Chapter 4

Curs 4

4.1 Valoarea medie a unei variabile aleatoare

4.1.1 Definiţia integralei

Considerăm μ o măsură σ-finită[1] definită pe un spaţiu măsurabil $(\Omega, \mathcal{F})$. Construcţia integralei $\int_\Omega f d\mu$ se poate face constructiv, definind integrala în următoarele etape:

1. Integrala funcţiilor simple

   O funcţie $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ se numeşte **simplă** dacă se poate scrie sub forma

   $$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{A_i}, \tag{4.1}$$

   unde $n \geq 1$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ şi $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ sunt mulţimi disjuncte cu $\mu(A_i) < +\infty$, $i = 1, \ldots, n$.

   Se defineşte în acest caz

   $$\int \varphi d\mu := \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i),$$

   şi se arată că definiţia este consistentă (nu depinde de reprezentarea lui φ sub forma (4.1), această reprezentare nefiind unică).

   Se demonstrează apoi că integrala astfel definită (pentru functii simple) are proprietăţile aşteptate, adică are loc:

   Lema 4.1.1 *Fie φ şi ψ funcţii simple.*

[1] Măsura μ este prin definiţie σ-finită dacă există mulţimile $A_1, A_2, \ldots$ cu $\mu(A_i) < +\infty$, $i = 1, 2, \ldots$ astfel încât $\Omega = \cup_{i \geq 1} A_i$. În particular, această condiţie este îndeplinită dacă măsura μ este finită, adică dacă $\mu(\Omega) < +\infty$.

(a) (Monotonia) Dacă $\varphi \leq \psi$ a.p.t. (în raport cu μ) atunci $\int \varphi d\mu \leq \int \psi d\mu$.

(b) (Aditivitatea) $\int \varphi + \psi d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu$.

(c) (Omogenitatea) $\int a\varphi d\mu = a \int \varphi d\mu$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

(d) (Egalitatea) Daca $\varphi = \psi$ a.p.t., atunci $\int \varphi d\mu = \int \psi d\mu$.

2. Integrala funcţiilor mărginite definite pe mulţimi de măsură finită

   Se consideră $f : \Omega \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că există $M \in \mathbb{R}$ şi $F \in \mathcal{F}$ cu $\mu(F) < +\infty$ astfel încât $f(x) = 0$ oricare ar fi $x \in F^c$ şi

$$|f(x)| \leq M, \qquad x \in \Omega.$$

   Folosind definiţia funcţiilor simple, se arată că în acest caz

$$\sup_{\substack{\varphi \leq f \\ \varphi - fct.\ simpl\breve{a}}} \int \varphi d\mu = \inf_{\substack{f \leq \psi \\ \psi - fct.\ simpl\breve{a}}} \int \psi d\mu,$$

   şi se defineşte

$$\int f d\mu := \sup_{\substack{\varphi \leq f \\ \varphi - fct.\ simpl\breve{a}}} \int \varphi d\mu = \inf_{\substack{f \leq \psi \\ \psi - fct.\ simpl\breve{a}}} \int \psi d\mu.$$

   Se demonstrează că pentru integrala astfel definită, au loc propreităţile:

   Lema 4.1.2 *Fie $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funcţii mărginite, astfel încât există $F \in \mathcal{F}$ cu $\mu(F) < +\infty$ pentru care $f(x) = g(x) = 0$, oricare ar fi $x \in F^c$.*

   (a) (Monotonia) Dacă $f \leq g$ a.p.t. (în raport cu μ) atunci $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

   (b) (Aditivitatea) $\int f + g d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

   (c) (Omogenitatea) $\int a f d\mu = a \int f d\mu$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

   (d) (Egalitatea) Daca $f = g$ a.p.t., atunci $\int \varphi d\mu = \int \psi d\mu$.

3. Integrala funcţiilor ne-negative

   Dacă $f : \Omega \to [0, +\infty)$ este o funcţie ne-negativă, se defineşte

$$\int f d\mu := \sup \left\{ \int h d\mu : 0 \leq h \leq f,\ h \text{ bounded şi } \mu(\{x \in \mathbb{R} : h(x \neq 0)\}) < +\infty \right\}.$$

   Se demonstrează că pentru integrala astfel definită, au loc propreităţile:

   Lema 4.1.3 *Fie $f, g : \Omega \to [0, +\infty)$ funcţii ne-negtive.*

(a) (Monotonia) Dacă $f \leq g$ a.p.t. (în raport cu μ) atunci $\int fd\mu \leq \int gd\mu$.

(b) (Aditivitatea) $\int f + gd\mu = \int fd\mu + \int gd\mu$.

