Chapter 1

Elemente de Teoria Probabilităţilor

1.1 Spaţiu de probabilitate

Pentru a defini conceptul de *spaţiu de probabilitate*, vom considera un experiment, al carui rezultat nu se poate preciza cu siguranţă inaintea efectuării lui, dar pentru care mulţtimea tuturor rezultatelor posibile este cunoscută.

Numim *eveniment elementar* oricare din rezultatele efectuării experimentului considerat. Spre exemplu, in cazul aruncării unui zar, apariţia feţei cu numărul 5 este un eveniment elementar.

Vom nota prin Ω mulţimea tuturor evenimentelor elementare (mulţimea tuturor rezultatelor posibile ale experimentului considerat).

Numim *eveniment* o submulţime de a lui Ω (un eveniment este deci o mulţime de evenimente elementare).

In general, vom nota evenimentele cu majuscule (spre exemplu $A, B, C, \ldots$) iar evenimentele elementare cu minuscule (spre exemplu $\omega, \omega_1, \omega_2, \ldots$) sau prin alte simboluri (spre exemplu prin $1, 2, \ldots, 6$ în cazul aruncării unui zar).

Distingem două evenimente importante:

– evenimentul sigur (notat Ω): este evenimentul ce apare la fiecare efectuare a experimentului;

– evenimentul imposibil (notat $\emptyset$): este evenimentul ce nu apare la nici o efectuare a experimentului.

Exemplul 1.1.1 *La aruncarea unui zar (considerând $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$) putem considera ca evenimente:*

– A : apariţia feţei 3 (adică $A = \{3\}$)

– B : apariţia unui număr par (adică $A = \{2, 4, 6\}$)

– C : apariţia unui număr mai mare sau egal cu 3 (adică $C = \{3, 4, 5, 6\}$)

Exemplul 1.1.2 *La aruncarea unui ban (considerând $\Omega = \{B, S\}$) putem considera ca evenimente:*

– A_1 : *apariţia banului (adică* $A_1 = \{B\}$*)*
– A_2 : *apariţia stemei (adică* $A_1 = \{S\}$*)*

Dat fiind un spaţiu Ω de evenimente elementare, pentru două evenimente $A, B \subset \Omega$ introducem următoarele definiţii:

Spunem că evenimentele A şi B sunt *incompatibile* dacă ele nu pot apare simultan la nici o efectuare a experimentului;

Spunem că evenimentul A este *conţinut* in evenimentul B şi notăm $A \subset B$, dacă realizarea evenimentului A atrage după sine realizarea evenimentului B;

Definim *reuniunea* evenimentelor A şi B, notată prin $A \cup B$, ca fiind evenimentul ce constă in realizarea lui A sau realizarea lui B;

Definim *intersecţia* evenimentelor A şi B, notată prin $A \cap B$, ca fiind evenimentul ce constă in realizarea simultană a evenimentelor A şi B;

Definim *evenimentul contrar* evenimentului A, notat prin A^c, ca fiind evenimentul ce constă în nerealizarea evenimentului A;

Definim *diferenţa* evenimentelor A şi B (in această ordine), notată prin $A - B$, ca fiin evenimentul ce constă in realizarea lui A **şi** nerealizarea lui B.

Spunem ca evenimentele $A_1, A_2, \ldots, A_n \subset \Omega$ formează un *sistem complet de evenimente* dacă sunt două câte două incompatibile şi reuniunea lor este întreg spaţiul de evenimente Ω, adică dacă au loc:

$$i) \qquad A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$$

$$ii) \qquad A_i \cap A_j = \emptyset, \qquad \text{oricare ar fi } 1 \leq i, j \leq n$$

Observaţia 1.1.3 *Pentru a defini probabilitatea asociată unui eveniment A, o posibilitate ar fi sa repetăm experimentul de un numar $n \geq 1$ de ori, şi să determinăm numărul (*frecvenţa*) $f_n(A)$ de apariţii a evenimentului A in cele n repetări ale experimentului.*

Raportul

$$fr_n(A) = \frac{f_n(A)}{n}$$

dă frecvenţa relativă *a realizării lui A în cele n repetări ale experimentului, şi am putea defini probabilitatea evenimentului A ca fiind*

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} fr_n(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f_n(A)}{n}.$$

Această definiţie ar prezenta însă lacune din punct de vedere matematic (spre exemplu garantarea existenţei limitei de mai sus, a independenţei valorii limitei de o eventuală repetare a experimentelor de către "o altă persoană", şamd).

