Tema 2

Soluții

Exercițiul 1

Efectuăm aruncări succesive a două zaruri echilibrate şi suntem interesaţi in găsirea probabilităţii evenimentului ca suma 5 (a feţelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7. Pentru aceasta presupunem că aruncările sunt *independente*.

1. Calculaţi pentru inceput probabilitatea evenimentului E_n: *in primele* $n-1$ *aruncări nu a apărut nici suma* 5 *şi nici suma* 7 *iar in a* n*-a aruncare a apărut suma* 5. Concluzionaţi.
2. Aceeaşi intrebare, dar inlocuind 5 cu 2.

1. Considerăm evenimentele următoare:
   - $A_i = \{\text{suma celor două zaruri la cea de- a } i\text{-a aruncare este } 5\}$
   - $B_i = \{\text{suma celor două zaruri la cea de- a } i\text{-a aruncare este } 7\}$

   Evenimentul E_n se scrie

   $$E_n = (A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n.$$

   Aplicand independența avem că

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(E_n) &= \mathbb{P}((A_1^c \cap B_1^c) \cap (A_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap A_n) \\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(A_2^c \cap B_2^c) \times \cdots \times \mathbb{P}(A_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(A_n) \\ &= \mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c)^{n-1}\mathbb{P}(A_n).\end{aligned}$$

   Observăm că spațiul stărilor la cea de-a n-a lansare este $\Omega = \{(i,j) | 1 \leq i,j \leq 6\}$ și probabilitatea ca suma celor două zaruri să fie 5 este $\mathbb{P}(A_n) = \frac{4}{36}$, deoarece cazurile favorabile sunt $\{(1,4),(2,3),(4,1),(3,2)\}$. Obținem de asemenea că probabilitatea ca suma să nu fie nici 5 și nici 7 la prima lansare este $\mathbb{P}(A_1^c \cap B_1^c) = \frac{26}{36}$, deoarece situațiile in care suma este 7 sunt $\{(1,6),(2,3),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$.

   În concluzie, probabilitatea evenimentului

   $$A = \{\text{suma 5 (a fețelor celor două zaruri) să apară inaintea sumei 7}\}$$

   este

   $$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{26}{36}\right)^{n-1} \frac{4}{36} \\ &= \frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{13}{18}\right)^n = \frac{1}{9} \frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{2}{5}.\end{aligned}$$

2. Fie F_n evenimentul ce corespunde la: *in primele $n-1$ aruncări nu a apărut nici suma 2 și nici suma 7 iar în a n-a aruncare a apărut suma 2* și C_i evenimentul ce corespunde la suma celor două zaruri la cea de-a i-a aruncare este 2. Avem

$$F_n = (C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n$$

și probabilitatea lui $\mathbb{P}(F_n)$ este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(F_n) &= \mathbb{P}((C_1^c \cap B_1^c) \cap (C_2^c \cap B_2^c) \cap \cdots \cap (C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \cap C_n) \\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) \times \mathbb{P}(C_2^c \cap B_2^c) \times \cdots \times \mathbb{P}(C_{n-1}^c \cap B_{n-1}^c) \times \mathbb{P}(C_n) \\ &= \mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c)^{n-1}\mathbb{P}(C_n).\end{aligned}$$

Avem $\mathbb{P}(C_n) = \frac{1}{36}$ (deoarece doar $(1,1)$ ne dă suma 2) și $\mathbb{P}(C_1^c \cap B_1^c) = \frac{36-7}{36} = \frac{29}{36}$. Prin urmare probabilitatea evenimentului căutat, pe care il notă cu B, este

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(F_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{29}{36}\right)^{n-1} \frac{1}{36} \\ &= \frac{1}{36}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{29}{36}\right)^{n} = \frac{1}{36}\frac{1}{1-\frac{29}{36}} = \frac{1}{7}.\end{aligned}$$

Exercițiul 2

Maria este anul II și urmează cursul de probabilități. Știm că la sfârșitul fiecărei săptămâni ea poate fi sau la zi cu materia sau să rămână în urmă. Dacă este la zi cu materia într-o săptămână dată atunci probabilitatea ca ea să fie la zi cu materia (sau să rămână în urmă) în săptămâna ce urmează este de 0.8 (respectiv 0.2). Dacă este rămasă în urmă cu materia într-o săptămână dată atunci șansa ca ea să ajungă cu materia la zi este 0.4 iar ca să rămână în urmă este de 0.6. Știind că atunci când a început cursul era cu materia la zi care este probabilitatea ca ea să fie cu materia la zi și după trei săptămâni? Dar la sfârșitul cursului (cursul are 14 săptămâni)?

