

# Les graphes : structure de données

## Chapitre 15,1

---

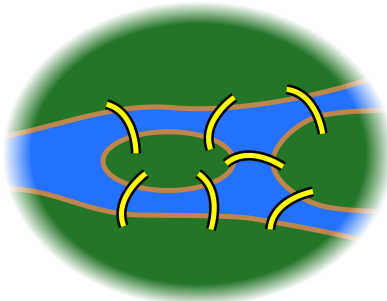
### Table des matières

<b>1 Un peu d'histoire : Les Ponts de Königsberg</b>	<b>1</b>
Comment Euler a-t-il résolu le problème en 1735 ?	2
<b>2 Graphes</b>	<b>2</b>
<b>3 Graphes non orientés</b>	<b>2</b>
3.1 Définitions	2
3.2 Vocabulaire	4
3.3 Qu'est-ce qu'un arbre ?	5
3.4 Matrice sommet-sommet pour un graphe non orienté : matrice d'adjacence	6
3.5 Liste d'adjacence	7
3.6 Exercices	7
<b>4 Graphes orientés</b>	<b>11</b>
4.1 Définitions	11
4.2 Vocabulaire	12
4.3 Qu'est-ce qu'une arborescence ?	13

---

## 1 Un peu d'histoire : Les Ponts de Königsberg

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad en Russie) est construite autour de deux îles situées sur le Pregel et reliées entre elles par un pont. Six autres ponts relient les rives de la rivière à l'une ou l'autre des deux îles.

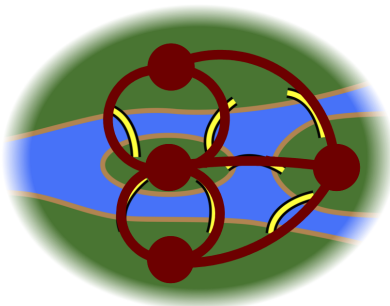


- 1) Existe-t-il une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de *passer une et une seule fois par chaque pont*, et de *revenir à son point de départ*, étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts ?

- 2) Existe-t-il une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de *passer une et une seule fois par chaque pont* ?

### Comment Euler a-t-il résolu le problème en 1735 ?

Il a représenté les quartiers par des nœuds et les ponts par des arêtes et cherché si un parcours passant par toutes les arêtes une et une seule fois existait.



## 2 Graphes

Un **graphe** est un objet abstrait composé d'**éléments** — les *sommets* — et de **relations entre ces éléments** — les *arêtes* (graphes non orientés) ou les *arcs* (graphes orientés).

Un graphe permet de représenter des liens d'amitié entre des personnes, des lignes aériennes entre des villes, des câbles entre des ordinateurs, des références entre des pages web, etc. Ce concept est utilisé dans l'industrie (informatique, recherche opérationnelle, etc) mais dans la recherche (étude de réseaux sociaux, biologie, mathématiques, etc.)

Un graphe peut être :

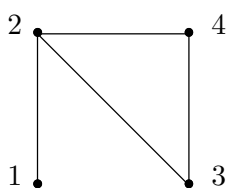
- **orienté** ou **non orienté** ;
- **pondéré** ou **non pondéré**.

## 3 Graphes non orientés

### 3.1 Définitions

**Définition. (Graphe non orienté)** *Un graphe non orienté  $G$  est défini par un couple  $G=(V, E)$ , où  $V$  est un ensemble de sommets et  $E$  un ensemble d'arêtes.*

**Exemple 1.**

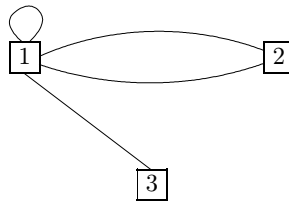


- 3) Pour le graphe de l'exemple 1, donner l'ensemble  $V$  des nœuds, puis l'ensemble  $E$  des arêtes.
- 4) Soit le graphe  $G = (V, E)$  tel que  $V = \{a, b, c, d, e\}$  et  $E = \{\{a, b\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{a, c\}\}$ . Représenter  $G$ .

**Définition.** Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté.

- Une **boucle** est une arête  $\{u, u\}$  avec  $u \in V$ ;
- Une arête  $e = \{u, v\}$  est **multiple** s'il existe au moins deux arêtes  $\{u, v\}$  dans  $E$ .

