1.5 Variabile aleatoare

În practică, atunci când se efectuează un anumit experiment, în mod frecvent suntem în principal interesaţi de o anumită funcţie ce depinde rezultatul experimentului, şi nu de rezultatul în sine al experimentului.

Spre exemplu, la aruncarea a două zaruri, deseori suntem interesaţi de suma valorilor obţinute, şi nu neapărat de valorile individuale ale zarurilor (spre exemplu, suntem interesaţi dacă suma celor două zaruri este 7, fără a conta dacă valorile celor două zaruri sunt $(1,6)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(4,3)$, $(5,2)$ sau $(6,1)$), iar la aruncarea repetată a unei monede, suntem interesaţi de numărul total de steme obţinute, şi nu neapărat de valorile stemă/ban obţinute.

Aceste cantităţi de interes, mai pecis aceste funcţii reale ce depind de rezultatul unui anumit experiment, se numesc *variabile aleatoare.*

Pentru o definiţie mai precisă, reamintim ca am notat prin $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{S})$ σ-algebra mulţimilor boreliene pe $\mathbb{R}$, adică cea mai mică $\sigma-$algebră ce conţine toate mulţimile de forma

$$\mathcal{S} = \{(a,b) : a < b,\ \ a,b \in \mathbb{R}\}.$$

Observaţia 1.5.1 *se poate arăta că putem înlocui mulţimea $\mathcal{S}$ de mai sus prin oricare din mulţimile:*

$$\begin{aligned}
&\{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\} \\
&\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \\
&\{(a, b] : a, b,\ \ a, b \in \mathbb{R}\} \\
&\{O : O \text{ - mulţime deschisă din } \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Definiţia 1.5.2 *Numim variabilă aleatoare (reală) pe spaţiul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ o funcţie $f : \Omega \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că*

$$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F},$$

pentru orice mulţime boreliană $B \in \mathcal{B}$.

Exemplul 1.5.3 *La aruncarea a două monede, $X(\omega)$ = numărul de steme obţinut este o variabilă aleatoare pe spaţiul $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, unde*

– $\Omega = \{(S,S), (S,B), (B,S), (B,B)\}$

– $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

– $P(\{(S,S)\}) = \ldots = P(\{(B,B)\}) = \frac{1}{4}$,

deoarece:

$$X^{-1}(B) = \begin{cases} \emptyset, & 0,1,2 \notin B \\ \{(B,B)\}, & 0 \in B \ \text{şi} 1,2 \notin B \\ \{(S,B),(B,S)\}, & 1 \in B \ \text{şi } 0,2 \notin B \\ \{(B,B)\}, & 2 \in B \ \text{şi } 0,1 \notin B \\ \ldots & \ldots \end{cases} \in \mathcal{F},$$

oricare ar fi mulţimea boreliană $B \in \mathcal{B}$.

Are loc următoarea propoziţie de caracterizare a variabilelor aleatoare:

Propoziţia 1.5.4 $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *este o variabilă aleatoare pe spaţiul de probabilitate* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *dacă şi numai dacă are loc una din următoarele relaţii echivalente:*
a) $X^{-1}((-\infty, a)) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\} \in \mathcal{F}$, *oricare ar fi* $a \in \mathbb{R}$*;*
b) $X^{-1}((-\infty, a]) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$, *oricare ar fi* $a \in \mathbb{R}$*;*
c) $X^{-1}((a, +\infty)) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > a\} \in \mathcal{F}$, *oricare ar fi* $a \in \mathbb{R}$*;*
d) $X^{-1}([a, +\infty)) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \geq a\} \in \mathcal{F}$, *oricare ar fi* $a \in \mathbb{R}$*.*

Demonstraţie. Evident, dacă X este o variabilă aleatoare, cum $(-\infty, a) \in \mathcal{F}$ pentru orice $a \in \mathbb{R}$, din Definiţia 1.5.2 rezultă a).

