1.10 Variabile aleatoare independente

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un spaţiu de probabilitate fixat.

Definiţia 1.10.1 *Două variabile aleatoare $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ se numesc independente dacă*

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) \cdot P(Y \in B),$$

oricare ar fi mulţimile Boreliene $A, B \in \mathcal{B}$, şi dependente în caz contrar.

Observaţia 1.10.2 *Alegând $A = (-\infty, a)$ şi $B = (-\infty, b)$ în definiţia anterioară, obţinem:*

$$P(X < a, Y < b) = P(X < a) P(Y < b), \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Se poate arăta şi reciproc că dacă această relaţie are loc, atunci variabilele aleatoare X şi Y sunt independente.

Reamintim că am definit funcţia de distribuţie a variabilei aleatoare vectoriale (X, Y) prin $F_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F_{X,Y}(a, b) = P(X < a, Y < b)$. Din observaţia anterioară rezultă deci următoarea:

Propoziţia 1.10.3 *Variabilele aleatoare X şi Y sunt independente dacă şi numai dacă*

$$F_{X,Y}(a, b) = F_X(a) F_Y(b), \qquad \text{oricare ar fi } a, b \in \mathbb{R},$$

unde F_X, F_Y sunt funcţiile de distribuţie ale variabilelor aleatoare X, respectiv Y.

Are loc următoarea:

Propoziţia 1.10.4 *Dacă $f_{X,Y}, f_X, f_Y$ sunt densităţile variabilelor aleatoare (X, Y), X şi respectiv Y, atunci variabilele aleatoare X şi Y sunt independente dacă şi numai dacă are loc*

$$f_{X,Y}(a, b) = f_X(a) f_Y(b), \qquad \text{oricare ar fi } a, b \in \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Dacă X şi Y sunt independente, din Propoziţia anterioară avem $F_{X,Y} = F_X F_Y$. Folosind legătura între funcţia de distribuţie şi funcţia de densitate a unei variabile aleatoare (vezi cursul anterior), avem:

$$\begin{aligned}
f_{X,Y}(a, b) &= \frac{\partial^2 F_{X,Y}}{\partial x \partial y}(a, b) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}(F_X(a) F_Y(b)) \\
&= \frac{\partial F_X}{\partial x}(a) \frac{\partial F_Y}{\partial y}(b) \\
&= f_X(a) f_Y(b).
\end{aligned}$$

Reciproc, dacă are loc relaţia din enunţul propoziţiei, atunci

$$\begin{aligned} P(X \in A, Y \in B) &= \int\int_{A\times B} f_{X,Y}(a,b)\,dadb \\ &= \int\int_{A\times B} f_X(a)\, f_Y(b)\,dadb \\ &= \int_A f_X(a)\,da \int_B f_Y(b)\,db \\ &= P(X\in A)\,P(Y\in B), \end{aligned}$$

oricare ar fi mulţimile Boreliene $A, B \in \mathcal{B}$, şi deci conform definiţiei variabilele aleatoare X şi Y sunt independente. ■

Una din consecinţele importante ale independenţei a două variabile aleatoare este următoarea:

Teorema 1.10.5 *Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare independente şi $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcţii măsurabile pentru care există mediile $Mg(X)$ şi $Mh(Y)$, atunci are loc*

$$M(g(X)\,h(Y)) = M(g(X))\,M(h(Y)).$$

Demonstraţie. Vom face demonstraţia în cazul a două variabile aleatoare continue X şi Y având densităţi f_X, respectiv f_Y, şi vom nota prin $f_{X,Y}$ densitatea comună a variabilelor aleatoare X şi Y.

