Chapter 1

Elemente de Teoria Probabilităţilor

1.1 Spaţiu de probabilitate

În acest capitol vom defini conceptul de *spaţiu de probabilitate*, modelul matematic al rezultatului unui anumit experiment (aruncarea unui ban, a unui zar, jocul la ruletă, etc).

Considerăm deci un experiment, al cărui rezultat nu se poate preciza cu siguranţă înaintea efectuării lui, dar pentru care mulţimea tuturor rezultatelor posibile este cunoscută.

Numim *eveniment elementar* oricare din rezultatele efectuării experimentului considerat. Spre exemplu, în cazul aruncării unui zar, apariţia feţei cu numărul 5 este un eveniment elementar. Vom nota evenimentele elementare cu minuscule (ω, ω_1, ω_2, etc) sau cu alte simboluri (spre exemplu "1" la aruncarea unui zar, sau "s" pentru apariţia stemei, în cazul aruncării unui ban, etc).

Vom nota prin - mulţimea tuturor evenimentelor elementare (mulţimea tuturor rezultatelor posibile ale experimentului considerat).

Observaţia 1 *În urma efectuării experimentului, suntem interesaţi de apariţia unor* evenimente*, adică a unor mulţimi de evenimente elementare (submulţimi ale lui -). Să observăm că dacă suntem interesaţi de apariţia unui eveniment (spre exemplu apariţia feţei* 1 *sau* 2 *la aruncarea unui zar), atunci în mod implicit suntem interesaţi si de ne-apariţia acestui eveniment, adică de apariţia evenimentului contrar (apariţia feţei* $3, 4,$ 5 *sau* 6*); de asemenea, dacă suntem interesaţi de apariţia mai multor evenimente de interes (spre exemplu extragerea unuia din biletele de loterie pe care le-am cumpărat), suntem implicit interesaţi şi de apariţia evenimentului care constă în apariţia unuia din evenimentele considerate, adică a reuniunii evenimentelor considerate (cazul în care vom câştiga la loterie cu unul din biletele pe care le-am cumpărat).*

Observaţia anterioară justifică faptul că mulţimea evenimentelor (pe care o vom nota prin $\mathcal{F}$) trebuie să verifice anumite proprietăţi, conţinute în următoarea:

Definiţia 2 *Dată fiind o mulţime nevidă* $\Omega \neq \emptyset$*, numim* $\sigma-$*algebră a lui* Ω *o familie nevidă* $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$ *de submulţimi ale lui* Ω*, cu proprietăţile:*

i) $\mathcal{F}$ *este închisă la complementară, adică*

$$A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

ii) $\mathcal{F}$ *este închisă la reuniune, adică*

$$A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}.$$

Se verifică uşor următoarea:

Propoziţia 3 *Dacă* $\mathcal{F}$ *este o* σ*–algebră a lui* Ω*, atunci au loc următoarele:*

a) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$

b) Pentru orice $n \geq 1$ *şi* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$*, avem* $A_1 \cup \ldots \cup A_n$*,* $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}$

c) Pentru orice şir de evenimente $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$*, avem* $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

d) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \Delta B \overset{def}{=} (A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{F}$

Demonstraţie. Exerciţiu. ■

Observaţia 4 *Din propoziţia anterioară observăm că orice* $\sigma-$*algebră conţine două evenimente importante:*

– evenimentul sigur (notat Ω*): este evenimentul ce apare la fiecare efectuare a experimentului;*

– evenimentul imposibil (notat $\emptyset$*): este evenimentul ce nu apare la nici o efectuare a experimentului.*

O mulţime nevidă Ω împreună cu o σ–algebră $\mathcal{F}$ se numeşte *spaţiu măsurabil* (un spaţiu "pregătit" pentru introducerea unei măsuri), şi se notează $(\Omega, \mathcal{F})$.

Reamintim că o *msur* pe spaţiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{F})$ este o funcţie $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile:

$\mu(A) \geq 0$ oricare ar fi $A \in \mathcal{F}$;

$\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$, oricare ar fi mulţimile $A_n \in \mathcal{F}$, disjuncte două câte două.

