Tema 1

Soluții

Exercițiul 1

Fie A, B și C trei evenimente. Exprimați în funcție de A, B, C și de operațiile cu mulțimi următoarele evenimente:

a) A singur se realizează

b) A și C se realizează dar nu și B

c) cele trei evenimente se produc

d) cel puțin unul dintre cele trei evenimente se produce

e) cel puțin două evenimente din cele trei se produc

f) cel mult un eveniment se produce

g) niciunul din cele trei evenimente nu se produce

h) exact două evenimente din cele trei se produc

a) A singur se realizează: $A \cap B^c \cap C^c$

b) A şi C se realizează dar nu şi B: $A \cap B^c \cap C$

c) cele trei evenimente se produc: $A \cap B \cap C$

d) cel puţin unul dintre cele trei evenimente se produce: $A \cup B \cup C$

e) cel puţin două evenimente din cele trei se produc: $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B \cap C)$

f) cel mult un eveniment se produce: $(A^c \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B^c \cap C^c)$

g) niciunul din cele trei evenimente nu se produce: $A^c \cap B^c \cap C^c$

h) exact două evenimente din cele trei se produc: $(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c)$

Exercițiul 2

Într-o urnă se află bile albe și negre într-o proporție oarecare. Se efectuează la întâmplare 5 extrageri cu întoarcere și considerăm A_i evenimentul, din câmpul de evenimente atașat experimentului, ce constă în obținerea unei bile albe la extragerea i, $1 \leq i \leq 5$. Să se exprime următoarele evenimente:

a) A - numai o bilă este albă;

b) B - cel puțin o bilă este neagră;

c) C - obținerea a cel mult două bile albe;

d) D - obținerea a cel puțin trei bile albe;

e) E - numai două bile sunt negre.

Evenimentele A, B, C și D se pot exprima în modul următor:

$$\begin{aligned}
A &= (A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c) \\
&\quad \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5)\,, \\
B &= (A_1^c \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5) \\
&\quad \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5^c)\,, \\
C &= (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup A \bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} \left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3}^c \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c\right), \\
D &= (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \cup B \bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} \left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c\right), \\
E &= \bigcup_{i_1,i_2,i_3,i_4,i_5} \left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap A_{i_3} \cap A_{i_4}^c \cap A_{i_5}^c\right).
\end{aligned}$$

Exercițiul 3

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un câmp de probabilitate. Arătați că:

a) funcția $d(A, B) = \mathbf{P}(A \triangle B)$ este o distanță pe $\mathcal{F}$

b) $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$

a) Să reamintim că $d : X \times X \to \mathbb{R}$ este o distanță pe X dacă verifică următoarele proprietăți:

i) $d(x, y) \geq 0$ (pozitivitate)

ii) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetrie)

iii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ pentru orice $x, y, z \in X$ (inegalitatea triunghiului)

În cazul problemei noastre obsrvăm că $d(A, B) \geq 0$ și că $d(A, B) = d(B, A)$ deoarece $A \triangle B = B \triangle A$. Să presupunem acum că $d(A, B) = 0$. Avem $A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B)$ iar din $(A \cap B^c) \cap (A^c \cap B) = \emptyset$ rezultă că

$$\mathbb{P}(A \triangle B) = P(A \cap B^c) + P(A^c \cap B) = 0 \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B^c) = 0 \text{ și } \mathbb{P}(A^c \cap B) = 0$$

de unde $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B)$ deci $A = B$ (a.s.).

