# Tema 4

Soluții

## Exercițiul 1

Arătaţi că:

a) Dacă $X$ este o variabilă aleatoare cu valori in $\mathbb{N}$ atunci

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq n).$$

b) Dacă $X$ este o variabilă aleatoare cu valori pozitive atunci

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x)\, dx.$$

a) Observăm că:

$$\mathbb{P}(X > n) = \mathbb{P}(X = n+1) + \mathbb{P}(X = n+2) + \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)$$

şi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) &= (\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \dots) + (\mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3) + \dots) \\
&+ (\mathbb{P}(X=3) + \mathbb{P}(X=4) + \dots) + \dots \\
&= 1\cdot\mathbb{P}(X=1) + 2\cdot\mathbb{P}(X=2) + 3\cdot\mathbb{P}(X=3) + \dots \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X=k) = \mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$

O altă idee ar fi să luăm $X = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X>i\}}$ şi să inversăm $\sum$ cu $\mathbb{E}$ (de ce putem ?).

b) Avem

$$\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x)\, dx = \int_0^{+\infty} \mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{X\geq x\}}]\, dx \overset{\text{Tonelli-Fubini}}{=} \mathbb{E}\left[\int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{X\geq x\}}\, dx\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{X} dx\right] = \mathbb{E}[X].$$

## Exercițiul 2

Se consideră v.a. $X$ cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-kx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, k > 0.$$

a) Să se determine constanta $\alpha$.

b) Să se afle funcția de repartiție.

c) Să se calculeze $\mathbb{P}(0 < X < k^{-1})$.

a) Din condiția $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ obținem

$$\int_0^{\infty} \alpha x^2 e^{-kx}\, dx \overset{y=kx}{=} \frac{\alpha}{k^3} \int_0^{\infty} y^2 e^{-y}\, dy = \frac{2\alpha}{k^3} = 1$$

de unde rezultă $\alpha = \frac{k^3}{2}$. Pentru această valoare a lui $\alpha$ se indeplinește și condiția $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Aplicând definiția funcției de repartiție, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$, efectuând calculele obținem

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - \frac{k^2x^2+2kx+2}{2} e^{-kx}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

c) Avem

$$\mathbb{P}\left(0 < X < \frac{1}{k}\right) = F\left(\frac{1}{k}\right) - F(0) = F\left(\frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{5}{2e}.$$

## Exercițiul 3

a) Fie $X$ o variabilă repartizată exponenţial (de parametru $\alpha$). Arătaţi că are loc următoarea relaţie (proprietatea lipsei de memorie):

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t) \tag{1}$$

b) Fie $X$ o variabilă aleatoare care verifică relaţia (1). Arătaţi că $X$ este repartizată exponenţial.

a) Dacă $X \sim Exp(\alpha)$ atunci densitatea sa este $f(x) = \alpha e^{-\alpha x}\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$ şi are funcţia de repartiţie $F(x) = (1 - e^{-\alpha x})\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$. Observăm că $\mathbb{P}(X > t) = 1 - \mathbb{P}(X \leq t) = 1 - F(t) = e^{-\alpha t}$, deci

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > t + s, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > t + s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{e^{-\alpha(t+s)}}{e^{-\alpha st}} = e^{-\alpha t} = \mathbb{P}(X > t).$$

Interpretare: Să presupunem că $X$ reprezintă durata de viaţă a unei componente electrice. Ştiind că $X$ a funcţionat deja un timp $s$ ($X > s$), probabilitatea ca $X$ să funcţioneze un timp $t$ suplimentar ($X > t + s$) este egală cu probabilitatea ca $X$ să funcţioneze un timp $t$. Faptul că a funcţionat deja un timp $s$ nu influenţează probabilitatea să funcţioneze un timp $t$ in plus.

b) Din relaţia

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \frac{\mathbb{P}(X > s + t, X > s)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{\mathbb{P}(X > s + t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \mathbb{P}(X > t)$$

obţinem $\mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t)$ de unde notand cu $h(t) = \mathbb{P}(X > t)$ avem $h(s + t) = h(s)h(t)$ pentru $s > 0,\ t > 0$.

