

Breviar pentru Cursurile de Logică Matematică și Computațională despre Logica Propozițională Clasică

Claudia MUREȘAN

UNIVERSITATEA DIN BUCUREȘTI, FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

c.muresan@yahoo.com, cmuresan@fmi.unibuc.ro

2019–2020, Semestrul I

1 Sintaxa Sistemului Formal al Logicii Propoziționale Clasice

Alfabetul sistemului formal al calculului propozițional clasic:

Definițiile și notațiile 1.1. Următoarele **simboluri** formează **alfabetul** sistemului formal al calculului propozițional clasic:

- (i) *variabilele propoziționale*, notate, de obicei, u, v, w etc., uneori cu indici, care formează o mulțime infinită, și de obicei considerată numărabilă; vom nota cu V mulțimea variabilelor propoziționale;
- (ii) *conectorii logici primitivi*:
 - \neg : *negația* (se citește: “non” sau “not”);
 - \rightarrow : *implicația* (se citește: “implică”);
- (iii) parantezele: $(,), [, \text{ și }]$.

Simbolurile enumerate mai sus se numesc *simboluri primitive* și sunt presupuse a fi două câte două distincte (de exemplu $\neg \notin V$ etc.).

La acestea se adaugă *conectorii logici derivați*, care se definesc pe baza conectorilor logici primitivi, și care vor fi prezentați mai jos.

Să notăm cu A *alfabetul sistemului formal al calculului propozițional clasic*, adică mulțimea simbolurilor primitive: $A = V \cup \{\neg, \rightarrow, (,), [,]\}$.

Definiția 1.1. Șirurile (alăturările) finite și nevide de simboluri primitive se numesc *cuvinte*.

Definiția 1.2. Un *enunț* este un cuvânt φ care satisface una dintre condițiile următoare:

- (E_1) φ este o variabilă propozițională;
- (E_2) există un enunț ψ a. î. $\varphi = \neg \psi$;
- (E_3) există două enunțuri ψ și χ a. î. $\varphi = \psi \rightarrow \chi$.

Definiția 1.3. Variabilele propoziționale se numesc *enunțuri atomice* sau *enunțuri elementare*.

Enunțurile care nu sunt variabile propoziționale, adică se află în cazul (E_2) sau (E_3) din definiția anterioară, se numesc *enunțuri compuse*.

Notația 1.1. Vom nota cu E mulțimea tuturor enunțurilor.

A se vedea discuția din curs despre **arborii binari asociați enunțurilor și parantezările corecte**.

Observația 1.1. Observăm că, în scrierea enunțurilor, dată de definiția de mai sus, conectorii logici primitivi apar scriși la fel ca niște operatori:

- \neg apare scris la fel ca un operator unar;
- \rightarrow apare scris la fel ca un operator binar.

Pentru a evita încărcarea scrierii cu prea multe paranteze, se face următoarea **convenție**: se acordă prioritate mai mare conectorului logic “unar” \neg și prioritate mai mică celui “binar”, \rightarrow .

Remarca 1.1. Conform definiției enunțurilor, **toate enunțurile** se obțin prin aplicarea regulilor (E_1) , (E_2) și (E_3) , așadar E este cea mai mică mulțime de cuvinte peste A care include pe V și este închisă la \neg și \rightarrow , i. e. cea mai mică (în sensul incluziunii, adică în posetul $(\mathcal{P}(A^+), \subseteq)$) submulțime M a lui A^+ cu proprietățile:

- (i) $V \subseteq M$,
- (ii) pentru orice $\varphi \in M$, rezultă că $\neg \varphi \in M$,
- (iii) pentru orice $\varphi, \psi \in M$, rezultă că $\varphi \rightarrow \psi \in M$.

Remarca 1.2 (E e închiderea lui V în familia Moore a submulțimilor lui A^+ închise la \neg și \rightarrow). Fie $\mathcal{M} = \{M \subseteq A^+ \mid (\forall \psi, \chi \in M) (\neg \psi, \psi \rightarrow \chi \in M)\}$. Atunci \mathcal{M} este sistem de închidere pe $\mathcal{P}(A^+)$.

Dacă notăm cu $C_{\mathcal{M}} : \mathcal{P}(A^+) \rightarrow \mathcal{P}(A^+)$ operatorul de închidere asociat lui \mathcal{M} , atunci, conform remarcii anterioare, $E = C_{\mathcal{M}}(V)$.

Notația 1.2 (abrevieri pentru enunțuri compuse). Pentru orice enunțuri $\varphi, \psi \in E$, introducem notațiile (abrevierile):

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi &:= \neg \varphi \rightarrow \psi && (\text{disjuncția dintre } \varphi \text{ și } \psi; \text{ se citește: } \varphi \text{ “sau” } \psi) \\ \varphi \wedge \psi &:= \neg(\varphi \rightarrow \neg \psi) && (\text{conjuncția dintre } \varphi \text{ și } \psi; \text{ se citește: } \varphi \text{ “și” } \psi) \\ \varphi \leftrightarrow \psi &:= (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi) && (\text{echivalența logică dintre } \varphi \text{ și } \psi; \text{ se citește: } \varphi \text{ “echivalent cu” } \psi) \end{aligned}$$

Definiția 1.4. Simbolurile \vee , \wedge și \leftrightarrow se numesc *conectorii logici derivați*.

Observația 1.2. Conectorii logici derivați se scriu ca niște operatori binari, și le vom acorda aceeași prioritate cu aceea a conectorului logic primitiv “binar” \rightarrow .

Definiția 1.5. O *axiomă* a sistemului formal al logicii propoziționale clasice este un enunț de oricare dintre următoarele trei forme, unde $\varphi, \psi, \chi \in E$ sunt enunțuri arbitrare:

$$\begin{aligned} (A_1) \quad & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \\ (A_2) \quad & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)) \\ (A_3) \quad & (\neg \varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \end{aligned}$$

Fiecare dintre scrierile (A_1) , (A_2) și (A_3) este o *schemă de axiome*, adică o regulă pentru generarea unui număr infinit de axiome.

Axiomele logicii propoziționale clasice se obțin prin înlocuirea, în aceste scheme de axiome, a enunțurilor generice (arbitrare) φ, ψ, χ cu enunțuri precizate (date), adică axiomele sunt enunțuri de una dintre formele (A_1) , (A_2) și (A_3) , cu φ, ψ și χ enunțuri date.

Prin extensie, vom numi uneori schemele de axiome (A_1) , (A_2) și (A_3) , simplu, **axiome**.

Notația 1.3. Notăm cu Ax mulțimea axiomelor:

$$Ax = \left\{ \begin{aligned} & \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi), \\ & (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)), \\ & (\neg \varphi \rightarrow \neg \psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \varphi) \end{aligned} \mid \varphi, \psi, \chi \in E \right\}.$$

Notația 1.4 (scrierea regulilor de deducție). Notația uzuală pentru reguli de deducție ale unui sistem logic, pe care o vom folosi în cele ce urmează, este aceasta: $\frac{\text{condiția } C_1}{\text{consecința } C_2}$, cu semnificația că: dacă este satisfăcută condiția C_1 , atunci este satisfăcută consecința C_2 .

Definiția 1.6 (teoremele (formale), i. e. adevărurile sintactice). *Teoremele formale* (numite și, simplu, *teoreme*, sau *adevăruri sintactice*) ale logicii propoziționale clasice sunt enunțurile definite prin următoarele trei reguli:

- (T_1) orice axiomă este o teoremă formală;
- (T_2) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunțuri a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ sunt teoreme formale, atunci φ este o teoremă formală;
- (T_3) orice teoremă formală a logicii propoziționale clasice poate fi obținută prin aplicarea regulilor (T_1) și (T_2) de un număr finit de ori.

Notațiile 1.1. Mulțimea tuturor teoremelor formale va fi notată cu T .

Faptul că un enunț φ este teoremă formală se notează: $\vdash \varphi$.

Definiția 1.7 (regula de deducție modus ponens (MP)). Regula (T_2) se numește *regula de deducție modus ponens* (o vom abrevia “MP”) și, cu notația stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică: $\frac{\vdash \psi, \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\vdash \varphi}$,

sau, echivalent: $\frac{\psi, \psi \rightarrow \varphi}{\varphi}$.

