Lecţii de Analiză Matematică

Dan Bărbosu şi Andrei Bărbosu

Cuprins

Capitolul 1

Şiruri şi serii numerice; şiruri şi serii de funcţii

1.1 Şiruri numerice. Noţiuni şi rezultate generale

În acest paragraf se vor reaminti rezultate relative la şirurile de numere reale, cunoscute studenţilor de la studiul analizei matematice din liceu.

• se numeşte şir de numere reale orice funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $f(n) = a_n$; notaţie prescurtată: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sau $(a_n)_{n\geq 0}$ sau $(a_n)_{n\geq 1}$ etc;

• dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale, termenul a_n se numeşte termen de rang n (termen general) al şirului;

• şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte:

▶ mărginit inferior, dacă $(\exists)\ m \in \mathbb{R}$ a.î. $a_n \geq m$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$;

▶ mărginit superior, dacă $(\exists)\ M \in \mathbb{R}$ a.î. $a_n \leq M$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$;

▶ mărginit, dacă este mărginit inferior şi superior;

• şirul (a_n) se numeşte:

▶ crescător, dacă $a_n \leq a_{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$;

▶ descrescător, dacă $a_n \geq a_{n+1}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$;

• orice şir crescător este mărginit inferior de primul termen; orice şir descrescător este mărginit superior de primul termen;

• fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir dat iar $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un şir strict crescător de numere naturale; şirul (a_{n_k}) se numeşte subşir al şirului $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemplu. $n_k = 2k$, $k \in \mathbb{N} \Rightarrow a_{n_k} = a_{2k}$; subşirul (a_{2k}) este subşirul termenilor de rang par.

• orice subşir al unui şir monoton (crescător sau descrescător) e monoton; orice subşir al unui şir mărginit e mărginit;

• fie $a \in \mathbb{R}$. Se numeşte vecinătate a lui a orice submulţime $V \subset \mathbb{R}$ care conţine un interval de forma $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$ - dat); se notează prin $\mathcal{V}(a)$

mulţimea tuturor vecinătăţilor lui $a \in \mathbb{R}$; se demonstrează că dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, există $V \in \mathcal{V}(a)$, $W \in \mathcal{V}(b)$ a.î. $V \cap W = \emptyset$.

• se numeşte vecinătate a lui $+\infty$ orice interval de forma $]a, +\infty[$ $(a > 0)$; se numeşte vecinătate a lui $-\infty$ orice interval de forma $]-\infty, -a[$ $(a > 0)$;

• notăm: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$; fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir dat iar $a \in \overline{\mathbb{R}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow$ orice vecinătate a lui a conţine o infinitate de termeni ai şirului.

• Se demonstrează următoarele:

▶ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R} \Leftrightarrow [(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon]$;

▶ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow [(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow a_n > \varepsilon]$;

▶ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty \Leftrightarrow [(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow a_n < -\varepsilon]$.

• Un şir se numeşte convergent dacă are limită finită şi divergent în caz contrar. Privitor la şirurile convergente reamintim:

▶ limita unui şir convergent este unică;

▶ dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, atunci orice subşir al său este convergent şi are limita a;

▶ dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ are două subşiruri cu limite diferite, atunci este divergent.

Exemplu. Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $a_n = (-1)^n$ este divergent căci subşirul termenilor de rang par şi respectiv subşirul termenilor de rang impar au limite diferite.

• orice şir convergent e mărginit;

• orice şir mărginit are un subşir convergent.

Reamintim următoarele criterii suficiente de convergenţă ale unui şir de numere reale:

• orice şir monoton şi mărginit e convergent (criteriul lui Weierstrass);

• dacă şirurile $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ au proprietăţile:

(i) $a_n \leq b_n \leq c_n$, $(\forall)\ n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$-fixat)

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = l \in \mathbb{R}$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$ (criteriul cleştelui).

• dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sunt şiruri care au limită şi $a_n \leq b_n$, $(\forall)\ n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$ fixat), atunci $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$;

• dacă $a_n \leq b_n$, $(\forall)\ n \geq n_0$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

Limite fundamentale:

• $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e(\simeq 2,71828...)$; mai mult, şirul de termen general $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ e crescător şi $2 < e_n < 3$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$;

- dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e;$
- dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e;$
- $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & \text{dacă } q \in]-1,1[; \\ 1, & \text{dacă } q = 1; \\ +\infty, & \text{dacă } q \in]1,+\infty[; \\ \text{nu există}, & \text{dacă } q \in]-\infty,-1]. \end{cases}$

1.1.1 Teoremă. (**Stolz – Cesaro**) *Fie $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şiruri cu proprietăţile:*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$*;*

(ii) $(\exists)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$*.*

Atunci $(\exists)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ *şi* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \alpha$*.*

Prezentăm în continuare următoarele aplicaţii.

A1. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

Soluţie. Notăm $a_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$, $b_n = \ln n$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$, încercăm aplicarea criteriului Cesaro-Stolz.

Observăm că:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\ln\frac{n+1}{n}}.$$

Dar

$$\lim_{n\to\infty}(n+1)\ln\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \ln e = 1.$$

Prin urmare, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = 1$ şi atunci $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1$, în baza criteriului Cesaro-Stolz.

A2. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}^*$ iar

$$b_n = \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},\ c_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}},$$

calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.

Soluţie. Pentru calculul lui $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ se aplică criteriul Cesaro-Stolz, obţinându-se:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a.$$

Se observă că $\frac{1}{c_n} = \dfrac{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}}{n}$ şi aplicând criteriul Cesaro-Stolz se obţine:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a}.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

A3. (**Cauchy-D'Alembert**) Dacă $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că $(\exists)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, atunci $(\exists)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Soluţie. Fie $b_n = \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow \ln b_n = \frac{\ln a_n}{n} \Rightarrow b_n = e^{\frac{\ln a_n}{n}}$. Prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n}}$. Calculăm limita exponentului folosind criteriul Cesaro-Stolz. Avem:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_{n+1} - \ln a_n}{n+1-n} = \lim_{n\to\infty} \ln \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln l.$$

Atunci $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = e^{\ln l} = l$.

Propunem spre rezolvare următoarele probleme.

1. Să se afle limitele şirurilor de termen general:

(i) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$; (ii) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$;

(iii) $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$; (iv) $a_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2+2}$;

(v) $a_n = \frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$; (vi) $a_n = \prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

R. (i) $l = 1$; (ii) $l = \frac{1}{3}$; (iii) $l = \frac{1}{4}$; (iv) $l = \frac{1}{2}$; (v) $l = \frac{1}{3}$; (vi) $l = \frac{1}{2}$.

2. Să se calculeze:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{2n+1}$; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{-4n+3}{-4n+1}\right)^{3n+2}$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+n-3}{2n^2+4n-1}\right)^{3n+1}$.

R. (i) $e^{\frac{2}{3}}$; (ii) $e^{-\frac{3}{2}}$; (iii) $e^{-\frac{9}{2}}$.

3. Calculaţi:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n$; (ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{7}{5}\right)^n$;

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5\cdot 2^n+4\cdot 3^n}{3\cdot 2^n-3^n}$; (iv) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^n \frac{\pi}{2005}$.

R. (i) 0; (ii) ∞; (iii) -4; (iv) 0.

4. Folosind criteriul cleştelui calculaţi limita şirului de termen general:

$(i)\quad x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$; $\quad (ii)\ x_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + 2006^n}$

$(iii)\ x_n = \sqrt[n]{1^n + 2^n + \cdots + n^n}$; $\quad (iv)\ x_n = \frac{[a]+[2a]+\cdots+[na]}{n^2},\ a \in \mathbb{R}$

$(iv)\ x_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2\cdot n}$.

R. (i) 1; (ii) 2006; (iii) $+\infty$; (iv) $\frac{a}{2}$; (v) 0.

5. Aplicând criteriul Stolz să se calculeze limita şirului de termen general:

$(i)\ a_n = \frac{n}{2^n}$; $\quad (ii)\ b_n = \frac{1^2+\cdots+n^2}{n^3}$; $\quad (iii)\ x_n = \frac{\ln n}{n}$;

$(iv)\ x_n = \frac{\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n}{n}$; $\quad (v)\quad x_n = \frac{1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \cdots + n(n+1)}{n^3}$;

$(vi)\ x_n = \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$; $\quad (vii)\ x_n = \frac{\sqrt{1+1^2}+\sqrt{1+2^2}+\cdots+\sqrt{1+n^2}}{1+n^2}$.

R. (i) 0; (ii) $\frac{1}{3}$; (iii) 0; (iv) $\frac{1}{e}$; (v) ∞; (vi) $\frac{1}{2}$; (vii) $\frac{1}{3}$.

6. Aplicând criteriul Cauchy-D'Alembert, calculaţi limita şirului de termen general:

$(i)\quad x_n = \sqrt[n]{n}\quad (n \geq 2)$; $\quad (ii)\ \ x_n = \sqrt[n]{\ln n}\quad (n \geq 2)$;

$(iii)\ x_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\quad (n \geq 2)$; $\quad (iv)\ x_n = \sqrt[n]{n!}\quad (n \geq 2)$;

$(v)\ \ x_n = \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!8^n}}\quad (n \geq 2)$.

R. (i) 1; (ii) 1; (iii) e; (iv) ∞; (v) $\frac{1}{32}$.

Un alt criteriu util în calculul limitelor de şiruri este prezentat în următoarea

1.1.2 Teoremă. (**Criteriul raportului pentru şiruri**) *Fie* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale strict pozitive cu proprietatea că există* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$.

Dacă $l < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dacă $l > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Dacă $l = 1$ *nu se poate decide nimic privitor la valoarea* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Prezentăm următoarea aplicaţie.

A4. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n\cdot n!}{n^n}$.

Soluţie. Notând $a_n = \frac{2^n\cdot n!}{n^n}$ este clar că $a_n > 0$,

$$\begin{aligned} l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n\cdot n!} \\ &= 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)n} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{2}{e} < 1. \end{aligned}$$

Conform criteriului raportului, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Propunem spre rezolvare

7. Aplicând criteriul raportului pentru şiruri, calculaţi limitele şirurilor de termen general:

(i) $x_n = \frac{n^n}{(n!)^2}$; (ii) $x_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$; (iii) $x_n = \frac{(2n)!}{n^n}$.

R. (i) 0; (ii) 0; (iii) ∞.

1.2 Şiruri fundamentale. Criteriul general al lui Cauchy

1.2.1 Definiţie. Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se numeşte şir fundamental (sau şir Cauchy) dacă şi numai dacă $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)$ $n \geq N$, $(\forall)$ $p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$.

Privitor la şirurile fundamentale se demonstrează

1.2.2 Teoremă. (**Criteriul general de convergenţă a lui Cauchy**) *Şirul $(a_n)_{n\geq\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă este fundamental.*

Prezentăm în continuare câteva aplicaţii.

A1. Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ de termen general $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ nu e fundamental. Deduceţi că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Soluţie. Presupunem că $(a_n)_{n\geq 1}$ e fundamental $\Rightarrow (\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $N = N(\varepsilon)$ a.î. $(\forall)$ $n \geq N$, $(\forall)$ $p \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$|a_{n+p} - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} < \varepsilon. \tag{*}$$

În $(*)$ alegem $p = n \geq 2 \Rightarrow (\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $N = N(\varepsilon)$ a.î. $(\forall)$ $n \geq N$ avem:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} < \varepsilon. \tag{**}$$

Să observăm că:

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$$

ceea ce înseamnă că $(**)$ nu poate fi adevărată pentru $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$.

Contradicţia arată că şirul considerat nu e fundamental, deci nu e convergent.

Pe de altă parte $a_{n+1}-a_n = \frac{1}{n+1} > 0$, deci $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e strict crescător, ceea ce înseamnă că $(\exists)\ \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Cum $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu e convergent $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

A2. Arătaţi că şirul de termen general

$$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$$

este convergent.

Soluţie. $(\forall)\ p \in \mathbb{N}^*$ avem:

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \qquad (*) \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} |\sin(n+1)| + \frac{1}{2^{n+2}} |\sin(n+2)| + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} |\sin(n+p)| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

(am folosit inegalitatea $|\sin x| \leq 1$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$).
Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0 \Rightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq N\ \frac{1}{2^n} < \varepsilon$.
Având în vedere $(*)$, rezultă că $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = N(\varepsilon)$ a.î. $(\forall)\ n \geq N$, $(\forall)\ p \in \mathbb{N}^*$, $|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$, deci $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e un şir fundamental.
Aplicând criteriul lui Cauchy, deducem că $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e convergent.

Similar se tratează şi aplicaţia

A3. Arătaţi că şirul de termen general

$$a_n = \frac{\cos 1}{1\cdot 2} + \frac{\cos 2}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\cos n}{n(n+1)}$$

este convergent.

1.3 Serii de numere reale. Noţiuni generale

1.3.1 Definiţie. i) Se numeşte serie de termen general a_n o sumă de forma

$$\sum_{n\geq 0} a_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \ldots$$

ii) Şirul $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de termen general $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ se numeşte şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$.

iii) Seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ se numeşte convergentă dacă şirul $(s_n)_{n\geq 0}$ al sumelor ei parţiale este convergent; în caz contrar seria se numeşte divergentă.

(iv) Dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ e convergentă şi $s = \lim\limits_{n\to\infty} s_n$, numărul $s \in \mathbb{R}$ se numeşte suma seriei considerate; se utilizează în acest caz notaţia $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = s$.

1.3.1 Serii remarcabile

(i) **Seria geometrică de raţie** q

• este seria $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ ($q \in \mathbb{R}$) şi are şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n\geq 0}$, de termen general $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} q^k$;

• pentru termenul general s_n se obţine

$$s_n = \begin{cases} n, & q = 1 \\ \frac{1-q^n}{1-q}, & q \neq 1; \end{cases}$$

• rezultă că $(s_n)_{n\geq 0}$ este convergent $\Leftrightarrow q \in]-1,1[$; în acest caz $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{1-q}$.

Deci seria geometrică $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ e convergentă $\Leftrightarrow q \in]-1,1[$; în acest caz $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

(ii) **Seria armonică**

• este seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ şi are şirul sumelor parţiale de termen general $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$;

• cum şirul $(s_n)_{n\geq 1}$ e divergent, seria armonică e divergentă.

1.3.2 Exerciţii rezolvate

Să se calculeze suma fiecăreia din seriile de mai jos:

(i) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$; (ii) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3^n+2^n}{6^n}$; (iii) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n^2+n-3}{n!}$

(ştiind că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$).

Soluţie. (i) $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (seria e convergentă şi are suma $s = 1$).

(ii) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{3^n+2^n}{6^n} = \sum\limits_{n\geq 1} \left(\left(\frac{3}{6}\right)^n + \left(\frac{2}{6}\right)^n\right) \sum\limits_{n\geq 1} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{2} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3} \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$.

(iii) Să observăm că:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-3}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} - 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

Mai departe avem:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{(n-1)!}^{\infty} = e + e = 2e; \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} = e; \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} - 1 = e - 1.
\end{aligned}$$

În concluzie, se obţine

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n-3}{n!} = 2e + e - 3(e-1) = 3.$$

1.4 Criterii de convergenţă. Operaţii cu serii convergente

1.4.1 Teoremă. (**Criteriul general de convergenţă Cauchy**) *Seria* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *e convergentă* $\Leftrightarrow \Big[(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *a.î.* $(\forall)\ n \geq N(\varepsilon)$, $(\forall)\ p \in \mathbb{N}^* \Rightarrow |u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon\Big]$.

1.4.2 Consecinţă. (**Condiţia necesară de convergenţă**) Dacă seria $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ este convergentă $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

1.4.3 Aplicaţii. (**Ale condiţiei necesare**)

Arătaţi că seriile de mai jos sunt divergente

(i) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$; (ii) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$; (iii) $\sum\limits_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$;

(iv) $\sum\limits_{n\geq 2} n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$; (v) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; (vi) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$.

Soluţie. (i) $u_n = \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$;

(ii) $u_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^n = e^{-1} = \frac{1}{e} \neq 0$;

(iii) $u_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 \neq 0$;

(iv) $u_n = n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = e^{-1} \neq 0$;

(v) $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. Nu putem trage nici o concluzie utilizând condiţia necesară de convergenţă. Dar

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) = \sqrt{n+1} - 1.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty \Rightarrow$ seria e divergentă.

(vi) $u_n = \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \neq 0$.

1.4.4 Teoremă. (**Criteriul lui Abel**) *Dacă şirul de termeni pozitivi* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *e descrescător şi* $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, *seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$ *este convergentă.*

1.4.5 Aplicaţii. (**La criteriul lui Abel**) Arătaţi că seriile de mai jos sunt convergente:

(i) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$; *(ii)* $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)^3}$;

(iii) $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$; *(iv)* $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}$.

Soluţie. (i) $u_n = \frac{1}{n}$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n}{n+1} < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.
Conform criteriului Abel seria e convergentă.

(ii) $u_n = \frac{1}{(2n-1)^3}$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^3 < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} = 0$.
Se aplică criteriul lui Abel.

(iii) $u_n = \frac{1}{\sqrt[5]{n}}$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt[5]{\frac{n}{n+1}} < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n}} = 0$.

(iv) $u_n = \frac{n^3}{2^n}$; $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 < 1$, deci $u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este descrescător.

Pentru a calcula $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$ se aplică criteriul lui Stolz, obţinându-se:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 - n^3}{2^{n+1} - 2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2 + 3n + 1}{2^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{3(2n+1)+3}{2^n} = 6 \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2^n} = 6 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0.\end{aligned}$$

Conform criteriului Abel, seria e convergentă.

1.4.6 Definiţie. (i) Seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ e absolut convergentă dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ e convergentă.

(ii) Dacă seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ e convergentă fără să fie absolut convergentă, ea se numeşte semiconvergentă.

1.4.7 Exemplu. Seria armonică alternată $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ este semiconvergentă (exerciţiu!).

1.4.8 Teoremă. *Orice serie absolut convergentă este convergentă.*

(Reciproca este în general falsă, vezi 1.4.7).

1.4.9 Teoremă. (i) *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = s_1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n = s_2 \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} (u_n+v_n) = s_1+s_2$.

(ii) *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n = s$ *şi* $\alpha \in \mathbb{R}^* \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha u_n = \alpha s$.

1.4.10 Exemplu. Vezi 1.3.3.

O generalizare a criteriului lui Abel e exprimată în

1.4.11 Teoremă. (**Dirichlet-Abel**) *Dacă:*

(i) Seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *are şirul sumelor parţiale mărginit;*

(ii) $(v_n)_{n\geq 0}$ *e un şir descrescător de numere pozitive cu* $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$,

atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n v_n$ *este convergentă.*

1.5 Serii cu termeni pozitivi. Criterii de convergenţă

1.5.1 Definiţie. Seria $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ e cu termeni pozitivi dacă $u_n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

1.5.2 Teoremă. (**Criteriul comparaţiei**)

Fie $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *serii cu termeni pozitivi.*

(*i*) *Dacă* $u_n \leq v_n$, $(\forall)\ n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$ - *fixat*) *şi* $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *e convergentă* $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ - *convergentă;*

(*ii*) *Dacă* $u_n \leq v_n$, $(\forall)\ n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$ - *fixat*) *şi* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *e divergentă* $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} v_n$ - *divergentă;*

(*iii*) *Dacă* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \in]0, +\infty[$, *seriile* $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$, $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ *au aceeaşi natură.*

1.5.3 Aplicaţii. (**La criteriul comparaţiei**)

(i) Studiaţi natura seriei $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ (seria armonică generalizată).

