1.4 Evenimente independente

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un spaţiu de probabilitate fixat.

Definiţia 1.4.1 (Independenţa a două evenimente) *Spunem că evenimentele $A, B \in \mathcal{F}$ sunt independente dacă*

$$P(A \cap B) = P(A) P(B).$$

În caz contrar spunem că evenimentele A şi B sunt dependente.

Exemplul 1.4.2 *Se aruncă de două ori un zar cu 4 feţe, şi se consideră evenimentele:*

$$\begin{aligned} A &= \{ \text{ prima aruncare este } 1 \}, \\ B &= \{ \text{ a doua aruncare este } 1 \}, \\ C &= \{ \text{ suma aruncărilor este } 4 \}, \\ D &= \{ \text{ suma aruncărilor este } 5 \}. \end{aligned}$$

Avem:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{4}, \qquad P(B) = \frac{1}{4}, \qquad P(C) = \frac{3}{16}, \qquad P(D) = \frac{4}{16}, \\ P(A \cap B) &= \frac{1}{16}, \qquad P(A \cap C) = \frac{1}{16}, \qquad P(A \cap D) = \frac{1}{16}, \end{aligned}$$

şi deci:

evenimentele A şi B sunt independente ($P(A \cap B) = \frac{1}{16} = P(A) P(B)$);

evenimentele A şi C sunt dependente ($P(A \cap C) = \frac{1}{16} \neq \frac{3}{16} = P(A) P(C)$);

evenimentele A şi D sunt dependente ($P(A \cap D) = \frac{1}{4} = P(A) P(D)$).

Observaţia 1.4.3 *dacă evenimentele A şi B sunt independente şi $P(B) \neq 0$, atunci*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) P(B)}{P(B)} = P(A),$$

şi deci realizarea/nerealizarea lui B nu modifică probabilitatea de realizare a evenimentului A (adică informaţia despre evenimentul B nu dă nici o informaţie suplimentară despre realizarea evenimentului A).

Observaţia 1.4.4 *Dacă A şi B sunt evenimente incompatibile (disjuncte), ele nu sunt în general evenimente independente, deoarece*

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A) P(B)$$

(dacă $P(A), P(B) \neq 0$).

Un alt tip de independenţă este independenţa condiţionată a două evenimente:

Definiţia 1.4.5 (Independenţa condiţionată a două evenimente) *Spunem că evenimentele $A, B \in \mathcal{F}$ sunt independente condiţionat de evenimentul $C \in \mathcal{F}$ dacă are loc*

$$P(A \cap B \cap C) P(C) = P(A \cap C) P(B \cap C).$$

În caz contrar spunem că evenimentele A şi B sunt dependente condiţionat de evenimentul C.

Observaţia 1.4.6 *Dacă $P(C) \neq 0$, relaţia anterioară se poate scrie sub forma*

$$P(A \cap B|C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = P(A|C) P(B|C),$$

ceea ce arată că evenimentele A şi B sunt independente condiţionat de evenimentul C dacă ele sunt independente pe spaţiul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot|C))$.

Observaţia 1.4.7 *În general, nu există nici o implicaţie între independenţa a două evenimente si independenţa condiţionată a două evenimnete (adică, in general, independenţa a două evenimente nu implică independenţa lor condiţionată, şi nici independenţa condiţionată nu implică independenţa), aşa după cum rezultă din următoarele două exemple.*

Exemplul 1.4.8 *se aruncă de două ori un ban şi se consideră evenimentele:*

$$A = \{ \text{ prima aruncare este stema } \}$$
$$B = \{ \text{ a doua aruncare este stema } \}$$
$$C = \{ \text{ cele două aruncări au rezultate diferite } \}.$$

Se verifică uşor că avem $P(A|C) = P(B|C) = \frac{1}{2}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ şi $P(A \cap B|C) = 0$, şi deci evenimentele A şi B sunt independente ($P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) P(B)$) dar nu sunt independente condiţionat de evenimentul C ($P(A \cap B|C) = 0 \neq \frac{1}{4} = P(A) P(B)$).