Fie A_i și B_i evenimentele prin care Maria este la zi cu materia, respectiv a rămas în urmă, după i săptămâni. Conform formulei probabilității totale avem

$$\mathbb{P}(A_3) = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3|A_2) + \mathbb{P}(B_2)\mathbb{P}(A_3|B_2) = \mathbb{P}(A_2)\cdot 0.8 + \mathbb{P}(B_2)\cdot 0.4$$

Probabilitățile $\mathbb{P}(A_2)$ și $\mathbb{P}(B_2)$ pot fi calculate în același mod:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_2) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(A_2|B_1) = \mathbb{P}(A_1)\cdot 0.8 + \mathbb{P}(B_1)\cdot 0.4 \\ \mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(B_2|A_1) + \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}(B_2|B_1) = \mathbb{P}(A_1)\cdot 0.2 + \mathbb{P}(B_1)\cdot 0.6\end{aligned}$$

și ținând cont de ipoteză (Maria începe semestrul cu materia la zi) avem $\mathbb{P}(A_1) = 0.8$ și $\mathbb{P}(B_1) = 0.2$ de unde concluzionăm că $\mathbb{P}(A_2) = 0.72$, $\mathbb{P}(B_2) = 0.28$ și prin urmare $\mathbb{P}(A_3) = 0.688$.

În general avem că după $i+1$ săptămâni

$$\mathbb{P}(A_{i+1}) = \mathbb{P}(A_i) \cdot 0.8 + \mathbb{P}(B_i) \cdot 0.4$$
$$\mathbb{P}(B_{i+1}) = \mathbb{P}(A_i) \cdot 0.2 + \mathbb{P}(B_i) \cdot 0.6$$

cu valorile inițiale $\mathbb{P}(A_1) = 0.8$ și $\mathbb{P}(B_1) = 0.2$.

k	$\mathbb{P}(A_k)$	$\mathbb{P}(B_k)$
1	0.8000000	0.2000000
2	0.7200000	0.2800000
3	0.6880000	0.3120000
4	0.6752000	0.3248000
5	0.6700800	0.3299200
6	0.6680320	0.3319680
7	0.6672128	0.3327872
8	0.6668851	0.3331149
9	0.6667540	0.3332460
10	0.6667016	0.3332984
11	0.6666806	0.3333194
12	0.6666723	0.3333277
13	0.6666689	0.3333311
14	0.6666676	0.3333324

Exercițiul 3

Fie X o variabilă aleatoare a cărei repartiție este:

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}$$

Să se scrie repartițiile variabilelor $3X + 7$, X^2, X^3, $X + X^2$ și să se calculeze probabilitățile $\mathbb{P}\left(X > -\frac{1}{3}\right)$ și $\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{4} | X \geq -\frac{1}{2}\right)$.

Se poate observa cu ușurință că variabila aleatoare $3X + 7 \in \{4, 7, 10\}$ cu probabilitățile 0.3, 0.2 respectiv 0.5, de unde deducem că $3X + 7$ este repartizată

$$3X + 7 \sim \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Pentru variabila aleatoare X^2 observăm că $X^2 \in \{0, 1\}$ iar $\mathbb{P}(X^2 = 0) = 0.2$ și $\mathbb{P}(X^2 = 1) = \mathbb{P}(X = -1) + \mathbb{P}(X = 1) = 0.8$, astfel

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

În mod similar obținem:

$$X^3 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.5 \end{pmatrix}, \quad X + X^2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

De asemenea avem că

$$\mathbb{P}\left(X > -\frac{1}{3}\right) = \mathbb{P}(\{X = 0\} \cup \{X = 1\}) = 0.7,$$

iar

$$\mathbb{P}\left(X < \frac{1}{4} | X \geq -\frac{1}{2}\right) = \frac{\mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} \leq X < \frac{1}{4}\right)}{\mathbb{P}\left(X \geq -\frac{1}{2}\right)} = \frac{0.2}{0.7} = \frac{2}{7}.$$

Exercițiul 4

Fie X o variabilă aleatoare cu valori in $\mathbb{N}$, aşa incat $p_n = \mathbb{P}(X = n) > 0$ pentru toţi $n \in \mathbb{N}$.

a) Arătaţi că pentru $\lambda > 0$ următoarele afirmaţii sunt echivalente:

   i) X este o variabilă Poisson de parametru λ

   ii) Pentru toţi $n \geq 1$ avem $\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda}{n}$

b) Dacă $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ determinaţi

   i) Valoarea k pentru care $\mathbb{P}(X = k)$ este maximă.

   ii) Valoarea lui λ care maximizează $\mathbb{P}(X = k)$, pentru k fixat.

a) Dacă i) este adevărată atunci $p_n = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$ de unde obținem imediat ii). Reciproc, presupunem ii) adevărată și avem că $\frac{p_n}{p_0} = \frac{p_1}{p_0}\frac{p_2}{p_1}\cdots\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{\lambda^n}{n!}$ de unde $p_n = p_0\frac{\lambda^n}{n!}$. Cum $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ obținem că $p_0 = e^{-\lambda}$ și putem să concluzionăm.

