

Tema 1

Exercițiul 1

Fie A , B și C trei evenimente. Exprimați în funcție de A , B , C și de operațiile cu mulțimi următoarele evenimente:

- a) A singur se realizează
- b) A și C se realizează dar nu și B
- c) cele trei evenimente se produc
- d) cel puțin unul dintre cele trei evenimente se produce
- e) cel puțin două evenimente din cele trei se produc
- f) cel mult un eveniment se produce
- g) niciunul din cele trei evenimente nu se produce
- h) exact două evenimente din cele trei se produc

Exercițiul 2

Într-o urnă se află bile albe și negre într-o proporție oarecare. Se efectuează la întâmplare 5 extrageri cu întoarcere și considerăm A_i evenimentul, din câmpul de evenimente atașat experimentului, ce constă în obținerea unei bile albe la extragerea i , $1 \leq i \leq 5$. Să se exprime următoarele evenimente:

- a) A - numai o bilă este albă;
- b) B - cel puțin o bilă este neagră;
- c) C - obținerea a cel mult două bile albe;
- d) D - obținerea a cel puțin trei bile albe;
- e) E - numai două bile sunt negre.

Exercițiul 3

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un câmp de probabilitate. Arătați că:

- a) funcția $d(A, B) = \mathbf{P}(A \triangle B)$ este o distanță pe \mathcal{F}
- b) $|\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(B)| \leq \mathbb{P}(A \triangle B)$

Exercițiul 4

Într-un sertar se află șosete roșii și negre. Atunci când două șosete sunt scoase la întâmplare, probabilitatea ca ambele să fie de culoare roșie este $\frac{1}{2}$.

- a) Care este numărul minim de șosete din sertar astfel ca proprietatea din ipoteză să fie îndeplinită ?
- b) Care este numărul minim de șosete din sertar dacă numărul de șosete negre este par ?

Exercițiul 5

Fie $n, r > 1$ numere naturale și considerăm ecuația cu r necunoscute:

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n.$$

O soluție a acestei ecuații este un r -tuplu (x_1, \dots, x_r) a cărui sumă a componentelor este n .

- Câte soluții are ecuația de mai sus, cu componente naturale strict pozitive ?
- Câte soluții are ecuația de mai sus, cu componente naturale pozitive ?

Exercițiul 6

Considerăm experimentul în care extragem o mană de 5 cărți dintr-un pachet de cărți de 52 de cărți. Să se calculeze probabilitatea ca:

- Să avem careu (patru cărți de același tip) ?
- Să avem full-house (trei cărți de un tip și două de altul) ?
- Să avem trei cărți de același tip ?
- Să avem două perechi ?
- Să avem o pereche ?

Exercițiul 7

Se dorește verificarea fiabilității unui test de pentru depistarea nivelului de alcool al automobiliștilor. În urma studiilor statistice pe un număr mare de automobiliști, s-a observat că în general 0.5% dintre aceștia depășesc nivelul de alcool autorizat. Niciun test nu este fiabil 100%. Probabilitatea ca testul considerat să fie pozitiv atunci când doza de alcool autorizată este depășită precum și probabilitatea ca testul să fie negativ atunci când doza autorizată nu este depășită sunt egale cu $p = 0.99$.

- Care este probabilitatea ca un automobilist care a fost testat pozitiv să fi depășit în realitate nivelul de alcool autorizat ?
- Cât devine valoarea parametrului p pentru ca această probabilitate să fie de 95% ?
- Un polițist afirmă că testul este mai fiabil sâmbăta seara (atunci când tinerii ies din cluburi). Știind că proporția de automobiliști care au băut prea mult în acest context este de 30%, determinați dacă polițistul are dreptate.

Exercițiul 8

O urnă conține r bile roșii și b bile albastre. O bilă este extrasă la întâmplare din urnă, i se notează culoarea și este întoarsă în urnă împreună cu alte d bile de aceeași culoare. Repetăm acest proces la nesfârșit. Calculați:

- Probabilitatea ca a doua bilă extrasă să fie albastră.
- Probabilitatea ca prima bilă să fie albastră știind că a doua bilă este albastră.
- Fie B_n evenimentul ca a n -a bilă extrasă să fie albastră. Arătați că $\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(B_1)$, $\forall n \geq 1$.
- Probabilitatea ca prima bilă este albastră știind că următoarele n bile extrase sunt albastre. Găsiți valoarea limită a acestei probabilități.

Exercițiul 9

Zece cartonașe pe care sunt scrise cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 și 9 sunt puse într-un bol. Cinci cartonașe sunt extrase la întâmplare și sunt așezate în rând în ordinea extragerii. Care este probabilitatea ca numărul de cinci cifre extras să fie divizibil cu 495 ?

Exercițiul 10

Domnul Ionescu pescuiește în iazul din spatele casei în care trăiesc 3 crapă și 7 carăși. El decide să pescuiască până când prinde 4 pești. Presupunând că fiecare din cei 10 pești are aceeași șansă să fie prins și că toți peștii sunt de greutate diferite, determinați probabilitatea evenimentelor următoare:

$A = \text{unul din cei patru pești prinși este un crap}$

$B = \text{cel puțin unul din cei patru pești prinși este un crap}$

$C = \text{primul pește prins este un crap}$

$D = \text{al doilea pește prins este un crap}$

$E = \text{primii doi pești prinși sunt crapă}$

$F = \text{cel puțin unul din primii doi pești prinși este crap}$

$G = \text{fiecare din ultimii trei pești prinși cântărește mai mult decât cel precedent}$