# Chapter 3

# Curs 3

## 3.1 Variabile aleatoare

Considerăm $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un spaţiu de probabilitate fixat.

Reamintim că am notat prin $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\sigma$-algebra mulţimilor Boreliene din $\mathbb{R}$, cea mai mică $\sigma$-algebră pe $\mathbb{R}$ ce conţine familia de intervale

$$\mathcal{S} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R},\, a < b\}.$$

Se poate arăta că inlocuind $\mathcal{S}$ prin familia tuturor intervalelor de un anumit tip (mărginite sau nemărginite, inchise sau deschise), spre exemplu

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\},$$

sau prin familia tuturor mulţimilor deschise din $\mathbb{R}$, se obţine aceeaşi familie $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ a mulţimilor Boreliene din $\mathbb{R}$.

În mod similar, înlocuind pe $\mathcal{S}$ prin

$$\mathcal{S} = \{(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n) : a_i, b_i \in \mathbb{R},\, a_i < b_i, i = 1, \ldots, n\},$$

$\sigma$-algebra generată de $\mathcal{S}$ se numeşte $\sigma$-algebra mulţimilor Boreliene din $\mathbb{R}^n$, şi se notează $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Ca şi în cazul $n = 1$, înlocuind pe $\mathcal{S}$ prin familia tuturor dreptunghiurilor de un anumit tip (produse carteziene de intervale mărginite sau nemărginite, închise sau deschise), sau prin familia tuturor mulţimilor deschise din $\mathbb{R}^n$, se obţine aceeaşi $\sigma$-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ a mulţimilor Boreliene din $\mathbb{R}^n$.

Reamintim de asemenea, că o funcţie $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ $(m, n \geq 1)$ se numeşte măsurabilă dacă

$$f^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R}^m : f(x) \in B\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$$

oricare ar fi mulţimea Boreliană $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Înlocuind în această definiţie spaţiul măsurabil $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}(\mathbb{R}^m))$ prin spaţiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{F})$, se obţine noţiunea de variabilă aleatoare:

**Definiţia 3.1.1** *Numim variabilă aleatoare vectorială o funcţie* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *(*$n \geq 1$*) cu proprietatea că*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F},$$

*pentru orice mulţime Boreliană* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*.*

*În cazul particular* $n = 1$*, spunem că* $X$ *este o variabilă aleatoare reală, iar atunci când nu există pericolul confuziei, vom spune simplu că* $X$ *este o variabilă aleatoare (abreviat v.a.).*

Următoarea teoremă este utilă pentru a demonstra că o funcţie $X : \nleq \to \mathbb{R}^n$ este o variabilă aleatoare:

**Teorema 3.1.2** *Dacă* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *verifică*

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$$

*oricare ar fi* $B \in \mathcal{S}$ *şi* $\sigma$*-algebra generată de* $\mathcal{S}$ *este* $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*, atunci* $X$ *este o variabilă aleatoare vectorială.*

*În particular, pentru* $n = 1$*, dacă*

$$X^{-1}((-\infty, a)) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\} \stackrel{not}{=} \{X < a\} \in \mathcal{F}, \qquad \forall a \in \mathbb{R},$$

*sau*

$$X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \stackrel{not}{=} \{X \leq a\} \in \mathcal{F}, \qquad \forall a \in \mathbb{R},$$

*atunci* $X$ *este o variabilă aleatoare reală.*

**Demonstraţie.** Să considerăm

$$\mathcal{A} = \left\{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\right\}$$

familia tuturor mulţimilor Boreliene $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ pentru care $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Deoarece

$$X^{-1}(\cup_{i \geq 1} B_i) = \cup_{i \geq 1} X^{-1}(B_i), \qquad B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$$

şi

$$X^{-1}(B^c) = \left(X^{-1}(B)\right)^c, \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

rezultă că $\mathcal{A}$ este o $\sigma$-algebră. Cum din ipoteză $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$, rezultă că $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \sigma(\mathcal{S}) \subset \sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, şi deci

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \qquad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

adică $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ este o variabilă aleatoare vectorială.

Partea a doua rezultă considerând

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\},$$

respectiv

$$\mathcal{S} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\},$$

pentru care $\sigma$-algebra generată este $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. ■

**Observaţia 3.1.3** *Dată fiind o funcţie $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$, se poate arăta că familia*

$$\left\{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)\right\}$$

*este o $\sigma$-algebră, notată $\sigma(X)$ şi numită $\sigma$-algebra generată de $X$ ($\sigma(X)$ este cea mai mică $\sigma$-algebră $\mathcal{F}$ pe $\Omega$ pentru care $X$ este o variabilă aleatoare).*

*Cu această definiţie, a spune că $X$ este o variabilă aleatoare revine la incluziunea*

$$\sigma(X) \subset \mathcal{F}.$$

**Teorema 3.1.4** *Dacă $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ este o variabilă aleatoare şi $f : R^n \to R^m$ este o funcţie măsurabilă, atunci $f \circ X = f(X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to R^m$ este o variabilă aleatoare.*

*În particular, dacă $X_1, \ldots, X_n$ sunt variabile aleatoare, atunci $a_1X_1 + \ldots + a_nX_n + b$ este de asemenea o variabilă aleatoare, $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{R}$.*

**Demonstraţie.** Pentru orice $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ avem

$$(f(X))^{-1}(B) = X^{-1}\left(\underbrace{f^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}\right) \in \mathcal{F},$$

deoarece din ipoteză $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ este o funcţie măsurabilă iar $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ este o variabilă aleatoare.