Soluţie. Distingem situaţiile:

1°. $\alpha = 1 \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n} \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ – divergentă (seria armonică).

2°. $\alpha < 1 \Rightarrow n^\alpha < n \Rightarrow \frac{1}{n^\alpha} > \frac{1}{n}$; cum seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ e divergentă $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ – divergentă (folosind criteriul comparaţiei, (ii)).

3°. $\alpha > 1 \Rightarrow 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots \leq 1 + \left(\frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha}\right) + \left(\frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{6^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^\alpha}\right) + \cdots \leq 1 + \frac{2}{2^\alpha} + \frac{2^2}{2^{2\alpha}} + \cdots + \frac{2^n}{2^{n\alpha}} + \ldots$

Cum seria $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n$ e convergentă, folosind criteriul convergenţei (i), rezultă că seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă.

În concluzie, seria armonică generalizată $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

(ii) Decideţi natura seriilor:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$; ($b$) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+5}}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin\frac{\pi}{n}$; ($d$) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5+n\cdot 2^n}$.

Soluţie. (a) Fie $u_n = \frac{1+n}{1+n^2}$, $v_n = \frac{1}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+n}{1+n^2} = 1 \in]0, +\infty[$. Cum seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ e divergentă, folosind criteriul comparaţiei (iii), seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{1+n^2}$

e divergentă.

(b) Fie $u_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+5}}$; atunci $u_n \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n^4}} = \frac{1}{n^{4/3}} = v_n$.

Cum seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^{4/3}}$ e convergentă (vezi exemplul (i)), seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt[3]{n^4+5}}$ este convergentă, conform criteriului comparaţiei.

(c) Fie $u_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}$; atunci:

$$u_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{n} = \frac{\pi}{n^2} = v_n.$$

Seria $\sum\limits_{n\geq 1} v_n = \pi \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ e convergentă, deci seria dată e convergentă.

(d) Fie $u_n = \frac{u}{}5 + n \cdot 2^n$, $v_n = \frac{1}{2^n}$; cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1 \in]0, +\infty[$ şi seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ e convergentă, seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n}{5+n\cdot 2^4}$ este convergentă.

1.5.4 Teoremă. (**Criteriul raportului**)

Fie $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Dacă:*

(i) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q < 1$, $(\forall)\ n \geq n_0$ *($n_0 \in \mathbb{N}$ - fixat)* $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *– convergentă;*

(ii) $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, $(\forall)\ n \geq n_0$ *($n_0 \in \mathbb{N}$ - fixat)* $\Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *– divergentă;*

(iii) $(\exists)\ l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. *Pentru* $l < 1$ *seria e convergentă iar pentru* $l > 1$ *seria e divergentă.*

1.5.5 Aplicaţii. (**La criteriul raportului**)

Decideţi natura seriilor de mai jos:

(i) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{3^n \cdot n!}$; (ii) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; (iii) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a^n}{2^n+5^n}$ $(a > 0)$.

Soluţie. (i) $u_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)}{3^n n!} > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{1\cdot 3 \ldots (2n-1)(2n+1)}{3^{n+1}(n+1)!} \frac{3^n n!}{1\cdot 3\cdot 5 \ldots (2n-1)} \\ &= \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+1} = \frac{2}{3} < 1, \end{aligned}$$

deci seria e convergentă.

(ii) $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{[(n+1)!]^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1,$$

deci seria e convergentă.

(iii) $u_n = \frac{a^n}{2^n+5^n} > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{2^{n+1}5^{n+1}} \cdot \frac{2^n+5^n}{a^n} = a \lim_{n\to\infty} \frac{5^n\left[\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1\right]}{5^n\left[2\left(\frac{2}{5}\right)^n + 5\right]} = \frac{a}{5}.$$

Dacă $a < 5 \Rightarrow$ seria e convergentă, căci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Dacă $a > 5 \Rightarrow$ seria e divergentă, căci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Dacă $a = 5 \Rightarrow u_n = \frac{5^n}{2^n+5^n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1 \neq 0$, deci seria e divergentă fiindcă nu îndeplineşte condiţia necesară de convergenţă.

În concluzie, seria $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{a^n}{2^n+5^n}$ e convergentă $\Leftrightarrow a < 5$.

1.5.6 Teoremă. (**Criteriul radicalului**)

Fie $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *o serie cu termeni pozitivi. Dacă:*

(i) $\sqrt[n]{u_n} \leq q < 1$ $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *– convergentă;*

(ii) $\sqrt[n]{u_n} \geq 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} u_n$ *– divergentă;*

(iii) $(\exists)\ l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$. *Pentru* $l < 1$ *seria e convergentă iar pentru* $l > 1$ *seria e divergentă.*

1.5.7 Aplicaţii. (**La criteriul radicalului**)

Stabiliţi natura seriilor:

(i) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$; (ii) $\sum\limits_{n\geq 1} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$; (iii) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$.

Soluţie. (i) $u_n = \frac{1}{\ln^n(n+1)} > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1,$$

deci seria e convergentă.

(ii) $u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

deci seria e convergentă.

(iii) $u_n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}}{3^n} > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{3} = \frac{e}{3} < 1,$$

deci seria e convergentă.

1.5.8 Teoremă. (**Criteriul Raabe-Duhamel**)

Fie $\sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *o serie cu termeni pozitivi.*

(*i*) *Dacă* $(\exists)\ s > 1$, $(\exists)\ p \in \mathbb{N}^*$ *astfel ca* $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \geq s$ *oricare ar fi* $n \geq p \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *e convergentă;*

(*ii*) *Dacă* $(\exists)\ p \in \mathbb{N}^*$ *astfel ca* $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1$ *oricare ar fi* $n \geq p \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} a_n$ *e divergentă;*

(*iii*) *Presupunem că* $(\exists)\ l = \lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$. *Dacă* $l > 1$ *seria e convergentă iar dacă* $l < 1$ *seria e divergentă. Când* $l = 1$ *nu se poate decide nimic relativ la convergenţa seriei.*

1.5.9 Aplicaţii. (**La criteriul Raabe-Duhamel**)

Decideţi natura seriilor:

(i) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1\cdot 3\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\ldots 2n} \cdot \frac{1}{2n+1}$; (ii) $\sum\limits_{n\geq 1} a^{\ln n}$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

Soluţie. E uşor de constatat că nu se aplică nici criteriul raportului nici criteriul radicalului.

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(6n+5)}{2(n+1)(2n+3)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} > 1 \Rightarrow$ seria e convergentă în baza criteriului Raabe-Duhamel.

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to\infty} n\left[a^{\ln\frac{n}{n+1}} - 1\right] = \lim\limits_{n\to\infty} n \frac{a^{\ln\frac{n}{n+1}}}{\ln\frac{n}{n+1}} \cdot \ln\frac{n}{n+1} = \ln a \cdot \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \ln\frac{n}{n+1} = \ln a \lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{\ln a}{e}$.

Dacă $\frac{\ln a}{e} < 1$ $(\Leftrightarrow a < e^e)$ seria e divergentă.

Dacă $\frac{\ln a}{e} > 1$ $(\Leftrightarrow a > e^e)$ seria e convergentă.

Dacă $a = e^e \Rightarrow u_n = (e^e)^{\ln n} = e^{e\ln n} = e^{\ln n^e} = n^e$.

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} n^e = +\infty \neq 0 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} a^{\ln n}$ e divergentă.

În concluzie, seria $\sum\limits_{n\geq 1} a^{\ln n}$ e convergentă $\Leftrightarrow a > e^e$.

1.6 Şiruri de funcţii

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ iar $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, $f_n : D \to \mathbb{R}$ $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$. Pentru şirul considerat se introduc două tipuri de convergenţă, ce vor fi prezentate în cele ce urmează.

1.6.1 Definiţie. (**Convergenţă punctuală**) Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplu (punctual) către funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ pe mulţimea $A \subseteq D$ dacă $(\forall)\ x \in A$ avem:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

adică:

$(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\forall)\ x \in A\ (\exists)\ N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ a.î. $(\forall)\ n \geq N$

să avem

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

În cazul în care condiţia precedentă este îndeplinită, se utilizează notaţia $f_n \to f$ pe A.

1.6.2 Definiţie. (**Convergenţă uniformă**) Şirul $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniform la funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ pe mulţimea $A \subseteq D$ dacă:

$(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq N,\ (\forall)\ x \in A$.

În cazul în care condiţia precedentă este îndeplinită se utilizează notaţia $f_n \rightrightarrows f$.

Legătura între cele două tipuri de convergenţă e exprimată în

1.6.3 Teoremă. *Dacă $f_n \rightrightarrows f$ pe D, atunci $f_n \to f$ pe D (convergenţa uniformă implică convergenţa simplă).*

Privitor la convergenţa uniformă, prezentăm (fără demonstraţie) următoarele rezultate.

1.6.4 Teoremă. (**Cauchy**) *Şirul de funcţii $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : D \to \mathbb{R}\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$ converge uniform către $f : D \to \mathbb{R}$ pe mulţimea $D \Leftrightarrow \big[(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ a.î. $|f_{n+p}(x) - f(x)| < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq N,\ (\forall)\ p \in \mathbb{N}^*,\ (\forall)\ x \in D\big]$.*

1.6.5 Teoremă. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$ iar $f : D \to \mathbb{R}$. Dacă există un şir de numere pozitive $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent la zero, astfel ca $|f_n(x) - f(x)| \leq a_n\ (\forall)\ n \geq n_0$ ($n_0 \in \mathbb{N}$ - fixat), $(\forall)\ x \in D$, atunci $f_n \rightrightarrows f$ pe D.*

1.6.6 Teoremă. *Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii continue pe D astfel ca $f_n \rightrightarrows f$ pe D. Atunci f este continuă pe D.*

1.6.7 Aplicaţii. (**La convergenţa şirurilor de funcţii**)

Stabiliţi mulţimea de convergenţă, funcţia limită şi tipul convergenţei pentru fiecare din şirurile de funcţii de mai jos:

(i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^2 + n$;

(ii) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x}{n}$;

(iii) $f_n : [3, 4] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x}{x+n}$;

(iv) $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{1}{ne^{nx}}$;

(v) $f_n : [1, +\infty[\to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{x^2}{n^2+x^2}$.

Soluţie. Notăm cu A mulţimea de convergenţă.

(i) $(\forall)\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(x^2+n) = +\infty \Rightarrow A = \emptyset$.

(ii) $(\forall)\ x \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0 \Rightarrow A = \mathbb{R}$.

Arătăm că $f_n \to 0$ dar $f_n \not\rightrightarrows 0$ pe $\mathbb{R}$.

Dacă $f_n \rightrightarrows 0$ pe $\mathbb{R}$ trebuie ca

$$(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = n(\varepsilon) \quad \text{a. î.} \quad \left|\frac{x}{n}\right| < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq N, (\forall)\ x \in \mathbb{R}. \tag{*}$$

Alegând $x = n$ şi $\varepsilon < 1$, avem:

$$|f_n(n)| = \frac{n}{n} = 1 > \varepsilon,\ (\forall)\ \varepsilon < 1. \tag{**}$$

Relaţiile (*) şi (**) fiind contradictorii $\Rightarrow f_n \to 0$, dar $f_n \not\rightrightarrows 0$ pe $\mathbb{R}$.

(iii) $(\forall)\ x \in [3,4] \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0$; deci $A = [3,4]$. Arătăm că $f_n \rightrightarrows 0$ pe $[3,4]$. Observăm că

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{x}{x+n}\right| = \frac{x}{x+n} \leq \frac{4}{3+n}, \quad (\forall)\ x \in [3,4].$$

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termen general $a_n = \frac{4}{3+n}$ este un şir de numere reale pozitive cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Aplicând Teorema 1.6.5 rezultă că $f_n \rightrightarrows 0$ pe $[3,4]$.

(iv) $(\forall)\ x \in [0,+\infty[\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{ne^{nx}} = 0 \Rightarrow A = [0,+\infty[$.

$(\forall)\ x \in [0,+\infty[\Rightarrow |f_n(x) - 0| = \frac{1}{ne^{nx}} \leq \frac{1}{n} = a_n$. Cum $a_n > 0$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, se aplică Teorema 1.6.5 şi rezultă $f_n \rightrightarrows 0$ pe $[3,4]$.

(v) $(\forall)\ x \in [1,+\infty[\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f)n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^2}{x^2+n^2} = 0 \Rightarrow A = [1,+\infty[$.

Vom arăta că $f_n \rightrightarrows 0$ pe $[1,+\infty[$. Se observă că

$$|f_n(x) - 0| \leq \frac{x^2}{x^2+n^2} \leq \frac{x^2}{2nx} = \frac{x}{2n}, \quad (\forall)\ x \in [1,+\infty[.$$

Este deci suficient să arătăm că

$$(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \text{ a. î. } \frac{x}{2n} < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq N,\ (\forall)\ x \in [1,+\infty[\,. \tag{*}$$

Inegalitatea (*) se scrie succesiv:

$$n > \frac{x}{2\varepsilon} \geq \frac{1}{2\varepsilon} \qquad (\text{căci } x \in [1,+\infty[).$$

Alegând atunci $N = N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$, deducem că

$$(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1 \text{ a. î. } \frac{x}{2n} < \varepsilon,\ (\forall)\ n \geq N,\ (\forall)\ x \in [1,+\infty[.$$

Rezumând cele de mai sus, $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1 \in \mathbb{N}$ a. î. $(\forall)\ n \geq N$, $|f_n(x) - 0| < \varepsilon$, ceea ce arată că $f_n \rightrightarrows 0$ pe $[1, +\infty[$.

Fără a exemplifica, menţionăm alte două rezultate importante relative la şirurile de funcţii.

1.6.8 Teoremă. (**De integrare**) *Fie şirul de funcţii continue* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $f_n \in C([a,b])\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$*. Dacă* $f_n \rightrightarrows f$ *pe* $[a,b]$*, atunci:*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

1.6.9 Teoremă. (**De derivare**) *Fie şirul de funcţii derivabile, cu derivate de ordinul întâi continue pe* $[a,b]$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $f_n \in C^1([a,b])$*,* $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$*. Dacă:*

(i) $f_n \to f$ *pe* $[a,b]$*;*

(ii) $f_n' \rightrightarrows g$ *pe* $[a,b]$*,*

atunci f *e derivabilă pe* $[a,b]$ *şi are loc egalitatea* $f' = g$*, adică*

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n' \ \text{ pe } [a,b].$$

1.7 Serii de funcţii

Fie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de funcţii, $f_n : D \to \mathbb{R}\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}\ (D \subseteq \mathbb{R})$. Mai notăm prin $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ şirul de funcţii de termen general $S_n(x) = \sum\limits_{l=0}^{n} f_k(x)$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

1.7.1 Definiţie. (i) Se numeşte serie de funcţii o sumă de forma:

$$\sum_{k\geq 0} f_k = f_0 + f_1 + \cdots + f_n + \ldots ;$$

(ii) Şirul de funcţii $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termen general

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x), \quad (\forall)\ x \in D,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

se numeşte şirul sumelor parţiale ale seriei $\sum\limits_{n\geq 0} f_k$;

(iii) Dacă $A \subseteq D$ e mulţimea de convergenţă a şirului $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, atunci A e mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii $\sum\limits_{k\geq 0} f_k$; dacă $\sum\limits_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$ $(\forall)\ x \in A$, atunci funcţia $S : A \to \mathbb{R}$ e suma seriei de funcţii considerate; se utilizează în acest caz notaţia:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x), \quad (\forall)\ x \in A;$$

(iv) Dacă $S_n \to S$ pe A, seria $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ e punctual convergentă către S pe A; dacă $S_n \rightrightarrows S$ pe A, seria $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ e uniform convergentă către S pe A.

Relativ la seriile de funcţii, prezentăm fără demonstraţie următoarele rezultate.

1.7.2 Teoremă. (**Cauchy**) *Seria de funcţii* $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *este uniform convergentă pe* $D \subseteq \mathbb{R} \Leftrightarrow \Big[(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *a. î.* $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$, $(\forall)\ n \geq N$, $(\forall)\ p \in \mathbb{N}^*$, $(\forall)\ x \in D\Big]$.

1.7.3 Teoremă. (**Weierstrass**)

Considerăm seria de funcţii $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$, $f_n : D \to \mathbb{R}\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$.

Dacă $(\exists)$ *un şir de numere reale pozitive* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *cu proprietăţile:*

(i) $|f_n(x)| \leq a_n$, $(\forall)\ n \geq n_0 \in \mathbb{N}$, $(\forall)\ x \in D$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

atunci seria $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *e uniform convergentă pe* D *către o funcţie* $S : D \to \mathbb{R}$.

1.7.4 Teoremă. *Fie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ *o serie de funcţii,* $f_n : D \to \mathbb{R}\ (\forall)\ n \geq 0$, *continue pe* D. *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n = S$ *uniform pe* D, *atunci funcţia* $S : D \to \mathbb{R}$ *e continuă pe* D.

1.7.5 Teoremă. (**De integrare termen cu termen**)

Fie $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *o serie de fracţii continue,* $f_n \in C([a,b])\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$. *Dacă* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$ *uniform pe* $[a,b]$, *atunci:*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_n(x)dx\right) = \int_a^b S(x)dx.$$

1.7.6 Teoremă. (**De derivare termen cu termen**)

Fie $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ *o serie de funcţii* $f_n \in C^1([a,b])$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$. *Dacă:*

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(n)$, *punctual pe* $[a,b]$;

(ii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n'(x) = G(x)$, *uniform pe* $[a,b]$,

atunci funcţia S *e derivabilă pe* $[a,b]$ *şi* $S' = G$, *adică*

$$\left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right]' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x), \quad (\forall)\ x \in [a,b].$$

Rezultatele prezentate vor fi exemplificate în cazul seriilor de puteri.

1.8 Serii de puteri

Se numeşte serie de puteri centrată în $x_0 \in \mathbb{R}$ o serie de funcţii de forma $\sum\limits_{n\geq 0} a_n(x-x_0)^n$ $(a_n \in \mathbb{R})$.

În continuare se vor considera serii de puteri centrate în $x_0 = 0$, deci de forma $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$.

Privitor la convergenţa seriilor de puteri precizăm rezultatele:

1.8.1 Teoremă. *Orice serie de puteri e convergentă în* $x_0 = 0$ *(deci mulţimea de convergenţă e nevidă).*

1.8.2 Teoremă. (**Abel**) *Dacă seria de puteri* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *e convergentă în* $x_0 \neq 0$, *atunci seria e absolut şi uniform convergentă pe orice interval* $[-r, r]$, *unde* $0 < r < |x_0|$.

O problemă importantă este aceea a determinării mulţimii de convergenţă a unei serii de puteri.

1.8.3 Definiţie. Fie seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$. Se numeşte rază de convergenţă a seriei date numărul real $R \geq 0$ definit prin:

$$R = \sup\Big\{x \geq 0 : x - \text{punct de convergenţă a sumei } \sum_{n\geq 0} a_n x^n\Big\}.$$

Privitor la calculul razei de convergenţă a unei serii de puteri are loc

1.8.4 Teoremă. *Fie seria de puteri* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x_n$, *având raza de convergenţă* R. *Atunci:*

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Dacă $\frac{1}{R} = 0 \Rightarrow R = +\infty$; *dacă* $\frac{1}{R} = \infty \Rightarrow R = 0$.
Dacă $0 < R < +\infty$, *seria* $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ *e uniform convergentă pe* $]-R, R[$.