Fie $A, B, C \in \mathcal{F}$. Vrem să arătăm că $d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$. Considerăm evenimentele elementare $A \cap B \cap C$, $A^c \cap B \cap C$, $A \cap B^c \cap C$, $A \cap B \cap C^c$, $A^c \cap B^c \cap C$, $A^c \cap B \cap C^c$ și $A \cap B^c \cap C^c$. Avem următoarele descompuneri:

$$\begin{aligned}
A \triangle B &= (A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \\
A \triangle C &= (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C) \\
B \triangle C &= (A \cap B \cap C^c) \cup (A^c \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C) \cup (A^c \cap B^c \cap C)\,.
\end{aligned}$$

Observăm că $A \triangle B \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle C)$ de unde

$$\mathbb{P}(A \triangle B) \leq \mathbb{P}\left((A \triangle C) \cup (B \triangle C)\right) \leq \mathbb{P}(A \triangle C) + \mathbb{P}(B \triangle C)$$

ceea ce arată că d este distanță.

b) Considerăm evenimentele elementare disjuncte $A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ şi $A^c \cap B^c$. Avem următoarea descompunere

$$A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$$
$$B = (A^c \cap B) \cup (A \cap B)$$

de unde obținem că

$$\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A^c \cap B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

ceea ce arată că

$$|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(A \triangle B).$$

Exercițiul 4

Într-un sertar se află șosete roșii și negre. Atunci când două șosete sunt scoase la întâmplare, probabilitatea ca ambele să fie de culoare roșie este $\frac{1}{2}$.

a) Care este numărul minim de șosete din sertar astfel ca proprietatea din ipoteză să fie îndeplinită ?

b) Care este numărul minim de șosete din seratar dacă numărul de șosete negre este par ?

Înainte de a da rezolvarea pentru cazul general vom începe printr-un exemplu numeric. Să presupunem că în sertar se află 5 șosete roșii și 2 negre. Atunci probabilitatea ca prima șosetă extrasă să fie roșie este $\frac{5}{5+2}$ iar dacă prima șosetă este roșie probabilitatea ca a doua să fie tot roșie este $\frac{4}{4+2}$. Astfel probabilitatea ca extrăgând două șosete din sertar acestea să fie de culoare roșie este

$$\frac{5}{5+2} \times \frac{4}{4+2} = \frac{10}{21}$$

În general, să presupunem că în sertar sunt r șosete de culoare roșie și b șosete de culoare neagră. Probabilitatea ca prima șosetă extrasă să aibă culoarea roșie este $\frac{r}{r+b}$ iar dacă prima șosetă este roșie atunci probabilitatea ca a doua să fie tot roșie este $\frac{r-1}{r+b-1}$. Din enunț știm că

$$\frac{r}{r+b} \times \frac{r-1}{r+b-1} = \frac{1}{2}$$

și trebuie să determinăm numărul minim de șosete care verifică această expresie. Putem observa că pentru $b > 0$ are loc

$$\frac{r}{r+b} > \frac{r-1}{r+b-1}$$

de unde găsim inegalitățile

$$\left(\frac{r}{r+b}\right)^2 > \frac{1}{2} > \left(\frac{r-1}{r+b-1}\right)^2 \iff \frac{r}{r+b} > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{r-1}{r+b-1}$$

care conduc la $(\sqrt{2}+1)b+1 > r > (\sqrt{2}+1)b$.

a) Pentru $b = 1$ avem că $2.414 < r < 3.414$ ceea ce revine la $r = 3$. Pentru $r = 3, b = 1$ găsim

$$\mathbb{P}(\text{două șosete roșii}) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

deci numărul minim de șosete care să verifice ipoteza este 4.

b) Pentru cazul în care numărul de șosete negre, b, este par avem următorul tabel

b	intervalul lui r	valoarea lui r	$\mathbb{P}$(două șosete roșii)
2	4.8 - 5.8	5	$\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \neq \frac{1}{2}$
4	9.7 - 10.7	10	$\frac{10}{14} \cdot \frac{9}{13} \neq \frac{1}{2}$
6	14.5 - 15.5	15	$\frac{15}{21} \cdot \frac{14}{20} = \frac{1}{2}$

Deci numărul minim de șosete din sertar trebuie să fie 21 atunci când numărul șosetelor negre este par.

