Chapter 6

Curs 6

6.1 Convergenţa variabilelor aleatoare

În teoria probabilităţilor, există mai multe noţiuni de convergenţă a variabilelor aleatoare. Convergenţa unui şir de variabile aleatoare (în sensul uneia din definiţiile de mai jos) este un concept important în teoria probabilităţilor, si are diverse aplicaţii (spre exemplu în statistică).

Considerăm în continuare un şir de variabile aleatoare $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \geq 1)$ şi $X : \Omega \to \mathbb{R}$ o variabilă aleatoare definite un spaţiu de probabilitate $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ fixat.

Definiţia 6.1.1 *Fie $F_1, F_2, \ldots$ funcţiile de distribuţie ale variabilelor aleatoare $X_1, X_2, \ldots$ şi fie F funcţia de distribuţie a variabilei aleatoare X. Spunem că şirul de variabile aleatoare X_n converge în distribuţie la variabila aleatoare X şi notăm $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$ (sau $X_n \Longrightarrow X$) dacă*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),$$

pentru orice punct $x \in \mathbb{R}$ de continuitate al funcţiei F.

Observaţia 6.1.2 *Se poate pune problema dacă acest tip de convergenţă determină în mod unic funcţia de distribuţie F corespunzătoare, adică dacă valoarea $F(x)$ a funcţiei de distribuţie F este unic determinată în punctele x de discontinuitate (de prima speţă) ale lui F. Pentru aceasta, să observăm că F fiind o funcţie de distribuţie, este continuă la dreapta în orice punct, iar mulţimea punctelor de discontinuitate este cel mult numărabilă. Rezultă de aici că dacă şirul de variabile aleatoare converge în distribuţie la o anumită variabilă aleatoare, atunci funcţia de distribuţie corespunzătoare este unic determinată.*

Exemplul 6.1.3 *Fie F funcţia de distribuţie a variabilei aleatoare X, şi să considerăm $X_n = X + 1/n$, $n \geq 1$. Atunci $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$, deoarece funcţia de distribuţie F_n a variabilei aleatoare X_n este dată de*

$$F_n(x) = P(X_n \leq x) = P(X + 1/n \leq x) = P(X \leq x - 1/n) = F(x - 1/n),$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} F(x - 1/n) = \lim_{y \nearrow x} F(y) = F(x-),$$

şi deci $F_n(x) \to F(x)$ numai în punctele de continuitate ale funcţiei F (pentru care $F(x-) = F(x)$).

Aşa după cum vom vedea în continuare, convergenţa în distribuţie este cel mai slab tip de convergenţă, care nu implică în general nici unul din celelalte tipuri de convergenţă. Din acest motiv convergenţa în distribuţie se mai numeşte şi convergenţă slabă.

Următoarea teoremă dă o caracterizare echivalentă a noţiunii de convergenţă în distribuţie:

Teorema 6.1.4 *Şirul X_n converge în distribuţie la X dacă şi numai dacă*

$$\lim_{n\to\infty} M(f(X_n)) = M(f(X))$$

pentru orice funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă şi mărginită.

Pentru demonstraţia teormei avem nevoie de următorul rezultat:

Lema 6.1.5 *Dacă $F, F_1, F_2, \ldots$ sunt funcţii de distribuţie cu $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ în toate punctele de continuitate x ale lui F, atunci există variabile aleatoare $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ având funcţiile de distribuţie $F, F_1, F_2, \ldots$ astfel încât $Y_n \stackrel{a.s.}{\to} Y$.*

Demonstraţie. Dacă $X_n \stackrel{\mathcal{D}}{\to} X$, atunci $F_n(x) \to F(x)$ în toate punctele de continuitate ale lui F, şi din lema anterioară rezultă că există variabilele aleatoare $Y, Y_1, Y_2, \ldots$ având funcţiile de distribuţie $F, F_1, F_2, \ldots$ astfel încât $Y_n \stackrel{a.s.}{\to} Y$.

