilor**

    a[**0..⌊n/2⌋**], b[**⌊(n-1)/2⌋..n-1**]
  - Dacă `ma < mb` atunci mediana = mediana **subvectorilor**

    a[**⌊(n-1)/2⌋..n-1**], b[**0..⌊n/2⌋**]

1	12	15	16	38

2	13	17	30	45

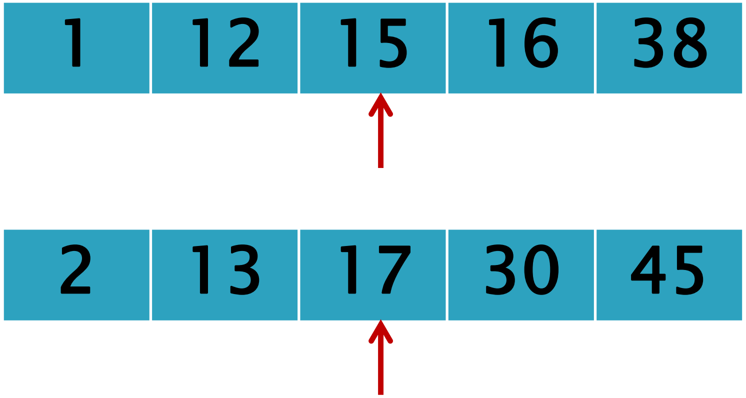

1 12 15 16 38
2 13 17 30 45
15 16 38
2 13 17

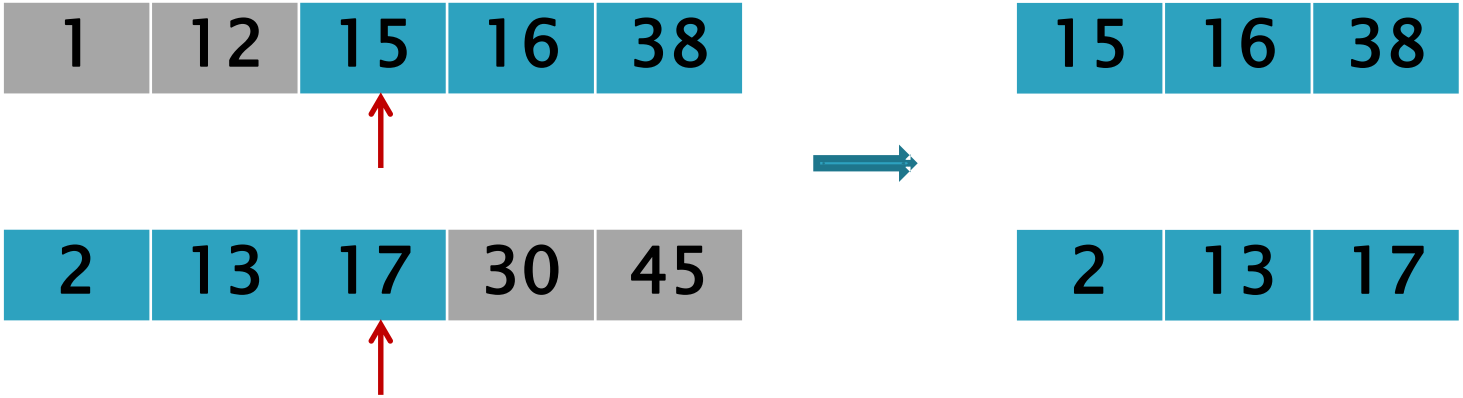
- **Ştim să rezolvăm direct:**
  - $n = 1$: $(a[1]+b[1])/2$
  - $n = 2$: $(\max\{a[1],b[1]\}+\min\{a[2],b[2]\})/2$

