Tema 5

Soluții

Exercițiul 1

Fie $X_1, X_2, ldots$ un șir de variabile aleatoare independente și repartizate uniform pe intervalul $[0, \theta]$, cu $\theta > 0$. Să se arate că șirul de variabile aleatoare $Y_n = \max_{1\leq k\leq n} X_k$ converge în probabilitate la θ.

Pentru a demonstra că $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$ trebuie să verificăm că $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = 0$. Avem

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| > \varepsilon) = \mathbb{P}(-\varepsilon < \hat{\theta}_n - \theta < \varepsilon) = \mathbb{P}(\hat{\theta}_n < \theta + \varepsilon) - \mathbb{P}(\hat{\theta}_n < \theta - \varepsilon).$$

În plus

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\hat{\theta}_n < a) &= \mathbb{P}(\max_{1\leq k\leq n} X_k < a) = \mathbb{P}(X_1 < a, X_2 < a, \dots, X_n < a)\\ &\overset{indep.}{=} \mathbb{P}(X_1 < a)\mathbb{P}(X_2 < a)\cdots\mathbb{P}(X_n < a) \overset{i.d.}{=} \mathbb{P}(X_1 < a)^n,\end{aligned}$$

și cum $X_1 \sim \mathcal{U}[0, \theta]$ deducem că $\mathbb{P}(X_1 < a) = \frac{a}{\theta}\mathbf{1}_{[0,\theta]}(a)$ astfel $\mathbb{P}(\hat{\theta}_n < a) = \left(\frac{a}{\theta}\right)^n \mathbf{1}_{[0,\theta]}(a)$.

Dacă luăm $a = \theta + \varepsilon$ avem $\mathbb{P}(\hat{\theta}_n < a) = 1$ și dacă luăm $a = \theta - \varepsilon$ avem $\mathbb{P}(\hat{\theta}_n < a) = \left(\frac{\theta-\varepsilon}{\theta}\right)^n$, prin urmare

$$\mathbb{P}(|\hat{\theta}_n - \theta| \leq \varepsilon) = 1 - \left(\frac{\theta - \varepsilon}{\theta}\right)^n \to 1 \text{ pentru } n \to \infty,$$

de unde $\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$.

Exercițiul 2

Fie $(X_n)_{n\geq 1}$ un șir de variabile aleatoare pozitive și independente cu $\mathbb{E}[X_n] = c \in (0, 1)$ pentru orice n. Dacă $Y_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ arătați că $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Cum variabilele aleatoare $X_1, \dots, X_n$ sunt independente avem că $\mathbb{E}[Y_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdots \mathbb{E}[X_n] = c^n$, $c \in (0, 1)$. Aplicând inegalitatea lui Markov obținem, pentru $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}[|Y_n|]}{\varepsilon} = \frac{c^n}{\varepsilon} \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$

unde am ținut seama de faptul că v.a. sunt pozitive, deci $|Y_n| = Y_n$. Cum $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar rezultă că $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Exercițiul 3

Să presupunem că dispunem de 100 de becuri a căror durată de viață sunt variabile aleatoare independente și indentic repartizate de lege exponențială de medie 5 ore. Dacă becurile sunt aprinse pe rând și o dată ce un bec se arde este înlocuit instantaneu de un altul nou, care este probabilitatea să mai avem un bec intact după 525 de ore ?

Fie variabilele aleatoare $X_1, X_2, \dots, X_{100} \sim Exp\left(\frac{1}{5}\right)$, variabilele care măsoară durata de viață a becurilor. Căutăm probabilitatea $\mathbb{P}(S_{100} > 525)$, unde $S_{100} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{100}$. Știm că pentru o variabilă aleatoare $X \sim Exp(\lambda)$ media ei este $\mathbb{E}[X] = \mu = \frac{1}{\lambda}$ iar varianța este $Var[X] = \sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$. În problemă avem $\lambda = \frac{1}{5}$ prin urmare $\mu = 5$ și $\sigma^2 = 25$. Aplicând Teorema Limită Centrală avem

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \leq x\right) \approx \Phi(x) \text{ oú } \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

deci

$$\mathbb{P}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n < \underbrace{n\mu + x\sqrt{n\sigma^2}}_{=\alpha}\right) \approx \Phi(x)$$

astfel

$$\mathbb{P}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n < \alpha\right) \approx \Phi\left(\frac{\alpha - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Știm că $\alpha = 525$, $n = 100$, $\mu = 5$ și $\sigma = 5$ de unde găsim că $\frac{\alpha - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{525-500}{5\times 10} = \frac{1}{2}$ și obținem

$$\mathbb{P}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} < 525\right) \approx \Phi\left(\frac{1}{2}\right) = 0.6915 \Longrightarrow \mathbb{P}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_{100} > 525\right) \approx 0.3085.$$

Exercițiul 4

O parcare suprateranǎ este construită pentru un nou imobil care are 200 de apartamente. Să presupunem că numărul de mașini pe apartament este 0, 1 și respectiv 2 cu probabilitățile 0.1, 0.6 și respectiv 0.3. Care este numărul minim de locuri de parcare pe care inginerul constructor trebuie să le prevadă pentru a fi sigur în proporție de 95% că sunt locuri suficiente pentru toate mașinile din imobil ?

Fie $X_i \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.3 \end{pmatrix}$ variabilele aleatoare care corespund la numărul de mașini ce aparțin apartamentului i și $S_{200} = X_1 + X_2 + \cdots + X_{200}$ numărul total de mașini din imobil. Căutăm α astfel încât $\mathbb{P}(S_{200} \leq \alpha) = 95\%$.