Pentru a defini conceptul de probabilitate asociată unui eveniment, vom folosi o abordare moderna, axiomatică. Începem prin a defini noţiunea de algebră / σ–algebră, după cum urmează:

Definiţia 1.1.4 *Dată fiind o mulţime nevidă $\Omega \neq \emptyset$, numim algebră / corp de părţi a lui Ω o familie nevidă $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$ de părţi a lui Ω, cu proprietăţile:*

i) $\mathcal{F}$ este închisă la complementară, adică

$$A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

ii) $\mathcal{F}$ este închisă la reuniune, adică

$$A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{F}.$$

Exemplul 1.1.5 *Pentru $\Omega = \{B, S\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ (algebra "minimală"), $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{B\}, \{S\}, \Omega\}$ (algebra "maximală") sunt algebre ale lui Ω.*

In general, pentru o algebră $\mathcal{F}$ arbitrară a unei mulţimi de evenimente elementare Ω are loc

$$\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F} \subset \mathcal{F}_2,$$

unde $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$ şi $\mathcal{F}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$

Propoziţia 1.1.6 *Dacă $\mathcal{F}$ este o algebră a lui Ω, atunci au loc următoarele:*

a) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$

b) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{F}$

c) Pentru orice $n \geq 1$ şi $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, avem $A_1 \cup \ldots \cup A_n$, $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}$

d) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A - B$, $B - A$, $A \Delta B \overset{def}{=} (A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{F}$

Definiţia 1.1.7 *Dată fiind o mulţime nevidă $\Omega \neq \emptyset$, numim σ–algebră / σ–corp de părţi a lui Ω o familie nevidă $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega) = \{A : A \subset \Omega\}$ de părţi a lui Ω, cu proprietăţile:*

i) $\mathcal{F}$ este închisă la complementară, adică

$$A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

ii) $\mathcal{F}$ este închisă la reuniuni numărabile, adică

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \Longrightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Are loc următoarea:

Propoziţia 1.1.8 *Dacă $\mathcal{F}$ este o σ–algebră a lui Ω, atunci au loc următoarele:*

a) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$

b) Pentru orice $n \geq 1$ şi $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$, avem $A_1 \cup \ldots \cup A_n$, $A_1 \cap \ldots \cap A_n \in \mathcal{F}$

c) Pentru orice şir de evenimente $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$, avem $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$

d) $A, B \in \mathcal{F} \Longrightarrow A \Delta B \overset{def}{=} (A - B) \cup (B - A) \in \mathcal{F}$

O mulţime nevidă Ω pentru care s-a definit o σ–algebră $\mathcal{F}$ se numeşte *spaţiu măsurabil*, şi se notează $(\Omega, \mathcal{F})$.

Definiţia 1.1.9 *Numim (măsură de) probabilitate pe spaţiul măsurabil* $(\Omega, \mathcal{F})$ *o funcţie* $P : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ *cu proprietăţile:*

i) $P(\Omega) = 1$

ii) Oricare ar fi evenimentele $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ *incompatibile (disjuncte) două câte două, avem*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n'1}^{\infty} P(A_n).$$

Definiţia 1.1.10 *Numim spaţiu (câmp) de probabilitate complet aditiv un triplet* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *unde*

- $\Omega \neq \emptyset$ *este mulţimea evenimentelor elementareş*
- $\mathcal{F}$ *este o* σ*–algebră a lui* Ω*;*
- P *este o măsură de probabilitate pe spaţiul masurabil* $(\Omega, \mathcal{F})$*.*

Are loc următoarea:

Propoziţia 1.1.11 *Dacă* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *este un spaţiu de probabilitate complet aditiv, atunci au loc următoarele:*

1. $P(\emptyset) = 0$
2. $P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$*, oricare ar fi* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ *disjuncte două câte două*
3. $P(A) \leq P(B)$*, oricare ar fi* $A, B \in \mathcal{F}$ *cu* $A \subset B$
4. $0 \leq P(A) \leq 1$*, oricare ar fi* $A \in \mathcal{F}$
5. $P(A^c) = 1 - P(A)$*, oricare ar fi* $A \in \mathcal{F}$
6. $P(B - A) = P(B) - P(A)$*, oricare ar fi* $A, B \in \mathcal{F}$ *cu* $A \subset B$
7. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$*, oricare ar fi* $A, B \in \mathcal{F}$*.*

