# Chapter 5

# Curs 5

## 5.1 Independenţă

Noţiunea de independenţă este un concept fundamental în teoria probabilităţilor, care intuitiv afirmă că între cantităţile considerate nu există "legături" (dependenţe) . Noţiunea de independenţă se poate referi la evenimente, la variabile aleatoare sau mai genral la $\sigma$-algebre, după cum urmează.

Considerăm un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ fixat.

**Definiţia 5.1.1** *Spunem că evenimentele $A, B \in \mathcal{F}$ sunt independente dacă $P(A \cap B) = P(A) P(B)$, şi dependente în caz contrar.*

*Spunem că variabilele aleatoare $X, Y$ sunt independente dacă $P(X \in C, Y \in D) = P(X \in C) P(Y \in D)$, oricare ar fi mulţimile boreliene $C, D \in \mathcal{B}$. În caz contrar spunem că $X$ şi $Y$ sunt dependente.*

*Spunem că $\sigma$-algebrele $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ sunt independente dacă oricare două evenimente $A \in \mathcal{G}_1$ şi $B \in \mathcal{G}_2$ sunt independente. În caz contrar spunem că $\mathcal{G}_1$ şi $\mathcal{G}_2$ sunt dependente.*

**Observaţia 5.1.2** *Se poate arăta că evenimentele $A, B$ sunt independente dacă şi numai dacă variabilele aleatoare $1_A$ şi $1_B$ sunt independente, şi deci prima definiţie este un caz particular a celei de-a doua definiţii.*

*De asemenea, se poate arăta că variabilele aleatoare $X$ şi $Y$ sunt independente dacă şi numai dacă $\sigma$-algebrele generate de acestea, $\sigma(X)$ şi $\sigma(Y)$ sunt independente, şi deci a doua definiţie este un caz particular a celei de a treia definiţii de mai sus.*

Extindem definiţia anterioară la cazul unui număr finit de evenimente, variabile aleatoare sau $\sigma$-algebre astfel:

**Definiţia 5.1.3** *Spunem că $\sigma$-algebrele $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_n \subset \mathcal{F}$ sunt independente dacă oricare ar fi evenimentele $A_i \in \mathcal{G}_i$, $i = 1, \ldots, n$, are loc*

$$P\left(\cap_{i=1}^n A_i\right) = \prod_{i=1}^n P(A_i).$$

*Spunem că variabilele aleatoare $X_1, \ldots, X_n$ sunt independente dacă*

$$P\left(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(X_i \in B_i\right),$$

*oricare ar fi mulţimile Boreliene $B_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, n$.*

*Spunem că evenimentele $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ sunt independente dacă oricare ar fi mulţimea de indici $I \subset \{1, \ldots, n\}$ avem*

$$P\left(\cap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P\left(A_i\right)$$

Să observăm că pentru independenţa evenimentelor $A_1, \ldots, A_n$ nu este suficient să verificăm relaţia anterioară numai pentru $I = \{1, \ldots, n\}$; ea trebuie verificată pentru toate submuţimile $I \subset \{1, \ldots, n\}$. Pentru a vedea aceasta, aşa cum am observat, independenţa evenimentelor $A_1, \ldots, A_n$ revine la independenţa variabilelor aleatoare $1_{A_1}, \ldots, 1_{A_n}$. Alegând in definiţia de mai sus a independenţei acestor variabile aleatoare $B_i = \{1\}$ pentru $i \in I$ şi $B_i = \mathbb{R}$ pentru $i \notin I$, obţinem

$$P\left(1_{A_1} \in B_1, \ldots, X_n \in B_n\right) = \prod_{i=1}^{n} P\left(1_{A_i} \in B_i\right),$$

de unde observând că pentru $i \in I$ avem $\{1_{A_i} \in B_i\} = \{1_{A_i} = 1\} = A_i$ şi pentru $i \notin I$ avem $\{1_{A_i} \in B_i\} = \{1_{A_i} \in \mathbb{R}\} = \Omega$, se obţine relaţia din definiţia variabilelor evenimentelor $A_1, \ldots, A_n$ de mai sus.