(c) (Omogenitatea) $\int afd\mu = a \int fd\mu$, oricare ar fi $a > 0$.

(d) (Egalitatea) Daca $f = g$ a.p.t., atunci $\int \varphi d\mu = \int \psi d\mu$.

4. Integrala funcţiilor integrabile

Dată fiind o funcţie $f : \Omega \to \mathbb{R}$, se notează $f^+ = \max\{f, 0\}$ partea pozitivă a lui f, respectiv $f^- = \max\{-f, 0\}$ partea negativă a lui f.

Spunem că funcţia f este integrabilă dacă $\int |f| \, d\mu < +\infty$ (sau echivalent $\int f^+d\mu, \int f^-d\mu < +\infty$), şi în acest caz definim integrala lui f prin

$$\int fd\mu := \int f^+d\mu - \int f^-d\mu.$$

Se demonstrează că pentru integrala astfel definită, au loc proprietăţile:

Teorema 4.1.4 (Proprietăţile integralei) *Fie $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ funcţii integrabile.*

(a) (Monotonia) Dacă $f \leq g$ a.p.t. (în raport cu μ) atunci $\int fd\mu \leq \int gd\mu$.

(b) (Aditivitatea) $\int f + gd\mu = \int fd\mu + \int gd\mu$.

(c) (Omogenitatea) $\int afd\mu = a \int fd\mu$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.

(d) (Egalitatea) Daca $f = g$ a.p.t., atunci $\int \varphi d\mu = \int \psi d\mu$.

Demonstraţie. Exerciţiu. ■

4.1.2 Valoarea aşteptată a unei variabile aleatoare

Considerăm $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un spaţiu de probabilitate fixat.

Definiţia 4.1.5 *Dată fiind variabila aleatoare $X : \Omega \to \mathbb{R}$, pentru care cel puţin una din valorile $\int X^+dP$ sau $\int X^-dP$ sunt finite, definim valoarea aşteptată / valoarea medie / media variabilei aleatoare X prin*

$$M(X) := \int XdP = \int X^+dP - \int X^-dP \in [-\infty, +\infty].$$

Dacă în plus media $M(X) \in (-\infty, +\infty)$ este finită, spunem că X este o variabilă aleatoare integrabilă / cu medie finită.

Pentru un eveniment $f \in \mathcal{F}$, vom nota

$$M(X; F) := M(X \cdot 1_F) = \int X \cdot 1_F dP = \int_F XdP,$$

media variabilei aleatoare X pe mulţimea F.

Fiind definită prin valoarea unei integrale, rezultă că valoarea aşteptată are proprietăţile acesteia, adică are loc:

Teorema 4.1.6 (Proprietăţile mediei) *Dacă X, Y sunt variabile aleatoare integrabile, atunci au loc:*

1. *(Monotonia) Dacă $X \leq Y$ atunci $M(X) \leq M(Y)$.*
2. *(Aditivitatea) $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.*
3. *(Omogenitatea)$M(aX) = aM(X)$, oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$.*
4. *(Egalitatea) Dacă $X = Y$ a.s., atunci $M(X) = M(Y)$.*

Demonstraţie. Rezultă din definiţia mediei folosind Teorema 4.1.4. ■

Următoarea teoremă conţine câteva inegalităţi importante referitoare la media unei variabile aleatoare.

Teorema 4.1.7 *Fie $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ variabile aleatoare integrabile.*

1. *(Inegalitatea lui Jensen) Dacă $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie convexă pentru care există şi este finită media $M(\varphi(X))$, atunci*
$$\varphi(M(X)) \leq M(\varphi(X)).$$
2. *(Inegalitatea lui Hölder) Pentru orice $p, q \in [1, +\infty)$ cu $1/p + 1/q = 1$ are loc*
$$M(|XY|) \leq (M(|X|^p))^{1/p} (M(|Y|^q))^{1/q}.$$
3. *(Inegalitatea lui Cebâşev)Dacă $\varphi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ atunci oricare ar fi $F \in \mathcal{F}$ are loc*
$$P(X \in F) \inf_{x \in F} \varphi(x) \leq M\left(\varphi(X); X^{-1}(F)\right) \leq M(\varphi(X)).$$

   În particular,
$$P(|X| \geq a) \leq \frac{M\left(X^2\right)}{a^2}, \qquad a > 0.$$

Demonstraţie. 1). Cum φ este presupusă convexă, se poate arăta că oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât
$$\varphi(y) \geq \varphi(x) + c(y - x), \qquad y \in \mathbb{R}.$$

În particular, pentru $x = M(X)$ şi $y = X(\omega)$, avem
$$\varphi(X(\omega)) \geq \varphi(M(X)) + c(X(\omega) + M(X)), \qquad \omega \in \Omega,$$

şi deci

$$\begin{aligned} M(\varphi(X)) &\geq M(\varphi(M(X)) + c(X - M(X))) \\ &= M(\varphi(M(X))) + c(M(X) - M(M(X))) \\ &= M(\varphi(M(X))) + c(M(X) - M(X)) \\ &= M(\varphi(M(X))). \end{aligned}$$

2) Fie $1 < p, q < +\infty$ cu $1/p + 1/q = 1$.