1.8.5 Definiţie. Fie seria de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ cu raza de convergenţă R. Intervalul

$$I_C =]-R, R[$$

(pe care seria e uniform convergentă) se numeşte interval de convergenţă al seriei.

1.8.6 Observaţie. Mulţimea de convergenţă a seriei de puteri $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ cu raza de convergenţă R e unul din intervalele $]-R,R[$, $[-R,R[$, $]-R,R]$ sau $[-R,R]$. Pentru mulţimea (domeniul) de convergenţă al unei serii de puteri se va folosi notaţia D_C.

1.8.7 Aplicaţii. (**Domeniul de convergenţă al unei serii de puteri**)

Determinaţi domeniile de convergenţă ale următoarelor serii de puteri:

$(i)\ \sum\limits_{n\geq 0} x^n$; $\quad (ii)\ \sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+1}$; $\quad (iii)\ \sum\limits_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$;

$(iv)\ \sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n\cdot 2^n}$; $\quad (v)\ \sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^n}$; $\quad (vi)\ \sum\limits_{n\geq 0} \frac{(x-3)^{2n+1}}{2n+1}$.

Soluţie. (i) $a_n = 1$, $(\forall)\ n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 \Rightarrow R = 1$. Intervalul de convergenţă este $I_C =]-1,1[$.

Pentru $x = -1$ obţinem seria $\sum\limits_{n\geq 0} (-1)^n$ care e divergentă $\Rightarrow -1 \notin D_C$.

Pentru $x = 1$ obţinem seria divergentă $\sum\limits_{n\geq 0} 1 \Rightarrow 1 \notin D_C$.

Rezultă că $D_C = I_C =]-1,1[$.

(ii) $a_n = \frac{1}{n+1}$; $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+2} = 1 \Rightarrow R = 1 \Rightarrow I_C =]-1,1[$.

$x = -1 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots$ – convergentă (e seria armonică alternată) $\Rightarrow -1 \in D_C$.

$x = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 0} \frac{1}{n+1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$ – divergentă (e seria armonică) $\Rightarrow 1 \notin D_C$.

Domeniul de convergenţă este deci $D_C = [-1,1[$.

(iii) Procedând ca la punctele precedente se obţine $D_C =]-1,1[$.

(iv) $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n\cdot 2^n}{(n+1)2^{n+1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 2 \Rightarrow I_C =]-2,2[$.

$x = -2 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-2)^n}{n\cdot 2^n} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ – convergentă $\Rightarrow -2 \in D_C$.

$x = 2 \Rightarrow \sum\limits_{n\geq 1} \frac{2^n}{n\cdot 2^n} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ – divergentă $\Rightarrow 2 \notin D_C$. Deci $D_C = [-2,2[$.

(v) $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow R = +\infty \Rightarrow I_C = \mathbb{R} = D_C$.

(vi) Notând $x - 3 = y$, obţinem seria $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$ care e convergentă numai pe domeniul $y \in]-1,1[$. Seria dată e deci convergentă dacă şi numai dacă $x - 3 \in]-1,1[$. Prin urmare $D_C =]2,4[$.

1.8.8 Probleme propuse. (**Domenii de convergenţă**)

Aflaţi domeniul de convergenţă al fiecăreia din seriile:

$(i)\quad \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n(2n+1)^2x^n;\quad (ii)\ \sum\limits_{n\geq 1} n!x^n;$

$(iii)\ \sum\limits_{n\geq 1} 3^{n^2}x^{n^2};\qquad (iv)\ \sum\limits_{n\geq 1} n^n(n+3)^n;$

$(v)\quad \sum\limits_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^{2n}}{2n};\qquad (vi)\ \sum\limits_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{2n+1}}\,.$

R. (i) $D_C = I_C =]-1,1[$; (ii) $I_C = \{0\} = D_C$; (iii) $D_C = I_C =]-\frac{1}{3}\,,\frac{1}{3}[$; (iv) $D_C = I_C = \{-3\}$; (vi) $I_C =]1,3[$; $D_C = [1,3]$; (vi) $I_C =]2,4[$; $D_C = [2,4]$.

1.9 Derivarea şi integrarea termen cu termen a seriilor de puteri

Prezentăm un rezultat teoretic iar apoi dăm mai multe aplicaţii ale lui.

1.9.1 Teoremă. *Considerăm seria de puteri* $\sum\limits_{n\geq 0} a_nx^n$ *cu raza de convergenţă* R *şi notăm*

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n,\quad (\forall)\ x \in]-R,R[\,.$$

Sunt adevărate afirmaţiile de mai jos:

(i) S *este derivabilă pe* $]-R,R[$*;*

(ii) Seria $\sum\limits_{n\geq 1} na_nx^{n-1}$ *are raza* R *şi*

$$S'(x) = \sum_{n\geq 1} na_nx^{n-1},\quad (\forall)\ x \in]-R,R[\,;$$

(iii) Dacă $[a,b] \subset]-R,R[$ *are loc:*

$$\int_a^b S(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\int_a^b x^ndx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}\,.$$

1.9.2 Exerciţii rezolvate. (**Derivare şi integrare termen cu termen**) Folosind derivarea sau integrarea termen cu termen, să se calculeze sumele următoarelor serii de puteri:

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$; (ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n}$;

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(2n_1)x^{2n-2}$; (iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

(v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$; (vi) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}$

(vii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$; (viii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$;

(ix) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n\cdot 2^n}$.

Soluţie. (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$, $(\forall)\ x \in]-1,1[\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$, $(\forall)\ x \in]-1,1[$
$\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$, $(\forall)\ x \in]-1,1[$.

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{2-x}$, $(\forall)\ x \in]-2,2[\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{x}{2-x}$, $(\forall)\ x \in]-2,2[$.
Folosind derivarea termen cu termen se obţine:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{(2-x)^2}$, $(\forall)\ x \in]-2,2[\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{2^n} = \frac{x}{(2-x)^2}$, $(\forall)\ x \in]-2,2[$.

(iii) Fie $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} \Rightarrow \int S(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^{2n-1}$.
E uşor de observat că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^{2n-1} = \frac{x}{1+x^2}$, $(\forall)\ x \in]-1,1[$.
Folosind derivarea termen cu termen se obţine:

$$S(x) = \left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}, \quad (\forall)\ x \in]-1,1[.$$

(iv) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$, $(\forall)\ x \in]-1,1[\Rightarrow \int\limits_0^x \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\right) dt = \int\limits_0^x \frac{dt}{1-t} = \ln\frac{1}{1-x}$,
$(\forall)\ x \in]-1,1[\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, $(\forall)\ x \in]-1,1[$.

(v) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1}{1+x}$, $(\forall)\ x \in]-1,1[\Rightarrow \int\limits_0^x \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}t^{n-1}\right) dt =$
$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x)$, $(\forall)\ x \in]-1,1[\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$, $(\forall)\ x \in]-1,1[$.

(vi) Pornind de la $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$, $(\forall)\ x \in]-1,1[$ şi aplicând de două ori derivarea termen cu termen, se obţine:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x(1-x)^2 + 2(1-x)x^2}{(1-x)^4}$$

iar de aici:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}\, x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^3}\,.$$

(vii) Este evidentă identitatea:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{2n-2} = \frac{1}{1+t^2}\,, \quad (\forall)\ t \in]-1,1[.$$

Folosind integrarea termen cu termen, rezultă:

$$\int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{2n-2} \right) dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} x, \quad (\forall)\ x \in]-1,1[.$$

Prin urmare:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \operatorname{arctg} x, \ \ (\forall)\ x \in]-1,1[.$$

(viii) Se porneşte de la identitatea

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}\,, \quad (\forall)\ x \in]-1,1[$$

şi aplicând de două ori integrarea termen cu termen se găseşte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} = (x+1)\ln(x+1) - x, \quad (\forall)\ x \in]-1,1[.$$

(ix) Se notează $\frac{x-3}{2} = y$; aplicând apoi integrarea termen cu termen se găseşte:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 2^n} = -\ln \frac{5-x}{2}\,, \quad (\forall)\ x \in]1,5[.$$

1.10 Serii Taylor

1.10.1 Definiţie. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis, $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie e admite derivate de orice ordin în $x_0 \in I$. Se numeşte serie Taylor ataşată funcţiei f în punctul x_0 următoarea serie:

$$\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, (x-x_0)^n.$$

Are loc următorul rezultat:

1.10.2 Teoremă. *Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ interval deschis, $x_0 \in I$ iar $f : I \to \mathbb{R}$. Dacă:*
(i) f are derivate de orice ordin în x_0;
(ii) $(\exists)\ M > 0$ a. î. $|f^{(n+1)}(x)| < M$, $(\forall)\ x \in V \cap I$ $(V \in \mathcal{V}(x_0))$, atunci $(\forall)\ x \in V \cap I$ are loc egalitatea:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n .$$

1.10.3 Aplicaţii. (**La serii Taylor**)
Să se dezvolte în serie Taylor într-o vecinătate a punctului $x_0 = -4$ funcţiile date prin:
(i) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; (ii) $f(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$.

Soluţie. (i) Se demonstrează (inducţie după n) că:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}, \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}^*,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

de unde rezultă:

$$f^{(n)}(-4) = \frac{(n+1)!}{4^{n+2}}, \quad (\forall)\ n \geq 0,\ n \in \mathbb{N}.$$

E uşor de văzut că $(\exists)\ V \in \mathcal{V}(-4)$ pe care $f^{(n+1)}$ e mărginită. Are deci loc egalitatea

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{4^{n+2}}(x+4)^n = \frac{1}{x^2}, \quad (\forall)\ x \in V \cap \mathbb{R}^*$$

(rămâne în seama cititorului determinarea lui V).

(ii) $\dfrac{1}{x^2+3x+2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{6^{n+1}}(n+4)^n$, $(\forall)\ x \in V \cap (\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\})$
(determinarea lui V rămâne în seama cititorului).

1.11 Serii Mac-Laurin

1.11.1 Definiţie. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval deschis cu proprietatea că $x_0 = 0 \in I$ iar $f : I \to \mathbb{R}$ o funcţie ce admite derivate de orice ordin în $x_0 = 0$. Seria Taylor ataşată funcţiei f în punctul $x_0 = 0$, adică seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

se numeşte serie Mac-Laurin a funcţiei f.

1.11.2 Teoremă. *În ipotezele definiţiei* 1.11.1 *are loc egalitatea:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = f(x), \quad (\forall)\, x \in A,$$

unde $A \subseteq I$ e mulţimea de convergenţă a seriei Mac Laurin.

1.11.3 Aplicaţii. (**Dezvoltarea în serie de puteri a unor funcţii elementare**)

1°. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$

• e uşor de văzut că $f^{(n)}(x) = e^x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{(n)}(0) = 1$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$;

• seria Mac-Laurin este $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, x^n$, deci o serie de puteri cu coeficienţii $a_n = \frac{1}{n!}$, $(\forall)\, n \in \mathbb{N}$ şi raza de convergenţă $R = +\infty$;

• domeniul de convergenţă este $D_C = \mathbb{R}$;

• prin urmare, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$ are loc egalitatea:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

• substituind $x := -x$, se obţine:

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n - \frac{x^4}{n!} + \ldots$$

2°. $f : R \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$

• se demonstrează (inducţie după n) că:

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad (\forall)\, x \in \mathbb{R},\ (\forall)\, n \in \mathbb{N};$$

• prin urmare

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k, & n = 2k+1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N});$$

• seria Mac-Laurin căutată este $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$ şi are raza de convergenţă $R = +\infty$; prin urmare $D_C = \mathbb{R} \Rightarrow \sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2n+1)!}\, x^{2n+1}$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$.

3°. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$, $(\forall)\, x \in \mathbb{R}$

• se demonstrează (inducţie după n) că:

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N};$$

• prin urmare

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^k, & n = 2k; \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{N});$$

• seria Mac-Laurin căutată este $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$ şi are raza de convergenţă $R = +\infty$; prin urmare $D_C = \mathbb{R} \Rightarrow \cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, x^{2n}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$.

4°. $f:]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = (1+x)^{\alpha}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$
• se demonstrează (inducţie după n) că:

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R},\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}$$

şi deci

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1), \quad (\forall)\ n \in \mathbb{N}^*$$

• seria Mac-Laurin căutată este

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n$$

• raza ei de convergenţă este $R = 1$ iar domeniul de convergenţă $D_C =]-1, 1[$; prin urmare are loc egalitatea:

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n, \quad (\forall)\ x \in]-1, 1[$$

• pentru $\alpha = -1$ se obţine identitatea:

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad (\forall)\ x \in]-1, 1[$$

• folosind integrarea termen cu termen, din egalitatea precedentă rezultă:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (\forall)\ x \in]-1, 1[\,.$$

1.11.4 Exerciţii propuse. (**Devoltare în serie de puteri**)

Să se devolte în serie de puteri funcţiile date prin legile de mai jos:
(i) $f(x) = shx \left(= \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)$; (ii) $f(x) = chx \left(= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)$;
(iii) $f(x) = \sin^2 x$; (iv) $f(x) = \cos^2 x$; (v) $f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}$.

R. (i) $shx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$;

(ii) $chx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}$;

(iii) $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$; folosind apoi dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei cos se obţine:

$$\sin^2 x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\, x^{2n}, \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$

(iv) $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$; se procedează apoi ca la (iii), obţinându-se

$$\cos^2 x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!}\, , \quad (\forall)\ x \in \mathbb{R}.$$

(v) $\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left\{1 + (-1)^{n+1} 2^n\right\} x^n, \quad (\forall)\ x \in]-1, 1[\setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}.$

1.12 Utilizarea dezvoltărilor în serie de puteri la calculul limitelor şi la calculul aproximativ al integralelor definite

Prezentăm unele aplicaţii ale dezvoltării în serie de puteri.
A1. Să se calculeze $l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Soluţie. Se ştie că $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Vom deduce mai întâi dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $\operatorname{arctg} x$.

Pornim de la identitatea cunoscută

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^n t^n + \ldots \quad (\forall)\ t \in]-1, 1[$$

din care deducem

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \ldots, \quad (\forall)\ t \in]-1, 1[\,.$$

Folosind teorema de integrare termen cu termen, putem integra identitatea precedentă pe intervalul $[0,x] \subset]-1,1[$ şi obţinem:

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad (\forall)\ x \in]-1,1[\,.$$

Din cele de mai sus obţinem:

$$\sin x - \operatorname{arctg} x = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3!}\right) x^3 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}\right) x^5 + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{7!}\right) x^7 + \ldots$$

Limita căutată devine:

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3!}\right) x^3 + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{5!}\right) x^5 + \ldots}{x^3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}\,.$$

A2. Să se calculeze $l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{2e^x - 2 - 2x - x^2}{x - \sin x}$.

Soluţie. Folosind dezvoltările cunoscute avem:

$$\begin{aligned} 2e^x - 2 - 2x - x^2 &= 2\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots\right) - 2 - 2x - x^2 \\ &= 2\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right) \end{aligned}$$

$$x - \sin x = x - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \ldots$$

Limita căutată devine

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{2\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots\right)}{\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} - \ldots} = 2 \lim_{x \to 0} \frac{x^3\left(\frac{1}{3!} + \frac{x^2}{5!} + \ldots\right)}{x^3\left(\frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \ldots\right)} = 2.$$

A3. Să se calculeze $l = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Soluţie. Se foloseşte dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $\operatorname{arctg} x$, obţinându-se $l = \frac{1}{3}$.

A4. Să se calculeze o valoare aproximativă a integralei

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Soluţie. Folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $\sin x$ deducem:

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots$$

Luând primii trei termeni ai dezvoltării precedente obţinem:

$$\begin{aligned} I &\simeq \int_0^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{120}\right) dx = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{9600}\right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{9600 - 800 + 1}{9600} = \frac{8801}{19200}. \end{aligned}$$

A5. Să se calculeze o valoare aproximativă a integralei

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx.$$

Soluţie. Folosind dezvoltarea în serie de puteri a funcţiei $\cos x$, se obţine:

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \dots \\ &\Rightarrow \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx \simeq \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!}\right) dx \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3 \cdot 4! 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 6! 2^5} = \dots \end{aligned}$$

Capitolul 2

Spaţiile $\mathbb{R}^n$

2.1 Spaţiul cu n dimensiuni

Notăm $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R},\ (\forall)\ i = \overline{1,n} \right\}$.

În cazul $n = 1$, mulţimea $\mathbb{R}^1$ este dreapta reală $\mathbb{R}$.

În cazul $n = 2$, mulţimea $\mathbb{R}^2$ este mulţimea perechilor de numere reale (x_1, x_2) (sau mulţimea punctelor din plan de abscisă x_1 şi ordonată x_2). Punctele lui $\mathbb{R}^2$ vor fi notate adesea (x, y) în loc de (x_1, x_2).

În cazul $n = 3$, mulţimea $\mathbb{R}^3$ este mulţimea tripletelor de numere reale (x_1, x_2, x_3) sau mulţimea punctelor din spaţiu. Punctele din spaţiu vor fi notate adesea (x, y, z) în loc de (x_1, x_2, x_3).

Prin analogie, $\mathbb{R}^n$ se numeşte spaţiul cu n dimensiuni iar elementele sale se numesc puncte.

Dacă $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se numesc coordonatele (proiecţiile) punctului x.

2.2 Structura de spaţiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$

Operaţia de adunare $+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se defineşte prin:

$x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n),\ (\forall)\ x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n,\ (\forall)\ y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n.$

Se verifică uşor:

2.2.1 Teoremă. $(\mathbb{R}^n, +)$ *este un grup abelian cu elementul neutru* $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ *şi opusul fiecărui element* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *elementul* $-x = (-x_1, \ldots, -x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Operaţia de înmulţire a elementelor din $\mathbb{R}^n$ cu numere reale $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se defineşte prin:

$$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n),\ (\forall)\ \alpha \in \mathbb{R},\ (\forall)\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

2.2.2 Teoremă. *Au loc egalităţile:*
(*i*) $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$, $(\forall)\ \alpha \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}^n$;
(*ii*) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$, $(\forall)\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^n$;
(*iii*) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, $(\forall)\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^n$;
(*iv*) $1 \cdot x = x$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^n$.

Teoremele 2.2.1 şi 2.2.2 asigură faptul că $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ este un spaţiu vectorial real. De aceea elementele $x \in \mathbb{R}^n$ se mai numesc şi vectori, iar coordonatele $x_1, \ldots, x_n$ se numesc componentele vectorului $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

2.3 Produsul scalar în $\mathbb{R}^n$

2.3.1 Definiţie. Funcţia $<,>: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i,\ (\forall)\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ (\forall)\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

se numeşte produs scalar în $\mathbb{R}^n$.

Din Definiţia 2.3.1 se obţin proprietăţile produsului scalar, exprimate în

2.3.2 Teoremă. *Produsul scalar în $\mathbb{R}^n$ are proprietăţile:*
(*i*) $\langle x, x\rangle \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^n$; $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(*ii*) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}^n$;
(*iii*) $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$, $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}^n$;
(*iv*) $\langle \alpha x, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$, $(\forall)\ \alpha \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}^n$.
Din proprietatea (*iii*) *rezultă egalitatea* $\langle 0, x\rangle = \langle x, 0\rangle = 0$.

