1.9 Media unei variabile aleatoare. Proprietăţi.

1.9.1 Cazul variabilelor aleatoare discrete

Exemplul 1.9.1 *Să considerăm variabila aleatoare X reprezentând câştigul obţinut în următorul joc: se aruncă un ban, şi pentru apariţia stemei (cu probabilitatea p_1) se câştigă x_1 lei, iar pentru apariţia banului (cu probabilitatea p_2) se câştigă x_2 lei. Variabila aleatoare este deci $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}$, cu $x_{1,2} \in \mathbb{R}$, $0 \leq p_1, p_2 \leq 1$ şi $p_1 + p_2 = 1$.*

Repetând de n ori experimentul, câştigul mediu obţinut în cele n încercări este

$$\begin{aligned} & \frac{\text{câştigul din prima aruncare+a doua+}\ldots\text{+ultima aruncare}}{n} \\ = \; & \frac{x_1 \cdot \text{ nr apariţii ale lui } x_1 + x_2 \cdot \text{ nr de apariţii ale lui } x_2}{n} \\ = \; & x_1 \frac{\text{nr apariţii ale lui } x_1}{n} + x_2 \cdot \frac{\text{de apariţii ale lui } x_2}{n}. \end{aligned}$$

Una din teoremele limită ale teoriei probabilităţilor (legea numerelor mari) arată că frecvenţele relative tind către probabilitate, şi deci

$$\begin{aligned} \text{Media în nîncercări} \; = \; & x_1 \underbrace{\frac{\text{nr apariţii ale lui } x_1}{n}}_{\text{frecvenţa de apariţie a lui } x_1} + x_2 \cdot \underbrace{\frac{\text{de apariţii ale lui } x_2}{n}}_{\text{frecvenţa de apariţie a lui } x_2} \underset{n\to\infty}{\to} \\ \underset{n\to\infty}{\to} \; & x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2. \end{aligned}$$

Exemplul anterior sugerează că media variabilei aleatoare X este $M(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2$. Mai general, avem:

Definiţia 1.9.2 *Dacă $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots \\ p_1 & p_2 & \ldots \end{pmatrix}$ este o variabilă aleatoare discretă ce ia valorile distincte $x_1, x_2, \ldots$ cu probabilităţile $p_1, p_2, \ldots$, definim media variabilei aleatoare X prin*

$$M(X) = \sum_i x_i \cdot p_i = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots,$$

dacă această serie este absolut convergentă (adică dacă $\sum_i |x_i \cdot p_i| < +\infty$). În caz contrar spunem că X nu are medie.

Teorema 1.9.3 *Dacă X, Y sunt variabile aleatoare discrete pentru care există mediile $M(X)$ şi $M(Y)$, atunci:*

a) Dacă $X = c$ – constant, atunci atunci $M(X) = c$

b) Dacă $X(\omega) \geq Y(\omega)$, oricare ar fi $\omega \in \Omega$, atunci $M(X) \geq M(Y)$

c) $M(aX+bY) = aM(X) + bM(Y)$, oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$

d) Dacă $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ şi $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$, atunci $M(\varphi(X)) = \sum_i \varphi(x_i) \cdot p_i$.

Demonstraţie. a) Din definiţie, avem

$$M(X) = c \cdot P(X = c) = c \cdot 1 = c.$$

b) Dacă $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$ şi $X(\omega) \geq 0$, oricare ar fi $\omega \in \Omega$, rezultă că $x_i \geq 0$ oricare ar fi $i \geq 1$. Obţinem deci în acest caz:

$$M(X) = \sum_i \underbrace{x_i}_{\geq 0} \cdot \underbrace{p_i}_{\geq 0} \geq 0.$$

Dacă $X \geq Y$, rezultă că variabila aleatoare $Z = X - Y \geq 0$, şi din demonstraţia anterioară avem $M(Z) = M(X - Y) \geq 0$. Folosind punctul c) obtinem $M(X) - M(Y) = M(X - Y) \geq 0$, adică $M(X) \geq M(Y)$.

