1.2 Continuitatea măsurii de probabilitate

Considerăm un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ arbitrar fixat.

Una din conceptele importante în Analiză este cel de continuitate al unei funcţii. Reamintim că o funcţie reală de variabilă reală $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este continuă in punctul x dacă

$$\lim_{y \to x} f(y) = f(x), \tag{1.1}$$

sau echivalent (caracterizarea cu şiruri a continuităţii) daca pentru orice şir x_n convergent la x avem

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x), \tag{1.2}$$

adică dacă limita comută cu funcţia f

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right). \tag{1.3}$$

In secţiunea de faţă vom vedea, că pentru definiţia corespunzătoare a limitei unui şir de mulţimi, măsura de probabilitate (funcţia) P este o funcţie continuă de mulţime.

Pentru aceasta, introducem mai întâi următoarea:

Definiţia 1.2.1 *Dat fiind şirul de evenimente $(F_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$, definim evenimentele:*

i) $\liminf F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$

ii) $\limsup F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} F_i \in \mathcal{F}$

iii) Dacă $\liminf F_n = \limsup F_n$, definim limita şirului F_n (notată $\lim F_n$) prin

$$\lim F_n \stackrel{def}{=} \liminf F_n = \limsup F_n \in \mathcal{F}$$

Are loc următoarea:

Propoziţia 1.2.2 *Fie $(F_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{F}$ un şir arbitrar de evenimente. Au loc următoarele:*

i) $\liminf F_n \subseteq \limsup F_n$

ii) Dacă $(F_n)_{n \geq 1}$ este un şir crescător de evenimente (adică dacă $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$), atunci există limita şirului F_n şi are loc

$$\lim_{n \to \infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

(adică limita şirului F_n este reuniunea tuturor evenimentelor F_n)

iii) Dacă $(F_n)_{n \geq 1}$ este un şir descrescător de evenimente (adică dacă $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$), atunci există limita şirului F_n şi are loc

$$\lim_{n \to \infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

(adică limita şirului F_n este intersecţia tuturor evenimentelor F_n).

Demonstraţie. i) Să observăm că pentru $m, n \geq 1$ arbitrar fixaţi are loc incluziunea

$$\bigcap_{i=m}^{\infty} F_i \subset F_{m*n} \subset \bigcup_{i=n}^{\infty} F_i.$$

Cum $n \geq 1$ este arbitrar, obţinem

$$\bigcap_{i=m}^{\infty} F_i \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} F_i = \limsup F_n,$$

oricare ar fi $m \geq 1$.

Rezultă de aici că reuniunea tutror mulţimilor din membrul stâng al acestei incluziuni este de asemenea conţinută in membrul drept, adică

$$\liminf F_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{i=m}^{\infty} F_i \subseteq \limsup F_n,$$

incheiând demonstraţia.

ii) Să observăm că deoarece F_n este un şir crescător, avem $\bigcap\limits_{i=n}^{\infty} F_i = F_n$ pentru orice $n \geq 1$, şi deci avem:

$$\liminf F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} F_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

De asemenea, avem

$$\limsup F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} F_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \liminf F_n,$$

şi cum din punctul anterior avem şi incluziunea contrară, $\liminf F_n \subset \limsup F_n$, rezultă că avem egalitatea

$$\liminf F_n = \limsup F_n,$$

adică limita şirului F_n există, şi are loc

$$\lim_{n \to \infty} F_n = \liminf F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_i.$$

iii) Similar cu punctul anterior, sa observăm ca avem in acest caz $\bigcup\limits_{i=n}^{\infty} F_i = F_n$ pentru orice $n \geq 1$, şi deci avem:

$$\limsup F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} F_i = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n.$$

De asemenea, avem

$$\liminf F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{i=n}^{\infty} F_i \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i = \limsup F_n,$$

şi cum din punctul i) avem şi incluziunea contrară, $\liminf F_n \subset \limsup F_n$, rezultă că avem egalitatea

$$\liminf F_n = \limsup F_n,$$

adică limita şirului F_n există, şi are loc

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \limsup F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_i,$$

încheiând demonstraţia propoziţiei. ■

Observaţia 1.2.3 *Să observăm că un eveniment elementar* ω *aparţine evenimentului* $\liminf F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{i=n}^{\infty} F_i$ *dacă şi numai dacă există un indice* $n \geq 1$ *cu proprietatea că* $\omega \in \bigcap\limits_{i=n}^{\infty} F_i$*, adică dacă* ω *aparţine tuturor evenimentelor* F_m *pentru* $m \geq n$*. Evenimentul* $\liminf F_n$ *este aşadar format din toate evenimentele elementare ce aparţin tuturor evenimentelor* F_n*, începând de la un anumit rang.*

Similar se poate arăta că evenimentul $\limsup F_n$ *este format din toate evenimentele elementare* ω *ce aparţin unui număr infinit de evenimente* F_n *(adică există un şir* $n_1 < n_2 < \ldots$ *astfel încât* $\omega \in F_{n_1} \cap F_{n_2} \cap \ldots$*).*