**Exemple 2.**



**Définition.** Un graphe non orienté **simple**  $G$  est un graphe sans boucle ni arête multiple.

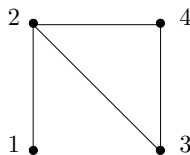
Dans ce cours, on suppose a priori que tous les graphes non orientés sont simples.

### 3.2 Vocabulaire

**Définition.** Tous les **sommets voisins**  $v_i$  d'un sommet  $u$ , c'est à dire liés à  $u$  par la formation d'une arête,  $\{u, v_i\}$  constituent l'ensemble des **sommets adjacents** à  $u$ .

On appelle **degré** d'un sommet le nombre de sommets adjacents à ce sommet.

- 5) Pour le graphe de l'exemple 1,

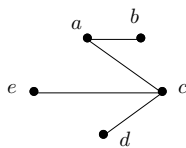


indiquer l'ensemble des sommets adjacents au sommet 4 ainsi que son degré.

Même question pour le sommet 1.

Même question pour le sommet 2.

- 6) Pour le graphe

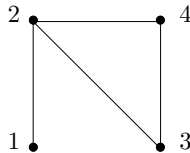


indiquer l'ensemble des sommets adjacents au sommet  $c$  et son degré.

**Théorème.** Pour tout graphe  $G=(V, E)$  non orienté la somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arrêtes.

**Définition. (Chaîne)** Une chaîne (walk) est une séquence de sommets et d'arêtes  $v=v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_n e_n v_{n+1}$  avec  $v_i \in V$  pour  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  et  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\} \in E$  pour  $i \in 1, \dots, n$ .

7) Pour le graphe de l'exemple 1,



donner trois chaînes différentes.

**Définition. (Chaîne élémentaire)** Une **chaîne élémentaire** (path) est une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet

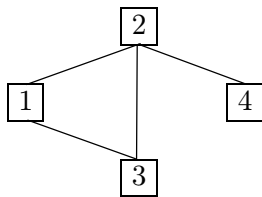
**Définition. (Cycle)** Un **cycle** est une chaîne fermée (i.e. telle que  $v_{n+1} = v_1$ ).

8) Le graphe de l'exemple 1 contient un cycle. Indiquer ce cycle.

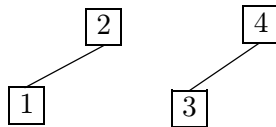
**Proposition.** Si  $G=(V, E)$  est un graphe sans cycle élémentaire, alors  $m \leq n-1$  avec  $m$  le nombre d'arêtes et  $n$  le nombre de sommets.

**Définition. (Graphe connexe)** Un graphe non orienté connexe est tel que, pour tout couple  $(u, v) \in V^2$ , il existe une chaîne élémentaire entre  $u$  et  $v$ .

9) Les deux graphes suivants sont-ils connexes ?



a)

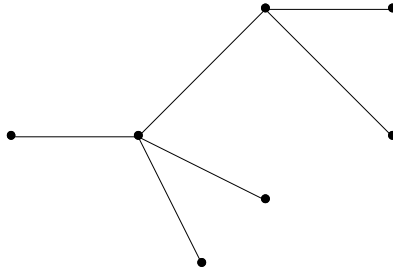


b)

### 3.3 Qu'est-ce qu'un arbre ?

**Définition.** Soit  $T=(V, E)$  un graphe non orienté.  $T$  est un **arbre** si  $T$  est **connexe sans cycle élémentaire**.

**Exemple 3.**



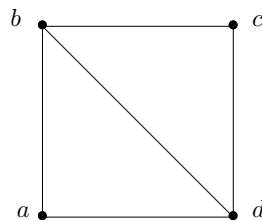
**Proposition.** *Un arbre  $T$  est un graphe  $T=(V, E)$  connexe pour lequel  $m=n-1$  avec  $m$  le nombre d'arêtes et  $n$  le nombre de sommets. La réciproque est vraie.*

### 3.4 Matrice sommet-sommet pour un graphe non orienté : matrice d'adjacence

**Définition.** *Une matrice est un tableau de nombres à deux dimensions qui indique la relation qui existe entre deux vecteurs.*

*C'est donc aussi la transformation qu'il faut opérer à partir d'un vecteur pour en trouver un autre.*

**Exemple 4.** On considère le graphe non orienté suivant :



10) Compléter le tableau à deux dimensions suivant :

	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

- Indiquer par un 1 si les sommets sont adjacents, par un 0 s'ils ne le sont pas ;
- Un sommet n'est adjacent avec lui-même que s'il existe une boucle.