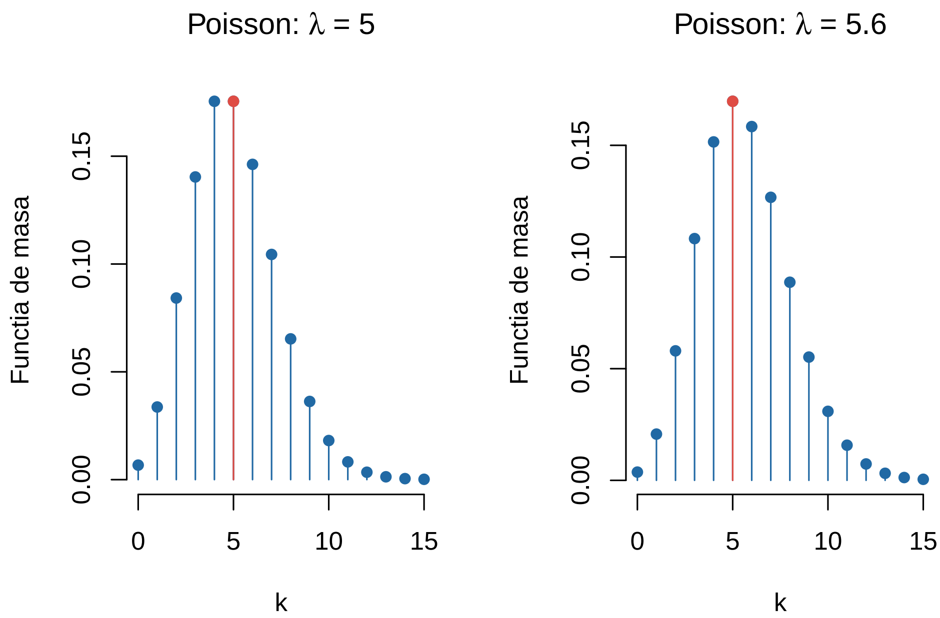
b) i) știm că $\mathbb{P}(X = j) = \frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}$ și vrem să evaluăm raportul $\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X=j-1)}$:

$$\frac{\mathbb{P}(X = j)}{\mathbb{P}(X = j-1)} = \frac{\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^{j-1}}{(j-1)!}e^{-\lambda}} = \frac{\lambda}{j}.$$

Putem observa că

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X = j) \geq \mathbb{P}(X = j-1), \quad \text{dacă } \lambda \geq j \\ &\mathbb{P}(X = j) < \mathbb{P}(X = j-1), \quad \text{dacă } \lambda < j. \end{aligned}$$

ceea ce arată că $j = [\lambda]$ este punctul maxim și $\mathbb{P}(X = [\lambda]) = \frac{\lambda^{[\lambda]}}{[\lambda]!}e^{-\lambda}$ este valoarea maximă.



ii) După cum am văzut la punctul precedent avem $\frac{\mathbb{P}(X=j)}{\mathbb{P}(X=j-1)} = \frac{\lambda}{j}$. Dacă $j > 0$ este fixat atunci putem observa că maximum este atins pentru $\lambda = j$.

Exercițiul 5

Fie X o variabilă discretă astfel încât $\mathbb{P}(X = k) = \frac{(1-p)^k}{-k\log(p)}$ dacă $k \geq 1$ și $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, cu $0 < p < 1$. Să se calculeze $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$ și $Var[X]$.