Remarca 1.3. Regula (T_3) , chiar fără precizarea finitudinii, spune că T este cea mai mică mulțime închisă la regulile (T_1) și (T_2) , i. e. cea mai mică mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor și e închisă la regula (MP), i. e. cea mai mică submulțime M a lui E cu proprietățile:

- (i) $M \supseteq Ax$,
- (ii) pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$,

(cea mai mică în sensul incluziunii), pentru că regula (T_3) spune că nu se află în T niciun element care să nu se obțină prin aplicarea regulilor (T_1) și (T_2) , adică niciun element care să nu fie nici axiomă, nici enunț obținut prin aplicarea succesivă a regulii **MP**, pornind de la axiome.

Definiția 1.8. Fie φ un enunț. O *demonstrație formală pentru φ* este un șir finit și nevid de enunțuri $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, a. î. $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, este satisfăcută una dintre următoarele condiții:

- (i) φ_i este o axiomă;
- (ii) există $k, j \in \overline{1, i-1}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$.

n se numește *lungimea demonstrației formale* $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Remarca 1.4. În scrierea definiției de mai sus, am folosit faptul că $\overline{1, 0} = \emptyset$ (pentru o scriere uniformă a definiției, fără a trata separat cazul $i = 1$). Având în vedere acest lucru, este clar că, într-o demonstrație formală $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, φ_1 este o axiomă.

Remarca 1.5. Este imediat că, dacă $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ este o demonstrație formală, atunci, pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_i$ este o demonstrație formală.

Remarca 1.6 (teoremele sunt enunțurile care admit demonstrații formale). Este ușor de observat că regulile (1) și (2) din definiția unei demonstrații formale exprimă exact regulile (T_1) și (T_2) , respectiv, ceea ce arată imediat faptul că un enunț φ este o teoremă formală dacă există o demonstrație formală pentru φ .

Remarca 1.7. Desigur, o teoremă formală poate avea mai multe demonstrații formale și poate avea demonstrații formale de lungimi diferite.

Definiția 1.9. Fie $\Sigma \subseteq E$ o mulțime de enunțuri. Enunțurile care *se deduc sintactic din ipotezele Σ* , numite și *consecințele sintactice ale lui Σ* , se definesc astfel:

- (CS_1) orice axiomă se deduce sintactic din ipotezele Σ ;
- (CS_0) orice enunț $\varphi \in \Sigma$ se deduce sintactic din ipotezele Σ ;
- (CS_2) dacă $\varphi, \psi \in E$ sunt două enunțuri a. î. ψ și $\psi \rightarrow \varphi$ se deduc sintactic din ipotezele Σ , atunci φ se deduce sintactic din ipotezele Σ ;
- (CS_3) orice enunț care se deduce sintactic din ipotezele Σ se poate obține prin aplicarea regulilor (CS_1) , (CS_0) și (CS_2) de un număr finit de ori.

Notăția 1.5. Notăm faptul că un enunț φ se deduce sintactic din ipotezele $\Sigma \subseteq E$ prin: $\Sigma \vdash \varphi$.

Definiția 1.10 (și regula de deducție din ipoteze este tot *modus ponens*). Regula (CS_2) se numește tot *regula de deducție *modus ponens** (o vom abrevia tot “MP”) și, cu notația stabilită mai sus, poate fi scrisă astfel în formă simbolică:
$$\frac{\Sigma \vdash \psi, \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi}{\Sigma \vdash \varphi}.$$

Remarca 1.8. Regula (CS_3) , chiar fără precizarea finitudinii numărului de aplicări ale acestor reguli, spune că mulțimea consecințelor sintactice ale unei mulțimi Σ de enunțuri este cea mai mică mulțime închisă la regulile (CS_1) , (CS_0) și (CS_2) , adică cea mai mică mulțime de enunțuri care include mulțimea axiomelor și mulțimea Σ a ipotezelor și e închisă la regula (MP), i. e. cea mai mică submulțime M a lui E cu proprietățile:

- (i) $M \supseteq Ax$,
- (ii) $M \supseteq \Sigma$,

(iii) pentru orice $\varphi, \psi \in E$, dacă $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in M$, atunci $\varphi \in M$,

(cea mai mică în sensul incluziunii), pentru că (CS_3) spune că mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ nu conține alte elemente decât cele obținute din regulile (CS_1) , (CS_0) și (CS_2) .

Remarca 1.9 (deducția pornind de la axiome și de la ipotezele din Σ). Definiția consecințelor sintactice ale lui Σ este exact definiția teoremelor formale în care mulțimea Ax se înlocuiește cu $Ax \cup \Sigma$.

Definiția 1.11. Fie φ un enunț și Σ o mulțime de enunțuri. O Σ -demonstrație formală pentru φ este un șir finit și nevid de enunțuri $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, a. î. $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n = \varphi$ și, pentru fiecare $i \in \overline{1, n}$, este satisfăcută una dintre următoarele condiții:

- (i) φ_i este o axiomă;
- (ii) $\varphi_i \in \Sigma$;
- (iii) există $k, j \in \overline{1, i-1}$ a. î. $\varphi_k = \varphi_j \rightarrow \varphi_i$.

n se numește *lungimea* Σ -demonstrației formale $\varphi_1, \dots, \varphi_n$.

Remarca 1.10. Amintindu-ne că $\overline{1, 0} = \emptyset$, este clar că, într-o Σ -demonstrație formală $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, φ_1 este o axiomă sau un element al lui Σ .

Remarca 1.11. Este imediat că, dacă Σ este o mulțime de enunțuri și $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ este o Σ -demonstrație formală, atunci, pentru orice $i \in \overline{1, n}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_i$ este o Σ -demonstrație formală.

Remarca 1.12 (enunțurile deductibile din ipoteze sunt exact enunțurile care admit demonstrații formale din acele ipoteze). Este ușor de observat că regulile (1), (2) și (3) din definiția unei Σ -demonstrații formale exprimă exact regulile (CS_1) , (CS_0) și (CS_2) , respectiv, ceea ce arată imediat faptul că un enunț φ este o consecință sintactică a lui Σ dacă există o Σ -demonstrație formală pentru φ .

Remarca 1.13. Desigur, o consecință sintactică a lui Σ poate avea mai multe Σ -demonstrații formale și poate avea Σ -demonstrații formale de lungimi diferite.

A se vedea, în curs, **inducția după:**

- enunțuri,
- teoreme formale,
- consecințe sintactice ale unei mulțimi de ipoteze.

Remarca 1.14. Este imediat, direct din definițiile date, că, pentru orice enunț φ și orice mulțime de enunțuri Σ :

- (i) $\emptyset \vdash \varphi$ dacă $\vdash \varphi$;
- (ii) dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$;
- (iii) dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$.

- Am încheiat descrierea sintactică a sistemului formal al logicii propoziționale clasice.

Notația 1.6. Vom nota acest sistem formal cu \mathcal{L} .

Propoziția 1.1 (o numim ad-hoc Propoziția \star). Fie $\Sigma \subseteq E$, $\Delta \subseteq E$ și $\varphi \in E$. Atunci:

- (i) dacă $\Sigma \subseteq \Delta$ și $\Sigma \vdash \varphi$, atunci $\Delta \vdash \varphi$;
- (ii) dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci există $\Gamma \subseteq \Sigma$ a. î. Γ este o mulțime finită și $\Gamma \vdash \varphi$;
- (iii) dacă $\Sigma \vdash \psi$ pentru orice $\psi \in \Delta$ și $\Delta \vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$.

Remarca 1.15. Conform punctului (i), în (ii) din propoziția anterioară avem chiar echivalență:
 $\Sigma \vdash \varphi$ dacă și numai dacă $(\exists \Gamma \subseteq \Sigma) (|\Gamma| < \aleph_0, \Gamma \vdash \varphi)$.

Propoziția 1.2 (principiul identității și principiul tertului exclus). Pentru orice $\varphi \in E$, următoarele enunțuri sunt teoreme formale:

- (i) **principiul identității (abreviat PI):** $\vdash \varphi \rightarrow \varphi$;
- (ii) **principiul tertului exclus (abreviat PTE):** $\vdash \varphi \vee \neg \varphi$.