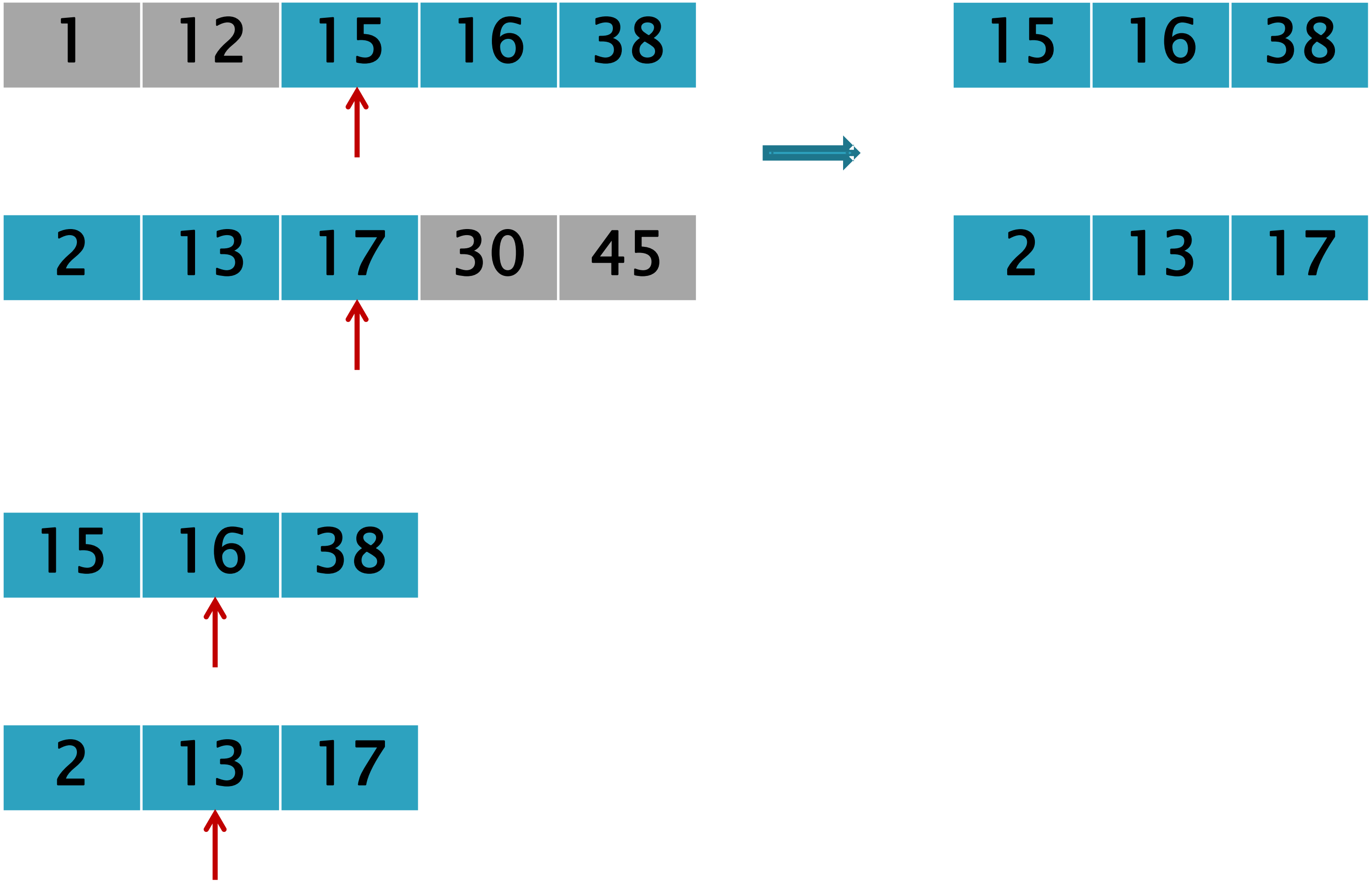
Exemplu

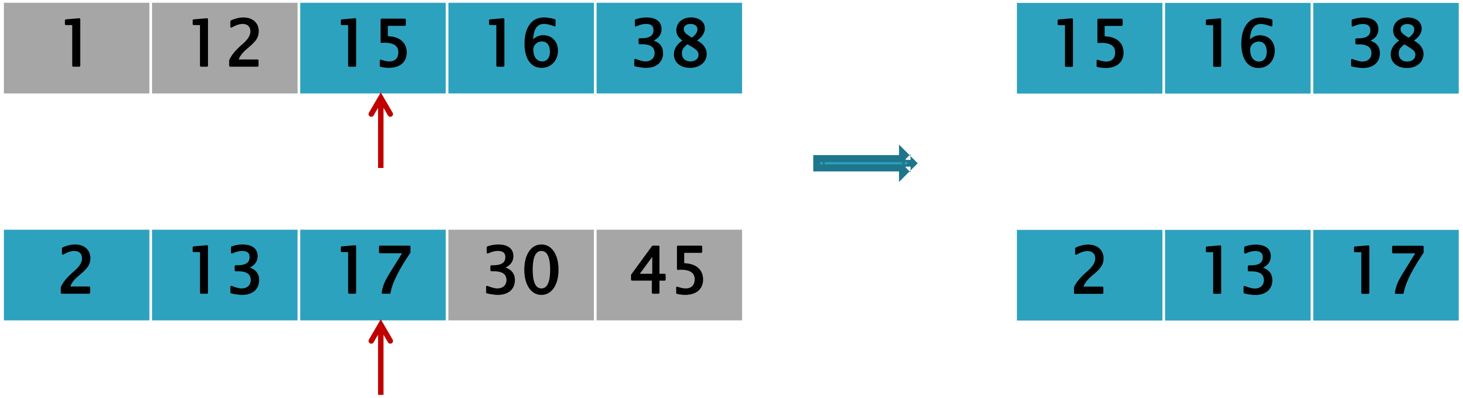
1	12	15	16	38

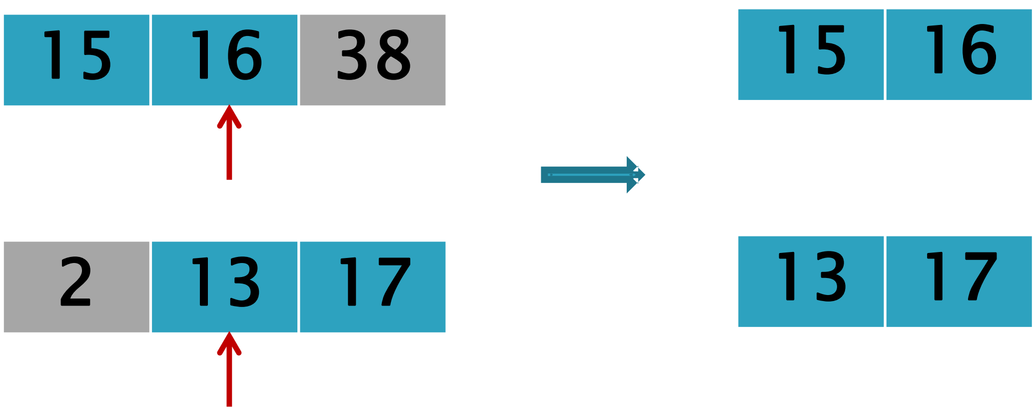
2	13	17	30	45

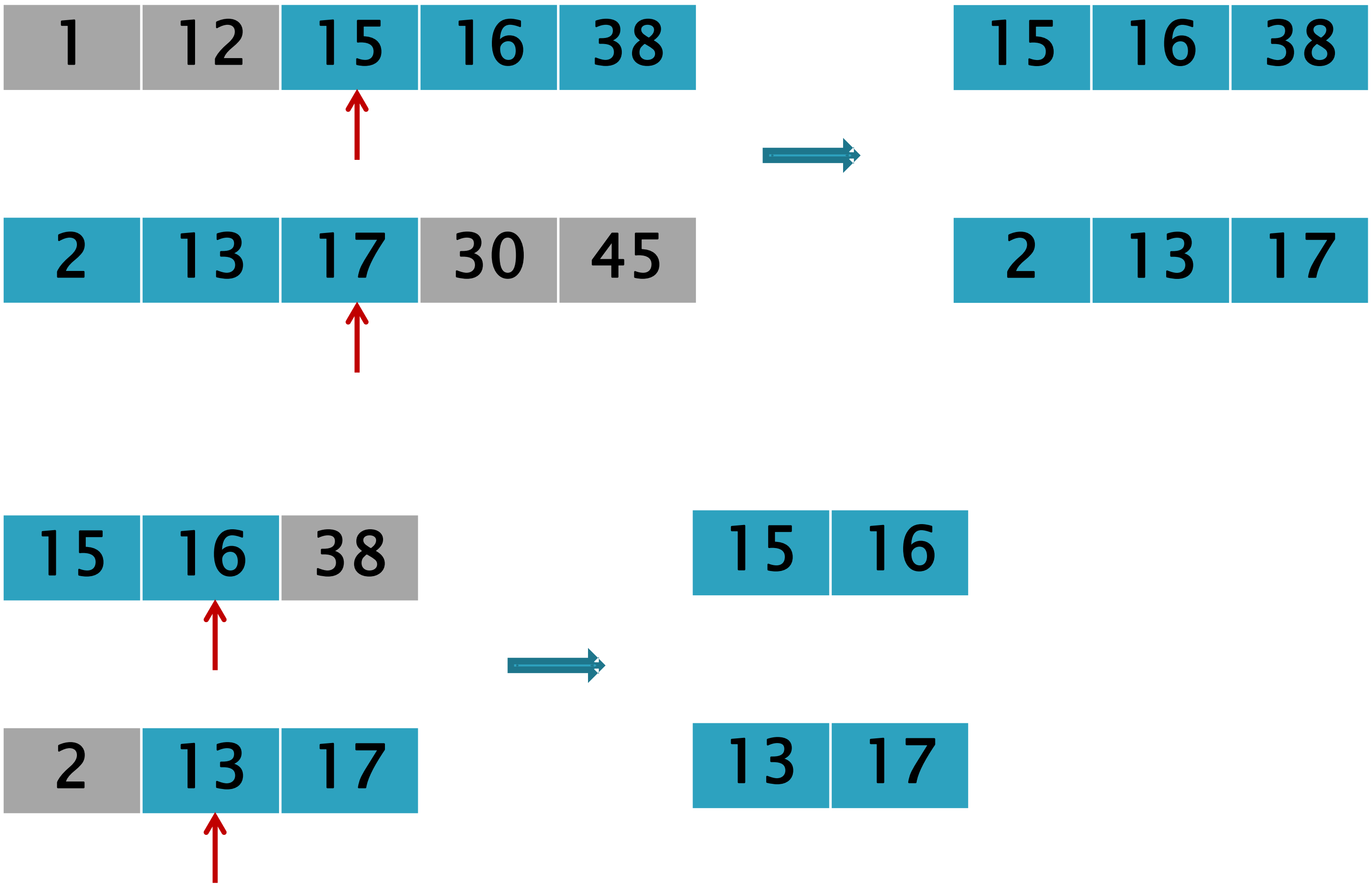

1 12 15 16 38
2 13 17 30 45


1 12 15 16 38
2 13 17 30 45
15 16 38
2 13 17


1 12 15 16 38
2 13 17 30 45
15 16 38
2 13 17
15 16 38
2 13 17


1 12 15 16 38
2 13 17 30 45
15 16 38
2 13 17


15 16 38
2 13 17
15 16
13 17



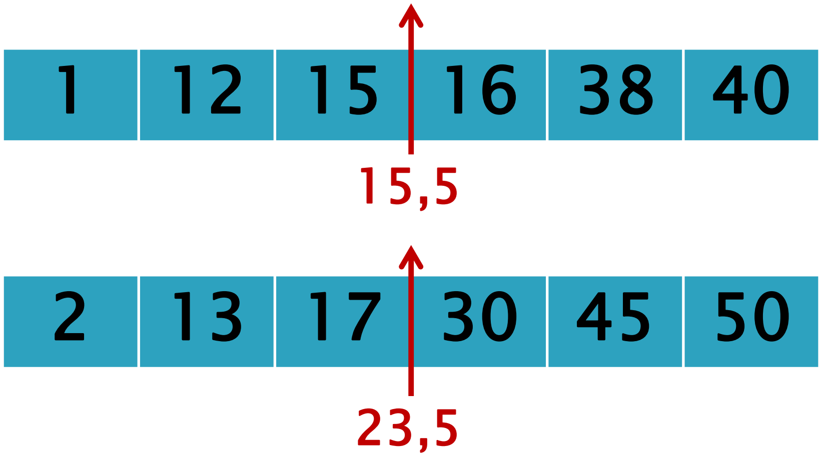
$$\textbf{Mediana} = \frac{\max\{13,15\}+\min\{16,17\}}{2} = \frac{15+16}{2}$$