De asemenea, pentru ca evnimentele $A_1, \ldots, A_n$ sa fie independente, nu este suficient ca $P\left(A_i \cap A_j\right) = P\left(A_i\right) P\left(A_j\right)$ oricare ar fi $i \neq j$ (astfel de evenimente se numesc independente două câte două), aşa după cum rezultă din următorul exemplu:

**Exemplul 5.1.4** *Fie $X_1, X_2, X_3$ variabile aleatoare independente cu $P\left(X_i = 0\right) = P\left(X_i = 1\right) = 1/2$, şi să considerăm evenimentele $A_1 = \{X_2 = X_3\}$, $A_2 = \{X_1 = X_3\}$ şi $A_3 = \{X_1 = X_2\}$.*

*Evenimentele $A_1, A_2, A_3$ sunt independente două câte două deoarece*

$$\begin{aligned} P\left(A_i \cap A_j\right) &= P\left(X_1 = X_2 = X_3\right) \\ &= P\left(X_1 = X_2 = X_3 = 1\right) + P\left(X_1 = X_2 = X_3 = 0\right) \\ &= P\left(X_1 = 1\right) P\left(X_2 = 1\right) P\left(X_3 = 1\right) + P\left(X_1 = 0\right) P\left(X_2 = 0\right) P\left(X_3 = 0\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

*şi*

$$\begin{aligned} P\left(A_i\right) &= P\left(X_2 = X_3\right) \\ &= P\left(X_2 = X_3 = 1\right) + P\left(X_2 = X_3 = 0\right) \\ &= P\left(X_2 = 1\right) P\left(X_3 = 1\right) + P\left(X_2 = 0\right) P\left(X_3 = 0\right) \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

*şi deci* $P(A_i \cap A_j) = P(A_i) P(A_j)$ *oricare ar fi* $i \neq j$.

*Evenimentele* $A_1, A_2, A_3$ *nu sunt independente, deoarece*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(X_1 = X_2 = X_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A_1) P(A_2) P(A_3).$$

Se poate arăta că petru a verifica independenţa variabilelor aleatoare $X_1, \ldots, X_n$ este suficient să verificăm relaţia

$$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i)$$

pentru orice $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{S}$, unde $\mathcal{S}$ este o familie de mulţimi ce generează familia mulţimilor Boreliene, adică $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}$.

În particular, alegând $\mathcal{S} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$, obţinem următoarea:

**Propoziţia 5.1.5** *Variabilele aleatoare* $X_1, \ldots, X_n$ *sunt independente dacă şi numai dacă*

$$P(X_1 \leq a_1, \ldots, X_n \leq a_n) = P(X_1 \leq a_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \leq a_n),$$

*oricare ar fi* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

**Demonstraţie.** Implicaţia directă rezultă din definiţia independenţei variabilelor aleatoare pentru $B_i = (-\infty, a_i]$, iar implicaţia reciprocă din observaţia anterioară. ■

**Definiţia 5.1.6** *Date fiind variabilele aleatoare* $X_1, \ldots, X_n$, *funcţia* $F = F_{X_1,\ldots,X_n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$F(a_1, \ldots, a_n) = P(X_1 \leq a_1, \ldots, X_n \leq a_n)$$

*se numeşte funcţia de distribuţie a variabilelor aleatoare* $X_1, \ldots, X_n$.

*O funcţie* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea că*

$$F(a_1, \ldots, a_n) = \int_{-\infty}^{a_n} \cdots \int_{-\infty}^{a_1} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

*oricare ar fi* $a_1, \ldots, a_n$, *se numeşte densitatea variabilelor aleatoare* $X_1, \ldots, X_n$.

Din propoziţia anterioară obţinem următoarea:

**Teorema 5.1.7** *Variabilele aleatoare* $X_1, \ldots, X_n$ *sunt independente dacă şi numai dacă funcţia de distribuţie corespunzătoare se poate scrie*

$$F(a_1, \ldots, a_n) = F_{X_1}(a_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(a_n),$$

*oricare ar fi* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

*Dacă în plus variabilele aleatoare* $X_1, \ldots, X_n$ *au densităţile* $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$ *continue, atunci* $X_1, \ldots, X_n$ *sunt independente dacă şi numai dacă*

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(a_1, \ldots, a_n) = f_{X_1}(a_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(a_n),$$

*oricare ar fi* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$.