Dacă în plus μ verifică şi $\mu(\Omega) = 1$, atunci μ se numeşte măsură de probabilitate. Avem deci următoarea:

Definiţia 5 *Numim măsură de probabilitate / probabilitate pe spaţiul măsurabil* $(\Omega, \mathcal{F})$ *o funcţie* $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *cu proprietăţile:*

i) $P(F) \geq 0$ *oricare ar fi* $F \in \mathcal{F}$;

ii) $P(-\ ) = 1$;

iii) Oricare ar fi evenimentele $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ *disjuncte două câte două, avem*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right).$$

Definiţia 6 *Numim spaţiu de probabilitate un triplet* $(-\ , \mathcal{F}, P)$ *în care:*

- $- \neq \emptyset$ *este o mulţime nevidă (mulţimea evenimentelor elementare);*

$\mathcal{F}$ *este o* $\sigma-$*algebră pe* $-\ $*;*

$P : \mathcal{F} \to [0,1]$ *este o măsură de probabilitate pe* $(-\ , \mathcal{F})$.

Au loc următoarele proprietăţi:

Propoziţia 7 *Fie* $(-\ , \mathcal{F}, P)$ *un spaţiu de probabilitate. Au loc următoarele:*
i) (Monotonie) Dacă $A, B \in \mathcal{F}$ *cu* $A \subset B$*, atunci* $P(A) \leq P(B)$*;*
ii) (Subaditivitate) Dacă $A_1, A_2 ... \in \mathcal{F}$ *atunci* $P\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P\left(A_n\right).$
iii) (Continuitate) Dacă $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ *astfel încât există*[1] $\lim_{n\to\infty} A_n = A$*, atunci*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right).$$

În particular:
a) Dacă $A_n \uparrow A$ *(i.e.* $A_1 \subset A_2 \subset ...$ *şi* $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = A$*) atunci* $P(A_n) \uparrow P(A)$*;*
b) Dacă $A_n \downarrow A$ *(i.e.* $A_1 \supset A_2 \supset ...$ *şi* $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = A$*) atunci* $P(A_n) \downarrow P(A)$*.*

Demonstraţie. Vom demonstra numai afirmaţia iii), restul rămânând ca exerciţii.

Considerăm mai întâi cazul particular în care $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ este un şir crescător de evenimente (şi deci conform Propoziţiei 31 $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ în acest caz).

Să notăm

$$\begin{cases} B_1 = A_1 \\ B_2 = A_2 - A_1 \\ \ldots \\ B_n = A_n - A_{n-1}, \qquad n \geq 2 \end{cases},$$

şi să observăm că evenimentele B_n sunt disjuncte ($B_i \cap B_j = \emptyset$ for $i \neq j$) şi au loc relaţiile

$$\bigcup_{n=1}^{N} B_n = A_N,$$

[1] Reamintim că limita unui şir de mulţimi A_n se poate defini similar cu limita unui şir de numere astfel: se definesc limita inferioară şi limita superioară prin $\liminf A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k$, respectiv, $\limsup A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$. Dacă cele două mulţimi coincid, spunem că şirul $A_1, A_2, ...$ are limită şi notăm valoarea comună a celor două mulţimi prin $\lim_{n\to\infty} A_n$

oricare ar fi $N \geq 1$, şi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Avem

$$\begin{aligned}
P(A) &= P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(B_n) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P(B_n) \\
&= \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{N} B_n\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} P(A_N).
\end{aligned}$$

Să considerăm acum cazul în care $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ este un şir descrescător de evenimente. Notând $B_n = A_n^c = \text{-}\ - A_n$, $n \geq 1$, $(B_n)_{n\geq 1}$ formează un şir crescător de evenimente. Conform demonstraţiei anterioare avem deci

$$P\left(\lim_{n\to\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(B_n),$$

sau echivalent

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (\text{-}\ - A_n)\right) = \lim_{n\to\infty} P(\text{-}\ - A_n),$$

de unde obţinem

$$\begin{aligned}
1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\text{-}\ - \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} P(\text{-}\ - A_n) \\
&= 1 - \lim_{n\to\infty} P(A_n),
\end{aligned}$$

adică

$$P(A) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

Pentru cazul general, să presupunem că există $\lim_{n\to\infty} A_n$, şi deci $\liminf A_n = \limsup A_n$.