Teorema 1.1 (Teorema deducției (abreviată TD)). Pentru orice $\Sigma \subseteq E$ și orice $\varphi, \psi \in E$, are loc următoarea echivalență:

$$\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \text{dacă și numai dacă} \quad \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in E$, arbitrare, fixate.

Notația 1.7 (pentru următoarele reguli de deducție). Regula de deducție $\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n}{\varphi}$ va semnifica faptul că φ se deduce printr-o demonstrație formală din ipotezele $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, adică: $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$.

Remarca 1.16 (cu notația de tip $\frac{\text{ipoteze}}{\text{concluzie}}$). Regula de deducție $\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n}{\varphi}$ implică regula $\frac{\Sigma \vdash \varphi_1, \dots, \Sigma \vdash \varphi_n}{\Sigma \vdash \varphi}$ pentru orice $\Sigma \subseteq E$, de unde, luând $\Sigma = \emptyset$, obținem și cazul particular: $\frac{\vdash \varphi_1, \dots, \vdash \varphi_n}{\vdash \varphi}$.

Remarca 1.17 (modus ponens, cu scrierea de mai sus). Conform afirmației (3) din Propoziția \star , pentru orice $\Sigma \subseteq E$, mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ , în particular mulțimea teoremelor formale, este închisă la regula $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$, pe care o numim tot **modus ponens**.

Propoziția 1.3. Pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$ și orice $\Sigma \subseteq E$, sunt valabile următoarele teoreme formale și reguli de deducție:

tranzitivitatea implicației:

- $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow ((\psi \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- $\frac{\varphi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi}{\varphi \rightarrow \chi}$

afirmarea concluziei:

- $\frac{\varphi}{\psi \rightarrow \varphi}$

principiul reducerii la absurd:

- $\frac{\neg \varphi \rightarrow \neg \psi}{\psi \rightarrow \varphi}$

inversarea premiselor:

- $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi))$
- $\frac{\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)}{\psi \rightarrow (\varphi \rightarrow \chi)}$

negarea premisei:

- $\vdash \varphi \rightarrow (\neg \varphi \rightarrow \psi)$ și $\vdash \neg \varphi \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
- $\frac{\varphi}{\neg \varphi \rightarrow \psi}$ și $\frac{\neg \varphi}{\varphi \rightarrow \psi}$

principiul dublei negații:

- $\vdash \neg \neg \varphi \rightarrow \varphi$ și $\vdash \varphi \rightarrow \neg \neg \varphi$
- $\frac{\neg \neg \varphi}{\varphi}$ și $\frac{\varphi}{\neg \neg \varphi}$

principiul contrapozității:

- $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg \psi \rightarrow \neg \varphi)$

- $\frac{\varphi \rightarrow \psi}{\neg \psi \rightarrow \neg \varphi}$

comutativitatea disjuncției:

- $\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\psi \vee \varphi)$

- $\frac{\varphi \vee \psi}{\psi \vee \varphi}$

comutativitatea conjuncției:

- $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\psi \wedge \varphi)$

- $\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi \wedge \varphi}$

comutativitatea echivalenței:

- $\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\psi \leftrightarrow \varphi}$

prima lege a lui De Morgan:

- $\vdash (\neg \varphi \vee \neg \psi) \rightarrow \neg (\varphi \wedge \psi)$ și $\vdash \neg (\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\neg \varphi \vee \neg \psi)$

- $\frac{\neg \varphi \vee \neg \psi}{\neg (\varphi \wedge \psi)}$ și $\frac{\neg (\varphi \wedge \psi)}{\neg \varphi \vee \neg \psi}$

adevărul nu implică falsul:

- $\vdash (\varphi \rightarrow \neg \varphi) \rightarrow \neg \varphi$

- $\frac{\varphi \rightarrow \neg \varphi}{\neg \varphi}$

slăbirea:

- $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$ și $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$

- $\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ și $\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$

- $\frac{\varphi \rightarrow \chi, \psi \rightarrow \chi}{(\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi}$

slăbirea conjuncției:

- $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$ și $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$

- $\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ și $\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$

- $\frac{\chi \rightarrow \varphi, \chi \rightarrow \psi}{\chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)}$

- caz particular: $\frac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$

în cadrul aceluiași denumiri ca mai sus:

- **principiul dublei negații:** $\vdash \varphi \leftrightarrow \neg \neg \varphi$

- **prima lege a lui De Morgan:** $\vdash \neg (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg \varphi \vee \neg \psi)$

- **comutativitatea disjuncției:** $\vdash (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\psi \vee \varphi)$

- **comutativitatea conjuncției:** $\vdash (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\psi \wedge \varphi)$

dubla premisă:

- $\vdash \varphi \rightarrow (\psi \rightarrow (\varphi \wedge \psi))$
- $\vdash (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi)$
- **falsul implică orice:** $\vdash (\varphi \wedge \neg \varphi) \rightarrow \psi$
- **orice implică adevărul:** $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \neg \varphi)$

negarea termenilor unei echivalențe:

- $$\frac{\varphi \leftrightarrow \psi}{\neg \varphi \leftrightarrow \neg \psi}$$

distributivitatea disjuncției față de conjuncție:

- $\vdash ((\varphi \wedge \psi) \vee \chi) \leftrightarrow ((\varphi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi))$

Notăția 1.8 (abrevieri definite recursiv). Fie $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \dots \in E$, arbitrare. Atunci, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, avem următoarele scrieri (prioritățile: ca la operatori unari, deci aceeași prioritate ca \neg):

$$\bigvee_{i=1}^n \gamma_i := \begin{cases} \gamma_1, & n = 1, \\ (\bigvee_{i=1}^{n-1} \gamma_i) \vee \gamma_n, & n > 1, \end{cases} \quad \text{și} \quad \bigwedge_{i=1}^n \gamma_i := \begin{cases} \gamma_1, & n = 1, \\ (\bigwedge_{i=1}^{n-1} \gamma_i) \wedge \gamma_n, & n > 1. \end{cases}$$

Exercițiul 1.1 (temă). Folosind **dubla premisă** și (MP), să se arate că, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$:

$$\vdash ((\varphi \wedge \psi) \rightarrow \chi) \rightarrow (\varphi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)),$$

iar, folosind acest fapt, împreună cu **dubla premisă** și (TD), să se arate că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ și orice $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n, \varphi \in E$, au loc echivalențele:

$$\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} \vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \{\bigwedge_{i=1}^n \gamma_i\} \vdash \varphi \quad \text{ddacă} \quad \vdash (\bigwedge_{i=1}^n \gamma_i) \rightarrow \varphi.$$

2 Algebra Lindenbaum–Tarski a Logicii Propoziționale Clasice

- Pe tot parcursul acestei secțiuni, $\Sigma \subseteq E$ va fi o mulțime arbitrară fixată de enunțuri ale lui \mathcal{L} .
- Σ va reprezenta o mulțime de ipoteze, ceea ce este adesea numită o *teorie* a lui \mathcal{L} .

Lema 2.1. Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, are loc echivalența:

$$\Sigma \vdash \varphi \text{ și } \Sigma \vdash \psi \quad \text{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \wedge \psi.$$

Definiția 2.1. Definim o relație binară \sim_Σ pe mulțimea E a enunțurilor lui \mathcal{L} , astfel: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \quad \text{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Remarca 2.1. Conform lemei anterioare, pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \quad \text{ddacă} \quad \Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ și } \Sigma \vdash \psi \rightarrow \varphi,$$

pentru că $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi)$.

Lema 2.2. \sim_Σ este o relație de echivalență pe E .

Notăția 2.1. Să notăm, pentru fiecare $\varphi \in E$, cu $\hat{\varphi}^\Sigma := \{\psi \in E \mid \varphi \sim_\Sigma \psi\}$ clasa de echivalență a lui φ raportat la relația de echivalență \sim_Σ , și să considerăm mulțimea factor $E/\sim_\Sigma = \{\hat{\varphi}^\Sigma \mid \varphi \in E\}$.

Definiția 2.2. Pe mulțimea factor E/\sim_Σ , definim relația binară \leq_Σ , prin: oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi}^\Sigma \leq_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma$ ddacă $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \psi$.

Propoziția 2.1. \leq_Σ este bine definită.

Lema 2.3. \leq_Σ este o relație de ordine parțială pe E/\sim_Σ .