Din Teorema Fubini rezultă că variabila aleatoare $g(X)\,h(Y)$ are medie finită, şi avem:

$$\begin{aligned} M(g(X)\,h(Y)) &= \int\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} g(x)\,h(y)\,f_{X,Y}(x,y)\,dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(x)\,h(y)\,f_X(x)\,f_Y(y)\,dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}} g(x)\,f_X(x)\,dx \int_{\mathbb{R}} h(y)\,f_Y(y)\,dy \\ &= M(g(X))\,M(h(Y)). \end{aligned}$$

■

Consecinţa 1.10.6 *Dacă varaibilele aleatoare X şi Y sunt independente şi au medii finite, atunci şi variabila aleatoare XY are medie finită şi are loc*

$$M(XY) = M(X)\,M(Y).$$

Demonstraţie. Rezultă din teorema anterioară pentru $g(x) \equiv x$ şi $h(y) \equiv y$. ■

Observaţia 1.10.7 *Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată (adică dacă $M(XY) = M(X)\,M(Y)$ nu rezultă în general că X şi Y sunt independente), după cum rezultă din următorul exemplu:*

Exemplul 1.10.8 *Considerăm variabilele aleatoare discrete X şi Y date de:*

$$X=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}, \qquad Y=\begin{cases} 0, & \text{dacă } X(\omega)=\pm 1 \\ Z(\omega), & \text{dacă } X(\omega)=0 \end{cases},$$

unde

$$Z(\omega)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

este o variabilă aleatoare independentă de X.

Se verifică uşor că $M(X)=M(Y)=M(XY)=0$, şi deci are loc egalitate

$$M(XY)=M(X)M(Y),$$

*dar variabilele aleatoare X şi Y **nu sunt independente**, deoarece spre exemplu avem*

$$P(X=1,Y=1)=0\neq \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}=P(X=1)\cdot P(Y=1).$$

Definiţia 1.10.9 *Două variabile aleatoare X şi Y pentru care*

$$M(XY)=M(X)M(Y)$$

se numesc necorelate.

Are loc următoarea:

Teorema 1.10.10 *Dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente (sau necorelate) şi există (şi sunt finite) momentele de ordin doi $M\left(X^2\right), M\left(Y^2\right)<\infty$, atunci variabila aleatoare $X+Y$ are dispersie finită, şi are loc*

$$D^2(X+Y)=D^2(X)+D^2(Y).$$

Demonstraţie. Avem:

$$\begin{aligned}
D^2(X+Y) &= M\left((X+Y-M(X+Y))^2\right) \\
&= M\left((X-M(X))^2\right)+M\left((Y-M(Y))^2\right)+2M((X-M(X))(Y-M(Y))) \\
&= D^2(X)+D^2(Y)+2M(X-M(X))M(Y-M(Y)) \\
&= D^2(X)+D^2(Y)+2(M(X)-M(X))(M(Y)-M(Y)) \\
&= D^2(X)+D^2(Y),
\end{aligned}$$

penultima egalitate rezultând din teorema anterioară, pentru $g(x)=x-M(X)$ şi $h(y)=y-M(Y)$. ■

Independenţa a două variabile aleatoare se poate generaliza la cazul mai multor variabile aleatoare, astfel:

Definiţia 1.10.11 *i) Spunem că variabilele aleatoare* $X_1, X_2, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ *sunt independente dacă*

$$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = P(X_1 \in B_1) \cdot \ldots \cdot P(X_n \in B_n),$$

oricare ar fi mulţimile Boreliene $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}$*.*

ii) Spunem că şirul de variabile aleatoare $X_1, X_2, \ldots : \Omega \to \mathbb{R}$ *este un şir de variabile aleatoare independente, dacă pentru orice* $n \geq 2$ *şi orice indici* $i_1 < i_2 < \ldots < i_n$*, variabilele aleatoare* $X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}$ *sunt independente.*

Observaţia 1.10.12 *Dacă* X *şi* Y*,* Y *şi* Z*, respectiv* X *şi* Z *sunt independente nu rezultă în general că variabilele aleatoare* X, Y *şi* Z *sunt independente.*

Pentru variabilele $X_1, X_2, \ldots, X_n$ definim:

- funcţia de distribuţie $F = F_{X_1, X_2, \ldots, X_n} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definită prin

$$F(a_1, \ldots, a_n) = P(X_1 < a_1, \ldots, X_n < a_n);$$

- funcţia de densitate $f = f_{X_1, X_2, \ldots, X_n} : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ definită prin

$$P((X_1, \ldots, X_n) \in C) = \int \ldots \int_C f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n,$$

  oricare ar fi mulţimea Boreliană $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Observaţia 1.10.13 *Se poate arăta că relaţia anterioară este echivalentă cu relaţia*

$$P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = \int_{B_1} \ldots \int_{B_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \ldots dx_1,$$

oricare ar fi mulţimile Boreliene $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*.*

Ca şi în cazul $n = 1$ sau $n = 2$, dacă există densitatea f a variabilelor aleatoare $X_1, \ldots, X_n$, definim

$$M(g(X_1, \ldots, X_n)) = \int_{\mathbb{R}} \ldots \int_{\mathbb{R}_n} g(x_1, \ldots, x_n) f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \ldots dx_1,$$

pentru orice funcţie măsurabilă g pentru care interala există şi este finită.

