CURS 8

8.12.2016

GEOMETRIE COMPUTAȚIONALĂ

- ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ -

PREGĂTIRI:

Obs. Calcularea și manevrarea unghiurilor

(i) Fie $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$; $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ vectori din $\mathbb{R}^3$

$$\measuredangle(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos\left(\frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}\right)$$

$$\cos(\measuredangle(\vec{v}, \vec{w})) = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\cdot\|w\|}$$

$$\langle v, w\rangle = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

(ii) Pentru a măsura unghiul dintre direcția dată și fețe este suficient să calculăm / manevrăm unghiul dintre direcția dată și normalele la fețe.

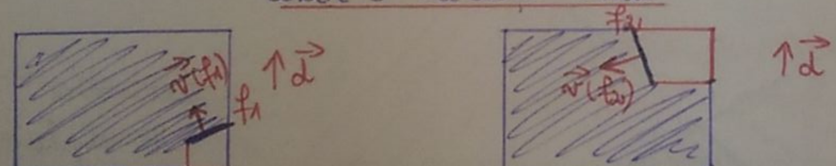
(vector normal la un plan = vector perpendicular pe plan, de normă 1)

Determinarea normalei unui plan:

Ex: $2x + 3y + z = 0$

$$\frac{(2, 3, 1)}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} =$$

• Condiția ca o matriță să blocheze / nu blocheze extragerea într-o direcție dată



Fața $\hat{f_1}$ a matriței corespunde feței f_1 a piesei

$\vec{v}(f_1)$ normala exterioară la f_1

$\hat{f_1}$ blochează extragerea în direcția $\vec{d} \iff$ unghiul dintre $\vec{d}$ și $\vec{v}(f_1)$ este $< 90^\circ \iff$

$\iff \cos(\vec{v}(f_1), \vec{d}) > 0$

Fața $\hat{f_2}$ a matriței corespunde feței f_2 a piesei

$\vec{v}(f_2)$ normala exterioară la f_2

$\hat{f_2}$ nu blochează extragerea în direcția $\vec{d} \iff$ unghiul dintre $\vec{d}$ și $\vec{v}(f_2)$ este $\geq 90^\circ \iff$

$\iff \cos(\vec{v}(f_2), \vec{d}) \leq 0$

Această condiție trebuie verificată pentru toate fețele!

• DETALIERE (condiția scrisă în coordonate)

Fără a restrânge generalitatea $\vec{d} = (d_x, d_y, 1)$ (de ce?)
(de fapt: a da o direcție „în sus" este echivalent cu a da un punct din planul $z = 1$).

Fie f o față fixată, $\vec{\nu}(f) = (\nu_x, \nu_y, \nu_z)$.

A găsi o direcție $\vec{d}$ a.î. $\hat{f}$ să nu blocheze în direcția $\vec{d}$ este echivalent cu $\langle \vec{\nu}(f), \vec{d} \rangle \leq 0 \Leftrightarrow \boxed{\nu_x \cdot d_x + \nu_y \cdot d_y + \nu_z \leq 0}$ (*f)

(ν_x, ν_y, ν_z sunt date și sunt căutați acei d_x, d_y care verifică relația *f)

Ex: $\vec{\nu}(f) = (4, -1, 3)$
$4 d_x - d_y + 3 \leq 0$ ← o dreaptă ce caracterizează un semiplan