Dacă $M(|X|^p) = 0$ sau $M(|Y|^q) = 0$, atunci $X = 0$ a.s. sau $Y = 0$ a.s., şi deci $XY = 0$ a.s. şi are loc egalitatea.

Dacă $M(|X|^p) = 0$ şi $M(|Y|^q) = 0$, atunci folosind inegalitatea lui Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad a, b \geq 0,$$

obţinem

$$\begin{aligned} & M\left(\frac{X}{(M(|X|^p))^{1/p}} \frac{Y}{(M(|Y|^q))^{1/q}}\right) \\ \leq\ & \frac{1}{p} M\left(\left(\frac{X}{(M(|X|^p))^{1/p}}\right)^p\right) + \frac{1}{q} M\left(\left(\frac{Y}{(M(|Y|^q))^{1/q}}\right)^q\right) \\ =\ & \frac{1}{p}\frac{M(X^p)}{M(X^p)} + \frac{1}{q}\frac{M(Y^q)}{M(Y^q)} \\ =\ & \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \\ =\ & 1, \end{aligned}$$

de unde eliminând numitorii se obţine egalitatea din enunţ.

3) Rezultă din monotonia integralei folosind dubla inegalitate

$$1_{\{X \in F\}} \inf_{x \in F} \varphi(x) \leq \varphi(X)\, 1_{\{X \in F\}} \leq \varphi(X).$$

Ultima parte a enunţului rezultă considerând cazul particular $\varphi(x) = x^2$ şi $F = \{|X| \geq a\}$, $a \in \mathbb{R}$ fixat. ■

Următoarea teoremă conţine rezultate trei rezultate importante privind trecerea la limită în valorii medii:

Teorema 4.1.8 *Fie $(X_n)_{n \geq 1}$ un şir de variabile aleatoare.*

1. ***(Teorema convergenţei monotone)*** *Dacă $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots$ un şir crescător de variabile aleatoare ne-negative. Atunci $X = \lim_{n \to \infty} X_n$ este o variabilă aleatoare şi are loc*

$$\lim_{n \to \infty} M(X_n) = M(X).$$

2. ***(Lema Fatou)*** *Dacă* $X_n \geq 0$ *sunt variabile aleatoare ne-negative, atunci*

$$M(\liminf X_n) \leq \liminf M(X_n).$$

3. ***(Teorema convergenţei dominate)*** *Dacă* $X_n \to X$ *a.s. şi există o variabilă aleatoare integrabilă* Y *astfel încât* $|X_n| \leq Y$ *pentru orice* $n \geq 1$, *atunci* X *este o variabilă aleatoare integrabilă şi are loc*

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X).$$

Demonstraţie. 1) Cum şirul X_n este crescător, $X = \lim_{n\to\infty} X_n = \sup_{n\geq 1} X_n$ este o funcţie măsurbailă. De asemenea, din monotonia integralei rezultă $M(X_1) \leq M(X_2) \leq \ldots \leq M(X)$, şi deci

$$\lim_{n\to\infty} M(X_n) \leq M(X).$$

Fie $\alpha \in (0,1)$ arbitrar fixat şi $0 \leq \varphi \leq X$ o variabilă aleatoare simplă. Considerăm evenimentele $A_k = \{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \geq \alpha\varphi(\omega)\} \in \mathcal{F}$, şi observăm că şirul X_n fiind crescător la X, A_n formează un şir crescător de evenimente, cu $\cup_{n\geq 1} A_n = \Omega$ (deoarece $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega) \geq \varphi(\omega) > \alpha\varphi(\omega)$, oricare ar fi $\omega \in \Omega$ cu $\varphi(\omega) \neq 0$).