**Demonstraţie.** Prima parte a enunţului rezultă din propoziţia anterioară.

Partea a doua rezultă din prima parte prin derivare în raport cu $\frac{\partial^n}{\partial a_1 \ldots \partial a_n}$, observând că dacă $f_1, \ldots, f_n$ sunt continue, atunci $F_{X_i}$ sunt derivabile şi are loc

$$\frac{\partial}{\partial a_i} F_{X_i}(a_i) = f_{X_i}(a_i),$$

şi similar pentru $F_{X_1,\ldots,X_n}$. ■

Importanţa independenţei rezultă din următoarea:

**Teorema 5.1.8** *Dacă $X_1, \ldots, X_n$ sunt variabile aleatoare independente şi $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţie măsurabilă pentru care $\varphi \geq 0$ sau $\varphi(X_1, \ldots, X_n)$ este o variabilă aleatoare integrabilă, atunci*

$$M(\varphi(X_1, \ldots, X_n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dF_{X_1}(x_1) \ldots dF_{X_n}(x_n).$$

*În particular, dacă variabilele aleatoare $X_1, \ldots, X_n$ au densităţile $f_{X_1}, \ldots, f_{X_n}$, atunci are loc*

$$M(\varphi(X_1, \ldots, X_n)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

**Demonstraţie.** Rezultă din teorema Fubini folosind teorema anterioară. ■

Considerând $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdot \ldots \varphi_n(x_n)$, se obţine următoarea consecinţă importantă:

**Consecinţa 5.1.9** *Dacă variabilele aleatoare $X_1, \ldots X_n$ sunt independente, şi funcţiile $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt măsurabile, astfel încât $\varphi_i \geq 0$ sau $\varphi_i(X_i)$ sunt variabile aleatoare integrabile, atunci*

$$M(\varphi_1(X_1) \cdot \ldots \cdot \varphi_n(X_n)) = M(\varphi_1(X_1)) \cdot \ldots \cdot M(\varphi_n(X_n)).$$

*În particular, dacă $X_1, \ldots X_n$ sunt independente şi $X_i \geq 0$ sau $X_i$ sunt integrabile, atunci*

$$M(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot \ldots \cdot M(X_n)$$

**Observaţia 5.1.10** *Din consecinţa anterioară rezultă că dacă $X$ şi $Y$ sunt variabile aleatoare independente, ne-negative sau integrabile, atunci $M(XY) = M(X)M(Y)$. Reciproca nu este în general adevărată, aşa după cum rezultă din Exerciţiul 5.1.6.*

*Două variabile aleatoare $X$ şi $Y$ pentru care $M(XY) = M(X)M(Y)$ se numesc necorelate.*

## EXERCIŢII

**Exerciţiul 5.1.1** *Să se arate că evenimentele* $A, B \in \mathcal{F}$ *sunt independente dacă şi numai dacă variabilele aleatoare* $1_A$ *şi* $1_B$ *sunt independente.*

**Exerciţiul 5.1.2** *Să se arate că variabilele aleatoare* $X$ *şi* $Y$ *sunt independente dacă şi numai dacă* $\sigma$*-algebrele generate de acestea,* $\sigma(X)$ *şi* $\sigma(Y)$ *sunt independente.*

**Exerciţiul 5.1.3** *Fie* $X_1, X_2$ *variabile aleatoare cu* $P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = 1/2$*. Să se arate că* $X_1, X_2, X_1X_2$ *sunt independente două cât două, dar nu sunt independente.*

**Exerciţiul 5.1.4** *Găsiţi un exemplu de trei evenimente* $A_1, A_2, A_3$ *astfel încât* $A_1$ *şi* $A_2$ *sunt independente,* $A_1$ *şi* $A_3$ *sunt independente, dar* $A_1$ *şi* $A_2 \cup A_3$ *nu sunt independente.*

**Exerciţiul 5.1.5** *Să se arate că dacă* $X$ *este o variabilă aleatoare integrabilă şi* $X$ *şi* $Y$ *sunt variabile aleatoare independente, atunci*

$$M\left(X1_{\{Y\in B\}}\right) = M(X)\,P(Y \in B),$$

*pentru orice mulţime Boreliană* $B \in \mathcal{B}$*.*

**Exerciţiul 5.1.6** *Considerăm spaţiul de probabilitate* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *unde* $\Omega = (0, 1)$*,* $\mathcal{F} = \mathcal{B} \cap (0, 1)$ *familia mulţimilor Boreliene pe* $(0, 1)$ *şi* $P = \lambda$ *măsura Lebesgue pe* $(0, 1)$*. Să se arate că variabilele aleatoare*

$$X_n(\omega) = \sin(2n\pi\omega), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

*sunt necorelate (adică verifică* $M(X_iX_j) = M(X_i)\,M(X_j)$*,* $i \neq j$*) dar nu sunt independente.*