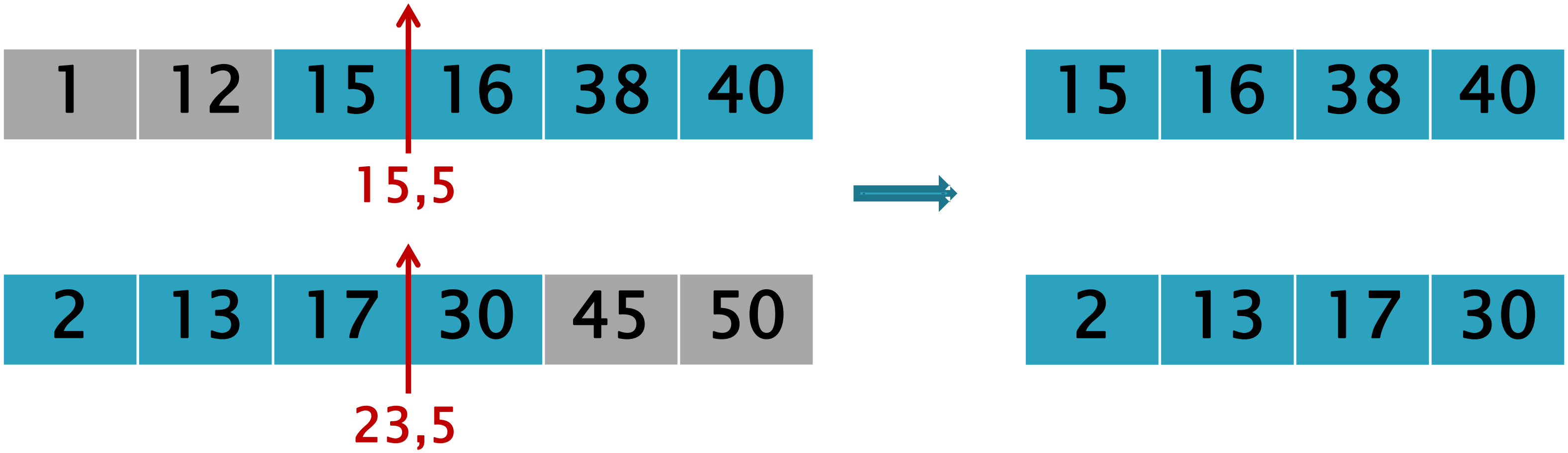
$$= 15{,}5$$

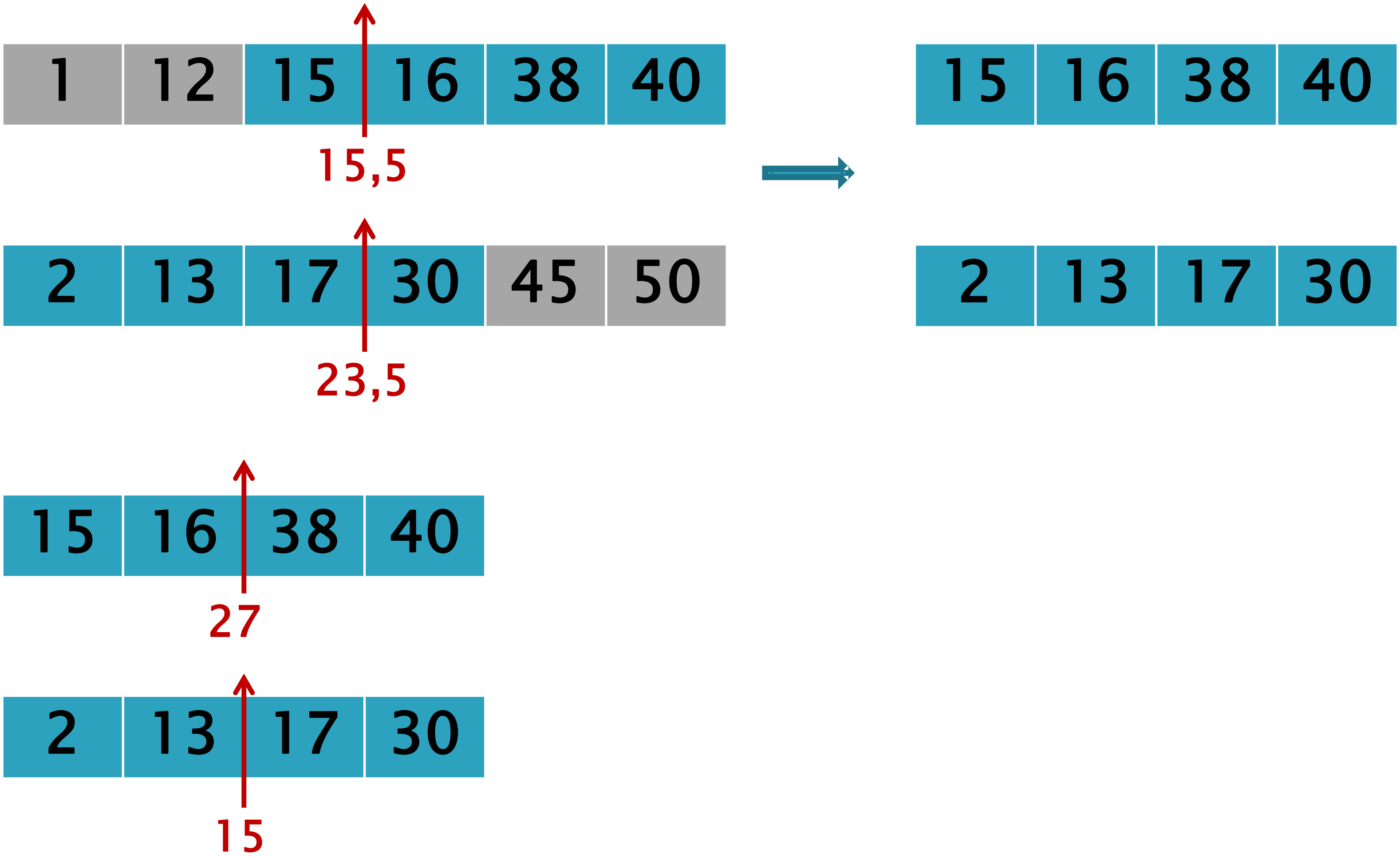
Exemplul 2

1	12	15	16	38	40

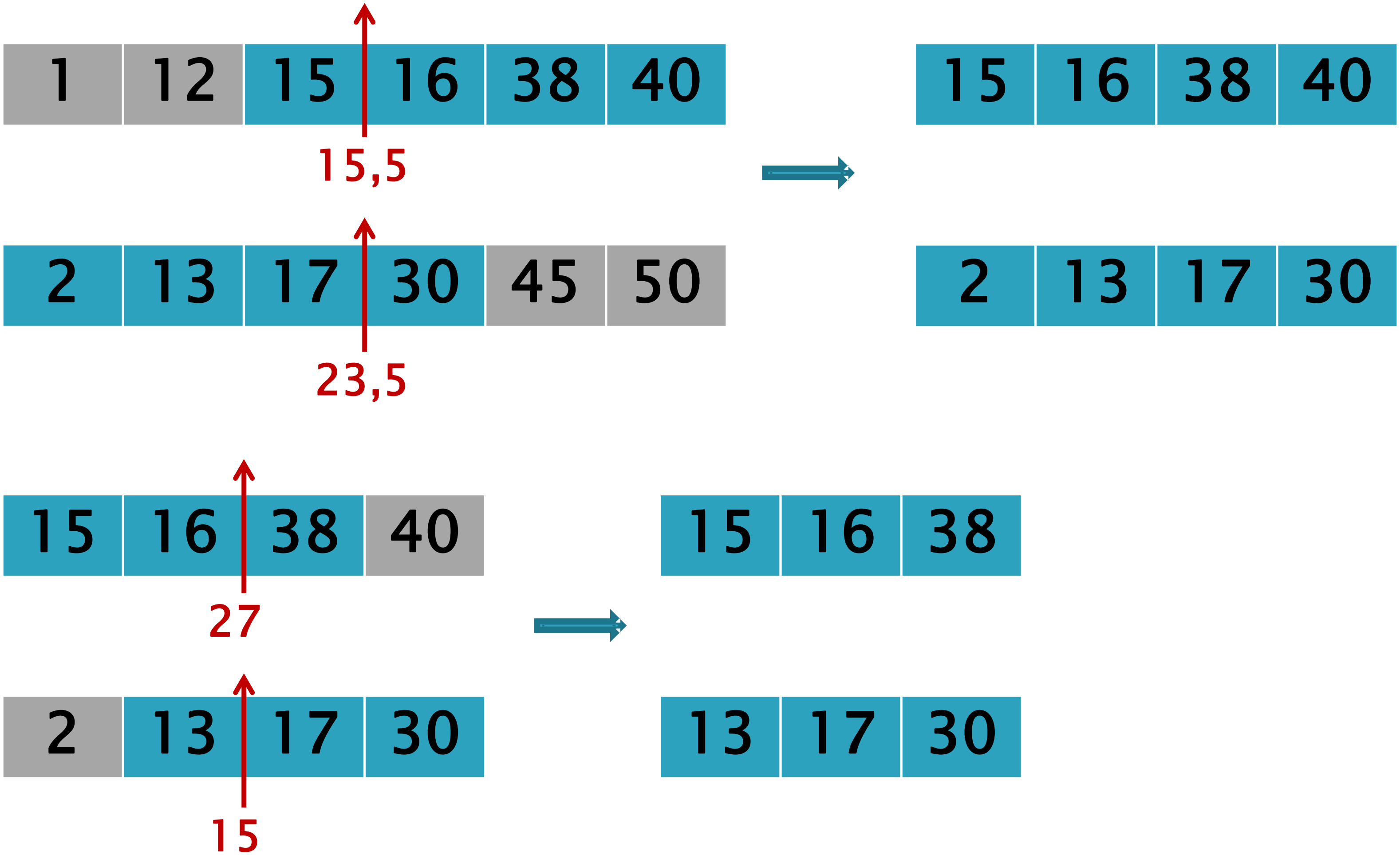
2	13	17	30	45	50


1 12 15 16 38 40
15,5
2 13 17 30 45 50
23,5

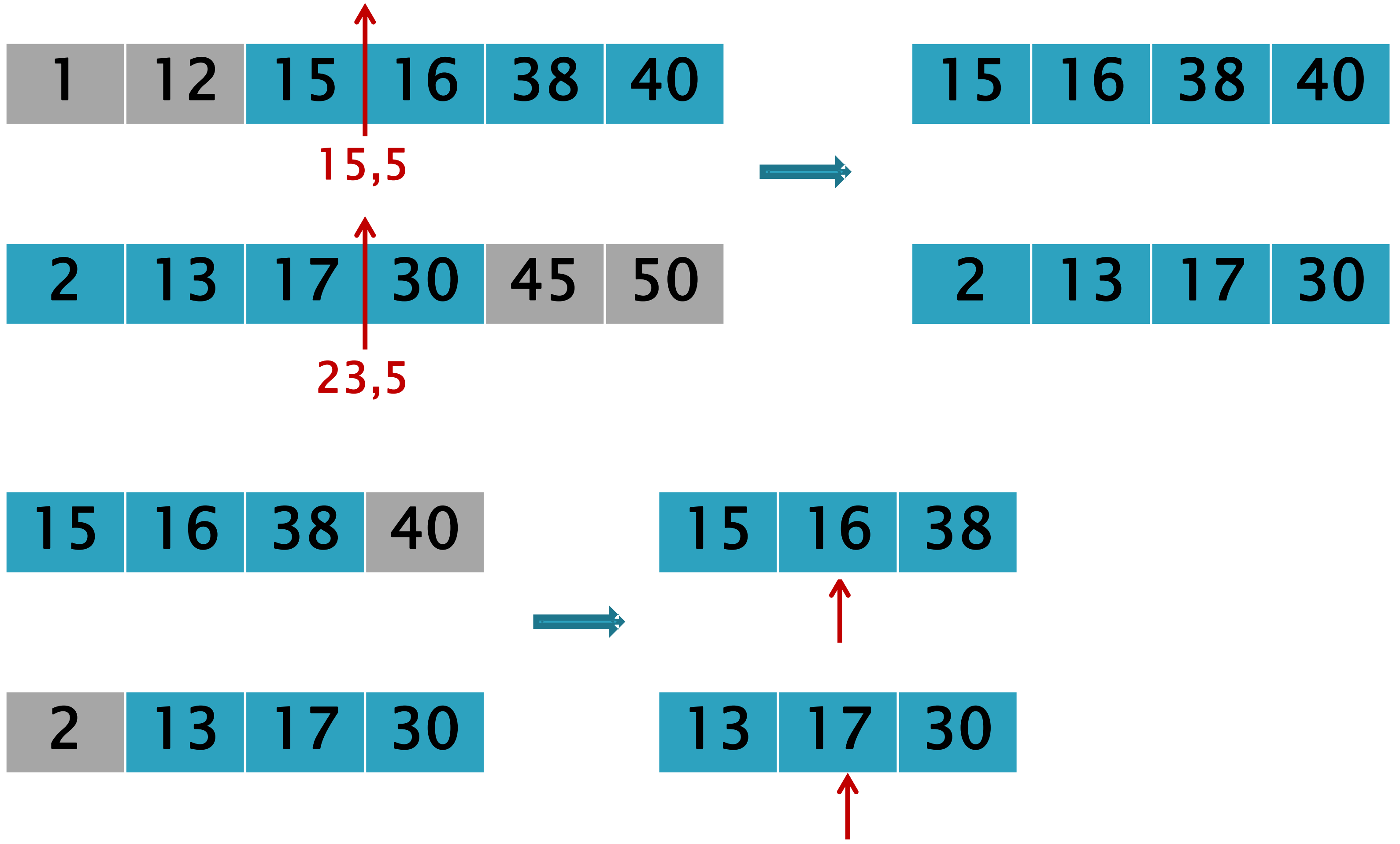

1 12 15 16 38 40
15,5
2 13 17 30 45 50
23,5
15 16 38 40
2 13 17 30



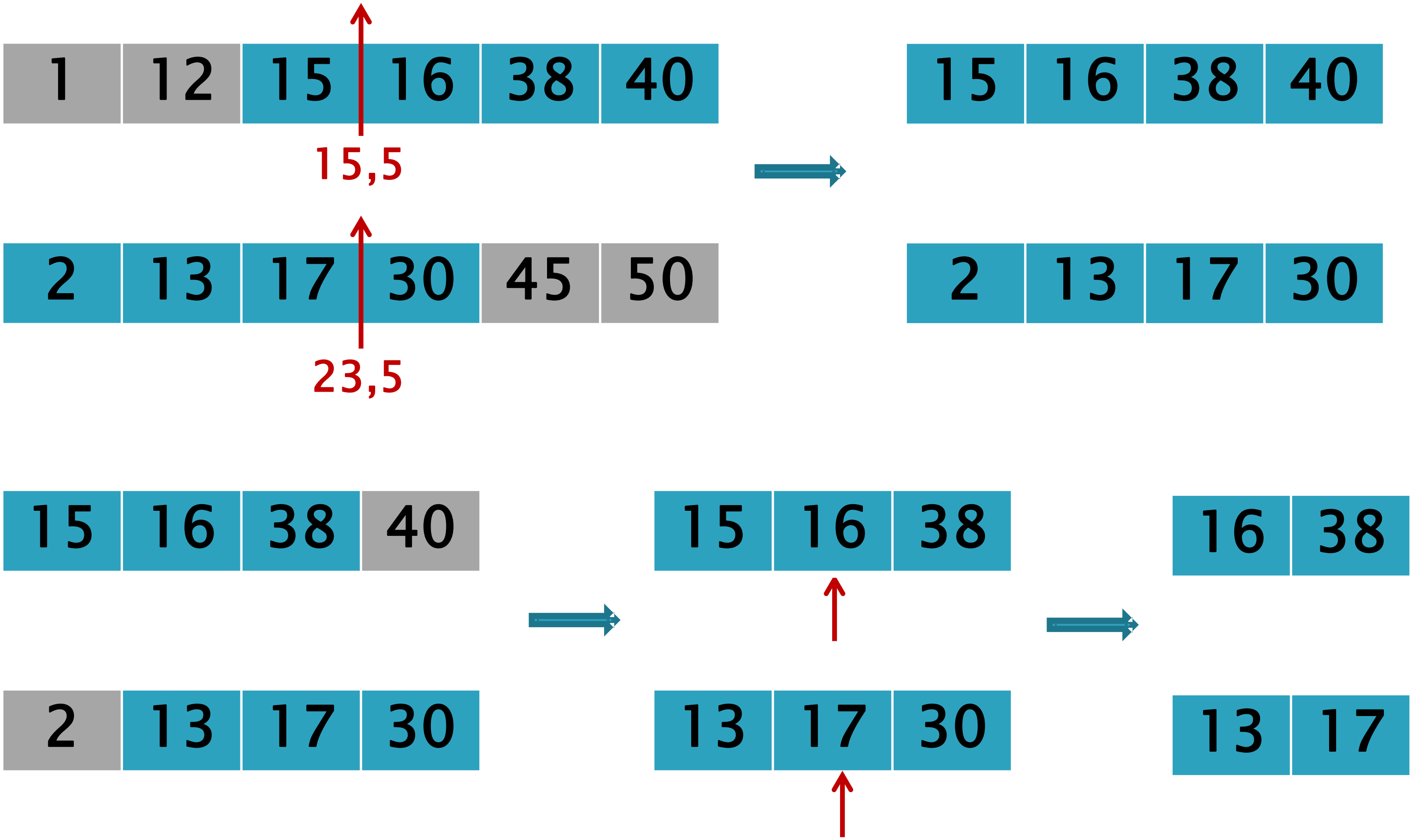
1 12 15 16 38 40
15,5
2 13 17 30 45 50
23,5
15 16 38 40
2 13 17 30
15 16 38 40
27
2 13 17 30
15