Cum $Y_n \stackrel{a.s.}{\to} Y$ şi f este continuă, rezultă că $f(Y_n) \stackrel{a.s.}{\to} f(Y)$, şi din Teorema convergenţei dominate obţinem

$$M(f(X_n)) = M(f(Y_n)) \to M(f(Y)) = M(f(X)).$$

Reciproc, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat, consideăm funcţia $f = f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită de

$$f(y) = \begin{cases} 1, & y \le x \\ -\frac{1}{\varepsilon}(y - x - \varepsilon), & y \in (x, x+\varepsilon) \\ 0, & y \ge x + \varepsilon \end{cases}$$

Funcţia f astfel definită este continuă şi mărginită, şi din ipoteză obţinem

$$\limsup P(X_n \le x) \le \limsup M(f(X_n)) = M(f(X)) \le P(X \le x + \varepsilon),$$

sau echivalent

$$\limsup F_n(x) \le F(x + \varepsilon),$$

de unde trecând la limită cu $\varepsilon \searrow 0$ obţinem (fiind o funcţie de distribuţie, funcţia F este continuă la dreapta)

$$\limsup F_n(x) \leq F(x+0) = F(x).$$

În mod similar se obţine

$$\liminf F_n(x) \geq F(x-0),$$

şi deci

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

în orice punct de continuitate x al lui F, încheiând demonstraţia. ■

Are loc următoarea:

Propoziţia 6.1.6 *Dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi X_n converge în distribuţie la X, atunci $f(X_n)$ converge în distribuţie la $f(X)$.*

Demonstraţie. Dacă $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi mărginită, atunci $g \circ f$ este de asemenea o funcţie continuă şi mărginită, şi din teorema anterioară avem deci

$$\lim_{n\to\infty} M(g(f(X_n))) = M(g(f(X))).$$

Cum funcţia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă şi mărginită a fost arbitrar aleasă, din teorema anterioară rezultă că $f(X_n) \xrightarrow{\mathcal{D}} f(X)$ ■

Un tip mai puternic de convergenţă, care implică convergenţa în distribuţie, este convergenţa în probabilitate:

Definiţia 6.1.7 *Spunem că şirul de variabile aleatoare X_n converge în probabilitate la variabila aleatoare X şi notăm $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$ dacă*

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0,$$

pentru orice $\varepsilon > 0$.

Are loc următoarea:

Teorema 6.1.8 *Dacă $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$ atunci $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$.*

Demonstraţie. Să observăm mai întâi că oricare ar fi variabilele aleatoare Y şi Z şi numerele reale $c \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon > 0$ avem

$$\begin{aligned} P(Y \leq c) &= P(Y \leq c, Z \leq c+\varepsilon) + P(Y \leq c, Z > c+\varepsilon) \\ &\leq P(Z \leq c+\varepsilon) + P(Z - Y > \varepsilon) \\ &\leq P(Z \leq c+\varepsilon) + P(|Z - Y| > \varepsilon). \end{aligned}$$

În particular, obţinem

$$P(X_n \leq x) \leq P(X \leq x+\varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon)$$

şi

$$P(X \le x - \varepsilon) \le P(X_n \le x) + P(|X_n - X| > \varepsilon).$$

Avem deci

$$P(X \le x - \varepsilon) - P(|X_n - X| > \varepsilon) \le P(X_n \le x) \le P(X \le x + \varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon),$$

sau echivalent

$$F(x - \varepsilon) - P(|X_n - X| > \varepsilon) \le F_n(x) \le F(x + \varepsilon) + P(|X_n - X| > \varepsilon),$$

oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ şi $\varepsilon > 0$.

Cum $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$, trecând la limită cu $n \to \infty$, avem

$$F(x - \varepsilon) \le \liminf F_n(x) \le F(x + \varepsilon),$$

oricare ar fi $\varepsilon > 0$. Dacă x este un punct de continuitate al funcţiei F, atunci trecând la limită cu $\varepsilon \searrow 0$ obţinem

$$F(x) = F(x - 0) \le \liminf F_n(x) \le F(x + 0) = F(x),$$

şi deci $\liminf F_n(x) = F(x)$. În mod similar se demonstrează că $\limsup F_n(x) = F(x)$, şi deci rzultă că $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ în orice punct x de continuitate al lui F, adică $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$. ■

Observaţia 6.1.9 *Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată (a se vedea Exerciţiul ???).*

Un alt tip, mai puternic de convergenţă decât convergenţa în probabilitate este convergenţa aproape sigură:

Definiţia 6.1.10 *Spunem că şirul de variabile aleatoare X_n converge aproape sigur la variabila aleatoare X şi notăm $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ dacă $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$ pentru aproape toţi $\omega \in \Omega$, adică dacă*

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1.$$

Are loc următoarea:

Teorema 6.1.11 *Dacă $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ atunci $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$.*

Demonstraţie. Pentru un $\omega \in \Omega$ fixat, să observăm că $X_n(\omega) \to X(\omega)$ dacă şi numai dacă $\forall m \ge 1$ $\exists N = N(m) \ge 1$ astfel încât $\forall n \ge N$ avem $|X_n(\omega) - X(\omega)| < \varepsilon$, şi deci

$$\{X_n \to X\} = \bigcap_{m\ge1} \bigcup_{N\ge1} \bigcap_{n\ge N} \left\{|X_n - X| < \frac{1}{m}\right\},$$

sau echivalent (trecând la evenimentul contrar)

$$0 = P\left(X_n \nrightarrow X\right) = P\left(\bigcup_{m\geq 1}\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N}\left\{|X_n - X| \geq \frac{1}{m}\right\}\right),$$

de unde obţinem

$$P\left(\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N}\left\{|X_n - X| \geq \frac{1}{m}\right\}\right) = 0,$$

oricare ar fi $m \geq 1$.

Din continuitatea măsurii de probabilitate ($A_N = \bigcup_{n\geq N}\left\{|X_n - X| \geq \frac{1}{m}\right\}$, $N \geq 1$ fiind un şir descrescător de mulţimi), obţinem

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} P\left(|X_N - X| \geq \frac{1}{m}\right) &\leq \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{n\geq N}\left\{|X_n - X| \geq \frac{1}{m}\right\}\right)\\ &= P\left(\bigcap_{N\geq 1}\bigcup_{n\geq N}\left\{|X_n - X| \geq \frac{1}{m}\right\}\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

şi deci $\lim_{N\to\infty} P\left(|X_N - X| \geq \frac{1}{m}\right) = 0$ oricare ar fi $m \geq 1$.

Pentru un $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat, alegând $m \geq 1$ astfel încât $\frac{1}{m} < \varepsilon$, obţinem

$$\lim_{N\to\infty} P\left(|X_N - X| \geq \varepsilon\right) \leq \lim_{N\to\infty} P\left(|X_N - X| \geq \frac{1}{m}\right) = 0,$$

şi deci

$$\lim_{N\to\infty} P\left(|X_N - X| \geq \varepsilon\right) = 0,$$

adică X_n converge în probabilitate la X. ■

Implicaţia reciprocă nu este în general adevărată, aşa după cum rezultă din următorul exemplu:

Exemplul 6.1.12 *Considerăm $X_1, X_2, \ldots$ un şir de variabile aleatoare independente cu $P(X_n = 1) = 1/n, P(X_n = 0) = 1 - 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Se poate arăta că $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$ dar $P\left(X_n \text{ nu converge}\right) = 1$, şi deci şirul X_n nu converge aproape sigur.

Următoarea teoremă dă o caracterizare echivalentă a noţiunii de convergenţă în probabilitate:

Teorema 6.1.13 *Şirul de variabile aleatoare X_n converge în probabilitate la variabila aleatoare X dacă şi numai dacă orice subşir X_{n_k} conţine un subşir $X_{n_{k_l}}$ ce converge aproape sigur la X.*

Demonstraţie. Fie $\varepsilon_l > 0$ un şir descrescător de numere reale pozitive cu $\varepsilon_l \searrow 0$. Cum $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$, rezultă că $X_{n_k} \xrightarrow{\mathcal{P}} X$, şi deci pentru orice $l \geq 1$ fixat avem

$$\lim_{k\to\infty} P\left(|X_{n_k} - X| \geq \varepsilon_l\right) < \frac{1}{2^l}.$$

Putem deci construi şirul de indici $k_1 < k_2 < \ldots < k_l < \ldots$ astfel încât

$$P\left(\left|X_{n_{k_l}} - X\right| \geq \varepsilon_l\right) < \frac{1}{2^l}, \qquad l = 1, 2, \ldots,$$