d) Dacă $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}$, atunci $\varphi(X)$ ia valorile $\varphi(x_i)$, $i = 1, 2, \dots$, nu neapărat distincte. Avem:

$$\begin{aligned} M(\varphi(X)) &= \sum_{i:\varphi(x_i)-\text{distincte}} \varphi(x_i) \cdot P(\varphi(X) = \varphi(x_i)) \\ &= \sum_{i:\varphi(x_i)-\text{distincte}} \varphi(x_i) \cdot \sum_{j:\varphi(x_j)=\varphi(x)} P(X = x_j) \\ &= \sum_{i:\varphi(x_i)-\text{distincte}} \sum_{j:\varphi(x_j)=\varphi(x)} \varphi(x_i) \cdot P(X = x_j) \\ &= \sum_{i \geq 1} \varphi(x_i) \cdot P(X = x_i) \end{aligned}$$

■

Exemplul 1.9.4 *Considerând variabila aleatoare $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$ şi $\varphi(x) = x^2$, avem $Y = \varphi(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$, şi deci conform definiţiei avem*

$$M(Y) = M\left(X^2\right) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Folosind punctul d) al teoremei anterioare, putem calcula pe o altă cale *această valoare, şi anume:*

$$\begin{aligned} M\left(X^2\right) &= M\left(\varphi\left(X\right)\right) = \sum_{i=1}^{3} \varphi\left(x_i\right) P\left(X = x_i\right) = \\ &= \left(-1\right)^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

1.9.2 Cazul variabilelor aleatoare continue

Considerăm acum cazul unei variabile aleatoare continue $X : \Omega \to \mathbb{R}$, unde $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ este un spaţiu de probabilitate fixat.

Pentru a defini media variabilei aleatoare X, procedăm similar cazului discret, adică definim media ca suma valorilor înmulţite cu probabilităţile corespunzătoare. Cum pentru o variabilă aleatoare continuă avem $P\left(X = a\right) = 0$ oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, pentru a defini media procedam astfel: considerăm o partiţie $\left(x_i\right)_{i \geq 1}$ a lui $\mathbb{R}$ şi aproximăm media prin

$$\sum_{i \geq 1} x_i \cdot P\left(x_i \leq X < x_{i+1}\right) = \sum_{i \geq 1} x_i \cdot \left(F\left(x_{i+1}\right) - F\left(x_i\right)\right) = \sum_{i \geq 1} x_i \cdot \Delta F\left(x_i\right).$$

Trecând la limită cu $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i \to 0$ obţinem $\int_{\mathbb{R}} x dF\left(x\right)$, şi avem deci următoarea:

Definiţia 1.9.5 *Definim media variabilei aleatoare continue X prin*

$$M\left(X\right) = \int_{\mathbb{R}} x dF_X\left(x\right),$$

dacă această integrală este absolut convergentă.

Observaţia 1.9.6 *În acest curs vom considera numai variabile aleatoare continue care admit densitate, şi am văzut că dacă această densitate este o funcţie continuă, atunci avem $\frac{dF_X}{dx} = f_X$. Avem deci următoarea definiţie:*

Definiţia 1.9.7 *Dacă X este o variabilă aleatoare continuă cu densitatea f_X, atunci media variabilei aleatoare X este*

$$M\left(X\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X\left(x\right) dx,$$

dacă această integrală este absolut convergentă (adică dacă $\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x f_X\left(x\right)\right| dx < +\infty$).

Are loc următoarea:

Teorema 1.9.8 *Dacă X, Y sunt variabile alatoare continue pentru care există mediile $M\left(X\right)$ şi $M\left(Y\right)$, atunci* *a) Dacă* $X(\omega) \geq Y(\omega)$*, oricare ar fi* $\omega \in \Omega$*, atunci* $M(X) \geq M(Y)$

b) $M(aX + bY) = aM(X) + bM(Y)$*, oricare ar fi* $a, b \in \mathbb{R}$

c) Dacă $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *este o funcţie măsurabilă pentru care există media variabilei aleatoare* $\varphi(X)$*, atunci*

$$M(\varphi(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(x)\, dx.$$

Demonstraţie. a) Dacă $X(\omega) \geq 0$ oricare ar fi $\omega \in \Omega$, atunci avem $0 = P(X < 0) = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx$, şi cum în general $f \geq 0$ (fiind o densitatea de probabilitate), rezultă că avem $f(x) = 0$ pentru (aproape) orice $x \in (-\infty, 0)$.

