CURS 9

15.12.2016

GEOMETRIE COMPUTAŢIONALĂ

- DUALITATE -

$P = (P_x, P_y) \longrightarrow p^* : (y = p_x x - p_y)$

punct $\qquad$ dreaptă

$d : (y = m_d x + n_d) \longrightarrow d^* = (m_d, -n_d)$

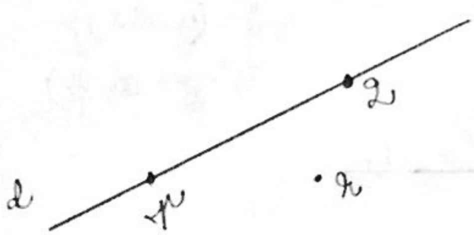
dreaptă $\qquad$ punct

"DICTIONAR" concepte / configurații

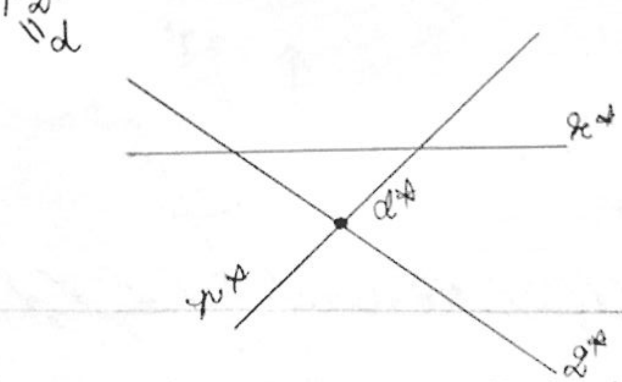
PLAN PRINCIPAL	PLAN DUAL
punct P	dreaptă p^*
dreaptă d	punct d^*
dreaptă determinată de două puncte	puncte determinate de două drepte (punct de intersecție)
p deasupra lui d	d^* deasupra lui p^*
segment	

Observații

• Fie p, q, $p \neq q$. Ce înseamnă (în dual) că un punct r e situat deasupra dreptei pq?



- plan primal -



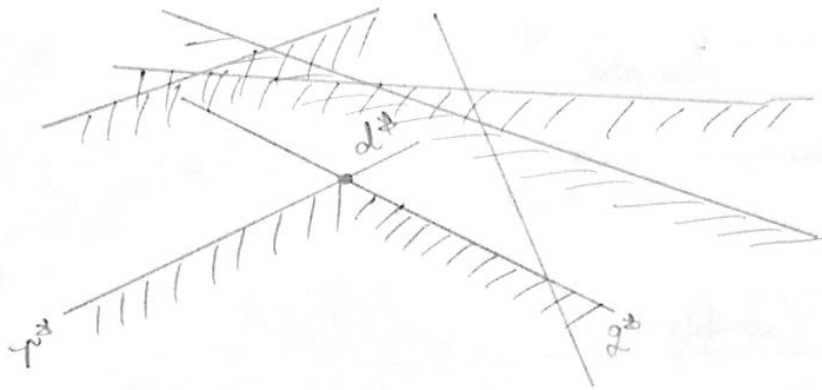
d^* e situat dedesubtul lui r^*

• Fie P o mulțime de puncte. Ce înseamnă că un segment $[pq]$ participă la partea superioară a frontierei acoperirii convexe?

$\rightarrow$ toate celelalte puncte sunt dedesubtul dreptei $d = pq$.

<u>DUAL</u>: Considerăm dreptele p^* și q^* și punctul de intersecție d^*

$\Rightarrow$ d^* este dedesubtul tuturor celorlalte drepte



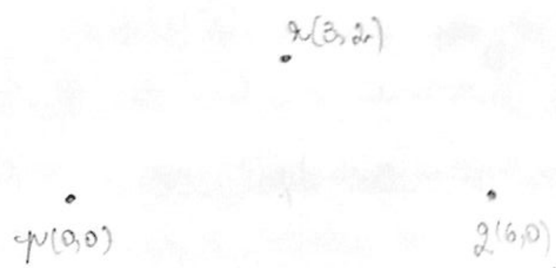
$\Rightarrow$ când intersectăm semiplane inferioare doar p^* și q^* contează!

<u>CONCLUZIE</u>: A determina frontiera superioară a acoperirii convexe pentru o mulțime de puncte P este echivalent cu a determina LE pentru semiplanele inferioare determinate de dreptele duale. Analog pentru frontiera inferioară.