Conform demonstraţiilor anterioare avem:

$$P(\limsup A_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i)}_{\text{şir descrescător}} = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) = \limsup P(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i) \geq \limsup P(A_n),$$

şi similar

$$P\left(\liminf A_n\right) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i)}_{\text{şir crescător}} = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i) = \liminf P(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i) \leq \liminf P\left(A_n\right).$$

Din inegalităţile anterioare (şi folosind faptul că $\liminf \leq \limsup$) rezultă

$$P\left(\liminf A_n\right) \leq \liminf P\left(A_n\right) \leq \limsup P\left(A_n\right) \leq P\left(\limsup A_n\right),$$

şi cum $\liminf A_n = \limsup A_n$, rezultă că există $\lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right)$ (deoarece $\liminf P\left(A_n\right) = \limsup P\left(A_n\right)$) şi are loc

$$P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(A_n\right),$$

încheiând demonstraţia. ■

Prezentăm în continuare câteva exemple de spaţii de probabilitate.

Exemplul 8 (Spaţiu de probabilitate discret) *Fie - o mulţime cel mult numărabilă (finită sau numărabilă). Fie $\mathcal{F} = \mathcal{P}(-)$ - mulţimea tuturor submulţimilor lui - , şi definim:*

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega),$$

unde $p : - \to [0, +\infty]$ este o funcţie cu proprietatea că $\sum_{\omega\in} p(\omega) = 1$.

În cazul particular în care mulţimea - este finită, şi considerând $p(\omega) = \frac{1}{|\ |}$ obţinem spaţiul de probabilitate al unui eveniment cu un număr finit de evenimente, egal probabile, spre exemplu:

1. *Aruncarea unei monede: $- = \{s, b\}$;*
2. *Aruncarea unui zar: $- = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*

Observaţia 9 *Considerând o familie de mulţimi $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(-)$, aceasta nu este în general o $\sigma-$algebră. Se poate arăta însă (vezi exerciţiile) că există o cea mai mică $\sigma-$algebră ce conţine pe $\mathcal{S}$, notată $\sigma(\mathcal{S})$.*

În cazul particular $- = \mathbb{R}$ şi $\mathcal{S} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$, $\sigma-$algebra generată de $\mathcal{S}$ se numeşte $\sigma-$algebra mulţimilor Boreliene pe $\mathbb{R}$ (sau familia mulţimilor Boreliene pe $\mathbb{R}$), şi se notează cu $\mathcal{B}$ (sau $\mathcal{B}(\mathbb{R})$).

Se poate arăta că înlocuind $\mathcal{S}$ prin mulţimea intervalelor de forma $(-\infty, a]$, $a \in \mathbb{R}$, (sau (a, b), sau a oricărui alt tip de intervale), se obţine aceeaşi $\sigma-$algebră a mulţimilor Boreliene $\mathcal{B}$.

Exemplul 10 (Spaţiu de probabilitate nenumărabil/continuu) *Considerăm $- = \mathbb{R}$ axa reală, $\mathcal{B}$ familia mulţimilor Boreliene din $\mathbb{R}$ şi $P = \lambda$ măsura Lebesgue pe $\mathbb{R}$ (unica măsură pe $\mathcal{B}$ cu proprietatea că $\lambda((a, b]) = b - a$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$).*

Atunci $(\mathbb{R},\mathcal{B},\lambda)$ *este un spaţiu cu măsură, dar deoarece* $\lambda(\mathbb{R})=\infty\neq 1$, *nu este un spaţiu de probabilitate. Pentru a-l transforma într-un spaţiu de probabilitate, restrângem spaţiul evenimentelor la intervalul* $(0,1)$, *astfel: considerăm* $\Omega=(0,1)$, $\mathcal{F}=\{A\cap(0,1):A\in\mathcal{B}\}$ *şi* $P=\lambda|_{(0,1)}$.