Obţinem

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\, dx \overset{f(x)=0 \text{ pe } (-\infty,0)}{=} \int_{0}^{+\infty} \underbrace{x}_{\geq 0} \underbrace{f(x)}_{\geq 0} dx \geq 0.$$

Pentru cazul general, dacă $X \geq Y$, notând $Z = X - Z$ avem $Z(\omega) \geq 0$ oricare ar fi $\omega \in \Omega$, şi conform demonstraţiei anterioare avem $M(Z) \geq 0$, de unde rezultă (folosind punctul b) al teoremei) $M(X) - M(Y) \geq 0$, sau echivalent $M(X) \geq M(Y)$. ■

1.9.3 Funcţia de distribuţie a unei variabile aleatoare vectoriale

Fie $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ variabile aleatoare pe spaţiul de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definiţia 1.9.9 *Funcţia* $F = F_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definită prin*

$$F(a, b) = P(X < a, Y < b)$$

se numeşte funcţia de distribuţie comună a variabilelor aleatoare X *şi* Y *(sau funcţia de distribuţie a variabilei aleatoare vectoriale* (X, Y)*).*

O funcţie $f = f_{X,Y} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *cu proprietatea că*

$$P((X, Y) \in C) = \int \int_C f(x, y)\, dxdy,$$

oricare ar fi o mulţime Boreliană $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ *se numeşte densitatea de probabilitate comună a variabilelor aleatoare* X *şi* Y */ denistatea de probabilitate a variabilei aleatoare vectoriale* (X, Y)*.*

Observaţia 1.9.10 *Considerând* $C = A \times B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$*, unde* $A, B \in \mathcal{B}$ *sunt mulţimi Boreliene din* $\mathbb{R}$*, obţinem*

$$P(X \in A, Y \in B) = P((X, Y) \in A \times B) = \int_A \int_B f(x, y)\, dydx.$$

În particular, pentru $A = (-\infty, a)$ şi $B = (-\infty, b)$ obţinem

$$F_{X,Y}(a,b) = P(X < a, Y < b) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f_{X,Y}(x,y)\,dydx.$$

Avem următoarea:

Propoziţia 1.9.11 *Dacă F_X, F_Y şi f_X, f_Y sunt funcţiile de distribuţie, respectiv densităţile variabilelor aleatoare X şi Y, iar $F_{X,Y}$ şi $f_{X,Y}$ sunt funcţia de distribuţie şi densitatea variabilei aleatoare vectoriale (X, Y), atunci:*

a) $F_X(a) = \lim_{b\to\infty} F_{X,Y}(a,b)$, $F_Y(b) = \lim_{a\to\infty} F_{X,Y}(a,b)$

b) $f_{X,Y}(a,b) = \frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F_{X,Y}(a,b)$

c) $f_X(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(a,y)\,dy$, $f_Y(b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,b)\,dx$.

Demonstraţie. a) $F_X(a) = P(X < a) = P(X < a, Y < \infty) = \lim_{b\to\infty} P(X < a, Y < b) = \lim_{b\to\infty} F_{X,Y}(a,b)$

b) În ipoteza că $f_{X,Y}$ este o funcţie continuă, avem

$$F_{X,Y}(a,b) = \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f_{X,Y}(x,y)\,dydx,$$

de unde derivând în raport cu b, apoi cu a, obţinem:

$$\frac{\partial}{\partial b} F_{X,Y}(a,b) = \frac{\partial}{\partial b} \int_{-\infty}^{a} \int_{-\infty}^{b} f_{X,Y}(x,y)\,dydx = \int_{-\infty}^{a} f_{X,Y}(x,b)\,dx,$$

