1.6 Funcţia de distribuţie a unei variabile aleatoare

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un câmp de probabilitate complet aditiv.

Dacă $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare, atunci mulţimile de forma

$$\{X < a\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < a\} \in \mathcal{F} \qquad (a \in \mathbb{R})$$

sunt măsurabile, şi deci putem determina probabilităţile acestor evenimente. Avem următoarea:

Definiţia 1.6.1 *Dată fiind o variabilă aleatoare $X : \Omega \to \mathbb{R}$, funcţia $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definită de*

$$F_X(a) = P(X < a), \qquad a \in \mathbb{R},$$

se numeşte funcţia de distribuţie / funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X.

Are loc următoarea propoziţie de caracterizare a funcţiei de distribuţie a unei variabile aleatoare:

Propoziţia 1.6.2 *Funcţia de distribuţie $F = F_X$ a unei variabile aleatoare X are următoarele proprietăţi*

1. $F(-\infty) = \lim_{a \to -\infty} F(a) = 0$;
   $F(+\infty) = \lim_{a \to +\infty} F(a) = 1$;
2. *F este nedescrescătoare, adică $F(a) \le F(b)$ oricare ar fi $a < b$;*
3. *F este continuă la stânga, adică $\lim_{\alpha \nearrow a} F(\alpha) = F(a)$.*

Reciproc, dacă o funcţie $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ verifică proprietăţile 1 – 3, atunci este funcţia de distribuţie a unei variabile aleatoare (adică există o variabilă aleatoare X astfel încât $F = F_X$).

Demonstraţie. Să presupunem că $F = F_X$ este funcţia de distribuţie a unei variabile aleatoare X.

Să considerăm un şir arbitrar $a_1 < a_2 < \ldots$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, şi să definim mulţimile

$$A_n = \{\omega \in \Omega : X(\omega) < a_n\} \in \mathcal{F}.$$

Cum şirul $(a_n)_{n \ge 1}$ este crescător, rezultă că $(A_n)_{n \ge 1}$ formează un şir crescător de evenimente, şi din continuitatea măsurii de probabilitate obţinem

$$\begin{aligned} 1 &= P(\Omega) = P\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(X < a_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} F(a_n), \end{aligned}$$

oricare ar fi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$, şi deci $\lim_{a\to\infty} F(a) = 1$.

Similar, considerând şirul descrescător $a_1 > a_2 > \ldots$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, mulţimile $A_n = \{\omega \in \Omega : X_n < a_n\}$ formează un şir descrescător de mulţimi cu $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, şi din continuitatea măsurii de probabilitate obţinem

$$\begin{aligned} 0 &= P(\emptyset) = P\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(X < a_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} F(a_n), \end{aligned}$$

oricare ar fi şirul descrescător $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, şi deci $\lim_{\alpha\to-\infty} F(\alpha) = 0$.

Să observăm că dacă $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$, atunci $\{X < a\} \subset \{X < b\}$ şi deci

$$P(X < a) \leq P(X < b),$$

sau echivalent $F(a) \leq F(b)$, adică F este o funcţie nedescrescătoare.

Pentru a demonstra continuitatea la stânga a funcţiei F, să considerăm un punct $a \in \mathbb{R}$ arbitrar fixat şi un şir crescător $(a_n)_{n\geq 1}$ cu $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Atunci $A_n = \{X < a_n\}$ formează un şir crescător de mulţimi cu limita $\lim_{n\to\infty} A_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n = \{X < a\}$, şi din continuitatea măsurii de probabilitate obţinem

$$\begin{aligned} F(a) &= P(X < a) = P\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \\ &= P\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(X < a_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} F(a_n), \end{aligned}$$

oricare ar fi şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ cu limita a, şi deci $\lim_{\alpha\nearrow a} F(\alpha) = F(a)$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, adică F este o funcţie continuă la stânga pe $\mathbb{R}$. ■

Exemplul 1.6.3 *Funcţia de distribuţie a variabilei aleatoare $X : \Omega \to \mathbb{R}$ dată de $X(\omega) = 1$ pentru orice $\omega \in \mathbb{R}$ este*

$$F(a) = P(X < a) = \begin{cases} 0, & \text{dacă } a \leq 1 \\ 1, & \text{dacă } a > 1 \end{cases}$$

1.6.1 Exerciţii

1. Pentru variabilele aleatoare indicate, să se determine funcţia de distribuţie corespunzătoare şi să se reprezinte grafic.

   (a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/4 & 1/2 & 1/8 & 1/8 \end{pmatrix}$

   (b) $Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/6 \end{pmatrix}$

2. Se ştie că articolele produse de un anumit producător sunt defecte cu probabilitate de 0.1, independent unele de altele.

   (a) Să se determine variabila aleatoare X reprezentând numărul de piese defecte într-un lot de 4 piese produse.

   (b) Care este probabilitatea ca cel mult două piese produse într-un lot de 4 piese să fie defecte?

3. Să se determine probabilitatea obţinerii a n feţe stemă şi a n feţe ban la aruncarea a $2n$ monede? (rezultatele aruncărilor se presupun independente)

4. Fie X variabila aleatoare ce reprezintă diferenţa dintre numărul de feţe stemă minus numărul de feţe ban ce se obţin la aruncarea de n ori a unui ban (aruncările se presupun independente).

   (a) Să se determine valorile posibile ale variabilei aleatoare X

   (b) În cazul $n = 3$, să se determine variabila aleatoare X.

5. Se aruncă de două ori un zar. Să se determine (valori, probabilităţi) următoarele variabile aleatoare:

   (a) Maximul celor două aruncări;

   (b) Minimul celor două aruncări;

   (c) Suma celor două aruncări;

   (d) Valoarea primei minus celei de-a doua aruncări.