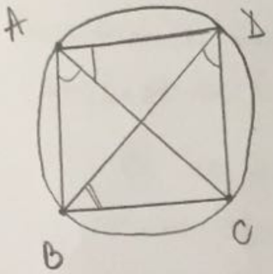
CURS 12

19.01.2017

GEOMETRIE COMPUTAȚIONALĂ

„Excepție" de la definiția muchiei ilegale (CAZ DEGENERAT)

Fie ~~A,B,C,D~~ ABCD patrulater inscriptibil (adică punctele A, B, C, D sunt conciclice: situate pe același cerc)



Vectorii $A(\mathcal{T}_{AC})$ și $A(\mathcal{T}_{BD})$ nu sunt neapărat egali, dar $\min(A(\mathcal{T}_{AC})) = \min(A(\mathcal{T}_{BD}))$

În acest caz, ambele muchii sunt egale.

COMENTARIU: Se poate decide dacă o muchie e „ilegală" folosind poziția unui punct față de un cerc.

EXEMPLU: ABCD pătrat

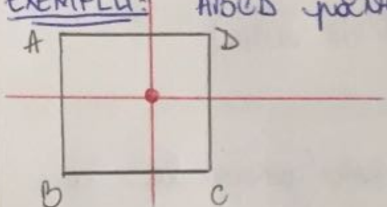


Diagrama Voronoi

Atât AC, cât și BD dau triangulări Delaunay.

Cui corespund semidreptele unei diagrame Voronoi?

R: Muchiilor înfășurătoarei convexe.

- semidrepte
- relații nr. vârfuri, nr. muchii } examen
- aspecte legate de complexitatea algoritmului lui Fortune

Câte evenimente de tip cerc vor fi?

→ n situri ⇒ linia parabolică are cel mult $2n-1$ arce ⇒ $O(n)$ arce

→ $O(n)$ triplete ⇒ ~~O(n)~~ cel mult $O(n)$ evenimente de tip cerc

→ Statul evenimentelor AVL pe frunze sunt arcele

cel mult $O(n)$ frunze

Nodurile interne corespund muchiilor ⇒ $O(n)$

EXAMEN

- Lucrare scrisă (60p / 100p)
- Caietele pe masă (fără resurse electronice)
  - ↳ notițe
  - ↳ materiale tipărite
- Fiecare lucrare originală
- Timp de lucru: 1h30 — 2h

Subiectele (vor fi 7) ⑦ - e surpriză (5p)

① (5p) Aplicație elementară din capitolul I
(raport, produs vectorial, test de orientare)

② (10p)
③ (10p)
→ Subiecte „elementare" legate de algoritmii prezentați la curs
→ Formulări directe / Dați exemple
(vezi secțiunile de exemple din suportul de curs)

④ (10p) Complexitate algebrică

EXEMPLU: În $\mathbb{R}^2$ sunt date 3 drepte prin ecuațiile lor generale. Care e complexitatea algebrică a calculelor dacă:

a) dorim să stabilim dacă cele 3 drepte au exact un punct comun

b) pentru a) verificat dorim să găsim coordonatele punctului comun

SOLUȚIE

a) Fie: $d: ax+by+c=0$
$d': a'x+b'y+c'=0$
$d'': a''x+b''y+c''=0$

Date de intrare: $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$

Condiția de concurență (într-un singur punct)

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix} = 0 \text{ + minor de gr. II nenul} \Rightarrow \text{polinom de gr. III}$$

b) Presupunem că a) e verificat, deci punctul de intersecție este (de exemplu) soluția sistemului: $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\text{polinom de gr. II}}{\text{polinom de gr. II}}$

⑤ (10 p) Algoritmi discutați la curs

ⓐ background matematic / logic

ⓑ complexitate timp - spațiu

EXEMPLU ⓐ → La Graham's Scan varianta Andrew, unde intervine în mod esențial ordonarea punctelor

→ De ce la hărțile trapezoidale sunt preferate extensiile verticale superioare și inferioare dreptelor duse prin punctele respective? Nu se pierde informație?

ⓑ De justificat (scurt / concis, la obiect, clar ...)

- un algoritm discutat la curs
- un anumit pas / pași ai unui algoritm din suportul de curs
- o metodă indicată explicit în subiect

(Arătați că acoperirea convexă a unui poligon se face în $O(n)$ — se ia un punct (în interior) și se face Graham's Scan)

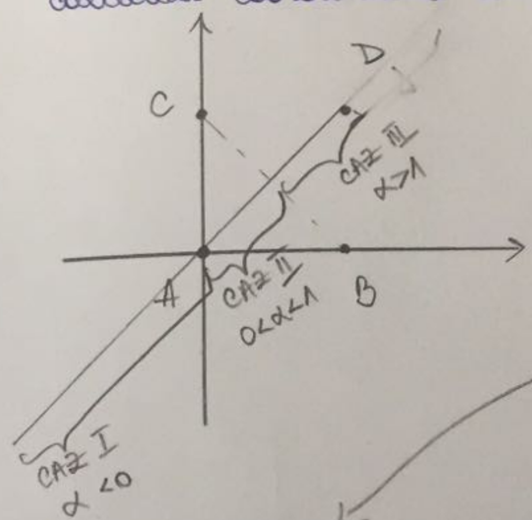
⑥ (10 p) Algoritm / Problemă cu parametri

Transferul unei probleme geometrice într-un algoritm.

EXEMPLU

Fie $A=(0,0)$; $B=(2,0)$; $C=(0,2)$; $D=(\alpha,\alpha)$. Cu $\alpha\in\mathbb{R}$ parametru.

Scrieți un algoritm care să indice vârfurile acoperirii convexe și să calculeze coordonatele centrului de greutate al poligonului asociat.



Se punctează:

- figura
- înțelegerea contextului matematic (geometric)
- calcule geometrice
- cazuri degenerate + interpretare geom.

  $D=A$ → două puncte coincid

  $D\in[BC]$ → D se află pe frontiera acoperirii convexe, dar nu e vf. al său
- selectarea corectă a inputurilor

Pentru:

$\alpha<0$ → acoperirea convexă: D, C, B
→ centrul de greutate: $\left(\frac{\alpha+2}{3}, \frac{\alpha+2}{3}\right)$

$\alpha=0$ → CAZ DEGENERAT -1- : A, B, C
$A=D$
→ C.G.: $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\alpha\in(0,1)$ → a.c. : A, B, C
→ C.G.: $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$\alpha>1$: → a.c. : A, B, C, D
→ C.G. : $\left(\frac{\alpha+2}{4}, \frac{\alpha+2}{4}\right)$

$\alpha=1$ → CAZ DEGENERAT a.c. : A, B, C
$D\in[BC]$
→ C.G : $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$