Chap. 1,3 — Détermination pratique des incertitudes

Table des matières

Attention

Aucune des formules présentées dans ce document ne doit être apprise par cœur **car elles seront systématiquement données** si nécessaire.

En revanche, il serait souhaitable que vous soyez capables de choisir quelle formule utiliser et il est impératif que **vous sachiez calculer l'incertitude à partir de cette dernière**.

1 Détermination de l'incertitude lorsqu'on peut effectuer une série de mesures

Lorsqu'un même opérateur répète plusieurs fois le mesurage de la même grandeur dans les mêmes conditions expérimentales, il peut trouver des résultats différents. Il en est de même lorsque des opérateurs différents réalisent simultanément le mesurage de la même grandeur avec du matériel similaire.

Dans de tels cas, on utilise des notions de statistiques (moyenne et écart type) pour analyser les résultats.

Document 1. Incertitude de répétabilité

L'incertitude de mesure correspondant à des mesures répétées d'une même grandeur est appelée **incertitude de répétabilité**. Elle est liée à l'**écart type** de la série de mesures.

- Pour une série de n *mesures indépendantes* donnant des valeurs mesurées m_k l'écart type de la série de mesures est :

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(m_k - \overline{m})^2}{n-1}}$$

où $\overline{m}$ est la valeur moyenne de la série de mesures.
L'écart type est obtenu en utilisant les fonctions statistiques d'une calculatrice ou d'un tableur.

- L'**incertitude de répétabilité** associée à la mesure est :

$$U(m) = k\,\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Elle dépend du nombre n de mesures indépendantes réalisées, de l'écart type de la série de mesures et d'un coefficient k appelé **facteur d'élargissement**.

- Le **facteur d'élargissement** k dépend du *nombre de mesures réalisées* n et du *niveau de confiance* choisi.

Exemple :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\mathbf{k_{95\%}}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23	2,20	2,18	2,16	2,15	2,13
$\mathbf{k_{99\%}}$	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,17	3,11	3,06	3,01	2,98	2,95

— Pour un *même nombre de mesures*, plus le niveau de confiance est grand et plus k est grand.

— Pour un *même niveau de confiance*, plus le nombre n de mesures indépendantes est grand et plus k est petit.

Exemple 1. La mesure Δt de la durée de chute d'un objet depuis une fenêtre a été répétée 16 fois avec un chronomètre de qualité. Les résultats obtenus, exprimés en seconde, sont les suivants :

1,38	1,45	1,41	1,45	1 43	1,41	1,46	1,39	1,43	1,48	1,38	1,44	1,40	1,42	1,39	1,44

- La valeur moyenne des mesures vaut : $\Delta t = 1{,}4225$ s.
- L'écart type est égal à : $\sigma_{n-1} = 0{,}0300$ s.
- L'incertitude avec le niveau de confiance 95% est :

$$U(\Delta t) = 2{,}13 \times \frac{0{,}0300\ \text{s}}{\sqrt{16}} = 0{,}0160\ \text{s}$$

- L'incertitude avec le niveau de confiance 99% est :

$$U(\Delta t) = 2{,}95 \times \frac{0{,}0300\ \text{s}}{\sqrt{16}} = 0{,}0229\ \text{s}$$

La durée de la chute de l'objet est donc égale à $\Delta t = (1{,}423 \pm 0{,}016)$ s avec un niveau de confiance de 95% ou égale à $\Delta t = (1{,}423 \pm 0{,}023)$ s avec un niveau de confiance de 99%.

2 Détermination de l'incertitude lorsqu'on n'effectue qu'une seule mesure

Lorsqu'une mesure ne peut pas être reproduite plusieurs fois, il est *impossible d'estimer une incertitude de répétabilité*. Il est alors nécessaire d'analyser les différentes sources d'erreurs liées à l'instrument de mesure.

2.1 Utilisation d'un appareil gradué

Document 2. Cas d'une lecture simple sur une échelle graduée

Lorsque la mesure est obtenue par **une seule lecture sur une échelle ou un cadran**, pour un niveau de confiance de 95%, l'incertitude de cette mesure a pour expression :

$$U_{\text{lecture}} = \frac{2 \times \text{Valeur Plus Petite Graduation}}{\sqrt{12}}$$

Exemple 2. Une balance numérique au 1/100 de gramme affiche une masse $m = 38{,}45\,\text{g}$. Cette balance étant graduée à 0,01 g près, $U = \dfrac{2 \times 0{,}01\,\text{g}}{\sqrt{12}} = 0{,}005\,77\,\text{g}$ et le résultat de la mesure s'écrit $m = (38{,}450 \pm 0{,}006)\,\text{g}$.

Document 3. Cas d'une double lecture sur une échelle graduée

Lorsque la mesure nécessite une double lecture, les incertitudes liées à la lecture peuvent se cumuler ou se compenser, totalement ou partiellement. Pour un niveau de confiance de 95%, l'incertitude de cette mesure a pour expression :

$$U_{\text{double lecture}} = \sqrt{2\left(\frac{2 \times \text{Valeur Plus Petite Graduation}}{\sqrt{12}}\right)^2} = \sqrt{2}\,U_{\text{lecture}}$$

Exemple 3. La mesure de la distance séparant deux récepteurs à ultrason nécessite de repérer par rapport à une règle les positions de ces deux dispositifs : c'est une *double mesure.*

La règle étant graduée au millimètre, $U = \sqrt{2} \times \dfrac{2 \times 1\,\text{mm}}{\sqrt{12}} = 0{,}82\,\text{mm}$.