Similar cazului $n = 2$ se demonstrează relaţiile:

$$F(a_1, \ldots, a_n) = \int_{-\infty}^{a_1} \ldots \int_{-\infty}^{a_n} f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_n \ldots dx_1$$

şi

$$f(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \ldots \partial x_n}(a_1, \ldots, a_n).$$

Propoziţia 1.10.14 *Dacă F şi f sunt funcţia de distribuţie, respectiv funcţia de densitate a variabilelor aleatoare $X_1, \ldots, X_n$, , atunci următoarele sunt echivalente:*

i) $X_1, \ldots, X_n$ sunt echivalente;

ii) $F(a_1, \ldots, a_n) = F_{X_1}(a_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(a_n)$;

iii) $f(a_1, \ldots, a_n) = f_{X_1}(a_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(a_n)$,

unde F_{X_i} şi f_{X_i} sunt funcţia de distribuţie, respectiv funcţia de densitate a variabilei aleatoare X_i, $1 \leq i \leq n$.

Are loc următoarea:

Teorema 1.10.15 *i) Dacă variabilele aleatoare $X_1, \ldots, X_n$ sunt independente şi au medii finite, atunci*

$$M(X_1 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot \ldots \cdot M(X_n).$$

ii) Dacă variabilele aleatoare $X_1, \ldots, X_n$ sunt independente şi au dispersii finite, atunci

$$D^2(X_1 + \ldots + X_n) = D^2(X_1) + \ldots + D^2(X_n).$$

1.10.1 Funcţia generatoare de moment a unei variabile aleatoare

Pentru o variabilă aleatoare X definim funcţia generatoare de moment a lui X prin

$$\varphi_X(t) = M\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f_X(x)\, dx,$$

pentru toate valorile $t \in \mathbb{R}$ pentru care integrala există şi este finită.

Să observăm că oricare ar fi variabila aleatoare X avem

$$\varphi_X(0) = M\left(e^{0 \cdot X}\right) = M(1) = 1,$$

şi deci $\varphi_X(0)$ există şi este finită.

Se poate arăta că dacă φ_X este definită pe un interval ce conţine $t = 0$, atunci toate momentele varibilei aleatoare X există şi sunt finite, fiind date explicit de:

$$M_n(X) = M(X^n) = \frac{d^n \varphi_X}{dt^n}(0) = \varphi_X^{(n)}(0).$$

Observaţia 1.10.16 *Pentru a observa aceasta, în condiţiile date, dezvoltând în serie Taylor funcţia e^{tx}, obţinem*

$$\begin{aligned} \varphi_X(t) &= M\left(e^{tX}\right) = M\left(1 + \frac{1}{1!}tX + \frac{1}{2!}t^2X^2 + \ldots\right) \\ &= 1 + \frac{t}{1!}M(X) + \frac{t^2}{2!}M\left(X^2\right) + \ldots, \end{aligned}$$

egalităţile de mai sus rezultând prin derivare (de n ori) şi înlocuire $t = 0$:

$$\varphi_X^{(n)}(0) = M(X^n), \qquad n \geq 0.$$

Observaţia 1.10.17 *Se poate arăta că dacă* $\varphi_X(t)$ *este definită pe un interval ce conţin* $t = 0$*, atunci funcţia generatoare de moment* φ_X *determină în mod unic distribuţia variabilei aleatoare* X*. Spre exemplu, dacă* $X \in \mathcal{N}(0,1)$ *este o variabilă aleatoare normală standard, atunci avem (vezi seminar):*

$$\varphi_X(t) = e^{t^2/2},$$

şi reciproc, dacă funcţia generatoare de moment a variabilei X *este* $\varphi_X(t) = e^{t^2/2}$*, pentru* t *aparţinând unui interval ce conţine originea, atunci* $X \in \mathcal{N}(0,1)$ *este o variabilă aleatoare normală standard.*