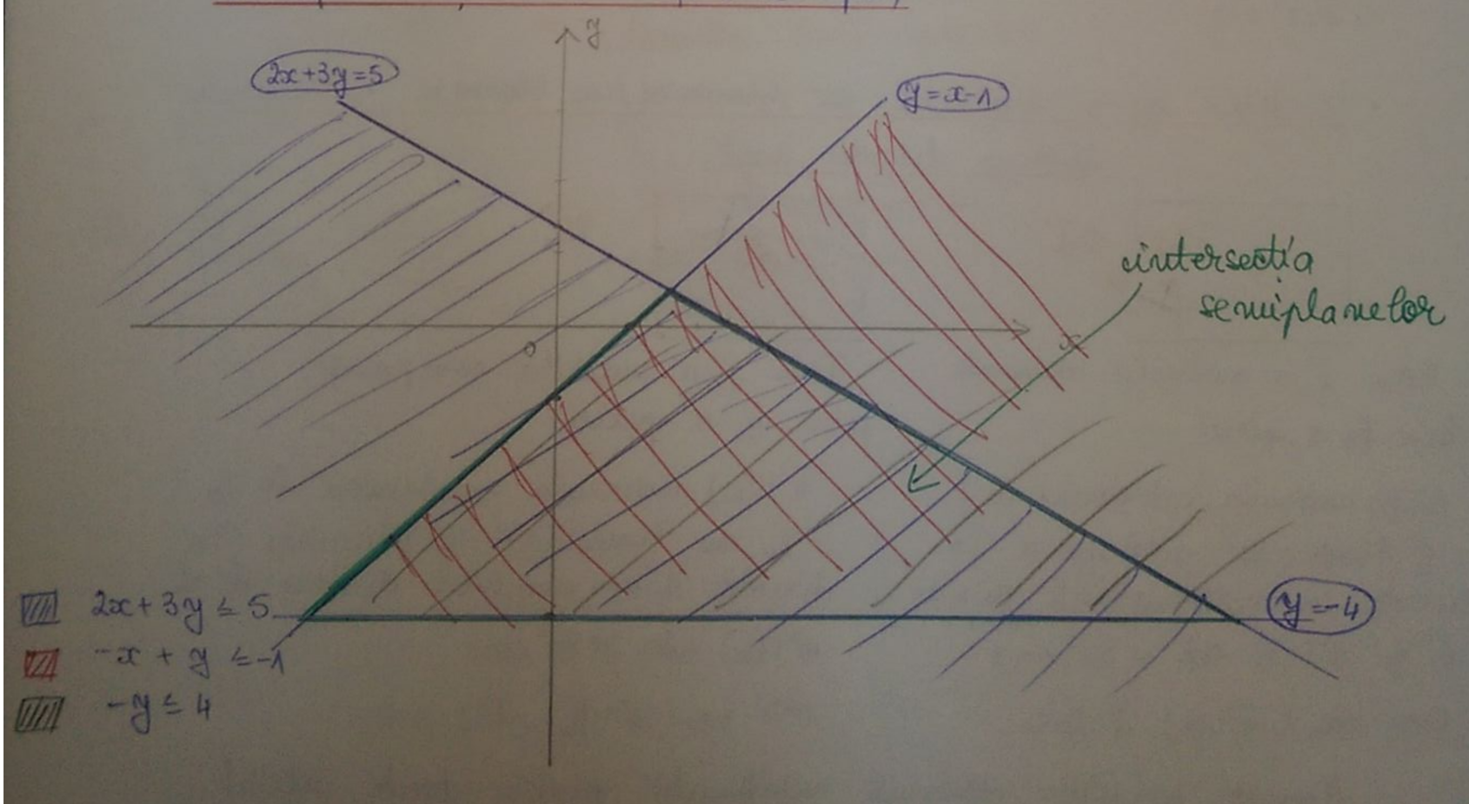
*f este ecuația unui semiplan

CONCLUZII:

• dată o față standard f a poliedrului / matriței, a găsi o direcție admisibilă, revine la a rezolva inecuația (*f) → corespunde unui semiplan

• dat un poliedru, considerăm matrița asociată și toate fețele matriței (adică toate fețele standard ale poliedrului) ⟶ a găsi o „direcție care verifică toate inegalitățile (*)", deci a stabili dacă o intersecție de semiplane e nevidă sau nu.

• Semiplane și intersecții (Exemple)



• Intersecții de semiplane. Algoritmul „Divide et Impera"

$\mathcal{H}$ mulțime de semiplane (n semiplane) $\Rightarrow$ H_1 și H_2 mulțimi de semiplane (cel mult $\frac{n}{2}+1$ semiplane) $\xrightarrow{\text{intersecție}}$ C_1 și C_2 regiuni poligonale convexe

? vârfuri $\rightarrow$ cel mult n (vârfuri ale lui $C_1 \cap C_2$)