11) Écrire la matrice sommet-sommet ou matrice d'adjacence de ce graphe.

**Théorème.** *La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique par rapport à la diagonale.*

### 3.5 Listes d'adjacence

**Définition.** *La liste d'adjacence d'un graphe  $G=(V, E)$  non orienté est la liste des sommets adjacents à chaque sommet.*

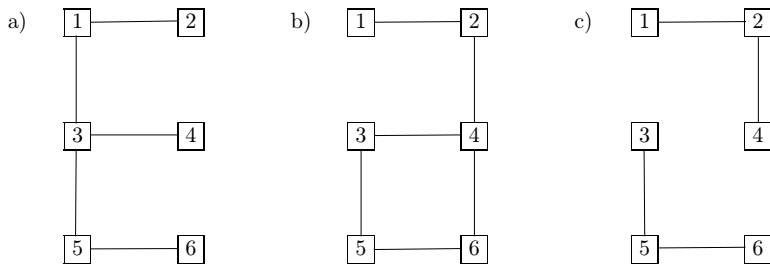
12) Donner la liste d'adjacence du graphe de l'exemple 4.

### 3.6 Exercices

**Exercice 1.** Dans cet exercice, on considère le graphe non orienté  $G_0 = (V_0, E_0)$ , avec  $V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  $E_0 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 1\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}\}$ . On pose  $n_0$  le nombre de sommets et  $m_0$  le nombre d'arêtes.

1. Représenter le graphe  $G_0$ .
2. Donner les valeurs de  $n_0$  et  $m_0$ .
3. Quels sont les sommets adjacents au sommet 3 ?
4. Quelles sont les arêtes incidentes au sommet 3 ?
5. Quel est le degré de chacun des sommets de  $G_0$  ?  
Vérifier la validité du théorème qui dit que pour un graphe non orienté la somme des degrés de tous les sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes.
6. Donner une chaîne élémentaire de  $G_0$  et un cycle élémentaire de  $G_0$ . Préciser dans chaque cas leurs longueurs respectives (en nombre d'arêtes).
7. Le graphe  $G_0$  est-il connexe ? Justifier la réponse.

**Exercice 2.** Est-ce que les graphes non orientés suivants sont des arbres ? Justifiez vos réponses. Dans la négative, quelle(s) arête(s) doit on enlever/rajouter pour obtenir un arbre ?



**Exercice 3.** Donnez tous les arbres différents à 1, 2, 3, 4 ou 5 sommets.

**Exercice 4.**

1. Soit le graphe  $G_1 = (V_1, E_1)$  tel que  $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $E_1 = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}, \{1, 3\}\}$ .
  - a. Représenter  $G_1$ .
  - b. Donner la matrice d'adjacence de  $G_1$ .
  - c. Donner la liste d'adjacence de  $G_1$ .

2. Mêmes questions pour le graphe défini par la matrice d'adjacence

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Mêmes questions pour le graphe défini par la liste d'adjacence

$$L_3 = \begin{cases} 1 \rightarrow [2] \\ 2 \rightarrow [1, 3] \\ 3 \rightarrow [2, 4, 5] \\ 4 \rightarrow [3] \\ 5 \rightarrow [3] \end{cases}$$

4. Mêmes questions pour le graphe défini par la matrice d'adjacence

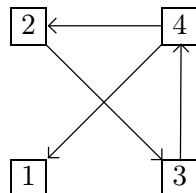
$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Exercice 5.** Que doit vérifier une matrice carrée  $M$  pour être la matrice sommet-sommet d'un graphe non orienté ?

## 4 Graphes orientés

### 4.1 Définitions

**Définition.** Un graphe orienté  $G$  est défini par un couple  $G = (V, A)$ , où  $V$  est un *ensemble de sommets* et  $A$  un *ensemble d'arcs*.