Pentru a verifica că v.a. $X$ este distribuită exponenţial trebuie să rezolvăm ecuaţia funcţională Cauchy. Observăm pentru inceput că dacă $s = t$ atunci $h(2s) = h^2(s)$ şi prin inducţie avem $h(ks) = h^k(s)$ pentru $k \in \mathbb{N}$. Luand $s = \frac{1}{2}$ avem $h(1) = h^2(\frac{1}{2})$ de unde $h(\frac{1}{2}) = h^{\frac{1}{2}}(1)$ şi pentru $s = \frac{1}{k}$ rezultă că $h(\frac{1}{k}) = h^{\frac{1}{k}}(1)$ (prin aceeaşi argumentare). Combinand rezultatele avem $h(\frac{m}{n}) = h(m\frac{1}{n}) = h^m(\frac{1}{n}) = h^{\frac{m}{n}}(1)$. Prin urmare $h(q) = h^q(1)$ pentru orice $q \in \mathbb{Q}_+$. Dacă $r \in \mathbb{R}_+ - \mathbb{Q}_+$ există un şir $(q_n)_n \subset \mathbb{Q}_+$ aşa incat $q_n \downarrow r$ şi folosind continuitatea la dreapta avem $h(q_n) \downarrow h(r)$ deci $h(r) = a^r$, unde $a = h(1)$. In final am găsit că $h(t) = e^{-t\log\frac{1}{h(1)}}$.

## Exerciţiul 4

a) Nivelul de zgomot al unei maşini de spălat este o v.a. de medie 44 dB şi de abatere standard 5 dB. Admiţand aproximarea normală care este probabilitatea să găsim o medie a zgomotului superioară la 48 dB intr-un eşantion de talie 10 maşini de spălat ?

b) O telecabină are o capacitate de 100 de persoane. Ştiind că greutatea populaţiei (ţarii) este o v.a. de medie 66.3 Kg şi o abatere standard de 15.6 Kg şi presupunand că persoanele care au urcat in telecabină au fost alese in mod aleator din populaţie, care este probabilitatea ca greutatea totală acestora să depăşească 7000 Kg ?

a) Fie $X$ nivelul de zgomot produs de o maşină de spălat luată la intamplare şi $\bar{X}_{10}$ media unui eşantion de talie 10. Presupunem că aproximarea gaussiană are loc pentru $n = 10$. Avem

$$\bar{X}_{10} \sim \mathcal{N}\left(44, \frac{5^2}{10}\right),$$

de unde $\mathbb{P}(\bar{X}_{10} > 48) \simeq \mathbb{P}\left(Z > \frac{48-44}{5/\sqrt{10}}\right) = \mathbb{P}(Z > 2.53) = 1 - 0.9943 = 0.0057$, unde $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Observăm că această proabilitate este foarte mică.

b) Fie $X$ greutatea unei persoane luate la intamplare şi $\bar{X}_{100}$ greutatea media a unui eşantion de 100 de persoane. Aplicand approximarea gaussiană (Teorema Limită Centrală) avem

$$\bar{X}_{100} \simeq \mathcal{N}\left(66.3, \frac{15.6^2}{100}\right),$$

de unde $\mathbb{P}(\bar{X}_{100} > \frac{7000}{100}) \simeq \mathbb{P}\left(Z > \frac{70-66.3}{15.6/\sqrt{100}}\right) = \mathbb{P}(Z > 2.37) = 0.0089$, unde $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

## Exerciţiul 5

Fie cuplul de v.a. $(X, Y)$ cu densitatea de repartiție $f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, unde

$$f_{(X,Y)}(x, y) = \begin{cases} k(x + y + 1), & x \in [0, 1],\ y \in [0, 2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}.$$

a) Să se determine constanta $k$.

b) Să se determine densitățile marginale.

