Alg. Grafuri   10.05.2019
Curs 9

Rețele de transport. Flux și tăieturi în R.T.

graf orientat $G = (V, E)$

Rețea de transport $N = (S, T, I, E, c)$

$S \Rightarrow$ mulțimea nodurilor sursă (source nodes)
$T =$ mulț. —"— destinație (sink nodes)
$I =$ —"— intermediare
$E =$ —"— arcelor
$c: E \to \mathbb{N}$ funcția de capacitate

Ipoteza de lucru

$S = \{s\}$
$T = \{t\}$
~~Nu există arc cu ext.~~
Din s doar pleacă arce, în t doar intră arce.
Toate nodurile intermediare din $G(N)$ (graful rețelei) sunt accesibile din s și coaccesibile din t.

$f: E \to \mathbb{N}$ s.n. flux dacă îndeplinește urm. prop:
1) mărginire: $0 \le f(e) \le c(e), \forall e \in E$.
2) conservare: $\underbrace{\sum_{\substack{v \in I \\ vy \in E}} f(vy)}_{f^+(v)} = \underbrace{\sum_{\substack{v \in I \\ xv \in E}} f(xv)}_{f^-(v)}$

Valoarea unui flux:
$val(f) = f^+(S) = f^+(s)$.

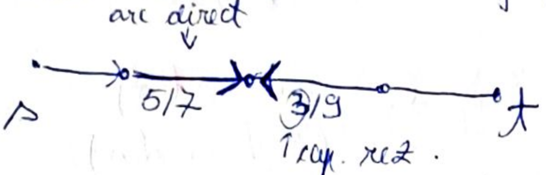
Fie X, Y două mulț. disj. de noduri
$f(XY) = \sum_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} f(xy)$; $\bar{X} = V \setminus X$.

$f(X, \bar{X}) = f^+(X)$; $f(\bar{X}, X) = f^-(X)$.

Un lanț $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ s.n. s-t lanț în N dacă $v_1 = s$, $v_k = t$ și $(v_i, v_{i+1}) \in E$ sau $(v_{i+1}, v_i) \in E$, $\forall 1 \le i < k$

Pt simplitate, toate s-t lanțurile vor fi elementare.

Fie P un s-t lanț. Definim capacitatea reziduală a unui arc din P. Fie f flux în N.



$$i_P(e) = \begin{cases} c(e) - f(e), & \text{dacă } e = \text{arc direct} \\ f(e), & \text{dacă } e = \text{arc invers} \end{cases} \quad \text{în } P.$$

$i_P(e)$ = cât flux mai are loc pe arcul e

Capacitatea reziduală a unui s-t lanț P

$i(P) = \min\{ i_P(e) \mid e \in P \}$ - cât flux mai are loc în P.

Def. Un s-t lanț P s.n. nesaturat dacă $i(P) > 0$.

~~Un~~

<u>Obs</u>: Fie ~~f flux~~.
Fie P un s-t lanț nesaturat. Atunci, revizuind fluxul de-a lungul lui P, obținem un flux f', cu $val(f') > val(f)$.

Revizuirea unui flux f de-a lungul unui s-t lanț nesaturat P.

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + i(P), & e = \text{arc direct în } P \\ f(e) - i(P), & e = \text{arc invers} \\ f(e), & e \notin P \end{cases}$$

f' = flux?

1) mărginire

Dacă $e \notin P \Rightarrow 0 \le f'(e) = f(e) \le c(e)$

Dacă e = arc direct în P $\quad 0 \le \underset{\geq 0}{f(e)} + \underset{\geq 1}{i(P)} \le c(e)$

$i(P) \le i_P(e) = c(e) - f(e)$

$f(e) + i(P) \le \cancel{f(e)} + c(e) - \cancel{f(e)} = c(e)$

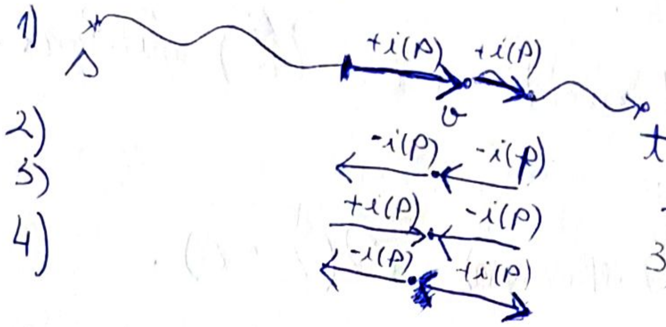
Dacă e = arc invers:

$0 \le f(e) - i(P) \le c(e)$

$i(P) \le i(e) = f(e)$

$f(e) - i(P) \ge f(e) - f(e) = 0$

$\forall v \in J \to$ 2) conservare: $f'^{+}(v) = f'^{-}(v)$



1) $\begin{cases} f'^{+}(v) = f^{+}(v) + i(P) \\ f'^{-}(v) = f^{-}(v) + i(P) \end{cases}$

2) $f'^{+}(v) = f^{+}(v) - i(P)$

3) $\begin{cases} f'^{-}(v) = f^{-}(v) + i(P) - i(P) \\ f'^{+}(v) = f^{+}(v) \end{cases}$

4)

<u>Concluzie</u>:

După operația de revizuire, f' este flux dacă f era flux.