Avem

$$M(X_n) \geq M(X_n; A_n) \geq M(\alpha\varphi; A_n) = \alpha M(\varphi; A_n), \qquad n \geq 1,$$

de unde trecând la limită obţinem

$$\lim_{n\to\infty} M(X_n) \geq \alpha \lim_{n\to\infty} M(\varphi; A_n) = \alpha M(\varphi).$$

Trecând la supremum cu $0 \leq \varphi \leq f$, din definiţia integrabilităţii obţinem că X este integrabilă şi avem

$$\lim_{n\to\infty} M(X_n) \geq \alpha M(X),$$

şi cum $\alpha \in (0,1)$ este arbitrar, obţinem inegalitatea contrară $\lim_{n\to\infty} M(X_n) \geq M(X)$, şi deci

$$\lim_{n\to\infty} M(X_n) = M(X).$$

2) Fie $f = \liminf X_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} X_k = \sup_{n\geq 1} Y_n$, unde $Y_n = \inf_{k\geq n} X_n$ este un şir crescător de variabile aleatoare ne-negative. Din teorema convergenţei monotone obţinem

$$M(X) = M\left(\lim_{n\to\infty} Y_n\right) = \lim_{n\to\infty} M(Y_n) \leq \liminf M(X_n),$$

deoarece $Y_n = \inf_{k\geq n} X_k \leq X_n$.

3) Să observăm că deoarece $X = \lim_{n\to\infty} X_n = \sup_{n\geq 1} \inf_{k\geq n} X_k$, X este de asemenea o variabilă aleatoare.

De asemenea, din ipoteză avem $|X_n| \leq Y$, sau echivalent $-Y \leq X_n \leq Y$.

Deoarece $X_n + Y \geq 0$, din lema Fatou obţinem

$$M(\liminf (Y + X_n)) \leq \liminf M(Y + X_n),$$

şi deci obţinem $M(\liminf X_n) \leq \liminf M(X_n)$.

Similar, deoarece $Y - X_n \geq 0$, tot din lema Fatou obţinem

$$M(\liminf (Y - X_n)) \leq \liminf M(Y - X_n),$$

şi deci $\limsup M(X_n) \leq M(\limsup X_n)$.

Am obţinut

$$M(\liminf X_n) \leq \liminf M(X_n) \leq \limsup M(X_n) \leq M(\limsup X_n),$$

şi cum $\liminf X_n = \limsup X_n = \lim_{n\to\infty} X_n = X$, rezultă că variabila aleatoare X este integrabilă şi avem

$$\lim_{n\to\infty} M(X_n) = M\left(\lim_{n\to\infty} X_n\right) = M(X).$$

■

Pentru calculul valorilor medii este utilă următoarea:

Teorema 4.1.9 *Dacă X este o variabilă aleatoare şi $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie măsurabilă pentru care există media $M(\varphi(X))$ ($f \geq 0$ sau $M(|\varphi(X)|) < +\infty$), atunci are loc*

$$M(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, \mu(dx),$$

unde $\mu = \mu_X$ este distribuţia variabilei aleatoare X (definită prin $\mu(B) = P(X \in B)$, $B \in \mathcal{B}$).

Dacă în plus variabila aleatoare X are o densitate de distribuţie $f = f_X$, atunci are de asemenea loc

$$M(\varphi(X)) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) f(x)\, dx.$$

EXERCIŢII

Exerciţiul 4.1.1 *Să se demonstreze că definiţia integralei unei funcţii simple nu depinde de alegerea reprezentării.*

Exerciţiul 4.1.2 *Să se demonstreze proprietăţile integralei (în cazul funcţiilor simple, a funcţiilor ne-negative, a funcţiilor mărginite definite pe mulţimi de măsură finită, respectiv în cazul general al funcţiilor integrabile).*

Exerciţiul 4.1.3 *(Principiul includerii şi excluderii) Fie evenimentele* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ *şi* $A = \cup_{i=1}^n A_i$.

1. *Să se arate că* $1_A = 1 - \Pi_{i=1}^n (1 - A_i)$
2. *Să se demonstreze egalitatea*

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) \\ &+ \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n) \end{aligned}$$

Exerciţiul 4.1.4 *(Inegalităţile lui Bonferroni) Fie evenimentele* $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$ *şi* $A = \cup_{i=1}^n A_i$.

1. *Să se arate că* $1_A \le \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$ *şi să se deducă relaţia*

$$P(\cup_{i=1}^n A_i) \le \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

2. *Similar, să se deducă relaţiile*

$$\begin{aligned} P(\cup_{i=1}^n A_i) &\ge \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) \\ P(\cup_{i=1}^n A_i) &\le \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) \end{aligned}$$

Exerciţiul 4.1.5 *Să se demonstreze că dacă* X *este o variabilă aleatoare integrabilă, atunci*

$$|M(X)| \le M(|X|).$$

Exerciţiul 4.1.6 *Să se arate că dacă* $X \ge 0$ *este o variabilă aleatoare integrabilă pe spaţiul de probabilitate* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *cu medie* $M(X) > 0$, *atunci*

$$\mu(A) := \frac{1}{M(X)} M(X; A), \qquad A \in \mathcal{F}$$

este o măsură de probabilitate pe spaţiul măsurabil $(\Omega, \mathcal{F})$.