Exemplul 11 (Spaţiu produs cartezian) *Dacă* $(\Omega_i,\mathcal{F}_i,P_i)$, $i=1,...,n$, *sunt spaţii de probabilitate, putem construi spaţiul de probabilitate produs, considerând:*

$\Omega=\Omega_1\times...\times\Omega_n$

$\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\times...\times\mathcal{F}_n$ *($\sigma-$ algebra generată de mulţimile de forma* $A_1\times...\times A_n$, *cu* $A_i\in\mathcal{F}_i$, $i=1,...,n$*)*

$P=P_1\times...\times P_n:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ *ca fiind măsura pe* $\mathcal{F}$ *definită prin*

$$P(A_1\times...\times A_n)=P(A_1)\cdot...\cdot P(A_n),$$

oricare ar fi $A_i\in\mathcal{F}_i$, $i=1,...,n$.

Spre exemplu, considerând $\Omega_1=\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$, $\mathcal{F}_1=\mathcal{F}_2=\mathcal{P}(\Omega)$ *şi* $P_1(A)=P_2(A)=\frac{|A|}{6}$, *obţinem spaţiul produs corespunzător aruncării a două zaruri:*

$\Omega=\Omega_1\times\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}\times\{1,2,3,4,5,6\}$

$\mathcal{F}=\mathcal{P}(\Omega)$

$P=P_1\times P_2:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$, $P(A)=\frac{|A|}{36}$.

Exemplul 12 (Spaţiu de probabilitate indus de o variabilă aleatoare) *Considerăm un spaţiu de probabilitate arbitrar* $(\Omega,\mathcal{F},P)$ *şi o funcţie* $X:\Omega\to\mathbb{R}$ *cu proprietatea că*

$$X^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega:X(\omega)\in B\}\in\mathcal{F},$$

oricare ar fi mulţimea Boreliană $B\in\mathcal{B}$ *(numim o astfel de funcţie* variabilă aleatoare*).*

Se poate verifică uşor că $\mu=\mu_X:\mathcal{B}\to\mathbb{R}$ *definită prin*

$$\mu_X(B)=P\left(X^{-1}(B)\right),\qquad B\in\mathcal{B},$$

este o măsură de probabilitate pe $(\mathbb{R},\mathcal{B})$, *şi deci* $(\mathbb{R},\mathcal{B},\mu_X)$ *este un spaţiu de probabilitate (variabila aleatoare* X *induce o măsură de probabilitate pe* $\mathbb{R}$*). Măsura de probabilitate* μ_X *se numeşte distribuţia variabilei aleatoare* X.

EXERCIŢII

Exerciţiul 13 *Să se demonstreze că dacă* $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$, *atunci limita inferioară şi limita superioară a şirului de mulţimi* $(A_n)_{n\geq 1}$, *definite prin* $\liminf A_n = \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{k=n}^{\infty} A_k$, *respectiv,* $\limsup A_n = \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{k=n}^{\infty} A_k$, *verifică*

$$\liminf A_n \subset \limsup A_n.$$

Exerciţiul 14 *Să se arate că dată fiind o familie de mulţimi* $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(-\ )$, *există o cea mai mică* $\sigma-$*algebră ce conţine pe* $\mathcal{S}$, *adică există o* $\sigma-$*algebră (notată* $\sigma(\mathcal{S})$*) cu proprietăţile:*

i) $\mathcal{S} \subset \sigma(\mathcal{S})$;

ii)Oricare ar fi $\mathcal{A}$ *o* $\sigma-$*algebră ce conţine pe* $\mathcal{S}$, *are loc* $\sigma(\mathcal{S}) \subset \mathcal{A}$.

Indicaţie: se arată că $\sigma(\mathcal{S}) = \bigcap_{\mathcal{A}\ \sigma-algebr\breve{a}, \mathcal{S}\subset\mathcal{A}} \mathcal{A}$ *verifică proprietăţile cerute.*

Exerciţiul 15 *Fie* $-\ = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ *- familia tuturor mulţimilor* A *cu proprietatea că* A *sau* A^c *este numărabilă, şi* $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } A \text{ numărabilă} \\ 1, & \text{dacă } A^c \text{ numărabilă.} \end{cases}$$

Să se arate că $(\omega, \mathcal{F}, P)$ *este un spaţiu de probabilitate.*