Chap. 08,02 : Mouvements dans un champ de pesanteur uniforme

Table des matières

1 Champ de pesanteur

1.1 Notion de champ

Document 1.

En physique, un champ est la valeur, **en chaque point de l'espace**, d'une grandeur physique. Cette grandeur physique peut être **scalaire** (pression, température, ...) ou **vectorielle** (vitesse, champ électrique, ...).

Les physiciens pensent que toutes les interactions sont assurées par des **champs** — gravitationnel, électromagnétique, nucléaire, etc. Un corps A suscite l'apparition dans l'espace d'un **champ de forces** qui se manifeste par des forces appliquées à n'importe quel objet B placé en ce point (et sensible à cette interaction bien sûr). Ce champ de forces existe que l'objet B soit présent ou pas et peut perdurer après la disparition ou le déplacement du corps A [a]

[a] En effet l'information selon laquelle A s'est déplacé ou a disparu se propage à vitesse finie (cf. cours sur les ondes). Par exemple, on voit dans le ciel des étoiles qui ont disparu ou qui ne se trouvent plus à l'endroit où on les vise.

1.2 Champ de pesanteur

1.2.1 Champ de pesanteur en un point de l'espace

On modélise l'interaction entre une masse m_1 ponctuelle, placée en un point M quelconque au voisinage de la Terre et cette dernière par une force appelée poids, notée $\vec{P}_1$, de direction la verticale du lieu et dirigée vers la Terre et de valeur proportionnelle à la masse m_1.

De même, une masse m_2 placée au même point M est soumise au poids $\vec{P}_2$ de mêmes direction et sens que $\vec{P}_1$ et de valeur proportionnelle à la masse m_2.

On peut renouveler l'opération avec une masse m_3, on obtient un comportement similaire à ceux décrits ci-dessus.

Donc,

$$\frac{\vec{P}_1}{m_1} = \frac{\vec{P}_2}{m_2} = \frac{\vec{P}_3}{m_3} = \dots$$

La Terre communique donc au point M une propriété telle que *toute masse ponctuelle qui est placée en ce point est soumise à une action proportionnelle à la valeur de cette masse et appelée poids.* **L'action par unité de masse qu'exerce la Terre sur n'importe quelle masse en un point M est appelée le *champ de pesanteur au point* M** et notée $\vec{g}(M)$.

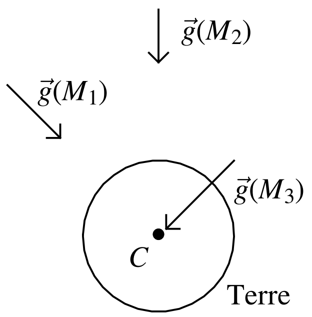
Donc

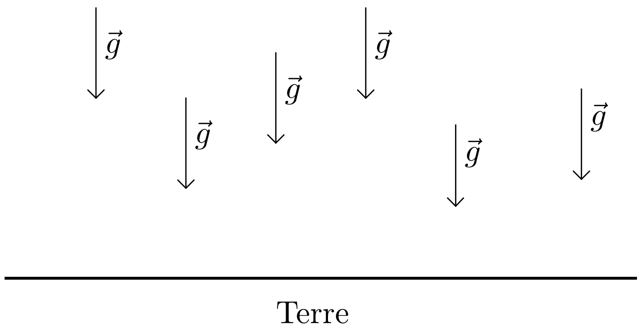
$$\vec{g}(M) = \left(\frac{\vec{P}_1}{m_1}\right)_{\text{en } M} = \left(\frac{\vec{P}_2}{m_2}\right)_{\text{en } M} = \left(\frac{\vec{P}_3}{m_3}\right)_{\text{en } M} = \dots$$

ou

$$\vec{P}_{\text{en } M} = m\,\vec{g}(M)$$

1.2.2 Champ de pesanteur uniforme





À l'échelle de la planète, la direction et la valeur du champ de pesanteur varient. Cependant, on peut déterminer que pour deux points de la surface de la terre distants de 2 kilomètres l'angle que font entre eux deux vecteurs champ de pesanteur est de l'ordre de 0,01 ° et que l'intensité (ou valeur) du champ de pesanteur varie de moins de 1% lorsqu'on s'élève de 32 km. Par conséquent, pour des régions de l'espace limitées à quelques kilomètres, on peut considérer que $\vec{g}$ est un *vecteur pratiquement constant*. On dit alors que le *champ de pesanteur est uniforme*.

2 Modélisation de l'interaction avec un fluide

Document 2.

En physique on appelle **fluide** un milieu parfaitement déformable. On regroupe sous cette appellation les liquides, les gaz et les plasmas.

2.1 Poussée d'Archimède

Document 3.

La poussée d'Archimède est la force qui s'exerce sur un objet immobile ou en mouvement, plongé totalement ou partiellement dans un fluide soumis à un champ de pesanteur.