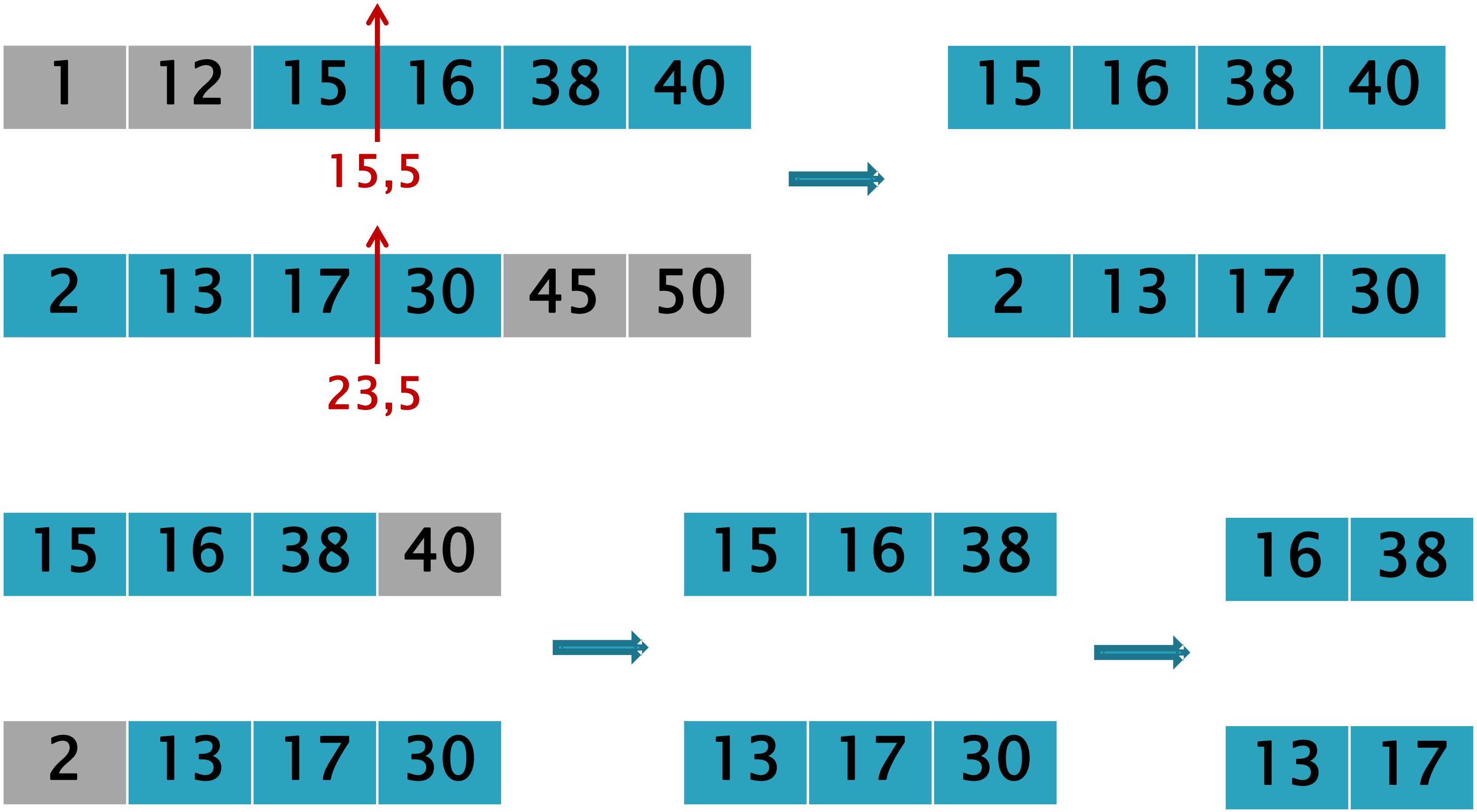


1 12 15 16 38 40
15,5
15 16 38 40
2 13 17 30 45 50
23,5
2 13 17 30
15 16 38 40
27
15 16 38
2 13 17 30
15
13 17 30



1 12 15 16 38 40
15,5
2 13 17 30 45 50
23,5
15 16 38 40
2 13 17 30
15 16 38 40
2 13 17 30
15 16 38
13 17 30


1 12 15 16 38 40
15,5
2 13 17 30 45 50
23,5
15 16 38 40
2 13 17 30
15 16 38 40
2 13 17 30
15 16 38
13 17 30
16 38
13 17



$$\textbf{Mediana} = \frac{\max\{13,16\}+\min\{17,38\}}{2} = \frac{16+17}{2}$$

$$= \mathbf{16{,}5}$$

Algoritm

```
double mediana(double[] v, int pv, int uv){
    int n=uv-pv+1;
    int m=(uv+pv)/2;
    if (n%2==0)
        return(v[m]+v[m+1])/2.0;
    else
        return v[m];
}
```

```
double calculMediana(int pa, int ua,int pb, int ub){
    int n = ua-pa+1;
    if (n<=2) //rezolv direct
      return (max(a[pa],b[pb])+min(a[ua],b[ub]))/2.0;
    double ma=mediana(a,pa,ua);//mediana lui a[pa..ua]
    double mb=mediana(b,pb,ub);//mediana lui b[pb..ub]
```

```
double calculMediana(int pa, int ua,int pb, int ub){
    int n = ua-pa+1;
    if (n<=2) //rezolv direct
      return (max(a[pa],b[pb])+min(a[ua],b[ub]))/2.0;

    double ma=mediana(a,pa,ua);//mediana lui a[pa..ua]
    double mb=mediana(b,pb,ub);//mediana lui b[pb..ub]

    if(ma==mb) return ma;
    if (ma>mb)
      return calculMediana(pa, pa+n/2, pb+(n-1)/2,ub);
    else
      return calculMediana(pa+(n-1)/2, ua, pb,pb+n/2);
}
```

```
double calculMediana(int pa, int ua,int pb, int ub){
    int n = ua-pa+1;
    if (n<=2) //rezolv direct
      return (max(a[pa],b[pb])+min(a[ua],b[ub]))/2.0;
    double ma=mediana(a,pa,ua);//mediana lui a[pa..ua]
    double mb=mediana(b,pb,ub);//mediana lui b[pb..ub]
    if(ma==mb) return ma;
    if (ma>mb)
      return calculMediana(pa, pa+n/2, pb+(n-1)/2,ub);
    else
      return calculMediana(pa+(n-1)/2, ua, pb,pb+n/2);
}

double calculMediana(){
     return calculMediana(0,n-1,0,n-1);
}
```

Mediana.cpp

Mediana a doi vectori sortați

- **Complexitate:** O(log n)

Mediana a doi vectori sortați

Mai este valabilă ideea pentru vectori de lungimi diferite (reducem problema la o problemă de acelaşi tip păstrând jumătate din fiecare vector)? – Temă laborator

Cele mai apropiate două puncte din plan

Cele mai apropiate puncte

Se dau n puncte în plan prin coordonatele lor.

Să se determine distanţa dintre cele mai apropiate două puncte.

Cele mai apropiate puncte

Se dau n puncte în plan prin coordonatele lor.

Să se determine distanţa dintre cele mai apropiate două puncte.

Aplicații:

- Geometria computațională
  - Computer vision
  - GIS – geographic information systems

Cele mai apropiate puncte

- **Varianta 1**: Considerăm toate perechile de puncte

  $O(n^2)$

Cele mai apropiate puncte

- **Varianta 2:** Divide et Impera **O(n log n) ?!!**

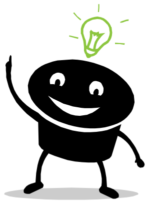
Cele mai apropiate puncte

- **Varianta 2:** Divide et Impera **O(n log n)**
- **Ipoteză**: Punctele au abscise distincte

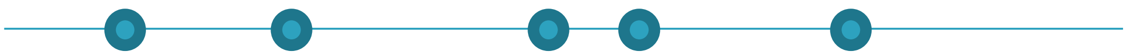
Cele mai apropiate puncte

Cum s-ar rezolva problema dacă punctele ar fi pe o dreaptă?

Cele mai apropiate puncte

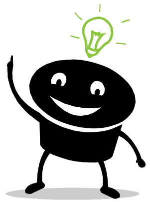


Idee: În cazul în care punctele se află pe o dreaptă, pentru a obține un algoritm mai eficient decât **O(n²)**, este utilă **sortarea punctelor**