Un rezultat important este

2.3.3 Teoremă. (**Inegalitatea lui Schwarz**)

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle,\ (\forall)\ x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Demonstraţie. $(\forall)\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(\forall)\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ inegalitatea enunţului revine la

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right). \tag{*}$$

Definim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right) t^2 - 2\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right) t + \sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2$.

Cum $f(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} (t x_i - y_i)^2 \geq 0$, $(\forall)\ t \in \mathbb{R}$ şi $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 > 0 \Rightarrow \Delta_f \leq 0 \Rightarrow$ $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2\right)$. Egalitatea are loc $\Leftrightarrow \frac{x_i}{y_i} = t$, $(\forall)\ i = \overline{1, n}$ $\Leftrightarrow \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \cdots = \frac{x_n}{y_n}$.

2.4 Norma în $\mathbb{R}^n$

Pe dreapta reală $\mathbb{R}$ s-a definit distanţa între punctele x, y cu ajutorul modulului $|x-y|$.
În $\mathbb{R}^n$ se va defini norma unui vector x, notată $\|x\|$ iar cu ajutorul ei se va exprima distanţa între 2 puncte $x, y \in \mathbb{R}^n$.

2.4.1 Definiţie. Norma vectorului $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$ este numărul real nenegativ $\|x\|$ definit prin:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Proprietăţile normei, asemănătoare cu cele ale modulului sunt exprimate în

2.4.2 Teoremă.
(i) $\|x\| \geq 0$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^n$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$, $(\forall)\ \alpha \in \mathbb{R}$, $(\forall)\ x \in \mathbb{R}^n$;
(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}^n$ (*inegalitatea triunghiului*);
(iv) $\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}^n$ (*inegalitatea lui Schwarz transcrisă în limbajul normei*).

2.4.3 Observaţii.
(i) În $\mathbb{R}^1$, $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x^2} = |x|$ şi geometric reprezintă distanţa de la originea O la punctul de abscisă x.
(ii) În $\mathbb{R}^2$, dacă $x = (x_1, x_2) \Rightarrow \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, cu aceeaşi semnificaţie geometrică de la (i).
(iii) În $\mathbb{R}^3$, dacă $x = (x_1, x_2, x_3) \Rightarrow \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

2.5 Distanţa în $\mathbb{R}^n$

Cu ajutorul normei se poate introduce distanţa între două puncte din $\mathbb{R}^n$ aşa cum în $\mathbb{R}$ s-a introdus distanţa între 2 puncte cu ajutorul modulului.

2.5.1 Definiţie. Fie $x, y \in \mathbb{R}^n$. Atunci distanţa între x, y se exprimă prin:

$$d(x, y) = \|x - y\|.$$

2.5.2 Observaţii.
(i) În $\mathbb{R}^1$, $d(x, y) = |x - y|$.

(ii) În $\mathbb{R}^2$, distanţa între $x(x_1, x_2)$, $y(y_1, y_2)$ se exprimă prin:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\,.$$

(iii) În $\mathbb{R}^3$, distanţa între $x(x_1, x_2, x_3)$, $y(y_1, y_2, y_3)$ se exprimă prin:

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Distanţa în $\mathbb{R}^n$ are proprietăţile din

2.5.3 Teoremă. $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *au loc:*
(i) $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
(iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (*inegalitatea triunghiului*).

2.6 Vecinătăţile unui punct din $\mathbb{R}^n$

2.6.1 Definiţie. Fie n intervale pe o dreaptă $I_1, I_2, \ldots, I_n$. Produsul lor cartezian $I = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$ se numeşte interval n-dimensional:

$$I = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in I_1, x_2 \in I_2, \ldots, x_n \in I_n\}\,.$$

Intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$ se numesc laturile intervalului n-dimensional I.

2.6.2 Observaţii.

(i) Laturile unui interval n-dimensional pot fi închise la un capăt sau la ambele capete, mărginite sau nemărginite.

(ii) În planul $\mathbb{R}^2$ un interval bidimensional cu laturile mărginite e un dreptunghi.

(iii) În spaţiul $\mathbb{R}^3$ un interval tridimensional cu laturile mărginite este un paralelipiped.

(iv) Dacă toate intervalele $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sunt deschise, atunci I se numeşte interval n-dimensional deschis; dacă laturile intervalului n-dimensional sunt închise, intervalul se numeşte închis; dacă toate laturile sunt intervale mărginite, intervalul se numeşte mărginit.

(v) În continuare, prin interval n-dimensional se va înţelege interval n-dimensional deschis şi mărginit, afară de cazul când se va specifica în mod expres contrarul.

2.6.3 Definiţie. Fie $a \in \mathbb{R}^n$ şi $r > 0$; se numeşte sferă (deschisă) de centru a şi rază r, mulţimea:

$$V_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}\,.$$

2.6.4 Observaţii.

(i) În spaţiul $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $V_r(a) =]a-r, a+r[= \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\}$.

(ii) În spaţiul $\mathbb{R}^2$, $V_r(a) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \|x-a\| < r\} = \Big\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2} < r\Big\} = \Big\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 < r^2\Big\}$, adică interiorul cercului de centru $a(a_1, a_2)$ şi rază r.

(iii) Analog, în $\mathbb{R}^3$, $V_r(a) = \Big\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1-a_1)^2 + (x_2-a_2)^2 + (x_3-a_3)^2 < r^2\Big\}$, deci interiorul sferei de centru $a(a_1, a_2, a_3)$ şi rază r.

2.6.5 Definiţie. Mulţimea $W_r(a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x-a\| \le r\}$ se numeşte sferă închisă de centru a şi rază r.

În continuare se vor face referiri la sfere deschise. Se demonstrează:

2.6.6 Teoremă. *Orice sferă de centru a conţine un interval n-dimensional care conţine a; reciproc, orice astfel de interval conţine o sferă de centru a.*

2.6.7 Definiţie. Se numeşte vecinătate a lui $a \in \mathbb{R}^n$ orice mulţime care conţine o sferă $V_r(a)$ de centru a.

Se demonstrează:

2.6.8 Teoremă. *O mulţime V este o vecinătate a unui punct $a \in \mathbb{R}^n$ dacă şi numai dacă există un interval n-dimensional I, astfel ca $a \in I \subset V$.*

2.7 Mulţimi deschise în $\mathbb{R}^n$

2.7.1 Definiţie. Fie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $a \in A$. Punctul a este un punct interior al mulţimii A dacă există o vecinătate V a lui a conţinută în A,

$$a \in V \subset A,$$

adică mulţimea A este ea însăşi o vecinătate a lui a.

2.7.2 Observaţie. Mulţimea tuturor punctelor interioare lui A se numeşte interiorul mulţimii A şi se notează $\operatorname{Int} A$; este evidentă incluziunea $\operatorname{Int} A \subset A$.

2.7.3 Definiţie. Mulţimea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ este deschisă $\Leftrightarrow A = \operatorname{Int} A$ ($\Leftrightarrow A$ este o vecinătate al fiecărui punct al său).

Se demonstrează:

2.7.4 Teoremă.

(*i*) *Reuniunea unei familii oarecare de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.*

(*ii*) *Intersecţia unei familii finite de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.*

2.8 Mulţimi închise. Frontieră a unei mulţimi

2.8.1 Definiţie. Punctul $a \in \mathbb{R}^n$ este aderent mulţimii $A \subseteq \mathbb{R}^n$ dacă orice vecinătate V a lui a conţine cel puţin un punct $x \in A$, adică:

$$V \cap A \neq \emptyset$$

oricare ar fi vecinătatea V a lui a.

2.8.2 Observaţii.

(i) Dacă $a \in A$, atunci a este un punct aderent al lui A; pot exista puncte aderente ale lui A care să nu aparţină lui A.

(ii) Mulţimea punctelor aderente lui A se numeşte aderenţa (închiderea) lui A şi se notează $\overline{A}$; evident $A \subset \overline{A}$.

2.8.3 Definiţie. O mulţime $A \subset \mathbb{R}^n$ este închisă dacă este egală cu închiderea sa, $A = \overline{A}$.

Se demonstrează:

2.8.4 Teoremă.

(i) *Mulţimea* $A \subset \mathbb{R}^n$ *este închisă* $\Leftrightarrow$ *complementara sa* CA *este închisă.*

(ii) *Reuniunea unei familii finite de mulţimi închise este o mulţime închisă.*

(iii) *Intersecţia unei familii oarecare de mulţimi închise este o mulţime închisă.*

2.8.5 Definiţie. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$; punctul $a \in \mathbb{R}^n$ este punct frontieră a lui A dacă a este punct aderent atât pentru A cât şi pentru CA, adică oricare ar fi V o vecinătate a lui a,

$$V \cap A \neq \emptyset, \ V \cap CA \neq \emptyset.$$

Mulţimea punctelor frontieră ale lui A se numeşte frontiera lui A şi se notează $\operatorname{Fr} A$. Avem $\operatorname{Fr} A = \operatorname{Fr} CA$ şi $\operatorname{Fr} A = \overline{A} \setminus \operatorname{Int} A$.

2.9 Puncte de acumulare

2.9.1 Definiţie. Fie $A \subset \mathbb{R}^n$ şi $a \in \mathbb{R}^n$. Punctul a este un punct de acumulare al lui A dacă orice vecinătate V a lui a conţine cel puţin un punct $x \neq a$ din A ($\Leftrightarrow$ $(\forall)$ V - vecinătate a lui A, $(V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$).

2.9.2 Observaţii.

(i) Orice punct de acumulare al lui A este punct aderent al lui A, deci mulţimea punctelor de acumulare e conţinută în închiderea $\overline{A}$ a lui A.

(ii) Un punct aderent $a \in \overline{A}$ care nu aparţine lui A este în mod necesar punct de acumulare al lui A.

(iii) Punctele lui A nu sunt în mod necesar puncte de acumulare ale lui A.

(iv) Punctul $b \in A$ e izolat dacă nu e punct de acumulare.

Se demonstrează:

2.9.3 Teoremă. *$A \subset \mathbb{R}^n$ este închisă $\Leftrightarrow$ A îşi conţine toate punctele de acumulare.*

2.10 Mulţimi mărginite. Mulţimi compacte. Mulţimi conexe

2.10.1 Definiţie. Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ e mărginită dacă există o sferă cu centrul în origine care conţine mulţimea A, adică:

$$(\exists)\ M > 0 \ \text{ a. î. } \ \|x\| \le M,\ (\forall)\ x \in A.$$

2.10.2 Definiţie. Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ e compactă dacă e mărginită şi închisă.

2.10.3 Definiţie. Mulţimea $A \subset \mathbb{R}^n$ este conexă dacă nu există nici o pereche de mulţimi deschise G_1 şi G_2 astfel ca:

$$A \subset G_1 \cup G_2,\ A \cap G_1 \ne \emptyset,\ A \cap G_2 \ne \emptyset \text{ şi } (A \cap G_1) \cap (A \cap G_2) = \emptyset.$$

2.11 Şiruri de puncte din spaţiul $\mathbb{R}^n$

2.11.1 Definiţie. O funcţie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ se numeşte şir de puncte din spaţiul $\mathbb{R}^n$. Se va nota prescurtat $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

2.11.2 Definiţie. Punctul $x_0 \in \mathbb{R}^n$ este limita şirului $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din $\mathbb{R}^n$ dacă în afara oricărei vecinătăţi a lui x_0 se găsesc cel mult un număr finit de termeni ai şirului. Se utilizează notaţia $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

2.11.3 Observaţie. Dacă $V_\varepsilon(x_0)$ e o vecinătate a lui x_0, atunci $x_k \in V_\varepsilon(x_0) \Leftrightarrow \|x_k - x_0\| < \varepsilon$.

Se demonstrează următoarele rezultate:

2.11.4 Teoremă. $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = N(\varepsilon)$ *a. î.* $(\forall)\ n \geq N,\ \|x_k - x_0\| < \varepsilon$.

2.11.5 Teoremă. *Limita unui şir convergent e unică (un şir din* $\mathbb{R}^n$ *se numeşte convergent dacă are limită).*

2.11.6 Teoremă. *Fie* $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *un şir de numere reale cu proprietatea* $\lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = 0$. *Dacă* $\|x_k - x_0\| \leq \alpha_k$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}$, $k \geq k_0$, *atunci* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$.

2.11.7 Teoremă. *Dacă* $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \|x_k\| = \|x_0\|$.

2.11.8 Teoremă. *Orice şir convergent* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *din* $\mathbb{R}^n$ *este mărginit, adică* $(\exists)\ M > 0$ *a. î.* $\|x_k\| \leq M$, $(\forall)\ k \in \mathbb{N}$.

2.11.9 Definiţie. Şirul $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ este fundamental (Cauchy) $\Leftrightarrow (\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ N = N(\varepsilon)$ a. î. $(\forall)\ p \geq N$, $(\forall)\ q \geq N$

$$\|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$

2.11.10 Teoremă. (**Criteriul Cauchy**) *Şirul* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ *este convergent* $\Leftrightarrow (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *este fundamental.*

2.11.11 Teoremă. *Un şir* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ *are limita* $a \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow$ *pentru fiecare* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *şirul coordonatelor* $(x_{i,k})_{k\in\mathbb{N}}$ *are limita* $a_i = pr_i a$.

2.11.12 Exemple.

(i) $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0. \end{cases}$

(ii) $(x_n, y_n, z_n) \to (x_0, y_0, z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \to x_0 \\ y_n \to y_0 \\ z_n \to z_0. \end{cases}$

Capitolul 3

Funcţii definite pe mulţimi din $\mathbb{R}^n$

3.1 Funcţii reale de variabilă vectorială

3.1.1 Definiţie. Fie $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, $D_f \neq \emptyset$. O funcţie $f : D_f \to \mathbb{R}$

$$(x_1, \ldots, x_n) \in D_f \to f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$$

se numeşte reală de variabila vectorială $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

3.1.2 Observaţii.
(i) Mulţimea D_f se numeşte domeniul maxim de definiţie al funcţiei f.
(ii) O primă problemă (importantă!) care se pune în legătură cu funcţiile reale de variabilă vectorială este aceea a determinării domeniului maxim de definiţie.

3.1.3 Exemple. (De determinare a domeniului maxim de definiţie).
Aflaţi domeniile maxime de definiţie ale funcţiilor definite prin legile de mai jos:
(i) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1}$;
(ii) $f(x, y) = \ln(1 - |x| - |y|)$;
(iii) $f(x, y, z) = \frac{2x+3y+z}{\sqrt{4-x^2-y^2-z^2}}$;
(iv) $f(x, y) = \frac{xy}{x-y}$;
(v) $f(x, y) = \arccos \frac{x}{x+y}$;
(vi) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$;
(vii) $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2-z}$.

Soluţie. (i) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 \geq 0\right\}$ – exteriorul şi frontiera elipsei de ecuaţie $(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$.

(ii) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - |x| - |y| > 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\right\}$ – interiorul pătratului de vârfuri $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(-1,-1)$.

(iii) $D_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 4 - x^2 - y^2 - z^2 > 0\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 4\right\}$ – interiorul sferei de centru $(0,0,0)$ şi rază $r = 2$.

(iv) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \neq 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\right\}$ – punctele planului $\mathbb{R}^2$ nesituate pe prima bisectoare.

(v) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left|\frac{x}{x+y}\right| \leq 1\right\}$ (rămâne în seama cititorului explicitarea (precizarea) geometrică a lui D_f).

(vi) $D_f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x^2 \geq 0 \wedge 1 - y^2 \geq 0\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [-1,1] \wedge y \in [-1,1]\right\} = [-1,1] \times [-1,1]$.

(vii) $D_f = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z \neq 0\right\}$.

3.1.4 Definiţie. Funcţia $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e mărginită dacă şi numai dacă $(\exists)\ M \geq 0$ a. î. $|f(x)| \leq M$, $(\forall)\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in D_f$.

3.2 Limitele funcţiilor reale de variabilă vectorială

3.2.1 Definiţie. Fie $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ punct de acumulare al lui D_f şi $f : D_f \to \mathbb{R}$. Numărul $l \in \overline{\mathbb{R}}$ este limita funcţiei f în punctul x_0 dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate U a lui l (în $\overline{\mathbb{R}}$) există o vecinătate V a lui x_0 (în $\mathbb{R}^n$) astfel ca $(\forall)\ x \in V \cap D_f$, $x \neq x_0$ să avem $f(x) \in U$.
În caz afirmativ se utilizează notaţia $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

Teoremele de mai jos dau definiţii echivalente pentru limita unei funcţii într-un punct.

3.2.2 Teoremă. (**De caracterizare cu ajutorul şirurilor**)
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \Big[$*pentru orice şir* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset D_f \backslash \{x_0\}$ *convergent cu* $\lim\limits_{k \to \infty} x_k = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{k \to \infty} f(x_k) = l\Big]$.

3.2.3 Teoremă. (**De caracterizare "ε, δ"**)
$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \Big[(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *a. î.* $(\forall)\ x \in D_f$, $x \neq x_0$ *cu* $\|x - x_0\| < \delta$ *să avem* $|f(x) - l| < \varepsilon\Big]$.

În continuare vom face referiri la funcţiile reale de două şi respectiv trei variabile reale, acestea fiind funcţiile ce intervin cel mai des în ştiinţele inginereşti.

3.2.4 Definiţie. Fie $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un punct de acumulare al lui D_f iar $f : D_f \to \mathbb{R}$. Se numesc limite parţiale ale funcţiei f în punctul (x_0, y_0) următoarele funcţii reale de o variabilă reală:

$$\varphi(x) = \lim_{y \to y_0} f(x, y), \quad \psi(y) = \lim_{x \to x_0} f(x, y).$$

Se numesc limite iterate ale funcţiei f în punctul (x_0, y_0) următoarele limite:

$$l_{12} = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right), \quad l_{21} = \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right).$$

3.2.5 Observaţie. Consideraţii analoge se pot face pentru funcţiile reale de n variabile reale ($n \geq 3$).

Se demonstrează:

3.2.6 Teoremă. *Fie $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ punct de acumulare al lui D_f iar $f : D_f \to \mathbb{R}$. Dacă există $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = l$ şi există una din limitele l_{12} sau l_{21}, atunci $l = l_{12} = l_{21}$.*

3.2.7 Observaţii.

(i) Dacă există numai una din limitele:

$$l = \lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y),\ l_{12} = \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right),\ l_{21} = \lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right)$$

nu rezultă că există şi celelalte două.

(ii) Dacă nu există $l = \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$, este posibil să existe ambele limite iterate; în acest caz $l_{12} \neq l_{21}$.

(iii) Este posibil ca, deşi (x_0, y_0) e punct de acumulare al lui D_f, mulţimea $\left\{ x \in \mathbb{R} : (x, y) \in D_f \right\}$ să nu-l aibă pe x_0 ca punct de acumulare, oricare ar fi y. În acest caz nu are sens $\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y)$ oricare ar fi y.

3.2.8 Observaţie. (**Metodă practică**)
Presupunem că $(0, 0)$ este punct de acumulare al lui D_f, $f : D_f \to \mathbb{R}$ şi avem de calculat $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$.

Parcurgem etapele următorului algoritm:

1°. Se face schimbarea de variabilă $y = mx$;

2°. Se determină $f(x, mx)$;

3°. Se calculează $\lim\limits_{x \to 0} f(x, mx)$; sunt posibile situaţiile:

(i) $(\exists)$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x, mx)$ şi aceasta este independentă de m; în acest caz $(\exists)$ $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = \lim\limits_{x \to 0} f(x, mx)$.