şi deoarece

$$\sum_{l=1}^{\infty} P\left(\left|X_{n_{k_l}} - X\right| \geq \varepsilon_l\right) \leq \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^l} = 1 < +\infty,$$

din Lema Borel-Cantelli rezultă că

$$P\left(\limsup \left\{\left|X_{n_{k_l}} - X\right| \geq \varepsilon_l\right\}\right) = 0.$$

Cum şirul $\varepsilon_l \searrow 0$, rezultă că $\{X_n \to X\} \subset \left\{\limsup \left\{\left|X_{n_{k_l}} - X\right| \geq \varepsilon_l\right\}\right\}$, şi deci $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

Reciproc, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar fixat, să considerăm şirul de numere reale $x_n = P\left(|X_n - X| > \varepsilon\right)$, $n \geq 1$. Din ipoteză rezultă că oricare ar fi subşirul x_{n_k} al lui x_n, există un subşir $x_{n_{k_k}}$ al acestuia, pentru care $x_{n_{k_l}} \to 0$. Se poate arăta căUn ultim tip de convergenţă des folosit este cel al convergenţei în medie, definit astfel: ■

Definiţia 6.1.14 *Spunem că şirul de variabile aleatoare X_n converge în medie de ordin $p \geq 1$ la variabila aleatoare X şi notăm $X_n \xrightarrow{L^p} X$ dacă $M\left(|X_n|^p\right) < +\infty$ pentru orice $n \geq 1$ şi are loc*

$$\lim_{n\to\infty} M\left(|X_n - X|^p\right) = 0.$$

În cazul particular $p = 1$, spunem că şirul X_n converge în medie la X şi notăm $X_n \xrightarrow{L} X$.

Are loc următoarea:

Teorema 6.1.15 *Dacă $X_n \xrightarrow{L^p} X$ pentru un $p > 0$, atunci $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$.*

Demonstraţie. Pentru orice $\varepsilon > 0$ avem

$$\varepsilon^p P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = M\left(\varepsilon^p 1_{\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}}\right) \leq M\left(|X_n - X|^p \, 1_{\{|X_n - X| \geq \varepsilon\}}\right) \leq M\left(|X_n - X|^p\right),$$

de unde trecând la limită cu $n \to \infty$ obţinem

$$\varepsilon^p \lim_{n\to\infty} \varepsilon^p P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} M\left(|X_n - X|^p\right) = 0,$$

şi deci $\lim_{n\to\infty} \varepsilon^p P\left(|X_n - X| \geq \varepsilon\right) = 0$, adică $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$. ■

Observaţia 6.1.16 *Reciproca acestei teoreme nu este în general adevărată (a se vedea Exerciţiul ???). De asemenea, convergenţa în medie de ordin* $p \geq 1$ *nu implică convergenţa în probabilitate (a se vedea Exerciţiul ???), iar convergenţa în probabilitate nu implică convergenţa în medie de ordin* p *(a se vedea Exerciţiul ???).*

Folosind inegalitatea lui Holder se poate demonstra următoarea

Teorema 6.1.17 *Dacă* $p \geq q \geq 1$ *şi* $X_n \xrightarrow{L^p} X$*, atunci* $X_n \xrightarrow{L^q} X$*.*

Demonstraţie. Cum $p/q \geq 1$, din inegalitatea lui Holder obţinem

$$\begin{aligned} M\left(|X_n - X|^q\right) &= M\left(|X_n - X|^q \cdot 1\right) \leq \left(M\left(\left(|X_n - X|^q\right)^{p/q}\right)\right)^{q/p} \left(M\left(1^{q/(p-q)}\right)\right)^{(p-q)/q} \\ &= \left(M\left(|X_n - X|^p\right)\right)^{q/p}, \end{aligned}$$

de unde trecând la limită cu $n \to \infty$ rezultă afirmaţia din enunţ. ■

EXERCIŢII

Exerciţiul 6.1.1 (Lema Fatou) *Să se arate că dacă* $X_n \geq 0$ *şi* $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$*, atunci*

$$\liminf M\left(X_n\right) \geq M\left(X\right).$$

Exerciţiul 6.1.2 (Teorema convergenţei dominate) *Să se arate că dacă* $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$ *şi* $|X_n| \leq Y$ *pentru* $n = 1, 2, \ldots$*, unde* $M(Y) < +\infty$*, atunci*

$$\lim_{n \to \infty} M\left(X_n\right) = M\left(X\right).$$

Exerciţiul 6.1.3 *Să se arate că dacă* $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X'$ *şi* $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X''$ *atunci* $X' = X''$ *a.s.*