Este suficient atunci să considerăm perechi de puncte adiacente **O(n log n)**

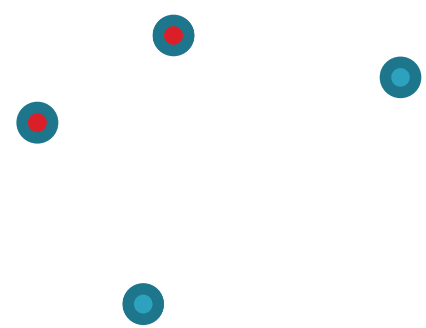
Cele mai apropiate puncte



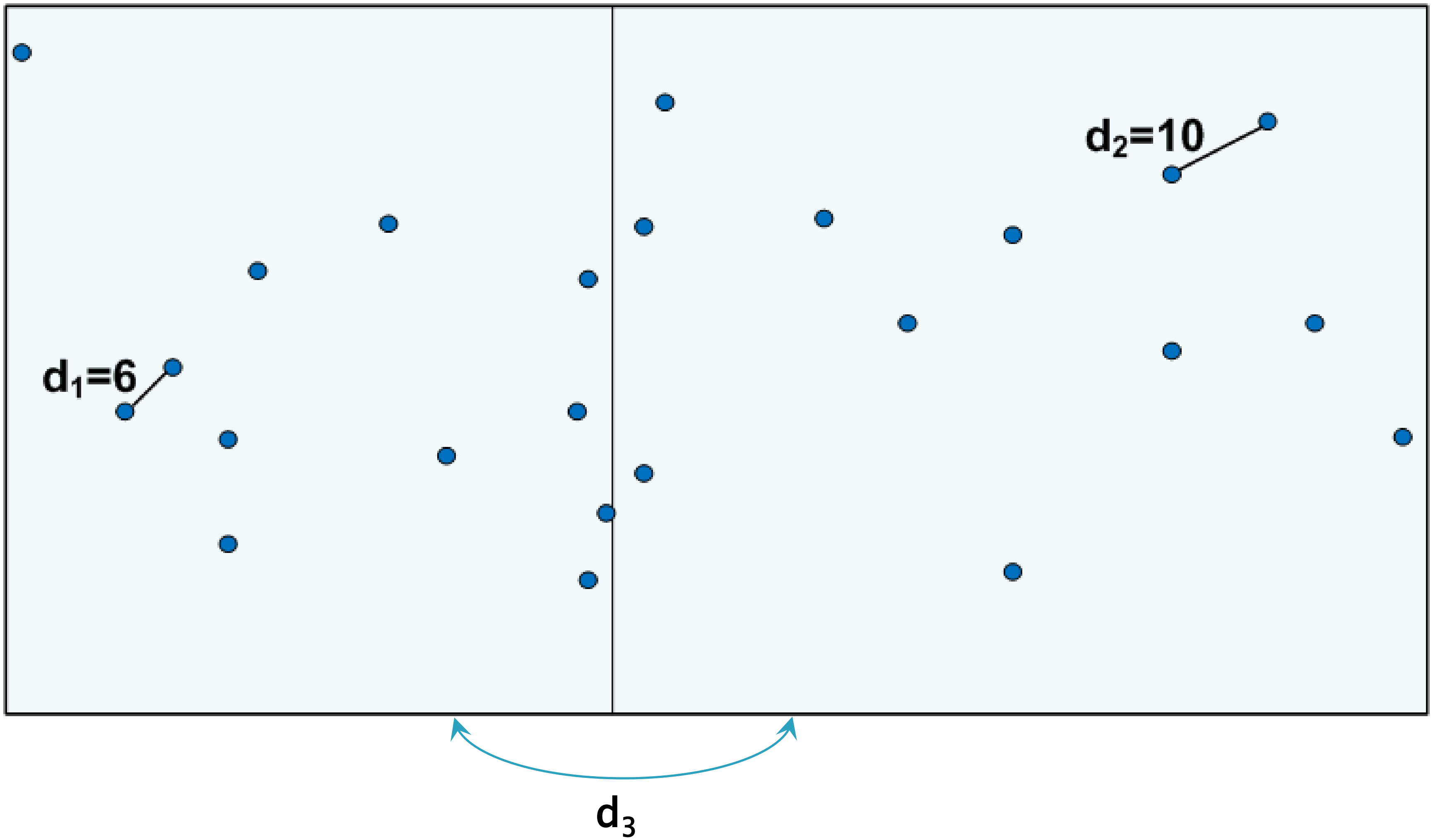
În plan ar putea fi util să sortăm vârfurile separat după abscisă și separat după ordonată, dar cele mai apropiate puncte nu sunt neapărat consecutive într-o astfel de ordonare

Cele mai apropiate puncte

În plan ar putea fi util să sortăm vârfurile separat după abscisă și separat după ordonată, dar cele mai apropiate puncte nu sunt neapărat consecutive într-o astfel de ordonare



Cele mai apropiate puncte



Cele mai apropiate puncte

- Împărţim mulţimea de puncte în două submulţimi cu n/2 puncte, **printr-o dreaptă verticală L**
-
-
-

Cele mai apropiate puncte

- Împărţim mulţimea de puncte în două submulţimi cu n/2 puncte, **printr-o dreaptă verticală L**
- Rezolvăm problema pentru cele două submulţimi şi obţinem distanţele minime $\mathbf{d_1}$, respectiv $\mathbf{d_2}$
-
-

Cele mai apropiate puncte

- Împărţim mulţimea de puncte în două submulţimi cu n/2 puncte, **printr-o dreaptă verticală L**
- Rezolvăm problema pentru cele două submulţimi şi obţinem distanţele minime $\mathbf{d_1}$, respectiv $\mathbf{d_2}$
- Determinăm distanţa minimă $\mathbf{d_3}$ între două puncte din submulţimi diferite
-

Cele mai apropiate puncte

- Împărţim mulţimea de puncte în două submulţimi cu n/2 puncte, **printr-o dreaptă verticală L**
- Rezolvăm problema pentru cele două submulţimi şi obţinem distanţele minime $\mathbf{d_1}$, respectiv $\mathbf{d_2}$
- Determinăm distanţa minimă $\mathbf{d_3}$ între două puncte din submulţimi diferite
- Returnăm minimul dintre distanţele $\mathbf{d_1}$, $\mathbf{d_2}$ şi $\mathbf{d_3}$

Cele mai apropiate puncte

Cum determinăm eficient distanţa minimă d_3 între două puncte din submulţimi diferite?

Cele mai apropiate puncte

Cum determinăm eficient distanţa minimă d_3 între două puncte din submulţimi diferite?

- Considerând fiecare pereche de puncte (i,j) cu i într-o submulțime și j în cealaltă - **ineficient**

(ca și la numărarea inversiunilor) ⇒ **$O(n^2)$**

Cele mai apropiate puncte

Cum determinăm eficient distanţa minimă d_3 între două puncte din submulţimi diferite?

- Considerând fiecare pereche de puncte (i,j) cu i într-o submulțime și j în cealaltă – **ineficient**

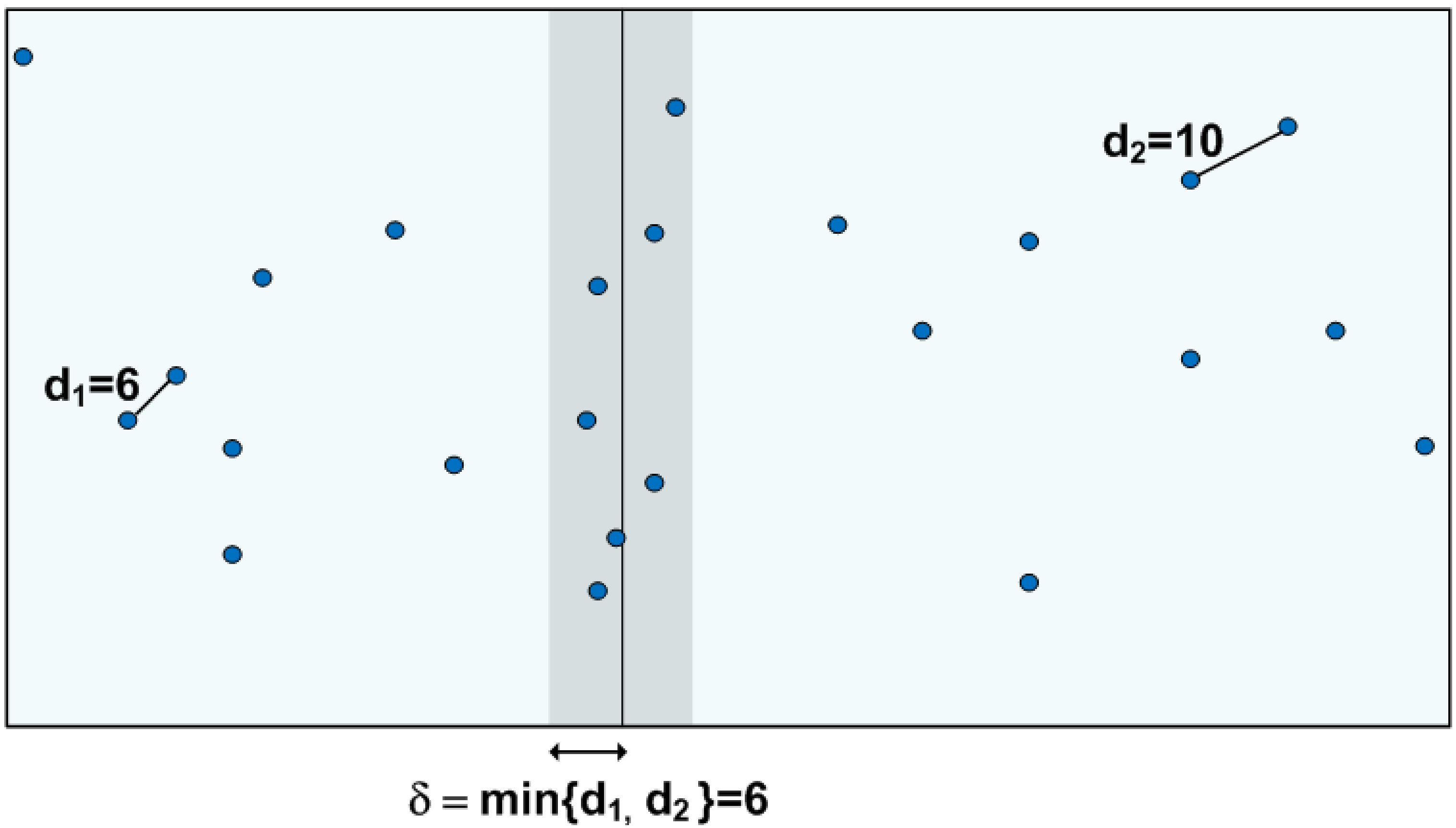
(ca și la numărarea inversiunilor) $\Rightarrow$ **O(n²)**

Trebuie să considerăm toate perechile de acest fel sau doar ***o parte***?

Cele mai apropiate puncte

Fie $\delta = \min\{d_1, d_2\}$.

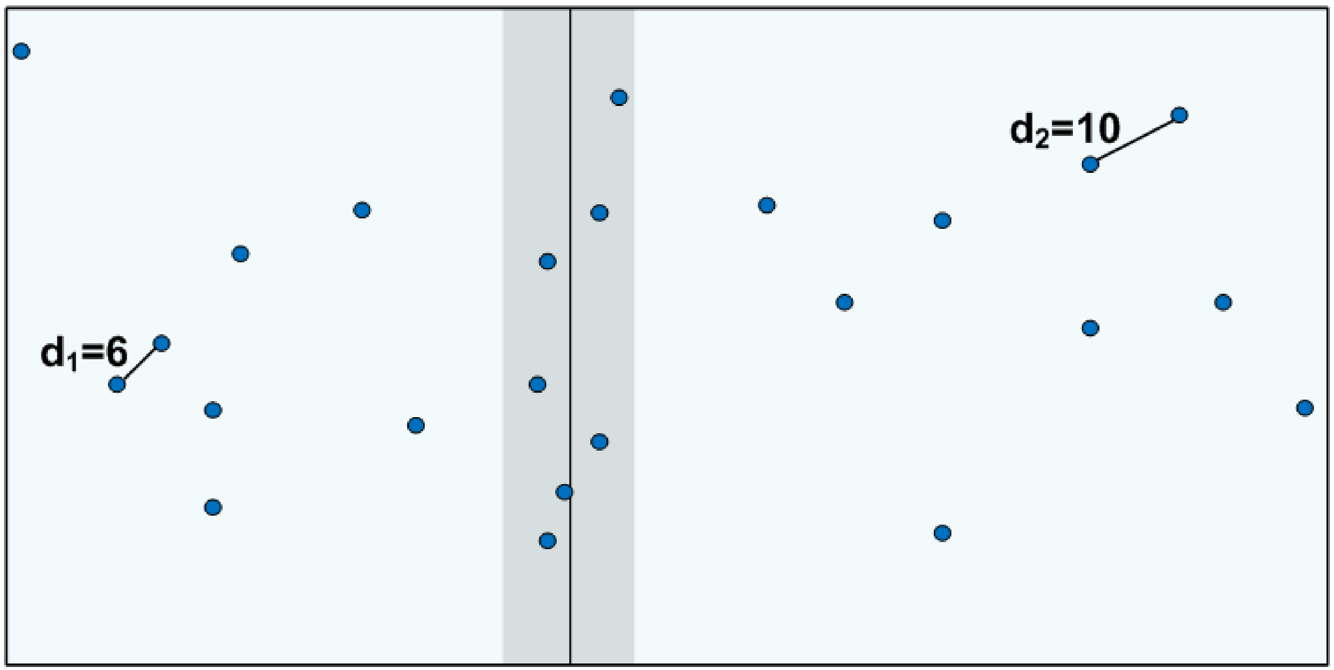
1. **Este suficient să considerăm puncte la distanţă cel mult δ de dreapta L**



Cele mai apropiate puncte

Fie $\delta = \min\{d_1, d_2\}$.