şi

$$\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} F_{X,Y}(a,b) = \frac{\partial}{\partial a} \int_{-\infty}^{a} f_{X,Y}(a,y)\,dydx = f_{X,Y}(a,b)$$

c) Pentru orice $A \in \mathcal{B}$ avem

$$P(X \in A) = P(X \in A, Y \in (-\infty, +\infty)) = \int_A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \right) dx,$$

şi deci conform definiţiei densităţii variabilei aleatoare X avem $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy$, cealaltă egalitate demonstrându-se în mod similar. ■

1.9.4 Exerciţii

1. Să se determine valoarea medie la aruncarea unui zar.
2. Să se determine media următoarelor variabile aleatoare:
   (a) Variabila aleatoare binomială cu parametrii n şi p
   (b) Variabila aleatoare Poisson cu parametrul $\lambda > 0$

(c) Variabila aleatoare geometrică cu parametrul p

(d) Variabila uniformă pe intervalul $[a, b]$

(e) Variabila aleatoare exponenţială cu parametrul $\lambda > 0$

(f) Variabila aleatoare normală $\mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$ cu medie μ şi dispersie σ^2

3. Se aruncă un ban până la prima apariţie a stemei sau până la a treia încercare, în caz de nereuşită. Care este numărul mediu de feţe stemă, respectiv ban, obţinut?

4. Funcţia de distribuţie comună a variabilelor aleatoare X, Y este

$$f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x}e^{-2y}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

   (a) Să se determine funcţia de distribuţie F_X şi funcţia de densitate f_X a variabilei aleatoare X

   (b) Să se determine funcţia de distribuţie F_Y şi funcţia de densitate f_Y a variabilei aleatoare Y

   (c) Să se calculeze probabilităţile $P(X > 1, Y < 1)$, $P(X < Y)$ şi $P(X < a)$.

5. Considerăm un disc de rază $R > 0$ şi variabilele aleatoare X, Y ce reprezintă coordonatele x, respectiv y, a unui punct ales arbitrar în acest disc (adică acest punct se află în orice regiune din disc cu probabilităţi egale).

   (a) Să se determine funcţia de densitate comună $f_{X,Y}$ a variabilelor aleatoare X, Y

   (b) Să se determine densităţile f_X, f_Y ale variabilelor aleatoare X, respectiv Y

   (c) Să se determine probabilitatea ca punctul de coordonate (X, Y) să se afle la distanţă mai mică decât r faţă de centrul discului dat.

6. Funcţia de densitate comună a variabilelor aleatoare X, Y este dată de

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

7. Să se determine funcţia de distribuţie şi densitatea variabilei aleatoare $Z = \frac{X}{Y}$.

8. Două persoane decid să se întâlnească într-un anumit loc. Dacă fiecare persoană soseşte în acest loc, în mod independent, la o oră ce este uniform distribuită între ora 12 şi ora 13, să se determine probabilitatea ca una din persoane să aştepte cel puţin 10 minute.

9. Să se determine densitatea f_{X+Y} a variabilei aleatoare $X + Y$, unde X şi Y sunt variabile aleatoare independente având densităţile f_X, rspectiv f_Y.

10. Să se determine densitatea f_{X+Y} a sumei a două variabile aleatoare X, Y uniform distribuite pe intervalul $(0,1)$.

11. Densitatea comună a variabilelor aleatoare X, Y este

$$f(x,y) = \begin{cases} c\left(x^2 + xy\right), & 0 < x < 1,\ 0 < y < 2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

   (a) Să se determine valoarea constantei c

   (b) Să se determine densitatea f_X a variabilei aleatoare X

   (c) Să se calculeze probabilitatea $P(X > Y)$

   (d) Să se calculeze probabilitatea $P\left(X < \frac{1}{2}, Y > \frac{1}{2}\right)$.

12. Densitatea comună a variabilelor aleatoare X, Y este

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-x-y}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

   (a) Să se determine probabilitatea $P(X < Y)$

   (b) Să se determine probabilitatea $P(X < 1)$.