Exerciţiul 6.1.4 *Fie* $X_1, X_2, \ldots$ *un şir de variabile aleatoare cu*

$$P\left(X_n = 1\right) = p_n, \quad P\left(X_n = 0\right) = 1 - p_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

i) *Să se arate că* $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$ *dacă şi numai dacă* $\lim_{n \to \infty} p_n = 0$*;*

ii) *Să se arate că* $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ *dacă şi numai dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} p_n < +\infty$*.*

Exerciţiul 6.1.5 *Fie* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *un spaţiu de probabilitate discret (adică* Ω *este o mulţime cel mult numărabilă). Să se arate că în acest caz* $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$ *implică* $X_n \xrightarrow{a.s.} X$*.*

Exercişiul 6.1.6 *Fie* $X_1, X_2, \ldots$ *un ;ir de variabile aleatoare independente şi* $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, $n = 1, 2, \ldots$ *Să se arate că* S_n *converge aproape sigur dacă şi numai dacă* S_n *converge în probabilitate.*

Exerciţiul 6.1.7 *Să se arate că dacă* $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} X$ *şi există* $M > 0$ *astfel încât* $P(|X_n| \le M) = 1$ *pentru* $n = 1, 2, \ldots$, *atunci* $X_n \xrightarrow{L^p} X$ *pentru orice* $p \ge 1$.

Exerciţiul 6.1.8 *Fie* $X_1, X_2, \ldots$ *un şir de variabile aleatoare cu*

$$P\left(X_n = n^3\right) = \frac{1}{n^2}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

i) *Folosind prima parte a lemei Borel-Cantelli, să se arate că* $X_n \xrightarrow{a.s.} 0$;

ii) *Să se arate că* $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$;

iii) *Să se arate că* $\lim_{n\to\infty} M(X_n) = +\infty$ *(şi deci* $X_n \overset{L^p}{\nrightarrow} X$*)*

Exerciţiul 6.1.9 *Fie* $X_1, X_2, \ldots$ *un şir de variabile aleatoare independente cu*

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{n}, \quad P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

i) *Folosind a doua parte a lemei Borel-Cantelli, să se arate că* $P(X_n = 0 \text{ i.o.}) = 1$;

ii) *Folosind a doua parte a lemei Borel-Cantelli, să se arate că* $P(X_n = 1 \text{ i.o.}) = 1$;

iii) *Să se arate că* $P(X_n \text{ nu converge}) = 1$;

iv) *Să se arate că* $X_n \xrightarrow{L^p} 0$ *pentru orice* $p \ge 1$;

v) *Să se arate că* $X_n \xrightarrow{\mathcal{P}} 0$.

Exerciţiul 6.1.10 *Să se arate că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*

a) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$

b) *Pentru orice* $\varepsilon > 0$ *avem* $P(|X_n - X| > \varepsilon \text{ i.o.}) = 0$;

c) *Pentru orice* $\varepsilon > 0$ *avem* $\lim_{n\to\infty} P(|X_k - X| > \varepsilon \text{ pentru un } k \ge n) = 0$.

Exerciţiul 6.1.11 *Folosind exerciţiul anterior şi prima parte a lemei Borel-Cantelli, să se arate că*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) < +\infty$$

pentru orice $\varepsilon > 0$ *este o condiţie suficientă pentru convergenţa* $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

Dacă în plus variabilele aleatoare sunt şi independente, atunci condiţia anterioară este şi necesară pentru convergenţa $X_n \xrightarrow{a.s.} X$.

Exercițiul 6.1.12 *Fie* $A_1, A_2, \ldots$ *un șir de evenimente independente cu* $P(A_n) < 1$, $n = 1, 2, \ldots$. *Să se arate că* $P(\cup_{n\geq 1} A_n) = 1$ *implică* $P(A_n \ i.o.) = 1$.