1. **Este suficient să considerăm puncte la distanţă cel mult δ de dreapta L**

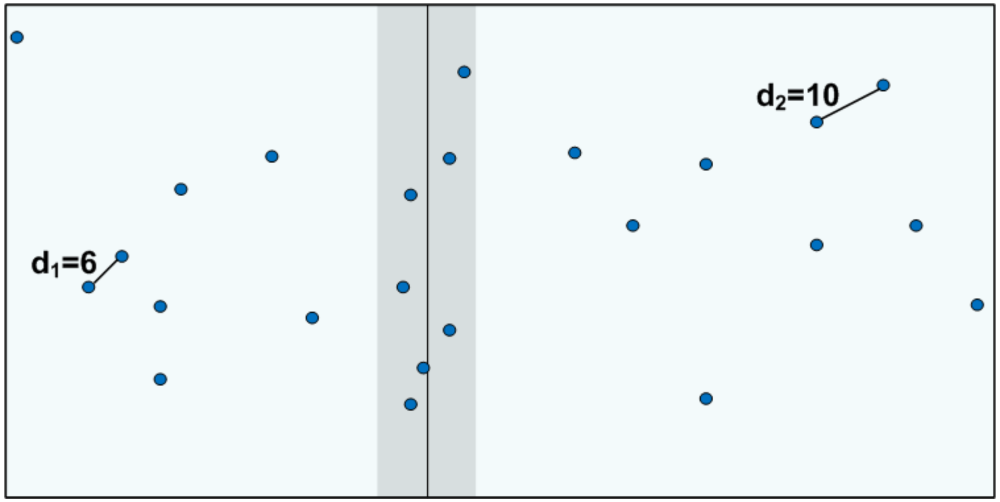


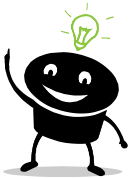
Dacă analizăm toate perechile de puncte din bandă – tot ineficient, pot fi multe puncte în bandă

Cele mai apropiate puncte

Fie $\delta = \min\{d_1, d_2\}$.

1. Este suficient să considerăm puncte la distanţă cel mult δ de dreapta L



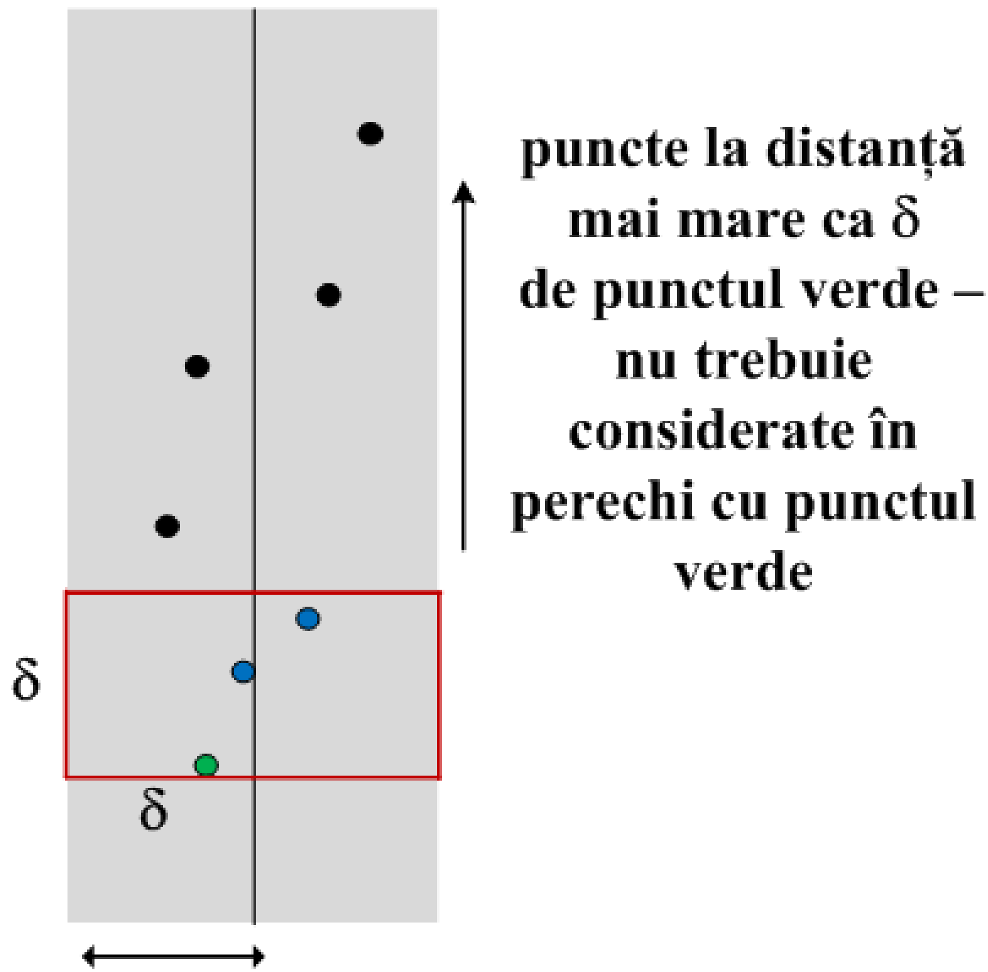


Prin banda impunem restricții pe orizontală (diferența dintre abscisele a două puncte considerate trebuie $\leq \delta$)

$\Rightarrow$ putem impune restricții și pe verticală (diferența dintre ordonatele a două puncte considerate trebuie $\leq \delta$)

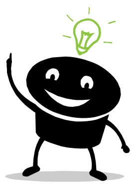
Cele mai apropiate puncte

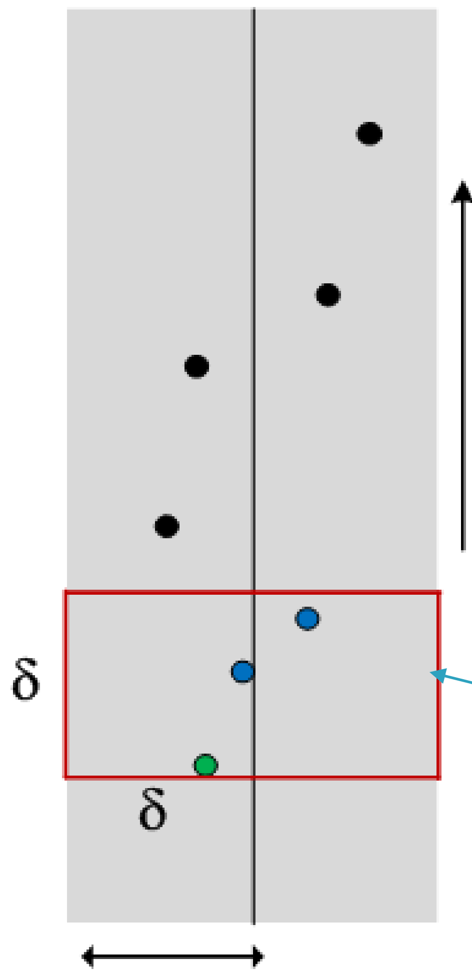
Fie $\delta = \min\{d_1, d_2\}$.



Cele mai apropiate puncte

Fie $\delta = \min\{d_1, d_2\}$.





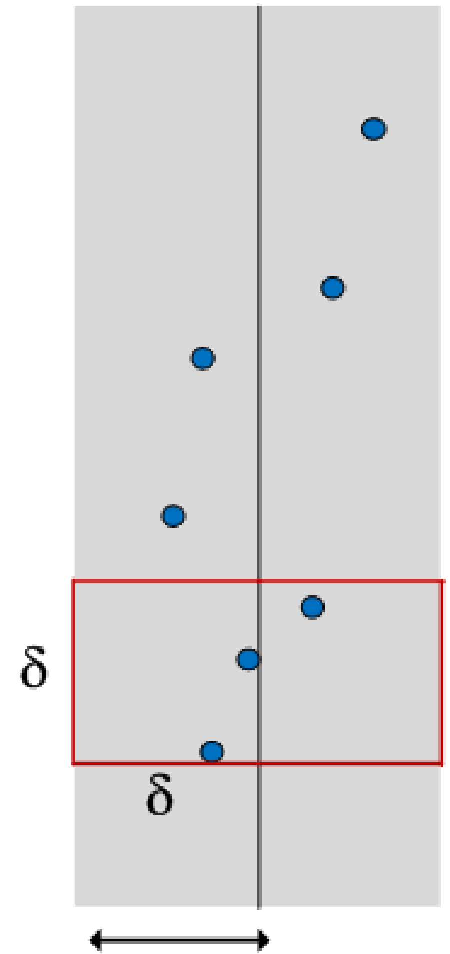
puncte la distanță mai mare ca δ de punctul verde – nu trebuie considerate în perechi cu punctul verde

Pentru punctul verde este suficient să considerăm doar perechi formate cu puncte din acest dreptunghi

Cele mai apropiate puncte

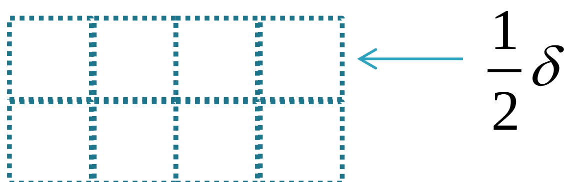
2. Două puncte din submulţimi diferite aflate la o distanţă mai mică decât δ se situează într-un dreptunghi de dimensiuni $\delta \times 2\delta$, centrat pe dreapta L

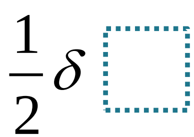
Cât de multe puncte se pot afla într-un astfel de dreptunghi?

