4.10.2016

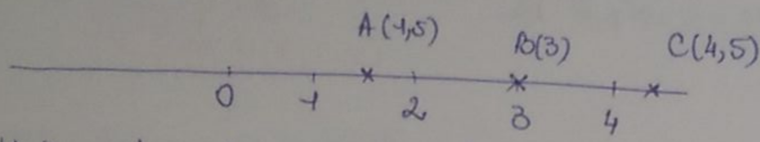
GEOMETRIE COMPUTAȚIONALĂ

gea.math.unibuc.ro

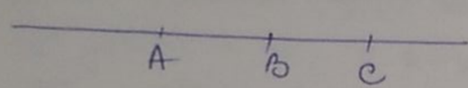
RELAȚII ÎNTRE PUNCTE

Context 1D

coordonate



fără sistem de coordonate



$\vec{AB} = r\vec{BC}$

CONVENȚIE

Fie $A, B \in \mathbb{R}^n$; $\vec{AB} \stackrel{def}{=} B - A$

De exemplu în $\mathbb{R}^2$:

$$\left.\begin{array}{l} A = (x_A, y_A) \\ B = (x_B, y_B) \end{array}\right| \Rightarrow \vec{AB} = B - A = (x_B - x_A, y_B - y_A)$$

$\boxed{\text{Ex 1}}$ Calcul raport

$A = (1, 2, 3)$

$B = (2, 1, -1)$

$C = (0, 3, 7)$

$\vec{AC} = ?\,\vec{CB}$

$\vec{AC} = C - A = (-1, 1, 4)$

$\vec{CB} = B - C = (2, -2, -8)$

$$\vec{AC} = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{r(A,C,B)}\vec{CB}$$

Combinații liniare vs. combinații afine / combinații baricentrice

În $\mathbb{R}^n$

- $v_1, v_2, \dots, v_p$ vectori (din $\mathbb{R}^n$)

COMBINAȚIE LINIARĂ este un vector de forma:

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_p v_p$, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$

- $A_1, A_2, A_3, \dots, A_p$ puncte (din $\mathbb{R}^n$)

COMBINAȚIE AFINĂ (baricentrică) este un punct de forma:

$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_p A_p$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = 1$

- $A_1, A_2, \dots, A_p$ puncte

COMBINAȚIE CONVEXĂ este un punct de forma

$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \dots + \alpha_p A_p$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_p = 1$

$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p \in [0,1]$

Fie $A, B \in \mathbb{R}^n$; $A \neq B$

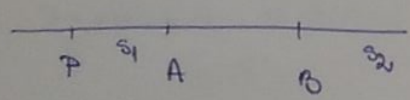
- un punct de forma: $\underset{1-\lambda}{\alpha} A + \underset{\lambda}{\beta} B$ cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta = 1$ este o combinație

$= (1-\lambda)A + \lambda B$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$

afină / baricentrică a punctelor A, B $\Rightarrow$ situat pe dreapta AB

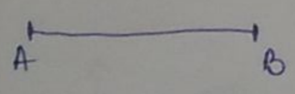
- un punct de forma: $(1-\lambda)A + \lambda B$, cu $\lambda \in [0,1]$ este o combinație convexă ale punctelor A și B $\rightarrow$ situat pe segmentul $[AB]$ și reciproc.

EXEMPLU:



$P = 2A - B$

$A = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}B$



centru de greutate

$\frac{m_A}{m_A + m_B} \cdot A + \frac{m_B}{m_A + m_B} \cdot B$

$\boxed{\text{PROPRIETATE}}$ Legătura dintre raportul $r(A,P,B)$ (definit cu vectori) și scrierea lui P combinație afină dintre A și B (definită cu puncte)

PUNCTE ⟶ VECTORI

$P = (1-\alpha)A + \alpha B$, cu $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{+1\}$

(avem α, combinație afină)

$r = r(A;P,B) = ?$ în funcție de α

$\Rightarrow$ (trecem la relații vectoriale)

$$\underbrace{\overrightarrow{PP}}_{=0} = (1-\alpha)\overrightarrow{PA} + \alpha\overrightarrow{PB} \Rightarrow (1-\alpha)\overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{PB} \quad \xrightarrow{\alpha \neq 1} P \neq B$$

$$\overrightarrow{AP} = \underbrace{\frac{\alpha}{1-\alpha}}_{= r(A,P,B)} \cdot \overrightarrow{PB} \Rightarrow r(A,P,B) = \frac{\alpha}{1-\alpha} \quad (\alpha \neq 1,\ P \neq B)$$

VECTORI ⟶ PUNCTE

Fie P a.î. $\overrightarrow{AP} = r\overrightarrow{PB}$ (știu raportul $r = r(A,P,B)$)

Vrem să găsim α a.î. $P = (1-\alpha)A + \alpha B$

Avem $\overrightarrow{AP} = r\overrightarrow{PB} \Rightarrow 0 = -\overrightarrow{AP} + r\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PA} + r\overrightarrow{PB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PA} + r\overrightarrow{PB}$

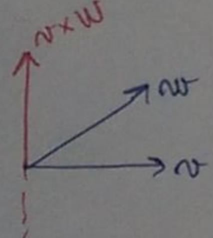
$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{r+1} \cdot \overrightarrow{PP}}_{0 = \overrightarrow{PP}} = \frac{1}{r+1}\overrightarrow{PA} + \frac{r}{r+1}\overrightarrow{PB}$$

Suma coeficienților este 1. $\Rightarrow P = \underbrace{\frac{1}{r+1}}_{1-\alpha} A + \underbrace{\frac{r}{r+1}}_{\alpha} B$, $r \neq -1$

PRODUS VECTORIAL (CROSS PRODUCT)

GEOMETRIC: dați v, w (necoliniari)

Produsul vectorial ($v \times w$) este un vector
- → perpendicular pe planul determinat de v și w
- → are sensul dat de regula burghiului (șurubului drept)
- → are lungimea dată de o anumită formulă



→ în $\mathbb{R}^3$ (abordare numerică)

$v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$

$w = (w_1, w_2, w_3) \in \mathbb{R}^3$

$v \times w$ - ?

$$v \times w = \begin{vmatrix} v_1 & w_1 & e_1 \\ v_2 & w_2 & e_2 \\ v_3 & w_3 & e_3 \end{vmatrix}$$ determinant formal

Deosebire față de produsul scalar (dot product)

EXEMPLU: $v = (0, 1, 2)$; $w = (4, 1, 0)$

$v \cdot w = \langle v, w \rangle = 0 \cdot 4 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 1$

$$v \times w = \begin{vmatrix} 0 & 4 & e_1 \\ 1 & 4 & e_2 \\ 2 & 0 & e_3 \end{vmatrix} \xlongequal[\text{ultima coloană}]{\text{dezvoltare după}} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} e_1 - \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} e_2 + \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} e_3 =$$

$$= -2e_1 - 8e_2 - 4e_3 = (-2, 8, -4) = (-v \times w)$$