Observaţia 1.2.4 *Se poate arăta că definiţiile pentru* $\liminf$ *şi* $\limsup$ *din Definiţia 1.2.1 corespund celor pentru numere reale, în următorul sens: notând cu* $I_F : \Omega \to \{0, 1\}$ *funcţia caracteristică a unei mulţimi* $F \subset \Omega$*, definită prin*

$$I_F(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{dacă } \omega \in F \\ 0, & \text{dacă } \omega \in \Omega - F \end{cases},$$

se poate arăta că au loc următoarele egalităţi:

i) $\liminf F_n = \{\omega \in \Omega : \liminf I_{F_n}(\omega) = 1\}$

ii) $\limsup F_n = \{\omega \in \Omega : \limsup I_{F_n}(\omega) = 1\}$

iii) Dacă există $\lim_{n\to\infty} F_n$*, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \left\{\omega \in \Omega : \text{există } \lim_{n\to\infty} I_{F_n}(\omega) \text{ şi } \lim_{n\to\infty} I_{F_n}(\omega) = 1\right\}$$

Cu această pregătire putem demonstra următoarea proprietate de continuitate a măsurii de probabilitate P, ca o funcţie de mulţime:

Propoziţia 1.2.5 (Continuitatea măsurii de probabilitate) *Dacă* $(F_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ *este un ţir de evenimente pentru care există* $\lim_{n\to\infty} F_n$*, atunci*

$$P\left(\lim_{n\to\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(F_n).$$

În particular, dacă $(F_n)_{n\geq 1}$ este un şir crescător de evenimente atunci are loc

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(F_n\right),$$

iar dacă $(F_n)_{n\geq 1}$ este un şir descrescător de evenimente are loc

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(F_n\right)$$

Demonstraţie. Considerăm mai întâi cazul particular ăn care $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ este un şir crescător de evenimente (şi deci conform Propoziţiei 1.2.2 $\lim_{n\to\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ în acest caz).

Să notăm

$$\begin{cases} E_1 = F_1 \\ E_2 = F_2 - F_1 \\ \ldots \\ E_n = F_n + F_{n-1}, \qquad n \geq 2 \end{cases},$$

şi să observăm că evenimentele E_n sunt incompatibile ($E_i \cap E_j = \emptyset$ for $i \neq j$) şi au loc relaţiile

$$\bigcup_{n=1}^{N} E_n = F_N,$$

oricare ar fi $N \geq 1$, şi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Avem

$$\begin{aligned} P\left(\lim_{n\to\infty} F_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(E_n\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} P\left(E_n\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) \\ &= \lim_{N\to\infty} P\left(F_N\right). \end{aligned}$$

Să considerăm acum cazul în care $F_1 \supset F_2 \supset \ldots$ este un şir descrescător de evenimente. Notând $E_n = F_n^c = \Omega - F_n$, $n \geq 1$, $(E_n)_{n\geq 1}$ formează un şir crescător de evenimente. Conform demonstraţiei anterioare avem deci

$$P\left(\lim_{n\to\infty} E_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(E_n\right),$$

sau echivalent

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\Omega - F_n)\right) = \lim_{n\to\infty} P(\Omega - F_n),$$

de unde obţinem

$$\begin{aligned} 1 - P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) &= P\left(\Omega - \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P(\Omega - F_n) \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} P(F_n), \end{aligned}$$

adică

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(F_n).$$

Pentru cazul general, să presupunem că există $\lim_{n\to\infty} F_n$, şi deci $\liminf F_n = \limsup F_n$.

Conform demonstraţiilor anterioare avem:

$$P(\limsup F_n) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcup_{i=n}^{\infty} F_i)}_{\text{şir descrescător}} = \lim_{n\to\infty} P(\bigcup_{i=n}^{\infty} F_i) = \limsup P(\bigcup_{i=n}^{\infty} F_i) \geq \limsup P(F_n),$$

şi similar

$$P(\liminf F_n) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{\bigcap_{i=n}^{\infty} F_i)}_{\text{şir crescător}} = \lim_{n\to\infty} P(\bigcap_{i=n}^{\infty} F_i) = \liminf P(\bigcap_{i=n}^{\infty} F_i) \leq \liminf P(F_n).$$

Din inegalităţile anterioare (şi folosind faptul că $\liminf \leq \limsup$) rezultă

$$P(\liminf F_n) \leq \liminf P(F_n) \leq \limsup P(F_n) \leq P(\limsup F_n),$$

şi cum $\liminf F_n = \limsup F_n$, rezultă că avem există $\lim_{n\to\infty} P(F_n)$ (deoaerece $\liminf P(F_n) = \limsup P(F_n)$) şi are loc

$$P\left(\lim_{n\to\infty} F_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(F_n),$$

încheiând demonstraţia. ■

Are loc următoarea

Propoziţia 1.2.6 (Inegalitatea lui Boole) *Pentru un şir* $(F_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}$ *de evenimente are loc inegalitatea*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n).$$

Demonstraţie. Definim

$$\begin{cases} E_1 = F_1 \\ E_2 = F_2 - F_1 \\ E_3 = F_3 - (F_1 \cup F_2) \\ \dots \\ E_n = F_n - (F_1 \cup \ldots \cup F_{n-1}), \qquad n \geq 2 \end{cases}.$$

Observăm că evenimentele E_n sunt incompatibile ($E_i \cap E_j = \emptyset$ pentru $i \neq j$) şi $\cup_{n=1}^{\infty} E_n = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$. Avem

$$\begin{aligned} P\left(\cup_{n=1}^{\infty} F_n\right) &= P\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(E_n\right) \qquad \left(E_n \subset F_n\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\left(F_n\right), \end{aligned}$$

încheiând demonstraţia. ■

1.2.1 Exerciţii