$val(f') = val(f) + \overbrace{i(P)}^{\ge 1} \ge val(f) + 1 > val(f)$.

$L = \sum_{sv} c(sv)$ (suma capacităților arcelor care ies din s).

Nu se pot face mai mult de L revizuiri.

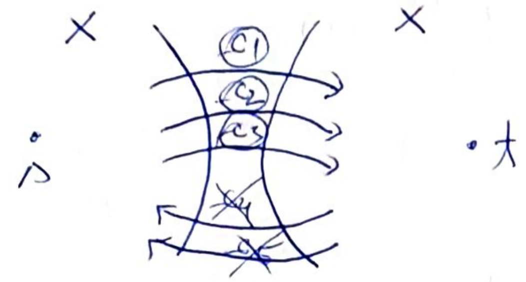
Obiective:

1. Să găsim un flux f^*, a.î. $val(f^*)$ să fie maxim.

Fie $X \subsetneq V$, $K = (X, \bar{X})$ s.n. s-t tăietură dacă $s \in X$ și $t \in \bar{X}$.

$(t \notin X)$

Capacitatea unei tăieturi: $C(K) = \sum_{\substack{x \in X \\ y \in \bar{X}}} f(xy)$



$C(\bar{X}, X) = c_4 + c_5$

$C(X, \bar{X}) = c_1 + c_2 + c_3$.

2) Să găsim o tăietură $\tilde{K}$ a.î. $c(\tilde{K})$ minimă.

3) $val(f^*) = c(\tilde{K})$.

<u>Pseudocod</u> (Ford Fulkerson) $O(L * E)$.

Input: o rețea $N = (\{s\}, \{t\}, I, E, c)$ și un flux f.
(ex: $f(e) = 0$, $\forall e \in E$ - cel mai simplu flux).
Output: f^*, $\tilde{K}$.

cât timp $\exists$ un s-t lanț nesaturat în N $O(L)$
 fie P un s-t lanț nesaturat $O(E)$
 revizuiesc fluxul de-a lungul lui P $O(E)$

fie X mulțimea nodurilor accesibile din s
return f, $K = (X, \bar{X})$.

$K = (X, \bar{X})$ obținut ca output este s-t tăietură?
$s \in X$? ✓
$t \notin X$? ✓ - dacă $t \in X$, atunci $\exists$ un s-t lanț nesaturat

FF + BFS => Edmonds Karp : $O(VE^2)$

Corectitudine:

1) $\nexists$ niciun s-t lanț nesaturat
2) K - tăietură de capacitate minimă
3) f = flux maxim

Lemă

Fie f flux și $K = (X, \bar{X})$ s-t tăietură.

$val(f) = f^+(X) - f^-(X)$

$$= \sum_{\substack{x\in X\\ y\in V}} f(x,y) - \sum_{\substack{x\in X\\ x'\in X}} f(x x') - \Big(\sum_{\substack{x\in V\\ y\in \bar{X}}} f(yx) - \sum_{\substack{y'\in \bar{X}\\ y\in \bar{X}}} f(y y')\Big)$$

$$= \underbrace{\sum_{x\in V} f(s,y)}_{val(f)} + \underbrace{\sum_{\substack{x\in X\cap I\\ y\in V}} f(xy) - \sum_{\substack{x\in X\\ x'\in X\cap I}} f(x x')}_{\sum} - \Big(\sum_{\substack{x\in V\\ y\in \bar{X}}} f(yx) - \sum_{y\in\bar{X}} (t,y) - \sum_{\substack{y'\in \bar{X}\cap I\\ y\in \bar{X}}} f(y y')\Big).$$

$$\sum_{\substack{x\in X\\ y\notin X}} f(xy) - \sum_{\substack{x\in X\\ y\notin X}} f(yx) = \sum_{\substack{x\in X\\ y\in V}} f(xy) - \sum_{\substack{x\in X\\ y\in \bar{X}}} f(xy) - \Big(\sum_{\substack{x\in X\\ y\in V}} f(yx) - \sum_{\substack{x\in X\\ y\in \bar{X}}} f(yx)\Big) = \sum_{y\in V} f(sy) + \Big(\sum_{\substack{x\in X\cap I\\ y\in V}} f(xy) - \sum_{\substack{x\in X\cap I\\ y\in V}} f(yx)\Big)$$

$= 0$

$\cancel{f^+(X\cap I)} \,/\, \cancel{- f^-}$

$= val(f)$.

$\le C(X, \bar{X})$

$K = (X, \bar{X}) \quad val(f) = f^+(X) - f^-(X)$

$val(f) \le C(X, \bar{X}), \ \forall\ K = (X, \bar{X})$ s-t tăieturi

$val(f) = C(X, \bar{X})$