? muchii $\rightarrow$ cel mult $\frac{n}{2}$ în fiecare

? fețe $\rightarrow$ cel mult $\frac{n}{2}$ în fiecare

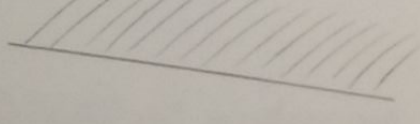
$\xrightarrow[\text{Overlay pentru regiuni poligonale convexe}]{\text{adaptând alg. de}}$ Complexitatea pentru a determina intersecția dintre C_1 și C_2 este $O(n \log n)$

$\Rightarrow$ relația de recurență pentru $T(n)$ [complexitatea timp pentru n semiplane]

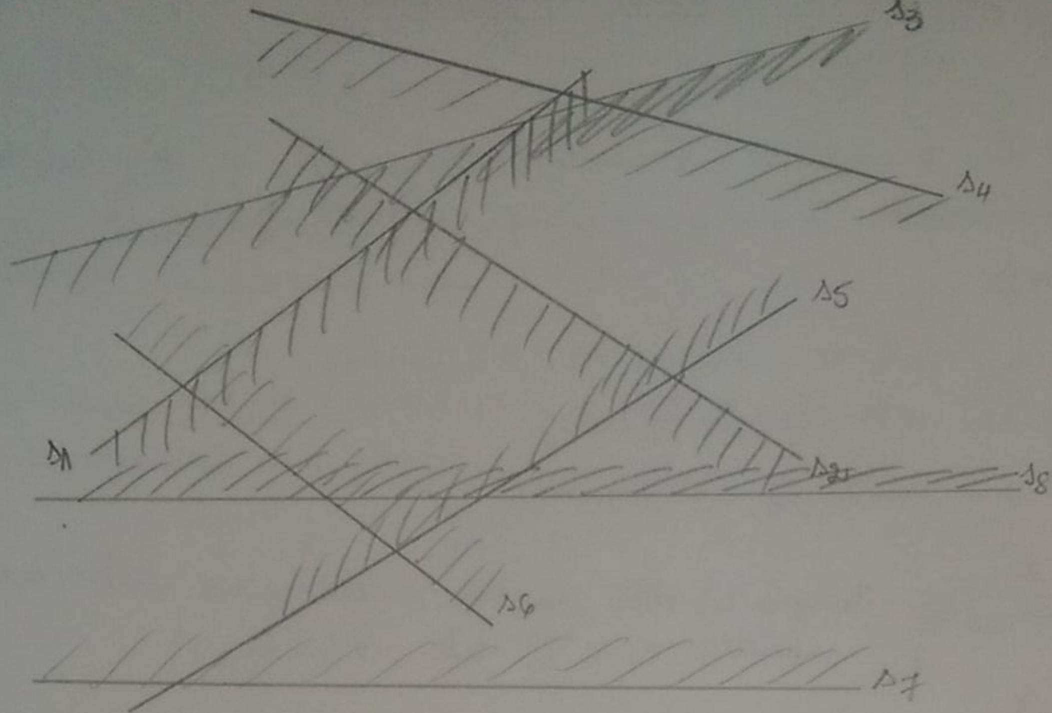
$$T(n) = \begin{cases} O(1), & n=1 \\ O(n \log n) + 2T(\frac{n}{2}), & n>1 \end{cases} \xrightarrow[\text{Exercițiu!!}]{\text{se rezolvă}} T(n) = O(n \log^2 n).$$

• Terminologie

Semiplan inferior (~~lower~~ half-plane)



Semiplan superior (upper half-plane)



semiplane inferioare	$\cancel{s_1}$, $\cancel{s_2}$, s_3, s_4	LE
semiplane superioare	$\cancel{s_5}$, $\cancel{s_6}$, s_7, $\cancel{s_8}$	UE

- Dualitate

Motivație euristică:

— de câte informații numerice este nevoie pentru a indica un punct în plan? → 2

— de câte informații numerice este nevoie pentru a indica o dreaptă în plan? → 2

Q1 Există o modalitate naturală de a stabili o corespondență între puncte și drepte?

R: DA, folosind conceptul de dualitate

Q2 Cum se reflectă / respectă diverse proprietăți geometrice (de incidență) în cazul dualității?