Propoziția 2.2. $(E/\sim_\Sigma, \leq_\Sigma)$ este o latice distributivă, în care, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\inf\{\widehat{\varphi}^\Sigma, \widehat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ și $\sup\{\widehat{\varphi}^\Sigma, \widehat{\psi}^\Sigma\} = \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$. Vom nota, pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi}^\Sigma \wedge_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \wedge \psi}^\Sigma$ și $\widehat{\varphi}^\Sigma \vee_\Sigma \widehat{\psi}^\Sigma := \widehat{\varphi \vee \psi}^\Sigma$.

Remarca 2.2. Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, $\widehat{\varphi \wedge \neg \varphi}^\Sigma$ și $\widehat{\varphi \vee \neg \varphi}^\Sigma$ sunt, respectiv, primul element și ultimul element al laticii $(E/\sim_\Sigma, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma)$. Vom nota $0_\Sigma := \widehat{\varphi \wedge \neg \varphi}^\Sigma$ și $1_\Sigma := \widehat{\varphi \vee \neg \varphi}^\Sigma$, pentru un $\varphi \in E$, arbitrar. Această definiție nu depinde de alegerea lui $\varphi \in E$, adică 0_Σ și 1_Σ sunt bine definite.

Propoziția 2.3. $(E/\sim_\Sigma, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o latice distributivă mărginită.

Definiția 2.3. Pentru orice $\varphi \in E$, definim: $\overline{\widehat{\varphi}^\Sigma} := \widehat{\neg \varphi}^\Sigma$.

Remarca 2.3. Definiția de mai sus pentru operația unară $^{-\Sigma} : E/\sim_\Sigma \rightarrow E/\sim_\Sigma$ este corectă, pentru că nu depinde de reprezentanții claselor din E/\sim_Σ .

Propoziția 2.4. $(E/\sim_\Sigma, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, ^{-\Sigma}, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ este o algebră Boole.

Definiția 2.4. Algebra Boole $(E/\sim_\Sigma, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, ^{-\Sigma}, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$ se numește *algebra Lindenbaum–Tarski a lui Σ asociată sistemului formal \mathcal{L}* .

Remarca 2.4 (surjecția canonică transformă conectorii logici în operații booleene: nu e morfism boolean, pentru că E nu e algebră Boole). Dacă notăm cu $p_\Sigma : E \rightarrow E/\sim_\Sigma$ surjecția canonică ($p_\Sigma(\varphi) := \widehat{\varphi}^\Sigma$ pentru orice $\varphi \in E$), atunci, oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, au loc următoarele identități (unde \rightarrow_Σ și \leftrightarrow_Σ sunt, respectiv, implicația și echivalența booleană în algebra Boole $(E/\sim_\Sigma, \vee_\Sigma, \wedge_\Sigma, \leq_\Sigma, ^{-\Sigma}, 0_\Sigma, 1_\Sigma)$):

- (a) $p_\Sigma(\varphi \vee \psi) = p_\Sigma(\varphi) \vee_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (b) $p_\Sigma(\varphi \wedge \psi) = p_\Sigma(\varphi) \wedge_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (c) $p_\Sigma(\neg \varphi) = \overline{p_\Sigma(\varphi)}^\Sigma$;
- (d) $p_\Sigma(\varphi \rightarrow \psi) = p_\Sigma(\varphi) \rightarrow_\Sigma p_\Sigma(\psi)$;
- (e) $p_\Sigma(\varphi \leftrightarrow \psi) = p_\Sigma(\varphi) \leftrightarrow_\Sigma p_\Sigma(\psi)$.

Lema 2.4. Pentru orice $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi}^\Sigma = 1_\Sigma$.

Remarca 2.5. Lema anterioară ne oferă o metodă algebrică pentru a verifica dacă un enunț este o consecință sintactică a lui Σ .

Notăția 2.2. În cazul în care $\Sigma = \emptyset$:

- relația de echivalență \sim_\emptyset se notează, simplu, \sim , și are următoarea definiție: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim \psi \text{ ddacă } \vdash \varphi \leftrightarrow \psi;$$
- clasele de echivalență ale lui \sim , $\widehat{\varphi}^\emptyset$ ($\varphi \in E$), se notează $\widehat{\varphi}$;
- relația de ordine \leq_\emptyset se notează \leq ;
- operațiile $\vee_\emptyset, \wedge_\emptyset, ^{-\emptyset}, 0_\emptyset$ și 1_\emptyset se notează, respectiv, $\vee, \wedge, ^-, 0$ și 1 .

Definiția 2.5. \sim se numește *echivalența logică* sau *echivalența semantică* între enunțuri.

Algebra Boole $(E/\sim, \vee, \wedge, \leq, ^-, 0, 1)$ se numește *algebra Lindenbaum–Tarski asociată sistemului formal \mathcal{L}* .

Lema anterioară devine, în acest caz, o caracterizare a teoremelor formale:

Lema 2.5. Pentru orice $\varphi \in E$, $\vdash \varphi$ ddacă $\widehat{\varphi} = 1$.

Nota 2.1. • A se vedea la seminar exemple de **demonstrații algebrice** în logica propozițională clasică (realizate prin calcul boolean, folosind lema anterioară).

- În mod tipic, pentru a folosi lema anterioară în cadrul unei demonstrații algebrice pentru o deducție formală din ipoteze: $\Sigma \vdash \varphi$, cu $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$, se folosește faptul că, pentru orice ipoteză $\sigma \in \Sigma$, are loc $\Sigma \vdash \sigma$, așadar $\widehat{\sigma}^\Sigma = 1_\Sigma$.

3 Semantica Logicii Propoziționale Clasice

Definiția 3.1 (o interpretare (evaluare, semantică) e o funcție de la mulțimea variabilelor propoziționale la algebra Boole standard: $\mathcal{L}_2 = \{0, 1\}$, cu $0 < 1$, i. e. o funcție care dă valori de adevăr variabilelor propoziționale). O interpretare (evaluare, semantică) a lui \mathcal{L} este o funcție oarecare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$.

Propoziția 3.1 (există o unică funcție care prelungește o interpretare la mulțimea tuturor enunțurilor și transformă conectorii logici primitivi în operații Booleene, așadar calculează valorile de adevăr ale tuturor enunțurilor pornind de la cele ale variabilelor propoziționale). Pentru orice interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$, există o unică funcție $\tilde{h} : E \rightarrow \mathcal{L}_2$ care satisface următoarele proprietăți:

- (a) $\tilde{h}(u) = h(u)$, pentru orice $u \in V$;
- (b) $\tilde{h}(\neg \varphi) = \overline{\tilde{h}(\varphi)}$, pentru orice $\varphi \in E$;
- (c) $\tilde{h}(\varphi \rightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \rightarrow \tilde{h}(\psi)$, pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Definiția 3.2. Funcția $\tilde{h} : E \rightarrow \mathcal{L}_2$ din propoziția anterioară se numește tot *interpretare*.

Observația 3.1. Condiția (a) din propoziția anterioară spune că $\tilde{h}|_V = h$, adică funcția \tilde{h} prelungește pe h la E .

În condițiile (b) și (c), în membrii stângi, în argumentele lui \tilde{h} , \neg și \rightarrow sunt conectorii logici primitivi, pe când, în membrii dreپتي, \neg și \rightarrow sunt operațiile de complementare și, respectiv, implicație ale algebrei Boole \mathcal{L}_2 . Așadar, putem spune că funcția \tilde{h} transformă conectorii logici în operații booleene în algebra Boole standard.

Vom păstra notația \tilde{h} pentru această unică funcție depinzând de interpretarea h .

Corolarul 3.1 (prelungirea unei interpretări la mulțimea enunțurilor transformă toți conectorii logici în operații booleene). Pentru orice interpretare h și orice $\varphi, \psi \in E$, au loc:

- (d) $\tilde{h}(\varphi \vee \psi) = \tilde{h}(\varphi) \vee \tilde{h}(\psi)$
- (e) $\tilde{h}(\varphi \wedge \psi) = \tilde{h}(\varphi) \wedge \tilde{h}(\psi)$
- (f) $\tilde{h}(\varphi \leftrightarrow \psi) = \tilde{h}(\varphi) \leftrightarrow \tilde{h}(\psi)$

Satisfacere și mulțimi satisfiabile:

Fie h o interpretare, φ un enunț și Σ o mulțime de enunțuri.