Exercițiul 5

Se dorește verificarea fiabilității unui test de pentru depistarea nivelului de alcool al automobiliștilor. În urma studiilor statistice pe un număr mare de automobiliști, s-a observat că în general 0.5% dintre aceștia depășesc nivelul de alcool autorizat. Niciun test nu este fiabil 100%. Probabilitatea ca testul considerat să fie pozitiv atunci când doza de alcool autorizată este depășită precum și probabilitatea ca testul să fie negativ atunci când doza autorizată nu este depășită sunt egale cu $p = 0.99$.

1. Care este probabilitatea ca un automobilist care a fost testat pozitiv să fi depășit în realitate nivelul de alcool autorizat ?
2. Cât devine valoarea parametrului p pentru ca această probabilitate să fie de 95% ?
3. Un polițist afirmă că testul este mai fiabil sambăta seara (atunci când tinerii ies din cluburi). Știind că proporția de automobiliști care au băut prea mult în acest context este de 30%, determinațti dacă polițistul are dreptate.

Considerăm evenimentele următoare:

- $A = \{$testul considerat este pozitiv$\}$
- $B = \{$automobilistul a depășit nivelul de alcool autorizat$\}$

1. Din ipoteză știm că $\mathbb{P}(B) = 0.005$, $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A^c|B^c) = 0.99$. Vrem să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(B|A)$. Avem

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B|A) &= \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + [1-\mathbb{P}(A^c|B^c)]\,(1-\mathbb{P}(B))} = \frac{0.99 \times 0.005}{0.99\times 0.005 + 0.01 \times 0.995} \approx 0.332.\end{aligned}$$

2. Căutăm p așa încât $\mathbb{P}(B|A) = 0.95$. Am văzut că $\mathbb{P}(B|A) = \frac{p\mathbb{P}(B)}{p\mathbb{P}(B)+(1-p)(1-\mathbb{P}(B))}$ de unde

$$p = \frac{(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A)}{(1-\mathbb{P}(B))\mathbb{P}(B|A) + (1-\mathbb{P}(B|A))\mathbb{P}(B)} = \frac{0.995 \times 0.95}{0.995 \times 0.95 + 0.05 \times 0.005} \approx 0.99973.$$

3. Știm că $\mathbb{P}(B) = 0.3$, prin urmare $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c) = 0.99 \times 0.3 + 0.01 \times 0.7 \approx 0.304$ și

$$\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A|B^c)\mathbb{P}(B^c)} \approx 0.9769,$$

de unde tragem concluzia că testul este mult mai fiabil în această situație.

Exercițiul 6

O urnă conține r bile roșii și b bile albastre. O bilă este extrasă la întamplare din urnă, i se notează culoarea și este intoarsă în urnă împreună cu alte d bile de aceeași culoare. Repetăm acest proces la nesfarșit. Calculați:

a) Probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albastră.

b) Probabilitatea ca prima bilă să fie albastră știind că a doua bilă este albastră.

c) Fie B_n evenimentul ca a n-a bilă extrasă să fie albastră. Arătați că $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$, $\forall\, n \geq 1$.

d) Probabilitatea ca prima bilă este albastră știind că următoarele n bile extrase sunt albastre. Găsiți valoarea limită a acestei probabilități.

a) În acest caz probabilitatea pe care o căutăm este $\mathbb{P}(2b)$, unde $2b$ înseamnă că a doua bilă a fost albastră. Din formula probabilității totale avem:

$$\mathbb{P}(2b) = \mathbb{P}(2b|1r)\mathbb{P}(r) + \mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(b) = \frac{b}{r+b+d} \cdot \frac{r}{r+b} + \frac{b+d}{r+b+d} \cdot \frac{b}{r+b} = \frac{b}{b+r}.$$

b) Trebuie să calculăm probabilitatea:

$$\mathbb{P}(1b|2b) = \frac{\mathbb{P}(2b|1b)\mathbb{P}(1b)}{\mathbb{P}(2b)} = \frac{\frac{b+d}{r+b+d} \cdot \frac{b}{r+b}}{\frac{b}{b+r}} = \frac{b+d}{r+b+d}.$$