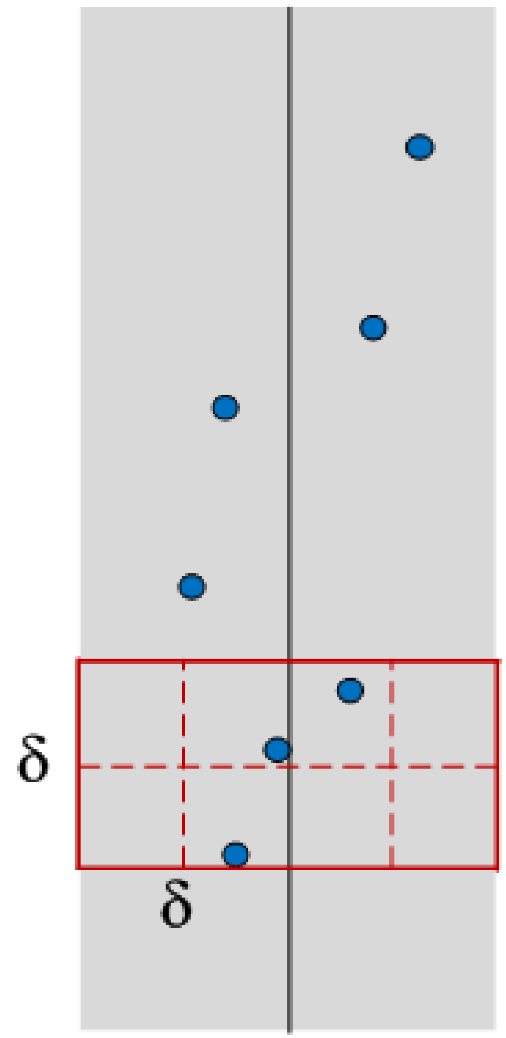


Cele mai apropiate puncte

3. Deoarece d_1, $d_2 \geq \delta$, într-un dreptunghi de dimensiuni $\delta \times 2\delta$, centrat pe dreapta L se pot afla maxim 8 puncte





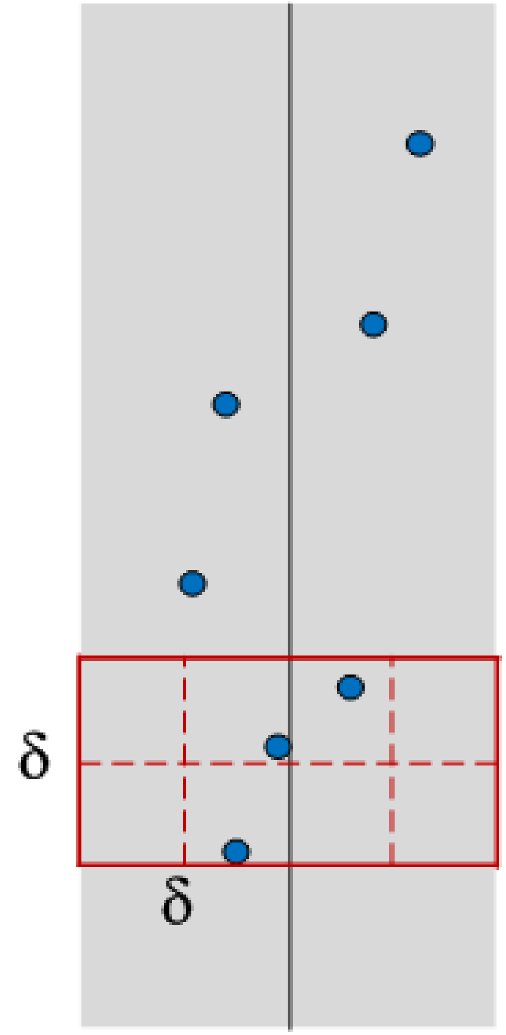


Un astfel de pătrat este inclus fie în partea stângă, fie în cea dreaptă.

Cele mai apropiate puncte

3. Deoarece d_1, $d_2 \geq \delta$, într-un dreptunghi de dimensiuni $\delta \times 2\delta$, centrat pe dreapta L se pot afla maxim 8 puncte

Consecinţă: **Pentru a calcula d_3 avem nevoie doar de 7 puncte care urmează după fiecare punct p din bandă, în şirul punctelor din bandă <u>sortate crescător după ordonată</u>**



Cele mai apropiate puncte

- Împărţim mulţimea de puncte în două submulţimi cu n/2 puncte, **printr-o dreaptă verticală L**
- Rezolvăm problema pentru cele două submulţimi şi obţinem distanţele minime $\mathbf{d_1}$, respectiv $\mathbf{d_2}$

Cele mai apropiate puncte

- Împărţim mulţimea de puncte în două submulţimi cu n/2 puncte, **printr-o dreaptă verticală L**
- Rezolvăm problema pentru cele două submulţimi şi obţinem distanţele minime $\mathbf{d_1}$, respectiv $\mathbf{d_2}$
- Determinăm distanţa minimă $\mathbf{d_3}$ între două puncte din submulţimi diferite, considerând doar puncte p din banda de lățime $\delta = \min\{\mathbf{d_1}, \mathbf{d_2}\}$ și perechile formate de p cu fiecare din cele 7 puncte din bandă care îi urmează în **ordonarea după coordonata y**
- Returnăm minimul dintre distanţele $\mathbf{d_1}$, $\mathbf{d_2}$ şi $\mathbf{d_3}$

Algoritm

Varianta 1

- X – mulţimea punctelor sortate după abscisă
- Y – mulţimea punctelor **sortate după ordonată**
- **DivImp**(st, dr, Y)

```
        //X[st..dr]
        //Y=punctele din X[st..dr] sortate dupa ordonata
```

- X – mulţimea punctelor sortate după abscisă
- Y – mulţimea punctelor **sortate după ordonată**
- **DivImp**(st, dr, Y) //X[st..dr]

```
dacă |X|<4 atunci
   d = min(perechi de elemente din X[st..dr])
altfel
   mij = (st+dr)/2
   //dreapta verticala trece prin X[mij].x
```

- X – mulţimea punctelor sortate după abscisă
- Y – mulţimea punctelor **sortate după ordonată**
- **DivImp**(st, dr, Y) //X[st..dr]

```
 dacă |X|<4 atunci
    d = min(perechi de elemente din X[st..dr])
 altfel
    mij = (st+dr)/2
    //dreapta verticala trece prin X[mij].x
    Calculeaza in O(n), n=dr-st+1=|Y| :
       SY= mulțimea punctelor din Y din stanga dreptei
            (sortate după ordonată)
          =punctele din Y cu coordonata x <= X[mij].x)
       DY= mulțimea punctelor din Y din dreapta
```

- X - mulţimea punctelor sortate după abscisă
- Y - mulţimea punctelor **sortate după ordonată**
- **DivImp**(st, dr, Y) //X[st..dr]

```
dacă |X|<4 atunci
   d = min(perechi de elemente din X[st..dr])
altfel
   mij = (st+dr)/2
   SY= mulțimea punctelor din Y ∩ X[st..mij] (stanga)
   DY= mulțimea punctelor din Y ∩ X[mij+1..dr] (dreapta)
   d1 = divimp(st, mij, SY) //X[st..mij]
   d2 = divimp(mij+1,dr, DY) //X[mij+1..dr]
   d = min{d1, d2}
```

- X – mulţimea punctelor sortate după abscisă
- Y – mulţimea punctelor **sortate după ordonată**
- **DivImp**(st, dr, Y) //X[st..dr]

```
  dacă |X|<4 atunci
     d = min(perechi de elemente din X[st..dr])
  altfel
     mij = (st+dr)/2
     SY= mulțimea punctelor din Y ∩ X[st..mij] (stanga)
     DY= mulțimea punctelor din Y ∩ X[mij+1..dr] (dreapta)
     d1 = divimp(st, mij, SY) //X[st..mij]
     d2 = divimp(mij+1, dr, DY) //X[mij+1..dr]
     d = min{d1, d2}
     LY= Y ∩ banda (cu abscisa la distanta ≤ d de X[mij].x)
```

- X – mulţimea punctelor sortate după abscisă
- Y – mulţimea punctelor **sortate după ordonată**
- **DivImp**(st, dr, Y) //X[st..dr]

```
  dacă |X|<4 atunci
     d = min(perechi de elemente din X[st..dr])
  altfel
     mij = (st+dr)/2
     SY= mulțimea punctelor din Y ∩ X[st..mij] (stanga)
     DY= mulțimea punctelor din Y ∩ X[mij+1..dr] (dreapta)
     d1 = divimp(st, mij, SY) //X[st..mij]
     d2 = divimp(mij+1, dr, DY) //X[mij+1..dr]
     d = min{d1, d2}
     LY= Y ∩ banda (cu abscisa la distanta ≤ d de X[mid].x)
     calculează d3 considerând punctele p din LY si
       perechile formate de p cu fiecare din cele 7
       puncte care îi urmează în LY
     d = min{d, d3}
     return d
```

Varianta 2

Cele mai apropiate puncte

Idee – Pentru a nu sorta de la început sau în fiecare etapă punctele crescător după ordonată se pot **interclasa** şirurile deja sortate (**!** în etapa de divide) după ordonată ale punctelor din cele două submulţimi

– Se poate folosi un singur vector

- X – mulţimea punctelor sortate după abscisă
- Y=X – (sortate **tot dupa abscisa**)
- **DivImp**(&X, &Y, st, dr)

```
    // X[st..dr]
    // Y -devin sortate după ordonată
    //Obs: X[st..dr]=Y[st..dr] ca multimi de puncte
```

- X – mulţimea punctelor sortate după abscisă
- Y=X – (sortate tot dupa abscisa)
- **DivImp**(&X, &Y, st, dr)**//Y -devin sortate după ordonată**

```
dacă |X|<4 atunci
   sorteaza dupa ordonata (Y ,st, dr)
   d = min(perechi de elemente din X[st..dr])
```

- X – mulţimea punctelor sortate după abscisă
- Y=X
- **DivImp**(&X, &Y, st, dr)

```
  dacă |X|<4 atunci
     sorteaza dupa ordonata (Y ,st, dr)
     d = min(perechi de elemente din X[st..dr])
  altfel
     mij = (st+dr)/2
     d1 = divimp(X, Y, st, mij)
     d2 = divimp(X, Y, mij+1,dr)
     d = min{d1, d2}
```

- X - mulţimea punctelor sortate după abscisă
- Y=X
- **DivImp**(&X, &Y, st, dr)

```
  dacă |X|<4 atunci
    sorteaza dupa ordonata (Y ,st, dr)
    d = min(perechi de elemente din X[st..dr])
  altfel
    mij = (st+dr)/2
    d1 = divimp(X, Y, st, mij)
   d2 = divimp(X, Y, mij+1,dr)
    d = min{d1, d2}
    interclaseaza(Y, st, mij, dr) //sortare pe Oy
```

- X - mulţimea punctelor sortate după abscisă
- Y=X
- **DivImp**(&X, &Y, st, dr)

```
  dacă |X|<4 atunci
    sorteaza dupa ordonata (Y ,st, dr)
    d = min(perechi de elemente din X[st..dr])
  altfel
    mij = (st+dr)/2
    d1 = divimp(X, Y, st, mij)
    d2 = divimp(X, Y, mij+1,dr)
    d = min{d1, d2}
    interclaseaza(Y, st, mij, dr)
    LY = Y ∩ banda (cu abscisa la distanta ≤ d de X[mid].x)
    calculează d3 considerând punctele p din LY si
      perechile formate de p cu fiecare din cele 7
      puncte care îi urmează în LY
    d = min{d, d3}
    return d
```

Cele mai apropiate puncte

- **Complexitate:** $O(n \log n)$

$$T(n) = 2T(n/2)+cn, \text{ pentru } n>1$$

Cele mai apropiate puncte

- **Unde a intervenit ipoteza** “Punctele au abscise distincte”?