Definiția 3.3 (enunțuri adevărate pentru anumite valori de adevăr atribuite variabilelor propoziționale din scrierea lor). Spunem că φ este *adevărat în interpretarea h* sau că h *satisface* φ ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 1$.

φ se zice *fals în interpretarea h* ddacă $\tilde{h}(\varphi) = 0$.

Spunem că h *satisface* Σ sau că h este un *model pentru* Σ ddacă h satisface toate elementele lui Σ .

Spunem că Σ *admite un model* sau că mulțimea Σ este *satisfiabilă* ddacă există un model pentru Σ .

Spunem că φ *admite un model* sau că φ este *satisfiabil* ddacă $\{\varphi\}$ este satisfiabilă.

Notația 3.1. Faptul h satisface enunțul φ se notează cu: $h \models \varphi$.

Faptul că h satisface mulțimea Σ de enunțuri se notează cu: $h \models \Sigma$.

Remarca 3.1. Dacă h este model pentru Σ , atunci h este model pentru orice submulțime a lui Σ .

Definiția 3.4 (adevărurile semantice și deducția semantică). Enunțul φ se zice *universal adevărat* ddacă φ este adevărat în orice interpretare.

Enunțurile universal adevărate se mai numesc *adevărurile semantice* sau *tautologiile* lui \mathcal{L} .

Spunem că φ *se deduce semantic din* Σ sau că φ *este o consecință semantică a lui* Σ ddacă φ este adevărat în orice interpretare care satisface pe Σ .

Notația 3.2. Faptul că φ este universal adevărat se notează cu: $\models \varphi$.

Faptul că φ se deduce semantic din Σ se notează cu: $\Sigma \models \varphi$.

Le fel cum adevărurile sintactice (i. e. teoremele formale) sunt exact enunțurile deductibile sintactic din \emptyset :

Remarca 3.2 (adevărurile semantice sunt exact enunțurile deductibile semantic din \emptyset). Pentru orice enunț φ ,

$$\models \varphi \text{ ddacă } \emptyset \models \varphi.$$

Observația 3.2 (valorile de adevăr atribuite enunțurilor de o interpretare se calculează pe baza valorilor de adevăr atribuite variabilelor propoziționale de acea interpretare, folosind proprietatea interpretării de a transforma conectorii logici în operații booleene). Valoarea unei interpretări într-un anumit enunț, uneori numită *interpretarea acelui enunț*, este valoarea de adevăr 0 sau 1 care se obține atunci când se atribuie, prin acea interpretare, valori de adevăr din \mathcal{L}_2 tuturor variabilelor propoziționale care apar în acel enunț. Un enunț universal adevărat, i. e. un adevăr semantic, o tautologie, este un enunț a cărui valoare de adevăr este 1 pentru orice valori de adevăr atribuite variabilelor propoziționale care apar în acel enunț.

Teorema 3.1 (Teorema de completitudine tare (extinsă) pentru logica propozițională clasică (TCT)). Pentru orice enunț φ și orice mulțime de enunțuri Σ :

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \text{dacă} \quad \Sigma \models \varphi.$$

Teorema 3.2 (Teorema de completitudine pentru \mathcal{L} (TC)). Pentru orice enunț φ ,

$$\vdash \varphi \quad \text{dacă} \quad \models \varphi.$$

Nota 3.1. Uneori,

- implicația $\vdash \varphi \Rightarrow \models \varphi$ este numită *corectitudinea lui \mathcal{L}* ,
- iar implicația $\vdash \varphi \Leftarrow \models \varphi$ este numită *completitudinea lui \mathcal{L}* .

Dar, cel mai adesea, **echivalența** din teorema anterioară este numită *completitudinea lui \mathcal{L}* .

Corolarul 3.2 (noncontradicția lui \mathcal{L} (principiul noncontradicției)). Niciun enunț φ nu satisface și $\vdash \varphi$, și $\vdash \neg \varphi$.

Propoziția 3.2. Algebra Lindenbaum–Tarski a logicii propoziționale clasice, E/\sim , este netrivială.

Nota 3.2. A se vedea la seminar exemple de **demonstrații semantice** în logica propozițională clasică, realizate atât prin calcul boolean obișnuit în \mathcal{L}_2 , cât și prin intermediul **tabelelor de adevăr** (tabelelor semantice).

Propoziția 3.3 (orice interpretare induce un unic morfism boolean de la algebra Lindenbaum–Tarski asociată unei mulțimi de ipoteze la algebra Boole standard). Pentru orice interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$ și orice $\Sigma \subseteq E$ a. i. $h \models \Sigma$, există un unic morfism boolean $\ddot{h}^\Sigma : E/\sim_\Sigma \rightarrow \mathcal{L}_2$ care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice $\varphi \in E$, $\ddot{h}^\Sigma(\hat{\varphi}^\Sigma) := \tilde{h}(\varphi)$:

$$\begin{array}{ccccc} V & \hookrightarrow & E & \xrightarrow{p_\Sigma} & E/\sim_\Sigma \\ & \searrow h & \downarrow \tilde{h} & \nearrow \ddot{h}^\Sigma & \\ & & \mathcal{L}_2 & & \end{array}$$

Corolarul 3.3 (orice interpretare induce un unic morfism boolean de la algebra Lindenbaum–Tarski la algebra Boole standard). Pentru orice interpretare $h : V \rightarrow \mathcal{L}_2$, există un unic morfism boolean $\ddot{h} : E/\sim \rightarrow \mathcal{L}_2$ care face următoarea diagramă comutativă, anume morfismul boolean definit prin: pentru orice $\varphi \in E$, $\ddot{h}(\hat{\varphi}) := \tilde{h}(\varphi)$:

$$\begin{array}{ccccc} V & \hookrightarrow & E & \xrightarrow{p} & E/\sim \\ & \searrow h & \downarrow \tilde{h} & \nearrow \ddot{h} & \\ & & \mathcal{L}_2 & & \end{array}$$

4 Sisteme deductive și mulțimi consistente

Definiția 4.1. O mulțime Σ de enunțuri se numește *sistem deductiv* dacă este închisă la deducții, i. e., pentru orice $\varphi \in E$, are loc:

$$\begin{aligned} \Sigma \vdash \varphi &\Rightarrow \varphi \in \Sigma, \quad \text{adică:} \\ \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} &\subseteq \Sigma. \end{aligned}$$

Remarca 4.1. Implicația reciprocă în definiția anterioară este valabilă, conform definiției deducției sintactice, prin urmare o mulțime Σ de enunțuri este sistem deductiv dacă, pentru orice $\varphi \in E$:

$$\Sigma \vdash \varphi \Leftrightarrow \varphi \in \Sigma, \quad \text{adică:}$$

$$\{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\} = \Sigma.$$

Exemplul 4.1. În mod trivial, mulțimea E a tuturor enunțurilor este sistem deductiv.

Lema 4.1. Orice sistem deductiv include mulțimea teoremelor formale.

Exemplul 4.2. Conform lemei anterioare, de exemplu, \emptyset nu este sistem deductiv.

Lema 4.2. Mulțimea teoremelor formale este sistem deductiv.

Propoziția 4.1. Mulțimea teoremelor formale este cel mai mic sistem deductiv.

Nota 4.1. În următoarea propoziție, cu o terminologie pe care am folosit-o deja, spunem că o mulțime Σ de enunțuri este *închisă la modus ponens* dacă, pentru orice enunțuri φ, ψ , dacă $\psi, \psi \rightarrow \varphi \in \Sigma$, atunci $\varphi \in \Sigma$.

Propoziția 4.2 (caracterizare pentru sistemele deductive). Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, sunt echivalente:

- (i) Σ este sistem deductiv;
- (ii) Σ include mulțimea axiomelor și este închisă la **modus ponens**;
- (iii) Σ include mulțimea teoremelor formale și este închisă la **modus ponens**.

Propoziția 4.3. Intersecția oricărei familii de sisteme deductive este sistem deductiv, i. e. mulțimea sistemelor deductive este un **sistem de închidere**.

Notația 4.1. Notăm cu $D : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ operatorul de închidere asociat sistemului de închidere format din sistemele deductive.

