1.3 Probabilitate condiţionată

Considerăm un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definiţia 1.3.1 *Pentru un eveniment $B \in \mathcal{F}$ cu $P(B) > 0$ arbitrar fixat, definim probabilitatea condiţionată de evenimentul B (notată $P(\cdot|B) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$) prin raportul*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \qquad A \in \mathcal{F}. \tag{1.4}$$

Exemplul 1.3.2 *Un producător ce asamblează componente electronice determină că din* 500 *de piese asamblate, unele sunt greşit asamblate (G), iar unele conţin părţi defecte (D), conform diagramei alăturate.*

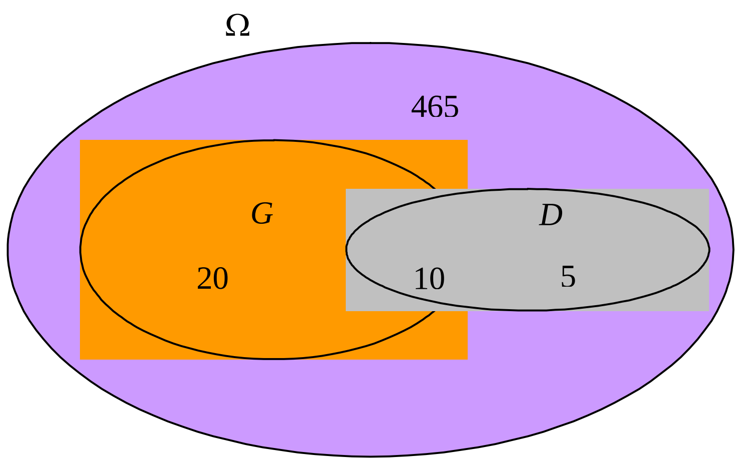

Figure 1.1: Spa ţiul de probabilitate Ω din Exemplul 1.3.2

Presupunând că se extrage arbitrar o piesă din cele 500 *asamblate, probabilitatea acesteia de a avea părţi defecte este*

$$P(D) = \frac{15}{500} = \frac{3}{100}.$$

Aceeaşi probabilitate, în cazul în care se alege însă numai dintre piesele greşit asamblate este

$$P(D|G) = \frac{P(D \cap G)}{P(G)} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Să observăm că

$$P(D \cap G) = \frac{10}{500} \text{ şi } P(D^c \cap G) = \frac{20}{500},$$

şi deci raportul $P(D \cap G) \div P(D^c \cap G)$ este egal cu $1 \div 2$.

Alegând deci ca şi spaţiu de probabilitate G (în loc de Ω), cum suma probabilităţilor unei piese de a fi defecte (D) sau nu (D^c) este egală cu 1, rezultă că trebuie să avem

$$P(D|G) = \frac{1}{3} \text{ şi } P(D^c|G) = \frac{2}{3},$$

regăsind rezultatul obţinut folosind Definiţia 1.3.1 a probabilităţii condiţionate.

Aceasta explică de ce în definiţia (1.4) a probabilităţii condiţionate $P(A|B)$ trebuie să împărţim prin $P(B)$)pentru a obţine rezultatul corect).

Are loc următoarea:

Teorema 1.3.3 *Dacă $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ este un spaţiu de probabilitate fixat şi $B \in \mathcal{F}$ este un eveniment cu $P(B) > 0$, atunci $P(\cdot|B)$ este o măsură de probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{F})$ (adică $(\Omega, \mathcal{F}, P(\cdot|B))$ este de asemeni un spaţiu de probabilitate).*

Demonstraţie. Verificăm axiomele probabilităţii:

- $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0$, pentru orice eveniment $A \in \mathcal{F}$
- $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$
- Dacă $(A_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ sunt evenimente independente două câte două, atunci şi evenimentele $(A_n \cap B)_{n \geq 1}$ sunt independente două câte două, şi avem:

$$\begin{aligned} P(\cup_{n=1}^{\infty} A_n|B) &= \frac{P((\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B))}{P(B)} \\ &= \frac{\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap B)}{P(B)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(A_n \cap B)}{P(B)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B), \end{aligned}$$

  adică $P(\cdot|B)$ verifică axiomele probabilităţii (este o măsură de probabilitate pe $(\Omega, \mathcal{F})$).