Exerciţiul 4.1.7 *Să se arate că dacă* $X \ge 0$ *este o variabilă aleatoare integrabilă cu* $M(X) = 0$, *atunci* $X = 0$ *a.s.* ($P(X \ne 0) = 0$).

Exerciţiul 4.1.8 *Să se arate că dacă* X *este o variabilă aleatoare integrabilă şi* $A_n \in \mathcal{F}$ *cu* $\lim_{n \to \infty} P(A_n) = 0$, *atunci*

$$\lim_{n \to \infty} M(X; A_n) = 0.$$

În particular, să se deducă relaţia

$$\lim_{n \to \infty} M(X; \{|X| > n\}) = 0.$$

Exerciţiul 4.1.9 *Să se demonstreze că pentru orice funcţie de distribuţie F si orice $a \geq 0$ are loc*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x+a) - F(x)\, dx = a.$$

Indicaţie: *se scrie $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x+a) - F(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} M\left(1_{\{x<X\leq x+a\}}\right) dx$ şi se foloseşte teorema Fubini (se poate schimba ordinea integrării - media este o integrală!).*

Exerciţiul 4.1.10 *Să se arate că dacă X este o variabilă aleatoare pentru care $E(|X|^n) < +\infty$, atunci pentru orice $m \geq n$ are loc $E(|X|^m) < +\infty$ şi în plus are loc inegalitatea*

$$\left(M\left(|X|^n\right)\right)^{1/n} \leq \left(M\left(|X|^m\right)\right)^{1/m}.$$

Exerciţiul 4.1.11 *Fie $x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_m > 0$ numere reale pozitive astfel încât $p_1 + \ldots + p_n = 1$. Să se aplice inegalitatea Jensen funcţiei $\varphi(x) = e^x$ şi variabilei aleatoare discrete X cu $P(X = \ln x_i) = p_i$, $1 \leq i \leq n$, pentru a deduce ingalitatea:*

$$\prod_{i=1}^{n} y_i^{p_i} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i y_i.$$

În particular, pentru $p_i = \frac{1}{n}$, să se deducă inegalitatea dintre media geometrică şi cea aritmetică.

Exerciţiul 4.1.12 *Să se arate că dacă X este o variabilă aleatoare integrabilă şi A_n, $n \geq 1$, sunt evenimente disjuncte a căror reuniune este $A = \cup_{i\geq 1} A_i$, atunci*

$$\sum_{n=1}^{\infty} M(X; A_n) = M(X; A).$$

Exerciţiul 4.1.13 *Dacă $(X_n)_{n\geq 1}$ este un şir de variabile aleatoare, $X_n \geq 0$, $n \geq 1$, atunci*

$$M\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M(X_n).$$

Exerciţiul 4.1.14 *Să se arate că pentru o variabilă aleatoare ne-negativă $X \geq 0$ are loc*

$$M(X^p) = \int_0^{\infty} p x^{p-1} P(X > x)\, dx.$$

Indicaţie: *$\int_0^{\infty} p x^{p-1} P(X > x)\, dx = \int_0^{\infty} p x^{p-1} M\left(1_{\{X>x\}}\right) dx$ şi se foloseşte teorema Fubini.*

Exerciţiul 4.1.15 *Să se arate că dacă $M(|X|^p) < +\infty$ ($p > 0$), atunci*

$$\lim_{x\to\infty} x^p P(|X| > x) = 0.$$

Exerciţiul 4.1.16 *Să se arate că pentru o variabilă aleatoare ne-negativă* $X \geq 0$ *are loc*

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP\left(n \leq X < n+1\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P\left(X \geq n\right)$$

Exerciţiul 4.1.17 *Să se arate că pentru o variabilă aleatoare ne-negativă* $X \geq$ *are loc*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(X \geq n\right) \leq M\left(X\right) \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} P\left(X \geq n\right),$$

şi deci o variabilă aleatoare $X \geq 0$ *este integrabilă dacă şi numai dacă seria* $\sum_{n=1}^{\infty} P\left(X \geq n\right)$ *este convergentă.*

Indicaţie: $M\left(X\right) = \sum_{n=0}^{\infty} M\left(X; A_n\right)$*, unde* $A_n = \{\omega \in \Omega : n \leq X < n+1\}$ *şi se foloseşte monotonia mediei.*