Corolarul 4.1. Pentru orice mulțime Σ de enunțuri, $D(\Sigma)$ este cel mai mic sistem deductiv care include pe Σ , anume intersecția tuturor sistemelor deductive care includ pe Σ .

Definiția 4.2. Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, $D(\Sigma)$ se numește *sistemul deductiv generat de Σ* .

Remarca 4.2. Conform definiției unui operator de închidere, pentru orice $\Sigma, \Delta \in \mathcal{P}(E)$:

- (i) $\Sigma \subseteq D(\Sigma)$ (D este **extensiv**);
- (ii) $\Sigma \subseteq \Delta$ implică $D(\Sigma) \subseteq D(\Delta)$ (D este **crescător**);
- (iii) $D(D(\Sigma)) = D(\Sigma)$ (D este **idempotent**);

Propoziția 4.4 (sistemul deductiv generat de o mulțime Σ de enunțuri este mulțimea consecințelor sintactice ale lui Σ). Pentru orice mulțime Σ de enunțuri:

$$D(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid \Sigma \vdash \varphi\}.$$

Corolarul 4.2. Operatorul de închidere D este finitar, adică, oricare ar fi $\Sigma \subseteq E$, are loc:

$$D(\Sigma) = \bigcup \{D(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq \Sigma, |\Gamma| < \aleph_0\}.$$

Definiția 4.3 (mulțimi consistente (i. e. necontradictorii)). Fie Σ o mulțime de enunțuri.

- Σ se zice *inconsistentă* dacă $\Sigma \vdash \varphi$ pentru orice $\varphi \in E$ (i. e. dacă orice enunț este consecință sintactică a lui Σ);
- Σ se zice *consistentă* dacă Σ nu este inconsistentă.

Exemplul 4.3. Mulțimea E a tuturor enunțurilor este inconsistentă.

Remarca 4.3. Orice submulțime a unei mulțimi consistente este consistentă.

Prin urmare, orice mulțime care include o mulțime inconsistentă este inconsistentă.

Remarca 4.4. Mulțimea T a teoremelor formale este consistentă.

Într-adevăr, conform unei propoziții de mai sus, T este sistem deductiv, deci este egală cu mulțimea enunțurilor φ cu $T \vdash \varphi$, iar $T \subsetneq E$, conform **principiului noncontradicției**.

Exemplul 4.4 (consecință a celor două remarci precedente). \emptyset și Ax sunt mulțimi consistente.

Propoziția 4.5. Sistemul deductiv generat de o mulțime consistentă este o mulțime consistentă.

Propoziția 4.6 (mulțimile consistente sunt mulțimile de enunțuri din care nu se deduc contradicții). Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, sunt echivalente:

- (i) Σ este inconsistentă;
- (ii) există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg \varphi$;
- (iii) există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \varphi$ și $\Sigma \vdash \neg \varphi$;
- (iv) există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$;
- (v) pentru orice $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$.

Corolarul 4.3. Fie $\Sigma \subseteq E$ și $\varphi \in E$. Atunci:

- (i) $\Sigma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă dacă $\Sigma \vdash \neg \varphi$;
- (ii) $\Sigma \cup \{\neg \varphi\}$ este inconsistentă dacă $\Sigma \vdash \varphi$.

Propoziția 4.7. Pentru orice $\Sigma \subseteq E$, are loc echivalența: Σ e consistentă dacă algebra Boole E/\sim_Σ e netrivială.

Definiția 4.4 (mulțimi consistente maxime). Un element maximal al mulțimii mulțimilor consistente raportat la incluziune se numește *mulțime consistentă maximală*.

Propoziția 4.8. Orice mulțime consistentă este inclusă într-o mulțime consistentă maximală.

Corolarul 4.4. Există mulțimi consistente maxime.

Propoziția 4.9. Dacă Σ este o mulțime consistentă maximală, atunci:

- (i) Σ este sistem deductiv;
- (ii) pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem: $\varphi \vee \psi \in \Sigma$ dacă $\begin{cases} \varphi \in \Sigma \text{ sau} \\ \psi \in \Sigma; \end{cases}$
- (iii) oricare ar fi $\varphi \in E$, are loc: $\varphi \in \Sigma$ dacă $\neg \varphi \notin \Sigma$;
- (iv) pentru orice $\varphi, \psi \in E$: $\varphi \rightarrow \psi \in \Sigma$ dacă $\neg \varphi \vee \psi \in \Sigma$ dacă $\begin{cases} \neg \varphi \in \Sigma \text{ sau} \\ \psi \in \Sigma. \end{cases}$

Remarca 4.5. T (și, așadar, orice submulțime a lui T) admite ca model orice interpretare.

Propoziția 4.10. O mulțime de enunțuri e satisfiabilă dacă e consistentă.

5 Rezoluția în calculul propozițional clasic

Definiția 5.1 (FNC și FND). • Un *literal* este o variabilă propozițională sau negația unei variabile propoziționale:

$$p \text{ sau } \neg p, \text{ cu } p \in V.$$

- O *clauză* este o disjuncție de literal.

– Orice clauză se identifică cu mulțimea literalilor care o compun.

- Un enunț $\varphi (\in E)$ este în formă normală conjunctivă (sau este o formă normală conjunctivă) (FNC) dacă φ este o conjuncție de clauze, i. e. o conjuncție de disjuncții de literal.

– Orice FNC se identifică cu mulțimea clauzelor care o compun.

- Un enunț $\varphi(\in E)$ este în formă normală disjunctivă (sau este o formă normală disjunctivă) (FND) ddacă φ este o disjuncție de conjuncții de literali.

Observația 5.1. Întrucât toate enunțurile au lungime finită (i. e. sunt șiruri finite de simboluri primitive), conjuncțiile și disjuncțiile la care face referire definiția de mai sus sunt finite.

Relația de **echivalență semantică**: $\sim = \sim_{\emptyset} \in \text{Eq}(E)$: relația de echivalență pe E care servește la construirea algebrei Lindenbaum–Tarski a logicii propoziționale clasice: pentru orice $\varphi, \psi \in E$,

$$\varphi \sim \psi \text{ ddacă } \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Remarca 5.1 (două enunțuri sunt echivalente semantic ddacă au aceeași valoare în orice interpretare). Oricare ar fi $\varphi, \psi \in E$, avem: $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow (\forall h : V \rightarrow L_2) (\hat{h}(\varphi) = \hat{h}(\psi))$.

Așadar:

Remarca 5.2. Dacă $\varphi, \psi \in E$ astfel încât $\varphi \sim \psi$, atunci: φ e satisfiabil ddacă ψ e satisfiabil.

Propoziția 5.1 (existența FNC și FND pentru orice enunț). Oricare ar fi $\varphi \in E$, există o FNC $\psi \in E$ și o FND $\chi \in E$ (care nu sunt unice), astfel încât $\varphi \sim \psi \sim \chi$.

Remarca 5.3. Oricare ar fi $\varphi \in E$, putem determina o FNC (sau FND) $\psi \in E$ cu $\varphi \sim \psi$, folosind un tabel semantic pentru φ , sau folosind următoarele proprietăți imediate (a se vedea seminarul), valabile pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in E$:

- înlocuirea implicațiilor și echivalențelor:

$$\alpha \rightarrow \beta \sim \neg \alpha \vee \beta \text{ și } \alpha \leftrightarrow \beta \sim (\neg \alpha \vee \beta) \wedge (\neg \beta \vee \alpha)$$

- idempotența lui \vee și \wedge :

$$\alpha \vee \alpha \sim \alpha \wedge \alpha \sim \alpha$$

- comutativitatea lui \vee și \wedge :

$$\alpha \vee \beta \sim \beta \vee \alpha \text{ și } \alpha \wedge \beta \sim \beta \wedge \alpha$$

- asociativitatea lui \vee și \wedge :

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma \sim \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \text{ și } (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma \sim \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma)$$

- principiul dublei negații:

$$\neg \neg \alpha \sim \alpha$$

- legile lui de Morgan:

$$\neg (\alpha \vee \beta) \sim \neg \alpha \wedge \neg \beta \text{ și } \neg (\alpha \wedge \beta) \sim \neg \alpha \vee \neg \beta$$

- absorbția:

$$\alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \sim \alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \sim \alpha$$

- legile de distributivitate:

$$\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \sim (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma) \text{ și } \alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \sim (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$$

- proprietățile:

$$\alpha \vee (\beta \wedge \neg \beta) \sim \alpha \vee (\beta \wedge \neg \beta \wedge \gamma) \sim \alpha \wedge (\beta \vee \neg \beta) \sim \alpha \wedge (\beta \vee \neg \beta \vee \gamma) \sim \alpha$$

- Următoarea notație este definită, recursiv, pe întreaga mulțime E :

Notația 5.1 (mulțimea variabilelor propoziționale care apar într-un enunț φ se notează $V(\varphi)$). Pentru orice $p \in V$ și orice $\varphi, \psi \in E$, notăm:

$$(i) \ V(p) = \{p\}$$

(ii) $V(\neg \varphi) = V(\varphi)$

(iii) $V(\varphi \rightarrow \psi) = V(\varphi) \cup V(\psi)$

- Amintesc că, într-un tabel semantic pentru un enunț φ , ne interesează variabilele propoziționale care apar în φ , adică elementele lui $V(\varphi)$.