c) Folosim inducție. Pentru $n = 2$ am văzut că propoziția este adevărată din punctele precedente. Să presupunem acum că $\mathbb{P}(B_k) = \mathbb{P}(B_1)$ pentru orice $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ și vrem să arătăm că relația rămane adevărată și pentru $k = n$. Observăm că dacă $N_k(b)$ reprezintă numărul de bile albastre la pasul k atunci:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(B_n) &= \mathbb{P}(B_n|B_{n-1})\mathbb{P}(B_{n-1}) + \mathbb{P}(B_n|B_{n-1}^c)\mathbb{P}(B_{n-1}^c)\\ &= \frac{N_{n-2}(b)+d}{r+b+(n-1)d} \cdot \frac{b}{r+b} + \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-1)d} \cdot \frac{r}{r+b},\end{aligned}$$

unde am folosit pasul de inducție ($\mathbb{P}(B_{n-1}) = \frac{b}{r+b}$). Folosind din nou ipoteza de inducție avem

$$\mathbb{P}(B_{n-2}) = \frac{N_{n-2}(b)}{r+b+(n-2)d} = \frac{b}{r+b}$$

de unde găsim $N_{n-2}(b) = \frac{b}{r+b} \cdot [r+b+(n-2)d]$. Înlucuind această relație în expresia lui $\mathbb{P}(B_n)$ obținem:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_n) &= \frac{N_{n-2}(b)(b+r)+bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]} = \frac{\frac{b}{r+b}\cdot[r+b+(n-2)d](b+r)+bd}{(b+r)[r+b+(n-1)d]}\\
&= \frac{b[r+b+(n-1)d]}{(b+r)[r+b+(n-1)d]} = \frac{b}{b+r} = \mathbb{P}(B_1).
\end{aligned}$$

d) Trebuie să găsim probabilitatea $\mathbb{P}(B_1|B_2,\dots B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1})}$. Avem din formula probabilității totale că:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)\\
&= \frac{b+nd}{b+r+nd}\cdot\frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d}\cdots\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{b+r}\\
&= \frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}
\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_1,B_2,\dots,B_{n+1}) + \mathbb{P}(B_1^c,B_2,\dots,B_{n+1})\\
&= \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)+\\
&+ \mathbb{P}(B_{n+1}|B_1^c,\dots,B_n)\mathbb{P}(B_n|B_1^c,\dots,B_{n-1})\dots\mathbb{P}(B_2|B_1^c)\mathbb{P}(B_1^c)\\
&= \frac{b+nd}{b+r+nd}\cdot\frac{b+(n-1)d}{b+r+(n-1)d}\cdots\frac{b+d}{b+r+d}\cdot\frac{b}{b+r}+\\
&+ \frac{b+(n-1)d}{b+r+nd}\cdots\frac{b}{b+r+d}\cdot\frac{r}{b+r}\\
&= \frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}.
\end{aligned}$$

Observăm că

$$\mathbb{P}(B_1|B_2,\dots,B_{n+1}) = \frac{\mathbb{P}(B_1,\dots,B_{n+1})}{\mathbb{P}(B_2,\dots,B_{n+1})} = \frac{\frac{b(b+d)\dots(b+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}}{\frac{b(b+d)\dots[b+(n-1)d](b+r+nd)}{(b+r)(b+r+d)\dots(b+r+nd)}} = \frac{b+nd}{b+r+nd} \to 1.$$

Exercițiul 7

Zece cartonașe pe care sunt scrise cifrele $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ și 9 sunt puse într-un bol. Cinci cartonașe sunt extrase la întâmplare și sunt așezate în rând în ordinea extragerii. Care este probabilitatea ca numărul de cinci cifre extras să fie divizibil cu 495 ?