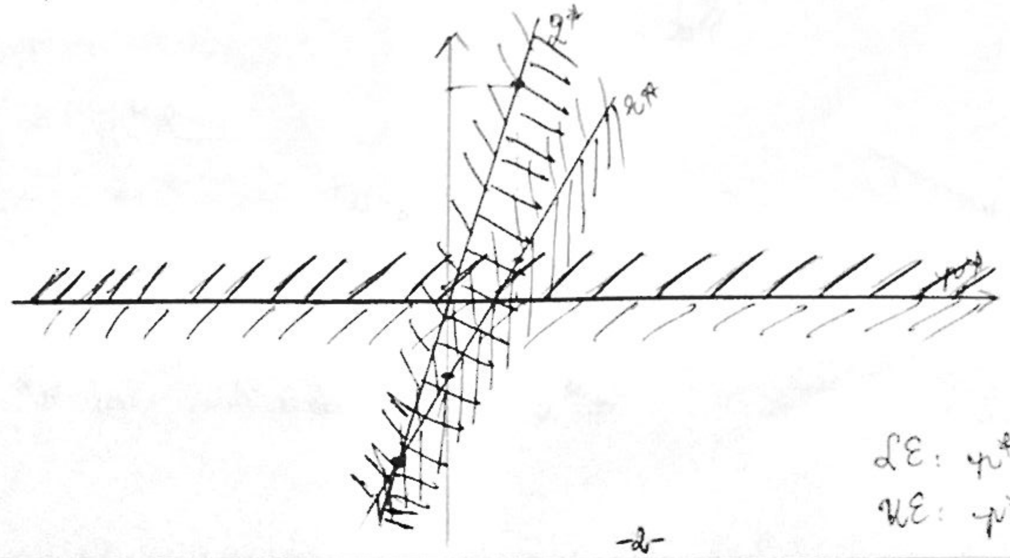
$\Rightarrow$ a determina intersecții de semiplane este echivalent cu a determina frontiera acoperirii convexe $\Rightarrow O(n \log n)$

<u>Exemplu</u>

• acoperirea superioară: p, q, r
• acoperirea inferioară: p, q



$\leftarrow$ <u>plan primal</u>



$p^*: (y = 0)$
$q^*: (y = 6x)$
$r^*: (y = 3x - 2)$

$\leftarrow$ <u>plan dual</u>

LE: p^*, q^*, r^*
UE: p^*, q^*

– PROGRAMARE LINIARĂ (probleme de optimizare) –

(i) <u>Problemă de programare liniară 1-dimensională</u>

Coordonata $x_1 \overset{NOT}{=} x$

funcția obiectiv

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{maximizează } (cx) \\ \begin{cases} a_1 x \le b_1 & \to \text{interval} \\ a_2 x \le b_2 & \to \text{interval} \\ \vdots \\ a_n x \le b_n & \to \text{interval} \end{cases} \end{array}}$$

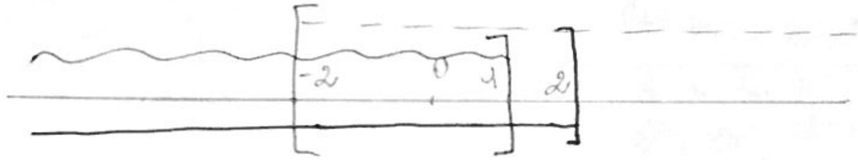
constrângeri

<u>Exemplu</u>

maximizează $(2x)$

$$\begin{cases} 3x \le 6 \\ -2x \le 4 \\ 6x \le 6 \end{cases} \quad \begin{array}{|l} x \le 2 \\ x \geq -2 \\ x \le 1 \end{array}$$

regiune fezabilă : $[-2, 1]$



Maximul funcției obiectiv este 2 și se obține pentru $x = 1$.

<u>PROP</u>: Pentru $d = 1$ un program liniar 1-dimensional poate fi rezolvat în timp liniar.

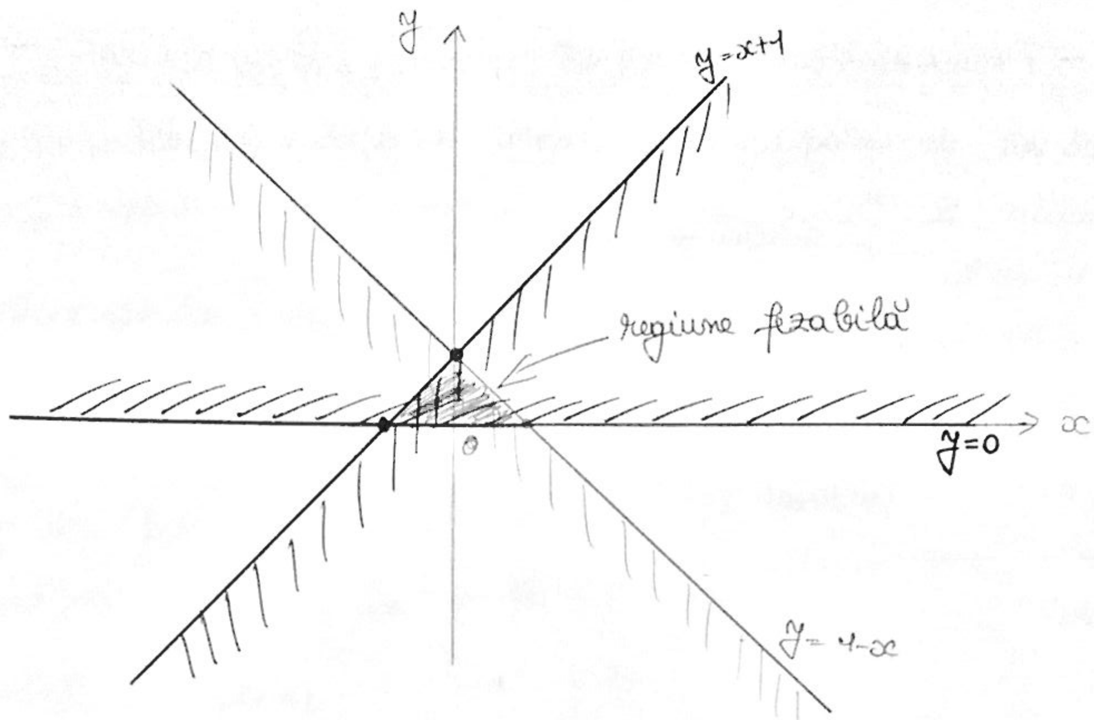
(ii) <u>Problemă de programare liniară 2-dimensională</u>