Reciproc, dacă are loc relaţia din a), să notăm cu $\mathcal{A}$ familia tuturor mulţimilor boreliene $B \in \mathcal{B}$ pentru care $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$, adică

$$\mathcal{A} = \left\{B \in \mathcal{B} : X^{-1}(B) \in \mathcal{F}\right\} \subset \mathcal{B}.$$

Să observăm că $\mathcal{A}$ este o σ-algebră, deoarece:

- $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ($\mathbb{R} \in \mathcal{A}$, deoarece $X^{-1}(\mathbb{R}) = \Omega \in \mathcal{F}$);
- Dacă $B \in \mathcal{A}$, atunci $X^{-1}(B^c) = \Omega - \underbrace{X^{-1}(B)}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$, şi deci $B^c \in \mathcal{F}$;
- Dacă $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{A}$, atunci $X^{-1}(\cup_{i=1}^{\infty} B_i) = \cup_{i=1}^{\infty} \underbrace{X^{-1}(B_i)}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}$, şi deci $\cup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{F}$.

Cum din ipoteză familia $\mathcal{A}$ conţine toate intervalele de forma $(-\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$, rezultă că $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ ($\mathcal{B}$ este cea mai mică σ-algebră ce conţine toate intervalele de forma $(-\infty, a)$), şi deci avem

$$X^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \qquad \text{oricare ar fi } B \in \mathcal{B},$$

adică X este o variabilă aleatoare.

Demonstraţie similară în cazurile b), c) şi d). ■

Rezultatul următor ne arată ca infimumul/supremumul unui şir de variabile aleatoare este de asemenea o variabila aleatoare:

Teorema 1.5.5 *Dacă* $(X_n)_{n \geq 1}$ *este un şir de variabile aleatoare, atunci*

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \inf_{n \geq 1} X_n(\omega), \\ Y(\omega) &= \sup_{n \geq 1} X_n(\omega), \\ \liminf X_n(\omega) &= \sup_{n \geq 1} \inf_{k \geq n} X_k(\omega), \\ \limsup X_n(\omega) &= \inf_{n \geq 1} \sup_{k \geq 1} X_k(\omega), \end{aligned}$$

sunt de asemenea variabile aleatoare.

Demonstraţie. a) Avem

$$\begin{aligned} X^{-1}((-\infty,a]) &= \left\{\omega\in\Omega : X(\omega)=\inf_{n\geq 1} X_n(\omega)\leq a\right\} \\ &= \cup_{n=1}^{\infty}\underbrace{\{X_n(\omega)\leq a\}}_{\in\mathcal{F}}\in\mathcal{F}, \end{aligned}$$

şi deci conform propoziţiei anterioare $X=\inf_{n\geq 1} X_n$ este o variabilă aleatoare.

b) În mod similar, avem:

$$\begin{aligned} Y^{-1}([a,+\infty) &= \left\{\omega\in\Omega : Y(\omega)=\sup_{n\geq 1} X_n(\omega)\geq a\right\} \\ &= \cup_{n=1}^{\infty}\underbrace{\{X_n(\omega)\geq a\}}_{\in\mathcal{F}}\in\mathcal{F}, \end{aligned}$$

şi deci conform aceleiaşi propoziţii $X=\sup_{n\geq 1} X_n$ este o variabilă aleatoare.

c), d) Rezultă folosind a) şi b). ■

În particular, obţinem următoarea

Consecinţa 1.5.6 *Dacă $(X_n)_{n\geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare pentru care există limita $X(\omega)=\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)$, oricare ar fi $\omega\in\Omega$, atunci X este o variabilă aleatoare.*

Demonstraţie. Dacă există limita $\lim_{n\to\infty} X_n$, atunci

$$X(\omega)=\lim_{n\to\infty} X_n(\omega)=\liminf X_n(\omega)=\limsup X_n(\omega),$$

şi conform teoremei anterioare rezultă că X este o variabilă aleatoare. ■

Are loc următoarea:

Teorema 1.5.7 *Dacă X şi Y sunt variabile aleatoare, atunci mulţimile următoare sunt măsurabile:*

$$\begin{aligned} \{X<Y\} &= \{\omega\in\Omega : X(\omega)<Y(\omega)\}\in\mathcal{F}, \\ \{X\leq Y\} &= \{\omega\in\Omega : X(\omega)\leq Y(\omega)\}\in\mathcal{F}. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} \{X<Y\} &= \{\omega\in\Omega : X(\omega)<Y(\omega)\} \\ &= \cup_{r\in\mathbb{Q}}\left(\underbrace{\{\omega\in\Omega : X(\omega)<r\}}_{\in\mathcal{F}}\cap\underbrace{\{\omega\in\Omega : Y(\omega)>r\}}_{\in\mathcal{F}}\right)\in\mathcal{F}, \end{aligned}$$

şi

$$\{X\geq Y\}=\left(\underbrace{\{X<Y\}}_{\in\mathcal{F}}\right)^{c}\in\mathcal{F}.$$

■

Definiţia 1.5.8 *O funcţie* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se numeşte măsurabilă dacă*

$$\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B},$$

oricare ar fi $B \in \mathcal{B}$ *o mulţime boreliană.*

Observaţia 1.5.9 *Se poate arăta că dacă o funcţie este continuă pe* $\mathbb{R}$ *atunci ea este măsurabilă (demonstraţia este similară propoziţiei de mai sus: se consideră familia*

$$\mathcal{A} = \left\{B \in \mathcal{B} : X^{-1}(B) \in \mathcal{B}\right\}$$

şi se arată că este o σ*-algebră ce conţine toate mulţimile deschise din* $\mathbb{R}$*, şi deci* $\mathcal{A} = \mathcal{B}$*).*

Reciproca acestei afirmaţii nu este însă in general valabilă, după cum se poate observa considerând funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită de*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases},$$

care este măsurabilă dar nu este continuă pe $\mathbb{R}$ *(are discontinuităţi în punctele* $x = 0$ *şi* $x = 1$*).*

Rezultatul următor ne arată cum putem construi noi variabile aleatoare:

Teorema 1.5.10 *Dacă* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este o funcţie măsurabilă şi* X *este o variabilă aleatoare, atunci* $Y = \varphi \circ X$ *este o variabilă aleatoare.*

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned} Y^{-1}(B) &= (\varphi \circ X)^{-1}(B) \\ &= X^{-1}(\underbrace{\varphi^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}}) \in \mathcal{F}, \end{aligned}$$

şi deci $Y = \varphi \circ X$ este o variabilă aleatoare. ∎

Consecinţa 1.5.11 *Dacă* X *este o variabilă aleatoare, atunci* $|X|^p$ *(*$p > 0$*) şi* $aX + b$ *(*$a, b \in \mathbb{R}$*) sunt de asemenea variabile aleatoare.*

Demonstraţie. Se aplică teorema anterioară funcţiei continue (deci măsurabile) $\varphi(x) = |x|^p$, respectiv $\varphi(x) = ax + b$. ∎

Rezultatul de mai sus se poate generaliza astfel:

Definiţia 1.5.12 *O funcţie* $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se numeşte măsurabilă dacă*

$$\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B},$$

oricare ar fi $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$*, unde* $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *este* σ*-algebra mulţimilor boreliene din* $\mathbb{R}^n$*, adică cea mai mică* σ*-algebră pe* $\mathbb{R}^n$ *ce conţine toate mulţimile deschise din* $\mathbb{R}^n$*, sau, echivalent, toate mulţimile de forma*

$$(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n), \qquad a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}.$$

Are loc următoarea:

Teorema 1.5.13 *Dacă $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ este o funcţie măsurabilă şi $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ sunt variabile aleatoare, atunci $Y(\omega) = \varphi(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ este o variabilă aleatoare.*