c) Să se verifice dacă $X$ și $Y$ sunt independente.

d) Să se afle funcțiile de repartiție marginale și funcția de repartiție a vectorului $(X, Y)$.

e) Să se determine densitățile v.a. $X|Y = y$ și $Y|X = x$.

a) Pentru ca $f_{(X,Y)}$ să fie densitate trebuie ca $f_{(X,Y)}(x, y) \geq 0$ de unde $k \geq 0$ și

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x, y)\, dxdy = 1,$$

altfel spus $\int_0^1 \int_0^2 k(x + y + 1)\, dxdy = 1$ de unde $k = \frac{1}{5}$.

b) Pentru a găsi densitățile marginale avem pentru $X$

$$f_X(x) = \int f_{(X,Y)}(x, y)\, dy = \int_0^2 \frac{x + y + 1}{5} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\, dy = \frac{2x + 4}{5} \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

și pentru $Y$

$$f_Y(y) = \int f_{(X,Y)}(x, y)\, dx = \int_0^1 \frac{x + y + 1}{5} \mathbb{1}_{[0,2]}(y)\, dx = \frac{2y + 3}{10} \mathbb{1}_{[0,2]}(y).$$

c) Observăm că $X$ și $Y$ nu sunt independente deoarece $f_{(X,Y)}(x, y) \neq f_X(x) f_Y(y)$.

d) Funcția de repartiție a vectorului $(X, Y)$ este dată de

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(u, v)\, dudv$$

prin urmare dacă $x \in (0, 1]$ și $y \in (0, 2]$ avem

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^y \frac{u + v + 1}{5}\, dudv = \frac{xy}{10}(x + y + 2),$$

dacă $x \in (1, \infty)$ și $y \in (0, 2]$ atunci

$$F(x, y) = \int_0^1 \int_0^y \frac{u + v + 1}{5}\, dudv = \frac{y}{10}(y + 3),$$

dacă $x \in (0, 1]$ și $y \in (2, \infty)$ atunci

$$F(x, y) = \int_0^x \int_0^2 \frac{u + v + 1}{5}\, dudv = \frac{x}{5}(x + 4),$$

iar dacă $x \in (1, \infty)$ și $y \in (2, \infty)$ atunci

$$F(x, y) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{u + v + 1}{5}\, dudv = 1.$$

Pentru a găsi funcțiile de repartiție marginale putem sau să folosim densitățile marginale sau să folosim relațiile

$$F_X(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y), \quad F_Y(y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y).$$

Obținem

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{5}(x+4), & x \in (0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

și

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq 0 \\ \frac{y}{10}(y+3), & y \in (0,2] \\ 1, & y > 2 \end{cases}$$

e) Folosind definiția densității marginale avem

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{2(x+y+1)}{2y+3}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,2]}(y)$$

și

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{x+y+1}{2x+4}\mathbb{1}_{[0,1]}(x)\mathbb{1}_{[0,2]}(y).$$

## Exercițiul 6

> Un tehnician dintr-un laborator de biologie face două măsurători considerate independente și repartizate normal de medie 0 și de varianță 1. Calculați corelația dintre valoarea cea mai mică și cea mai mare a celor două măsurători.

Fie $X$ și $Y$ cele două măsurători, iar conform ipotezei acestea sunt variabile aleatoare independente și $\mathcal{N}(0,1)$ repartizate. Fie de asemenea $M = \max(X,Y)$ și $L = \min(X,Y)$, cea mai mare și respectiv cea mai mică dintre valori. Cum pentru $x, y \in \mathbb{R}$ avem

$$\max(x,y) + \min(x,y) = x + y \quad \text{și} \quad \max(x,y) - \min(x,y) = |x-y|$$

deducem că

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[M] + \mathbb{E}[L] &= \mathbb{E}[M+L] = \mathbb{E}[X+Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 0 \\ \mathbb{E}[M] - \mathbb{E}[L] &= \mathbb{E}[M-L] = \mathbb{E}[|X-Y|]. \end{aligned}$$