Din Teorema Limită Centrală știm că

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{\sqrt{Var[S_n]}} \leq x\right) \approx \Phi(x) \text{ oú } \Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

de unde

$$\mathbb{P}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n < \alpha\right) \approx \Phi\left(\frac{\alpha - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right).$$

Cum $\mathbb{E}[X_1] = \mu = 0\times 0.1 + 1\times 0.6 + 2\times 0.3 = 1.2$ și $\sigma^2 = Var[X_1] = (0^2\times 0.1 + 1^2\times 0.6 + 2^2\times 0.3) - 1.2^2 = 0.36$ rezultă că

$$\mathbb{P}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n \leq \alpha\right) \approx \Phi\left(\frac{\alpha - 200\times 1.2}{0.6\sqrt{200}}\right) = 95\%$$

prin urmare $\frac{\alpha - 200\times 1.2}{0.6\sqrt{200}} \simeq 1.6448$ deci $\alpha = x\sigma\sqrt{n} + n\mu = 200\times 1.2 + 1.6448\times 0.6\times\sqrt{200} \simeq 254$.

Exercițiul 5

a) Fie X o variabilă aleatoare de medie 0 și varianță $\sigma^2 < \infty$. Arătați că penru orice $a > 0$ are loc inegalitatea

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + a^2}$$

b) Un grup de 200 de persoane, din care jumătate sunt bărbați, este divizat într-o 100 de perechi de câte 2 persoane. Dați o margine superioară pentru probabilitatea ca cel mult 30 dintre acestea să fie perechi mixte.

a) Fie $b > 0$ și să observăm că evenimentul $\{X \geq a\}$ este echivalent cu evenimentul $\{X + b \geq a + b\}$ de unde

$$\mathbb{P}(X \geq a) = \mathbb{P}(X + b \geq a + b) \leq \mathbb{P}\left((X+b)^2 \geq (a+b)^2\right)$$

deoarece dacă $\omega \in \{X + b \geq a + b\}$ atunci $\omega \in \left\{(X+b)^2 \geq (a+b)^2\right\}$. Aplicând inegalitatea lui Markov pentru $Y = (X+b)^2 \geq 0$ avem că

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \mathbb{P}\left((X+b)^2 \geq (a+b)^2\right) \leq \frac{\mathbb{E}\left[(X+b)^2\right]}{(a+b)^2} = \frac{\sigma^2 + b^2}{(a+b)^2}, \quad \forall b > 0,$$

unde în ultima egalitate am folosit faptul că variabila aleatoare X este de medie 0. Dacă luăm valoarea lui b care minimizează membrul drept, aceasta este $b = \frac{\sigma^2}{a}$, obținem rezultatul cerut și anume

$$\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}.$$

b) Observăm că dacă X este o variabilă aleatoare de medie μ și varianță σ^2 atunci inegalitatea de la punctul a) aplicată variabilelor $X - \mu$ și respectiv $\mu - X$ implică, pentru $a > 0$

$$\mathbb{P}(X \geq \mu + a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}$$
$$\mathbb{P}(X \leq \mu - a) \leq \frac{\sigma^2}{a^2 + \sigma^2}.$$

Dacă numerotăm bărbații de la 1 la 100 și definim variabilele aleatoare X_i, de tip Bernoulli, care iau valoarea 1 dacă bărbatul i este împerechiat cu o femeie și 0 altfel, atunci numărul de perechi mixte este

$$S = \sum_{i=1}^{100} X_i.$$

Deoarece bărbatul i are șanse egale să fie împerecheat cu oricare din cele 199 de persoane rămase, din care 100 sunt femei, avem că

$$\mathbb{E}[X_i] = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{100}{199}$$

iar pentru $i \neq j$ avem

$$\mathbb{E}[X_iX_j] = \mathbb{P}(X_i = 1, X_j = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1)\mathbb{P}(X_j = 1|X_i = 1) = \frac{100}{199} \times \frac{99}{197}.$$

Prin urmare găsim că

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i=1}^{100} \mathbb{E}[X_i] = 100 \times \frac{100}{199} \approx 50.25$$

iar

$$Var(S) = \sum_{i=1}^{100} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} Cov(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{100} Var(X_i) + 2\sum_{i<j} \left(\mathbb{E}[X_iX_j] - \mathbb{E}[X_i]\mathbb{E}[X_j]\right),$$

de unde

$$Var(S) = 100 \times \frac{100}{199}\frac{99}{199} + 2\binom{100}{2}\left[\frac{100}{199} \times \frac{99}{197} - \left(\frac{100}{199}\right)^2\right] \approx 25.126.$$

Aplicând inegalitatea de mai sus deducem că

$$\mathbb{P}(S \leq 30) = \mathbb{P}(S \leq \underbrace{50.25 - 20.25}_{\mu - a}) \leq \frac{25.126}{25.126 + 20.25^2} \approx 0.058.$$

Exercițiul 6

Fie X o variabilă aleatoare care ia volori în intervalul $[a, b]$. Arătați că $Var(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

Pentru a arăta identitatea să considerăm γ o constantă oarecare și să luăm media

$$\mathbb{E}[(X - \gamma)^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2\gamma\mathbb{E}[X] + \gamma^2$$

și să observăm că aceasta este minimă pentru $\gamma = \mathbb{E}[X]$ (extremul unei funcții de gradul doi în γ). Acest rezultat conduce la inegalitatea

$$Var(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \leq \mathbb{E}[(X - \gamma)^2], \quad \forall \gamma \in \mathbb{R}.$$

Considerând $\gamma = \frac{a+b}{2}$ (mijlocul intervalului) obținem

$$Var(X) \leq \mathbb{E}\left[\left(X - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] = \mathbb{E}[\underbrace{(X-a)(X-b)}_{\leq 0}] + \frac{(b-a)^2}{4} \leq \frac{(b-a)^2}{4}$$

de unde găsim rezultatul dorit.