Propoziţia 1.10.18 *Fie* X *şi* Y *două variabile aleatoare pentru care există funcţiile generatoare de moment* φ_X*,* φ_Y*, definite pe un interval* (α, β)*. Atunci:*

i) Funcţia generatoare de moment a variabilei aleatoare $aX + b$ *este*

$$\varphi_{aX+b}(t) = \varphi_X(at) \cdot e^{bt}, \qquad \textit{oricare ar fi } t \in (\alpha, \beta);$$

ii) Dacă X *şi* Y *sunt independente, atunci funcţia generatoare de moment a variabilei aleatoare* $X + Y$ *este*

$$\varphi_{X+Y}(t) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t), \qquad \textit{oricare ar fi } t \in (\alpha, \beta).$$

Demonstraţie. i) Avem

$$\varphi_{aX+b}(t) = M\left(e^{t(aX+b)}\right) = M\left(e^{(at)X} \cdot e^{bt}\right) = e^{bt} M\left(e^{(at)X}\right) = e^{bt}\varphi_X(at).$$

ii) Folosind independenţa variabilelor aleatoare, avem:

$$\varphi_{X+Y}(t) = M\left(e^{t(X+Y)}\right) = M\left(e^{tx}e^{tY}\right) = M\left(e^{tX}\right) M\left(e^{tY}\right) = \varphi_X(t) \cdot \varphi_Y(t).$$

■

1.10.2 Exerciţii

1. Să se arate demonstreze egalitatea

$$D^2(X) = M\left(X^2\right) - (M(X))^2.$$

2. Să se determine funcţia generatoare de moment, media $M(X)$ şi momentul de ordin doi $M\left(X^2\right)$ pentru următoarele variabile aleatoare:

   (a) Variabila aleatoare binomială cu parametrii n şi p

   (b) Variabila aleatoare Poisson cu parametrul $\lambda > 0$

   (c) Variabila aleatoare exponenţială cu parametrul $\lambda > 0$

   (d) Variabila aleatoare normală standard $\mathcal{N}(0,1)$ cu medie 0 şi dispersie 1

3. Considerăm trei variabile aleatoare independente X_1, X_2 şi X_3 astfel încât $P(X_i = 0) = P(X_i = 1) = \frac{1}{2}$. Considerăm variabilele aleatoare Y_1, Y_2 şi Y_3 date de

$$Y_1 = \begin{cases} 1, & \text{dacă } X_2 = X_3 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}, \qquad Y_2 = \begin{cases} 1, & \text{dacă } X_1 = X_3 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases},$$
$$Y_3 = \begin{cases} 1, & \text{dacă } X_1 = X_2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Sunt Y_1 şi Y_2 independente? Y_1 şi Y_3? Y_2 şi Y_3? Dar Y_1, Y_2, Y_3?

Observaţie: exerciţiul arată că independenţa două câte două nu implică independenţa în totalitate a variabilelor aleatoare.

4. Fie $X_1, \ldots, X_n$ variabile aleatoare independente şi identic distribuite, cu medie μ şi dispersie σ^2 finite, şi notăm $\bar{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$. Să se arate că:

   (a) $M\left(\bar{X}\right) = \mu$

   (b) $D^2\left(\bar{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$

   (c) $M\left(\sum_{i=1}^n \left(X_i - \bar{X}\right)^2\right) = (n-1)\sigma^2$

5. Durata de viaţă a unui bec este o variabilă aleatoare X cu densitatea

$$f_X(x) = \begin{cases} cxe^{-cx}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

   (a) Să se determine valoarea constantei c

   (b) Să se calculeze media $M(X)$ a variabilei aleatoare X.

6. Un zar de aruncă de două ori, şi se consideră variabilele aleatoare X şi Y reprezentând suma aruncărilor, respectiv diferenţa dintre prima şi a doua aruncare. Să se caluleze $M(XY) - M(X)M(Y)$. Sunt variabilele aleatoare X şi Y independente?