(ii) $(\exists)\ \lim\limits_{x\to 0} f(x,mx)$ dar valoarea ei depinde de m; în acest caz $(\nexists)\ \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$.

(iii) $(\nexists)\ \lim\limits_{x\to 0} f(x,mn)$; în acest caz $(\nexists)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Algoritmul prezentat se numeşte "metoda dreptei variabile". Poate fi aplicat şi pentru calculul limitelor de forma $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. În acest caz se foloseşte schimbarea de variabilă $y = y_0 + m(x - x_0)$.

3.2.9 Aplicaţii. (**La metoda dreptei variabile**)
Calculaţi limitele de mai jos:

(i) $l_1 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$; (ii) $l_2 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^6}{x^2+y^{12}}$;

(iii) $l_3 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$; (iv) $l_4 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y}$;

(v) $l_5 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}$; (vi) $l_6 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+2y}{x-3y}$;

(vii) $l_7 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$;

(viii) $l_8 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2}$; (ix) $l_9 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$.

Soluţie.

(i) Nedeterminarea e de formă $\frac{0}{0}$; folosim metoda dreptei variabile şi punând $y = mx$ găsim:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Cum rezultatul depinde de $m \Rightarrow (\nexists)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

(ii) Analog cu (i), avem (punând $y^6 = m$)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^6}{x^2+y^{12}} = \lim_{x\to 0} \frac{3mx^2}{x^2(1+m^2)} = \frac{3m}{1+m^2} \Rightarrow (\nexists) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^6}{x^2+y^{12}}.$$

(iii) $l_3 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(1-m)}{x(1+m)} = \frac{1-m}{1+m} \Rightarrow (\nexists)\ l_3$.

(iv) $l_4 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x+y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{mx^2}{x(1+m)} = 0 \Rightarrow (\exists)\ l_4$ şi $l_4 = 0$.

(v) $l_5 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{mx^5}{x^2(1+m^2)} = 0 \Rightarrow (\exists)\ l_5$ şi $l_5 = 0$.

(vi) $l_6 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+2y}{x-3y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x(1+2m)}{x(1-3m)} = \frac{1+2m}{1-3m} \Rightarrow (\nexists)\ l_6$.

(vii) $l_7 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} x^2(1+m^2)\sin\frac{1}{x^2(1+m^2)} =$ $(1+m^2)\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x^2(1+m^2)}$. Cum $\left|\sin\frac{1}{x^2(1+m^2)}\right| \leq 1 \Rightarrow l_7 = 0.$

(viii) $l_8 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{mx^3}{x^2(1+m^2)} = 0.$

(ix) $l_9 = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3(1+m^3)}{x^2(1+m^2)} = 0.$

3.2.10 Observaţii.

(i) "Metoda dreptei variabile" se aplică în general în cazul calculului limitelor funcţiilor raţionale, pentru eliminarea nedeterminărilor de forma $\frac{0}{0}$.

(ii) În cazul funcţiilor reale de trei variabile reale, se aplică "metoda curbelor variabile", pe care o vom exemplifica mai jos.

3.2.11 Aplicaţii. (**La metoda curbelor variabile**)

Să se calculeze limitele de mai jos:

(i) $l_1 = \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x+y-z}{3x+2y+4z}$;

(ii) $l_2 = \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x+3y^2+4z^3}{5x+4y^4+z^2}$;

(iii) $l_3 = \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x^{\frac{y-z}{y+z}}$.

Soluţie. Descriem pe scurt metoda:

• se fac schimbările: $x = at$, $y = bt$, $z = ct$; atunci $t \to 0 \Leftrightarrow (x,y,z) \to (0,0,0)$;

• în caz că valoarea limitei funcţiei în t este independentă de a,b,c, aceasta este limita funcţiei în $(0,0,0)$; în caz contrar, limita nu există.

(i) $x = at$, $y = bt$, $z = ct \Rightarrow$

$$\Rightarrow l_1 = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x+y-z}{3x+2y+4z} = \lim_{t\to 0} \frac{t(2a+b-c)}{t(3a+2b+4c)} = \frac{2a+b-c}{3a+2b+4c}.$$

Cum l_1 depinde de $a,b,c \Rightarrow (\nexists) \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x+y-z}{3x+2y+4z}$.

(ii) $x = at$, $y = bt$, $z = ct \Rightarrow$

$$\Rightarrow l_2 = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x+3y^2+4z^3}{5x+4y^4+z^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t(2a+3b^2t^2+4c^3t^2}{t(5a+4b^4t^3+c^2t)} = \frac{2a}{5a} = \frac{2}{5}.$$

Cum l_2 este independent de $a,b,c \Rightarrow l_2 = \frac{2}{5} = \lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2x+3y^2+4z^3}{5x+4y^4+z^2}$.

(iii) $x = at$, $y = bt$, $z = ct \Rightarrow$

$$\Rightarrow l_3 = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x\frac{y-z}{y+z} = \lim_{t\to 0} at\frac{t(b-c)}{t(b+c)} = 0.$$

3.2.12 Observaţii.

(i) Pentru operaţiile cu limite de funcţii reale de n variabile reale se păstrează regulile de calcul din cazul funcţiilor reale de o variabilă reală.

(ii) Nedeterminările în cazul operaţiilor cu funcţii reale de n variabile reale sunt aceleaşi ca în cazul funcţiilor reale de o variabilă reală.

3.3 Continuitatea funcţiilor reale de n variabile reale

3.3.1 Definiţie. Fie $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $x_0 \in D_f$. Funcţia f este continuă în x_0 dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate U a lui $f(x_0)$ există o vecinătate V a lui x_0 astfel ca $(\forall)\ x \in V \cap D_f$ să avem $f(x) \in U$.

3.3.2 Observaţii.

(i) Dacă $x_0 \in D_f$ e un punct izolat al lui D_f, atunci f e continuă în x_0.

(ii) Dacă $x_0 \in D_f$ e un punct de acumulare al lui D_f, atunci f e continuă în $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ (în sensul definiţiei limitei unei funcţii reale de n variabile reale).

(iii) Dacă f e continuă în fiecare punct al lui D_f, funcţia f se numeşte continuă pe D_f.

(iv) Funcţiile elementare de n variabile reale sunt continue pe domeniul maxim de definiţie.

3.3.3 Aplicaţii. (**Determinarea domeniului de continuitate**)

Pentru fiecare din funcţiile de mai jos, să se determine domeniul de continuitate D_C:

(i) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 2, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(ii) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{|x|+|y|}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(iii) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{xy}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(iv) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 2, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(v) $f(u,v) = \begin{cases} \frac{u^2 v}{u^2+v^2}, & (u,v) \neq (0,0) \\ 0, & (u,v) = (0,0) \end{cases}$

Soluţie.

(i) Pe $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$, f e continuă (elementară). Cum $(0,0)$ e punct de acumulare al lui $\mathbb{R}^2$, f - continuă în $(0,0) \Leftrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 2$. Pentru a calcula $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ aplicăm metoda dreptei variabile. Deci facem schimbarea de variabilă $y = mn$ şi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Prin urmare, $(\nexists) \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$. Domeniul de continuitate al funcţiei date este deci $D_C = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

(ii) Sunt valabile consideraţiile de la (i). Rămâne de văzut dacă $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. Avem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 x^2 (1+m^2)}{|t| x (1+m)} = 0 = f(0,0).$$

Prin urmare f e continuă şi în $(0,0)$ şi deci $D_C = \mathbb{R}^2$.

(iii) Analog cu punctele precedente, avem:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0} x^2(1+m^2) \sin\frac{1}{mx^2} = (1+m^2) \lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{mx^2} =$$
$$= (1+m^2)0 = 0 \neq 2 = f(0,0).$$

Deci f nu e continuă în $(0,0)$ şi ca atare $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

(iv) Analog cu punctele precedente se obţine $D_f = \mathbb{R}^2$.

3.3.4 Definiţie. Die $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Funcţia f este uniform continuă pe $D_f \Leftrightarrow \Big[(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ \delta = \delta(\varepsilon)$ a. î. $(\forall)\ x', x'' \in D_f$ cu proprietatea $\|x' - x''\| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\Big]$.

3.3.5 Observaţii.

(i) Dacă $n = 1 \Rightarrow D_f \subset \mathbb{R}$. Funcţia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e uniform continuă pe $D_f \Leftrightarrow \Big[(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ a. î. $(\forall)\ x', x'' \in D_f$ cu proprietatea $|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\Big]$.

(ii) Dacă $n = 2 \Rightarrow D_f \in \mathbb{R}^2$. Funcţia $f : D_f \to \mathbb{R}$ e uniform continuă pe $D_f \Leftrightarrow \Big[(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ \delta = \delta(\varepsilon)$ a. î. $(\forall)\ x' = (x'_1, x'_2)$, $(\forall)\ x'' = (x''_1, x''_2) \in D_f$ cu proprietatea $\|x' - x''\| = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_1 - x''_2)} < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\Big]$.

(iii) Consideraţii analoge celor de la (i) şi (ii) se fac pentru $n \geq 3$.

Menţionăm următoarea legătură între funcţiile continue şi uniform continue de n variabile reale.

3.3.6 Teoremă. *Fie $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ şi $f : D_f \to \mathbb{R}$. Sunt adevărate afirmaţiile de mai jos:*

(i) Dacă f e uniform continuă pe $D_f \Rightarrow f$ - continuă pe D_f.

(ii) Dacă D_f e compactă, atunci f - uniform continuă pe $D_f \Leftrightarrow f$ - continuă pe D_f.

Proprietăţi importante ale funcţiilor continue pe o mulţime compactă $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ sunt conţinute în:

3.3.7 Teoremă. *Fie $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ compactă iar $f : D_f \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă pe D_f, atunci f e mărginită şi îşi atinge marginile pe D_f.*

3.4 Derivate parţiale

Pentru fixarea ideilor ne referim la funcţii reale de două variabile reale, situaţia numărului de variabile $n > 2$ tratându-se analog.

3.4.1 Definiţie. Fie $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D_f$ punct de acumulare iar $f : D_f \to \mathbb{R}$. Funcţia f e derivabilă parţial în raport cu x în (x_0, y_0) dacă limita de mai jos există şi este finită:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

În caz afirmativ, valoarea limitei precedente se numeşte derivata parţială de ordinul întâi a lui f în raport cu x în punctul (x_0, y_0) şi se notează prin $f^1_x \to (x_0, y_0)$ sau $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.
Analog se defineşte derivata parţială de ordinul întâi în raport cu y în punctul (x_0, y_0). Ea se notează prin $f'_y(x_0, y_0)$ sau $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

3.4.2 Observaţii.

(i) Dacă $f : D_f \to \mathbb{R}$ e derivabilă parţial în raport cu x în fiecare punct $(x, y) \in D_f$, se spune că f e derivabilă parţial în raport cu x pe D_f. Derivata parţială de ordinul întâi în raport cu x într-un punct $(x, y) \in D_f$ se notează $f'_x(x, y)$ sau $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

(ii) Analog cu (i), $f : D_f \to \mathbb{R}$ e derivabilă parţial în raport cu y pe D_f dacă e derivabilă parţial în raport cu y în fiecare punct $(x, y) \in D_f$. Derivata parţială de ordinul întâi în raport cu y în $(x, y) \in D_f$ se notează cu $f'_y(x, y)$ sau $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

(iii) Pentru calculul derivatelor parţiale se păstrează regulile de calcul din cazul funcţiilor de o variabilă, cu observaţia că se consideră variabilă numai aceea în raport cu care se efectuează derivarea (x, când se calculează f'_x, respectiv y când se calculează f'_y).

(iv) Funcţiile elementare sunt derivabile parţial pe interiorul domeniului maxim de definiţie.

3.4.3 Exemple. (De calcul a derivatelor parţiale de ordinul I)

(i) Folosind definiţia să se calculeze f'_x, f'_y în punctele indicate:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + x^2y + y^2$ în punctul $(1, 2)$;

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2+1}$ în punctul $(0, -1)$.

Soluţie.

$$(a) \qquad f'_x(1,2) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x,2) - f(1,2)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-3}{x-1} = 6$$

$$f'_y(1,2) = \lim_{y\to 2} \frac{f(1,y) - f(1,2)}{y-2} = \lim_{y\to 2} \frac{y^2+y-6}{y-2} = 5.$$

(b) Analog cu (a), se obţin: $f'_x(0, -1) = 0$; $f'_y(0, -1) = 0$.

(ii) Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul întâi ale funcţiilor de mai jos într-un punct arbitrar al domeniului de definiţie:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x^2 + xy)e^{-x^2y}$;

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$;

(c) $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$;

(d) $f :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y \ln x$;

(e) $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(x, y) : x = 0 \text{ sau } y = 0\} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y + \frac{x}{y} + \frac{y^2}{x}$.

Soluţie.

$$\begin{aligned}(a) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= (x^2+xy)'_x e^{-x^2y} + (x^2+xy)(e^{-x^2y})'_x = \\ &= (2x+y)e^{-x^2y} - 2xy(x^2+xy)e^{-x^2y} = \\ &= (2x + y - 2x^3y - 2x^2y^2)e^{-x^2y} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \\ &= (x^2+xy)'_y e^{-x^2y} + (x^2+yx)(e^{-x^2y})'y = \\ &= xe^{-x^2y} - x^2(x^2+xy)e^{-x^2y} = x(1-x^3-x^2y)e^{-x^2y}\end{aligned}$$

(b) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$, ; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$.

(c) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2+y^2}\cdot\frac{-y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$;

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$;

(d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x}$;

(e) $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + \frac{1}{y} - \frac{y^2}{x^2} = \frac{2x^3+x^2-y^3}{x^2y}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - \frac{x}{y^2} + \frac{2y}{x} = \frac{x^3y^2-x^3+2y^3}{xy^2}$.

3.4.4 Definiţie. (i) Presupunem că $f : D_f \to \mathbb{R}$ ($D_f \subseteq \mathbb{R}^2$) e derivabilă parţial în raport cu x pe D_f, deci $f'_n : D_f \to \mathbb{R}$. Dacă f'_x este la rândul ei derivabilă în raport cu x pe D_f, se spune că f este de două ori derivabilă parţial pe D_f în raport cu x. Derivata parţială a lui f'_x în raport cu x se numeşte derivata parţială de ordinul doi a lui f în raport cu x şi se notează prin f''_{xx} sau $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Deci:

$$f''_{xx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right].$$

(ii) Presupunem că $f : D_f \to \mathbb{R}$ e derivabilă parţial în raport cu x pe D_f, $f'_x : D_f \to \mathbb{R}$. Dacă f'_x e derivabilă parţial în raport cu y pe D_f, funcţia f e de două ori derivabilă parţial pe D_f, în raport cu x şi y. Derivata parţială $(f'_x)_y$ se numeşte derivata parţială de ordinul doi a lui f în raport cu x şi y; se notează prin f''_{xy} sau $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$. Deci

$$f''_{xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right].$$

(iii) Presupunem că $f : D_f \to \mathbb{R}$ e derivabilă parţial în raport cu y pe D_f, $f'_y : D_f \to \mathbb{R}$. Dacă f'_y e derivabilă parţial în raport cu y pe D_f, atunci f e de două ori derivabilă parţial în raport cu y pe D_f. Derivata parţială a lui f'_y în raport cu y se numeşte derivata parţială de ordinul doi a lui f în raport cu y şi se notează prin f''_{yy} sau $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$. Deci

$$f''_{yy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right].$$

(iv) Presupunem că $f : D_f \to \mathbb{R}$ e derivabilă parţial în raport cu y pe D_f, $f'_y : D_f \to \mathbb{R}$. Dacă f'_y e derivabilă în raport cu x pe D_f, atunci f e de două ori derivabilă pe D_f în raport cu y şi x. Derivata parţială a lui f'_y în raport cu x se numeşte derivata parţială de ordinul doi a lui f în raport cu y şi x; se notează prin f''_{yx} sau $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$. Deci

$$f''_{yx}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right].$$

3.4.5 Observaţii. (i) Derivatele parţiale $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ se numesc derivate parţiale mixte de ordinul doi ale funcţiei f.

(ii) Se poate întâmpla ca într-un punct $(x,y) \in D_f$ să existe $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ dar $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ să nu existe (sau invers). Chiar dacă $(\exists)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)$ şi $(\exists)$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$, în general $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)$.

Situaţia în care derivatele parţiale mixte sunt egale e precizată în

3.4.6 Teoremă. (**Schwarz**)

Dacă $(x_0,y_0) \in D_f$ e un punct de acumulare, iar $f : D_f \to \mathbb{R}$ are proprietăţile:

(i) $(\exists)$ f''_{xy}, f''_{yx} pe D_f;

(ii) f''_{xy}, f''_{yx} sunt continue într-o vecinătate a lui (x_0,y_0).

Atunci $f''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{yx}(x_0,y_0)$.

3.4.7 Exemple. (**De calcul a derivatelor parţiale de ordinul doi**)

Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul doi ale funcţiilor:

(i) $f : \mathbb{R}\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$;

(ii) $f : \mathbb{R}\times]0,+\infty[\to \mathbb{R} \quad f(x,y) = x \ln y$.

Soluţie.

$$(i) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_x = 2\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)'_y = 2x\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'_x = 2y\frac{-2x}{(x^2+y^2)} = -\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)'_y = 2\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Se observă că $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, $(\forall)\ (x,y) \in D_f$.

(ii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ln y$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (\ln y)'_y = \dfrac{1}{y}$.

$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{y}$; $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \left(\dfrac{x}{y}\right)'_x = \dfrac{1}{y}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \left(\dfrac{x}{y}\right)'_y = -\dfrac{x}{y^2}$.

Se observă că şi în acest caz $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$, $(\forall)\ (x,y) \in D_f$.

3.4.8 Exemple. (**Identităţi cu derivate parţiale**).

Arătaţi că funcţiile de mai jos satisfac respectiv relaţiile indicate:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = e^x \cos y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$, $(\forall)\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0) \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \ln(x^2 + xy + y^2)$

$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2$, $(\forall)\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

(iii) $f : D_f \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy + x \cdot e^{\frac{y}{x}}$

$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2xy + f(x,y)$, $(\forall)\ (x,y) \in D_f$, unde $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}$.

Soluţie. (i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x \cos y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^x \cos y$;

$\frac{\partial x}{\partial y}(x,y) = -e^x \sin y$; $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^x \cos y$. Deci

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \cos y - e^x \cos y = 0, \quad (\forall)\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2x+y}{x^2+y^2+xy}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x+2y}{x^2+y^2+xy}$. Prin urmare

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x(2x+y) + y(x+2y)}{x^2+y^2+xy} = \frac{2(x^2+y^2+xy)}{x^2+y^2+xy} = 2,$$

$(\forall)\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

(iii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}}$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + e^{\frac{y}{x}}$. Deci

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy + xe^{\frac{y}{x}} - ye^{\frac{y}{x}} + xy + ye^{\frac{y}{x}} = 2xy + xe^{\frac{y}{x}} =$$

$$= 2xy + f(x,y),\ (\forall)\ (x,y) \in D_f.$$

3.4.9 Observaţii. (i) Derivatele parţiale de ordin superior se definesc prin relaţia de recurenţă $\partial^n = \partial(\partial^{n-1})$.

(ii) Derivatele parţiale ale funcţiilor reale de n variabile reale se definesc analog cu derivatele parţiale ale funcţiilor reale de 2 variabile reale.