Exemplul 1.4.9 *Se alege cu probabilitate $1/2$ dintre două monede, una albă şi una neagră, şi se aruncă moneda aleasă de două ori. Presupunem că pentru moneda albă stema apare cu probabilitate 0.99, iar pentru cea neagră stema apare cu probabilitate 0.01.*

Considerăm evenimentele:

$$A = \{ \text{ prima aruncare este stema } \}$$
$$B = \{ \text{ a doua aruncare este stema } \}$$
$$C = \{ \text{ moneda aleasă a fost cea albă } \}.$$

Se verifică uşor că avem $P(A \cap B|C) = 0.99^2$, $P(A|C) = P(B|C) = 0.99$, şi deci evenimentele A şi B sunt independente condiţionat de evenimentul C.

Evenimentele A şi B sunt însă dependente, deoarece (folosind formula probabilităţii totale cu $n = 2$, $A_1 = C$ şi $A_2 = C^c$), avem:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|C) P(C) + P(A|C^c) P(C^c) \\ &= 0.99 \cdot \frac{1}{2} + 0.01 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

şi similar $P(B)=\frac{1}{2}$*, şi deci*

$$\begin{aligned}P(A\cap B) &= P(A\cap B|C)\,P(C)+P(A\cap B|C^c)\,P(C^c)\\ &= 0.99^2\cdot\frac{1}{2}+0.01^2\cdot\frac{1}{2}\\ &= 0.4901\neq\frac{1}{4}=P(A)\,P(B)\,.\end{aligned}$$

Definiţia 1.4.10 (Independenţa unui număr finit de evenimente) *Spunem că evenimentele* $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$ $(n\geq 2)$ *sunt independente dacă are loc relaţia*

$$P(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\ldots\cap A_{i_m})=P(A_{i_1})\,P(A_{i_2})\cdot\ldots\cdot P(A_{i_m})\,, \tag{1.5}$$

oricare ar fi $m\in\{2,\ldots,n\}$ *şi indicii* $1\leq i_1<i_2<\ldots<i_m\leq n$.

În caz contrar spunem că evenimentele $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$ *sunt dependente.*

Observaţia 1.4.11 *Dacă evenimentele* $A_1,\ldots,A_n$ *sunt independente două câte două, nu rezultă în general că ele sunt independente, după cum rezultă din următorul exemplu:*

Exemplul 1.4.12 *Se aruncă de două ori o monedă, şi se consideră evenimentele:*

$$\begin{aligned}A&=\{\text{ prima aruncare este stema }\}\,,\\ B&=\{\text{ a doua aruncare este stema }\}\,,\\ C&=\{\text{ cele două aruncări sunt diferite }\}.\end{aligned}$$

Se verifică faptul că evenimentele A *şi* B*,* A *şi* C*, respectiv evenimentele* B *şi* C *sunt independente, dar evenimentele* A,B,C *nu sunt independente, deoarece*

$$P(A\cap B\cap C)=0\neq\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=P(A)\,P(B)\,P(C)\,.$$

Observaţia 1.4.13 *În cazul* $n=3$ *a trei evenimente* $A_1,A_2,A_3\in\mathcal{F}$*, condiţia (1.5) de mai sus revine la*

$$\begin{aligned}P(A_1\cap A_2) &= P(A_1)\,P(A_2)\,,\\ P(A_1\cap A_3) &= P(A_1)\,P(A_3)\,,\\ P(A_2\cap A_3) &= P(A_2)\,P(A_3)\,,\\ P(A_1\cap A_2\cap A_3) &= P(A_1)\,P(A_2)\,P(A_3)\,.\end{aligned}$$

Are loc următoarea:

Propoziţia 1.4.14 *Evenimentele* $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$ *sunt independente dacă şi numai dacă are loc*

$$P\left(\widetilde{A}_1\cap\widetilde{A}_2\cap\ldots\cap\widetilde{A}_n\right)=P\left(\widetilde{A}_1\right)P\left(\widetilde{A}_2\right)\cdot\ldots\cdot P\left(\widetilde{A}_n\right), \tag{1.6}$$

oricare ar fi $\widetilde{A}_i\in\{A_i,A_i^c\}$*,* $i=1,2,\ldots,n$.