$G = (V, A)$  avec  $V = \{1, 2, 3, 4\}$   
et  $A = \{(2, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$

**Avertissement.** Pour un graphe non orienté, on parle d'arêtes  $\{u, v\}$ , pour un graphe orienté on parle d'arcs  $(u, v)$ .

$$\{u, v\} = \{v, u\} \text{ (évident) mais } (u, v) \neq (v, u)$$

**Définition.** Un graphe orienté est connexe si le graphe non orienté obtenue en remplaçant chaque arc par une arête est connexe.

13) Le graphe  $G$  ci-dessus est-il connexe ?

## 4.2 Vocabulaire

**Définition. (Successeurs)** Pour tout sommet  $u \in V$ , l'ensemble des sommets  $\{v \in V, (u, v) \in A\}$  tels qu'il existe un arc  $(u, v)$  constitue l'ensemble des successeurs de  $u$ .

14) Pour le graphe  $G$  ci-dessus, donner l'ensemble des successeurs du sommet 4 puis l'ensemble des successeurs du sommet 1.

**Définition. (Prédécesseurs)** Pour tout sommet  $u \in V$ , l'ensemble des sommets  $\{v \in V, (v, u) \in A\}$  tels qu'il existe un arc  $(v, u)$  constitue l'ensemble des prédécesseurs de  $u$ .

15) Pour le graphe  $G$  ci-dessus, donner l'ensemble des prédécesseurs du sommet 4 puis l'ensemble des prédécesseurs du sommet 1.

**Avertissement.** Pour un graphe non orienté on parle de **sommets adjacents**, pour un graphe orienté on distingue les **sommets successeurs et prédécesseurs**.

**Définition. (Chemin)** Un chemin est une séquence de sommets et d'arcs  $\nu = v_1 e_1 v_2 e_2 \dots v_n e_n v_{n+1}$  avec  $v_i \in V$  et  $e_i = (v_i, v_{i+1}) \in A$ .

**Avertissement.** Pour un graphe non orienté on parle de **chaîne**, pour un graphe orienté on parle de **chemin**.

16) Pour le graphe  $G$  ci-dessus, donner trois chemins différents.

**Définition. (Chemin élémentaire)** Un chemin est dit élémentaire s'il ne passe pas deux fois par le même sommet.

17) Pour le graphe  $G$  ci-dessus, donner un chemin qui n'est pas élémentaire.

**Définition. (Circuit)** Un circuit est un chemin élémentaire  $\nu$  tel que  $v_{n+1} = v_1$ .  
Un circuit élémentaire est un chemin élémentaire tel que  $v_{n+1} = v_1$ .

**Avertissement.** Pour un graphe non orienté on parle de **cycle**, pour un graphe orienté on parle de **circuit**.

18) Pour le graphe  $G$  ci-dessus, donner un circuit. Ce circuit est-il élémentaire ?

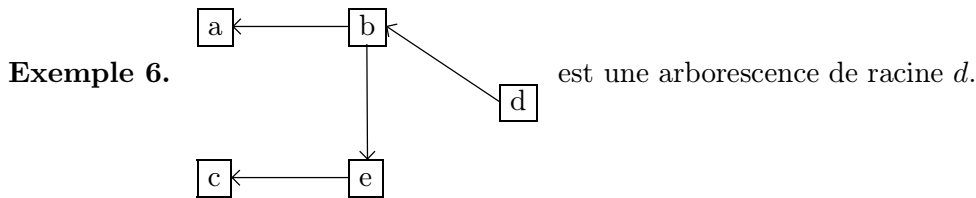
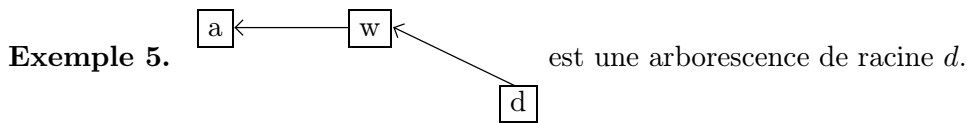


### 4.3 Qu'est-ce qu'une arborescence ?

**Définition. (Arborescence)** Une arborescence est un graphe orienté  $G_r = (V, A)$  construit à partir d'un arbre  $T = (V, E)$  et d'un sommet  $r \in V$ .