Demonstraţie. Notând $X(\omega) = (X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$, avem $Y(\omega) = \varphi \circ X$, şi deci oricre ar fi $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ avem:

$$\begin{aligned} Y^{-1}(B) &= (\varphi \circ X)^{-1}(B) \\ &= X^{-1}(\underbrace{\varphi^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)}) \\ &= X^{-1}(A), \end{aligned}$$

unde $A = \varphi^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

Să notăm

$$\mathcal{A} = \left\{ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) : X^{-1}(A) \in \mathcal{F} \right\},$$

şi să observăm că $\mathcal{A}$ este o σ-algebră ce conţine in mulţimile de forma $(-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n)$, cu $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, deoarece

$$X^{-1}((-\infty, a_1) \times \ldots \times (-\infty, a_n)) = \bigcap_{i=1}^{n} \underbrace{X_i^{-1}((-\infty, a_i))}_{\in \mathcal{F}} \in \mathcal{F}.$$

Rezultă deci că $\mathcal{A} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, şi deci $Y^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ oricare ar fi $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, adică $Y = \varphi(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$ este o variabilă aleatoare, încheiând demonstraţia. ■

Consecinţa 1.5.14 *Dacă $X_1, \ldots, X_n$ sunt variabile aleatoare, atunci următoarele sunt de asemenea variabile aleatoare:*

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n} a_i X_i \qquad (a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}), \qquad \prod_{i=1}^{n} X_i, \\ &\|(X_1, \ldots, X_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^p \right)^{1/p} \qquad (p > 0), \\ &\min\{X_1, \ldots, X_n\}, \qquad \max\{X_1, \ldots, X_n\}. \end{aligned}$$

Demonstraţie. Rezultă din teorema anterioară, considerând funcţiile continue (şi deci măsurabile) $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$, $\prod_{i=1}^{n} x_i$, $\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p}$, $\min\{x_1, \ldots, x_n\}$, respectiv $\max\{x_1, \ldots, x_n\}$. ■

1.5.1 Exerciţii

1. Dintr-o urnă ce conţine 20 de bile, numerotate de la 1 la 20, se extrag 3 bile (fără întoarcerea bilelor extrase în urnă). Dacă X este variabila aleatoare reprezentând maximul celor 3 numere extrase, să se determine variabila aleatoare X (valorile şi probabilităţile corespunzătoare).

2. Dintr-o urnă ce conţine 3 bile albe, 3 bile roşii şi 5 bile negre, se extrag 3 bile (fără întoarcerea bilelor extrase în urnă). Dacă pentru fiecare bilă albă extrasă se câştigă 1 leu, şi pentru fiecare bilă neagră extrasă se pierde 1 leu, să se determine variabila aleatoare X reprezentând caştigul net obţinut în acest joc.

3. Se aruncă 2 zaruri şi se notează cu X produsul numerelor obţinute. Să se determine variabila aleatoare X.

4. Se aruncă 3 zaruri şi se notează cu X suma numerelor obţinute. Să se determine variabila aleatoare X.

5. 5 bărbaţi şi 5 femei sunt ordonaţi după scorurile obţinute la un examen (presupunem că scorurile obţinute sunt distincte şi egal probabile). Să se determine variabila aleatoare X reprezentând rangul primei femei în lista de rezultate.

6. Să se determine variabila aleatoare X repreyentând numărul de feţe "ban" minus numărul de feţe "stemă" obţinute la aruncarea de n ori a unei monede. Caz particular $n = 4$.

7. Se aruncă de 2 ori un zar. Să se determine următoarele variabile aleatoare:

   (a) Maximul celor două aruncări

   (b) Minimul celor două aruncări

   (c) Suma celor două aruncări

   (d) Diferenţa celor două aruncări (mai precis, prima minus a doua aruncare).

8. La un examen cu 5 întrebări, fiecare având 3 răspunsuri posibile, care este probabilitatea de a obţine cel puţin 4 răspunsuri corecte doar ghicind răspunsurile?