Demonstraţie. Pentru implicaţia directă, să presupunem că are loc relaţia (1.5), şi să demonstrăm că are loc şi relaţia (1.6).

Să observăm că dacă $\widetilde{A}_i = A_i$, $1 \leq i \leq n$, atunci are loc relaţia (1.6). Avem:

$$\begin{aligned}
P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n^c\right) &= P\left(\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right) - \left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n\right)\right) \\
&= P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right) - P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n\right) \\
&= P\left(A_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{n-1}\right) - P\left(A_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{n-1}\right) P\left(A_n\right) \\
&= P\left(A_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{n-1}\right) \left(1 - P\left(A_n\right)\right) \\
&= P\left(A_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{n-1}\right) P\left(A_n^c\right),
\end{aligned}$$

şi deci relaţia (1.6) are loc pentru $\widetilde{A}_n = A_n^c$. În mod similar, în continuare se poate demonstra inductiv că relaţia (1.6) are loc oricare ar fi $\widetilde{A}_i \in \{A_i, A_i^c\}$, $1 \leq i \leq n$.

Reciproc, dacă are loc relaţia (1.6), atunci alegând $\widetilde{A}_1 = A_1, \ldots, \widetilde{A}_{n-1} = A_{n-1}$ şi $\widetilde{A}_n = A_n$, respectiv $\widetilde{A}_n = A_n^c$, obţinem relaţiile:

$$\begin{aligned}
P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n\right) &= P\left(A_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{n-1}\right) P\left(A_n\right) \\
P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n^c\right) &= P\left(A_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{n-1}\right) P\left(A_n^c\right),
\end{aligned}$$

de unde prin adunare obţinem relaţia

$$\begin{aligned}
P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right) &= P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap \left(A_n \cup A_n^c\right)\right) \\
&= P\left(\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n\right) \cup \left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n^c\right)\right) \\
&= P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n\right) + P\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1} \cap A_n^c\right) \\
&= P\left(A_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{n-1}\right) P\left(A_n\right) + P\left(A_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{n-1}\right) P\left(A_n^c\right) \\
&= P\left(A_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{n-1}\right) \left(P\left(A_n\right) + P\left(A_n^c\right)\right) \\
&= P\left(A_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(A_{n-1}\right),
\end{aligned}$$

adică are loc relaţia (1.5) pentru $m = n - 1$ şi $i_1 = 1, \ldots, i_{n-1} = n - 1$.

În mod similar, inductiv se poate demonstra relaţia (1.5). ■

Propoziţia următoare arată că dacă mai multe evenimente sunt independente, atunci lasând la o parte unele dintre ele, evenimentele rămase sunt de asemenea independente:

Propoziţia 1.4.15 *Dacă $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ sunt evenimente independente, atunci pentru orice $m \in \{2, \ldots, n\}$ şi orice indici $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$, evenimentele $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ sunt de asemenea independente.*

Demonstraţie. Să demonstrăm, spre exemplu, că evenimentele $A_1, \ldots, A_{n-1}$ sunt independente.

Folosind propoziţia anterioară, avem:

$$\begin{aligned}
P\left(\widetilde{A}_1 \cap \ldots \cap \widetilde{A}_{n-1}\right) &= P\left(\widetilde{A}_1 \cap \ldots \cap \widetilde{A}_{n-1} \cap A_n\right) + P\left(\widetilde{A}_1 \cap \ldots \cap \widetilde{A}_{n-1} \cap A_n^c\right) \\
&= P\left(\widetilde{A}_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(\widetilde{A}_{n-1}\right) P\left(A_n\right) + P\left(\widetilde{A}_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(\widetilde{A}_{n-1}\right) P\left(A_n^c\right) \\
&= P\left(\widetilde{A}_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(\widetilde{A}_{n-1}\right) \left(P\left(A_n\right) + P\left(A_n^c\right)\right) \\
&= P\left(\widetilde{A}_1\right) \cdot \ldots \cdot P\left(\widetilde{A}_{n-1}\right),
\end{aligned}$$

oricare ar fi $\widetilde{A}_i \in \{A_i, A_i^c\}$, $1 \leq i \leq n-1$, şi din Propoziţia 1.4.14 rezultă că evenimentele $A_1, \ldots, A_{n-1}$ sunt independente. ■