3.5 Derivarea funcţiilor compuse

Acest paragraf este dedicat abordării unor probleme simple din punct de vedere teoretic, dar care au o mare importanţă în studiul unor discipline inginereşti (mecanică, rezistenţa materialelor).

3.5.1 Teoremă. *Dacă* $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ *şi*

(i) $u, v :]a, b[\to \mathbb{R}$ *au derivate continue pe* $]a, b[$;

(ii) $(u(x), v(x)) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, $(\forall)\ x \in]a, b[$;

(iii) $f : D_f \to \mathbb{R}$ *are derivate parţiale de ordinul întâi continue pe* D_f,

atunci $F :]a, b[\to \mathbb{R}$, $F(x) = f(u(x), v(x))$ *e derivabilă pe* $]a, b[$ *şi are loc egalitatea*

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial u}(u(x), v(x))u'(x) + \frac{\partial f}{\partial v}(u(x), v(x))v'(x),\ (\forall)\ x \in]a, b[\,.$$

3.5.2 Aplicaţii. (**Ale teoremei 3.5.1**)

1°. Fie $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x) = \sqrt{u^2(x) + v^2(x)}$ unde $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ sunt funcţii de două ori derivabile pe $\mathbb{R}$. Să se calculeze $F'(x)$ şi $F''(x)$.

Soluţie. După teorema 3.5.1 avem:

$$\begin{aligned} F''_x &= \left(\sqrt{u^2(x) + v^2(x)}\right)'_u u'(x) + \left(\sqrt{u^2(x) + v^2(x)}\right)'_v v'(x) = \\ &= \frac{u(x)}{\sqrt{u^2(x) + v^2(x)}} u'(x) + \frac{v(x)}{\sqrt{u^2(x) + v^2(x)}} v'(x). \end{aligned}$$

Aplicând din nou teorema 3.5.1 găsim (pentru simplificarea notaţiei punem $u'(x) = u'$, $v'(x) = v'$):

$$\begin{aligned} F''(x) &= \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)'_u u' + \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)'_v u' + \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}} u'' + \\ &+ \left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)'_u v' + \left(\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}\right)'_v v' + \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} v'' = \\ &= \frac{u'\sqrt{u^2 + v^2} - u\dfrac{2uu'}{2\sqrt{u^2 + v^2}}}{u^2 + v^2} u' - \frac{u\dfrac{2v}{2\sqrt{u^2 + v^2}} v'}{u^2 + v^2} u' + \end{aligned}$$

$$+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\,u''-\frac{v\dfrac{2u}{2\sqrt{u^2+v^2}}u'}{u^2+v^2}\,v'+\frac{v'\sqrt{u^2+v^2}-v\dfrac{2vv'}{2\sqrt{u^2+v^2}}}{u^2+v^2}+$$
$$+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\,v''=\frac{u^2+v^2-u^2}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}}\,(u')^2-\frac{2uv}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}}\,u'v'+$$
$$+\frac{u^2+v^2-v^2}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}}\,(v')+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\,u''+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\,v''=$$
$$=\frac{v^2}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}}\,(u')^2-\frac{2uv}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}}\,u'v'+$$
$$+\frac{u^2}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}}\,(v')^2+\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}\,u''+\frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\,v''=$$
$$=\frac{1}{(u^2+v^2)^{3/2}}(u'v-uv')^2+\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}\,(uu''+vv'').$$

Deci:

$$F''(x)=\frac{1}{(u^2(u)+v^2(v))^{3/2}}\,\left[u'(x)v(x)-u(x)v'(x)\right]^2+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{u^2(x)+v^2(x)}}\,\left[u(x)u''(x)+v(x)v''(x)\right],\ (\forall)\ x\in\mathbb{R}.$$

2°. Fie $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x)=f(u(x),v(x))$ unde $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(u,v)=\begin{cases}\frac{u^2v}{u^2+v^2}, & (u,v)\neq(0,0)\\ 0, & (u,v)=(0,0),\end{cases}$ iar $u,v:]a,b[\to\mathbb{R}$ au derivate continue pe $]a,b[$. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$ şi să se studieze continuitatea lor în $(0,0)$. Să se precizeze dacă are loc formula:

$$F'(x)=\frac{\partial f}{\partial u}\,(u(x),v(x))u'(x)+\frac{\partial f}{\partial v}\,(u(x),v(x))v'(x).$$

Soluţie. $(\forall)\ (u,v)\neq(0,0)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial u}\,(u,v)=v\frac{2u(u^2+v^2)-2vu^2}{(u^2+v^2)^2}=2uv\frac{u^2+v^2-uv}{(u^2+v^2)^2}$.

E clar că:

$$\frac{\partial f}{\partial u}\,(0,0)=\lim_{u\to0}\frac{f(u,0)-f(0,0)}{u}=0.$$

Studiem dacă $\frac{\partial f}{\partial u}$ e continuă în $(0,0)$ calculând $\lim\limits_{(u,v)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial u}\,(u,v)$. Folosim metoda dreptei variabile şi avem

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)}\frac{\partial f}{\partial u}\,(u,v)=2\lim_{(u,v)\to(0,0)}vu\frac{u^2+v^2-uv}{(u^2+v^2)^2}=$$
$$=2\lim_{n\to0}mu^3\frac{u^2(1+m^2-m)}{u^4(1+m^2)^2}=2m\frac{(1+m^2-m)}{(1+m^2)^2}.$$

Relaţia precedentă arată că $(\nexists) \lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial u}(u,v)$, adică $\frac{\partial f}{\partial u}$ nu e continuă în $(0,0)$.

Analog, $(\forall)\ (u,v) \neq (0,0)$ avem:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \frac{u^2(u^2+v^2) - 2u^2v^2}{(u^2+v^2)^2} = \frac{u^2(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{v\to 0} \frac{f(0,v) - f(0,0)}{v} = 0.$$

Ca la prima parte,

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^2(u^2-v^2)}{(u^2+v^2)^2} =$$
$$= \lim_{v\to 0} m^2v^2 \frac{v^2(m^2-1)}{v^4(m^2+1)^2} = \frac{m^2(m^2-1)}{(m^2+1)^2},$$

adică $(\nexists) \lim\limits_{(u,v)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$. Deci $\frac{\partial f}{\partial v}$ nu e continuă în $(0,0)$.

Condiţiile teoremei 3.5.1 nefiind îndeplinite, egalitatea nu are loc.

3.5.3 Teoremă. *Dacă D_1, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $u, v : D_1 \to D$, $f : D \to \mathbb{R}$, $f = f(u,v)$ astfel încât:*

(i) u, v au derivate parţiale de ordinul întâi continue pe D_1;

(ii) f are derivate parţiale de ordinul întâi continue pe D, atunci funcţia $F : D_1 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ are derivate parţiale pe D_1 şi:

$$F'_x(x,y) = f'_u(u,v)u'_x(x,y) + f'_v(u,v)v'_x(x,y);$$
$$F'_y(x,y) = f'_u(u,v)u'y(x,y) + f'_v(u,v)v'_y(x,y).$$

3.5.4 Aplicaţii. (**La teorema 3.5.3**)

1°. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f = f(u)$ o funcţie derivabilă iar $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = f(2x+3y)$, $(\forall)\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Calculaţi $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$ şi $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)$.

Soluţie. Avem $u(x,y) = 2x+3y$, $F(x,y) = f(u(x,y))$, $(\forall)\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$. După teorema 3.5.3 avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = f'(u,(x,y))\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 2f'(u)$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = f'(u(x,y))\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = 3f'(u)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2f'(u)) = 2f''(u)\frac{\partial u}{\partial x} = 4f''(u)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(2f'(u)) = 2f''(u)\frac{\partial u}{\partial y} = 6f''(u)$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3f'(u)) = 3f''(u)\frac{\partial u}{\partial y} = 9f''(u).$$

2°. Fie $F(x,y) = f(x+y, x^2+y^2)$ unde $f = f(u,v)$ are derivate parţiale continue.

Să se calculeze $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$ şi $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)$.

Soluţie. Avem $u(x,y) = x+y$, $v(x,y) = x^2+y^2$. După teorema 3.5.3, avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + 2x\frac{\partial f}{\partial v}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} + 2y\frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\frac{\partial f}{\partial v}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \\ &+ 2\frac{\partial f}{\partial v} + 2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2\frac{\partial f}{\partial v} + 2x\left(\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\right) = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (2x+1)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial f}{\partial v}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial u} + 2x\frac{\partial f}{\partial v}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \\ &+ 2x\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right] = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (2x+1)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2x\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial u} + 2y\frac{\partial f}{\partial v}\right] = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \\ &+ 2\frac{\partial f}{\partial v} + 2y\left[\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\right] =\end{aligned}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2\frac{\partial f}{\partial v} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + (2y+1)\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + 2\frac{\partial f}{\partial v}.$$

Peste tot s-a aplicat teorema lui Schwarz, ale cărei ipoteze sunt îndeplinite în baza condiţiilor enunţului.

3°. Fie $F(x,y,z) = f(x, xy, xyz)$, unde $f = f(\alpha, \beta, \gamma)$ e o funcţie ce are derivate parţiale de ordinul întâi şi doi continue. Să se calculeze $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}$ şi $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}$.

Soluţie. Punem $\alpha(x,y,z) = x$, $\beta(x,y,z) = xy$, $\gamma(x,y,z) = xyz$, după care aplicăm teorema 3.5.3 (în varianta pentru funcţii de trei variabile). Avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} + y\frac{\partial f}{\partial \beta} + yz\frac{\partial f}{\partial \gamma}$$
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial y} = x\frac{\partial f}{\partial \beta} + xz\frac{\partial f}{\partial \gamma}$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial z} = xy\frac{\partial f}{\partial \gamma}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \alpha}\right) + y\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \beta}\right) + yz\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \gamma}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x} +$$
$$+ y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \gamma} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) +$$
$$+ yz\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \gamma} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \gamma} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial x}\right) =$$
$$= \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} + y^2 z^2\frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2} + 2y\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} + 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \gamma} + 2y^2\frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial \gamma}.$$

Analog se calculează celelalte derivate parţiale cerute de enunţ.

4°. Fie $F(x,y,z) = f(xy, x^2+y^2-z^2, x+y+z, xy+yz)$ unde $f = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ are derivate parţiale de ordinul întâi şi doi continue.
Să se calculeze $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial F}{\partial z}$ şi $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$.

Soluţie. Fie $\alpha(x,y,z) = xy$, $\beta(x,y,z) = x^2+y^2-z^2$, $\gamma(x,y,z) = x+y+z$, $\delta(x,y,z) = xy+yz$. Atunci:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \delta}\cdot\frac{\partial \delta}{\partial x} = \\
&= y\frac{\partial f}{\partial \alpha} + 2x\frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} + y\frac{\partial f}{\partial \gamma} \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= x\frac{\partial f}{\partial \alpha} + 2y\frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} + (x+z)\frac{\partial f}{\partial \delta} \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= -2z\frac{\partial f}{\partial \beta} + \frac{\partial f}{\partial \gamma} + y\frac{\partial f}{\partial \delta}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = y&\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\partial\beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\partial\gamma}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha\partial\delta}\cdot\frac{\partial \delta}{\partial x}\right] + \\
&+ 2\frac{\partial f}{\partial \beta} + 2x\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\partial\beta}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta\partial\gamma}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \beta\partial\delta}\cdot\frac{\partial \delta}{\partial x}\right] + \\
&+ \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma\partial\alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma\partial\beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma^2}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \gamma\partial\delta}\cdot\frac{\partial \delta}{\partial x} + \\
&+ y\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \delta\partial\alpha}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \delta\partial\beta}\cdot\frac{\partial \beta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \delta\partial\gamma}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial \delta^2}\cdot\frac{\partial \delta}{\partial x}\right).
\end{aligned}$$

Ţinând seama că $\frac{\partial\alpha}{\partial x} = y$, $\frac{\partial\alpha}{\partial y} = x$, $\frac{\partial\beta}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial\beta}{\partial y} = 2y$, $\frac{\partial\beta}{\partial z} = -2z$, $\frac{\partial\gamma}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial\gamma}{\partial y} = 1$, $\frac{\partial\gamma}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial\delta}{\partial x} = y$, $\frac{\partial\delta}{\partial y} = x+z$, $\frac{\partial\delta}{\partial z} = y$, expresia lui $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ poate fi adusă la o formă mai simplă.

3.6 Diferenţiala unei funcţii reale de două variabile reale

3.6.1 Definiţie. Fie $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in Int\, D_f$, $f : D_f \to \mathbb{R}$. Funcţia f e diferenţiabilă în (x_0,y_0) dacă există două numere reale λ şi μ şi o funcţie $\omega : D_f \to \mathbb{R}$, continuă în (x_0,y_0) şi nulă în acest punct:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \omega(x,y) = \omega(x_0,y_0) = 0$$

astfel încât $(\forall)$ $(x,y) \in D_f$ să aibă loc egalitatea

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \lambda(x-x_0) + \mu(y-y_0) + \omega(x,y)\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

Dacă D_f este deschisă şi f e diferenţiabilă în fiecare punct din D_f, se spune că f e diferenţiabilă pe D_f.

Se demonstrează

3.6.2 Teoremă. *În ipotezele definiţiei* 3.6.1*, dacă funcţia f e diferenţiabilă în (x_0, y_0), atunci f are derivate parţiale de ordinul întâi în (x_0, y_0) şi au loc egalităţile:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lambda, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \mu.$$

3.6.3 Definiţie. În ipotezele definiţiei 3.6.1, funcţia liniară de două variabile $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$ se numeşte diferenţiala funcţiei f în (x_0, y_0) şi se notează prin

$$df(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

3.6.4 Observaţii. i) Alegând $f(x, y) = x$ în definiţia 3.6.3 $\Rightarrow dx = x - x_0$; alegând $f(x, y) = y$ în definiţia 3.6.3 $\Rightarrow dy = y - y_0 \Rightarrow$

$$df(x_0, y_0)(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy.$$

ii) Dacă f e diferenţiabilă în fiecare punct $(x, y) \in D_f$, atunci

$$df(x, y)(dx, dy) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dy.$$

iii) Dacă f are derivate parţiale de ordinul doi continue pe D_f, diferenţiala de ordinul doi a funcţiei f este

$$d^2 f(x, y)(dx, dy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)dy^2,$$

unde $dx^2 = dx\, dx$, $dy^2 = dy\, dy$.

Formal, egalitatea precedentă se scrie în forma:

$$d^2 f(x, y)(dx, dy) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^{(2)} f(x, y).$$

iv) Diferenţiala de ordinul n se defineşte ca diferenţiala diferenţialei de ordinul $(n - 1)$; formal:

$$d^n f(x, y)(dx, dy) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\, dx + \frac{\partial}{\partial y}\, dy\right)^{(n)} f(x, y).$$

De exemplu:

$$d^3 f(x, y)(dx, dy) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x, y)dx^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x, y)dx^2 dy +$$

$$+ 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x, y)dxdy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(x, y)dy^3.$$

3.6.5 Aplicaţii. (**De calcul a diferenţialei unei funcţii într-un punct**)

1°. Să se calculeze $df(1,2)(dx,dy)$, $d^2f(1,2)(dx,dy)$, $df(x,y)(dx,dy)$ pentru funcţia $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y$.

Soluţie. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - \dfrac{4}{x}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y - \dfrac{10}{y}$

$$df(x,y)(dx,dy) = \left(2x + y - \frac{4}{x}\right)dx + \left(x + 2y - \frac{10}{y}\right)dy$$

$$df(1,2)(dx,dy) = (2+1-4)dx + (1+4-5)dy = -dx$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 + \frac{4}{x^2};$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \left(2x + y - \frac{4}{x}\right)'_y; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \left(x + 2y - \frac{10}{y}\right)'_x = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 + \frac{10}{y^2}.$$

Derivatele parţiale mixte de ordinul doi fiind egale, f e de două ori diferenţiabilă şi:

$$(d^2f)(x,y)(dx,dy) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)dy^2 =$$

$$= \left(2 + \frac{4}{x^2}\right)dx^2 + 2dx\,dy + \left(2 + \frac{10}{y^2}\right)dy^2$$

$$d^2f(1,2)(dx,dy) = 6dx^2 + 2dx\,dy + \frac{9}{2}dy^2.$$

2°. Să se calculeze $df(x,y,z)(dx,dy,dz)$ şi $d^2f(x,y,z)(dx,dy,dz)$ pentru funcţia $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2x - y + 3z$.

Soluţie. Pentru funcţiile de 3 variabile, diferenţiala se defineşte analog ca pentru funcţiile de două variabile:

$$df(x,y,z)(dx,dy,dz) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)dy + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)dz;$$

$$d^2f(x,y,z)(dx,dy,dz) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy + \frac{\partial}{\partial z}dz\right)^{(2)} f(x,y,z).$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x + 2; \ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y - 1; \ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -2z + 3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = 2; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = 0; \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) = 0; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = 2; \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) = 0;\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) = 0;\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -2.$$

Având în vedere cele de mai sus, avem:

$$df(x,y,z)(dx,dy,dz) = (2x+2)dx + (2y-1)dy + (3-2z)dz$$

$$\begin{aligned} d^2 f(x,y,z)(dx,dy,dz) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z)dy^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z)dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z)dx\,dy + \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z)dx\,dx + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z)dy\,dz = \\ &= 2dx^2 + 2dy^2 - 2dz^2. \end{aligned}$$

3°. Să se calculeze diferenţialele de ordinul I şi II ale funcţiei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \ln \frac{y}{x}$ unde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{y}{x} > 0\right\}$.

Soluţie. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\dfrac{1}{x};\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{1}{y};$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \dfrac{1}{x^2};$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0;\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 0;$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\dfrac{1}{y^2}.$

Prin urmare:

$$df(x,y)(dx,dy) = -\frac{1}{x}\,dx + \frac{1}{y}\,dy;$$

$$d^2 f(x,y)(dx,dy) = \frac{1}{x^2}\,dx^2 - \frac{1}{y^2}\,dy^2.$$

3.7 Formula lui Taylor pentru funcţii reale de două variabile reale

3.7.1 Definiţie. O mulţime $D \subseteq \mathbb{R}^2$ deschisă şi conexă se numeşte domeniu.

3.7.2 Teoremă. (**Taylor**) *Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un domeniu iar $f : D_f \to \mathbb{R}$. Dacă f este continuă împreună cu primele ei n derivate parţiale şi există derivatele parţiale de ordin $(n+1)$, atunci, $(\forall)\ (x,y) \in D$, $(\forall)\ (x_0,y_0) \in D$ are loc:*

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)\right\} +$$

$$+\frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right\}+\cdots+\frac{1}{n!}\left\{\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x_0,y_0)(x-x_0)^n+\right.$$

$$+\binom{n}{1}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0)^{n-1}(y-y_0)+\dots$$

$$\left.+\binom{n}{n-1}\frac{\partial^n f}{\partial x\partial y^{n-1}}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0)^{n-1}+\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x_0,y_0)(y-y_0)^n\right\}+$$

$$+R_n(x,y)$$

unde:

$$R_n(x,y)=\frac{1}{(n+1)!}\left\{\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}f(\xi,\eta)(x-x_0)^{n+1}+\right.$$
$$+\binom{n+1}{1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^n\partial y}f(\xi,\eta)(x-x_0)(y-y_0)+$$
$$\left.+\binom{n+1}{n}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x\partial y^n}f(\xi,\eta)(x-x_0)(y-y_0)^n+\frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}}f(\xi,\eta)(y-y_0)^{n+1}\right\}$$

$\xi=x_0+\theta_1(x-x_0),\ 0<\theta_1<1.$
$\eta=y_0+\theta_2(y-y_0),\ 0<\theta_2<1.$

3.7.3 Observaţii. (i) Formula precedentă se numeşte formula lui Taylor pentru funcţii de două variabile.

(ii) Dacă $x_0=0$, $y_0=0$, formula lui Taylor devine formula Mac Laurin.