Să presupunem că numerele extrase (în ordinea extragerii) sunt a, b, c, d și e. Atunci numărul format cu cifrele extase este

$$N = 10000a + 1000b + 100c + 10d + e.$$

Este ușor de observat că numărul cazurilor posibile în acest experiment este $10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30240$. Pentru a determina numărul cazurilor favorabile să observăm că $495 = 5 \times 9 \times 11$ deci N trebuie să fie divizibil cu 5, cu 9 și cu 11. Cum

$$10000a + 1000b + 100c + 10d$$

este întotdeauna multiplu de 5, găsim că N este divizibil cu 5 dacă și numai dacă $e = 0$ sau $e = 5$. Mai mult cum N se poate scrie sub forma

$$N = (9999a + 999b + 99c + 9d) + (a + b + c + d + e)$$

deducem că el este divizibil cu 9 dacă și numai dacă suma cifrelor lui este multiplu de 9 ($a + b + c + d + e$ este divizibil cu 9). De asemenea dacă scriem

$$N = (9999a + 1001b + 99c + 11d) + (a - b + c - d + e)$$

atunci prima paranteză este multiplu de 11 iar pentru ca N să fie divizibil cu 11 este necesar ca $a-b+c-d+e$ să fie divizibil cu 11.

Cum cifrele sunt distincte avem că

$$\begin{aligned} a + b + c + d + e &\geq 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10, \\ a + b + c + d + e &\leq 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35 \end{aligned}$$

prin urmare $a+b+c+d+e$ este divizibil cu 9 dacă și numai dacă $a+b+c+d+e \in \{18, 27\}$. Vom considera cele două cazuri separat.

1. Fie $a + b + c + d + e = 18$. Deoarece $a - b + c - d + e = 18 - 2b - 2d$ deducem că $a - b + c - d + e$ este par iar

$$|a - b + c - d + e| < 18$$

astfel $a-b+c-d+e = 0$ deoarece 0 este singurul multiplu de 11 par mai mic ca 18. Găsim că $a+c+e = b+d = 9$.

Dacă $e = 0$ atunci $a + c = b + d = 9$ deci perechile (a, c) și (b, d) pot fi extrase din cele 8 perechi $(1, 8), (2, 7), \ldots, (8, 1)$. O dată ce am ales (a, c) mai rămân 6 perechi pentru (b, d) conducând astfel la un total de $8 \cdot 6 = 48$ de numere.

Dacă $e = 5$ atunci $a + c = 4$ și $b + d = 9$ prin urmare (a, c) poate fi una din perechile $(0, 4), (4, 0), (1, 3), (3, 1)$. Dacă $(a, c) \in \{(0, 4), (4, 0)\}$ atunci $(b, d) \in \{(1, 8), (2, 7), (3, 6), (6, 3), (7, 2), (8, 1)\}$ iar dacă $(a, c) \in \{(1, 3), (3, 1)\}$ atunci $(b, d) \in \{(0, 9), (2, 7), (7, 2), (9, 0)\}$ de unde obținem un total de $2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 = 20$ de numere. Numărul de cazuri favorabile pentru scenariul 1 este 68.

2. Fie $a + b + c + d + e = 27$. În acest caz $a - b + c - d + e$ este impar iar din

$$27 > a - b + c - d + e > 27 - 2 \cdot 9 - 2 \cdot 8 = -7$$

găsim că $a - b + c - d + e = 11$ (singurul multiplu de 11 impar în mulțimea de valori posibile). Deoarece $11 = a - b + c - d + e = 27 - 2b - 2d$ deducem că $b + d = 8$ și respectiv $a + c + e = 19$. În acest caz nu putem avea $e = 0$ pentru că asta ar implica $a + c = 19$ dar $a + c < 9 + 8 = 17$ ceea ce conduce la $e = 5$. Avem $a + c = 14$ de unde $(a, c) \in \{(8, 6), (6, 8)\}$ iar $(b, d) \in \{(1, 7), (7, 1)\}$. Am obținut $2 \cdot 2 = 4$ numere favorabile în acest caz.