■

Următoarea formulă este utilă în exerciţii pentru calculul probabilităţilor de intersecţie a anumitor evenimente:

Propoziţia 1.3.4 (Formula de înmulţire a probabilităţilor) *Dacă $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ cu $P(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}) > 0$ atunci are loc*

$$P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) P(A_2|A_1) P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \ldots A_{n-1}).$$

Demonstraţie. Folosind definiţia probabilităţii condiţionate avem

$$
\begin{aligned}
& P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}) = \\
= \;& P(A_1)\,\frac{P(A_2\cap A_1)}{P(A_1)}\,\frac{P(A_3\cap(A_1\cap A_2))}{P(A_1\cap A_2)}\cdot\ldots\cdot\frac{P(A_n\cap(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}))}{P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1})} \\
= \;& P(A_1)\,\frac{P(A_1\cap A_2)}{P(A_1)}\,\frac{P(A_1\cap A_2\cap A_3)}{P(A_1\cap A_2)}\cdot\ldots\cdot\frac{P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}\cap A_n)}{P(A_1\cap\ldots A_{n-1})} \\
= \;& P(A_1\cap\ldots\cap A_{n-1}\cap A_n)
\end{aligned}
$$

■

Următoarea formulă este de utilă în aplicaţii, atunci când spaţiul Ω al evenimentelor se poate partiţiona în mod convenabil (reamintim că o partiţie a lui Ω este formată din evenimente incompatibile $A_1, A_2, ...A_n$, a cărui reuniune este Ω):

Teorema 1.3.5 (Formula probabilităţii totale) *Daca evenimentele $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ formează o partiţie disjunctă a lui Ω şi $P(A_1), \ldots, P(A_n) > 0$, atunci pentru orice $B \in \mathcal{F}$ are loc egalitatea*

$$P(B) = P(B|A_1)\,P(A_1) + \ldots + P(B|A_n)\,P(A_n).$$

Demonstraţie. Deoarece evenimentele $A_1, \ldots, A_n$ formează o partiţie disjunctă a lui Ω (adică $\cup_{i=1}^n A_i = \Omega$ şi $A_i \cap A_j = \emptyset$ oricare ar fi $i \neq j$), avem

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(B\cap\Omega) \\
&= P(B\cap(\cup_{i=1}^n A_i)) \\
&= P(\cup_{i=1}^n (B\cap A_i)) \\
&= \sum_{i=1}^n P(B\cap A_i) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{P(B\cap A_i)}{P(A_i)}\,P(A_i) \\
&= \sum_{i=1}^n P(B|A_i)\,P(A_i)
\end{aligned}
$$

■

Teorema 1.3.6 (Formula lui Bayes) *Dacă evenimentele $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ formează o partiţie disjunctă a lui Ω şi $P(A_1), \ldots, P(A_n) > 0$, atunci pentru orice $B \in \Omega$ cu $P(B) > 0$ şi orice $i = 1, ...n$ are loc*

$$P(A_i\,|B) = \frac{P(A_i)\,P(B\,|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\,P(B\,|A_i)}{P(B|A_1)\,P(A_1) + \ldots + P(B|A_n)\,P(A_n)}$$

Demonstraţie. Conform definiţiei probabilităţii condiţionate, avem:

$$\frac{P(A_i)\,P(B\,|A_i)}{P(B)} = \frac{P(A_i)\,\frac{P(B\cap A_i)}{P(A_i)}}{P(B)} = \frac{P(B\cap A_i)}{P(B)} = P(A_i\,|B).$$

Cea de-a doua egalitate din enunţ rezultă folosind formula probabilităţii totale (înlocuind $P(B)$ prin $P(B|A_1)P(A_1)+\ldots+P(B|A_n)P(A_n)$). $\blacksquare$

1.3.1 Exerciţii

1. Se aruncă două zaruri. Să se calculeze probabilitatea ca primul zar să fie 6, ştiind că suma celor două zaruri este 9.

2. O monedă se aruncă de 3 ori. Să se calculeze probabilitatea $P(A|B)$ unde

$$\begin{aligned} A &= \{\text{stema apare de mi multe ori decât banul}\}, \\ B &= \{\text{prima aruncare este stema}\}. \end{aligned}$$

3. Se aruncă de 2 ori un zar cu 4 feţe, şi presupunem că toate cele 16 rezultate posibile sunt egal probabile. Fie X, respectiv Y, rezultatul primei, respectiv celei de-a doua aruncări. Să se determine $P(A_i|B)$, unde

$$\begin{aligned} &A_i = \{\max(X,Y) = i\}, \qquad i = 1,2,3,4, \\ &B = \{\min(X,Y) = 2\}. \end{aligned}$$

4. Dintr-un pachet de 52 cărţi de joc se extrag cărţi fără înlocuire (cărţile extrase nu se introduc în pchet înainte de extragerea celorlalte cărţi). Să se determine probabilitatea ca nici una din cărţile extrase să nu fie ”inima roşie”.

5. Într-o urnă sunt 5 bile albe şi 5 bile negre. Din urnă se extrag 3 bile (fără întoarcerea bilelor în urnă înainte de extragerea celorlalte bile). Care este probabilitatea extragerii a 3 bile albe? Dar a 2 bile albe şi 1 neagră?

6. Trei trăgători trag asupra unei ţinte, probabilitatea trăgătorului i de a nimeri ţinta fiind p_i, $i = 1,2,3$. După tragere se constată că ţinta a fost nimerită exact o dată. Care este probabilitatea ca trăgătorul 1 să fi nimerit ţinta?

7. La o petrecere, 3 bărbaţi îşi încurcă pălăriile. Care este probabilitatea ca nici unul să nu aibă propria pălărie?