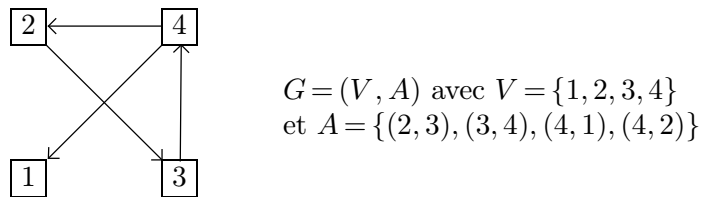
1.  $G_r$  et  $T$  ont les mêmes sommets ;
2. Les arcs de  $G_r$  correspondent aux arêtes de  $T$  orientés du sommet  $r$  vers les feuilles.

$r$  est la racine de  $G_r$ . Il s'agit de l'unique sommet de  $G_r$  sans prédécesseur.



### 4.4 Matrice sommet-sommet pour un graphe orienté

19) Soit le graphe orienté  $G$  tel que



Donner la matrice sommet-sommet  $R$  pour ce graphe.

Les règles de construction sont les suivantes :

- Les seules valeurs possibles dans cette matrice appartiennent à l'ensemble  $\{0, 1\}$ , donc

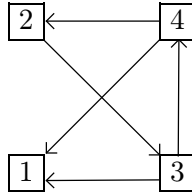
$$R[i, j] \in \{0, 1\}$$

- La valeur 1 est utilisée si le second sommet est successeur du premier sommet, donc

$$R[i, j] = 1 \text{ si/si } (i, j) \in A$$

## 4.5 Listes de successeurs

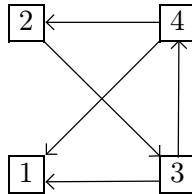
20) Soit le graphe orienté  $G$  tel que



Pour  $i \in V$ ,  $L[i]$  est la liste des sommets successeurs de  $i$ . Donner la liste  $L$ .

## 4.6 Listes de prédécesseurs

21) Soit le graphe orienté  $G$  tel que



Pour  $i \in V$ ,  $P[i]$  est la liste des sommets prédécesseurs de  $i$ . Donner la liste  $P$ .

## 4.7 Exercices

**Exercice 6.** Dans cet exercice, on considère le graphe orienté  $G_0 = (V_0, A_0)$ , avec  $V_0 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  et  $A_0 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (2, 4), (3, 4), (2, 5), (3, 5), (4, 5), (5, 4), (6, 7)\}$ . On pose  $n_0$  le nombre de sommets et  $m_0$  le nombre d'arcs.

1. Dessiner le graphe  $G_0$ . Que valent  $n_0$  et  $m_0$  ?
2. Pour chaque sommet  $v$  de  $G_0$ , donner l'ensemble des successeurs de  $v$  et l'ensemble des prédécesseurs de  $v$ .
3. Donner un chemin élémentaire de  $G_0$  et un circuit élémentaire de  $G_0$ , ainsi que leurs longueurs (en nombre d'arcs) respectives.
4. Représenter le graphe non orienté  $G'_0$  associé à  $G_0$  en enlevant l'orientation des arcs. Le graphe  $G_0$  est-il connexe ? Justifier la réponse.

**Exercice 7.**

1. Soit le graphe  $G_1 = (V_1, A_1)$  tel que  $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$  et  $A_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (2, 4), (3, 4)\}$ .
  - a. Représenter le graphe  $G_1$ .

b. Donner la matrice sommet-somme  $R_1$ .

c. Donner la liste des successeurs de chaque sommet de  $G_1$ .

2. Donner toutes les informations pour le graphe  $G_2$  défini par la matrice sommet-sommet suivante

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Donner toutes les informations pour le graphe  $G_3$  défini par la matrice sommet-sommet suivante

$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Donner toutes les informations pour le graphe  $G_4$  défini par la liste des successeurs suivante

$$L_4 = \begin{cases} 1 \rightarrow [4, 5] \\ 2 \rightarrow [3] \\ 3 \rightarrow [2] \\ 4 \rightarrow [] \\ 5 \rightarrow [] \end{cases}$$