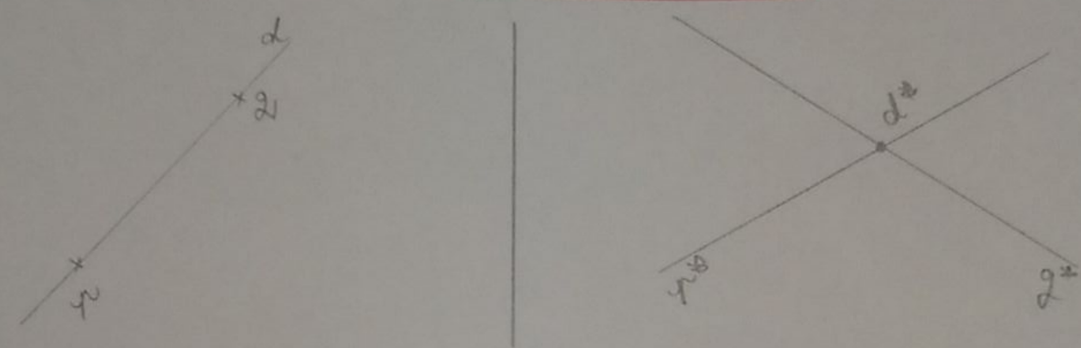
Transformarea de dualitate

„Plan primal" / „Plan dual"

REGULI:

• unui punct $p = (p_x, p_y)$ din planul primal i se asociază o dreaptă în planul dual: $\boxed{p^* : (y = p_x \cdot x - p_y)}$ (duala lui p)

• unei drepte (neverticale) $d: y = m_d \cdot x + n_d$ din planul primal i se asociază un punct $\boxed{d^* = (m_d, -n_d)}$ în planul dual



PROPRIETĂȚI FUNDAMENTALE

Transformarea de dualitate:

① păstrează incidența: $p \in d \Leftrightarrow d^* \in p^*$

Exemplu

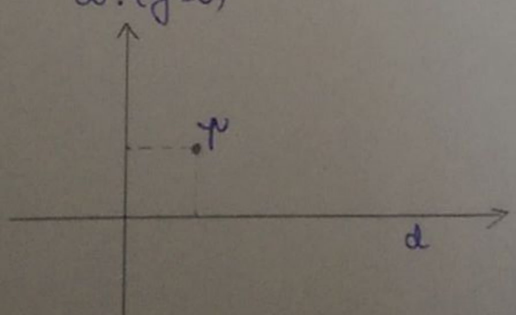
$d: y = 2x+1$	$d^* = (2, -1)$
$p = (1,3)$	$p^*: y = x - 3$

② păstrează ordinea: p este situat deasupra dreptei d (neverticală) $\Leftrightarrow$

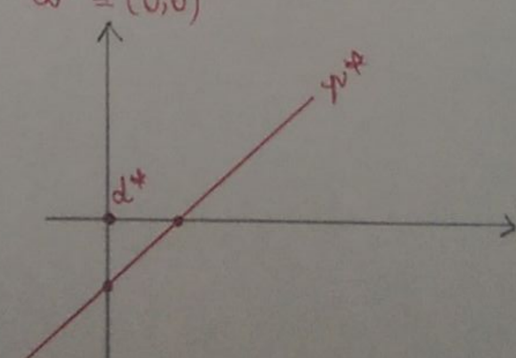
$\Leftrightarrow$ d^* este situat deasupra dreptei p^*

Exemplu

$p = (1,1)$	$p^* : (y = x - 1)$
$d : (y = 0)$	$d^* = (0,0)$



plan primal



plan dual

Obs. Transformarea descrisă mai sus este „polaritatea" față de parabola $y = \frac{x^2}{2}$.

Exerciții

1) Fie punctul $p = (2,5)$ și dreapta $d : (y = 2x+1)$.
Verificați că $p \in d$. Determinați $d^* = (\dots)$; scrieți ecuația lui p^* și verificați ~~dacă~~ că $d^* \in p^*$.

2) Fie $p_1 = (3,4)$; $p_2 = (5,2)$. Scrieți ecuația dreptelor p_1, p_2 și explicați (cu calcule!) ce se întâmplă în planul dual.

3) Fie $d : (y = 2x+1)$, $p = (1,7)$.
Verificați că p este deasupra lui d și că d^* este deasupra lui p^*.