Definiţia 1.4.16 (Independenţa unui şir de evenimente) *Spunem că evenimentele $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ formează un şir de evenimente independente, dacă oricare ar fi $m \geq 2$ şi indicii $1 \leq i_1 < \ldots < i_m$, evenimentele $A_{i_1}, \ldots, A_{i_m}$ sunt independente (în sensul Definiţiei 1.4.10).*

Lema 1.4.17 (Lema Borel–Cantelli) *Fie $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ un şir de evenimente.*

i) Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) < +\infty$, atunci $P\left(\limsup A_n\right) = 0$.

ii) Dacă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right) = +\infty$ şi evenimentele $A_1, A_2, \ldots$ sunt independente, atunci $P\left(\limsup A_n\right) = 1$.

Demonstraţie. Să presupunem că seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right)$ este convergentă. Folosind continuitatea măsurii de probabilitate (Propoziţia 1.2.5) şi Inegalitatea lui Boole (Propoziţia 1.2.6), obţinem:

$$\begin{aligned}
0 \leq P\left(\limsup A_n\right) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \\
&= \lim_{n \to \infty} P\left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) \\
&\leq \lim_{n \to \infty} \sum_{i=n}^{\infty} P\left(A_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right) - \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n-1} P\left(A_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right) - \sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

seria $\sum_{i=1}^{\infty} P\left(A_i\right)$ fiind presupusă convergentă. Obţinem deci în acest caz $P\left(\limsup A_n\right) = 0$.

Pentru partea a doua, să presupunem că seria $\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ este divergentă. Deoarece evenimentele $A_1, A_2, \ldots$ sunt independente, şi folosind inegalitatea

$$1 - x \leq e^{-x}, \qquad x \geq 0,$$

pentru orice $1 \leq n \leq N$ fixaţi, avem:

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^c\right) &\leq P\left(\bigcap_{i=n}^{N} A_i^c\right) \\
&= \prod_{i=n}^{N} P(A_i^c) \\
&= \prod_{i=n}^{N} (1 - P(A_i)) \\
&\leq \prod_{i=n}^{N} e^{-P(A_i)} \\
&= e^{-\sum_{i=n}^{N} P(A_i)}.
\end{aligned}$$

Trecând la limită cu $N \to \infty$, obţinem:

$$P\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^c\right) \leq \lim_{N\to\infty} e^{-\sum_{i=n}^{N} P(A_i)} = e^{-\sum_{i=n}^{\infty} P(A_i)} = e^{-\infty} = 0,$$

şi deci

$$P\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^c\right) = 0, \qquad n \geq 1.$$

Folosind inegalitatea lui Boole (Propoziţia 1.2.6) obţinem:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^c\right) = 0,$$

şi deci obţinem $P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^c\right) = 0$. Trecând la complementară, obţinem

$$P(\limsup A_i) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = P\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^c\right)^c\right) = 1 - P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} A_i^c\right) = 1,$$

încheiând demonstraţia. ■

Observaţia 1.4.18 *Prima parte a demonstraţiei nu foloseşte independenţa evenimentelor $A_1, A_2, \ldots$, dar această ipoteză este necesară pentru cea de-a doua parte, afirmaţia ii) a lemei nefiind adevarată în general fără această ipoteză, aşa după cum rezultă din următorul exemplu.*

Exemplul 1.4.19 *Considerăm şirul de evenimente* $A_1 = A_2 = \ldots = A \in \mathcal{F}$ *cu* $P(A) \in (0,1)$. *Să observăm că deoarece* $P(A_1 \cap A_2) = P(A) \neq P(A)P(A) = P(A_1)P(A_2)$, *evenimentele* A_1 *şi* A_2 *(şi deci şi evenimentele* $A_1, A_2, \ldots$*) sunt dependente.*

Avem

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A) = +\infty,$$

deoarece $P(A) \in (0,1)$, *dar*

$$P(\limsup A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i\right) = P(A) \in (0,1),$$

şi deci $P(\limsup A_n) \neq 1$, *ceea ce arată că punctul ii) al lemei Borel–Cantelli nu este în general adevărat fără ipoteza suplimentară a independenţei evenimentelor* $A_1, A_2, \ldots$.