Pentru a calcula $\mathbb{E}[|X-Y|]$ să observăm că $X - Y \sim \mathcal{N}(0,2)$ (deoarece $X$ și $Y$ sunt independente) prin urmare notând $X - Y = Z\sqrt{2}$, cu $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, obținem

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X-Y|] = \sqrt{2}\mathbb{E}[|Z|] &= \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} |z| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz \\ &= 2\sqrt{2}\int_{0}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}\, dz = 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Astfel deducem că $\mathbb{E}[M] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$ și $\mathbb{E}[L] = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ iar

$$Cov(M,L) = \mathbb{E}[ML] - \mathbb{E}[M]\mathbb{E}[L] = \mathbb{E}[XY] + \frac{1}{\pi} = \frac{1}{\pi}$$

deoarece $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 0$. Cum corelația dintre $M$ și $L$ este definită prin

$$\rho(M,L) = \frac{Cov(M,L)}{\sqrt{Var(M)}\sqrt{Var(L)}},$$

trebuie să mai calculăm $Var(M)$ și $Var(L)$. Cum $M + L = X + Y$, luând varianța avem

$$Var(M+L) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 2$$

de unde

$$Var(M) + Var(L) + 2Cov(M,L) = 2$$

deci $Var(M) + Var(L) = 2\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$. Cum $\max(X,Y) = -\min(-X,-Y)$ și cum, din simetria repartiției normale standard, $(-X,-Y)$ este repartizat la fel ca $(X,Y)$ deducem că

$$Var(M) = Var(\max(X,Y)) = Var(-\min(-X,-Y)) = Var(\min(-X,-Y)) = Var(\min(X,Y)) = Var(L)$$

prin urmare $Var(M) = Var(L) = 1 - \frac{1}{\pi}$ de unde

$$\rho(M,L) = \frac{Cov(M,L)}{\sqrt{Var(M)}\sqrt{Var(L)}} = \frac{\frac{1}{\pi}}{1-\frac{1}{\pi}} = \frac{1}{\pi - 1}.$$

## Exercițiul 7

a) O femeie însărcinată este programată, de doctor, să nască pe data de 22 Decembrie 2018. Binențeles că data efectivă de naștere nu este neapărat data prevăzută de doctor. Pe o scară de timp, considerăm că momentul în care începe ziua de 22 Decembrie este notat cu 0 și să presupunem că momentul $T$, la care femeia naște, este repartizat normal de medie 0 și abatere standard 4 zile. Care este probabilitatea ca femeia să nască în ziua programată de doctor?

b) O altă femeie însărcinată are aceeași dată de naștere programată ca și femeia de la punctul a). În contextul de la a), fie $T_0$ momentul primei nașteri, din cele două. Presupunând că cele două momente ale nașterilor sunt independente și indentic repartizate să se determine varianța lui $T_0$.[1]

a) Pentru a răspunde la cerința problemei este necesar să calculăm $\mathbb{P}(0 \leq T < 1)$, unde $T \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, $\sigma^2 = 16$, măsurat în zile. Avem

$$\mathbb{P}(0 \leq T < 1) = \mathbb{P}\left(0 \leq \frac{T}{\sigma} < \frac{1}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \Phi(0) \overset{\sigma=4}{=} \Phi(0.25) - \Phi(0) \approx 0.0987$$

unde $\Phi(x)$ este funcția de repartiție a normalei standard.

b) Observăm că momentul primei nașteri, din cele două, este dat de $T_0 = \min(T_1, T_2)$ unde $T_i$ este momentul nașterii femeii cu numărul $i$. Pentru a calcula $Var(T_0)$ vom calcula pentru început densitatea variabilei $T_0$ plecând de la

$$\mathbb{P}(T_0 > t) = \mathbb{P}(T_1 > t, T_2 > t) \overset{indep.}{=} \mathbb{P}(T_1 > t)^2 = \left(1 - \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right)^2.$$

Astfel

$$f_{T_0}(t) = \frac{d}{dt}F_{T_0}(t) = \frac{d}{dt}\left[1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right)^2\right] = \frac{2}{\sigma}\left(1 - \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right)\varphi\left(\frac{t}{\sigma}\right)$$

unde $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ este densitatea repartiției normale standard.