A se vedea, la seminar, metoda prin care un enunț φ poate fi pus în FNC folosind un tabel semantic pentru φ .

Definiția 5.2 (formă clauzală). Fie $\varphi \in E$ și $M \subseteq E$, astfel încât M este finită.

- O *formă clauzală* pentru φ este o FNC (i. e. o mulțime de clauze) ψ cu $\psi \sim \varphi$.
- O *formă clauzală* pentru M este o reuniune de forme clauzale pentru elementele lui M .

Remarca 5.4. Orice mulțime finită de enunțuri poate fi pusă într-o formă clauzală.

Propoziția 5.2. O mulțime de enunțuri e satisfiabilă dacă orice submulțime finită a sa este satisfiabilă.

Propoziția 5.3 (conform căreia tehnica rezoluției de mai jos poate fi folosită pentru a demonstra teoreme formale sau deducții formale din ipoteze). Fie $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \psi \in E$ și $\Gamma \subseteq E$.

(a) Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} \models \psi$
- (ii) $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \neg \psi\}$ nu e satisfiabilă
- (iii) $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \wedge \neg \psi$ nu e satisfiabil

(b) În plus, următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $\models \psi$
- (ii) $\neg \psi$ nu e satisfiabil

(c) Mai mult, următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $\Gamma \models \psi$
- (ii) $\Gamma \cup \{\neg \psi\}$ nu e satisfiabilă
- (iii) $\neg \psi$ nu e satisfiabil, sau există $k \in \mathbb{N}^*$ și $\psi_1, \dots, \psi_k \in \Gamma$ astfel încât $\psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_k \wedge \neg \psi$ nu e satisfiabil.

Remarca 5.5. Formele clauzale pentru o mulțime finită de enunțuri $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ sunt exact formele clauzale pentru enunțul $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n$.

Problema 5.1. Fiind dat un enunț φ în FNC, să se determine dacă φ e satisfiabil.

- O soluție computațională pentru problema de mai sus este **algoritmul Davis–Putnam**, bazat pe **rezoluție**.
- **Rezoluția propozițională** poate fi privită ca o regulă de deducție pentru calculul propozițional clasic.
- Utilizând **rezoluția**, se poate construi un demonstrator automat **corect și complet** pentru calculul propozițional clasic, fără alte teoreme formale și reguli de deducție, pentru că **regula rezoluției este echivalentă cu schemele de axiome (A_1) , (A_2) , (A_3) plus regula MP**.
- Limbajul de programare logică PROLOG este fundamentat pe rezoluția pentru calculul cu predicate clasic (care înglobează rezoluția propozițională).

Definiția 5.3 (și mnemonic). • O *clauză* este o mulțime finită de literali $(\{L_1, \dots, L_n\},$ cu $n \in \mathbb{N}$ și $L_1, \dots, L_n \in V \cup \{\neg p \mid p \in V\})$.

- **Clauza vidă** (i. e. clauza fără literal, clauza fără elemente) se notează cu \square (pentru a o deosebi de **mulțimea vidă de clauze**, \emptyset , în cele ce urmează).
- O clauză C se zice *trivială* dacă există $p \in V$ cu $p, \neg p \in C$.

- Orice clauză nevidă $C = \{L_1, \dots, L_n\}$ (cu $n \in \mathbb{N}^*$ și $L_1, \dots, L_n \in V \cup \{\neg p \mid p \in V\}$) se identifică cu enunțul în FND $\varphi = L_1 \vee \dots \vee L_n$. Clauza C se zice *satisfiabilă* ddacă enunțul φ e satisfiabil.
- Clauza vidă (\square) e considerată **nesatisfiabilă** (**justificare:** \square se identifică cu $\bigvee_{i \in \emptyset} L_i$; pentru orice $h : V \rightarrow L_2$, $\tilde{h}(\bigvee_{i \in \emptyset} L_i) = \bigvee_{i \in \emptyset} \tilde{h}(L_i) = 0 \neq 1$ în \mathcal{L}_2).
- Orice mulțime finită de clauze $M = \{C_1, \dots, C_k\}$ (cu $k \in \mathbb{N}$ și C_1, \dots, C_k clauze) se identifică cu $C_1 \wedge \dots \wedge C_k$, deci cu o FNC.
- O mulțime finită de clauze se zice *satisfiabilă* ddacă toate clauzele din componența ei sunt satisfăcute de o aceeași interpretare (au un același model, au un model comun).

Remarca 5.6. • O mulțime finită de clauze este satisfiabilă ddacă FNC asociată ei e satisfiabilă;

- \emptyset (mulțimea vidă de clauze) este satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare;
- orice clauză trivială e satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare;
- orice mulțime finită de clauze triviale este satisfiabilă, chiar e satisfăcută de orice interpretare.

Rezoluția (regulă de deducție pentru logica propozițională clasică): pentru orice clauze C, D , dacă $p \in V$ astfel încât $p, \neg p \notin C$ și $p, \neg p \notin D$, atunci:

$$\frac{C \cup \{p\}, D \cup \{\neg p\}}{C \cup D}, \text{ adică } \frac{(C \vee p) \wedge (D \vee \neg p)}{C \vee D}$$

Propoziția 5.4. Fie C și D clauze, iar S, T și U mulțimi finite de clauze. Atunci:

- dacă C e satisfiabilă și $C \subseteq D$, atunci D e satisfiabilă; prin urmare, dacă D e nesatisfiabilă și $C \subseteq D$, atunci C e nesatisfiabilă;
- $C \cup D$ e satisfiabilă ddacă C e satisfiabilă sau D e satisfiabilă;
- dacă $p \in V \setminus V(C)$, atunci $C \cup \{p\}$ și $C \cup \{\neg p\}$ sunt satisfiabibile;
- dacă S e nesatisfiabilă și $S \subseteq T$, atunci T e nesatisfiabilă; prin urmare, dacă T e satisfiabilă și $S \subseteq T$, atunci S e satisfiabilă;
- dacă U e satisfiabilă și există $p \in V \setminus V(U)$, $G \in S$ și $H \in T$ astfel încât $p \in G \setminus H$ și $\neg p \in H \setminus G$, atunci $U \cup S$ și $U \cup T$ sunt satisfiabibile;
- dacă $p \in V$ astfel încât $p, \neg p \notin C$ și $p, \neg p \notin D$, iar mulțimea de clauze $\{C \cup \{p\}, D \cup \{\neg p\}\}$ e satisfiabilă, atunci $C \cup D$ e satisfiabilă (**regula rezoluției**).

Definiția 5.4 (derivări prin rezoluție). Fie o mulțime finită de clauze $\{D_1, \dots, D_k\}$ și φ enunțul în FNC corespunzător acestei mulțimi de clauze:

$$\varphi = D_1 \wedge \dots \wedge D_k.$$

Dacă $i, j \in \overline{1, k}$ a. î. $i \neq j$ și există $p \in V$ cu $p \in D_i$ și $\neg p \in D_j$, atunci mulțimea de clauze $R := \{(D_i \setminus \{p\}) \cup (D_j \setminus \{\neg p\})\} \cup \{D_t \mid t \in \overline{1, k} \setminus \{i, j\}\}$ sau o FNC corespunzătoare ei, de exemplu enunțul

$$((D_i \setminus \{p\}) \vee (D_j \setminus \{\neg p\})) \wedge \bigwedge_{t \in \overline{1, k} \setminus \{i, j\}} D_t,$$

se numește *rezolvent* al enunțului φ sau al mulțimii de clauze $\{D_1, \dots, D_k\}$.

