Tema 4

Exercițiul 1

Arătaţi că:

a) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori in $\mathbb{N}$ atunci

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X \geq n).$$

b) Dacă X este o variabilă aleatoare cu valori pozitive atunci

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq x)\, dx.$$

Exercițiul 2

Se consideră v.a. X cu densitatea de probabilitate

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 e^{-kx}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, k > 0.$$

a) Să se determine constanta α.

b) Să se afle funcția de repartiție.

c) Să se calculeze $\mathbb{P}(0 < X < k^{-1})$.

Exercițiul 3

a) Fie X o variabilă repartizată exponenţial (de parametru α). Arătaţi că are loc următoarea relaţie (proprietatea lipsei de memorie):

$$\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t) \tag{1}$$

b) Fie X o variabilă aleatoare care verifică relaţia (1). Arătaţi că X este repartizată exponenţial.

Exercițiul 4

a) Nivelul de zgomot al unei maşini de spălat este o v.a. de medie 44 dB şi de abatere standard 5 dB. Admiţand aproximarea normală care este probabilitatea să găsim o medie a zgomotului superioară la 48 dB intr-un eşantion de talie 10 maşini de spălat ?

b) O telecabină are o capacitate de 100 de persoane. Ştiind că greutatea populaţiei (ţarii) este o v.a. de medie 66.3 Kg şi o abatere standard de 15.6 Kg şi presupunand că persoanele care au urcat in telecabină au fost alese in mod aleator din populaţie, care este probabilitatea ca greutatea totală acestora să depăşească 7000 Kg ?

Exercițiul 5

Fie cuplul de v.a. (X,Y) cu densitatea de repartiție $f_{(X,Y)}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, unde

$$f_{(X,Y)}(x,y) = \begin{cases} k(x+y+1), & x\in[0,1],\ y\in[0,2] \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}.$$

a) Să se determine constanta k.

b) Să se determine densitățile marginale.

c) Să se verifice dacă X și Y sunt independente.

d) Să se afle funcțiile de repartiție marginale și funcția de repartiție a vectorului (X,Y).

e) Să se determine densitățile v.a. $X|Y=y$ și $Y|X=x$.

Exercițiul 6

Un tehnician dintr-un laborator de biologie face două măsurători considerate independente și repartizate normal de medie 0 și de varianță 1. Calculați corelația dintre valoarea cea mai mică și cea mai mare a celor două măsurători.

Exercițiul 7

a) O femeie însărcinată este programată, de doctor, să nască pe data de 22 Decembrie 2018. Binențeles că data efectivă de naștere nu este neapărat data prevăzută de doctor. Pe o scară de timp, considerăm că momentul în care începe ziua de 22 Decembrie este notat cu 0 și să presupunem că momentul T, la care femeia naște, este repartizat normal de medie 0 și abatere standard 4 zile. Care este probabilitatea ca femeia să nască în ziua programată de doctor?

b) O altă femeie însărcinată are aceeași dată de naștere programată ca și femeia de la punctul a). În contextul de la a), fie T_0 momentul primei nașteri, din cele două. Presupunând că cele două momente ale nașterilor sunt independente și indentic repartizate să se determine varianța lui T_0.[1]

[1] *Indicație*: Folosiți proprietatea de simetrie a repartiției normale și schimbarea de variabilă în coordonate polare!