Demonstraţie. Exerciţiu. ■

Exemplul 1.1.12 *În cazul aruncării unui zar, putem considera ca spaţiu de probabilitate* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, unde*

- $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \ldots \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \ldots, \{5, 6\}, \ldots, \{1, 2, \ldots, 6\}\}$
- $P : \mathcal{F} \to [0, \infty)$*,* $P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$

Exemplul 1.1.13 *În cazul aruncării unui ban, putem considera ca spaţiu de probabilitate* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, unde*

- $\Omega = \{B, S\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{B\}, \{S\}, \{B, S\}\}$
- $P : \mathcal{F} \to [0, \infty)$, $P(\{B\}) = P(\{S\}) = \frac{1}{2}$ *(sau* $P(\{B\}) = p$, $P(\{S\}) = 1 - p$, $0 < p < 1$*, în cazul în care banul este "măsluit")*

Exemplul 1.1.14 *În cazul aruncării a două monede, putem considera ca spaţiu de probabilitate* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, unde*

- $\Omega = \{(B, B), (B, S), (S, B), (S, S)\}$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$
- $P : \mathcal{F} \to [0, \infty)$, $P((B, B)) = P((B, S)) = P((S, B)) = P((S, S)) = \frac{1}{4}$

1.1.1 Exerciţii

1. În câte moduri se pot forma cuvinte cu 3 litere a, b, c?
2. La un examen se prezintă 2 băieţi si 3 fete. Câte liste de rezultate)presupunând notele obţinute distincte) se pot obţine? Dar dacă rezultatele obţinute sunt afişate pe liste diferite pentru băieţi şi fete?
3. 4 cărţi de matematică, 3 cărţi de chimie şi două de geografie trebuiesc aranjate pe un raft, grupate pe subiecte. În câte moduri diferite se poate face aceasta?
4. În câte moduri diferite se pot acorda premiile I, II şi III la 5 elevi?
5. În câte moduri se pot acorda 3 menţiuni la 5 elevi?
6. În câte moduri se poate forma un comitet de 3 persoane din 20 de oameni?
7. Câte grupuri de 5 persoane, formate din 2 bărbaţi şi 3 femei se pot forma cu 5 bărbaţi şi 7 femei?
8. Fie E, F şi G trei evenimente. Să se descrie evenimentele:
   (a) Numai E
   (b) E şi G dar nu F
   (c) Cel puţin unul din evenimentele E, F, G
   (d) Cel puţin două din evenimentele E, F, G
   (e) Toate trei evenimentele E, F, G
   (f) Nici unul din evenimentele E, F, G
   (g) Cel mult unul din evenimentele E, F, G

(h) Cel mult două din evenimentele E, F, G

(i) Exact două din evenimentele E, F, G

(j) Cel mult trei din evenimentele E, F, G

9. Să se simplifice expresiile:

   (a) $(E \cup F) \cap (E \cup F^c)$

   (b) $(E \cup F) \cap (E^c \cup F) \cap (E \cup F^c)$

   (c) $(E \cup F) \cap (F \cup G)$

10. Să se demonstreze inegalitatea lui Boole:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

11. Dacă $P(E) = 0.9$ şi $P(F) = 0.8$, să se demonstreze că $P(E \cap F) \geq 0.7$. Mai general, să se demonstreze inegalitatea lui Bonferroni:

$$P(E \cap F) \geq P(E) + P(F) - 1.$$

12. Să se arate că ăprobabilitatea ca exact unul din evenimentele E şi F are loc este

$$P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$

13. Să se demonstreze relaţia

$$P(E \cap F^c) = P(E) - P(E \cap F)$$

14. Să se demonstreze relaţia

$$P(E^c \cap F^c) = 1 - P(E) - P(F) + P(E \cap F)$$

15. O urnă conţine M bile negre şi N bile albe. Dacă din urnă se extrag r bile, care este probabilitatea ca exact k să fie bile albe? Dar dacă $N = k = 1$?