Remarque. En pratique, on peut arrondir cette incertitude à $U = 1\,\text{mm}$.

Exemple 4. La mesure de la période f d'un signal périodique affiché sur l'écran d'un oscilloscope nécessite de repérer deux points de la courbe et de lire leurs abscisses : c'est une *double mesure.*

La plus petite graduation, sur l'écran de l'oscilloscope, étant égale à 0,2 division, $U = \sqrt{2} \times \dfrac{2 \times 0{,}2\,\text{division}}{\sqrt{12}} = 0{,}163\,\text{division}$. *Pour obtenir l'incertitude en secondes, il ne reste plus alors qu'à multiplier par la base de temps.*

2.2 Utilisation d'un appareil dont le constructeur a indiqué la tolérance

Document 4. Cas d'une mesure obtenue avec un appareil de tolérance connue

Lorsque la mesure est obtenue avec un appareil pour lequel le constructeur indique la tolérance t (notée $\pm t$), l'incertitude liée à la tolérance de cet appareil a pour expression :

$$U = \frac{2\,t}{\sqrt{3}}$$

Exemple 5. En chimie, les fabricants indiquent toujours la tolérance sur la verrerie jaugée. Par exemple, la tolérance d'une pipette jaugée de 10 mL, de classe A, est égale à $\pm 0{,}02\,\text{mL}$.

L'incertitude sur la mesure du volume lors de l'utilisation de cette pipette jaugée vaut donc $U = \dfrac{2 \times 0{,}02\,\text{mL}}{\sqrt{3}} = 0{,}023\,\text{mL}$ et le volume prélevé est égal à $(10{,}00 \pm 0{,}02)\,\text{mL}$.

Exemple 6. Un élève mesure un volume d'eau de 40,0 mL avec une burette graduée de 50 mL de classe A (tolérance ±0,05 mL). L'incertitude U vaut donc $U = \dfrac{2 \times 0{,}05\,\text{mL}}{\sqrt{3}} = 0{,}0577\,\text{mL}$ et le volume mesuré est $(40{,}00 \pm 0{,}06)\,\text{mL}$

3 Évaluation d'une incertitude sur une mesure dans laquelle interviennent plusieurs sources d'erreurs

Lors d'un mesurage, il est fréquent d'avoir plusieurs sources d'erreurs à prendre en compte.

C'est notamment le cas lorsque :

- le mesurage fait intervenir une ou plusieurs lectures avec un appareil de tolérance donnée ;
- le mesurage fait intervenir un calcul avec des valeurs dont les incertitudes sont connues.

Document 5.

Lorsque la grandeur évaluée est le résultat d'un calcul où interviennent plusieurs mesures, on peut évaluer l'incertitude $U(m)$ en utilisant les relations suivantes :

- Si $m = x + y + z + \ldots$, alors $U(m)^2 = U(x)^2 + U(y)^2 + U(z)^2 + \ldots$;
- Si $m = x \cdot \dfrac{y}{z}$, alors $\left(\dfrac{U(m)}{m}\right)^2 = \left(\dfrac{U(x)}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{U(y)}{y}\right)^2 + \left(\dfrac{U(z)}{z}\right)^2$

Exemple 7. On déterminer la valeur d'une résistance électrique R par mesures la la tension U à ses bornes et de l'intensité I du courant qui la traverse. On obtient les valeurs suivantes : $U = (19{,}8 \pm 0{,}3)\,\text{V}$ et $I = (0{,}120 \pm 0{,}005)\,\text{A}$.
La loi d'ohm se traduisant mathématiquement par $R = \dfrac{U}{I}$,

- $R = \dfrac{(19{,}8 \pm 0{,}3)\,\text{V}}{(0{,}120 \pm 0{,}005)\,\text{A}} = 165\,\Omega$;
- $\left(\dfrac{U(R)}{R}\right)^2 = \left(\dfrac{U(U)}{U}\right)^2 + \left(\dfrac{U(I)}{I}\right)^2$, donc $\left(\dfrac{U(R)}{R}\right)^2 = \left(\dfrac{0{,}3\,\text{V}}{19{,}8\,\text{V}}\right)^2 + \left(\dfrac{0{,}005\,\text{A}}{0{,}120\,\text{A}}\right)^2 = 0{,}02$;
- $U(R) = 0{,}02 \times 165\,\Omega = 7{,}4\,\Omega$;

Finalement, $R = (165 \pm 7)\,\Omega$.

Exemple 8. Un élève manipule une burette graduée de tolérance $t = \pm 0{,}05$ mL. On suppose qu'il utilise une méthode de lecture du volume correcte. On ne prend donc en compte que l'incertitude de lecture sur l'échelle graduée de la burette.

1. Pour faire une mesure de volume versé, il doit faire deux lectures de volume successives : le zéro et le volume versé. L'incertitude associée à chaque lecture vaut donc :

$$U_{\text{lecture}} = \sqrt{2} \times \frac{2 \times 0{,}1\,\text{mL}}{\sqrt{12}} = 0{,}0816\,\text{mL}$$

2. L'incertitude liée à la tolérance indiquée par le constructeur vaut :

$$U_{\text{tolérance}} = \frac{2 \times 0{,}05\,\text{mL}}{\sqrt{3}} = 0{,}0577\,\text{mL}$$

L'incertitude finale est a pour expression ici : $U(V) = \sqrt{U^2_{\text{lecture}} + U^2_{\text{tolérance}}}$

$$U(V) = \sqrt{(0{,}0816\,\text{mL})^2 + (0{,}0577\,\text{mL})^2} = 0{,}0816\,\text{mL}$$