1.4.1 Exerciţii

1. Se aruncă de 2 ori un zar cu 4 feţe. Care dintre evenimentele indicate mai jos sunt independente?

   (a) $A_i = \{\text{prima aruncare este } i\}$, $B_j = \{\text{a doua aruncare este } j\}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$;

   (b) $A = \{\text{prima aruncare este } 1\}$, $B = \{\text{suma aruncărilor este } 5\}$;

   (c) $A = \{\text{minimul aruncărilor este } 2\}$, $B = \{\text{maximul aruncărilor este } 2\}$.

2. Se aruncă de 2 ori un zar, şi se consideră evenimentele:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{prima aruncare este } 1, 2 \text{ sau } 3\}, \\ B &= \{\text{prima aruncare este } 3, 4 \text{ sau } 5\}, \\ C &= \{\text{suma aruncărilor este } 9\}. \end{aligned}$$

   Să se arate că $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, dar că evenimentele A, B, C nu sunt independente.

   Observaţie: exerciţiul arată că $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ **nu asigură** independenţa evenimentelor A, B, C.

3. O persoană participă la un campionat de şah, având probabilitatea de câştig de 0.3 cu jumătate din participanţi (de tip 1), 0.4 cu 1/4 din jucătorii rămaşi (de tip 2), şi de 0.5 cu restul jucătorilor (de tip 3). Care este probabilitatea de a căştiga o partidă cu un oponent ales arbitrar?

   Indicaţie: se foloseşte formula probabilităţii totale cu $B = \{\text{ se câştigă partida }\}$, $A_i = \{\text{ oponentul ales e de tip } i\}$, $i = 1, 2, 3$.

4. Se aruncă un zar cu 4 feţe. Dacă rezultatul este 1 sau 2, se mai aruncă zarul o dată, altfel ne oprim. Care este probabilitatea ca totalul aruncărilor să fie de cel puţin 4?

5. Un test de sânge este 95% eficient în detectarea unei boli (atunci când boala este de fapt prezentă). Cu toate acestea, testul poate da "alarme false" de 1%, pentru persoane care sunt de fapt sănătoase (adică, cu probabilitate de 0.01, când o persoană sănătoasă este testată, testul indică faptul că aceasta este bolnavă).

   Dacă 0.5% din populaţie are această boală, care este probabilitatea ca o persoană care a testat pozitiv să aibă boala?

   Indicaţie: considerăm evenimentele $A = \{\text{persoana are boala respectivă}\}$, $B = \{\text{rezultatul testului este pozitiv}\}$, şi calculăm $P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$.

6. O scrisoare se află, cu probabilităţi egale într-unul din 3 sertare. Fie p_i probabilitatea de a găsi scrisoarea în sertarul i, atunci când ea se află în acest sertar. Care este probabilitatea condiţionată ca scrisoarea să se afle în sertarul i, dat fiind că la o căutare în sertarul 1 ea nu a fost găsită?

   Indicaţie: notăm

$$A_i = \{\text{scrisoarea se află în sertarul } i\},$$
$$B = \{\text{scrisoarea nu a fost găsită la căutarea in sertarul } 1\},$$

   şi calculăm $P(A_i|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}$, iar pentru $P(B)$ folosim $P(B) = \sum P(B|A_i) P(A_i)$.

7. 3 cărţi de joc sunt identice, cu excepţia faptului că una are ambele feţe roşii, una are ambele feţe negre, iar cea de-a treia are o faţă roşie şi una neagră. Se alege la întâmplare o carte şi se constată că are o faţă roşie. Care este probabilitatea ca cealaltă faţă este neagră?

   Indicaţie: răspunsul corect este $\frac{1}{3}$!