Pentru a doua parte a teoremei, se arată că $X = (X_1, \ldots, X_n)$ este o variabilă aleatoare şi că $f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă (şi deci măsurabilă). ■

**Teorema 3.1.5** *Dacă $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ sunt variabile aleatoare, atunci*

$$\inf_{n\geq 1} X_n, \qquad \sup_{n\geq 1} X_n$$

*şi*

$$\liminf X_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} X_k, \qquad \limsup X_n = \inf_{n\geq 1} \sup_{k\geq n} X_k$$

*sunt de asemenea vriabile aleatoare.*

*În particular, dacă există $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, oricare ar fi $\omega \in \Omega$, atunci $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este de asemenea o variabilă aleatoare.*

**Demonstraţie.** Să observăm că

$$\left\{\inf_{n\geq 1} X_n < a\right\} = \bigcup_{n\geq 1} \left\{\underbrace{X_n < a}_{\in \mathcal{F}}\right\} \in \mathcal{F}, \qquad a \in \mathbb{R},$$

şi deci $\inf_{n\geq 1} X_n$ este o variabilă aleatoare, şi similar se demonstrează că $\sup_{n\geq 1} X_n$ este o variabilă aleatoare.

Ultima parte a afirmaţiei rezultă din prima parte a demonstraţiei folosind faptul că $\inf_{n\geq k} X_n$ şi $\sup_{n\geq k} X_n$ sunt variabile aleatoare pentru orice $k \geq 1$.

În cazul particular când există $X(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$ oricare ar fi $\omega \in \Omega$, avem

$$X(\omega) = \liminf X_n(\omega) = \limsup X_n(\omega), \qquad \omega \in \Omega,$$

şi deci $X : \Omega \to \mathbb{R}$ este o variabilă aleatoare. ∎

**Observaţia 3.1.6** *Se ştie că în general* $\liminf x_n \leq \limsup x_n$*, şi că şirul* $(x_n)_{n\geq 1}$ *converge la* $x \in \mathbb{R}$ *dacă şi numai dacă cele două limite sunt egale, caz în care*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \liminf x_n = \limsup x_n.$$

*Spunem că şirul de variabile aleatoare converge aproape sigur dacă*

$$P(\{\omega \in \Omega : \liminf X_n(\omega) = \limsup X_n(\omega)\}) = 1,$$

*şi notăm cu* $X$ *variabila aleatoare dată de valoarea comună a celor două limite (notăm* $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *a.s. sau* $X_n \to X$ *a.s.).*

*Să observăm că variabila aleatoare* $X$ *este definită mai puţin o mulţime de măsura nulă unde cele două limite diferă; pentru consistenţa definiţiei, putem defini valoarea limitei prin* $X(\omega) = \limsup X_n(\omega)$ *în aceste puncte, cu observaţia că este posibil ca* $X(\omega) = +\infty$ *pentru anumite valori* $\omega \in \Omega$*. Fiind însă vorba de o mulţime de măsură nulă, valoarea lui* $X$ *în aceste puncte nu este esenţială – nu schimbă spre exemplu valoarea integralei lui* $X$*.*

## EXERCIŢII

**Exerciţiul 3.1.7** *Să se arate că dacă* $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *sunt variabile aleatoare reale, atunci* $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *este o variabilă aleatoare vectorială.*

**Exerciţiul 3.1.8** *i) Să se arate că o funcţie* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *continuă este măsurabilă.*

*ii) Să se arate că* $\sigma$*-algebra mulţimilor Boreliene* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *este cea mai mică* $\sigma$*-algebră pentru care orice funcţie continuă este măsurabilă.*

**Exerciţiul 3.1.9** *Să se arate că dacă* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este o funcţie continuă iar* $\lim_{n\to\infty} X_n = X$ *a.s. atunci* $\lim_{n\to\infty} f(X_n) = f(X)$*.*

**Exerciţiul 3.1.10** *O variabilă aleatoare* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *definită pe un spaţiu de probabilitate* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *se numeşte simplă dacă*

$$X(\omega) = \sum_{k=1}^{N} a_k 1_{A_k}(\omega)$$

*pentru un anumit* $N \geq 1$, $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ *şi* $A_1, \ldots, A_N \in \mathcal{F}$ *sunt evenimente disjuncte.*

*Să se arate că* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *este o variabilă aleatoare dacă şi numai dacă există variabile aleatoare simple* $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$ *astfel încât* $X = \lim_{n\to\infty} X_n$

***Indicaţie****: se consideră* $A_{m,n} = \left\{\omega \in \Omega : \frac{m}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{m+1}{2^n}\right\}$ *şi* $a_{m,n} = \frac{m}{2^n}$, *unde* $m = -2^{2n}, -2^{2n} - 1, \ldots, 2^{2n} - 1$ *şi* $n \in \mathbb{N}$, *şi se defineşte şirul de funcţii* $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *prin*

$$X_n(\omega) = \sum_{m=-2^n}^{2^{2n}-1} a_{m,n} 1_{A_{m,n}}(\omega), \qquad \omega \in \Omega.$$