Prin urmare[2]

$$Var(T_0) = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_{T_0}(t)\,dt - \left(\int_{-\infty}^{\infty} t f_{T_0}(t)\,dt\right)^2.$$

Pentru a finaliza problema trebuie să calculăm cele două integrale care apar în membrul drept al relație de mai sus. Să observăm că pentru prima integrală avem

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_{T_0}(t)\,dt &= \frac{2}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} t^2\left(1 - \Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right)\varphi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\,dt \overset{y=\frac{t}{\sigma}}{=} 2\sigma^2\int_{-\infty}^{\infty} y^2\left(1 - \Phi\left(y\right)\right)\varphi\left(y\right)\,dy\\ &= 2\sigma^2\left(\int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi(y)\,dy - \int_{-\infty}^{\infty} y^2\Phi\left(y\right)\varphi\left(y\right)\,dy\right) = 2\sigma^2\left(1 - \int_{-\infty}^{\infty} y^2\Phi\left(y\right)\varphi\left(y\right)\,dy\right)\end{aligned}$$

unde am utilizat momentul de ordin doi al unei normale standard, i.e. $\int_{-\infty}^{\infty} y^2\varphi(y)\,dy = 1$.

Cum

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} y^2\Phi\left(y\right)\varphi\left(y\right)\,dy &\overset{z=-y}{=} \int_{\infty}^{-\infty} z^2\Phi\left(-z\right)\varphi\left(-z\right)\,-dz = \int_{-\infty}^{\infty} z^2\left(1 - \Phi\left(z\right)\right)\varphi\left(z\right)\,dz\\ &= 1 - \int_{-\infty}^{\infty} z^2\Phi\left(z\right)\varphi\left(z\right)\,dz\end{aligned}$$

unde am folosit că $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$ și că $\varphi(-z) = \varphi(z)$ din simetria repartiției normale, deducem că

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2\Phi\left(y\right)\varphi\left(y\right)\,dy = \frac{1}{2}$$

de unde $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_{T_0}(t)\,dt = \sigma^2$.

Pentru a doua integrală avem

[2] Punctaj parțial până în punctul ăsta!

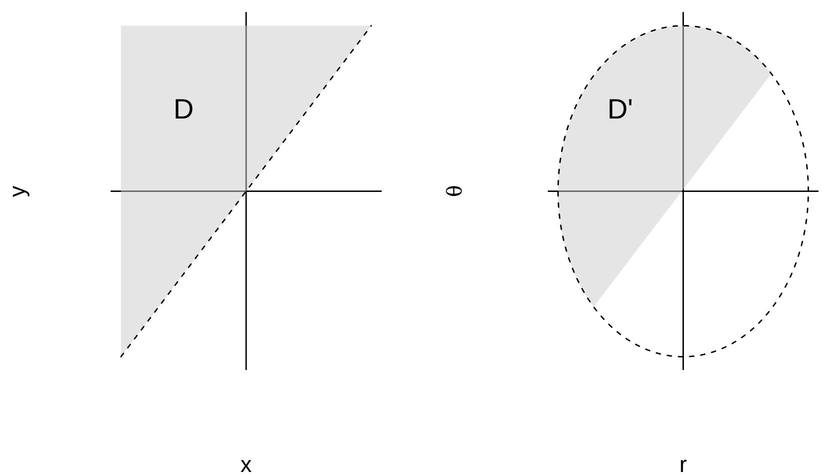
$$\int_{-\infty}^{\infty} t f_{T_0}(t)\,dt = \frac{2}{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} t\left(1-\Phi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\right)\varphi\left(\frac{t}{\sigma}\right)\,dt \overset{y=\frac{t}{\sigma}}{=} 2\sigma\int_{-\infty}^{\infty} y\left(1-\Phi\left(y\right)\right)\varphi\left(y\right)\,dy$$
$$= 2\sigma\left(\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y)\,dy - \int_{-\infty}^{\infty} y\Phi\left(y\right)\varphi\left(y\right)\,dy\right) = -2\sigma\int_{-\infty}^{\infty} y\Phi\left(y\right)\varphi\left(y\right)\,dy$$