Combinând cele două cazuri avem $68 + 4 = 72$ cazuri favorabile iar probabilitatea căutată este $\frac{72}{30240} \approx 0.0023$.

Exercițiul 8

Domnul Ionescu pescuiește în iazul din spatele casei în care trăiesc 3 crapi și 7 carași. El decide să pescuiască până când prinde 4 pești. Presupunând că fiecare din cei 10 pești are aceeași șansă să fie prins și că toți peștii sunt de greutăți diferite, determinați probabilitatea evenimentelor următoare:

A = *unul din cei patru pești prinși este un crap*

B = *cel puțin unul din cei patru pești prinși este un crap*

C = *primul pește prins este un crap*

D = *al doilea pește prins este un crap*

E = *primii doi pești prinși sunt crapi*

F = *cel puțin unul din primii doi pești prinși este crap*

G = *fiecare din ultimii trei pești prinși cântărește mai mult decât cel precedent*

Evenimentele A și B nu depind de ordinea în care au fost pescuiți cei patru pești, prin urmare dacă considerăm Ω mulțimea tutor mulțimilor de patru pești prinși din cei 10 existenți atunci

$$|\Omega| = \binom{10}{4}.$$

Dacă notăm cu A_k submulțimea de pești din Ω care conține exact k crapi, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, atunci

$$|A_k| = \binom{3}{k}\binom{7}{4-k}$$

deoarece putem alege cei k crapi din cei 3 existenți în $\binom{3}{k}$ moduri și cei $4 - k$ carași din cei 7 existenți în $\binom{7}{4-k}$ moduri. Astfel, dacă notăm cu $p_k = \mathbb{P}(A_k)$ atunci

$$p_k = \frac{\binom{3}{k}\binom{7}{4-k}}{\binom{10}{4}}$$

de unde găsim că $\mathbb{P}(A) = p_1 = \frac{1}{2}$ iar $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - p_0 = \frac{5}{6}$.

Pentru următoarele evenimente ținem cont de ordinea de prindere a peștilor și considerăm Ω ca fiind mulțimea cvadrupelor formate cu cei 10 pești, astfel $|\Omega| = A_{10}^4 = \frac{10!}{(6)!}$.

Evenimentele C și D au aceeași probabilitate de realizare. Dacă i este poziția de interes atunci avem 3 crapi pe care putem să îi punem pe poziția i iar pe celelalte 3 poziții rămase putem să le ocupăm cu 3 pești din cei 9 rămași, deci

$$|C| = |D| = 3A_9^3$$

și $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(D) = \frac{3A_9^3}{A_{10}^4} = \frac{3}{10}$ adică probabilitatea de a extrage 3 crapi din 10 pești.

Pentru evenimentul E avem A_3^2 moduri de a alege crapii și A_8^2 de a alege ceilalți doi pești prin urmare

$$|E| = A_3^2 A_8^2$$

iar $\mathbb{P}(E) = \frac{A_3^2 A_8^2}{A_{10}^4} = \frac{1}{15}$.

Pentru determinarea probabilității de realizare a evenimentului $F = C \cup D$ să observăm că

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(D) - \mathbb{P}(E) = \frac{8}{15}.$$

Pentru evenimentul G căutăm numărul cazurilor în care greutățile celor patru pești prinși sunt ordonate crescător. A alege un cvadruplu de pești, în care aceștia sunt ordonați crescător după greutate, revine la a alege o mulțime de 4 pești din 10 și a le ordona greutățile (cum ordinea crescătoare este impusă, există o singură modalitate de a ordona cei patru pești selectați). Astfel numărul de elemente din G coincide cu numărul de moduri în care putem extrage 4 elemente dintr-o mulțime cu 10 elemente, adică

$$|G| = \binom{10}{4}$$

ceea ce conduce la $\mathbb{P}(G) = \frac{\binom{10}{4}}{A_{10}^4} = \frac{1}{24}$.