(iii) Dacă $n=0$, se obţine formula creşterilor finite (Lagrange) pentru funcţii de două variabile:

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(\xi,\eta)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(\xi,\eta),$$

unde: $\xi=x_0+\theta_1(x-x_0)$, $\eta=y_0+\theta_2(y-y_0)$, $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$.

3.7.4 Aplicaţii. (**La formula lui Taylor**)

1°. Să se scrie formula lui Taylor de ordin 2 pentru funcţia $f(x,y)=y^x$ în vecinătatea punctului $(1,1)$.

Soluţie. După teorema 3.7.2 avem:

$$f(x,y) = f(1,1) + \frac{1}{1!}\left\{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1)\right\} +$$
$$+\frac{1}{2!}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1)(x-1)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1)(x-1)(y-1) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1)(y-1)^2\right\} +$$
$$+ R_2(x,y).$$

Calculăm acum elementele ce intervin în relaţia precedentă.

$$\begin{aligned}
f(1,1) &= 1\\
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= y^x \ln y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 1.\ \ln 1 = 0\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= x \cdot y^{x-1} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 1\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= y^x (\ln y)^2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 0\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= y^x (\ln y)^2 + y^{x-1} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 1\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= x(x-1)y^{x-2} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 0.
\end{aligned}$$

Deci

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= 1 + \frac{1}{1!}(y-1) + \frac{1}{2!}2(x-1)(y-1) + R_2(x,y) =\\
&= y + (x-1)(y-1) + R_2(x,y).
\end{aligned}$$

Restul formulei are exprimarea:

$$R_2(x,y) = \frac{1}{3!}\left\{\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\xi,\eta)(x-1)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\xi,\eta)(x-1)^2(y-1) + \right.$$
$$\left. + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\xi,\eta)(x-1)(y-1)^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\xi,\eta)(y-1)^3\right\}$$

unde $\xi = 1 + \theta_1(x-1)$, $\eta = 1 + \theta_2(y-1)$, $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$.

2°. Să se scrie formula Mac Laurin de ordinul doi pentru funcţia $f(x,y,z) = \cos(x+y+z)$.

Soluţie. Pentru funcţii de trei variabile, formula lui Mac Laurin are formă asemănătoare celei pentru funcţii de două variabile. În cazul nostru:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) = f(0,0,0) &+ \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)y + \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)z\right] + \\ &+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0)x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,0)y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0)z^2 + \right. \\ &\left. + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0,0)xy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0,0,0)xz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0,0,0)yz\right] + \\ &+ R_2(x,y,z), \end{aligned}$$

expresia restului conţinând derivatele parţiale de ordinul trei ale funcţiei într-un punct (ξ,η,τ), $\xi = \theta_1 x$, $\eta = \theta_2 y$, $\tau = \theta_3 z$, $0 < \theta_1 < 1$, $0 < \theta_2 < 1$, $0 < \theta_3 < 1$.

$$\begin{aligned} & f(0,0,0) = \cos 0 = 1; \\ & \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -\sin(x+y+z);\ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0) = 0 \text{ şi analog} \\ & \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0) = \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) = 0; \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(x,y,z) = -\cos(x+y+z);\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y}(0,0,0) = -1,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial z}(0,0,0) = -1; \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = -\cos(x+y+z);\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0,0) = -1;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2 \partial z}(0,0,0) = -1; \\ & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = -\cos(x+y+z);\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0,0,0) = -1. \end{aligned}$$

Prin urmare:

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= 1 - \frac{1}{2!}(x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz) + R_2(x,y,z) = \\ &= 1 - \frac{1}{2!}(x+y+z)^2 + R_2(x,y,z). \end{aligned}$$

3.8 Extremele funcţiilor reale de două variabile reale

3.8.1 Definiţie. Fie $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D_f$ şi $f : D_f \to \mathbb{R}$. Punctul (x_0, y_0) se numeşte:

(i) punct de maxim local al lui f, dacă există o vecinătate V a lui (x_0, y_0) astfel ca $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$, $(\forall)$ $(x, y) \in V \cap D_f$;

(ii) punct de maxim local al lui f, dacă există o vecinătate V a lui (x_0, y_0) astfel ca $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$, $(\forall)$ $(x, y) \in V \cap D_f$.

Un punct de minim local sau maxim local se numeşte punct de extrem local.

În cele ce urmează se vor prezenta caracterizări ale punctelor de extrem local cu ajutorul derivatelor parţiale.

3.8.2 Teoremă. *Dacă $(x_0, y_0) \in Int\, D_f$ este un punct de extrem local pentru $f : D_f \to \mathbb{R}$ iar f are derivate parţiale de ordinul I în (x_0, y_0), atunci:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

3.8.3 Observaţii. (i) Un punct în care se anulează derivatele parţiale de ordinul I se numeşte punct staţionar al funcţiei f; deci orice punct de extrem local al lui f este punct staţionar al lui f.

(ii) Punctele staţionare ale funcţiei $f : D_f \to \mathbb{R}$ au ca şi coordonate soluţiile sistemului: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0. \end{cases}$

3.8.4 Teoremă. *Presupunem că $f : D_f \to \mathbb{R}$ are derivate parţiale de ordinul doi continue pe $Int\, D$ iar $(x_0, y_0) \in Int\, D$ e un punct staţionar al lui f. Dacă:*

(i) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ *şi* $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$, *atunci* (x_0, y_0) *e un punct de minim local al lui* f.

(ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ *şi* $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$, *atunci* (x_0, y_0) *e un punct de maxim local al lui* f.

(iii) $\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} < 0$, *atunci* (x_0, y_0) *nu e un punct de extrem;* (x_0, y_0) *se numeşte punct şa al lui* f.

3.8.5 Aplicaţii. (**De determinare a punctelor de extrem**)

1°. Aflaţi punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Soluţie. Aflăm punctele staţionare ale lui f, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Deci $(0, 0)$ e punct de minim (unic) al lui f; $f_{\min} = f(0, 0) = 0$.

2°. Aflaţi extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $f(x, y) = x^2 - y^2$.

Soluţie. Aflăm punctele staţionare.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 > 0.$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Prin urmare, f nu are puncte de extrem; punctul $(0, 0)$ e un punct şa al funcţiei f.

3°. Aflaţi extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Soluţie. Aflăm punctele staţionare, rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy = 2. \end{cases}$$

Obţinem punctele staţionare $M_1(2, 1)$, $M_2(1, 2)$, $M_3(-2, -1)$, $M_4(-1, -2)$. Aplicând teorema 3.8.4 se constată că M_1 e punct de minim local, M_2 e punct şa, M_3 e maxim local iar M_4 e punct şa.

4°. Găsiţi extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 4x^2 - 2xy + y^2 + 4x - y - 5$.

Soluţie. $M\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ e minim local. Este unicul punct de extrem.

5°. Găsiţi extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^3 + y^3 + 3y^2 - 3y - 3x - 3$.

Soluţie. Punctele staţionare sunt $M_1(1, 1)$ şi $M_2(-1, -3)$. Se constată că M_1 e un punct de minim local iar M_2 e maxim local.

6°. Găsiţi extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy^2 e^{x-y}$.

Soluţie. Punctele staţionare sunt $M_a(a, 0)$ $(a \in \mathbb{R})$ şi $P(-1, 2)$. Se constată că P e un punct de minim local.

7°. Găsiţi punctele de extrem ale funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1+x+y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$.

Soluţie. $M(1, 1)$ e punct de maxim local.

3.9 Extreme condiţionate (legate) ale funcţiilor reale de două variabile reale

3.9.1 Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ deschisă, $f, g : D \to \mathbb{R}$, $E = \left\{(x, y) \in D : g(x, y) = 0\right\}$. Punctul $(x_0, y_0) \in E$ este un punct de maxim condiţionat (legat) al funcţiei f dacă există o vecinătate $V \subset E$ a lui (x_0, y_0) astfel ca $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ pentru orice $(x, y) \in V$. Analog se defineşte punctul de minim legat.

3.9.2 Observaţii. (i) Condiţia $g(x, y) = 0$ se numeşte legătură.

(ii) În cazul în care din condiţia de legătură poate fi explicitată una din variabile în funcţie de cealaltă, problema determinării extremelor funcţiei de două variabile se reduce la determinarea extremelor unei funcţii de o singură variabilă. Această metodă de determinare a extremelor condiţionate se numeşte metoda directă.

3.9.3 Exemplu. (**De determinare a extremelor condiţionate prin metoda directă**)

Să se determine extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$ ştiind că $x + y = 12$.

Soluţie. Din condiţia de legătură $x + y = 12 \Rightarrow y = 12 - x$ şi atunci $f(x, y) = f(x, 12 - x) = -4x^2 + 40x + 768$. Fără nici o dificultate se obţine că f are un unic punct de maxim, de coordonate $x_0 = 5$, $y_0 = 7$.
Valoarea maximă a lui f este $f_{\max} = f(5, 7) = 868$.

3.9.4 Observaţie. În cazul în care condiţia de legătură nu permite explicitarea uneia dintre variabile în funcţie de cealaltă, problemele de extrem condiţionat se rezolvă prin metoda multiplicatorilor Lagrange, care constă în parcurgerea etapelor următorului algoritm:

(i) Se construieşte funcţia lui Lagrange

$$G : E \to \mathbb{R}, \quad G(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

(aici λ se numeşte multiplicator Lagrange).

(ii) Se găsesc punctele staţionare ale lui G rezolvând sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

(iii) Se aleg punctele de extrem ale lui G, care sunt punctele de extrem condiţionat ale lui f.

3.9.5 Exemplu. (**De aplicare a metodei multiplicatorilor Lagrange**) Determinaţi extremele funcţiei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y$ ştiind că $x + y = 12$.

Soluţie. Funcţia lui Lagrange este:

$$G(x, y) = 80x - 2x^2 - xy - 3y^2 + 100y + \lambda(x + y - 12).$$

Găsim punctele staţionare ale lui G şi valoarea lui λ rezolvând:

$$\begin{cases} \frac{\partial G}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial y}(x, y) = 0 \\ x + y = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 7 \\ \lambda = -53. \end{cases}$$

Pentru $\lambda = -53$ funcţia lui Lagrange are expresia

$$G(x, y) = 27x - xy - 2x^2 = 3y^2 + 47y + 636.$$

Se constată uşor că

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(5, 7) = -4 < 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(5, 7) & \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(5, 7) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y}(5, 7) & \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}(5, 7) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} = 23 > 0,$$

deci $(5, 7)$ e un punct de maxim pentru G, deci şi pentru f. Valoarea maximă a lui f în acest punct este $f_{\max} = f(5, 7) = 868$.

3.9.6 Aplicaţii. (**La determinarea extremelor cu legături**)

Aflaţi extremele cu legături ale funcţiilor de mai jos:

(i) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 6x^2 + 10y^2 + xy + 30$, $x - y = 34$;

(ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2$, $2x - y = 3$;

(iii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x - 3y$, $4x^2 + y^2 = 10$;

(iv) $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3(x^2+y^2) - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + \frac{55}{12}$, $x + y = -\frac{1}{3}$;

(v) $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos^2 x + \cos^2 y$, $x + y = \frac{\pi}{4}$, $D = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Soluţie. (i) Se pot aplica ambele metode; se obţine punctul de minim $(21,-13)$; $f_{\min} = f(21,-13) = 4093$.

(ii) Se pot aplica ambele metode; $\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ e punct de minim şi $f_{\min} = f\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{5}$.

(iii) Se aplică metoda multiplicatorilor Lagrange; se obţine punctul de minim $\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ şi punctul de maxim $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$.

(iv) Se pot aplica ambele metode; $\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$ şi $\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$ sunt punctele de extrem.

3.10 Funcţii implicite de o variabilă

3.10.1 Definiţie. Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $F : D \to \mathbb{R}$ iar $A, B \subseteq \mathbb{R}$ astfel ca $A \times B \subseteq D$. Se numeşte funcţie implicită definită de ecuaţia $F(x,y) = 0$ o funcţie $f : A \to B$ care verifică ecuaţia $F(x, f(x)) = 0$, $(\forall)\, x \in A$.

3.10.2 Teoremă. *Fie $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $Int\, A \neq \emptyset$, $Int\, B \neq \emptyset$, $x_0 \in Int\, A$, $y_0 \in Int\, B$ iar $F : A \times B \to \mathbb{R}$. Dacă:*

(i) $F(x_0, y_0) = 0$;

(ii) Există o vecinătate U a lui x_0, $U \subseteq A$ şi există o vecinătate V a lui y_0, $V \subseteq B$ astfel că F are derivate parţiale de ordinul întâi continue pe $U \times V$;

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$,

atunci

(a) Există o vecinătate U_0 a lui x_0, $U_0 \subseteq U$ şi există o vecinătate V_0 a lui y_0, $V_0 \subseteq V$ precum şi o funcţie $f : U_0 \to V_0$ cu proprietăţile $f(x_0) = y_0$ şi $F(x, f(x)) = 0$, $(\forall)\, x \in U_0$.

(b) Funcţia f are derivată de ordinul întâi continuă pe U_0, care se exprimă prin relaţia:

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}, \quad (\forall)\, x \in U_0.$$

Dacă F are derivate parţiale de ordinul k continue pe $U \times V$, atunci f are derivată de ordinul k continuă pe U_0.

3.10.3 Aplicaţii. (**La teorema de existenţă a funcţiilor implicite de o variabilă**)

1°. Să se arate că ecuaţia $x^3 + y^3 - x + y - 2 = 0$ defineşte o funcţie implicită y pe o vecinătate a punctului $(1,1)$. Să se calculeze $y'(x)$ şi $y''(x)$.

Soluţie. Fie $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = x^3 + y^3 - x + y - 2$. Ecuaţia enunţului se scrie în forma $F(x,y) = 0$. Verificăm ipotezele teoremei 3.10.2.

(i) $F(1,1) = 1 + 1 - 1 + 1 - 2 = 0$.

(ii) $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 1$ - continuă pe orice vecinătate a lui $(1,1)$;

$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 3y^2 + 1$ - continuă pe orice vecinătate a lui $(1,1)$;

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = 3 \cdot 1^2 + 1 = 4 \neq 0$.

Conform teoremei 3.10.2, există o vecinătate $U_0 \in \mathcal{V}(1)$, există o vecinătate $V_0 \in \mathcal{V}(1)$ şi o funcţie $y : U_0 \to V_0$ astfel ca $F(x, y(x)) = 0$, $(\forall)\ x \in U_0$.

În plus:

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))} = -\frac{3x^2-1}{3y^2+1};$$

$$y''(x) = -\frac{6x(3y^2+1) - 6y \cdot y'(3x^2-1)}{(3y^2+1)^2} = -6\frac{x(3y^2+1)^2 + y(3x^2-1)^2}{(3y^2+1)^2}.$$

2°. Să se calculeze $y'(x)$ şi $y''(x)$ pentru funcţia implicită $y = y(x)$ definită de ecuaţia:

$$(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) + 1 = 0.$$

Soluţie. $F(x,y) = (x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) + 1$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 6x(x^2+y^2)^2 - 6x = 6x(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 6y(x^2+y^2) - 6y = 6y(x^2+y^2+1)(x^2+y^2-1)$$

$$\Rightarrow y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)} = -\frac{x}{y}$$

$$y''(x) = -\frac{y - xy'}{y^2} = -\frac{y^2+x}{y^3}.$$

3°. Să se calculeze $y'(x)$ şi $y''(x)$ pentru funcţia implicită definită de ecuaţia:

$$y^4 - 4x^4 - 6xy = 0.$$

Soluţie. $F(x,y) = y^4 - 4x^4 - 6xy$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -16x^3 - 6y; \ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 16y^3 - 6x$$
$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)} = \frac{16x^3 + 6y}{16y^3 - 6x} = \frac{8x^3 + 3y}{8y^3 - 3x}$$
$$y''(x) = \frac{(24x + 3y')(8y^3 - 3x) - (24y \cdot y' - 3)(8x^3 + 3y)}{(8y^3 - 3x)^2}.$$

Se înlocuieşte apoi $y'(x)$ în expresia lui $y''(x)$.

4°. Să se calculeze $y'(x)$ şi $y''(x)$ pentru funcţia implicită definită de ecuaţia:

$$\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg}\frac{y}{x} = 0.$$

Soluţie. $F(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}; \ \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{y - x}{x^2 + y^2};$$
$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)} = \frac{x + y}{x - y}$$
$$y''(x) = \frac{(1 + y')(x - y) - (1 - y')(x + y)}{(x - y)^2} = \frac{2(x^2 + y^2)}{(x - y)^2}.$$

3.11 Funcţii de mai multe variabile definite implicit

3.11.1 Definiţie. Fie $E \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ iar $F : E \to \mathbb{R}$. Presupunem că există $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}$ astfel ca $A \times B \subseteq E$. Se numeşte funcţie implicită definită de ecuaţia $F(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ o funcţie $f : A \to B$ cu proprietatea $F(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) = 0$.

3.11.2 Teoremă. *Fie $F : A \times B \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}$, $Int\, A \neq \emptyset$, $Int\, B \neq \emptyset$ iar $a = (a_1, \ldots, a_n) \in Int\, A$, $b \in Int\, B$.*
Dacă:

(i) $F(a_1, \ldots, a_n, b) \neq 0$;

(ii) Există o vecinătate U a lui a, $U \subseteq A$, şi există o vecinătate V a lui b, $V \subseteq B$, astfel încât F are derivate parţiale de ordinul întâi continue pe $U \times V$;

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(a_1, a_2, \ldots, a_n, b) \neq 0$,

atunci:

(a) Există o vecinătate U_0 a lui a, o vecinătate V_0 a lui b şi o funcţie $y : U_0 \to V_0$ astfel ca:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_4, y(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = 0, \quad (\forall)\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in U_0.$$

(b) Funcţia y are derivate parţiale de ordinul întâi continue pe U_0, exprimate prin egalităţile:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n, y(x_1, \ldots, x_4))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_1, \ldots, x_n, y(x_1, \ldots, x_n))}.$$

Dacă F are derivate parţiale de ordinul k continue pe $U \times V$, atunci y are derivate parţiale de ordin k continue pe U_0.

Teorema 3.11.2 este teorema de existenţă a funcţiilor implicite de mai multe variabile.

3.11.3 Aplicaţii. (**Funcţii implicite de mai multe variabile**)

$1°$. Arătaţi că ecuaţia $x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0$ defineşte o funcţie implicită $z = z(x, y)$ într-o vecinătate a punctului $(-1, 0, 1)$. Calculaţi $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

Soluţie. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - xy$.

$F(-1, 0, 1) = 1 + 0 - 1 - 0 = 0$.

$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = 2x - y$; $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = 2y - x$; $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -2z$.