Deducția

$$\frac{D_1, \dots, D_k}{R}$$

se numește *derivare prin rezoluție* a lui φ sau a mulțimii $\{D_1, \dots, D_k\}$.

Vom numi orice succesiune de derivări prin rezoluție tot *derivare prin rezoluție*. O succesiune de derivări prin rezoluție care începe cu o FNC/mulțime de clauze μ și se termină cu o FNC/mulțime de clauze ν se numește *derivare prin rezoluție a lui ν din μ* .

Nota 5.1. Rezoluția este o metodă de verificare a satisfiabilității pentru mulțimi (finite) de enunțuri în formă clauzală.

Nota 5.2. Aplicarea regulii rezoluției simultan pentru două variabile diferite este **greșită**.

Remarca 5.7. Clauza vidă \square poate apărea într-o derivare prin rezoluție doar din două clauze de forma $\{p\}, \{\neg p\}$, cu $p \in V$, așadar numai într-o derivare prin rezoluție a unei FNC în care apare $p \wedge \neg p$ (în conjuncție cu alte FNC), iar o astfel de FNC este, evident, nesatisfiabilă.

Remarca 5.8. • Dacă într-o derivare prin rezoluție a unei mulțimi finite M de enunțuri în **formă clauzală** apare \square , atunci M nu e satisfiabilă.

- În schimb, o derivare prin rezoluție a lui M în care nu apare \square **nu arată** că M ar fi satisfiabilă.
- Pentru a arăta că o mulțime finită M de enunțuri (în formă clauzală) este satisfiabilă, putem găsi un model pentru M sau putem aplica **algoritmul Davis–Putnam**, care este echivalent cu obținerea tuturor derivărilor posibile prin rezoluție ale formei clauzale a lui M .

Algoritmul Davis–Putnam (abreviat DP):

INPUT: mulțime finită și nevidă S de clauze netriviale;

$S_1 := S; i := 1;$

PASUL 1: luăm o $v_i \in V(S_i);$

$T_i^0 := \{C \in S_i \mid \neg v_i \in C\};$

$T_i^1 := \{C \in S_i \mid v_i \in C\};$

$T_i := T_i^0 \cup T_i^1;$

$U_i := \emptyset;$

PASUL 2: dacă $T_i^0 \neq \emptyset$ și $T_i^1 \neq \emptyset$,

atunci $U_i := \{(C_0 \setminus \{\neg v_i\}) \cup (C_1 \setminus \{v_i\}) \mid C_0 \in T_i^0, C_1 \in T_i^1\};$

altfel $U_i := \emptyset;$

PASUL 3: $S_{i+1} := (S_i \setminus T_i) \cup U_i;$

$S_{i+1} := S_{i+1} \setminus \{C \in S_{i+1} \mid (\exists p \in V) (p, \neg p \in C)\}$

(eliminăm din S_{i+1} clauzele triviale);

PASUL 4: dacă $S_{i+1} = \emptyset$,

atunci OUTPUT: S e satisfiabilă;

altfel, dacă $\square \in S_{i+1}$,

atunci OUTPUT: S nu e satisfiabilă;

altfel $i := i + 1$ și mergi la PASUL 1.

Propoziția 5.5 (terminarea algoritmului DP). Algoritmul DP se termină după cel mult $|V(S)|$ execuții ale pașilor 1 – 4, cu $S_{i+1} = \emptyset$ sau $\square \in S_{i+1}$.

Propoziția 5.6. Fie S o mulțime finită și nevidă de clauze.

Dacă S e satisfiabilă, atunci orice rezolvent al lui S e satisfiabil.

Corolarul 5.1. Fie S o mulțime finită și nevidă de clauze.

Dacă S e satisfiabilă, atunci algoritmul DP, aplicat lui S , se termină cu $S_{i+1} = \emptyset$.

Teorema 5.1. Fie S o mulțime finită și nevidă de clauze. Atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) S nu e satisfiabilă;
- (ii) există o derivare prin rezoluție a lui \square (sau a unei mulțimi de clauze conținând pe \square) din S .

Corolarul 5.2 (Teorema Davis–Putnam). Algoritmul DP este corect și complet.

Notăția 5.2. Dacă $\Gamma \subseteq E$ și $\varphi \in E$, atunci notăm cu $\Gamma \vdash_R \varphi$ faptul că există o derivare prin rezoluție a lui \square dintr-o formă clauzală a lui $\Gamma \cup \{\neg \varphi\}$.

Rezoluția propozițională \iff sistemul Hilbert:

Corolarul 5.3. Pentru orice $\Gamma \subseteq E$ și orice $\varphi \in E$, următoarele afirmații sunt echivalente:

- (i) $\Gamma \models \varphi;$

(ii) $\Gamma \vdash_R \varphi$.

Remarca 5.9. Conform corolarului anterior și (TCT), **regula rezoluției** este corectă și completă pentru calculul propozițional clasic, adică deducția pe baza **regulii rezoluției** este echivalentă cu deducția pe baza axiomelor (A_1) , (A_2) , (A_3) și a regulii de deducție **MP**.

Așadar folosind **regula rezoluției** putem realiza o prezentare echivalentă pentru logica propozițională clasică.

Definiția 5.5. Deducția pe baza axiomelor (A_1) , (A_2) , (A_3) și a regulii de deducție **MP** (adică mulțimea regulilor (A_1) , (A_2) , (A_3) și **MP** – a se vedea mai jos **teoriile deductive Moisil**) se numește *sistemul Hilbert* pentru calculul propozițional clasic.

6 Deducția naturală

Deducția naturală este o altă prezentare echivalentă pentru logica propozițională clasică: următoarele reguli de deducție sunt echivalente cu axiomele (A_1) , (A_2) , (A_3) plus regula **MP**.

Notațiile 6.1. • \perp va desemna un element arbitrar al mulțimii de enunțuri $\{\varphi \wedge \neg \varphi, \neg \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \in E\}$.

- Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ orice enunțuri $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \psi$, $\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n}{\psi}$ va avea semnificația: în prezența tuturor ipotezelor curente, din $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ se deduce ψ .
- Pentru orice $n, k \in \mathbb{N}$, orice enunțuri $\varphi_1, \dots, \varphi_n, \gamma_1, \dots, \gamma_k, \psi$ și orice mulțimi finite de enunțuri $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$, $\frac{\varphi_1, \dots, \varphi_n, \frac{\Gamma_1}{\gamma_1}, \dots, \frac{\Gamma_k}{\gamma_k}}{\psi}$ va avea semnificația: în prezența tuturor ipotezelor curente, dacă $\frac{\Gamma_1}{\gamma_1}, \dots, \frac{\Gamma_k}{\gamma_k}$, atunci din $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ se deduce ψ .

Regulile de deducție ale deducției naturale:

Considerăm $\varphi, \psi, \chi \in E$, arbitrare.

- \wedge -eliminarea: $\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$ și $\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$; \wedge -introducerea: $\frac{\varphi, \psi}{\varphi \wedge \psi}$;
- $\neg\neg$ -eliminarea: $\frac{\neg\neg\varphi}{\varphi}$; $\neg\neg$ -introducerea: $\frac{\varphi}{\neg\neg\varphi}$;
- \rightarrow -introducerea: $\frac{\frac{\varphi}{\psi}}{\varphi \rightarrow \psi}$; \rightarrow -eliminarea este **MP**: $\frac{\varphi, \varphi \rightarrow \psi}{\psi}$;
- \vee -introducerea: $\frac{\varphi}{\varphi \vee \psi}$ și $\frac{\psi}{\varphi \vee \psi}$; \vee -eliminarea: $\frac{\varphi \vee \psi, \frac{\varphi}{\chi}, \frac{\psi}{\chi}}{\chi}$;
- \perp -eliminarea: $\frac{\perp}{\varphi}$;
- \neg -introducerea: $\frac{\frac{\varphi}{\perp}}{\neg\varphi}$; \neg -eliminarea: $\frac{\varphi, \neg\varphi}{\perp}$.