Pentru calculul mediei folosim definiția și obținem:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{(1-p)^k}{-k\log(p)} = -\frac{1}{\log(p)}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k$$
$$= -\frac{1}{\log(p)}\left[\frac{1}{1-(1-p)} - 1\right] = -\frac{1-p}{p\log(p)}.$$

Pentru calculul momentului de ordin 2 avem:

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{(1-p)^k}{-k\log(p)} = -\frac{1}{\log(p)}\sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^k$$
$$= -\frac{1}{\log(p)}(1-p)\sum_{k=1}^{\infty}\left((1-p)^k\right)' = -\frac{1}{\log(p)}\frac{1-p}{p^2} = -\frac{1-p}{p^2\log(p)}.$$

Cum $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$ decucem că

$$Var[X] = -\frac{1-p}{p^2\log(p)} - \left(\frac{1-p}{p\log(p)}\right)^2 = \frac{(1-p)(1-p+\log(p))}{-p^2\log^2(p)}.$$

Exercițiul 6

Bobby Fischer și Boris Spassky joacă un meci de șah în care primul jucător care câștigă o partidă câștigă și meciul. Regula spune că după 10 remize succesive meciul se declară egal. Știm că o partidă poate fi câștigată de Fischer cu probabilitatea de 0.4, câștigată de Spassky cu probabilitatea de 0.3 și este remiză cu probabilitatea de 0.3, independent de rezultatele din partidele anterioare.

a) Care este probabilitatea ca Fischer să câștige meciul?

b) Care este funcția de masă a duratei meciului (durata se măsoară în număr de partide jucate)?

a) Fie L durata unui meci (numărul de partide jucate până la câștig). Dacă Fischer câștigă un meci care constă din L partide atunci primele $L-1$ partide au fost remiză. Astfel obținem că probabilitatea ca Fischer să câștige este

$$\mathbb{P}(\text{Fischer câștigă}) = \sum_{l=1}^{10}\mathbb{P}(L=l) = \sum_{l=1}^{10} 0.3^{l-1}\times 0.4 = 0.571425.$$

b) Meciul are durata L cu $L < 10$ dacă și numai dacă au loc $L-1$ remize urmate de un câștig de către oricare dintre cei doi jucători. Jocul are lungimea 10 dacă și numai dacă au avut loc 9 remize. Probabilitatea ca unul din cei doi jucători să câștige o partidă este de 0.7 $(0.4+0.3)$. Obținem astfel

$$\mathbb{P}(L=l) = \begin{cases} 0.3^{l-1}\times 0.7, & l = 1\dots 9\\ 0.3^9, & l = 10\\ 0, & \text{altfel.}\end{cases}$$

Exercițiul 7

Un administrator de reprezentanţă de maşini comandă uzinei Dacia N maşini, numărul aleator X de maşini pe care il poate vinde reprezentanţa sa intr-un an fiind un număr intreg intre 0 şi $n \geq N$, toate avand aceeaşi probabilitate. Maşinile vandute de administrator ii aduc acestuia un beneficiu de a unităţi monetare pe maşină iar maşinile nevandute ii aduc o pierdere de b unităţi. Calculaţi valoarea medie a caştigului G reprezentanţei de maşini şi deduceţi care este comanda optimă.

Dacă numărul de mașini vandute intr-un an de reprezentanță este mai mare decat N, $X \geq N$, atunci caștigul administratorului este $G = aN$. Dacă $X < N$, atunci administratorul vinde X mașini și ii rămân $N-X$, deci caștigul devine $G = aX - b(N-X)$. Prin urmare avem

$$G = \begin{cases} aN & \text{dacă } X \geq N\\ aX - b(N-X) & \text{dacă } X < N\end{cases}$$

deci

$$\mathbb{E}[G] = aN\mathbb{P}(X \geq N) + \sum_{x=0}^{N-1}[ax - b(N-x)]\mathbb{P}(X = x).$$

Din ipoteză știm că toți intregii $x \in \{0, 1, \dots, n\}$ sunt de aceeași probabilitate, mai exact știm că X este o variabilă aleatoare uniformă, deci $\mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n+1}$ (administratorul vinde același număr de mașini cu aceeași probabilitate - în realitate nu este cazul !). Obținem că:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[G] &= aN \sum_{x=N}^{n} \frac{1}{n+1} + \sum_{x=0}^{N} \frac{(a+b)x - bN}{n+1} \\
&= \frac{aN(n-N+1)}{n+1} + (a+b)\frac{N(N-1)}{2(n+1)} - \frac{bN^2}{n+1} \\
&= \frac{N[(2n+1)a - b - (a+b)N]}{2(n+1)}.
\end{aligned}$$

Pentru a găsi valoarea optimă a numărului de mașini pe care administratorul ar trebui să le comande este suficient să găsim maximul numărătorului lui $\mathbb{E}[G]$. Fie $g(N) = N[(2n+1)a - b - (a+b)N]$ atunci $g'(N) = (2n+1)a - b - 2(a+b)N$ de unde rezolvand ecuația $g'(N) = 0$ deducem că $N = \frac{(2n+1)a-b}{2(a+b)}$. Mai mult derivata a doua ne dă $g''(N) = -2(a+b) < 0$ ceea ce ne arată că valoarea găsită corespunde maximului.