- Se poate renunţa la ea?

Înmulțirea a două numere

Înmulțirea a două numere

Se dau două numere cu n cifre, x și y.

Propuneți un algoritm pentru calculul produsului xy cu un număr cât mai mic de operații elementare (adunări și înmulțiri de cifre)

Înmulțirea a două numere

- **Algoritmul clasic**

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
 & & & 9 & 2 & 3 & \times \\
 & & & 5 & 1 & 2 & \\
\hline
 & & 1 & 8 & 4 & 6 & \\
 & & 9 & 2 & 3 & & \\
4 & 6 & 1 & 5 & & & \\
\hline
4 & 7 & 2 & 5 & 7 & 6 &
\end{array}
$$

n

$\leq 2n$

$O(n^2)$

Înmulțirea a două numere

- Divide et Impera
  - $x = a \cdot 10^{n/2} + b$
  - $y = c \cdot 10^{n/2} + d$
  - $xy = ac \cdot 10^{n} + (ad + bc)\ 10^{n/2} + bd$

Înmulțirea a două numere

- Divide et Impera
  - $x = a \cdot 10^{n/2} + b$
  - $y = c \cdot 10^{n/2} + d$
  - $xy = ac \cdot 10^{n} + (ad + bc)\ 10^{n/2} + bd$

4 subprobleme de același tip

$$T(n) = 4T(n/2) + cn = ?$$

Înmulțirea a două numere

- Divide et Impera
  - $x = a \cdot 10^{n/2} + b$
  - $y = c \cdot 10^{n/2} + d$
  - $xy = ac \cdot 10^{n} + (ad + bc)\ 10^{n/2} + bd$

4 subprobleme de același tip

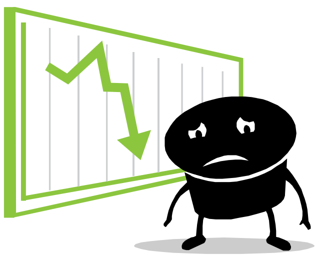
$$T(n) = 4T(n/2) + cn = O(n^2)$$

Înmulțirea a două numere

- Divide et Impera
  - $x = a \cdot 10^{n/2} + b$
  - $y = c \cdot 10^{n/2} + d$
  - $xy = ac \cdot 10^{n} + (ad + bc)\, 10^{n/2} + bd$

4 subprobleme de același tip

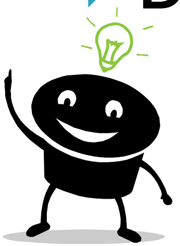
$$T(n) = 4T(n/2) + cn = O(n^2)$$



tot $O(n^2)$

Înmulțirea a două numere

- Divide et Impera – Algoritmul lui KARATSUBA



  - Idee: Încercăm să reducem la mai puține subprobleme

Calculăm produsul

p = (a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd

Avem

- **ad + bc = p – ac – bd**

Înmulțirea a două numere

- **Divide et Impera**

  Amintim

  - $xy = ac \cdot 10^n + (ad + bc)\ 10^{n/2} + bd$

  Este suficient să calculăm

  1. $p = (a+b)(c+d)$
  2. ac
  3. bd

Înmulțirea a două numere

- **Divide et Impera**

  Amintim

  - $xy = ac \cdot 10^n + (ad + bc)\ 10^{n/2} + bd$

  Este suficient să calculăm

  1. $p = (a+b)(c+d)$
  2. ac
  3. bd

  $xy = ac \cdot 10^n + (p-ac-bd)\ 10^{n/2} + bd$

  Combinarea rezultatelor: **O(n)**

Înmulțirea a două numere

- **Divide et Impera**

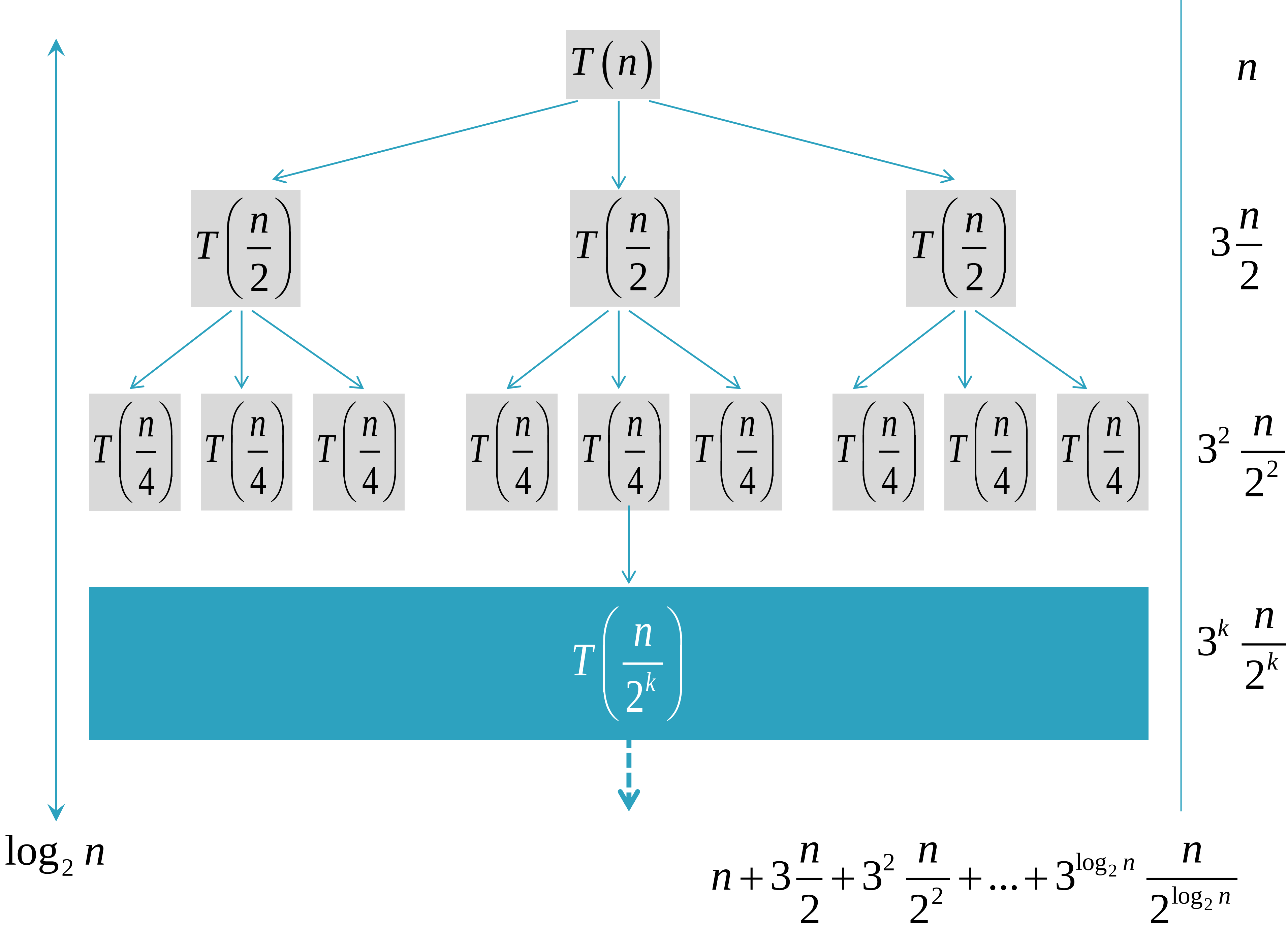
  Amintim

  - $xy = ac \cdot 10^n + (ad + bc)\ 10^{n/2} + bd$

  Este suficient să calculăm

  1. $p = (a+b)(c+d)$
  2. ac
  3. bd

$$T(n) = 3T(n/2) + cn \quad \Rightarrow \quad ?$$



$T(n)$
$T\left(\frac{n}{2}\right)$
$T\left(\frac{n}{4}\right)$
$T\left(\frac{n}{2^k}\right)$
n
$3\frac{n}{2}$
$3^2\frac{n}{2^2}$
$3^k\frac{n}{2^k}$
$\log_2 n$
$n+3\frac{n}{2}+3^2\frac{n}{2^2}+\ldots+3^{\log_2 n}\frac{n}{2^{\log_2 n}}$

- $$n+3\frac{n}{2}+3^2\frac{n}{2^2}+\ldots+3^{\log_2 n}\frac{n}{2^{\log_2 n}}=n\sum_{k=0}^{\log_2 n}\left(\frac{3}{2}\right)^k$$
- $$O\left(n\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n}\right)$$
- $$\left(\frac{3}{2}\right)^{\log_2 n}=\frac{3^{\log_2 n}}{n}$$
- $$T(n)=O(3^{\log_2 n})=O(n^{\log_2 3}),\quad \log_2 3\simeq 1,59$$

Înmulțirea a două matrice pătratice

Înmulțirea a două matrice

Se dau două matrice pătratice de dimensiune n, X și Y. Propuneți un algoritm pentru calculul produsului XY cu un număr cât mai mic de operații elementare (adunări și înmulțiri de numere)

Înmulțirea a două matrice

- **Algoritmul clasic – $O(n^3)$**

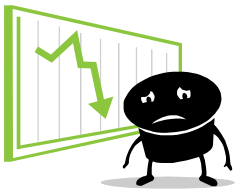
Înmulțirea a două matrice

- **Divide et Impera**
  - $$X = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \qquad Y = \left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right)$$
  - $$XY = \left(\begin{array}{c|c} AE + BC & AF + BH \\ \hline CE + DG & CF + DH \end{array}\right)$$

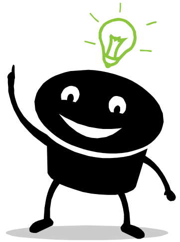
Înmulțirea a două matrice

- Divide et Impera
  - $$X = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \qquad Y = \left(\begin{array}{c|c} E & F \\ \hline G & H \end{array}\right)$$
  - $$XY = \left(\begin{array}{c|c} AE + BC & AF + BH \\ \hline CE + DG & CF + DH \end{array}\right)$$

$$\mathtt{T(n)\ =\ 8T(n/2)\ +\ cn^2\ \ =\ O(n^3)}$$



Înmulțirea a două MATRICE



- Divide et Impera – STRASSEN
  - **Idee:** Încercăm să reducem la mai puține subprobleme

Calculăm produsele

- $p_1 = A(F-H)$
- $p_2 = (A+B)H$
- $p_3 = (C+D)E$
- $p_4 = D(G-E)$
- $p_5 = (A+D)(E+H)$
- $p_6 = (B-D)(G+H)$
- $p_7 = (A-C)(E+F)$

Înmulțirea a două matrice

$$XY = \left(\begin{array}{c|c} p_5 + p_4 - p_2 + p_6 & p_1 + p_2 \\ \hline p_3 + p_4 & p_1 + p_5 - p_3 - p_7 \end{array}\right)$$

T(n) = 7T(n/2) + cn^2 = O(n^3)

$$T(n) = O(n^{\log_2 7}), \quad \log_2 7 \cong 2,8074$$

Divide et Impera

- aplicativitate în calculul paralel