deoarece $\int_{-\infty}^{\infty} y\varphi(y)\,dy = 0$ (media unei normale standard). Pentru integrala $\int_{-\infty}^{\infty} y\Phi\left(y\right)\varphi\left(y\right)\,dy$ avem că

$$\int_{-\infty}^{\infty} y\Phi\left(y\right)\varphi\left(y\right)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} y\int_{-\infty}^{y}\varphi(x)\,dx\varphi\left(y\right)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{y} y\varphi(x)\varphi\left(y\right)\,dxdy$$
$$= \iint_{D} y\varphi(x)\varphi\left(y\right)\,dxdy$$

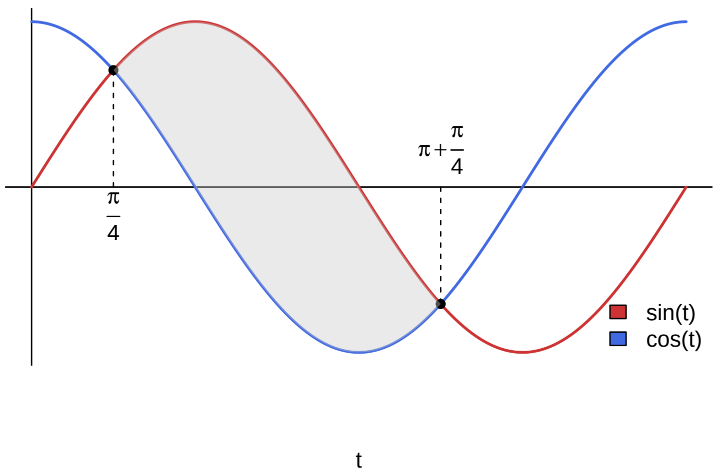
unde $D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x\leq y\}$. Prin trecerea la coordonate polare, $x = r\cos\theta$ și $y = r\sin\theta$ avem că regiunea $D$ se transformă în regiunea

$$D' = \{(r,\theta)\in[0,\infty)\times[0,2\pi) \,|\, \cos\theta\leq\sin\theta\}$$




și rezolvând ecuația $\cos\theta = \sin\theta$ sau $\tan(\theta) = 1$ găsim că $\theta\in\{\frac{\pi}{4}, \pi+\frac{\pi}{4}\}$ prin urmare regiune $D'$ devine

$$D' = \{(r,\theta)\in[0,\infty)\times\left[\frac{\pi}{4}, \pi+\frac{\pi}{4}\right)\}.$$




Ținând cont că $e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} = e^{-\frac{r^2}{2}}$ și de faptul că Jacobian-ul transformării este $r$, deci $dxdy = rdrd\theta$ avem

$$\begin{aligned}
\iint_D y\varphi(x)\varphi(y)\, dxdy &= \iint_{D'} r\sin\theta \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{r^2}{2}}\, rdrd\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi+\frac{\pi}{4}} r^2 \sin\theta e^{-\frac{r^2}{2}}\, d\theta dr \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi+\frac{\pi}{4}} \sin\theta\, d\theta \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_0^\infty r\left(-e^{-\frac{r^2}{2}}\right)'\, dr \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr = \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{r^2}{2}}\, dr \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2\pi}\frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

Înlocuind în expresia lui $\int_{-\infty}^\infty tf_{T_0}(t)\, dt$ găsim că

$$\int_{-\infty}^\infty tf_{T_0}(t)\, dt = -\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$$

de unde $Var(T_0) = \sigma^2\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$.