Notăm coordonatele x și y.

maximizează (y) $\quad (c = (0, 1))$

intersecție de semiplane închise

$$\begin{cases} x + y \le 1 \\ -y \le 0 \\ -x + y \le 1 \end{cases}$$



În punctul (0,1) este maximizată funcția obiectiv

→ Revenind la cadrul general: Ce interpretare are cerința de maximizare?

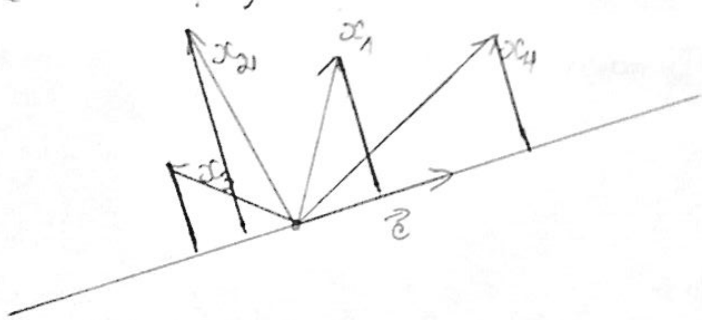
maximizează $(c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d)$

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_dx_d = \langle \vec{c}, \vec{x} \rangle = \vec{c} \cdot \vec{x}$$

[am notat $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_d)$ și $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d)$]

→ Fie $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_d)$ fixat. Ce înseamnă a maximiza $\langle \vec{c}, \vec{x} \rangle$?

R: Înseamnă a maximiza proiecția pe direcția dată de $\vec{c}$ (De ce? demonstrați?)



În desen $\langle \vec{c}, \vec{x_4} \rangle$ e maxim.

În continuare lucrăm în $d=2$

Convenții de terminologie

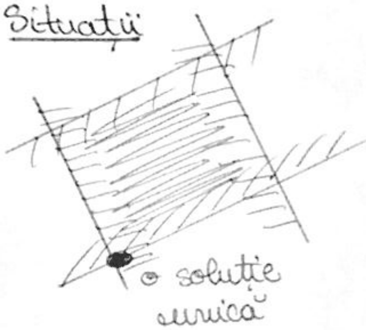
- coordonatele: x, y
- funcția obiectiv: $f_{\vec{c}}(p) = c_x p_x + c_y p_y$
- constrângerile: $h_1, h_2, \dots, h_n$ (semiplane)

  $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$
- program liniar: $(H, \vec{c})$
- regiunea fezabilă: C
- se caută $p \in C$ a.î. $f_{\vec{c}}(p)$ să fie maximă

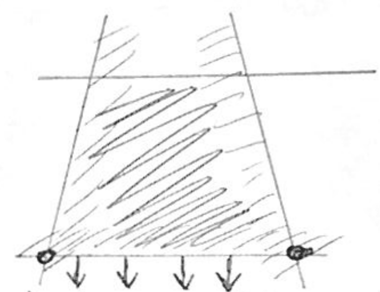
În desene: $\vec{c} = (0,-1)$

Situații

1



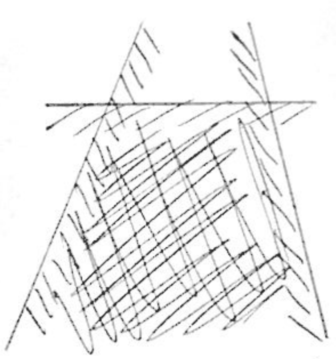
2



toate punctele sunt soluții
(normala exterioară, aceeași direcție și același sens cu $\vec{c}$)

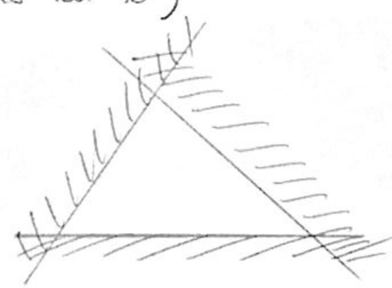
2'

3



regiunea fezabilă este nemărginită: soluții de-a lungul unei „raze"

4



regiunea fezabilă este $\emptyset$

Algoritam LPMARG2D