În baza teoremei 3.11.2 obţinem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = \frac{y - 2x}{2z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = \frac{2y - x}{2z};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{-4z^2 + (2x - y)^2}{4z^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{2z^2 + (2x - y)(2y - x)}{4z^3};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{4z^2 - (2y - x)^2}{4z^3}.$$

2°. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I şi II pentru funcţia implicită $z = z(x, y)$ definită de ecuaţia:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z - 8 = 0.$$

Soluţie. $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 4z - 8$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{x}{z-2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z)} = -\frac{2y}{z-2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{(z-2)^2 + x^2}{(z-2)^3};\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2xy}{(z-2)^3};\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2\frac{(z-2)^2 + 2y^2}{(z-2)^3}$$

3°. Fie funcţia $z = z(x, y)$ definită de ecuaţia

$$x^2 + y^2 + z^2 - f(x + y + z) = 0,$$

unde $f = f(u)$ e o funcţie derivabilă. Arătaţi că:

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y.$$

Soluţie. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - f(x + y + z)$. Notăm $x + y + z = u$ şi atunci $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - f(u)$. Conform teoremei 3.11.2 avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2x - f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}}{2z - f'(u)\frac{\partial u}{\partial z}} = -\frac{2x - f'(u)}{2z - f'(u)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{2y - f'(u)\frac{\partial u}{\partial x}}{\frac{\partial u}{\partial z}} = -\frac{2y - f'(u)}{2z - f'(u)}.$$

Atunci:

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-(2x - f'(u))(y - z) - (2y - f'(u))(z - x)}{2z - f'(u)} =$$

$$= \frac{2z(x - y) - f'(u)(x - y)}{2z - f'(u)} = x - y.$$

4°. Funcţia $z = z(x, y)$ e definită de ecuaţia:

$$f\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$$

unde $f = f(u, v)$ are derivate parţiale de ordinul întâi continue. Arătaţi că:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z.$$

Soluţie. Fie $F(x, y, z) = f(u, v)$ unde $u = \frac{x}{z}$, $v = \frac{y}{z}$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{z}\cdot\frac{\partial f}{\partial v};$$
$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{x}{z^2} - \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{y}{z^2}.$$

Atunci:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{z\frac{\partial f}{\partial u}}{x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}};$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{z\frac{\partial f}{\partial v}}{x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}}.$$

Prin urmare:

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x\frac{\partial f}{\partial u} + y\frac{\partial f}{\partial v}}\left(zx\frac{\partial f}{\partial u} + zy\frac{\partial f}{\partial v}\right) = z.$$

5°. Calculaţi $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ pentru funcţia implicită $z = z(z, y)$ definită de ecuaţia:

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

Soluţie. $F(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - yz; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 6y^2 - 3xz - 2; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 3z^2 - 3xy.$$

După teorema 3.11.2 avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{3(x^2 - 4z)}{3(z^2 - xY)} = -\frac{x^2 - yz}{z^2 - xy}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(z^2 - xy)}.$$

6°. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I şi II pentru funcţia implicită $z = z(x, y)$ definită de ecuaţia:

$$4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 1 = 0.$$

Soluţie. $F(x, y, z) = 4x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 1$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 8x; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 18y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 32z.$$

După teorema 3.11.2 avem:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{x}{4z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{9y}{16z}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{z}\right) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{z - x\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} = -\frac{4z^2 + x^2}{16z^3}.$$

Analog:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = -\frac{9xy}{64z^3}; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{9}{256} \cdot \frac{16z^2 + 9y^2}{z^3}.$$

7°. Să se calculeze derivatele parţiale de ordinul I şi II relativ la $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$ pentru funcţia $z = z(x, y)$ definită de ecuaţia:

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0.$$

Soluţie. $F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8$.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 4x - 8z; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 4y; \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - 8x - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{4x - 8z}{8x - 2z + 1} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}(2, 0, 1) = \frac{8 - 8}{16 - 2 + 1} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{4y}{8x - 2z + 1} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}(2, 0, 1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{4x-8z}{8x-2z+1}\right) = \frac{\left(4-8\frac{\partial z}{\partial x}\right)(8x-2z+1) - \left(8-2\frac{\partial z}{\partial x}\right)(4x - 8z)}{(8x - z + 1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2, 0, 1) = \frac{15}{64}.$$

Analog se calculează $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}(2, 0, 1)$ şi $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2, 0, 1)$.

8°. Funcţia $z = z(x, y)$ e definită de ecuaţia $f(x - 2z, y - 3z) = 0$ unde $f = f(u, v)$ e o funcţie cu derivate parţiale de ordinul I continue. Arătaţi că:

$$2\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

Soluţie. $f(x,y,z) = f(u,v)$, $u = x - 2z$, $v = y - 3z$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial v}\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} = -2\frac{\partial f}{\partial u} - 3\frac{\partial f}{\partial v}\,.
\end{aligned}$$

Atunci:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{2\frac{\partial f}{\partial u} + 3\frac{\partial f}{\partial v}}\,; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{2\frac{\partial f}{\partial u} + 3\frac{\partial f}{\partial v}}\,.$$

Prin urmare:

$$2\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2\frac{\partial f}{\partial u} + 3\frac{\partial f}{\partial v}}{2\frac{\partial f}{\partial u} + 3\frac{\partial f}{\partial v}} = 1.$$

9°. Funcţia $z = z(x,y)$ e definită de ecuaţia:

$$f\left(x + \frac{z}{y}\,, y + \frac{z}{x}\right) = 0,$$

unde $f = f(u,v)$ are derivate parţiale de ordinul întâi continue. Arătaţi că:

$$z\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

Soluţie. $F(x,y,z) = f(u,v)$, $u = x + \frac{z}{y}\,$, $v = y + \frac{z}{x}\,$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} - \frac{z}{x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\\
\frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{z}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\\
\frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}\,.
\end{aligned}$$

După teorema 3.11.2, avem:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{z}{x^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}}\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = \frac{\frac{z}{y^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}}\,.
\end{aligned}$$

Deci:

$$z\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{z}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{z}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} - y\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}} =$$

$$= \frac{(z-xy)\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + (z-xy)\frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}}{\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial f}{\partial v}} = z - xy.$$

3.12 Schimbări de variabilă în expresii ce conţin derivate

Presupunem că $y = y(x)$ este derivabilă şi notăm $y'(x) = dy$. Facem schimbarea de variabilă $x = \varphi(t)$ cu φ derivabilă şi suntem interesaţi de legătura ce există între $\frac{dy}{dx}$ şi $\frac{dy}{dt}$

$$x = \varphi(t) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\varphi'(t) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Am obţinut deci operatorul de derivare:

$$\frac{d}{dx}(\cdot) = \frac{1}{\varphi'(t)}\cdot\frac{d}{dt}(\cdot).$$

3.12.1 Aplicaţii. (La schimbări de variabile în expresii ce conţin derivate)

1°. Să se transforme ecuaţia:

$$x^2y''(x) + 2xy'(x) + \frac{y(x)}{x^2} = 0$$

făcând schimbarea de variabilă $x = \frac{1}{t}$.

Soluţie. $x = \varphi(t) = \frac{1}{t}$.

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2}\cdot\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -t^2\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Avem deci operatorul de derivare:

$$\frac{d}{dx}(\cdot) = -t^2\frac{d}{dt}(\cdot). \qquad (*)$$

Prin urmare:

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right] = -t^2\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right] = -t^2\frac{d}{dt}\left[-t^2\frac{dy}{dt}\right] =$$

$$= t^2\left(2t\frac{dy}{dt} + t^2\frac{d^2y}{dt^2}\right) = t^3\left(2\frac{dy}{dt} + t\frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

Înlocuind în ecuaţia dată, obţinem:

$$t\left(2\frac{dy}{dt}+t\frac{d^2y}{dt^2}\right)-2t\frac{dy}{dt}+t^2y=0,$$

adică:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0.$$

2°. Să se transforme ecuaţia:

$$(4+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}=0$$

prin schimbarea de variabilă $x=2sht$.

Soluţie. $x=\varphi(t)=e^t-e^{-t}$

$$\begin{aligned}
&\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=\frac{dy}{dx}(e^t+e^{-t})=\frac{dy}{dx}2cht\Rightarrow y'=\frac{1}{2cht}\cdot\frac{dy}{dt}\\
&y''=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2cht}\cdot\frac{dy}{dt}\right]=\frac{1}{2cht}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]=\\
&\quad=\frac{1}{2cht}\cdot\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2cht}\cdot\frac{dy}{dt}\right]=\frac{1}{2cht}\left[\frac{-sht}{2ch^2t}\cdot\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2cht}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}\right]=\\
&\quad=\frac{1}{4ch^2t}\left[-tht\frac{dy}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\right],
\end{aligned}$$

unde $tht=\frac{sht}{cht}$.

Ecuaţia devine:

$$(1+sh^2t)\frac{1}{ch^2t}\left[\frac{d^2y}{dt^2}-tht\frac{dy}{dt}\right]+tht\frac{dy}{dt}=0.$$

Dar $1+sh^2t=ch^2t$ şi ecuaţia se reduce la $\frac{d^2y}{dt^2}=0$.

3°. Să se transforme ecuaţia

$$x^2y''(x)+4xy'(x)+(2-x^2)y(x)=4x$$

prin schimbarea de funcţie $y=\frac{z}{x^2}$.

Soluţie. $y'=\frac{z'}{x^2}-\frac{2z}{x^3}$; $y''=\frac{z''}{x^2}-4\frac{z'}{x^3}+6\frac{z}{x^4}$. Ecuaţia se transformă în:

$$z''-z=4x.$$

4°. Să se transforme ecuaţia

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+x\frac{dy}{dx}-y=0$$

facând schimbarea de variabilă $x = e^t$.

Soluţie. $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} e^t \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt}$. Se calculează apoi celelalte derivate folosind operatorul de derivare:

$$\frac{d}{dx}(\cdot) = e^{-t} \frac{d}{dt}(\cdot). \tag{*}$$

Prin urmare:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{=} e^{-t} \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \\ &= e^{-t} \frac{d}{dt}\left(e^{-t} y'(t)\right) = e^{-t}\left(-e^{-t} y'(t) + e^{-t} y''(t)\right) = \\ &= e^{-2t}\left(-y'(t) + y''(t)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'''(x) &= \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{=} e^{-t} \frac{d}{dt}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \\ &= e^{-t} \frac{d}{dt}(y''(t)) = e^{-t} \frac{d}{dt}\left[e^{-2t}\left(-y'(t) + y''(t)\right)\right] = \\ &= r^{-t}\left[-2e^{-2t}\left(-y'(t) + y''(t)\right) + e^{-2t}\left(y''(t) + y'''(t)\right)\right] = \\ &= e^{-3t}\left[y'''(t) - 3y''(t) + 2y'(t)\right]. \end{aligned}$$

Ecuaţia devine: $y'''(t) - y''(t) + y'(t) + y(t) = 0$.

5°. Să se transforme ecuaţia:

$$(x^2 - 1)y'' + xy' - y = 0$$

prin schimbarea de variabilă $x = cht$.

Soluţie. $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} sht \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{sht} \cdot \frac{dy}{dt}$.
Avem deci operatorul de derivare:

$$\frac{d}{dx}(\cdot) = \frac{1}{sht} \cdot \frac{d}{dt}(\cdot) \tag{*}$$

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{=} \frac{1}{sht} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \\ &= \frac{1}{sht} \cdot \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{sht} y'(t)\right] = \frac{1}{sht}\left[-\frac{cht}{sh^2t} y'(t) + \frac{1}{sht} y''(t)\right] = \\ &= -\frac{cht}{sh^3t} y'(t) + \frac{1}{sh^2t} y''(t). \end{aligned}$$

Ecuaţia devine:

$$y''(t) - y(t) = 0.$$

6°. Să se transforme ecuaţia:

$$(1 + x^2)^2 y'' + 2x(1 + x^2)y' + y = 0$$

prin schimbarea $x = \operatorname{tg} t$.

Soluţie. $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos^2 t} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \cos^2 t \frac{dy}{dt}$.
Avem deci operatorul de derivare:

$$\frac{d}{dx}(\cdot) = \cos^2 t \frac{d}{dt}(\cdot) \qquad (*)$$

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \underset{\substack{\uparrow \\ (*)}}{=} \cos^2 t \frac{d}{dt}\left(y'(x) = \cos^2 t \frac{d}{dt}\left[y'(t)\cos^2 t\right] =\right.$$

$$= \cos^2 t \left[y''(t)\cos^2 t - 2\sin t \cos t y'(t)\right] = \cos^3 t \left[y''(t)\cos t - 2y'(t)\sin t\right].$$

Ecuaţia devine: $y''(t) + y(t) = 0$.

7°. Să se transforme ecuaţia $(1 - x^2)y''(x) - xy'(x) + 3y(x) = 0$ prin schimbarea de variabilă $x = \sin t$.

Soluţie. $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}\cos t \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{dy}{dt}$.
Avem deci operatorul de derivare:

$$\frac{d}{dx}(\cdot) = \frac{1}{\cos t} \cdot \frac{d}{dt}(\cdot). \qquad (*)$$

Utilizând $(*)$, se găseşte:

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\cos^2 t}\left[\frac{dy}{dt}\operatorname{tg} t + \frac{d^2y}{dt^2}\right].$$

Ecuaţia devine:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3y = 0.$$

3.13 Schimbări de variabile în expresii ce conţin derivate parţiale

Aceste schimbări prezintă importanţă la transformarea ecuaţiilor cu derivate parţiale într-o formă mai simplă.

Ca şi în cazul schimbării de variabile în expresii ce conţin derivate (ordinare), se vor stabili expresiile operatorilor de derivare parţială (exprimarea derivatelor parţiale în raport cu "vechile variabile" în funcţie de derivatele parţiale în raport cu "noile variabile").

3.13.1 Aplicaţii. (**Schimbări de variabile în expresii ce conţin derivate parţiale**)

1°. Să se transforme ecuaţia

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$$

dacă $x = u$, $y = uv$.

Soluţie. Avem $z = z(x, y)$, $x(u, v) = u$, $y(u, v) = uv$. Atunci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} + v\frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = \qquad u\frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned}$$

Din sistemul $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} + v\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \\ u\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial v} \end{cases}$ exprimăm $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ în funcţie de $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ (derivatele parţiale în raport cu "vechile" variabile x, y în funcţie de derivatele parţiale în raport cu "noile" variabile u, v). Obţinem $\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}. \end{cases}$

Operatorii de derivare parţială sunt deci daţi de sistemul:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}(\cdot) = \dfrac{1}{u} \cdot \dfrac{\partial}{\partial v}(\cdot) \\ \dfrac{\partial}{\partial x}(\cdot) = \dfrac{\partial}{\partial u}(\cdot) - \dfrac{v}{u} \cdot \dfrac{\partial}{\partial v}(\cdot) \end{cases} \tag{*}$$

Ecuaţia devine:

$$u\left[\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v}\right] + uv\frac{1}{u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - z(u, v) = 0$$

adică

$$u\frac{\partial z}{\partial u} - z(u, v) = 0.$$

2°. Să se transforme ecuaţia:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + 3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

punând $u = 3x + y$, $v = x + y$.

Soluţie. $z = z(x, y) = z(u(x, y), v(x, y))$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = 3\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\,.\end{aligned}$$

Operatorii de derivare parţială sunt deci definiţi prin:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\cdot) = 3\frac{\partial}{\partial u}(\cdot) + \frac{\partial}{\partial v}(\cdot) \tag{*}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\cdot) = \frac{\partial}{\partial u}(\cdot) + \frac{\partial}{\partial v}(\cdot) \tag{**}$$

Cu ajutorul operatorilor $(*)$ şi $(**)$ se vor calcula derivatele parţiale de ordin superior ce intervin în ecuaţie. Avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \underset{\substack{\uparrow\\(*)}}{=} 3\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) =\\ &\underset{\substack{\uparrow\\(*)}}{=} 3\frac{\partial}{\partial u}\left[3\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[3\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right] =\\ &= 9\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 6\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \underset{(*)}{=} 3\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) =\\ &\underset{(**)}{=} 3\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right] =\\ &= 3\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right] \underset{\substack{\uparrow\\(**)}}{=} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \underset{(**)}{=}\\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right] + \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\right] =\\ &= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\,.\end{aligned}$$

Cu aceste transformări, ecuaţia dată se reduce la forma:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v} = 0.$$

3°. Să se transforme ecuaţia $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ prin schimbarea de variabile $x = u\cos v$, $y = u\sin v$.

Soluţie. $z = z(x,y) = z(x(u,v), y(u,v))$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} &= \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cos v + \dfrac{\partial z}{\partial y}\sin v \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} &= \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} = -\dfrac{\partial z}{\partial x}u\sin v + \dfrac{\partial z}{\partial y}u\cos v \end{cases}$$

Aflăm $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ în funcţie de $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ rezolvând sistemul precedent. Obţinem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} &= \dfrac{1}{u}\Big[u\cos v\dfrac{\partial z}{\partial u} - \sin v\dfrac{\partial z}{\partial v}\Big] \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} &= \dfrac{1}{u}\Big[\cos v\dfrac{\partial z}{\partial v} + u\sin v\dfrac{\partial z}{\partial u}\Big]. \end{cases}$$

Înlocuind expresiile precedente în ecuaţia dată, găsim:

$$u\sin v\frac{1}{u}\left[u\cos v\frac{\partial z}{\partial u} - \sin v\frac{\partial z}{\partial v}\right] - u\cos v\frac{1}{u}\left[\cos v\frac{\partial z}{\partial v} + u\sin v\frac{\partial z}{\partial u}\right] = 0,$$

adică: $\dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$.

4°. Să se transforme ecuaţia $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z = 0$ dacă $u = x$, $v = \frac{y}{x}$.

Soluţie. $\begin{cases} u = x \\ v = \frac{y}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = xv = uv \end{cases} \Rightarrow z = z(x,y) = z(x(u,v), y)u,v))$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} &= \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + v\dfrac{\partial z}{\partial y} \\ \dfrac{\partial z}{\partial v} &= \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v} = \qquad u\dfrac{\partial z}{\partial y} \end{cases}$$

Din sistemul precedent obţinem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} &= \dfrac{\partial z}{\partial u} - \dfrac{v}{u}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} &= \qquad \dfrac{1}{u}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial v}. \end{cases}$$

Cu aceste transformări ecuaţia devine:

$$u\left(\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right) + uv\frac{\partial z}{\partial v} - z = 0,$$

adică: $u\dfrac{\partial z}{\partial u} - z = 0$.

5°. Să se transforme ecuaţia cu derivate parţiale

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

dacă $\frac{x}{y} = u$, $x \cdot y = v$.

Soluţie.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + x\frac{\partial z}{\partial v}$$

Avem aşadar operatorii de derivare parţială:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\cdot) = \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(\cdot) + y\frac{\partial}{\partial v}(\cdot) \tag{*}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\cdot) = -\frac{x}{y^2}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(\cdot) + x\frac{\partial}{\partial v}(\cdot) \tag{**}$$

cu ajutorul cărora vom exprima derivatele parţiale de ordinul doi ce intervin în ecuaţie.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \underset{\substack{\uparrow\\(*)}}{=} \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + y\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \\
&= \frac{1}{y}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}\right] + y\frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} + y\frac{\partial z}{\partial v}\right] = \\
&= \frac{1}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

Analog:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^2}{y^4}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{x^2}{y^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} + x^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.$$

Înlocuind în ecuaţie, aceasta devine:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v} = 0.$$