La poussée d'Archimède correspond à une **action verticale, vers le haut** et égale **au poids du fluide déplacé par l'objet**, de la part du fluide sur l'objet.

$$\vec{\Pi} = \begin{cases} \text{point d'application :} & \text{centre d'inertie de l'objet} \\ \text{direction :} & \text{droite verticale} \\ \text{sens :} & \text{vers le haut} \\ \text{valeur :} & \Pi = m_{\text{fluide}}\, g = \rho_{\text{fluide}}\, V_{\text{objet immergé}}\, g \end{cases}$$

où ρ_{fluide} est la masse volumique du fluide et $V_{\text{objet immergé}}$ le volume de l'objet immergé dans le fluide.

Plus fondamentalement, la poussée d'Archimède est la résultante des forces pressantes qu'exerce le fluide sur la surface de l'objet : *la pression étant plus forte sur la partie inférieure d'un objet immergé que sur sa partie supérieure, il en résulte une poussée globalement verticale orientée vers le haut.*

En Terminale Spé. PC

S'il est nécessaire, dans un exercice, d'utiliser la poussée d'Archimède, ses caractéristiques vous seront rappelées.

Note. La poussée d'Archimède peut souvent être négligée lorsqu'on étudie le mouvement d'un objet de petit volume et beaucoup plus dense que le fluide.

Exercice 1

À partir des caractéristiques de la force $\vec{\Pi}$ données dans la définition, écrire son expression vectorielle en fonction du vecteur champ de pesanteur $\vec{g}$.

Réponse

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{objet immergé}} \vec{g}$$

Cette écriture indique bien que les vecteurs $\vec{\Pi}$ et $\vec{g}$ sont colinéaires, de sens opposés et que $\Pi = \rho_{\text{fluide}} V_{\text{objet immergé}}\, g$.

2.2 Force de frottement fluide

Document 4.

Une force de frottement fluide est une force de contact qu'il faut ajouter à la poussée d'Archimède pour modéliser l'interaction d'un fluide et d'un objet **en mouvement** dans ce dernier.

$$\vec{f}\left\{\begin{array}{ll} \text{direction :} & \text{celle du vecteur vitesse } \vec{v} \\ \text{sens :} & \text{opposé à celui du vecteur vitesse } \vec{v} \\ \text{valeur :} & f = kv^n \end{array}\right.$$

où le coefficient k exprime la proportionnalité entre f et v.

Cette force dépend de la *vitesse de l'objet par rapport au fluide*, de la *forme et de la texture de cet objet* ; les valeurs du coefficient de proportionnalité k et de l'exposant n dans l'expression de la valeur de la force $\vec{f}$ dépendent donc de la situation expérimentale étudiée (n est souvent égal à 1 ou 2).

Note. La force de frottement fluide peut souvent être négligée lorsqu'on étudie le mouvement d'un objet de petit volume, dense et se déplaçant à faible vitesse par rapport au fluide.

En Terminale Spé. PC

S'il est nécessaire, dans un exercice, d'utiliser la force de frottement fluide, ses caractéristiques vous seront rappelées.

Exercice 2

À partir des caractéristiques de la force $\vec{f}$ données dans la définition, écrire son expression vectorielle en fonction du vecteur vitesse $\vec{v}$.

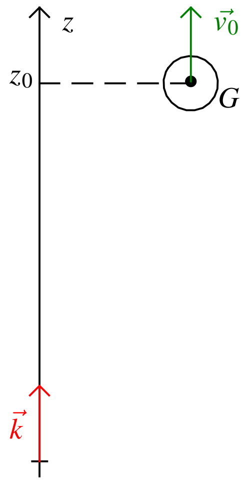
Réponse

$$\vec{f} = -kv^{n-1}\,\vec{v}$$

Cette écriture indique bien que les vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, de sens opposés et que $f = kv^{n-1}v = kv^n$.

3 Chute verticale dans le champ de pesanteur uniforme

3.1 Situation étudiée

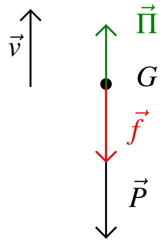


On lance une balle, de masse m, verticalement vers le haut depuis l'altitude z_0 au dessus de l'origine choisie.
On cherche à déterminer :

1. L'altitude maximale z_{max} jusqu'à laquelle la balle va s'élever.
2. La valeur de la vitesse v_1 lorsque la balle repassera à l'altitude z_0 et en particulier la relation entre v_1 et v_0.
3. Au bout de quelle durée la balle atteint le sol (origine des altitudes) et avec quelle vitesse.

3.2 Mise en équation

1. Système = {balle}
2. Étude des interactions :
   - Système – Terre modélisée par le poids $\vec{P}$
   - Système – Air modélisée par la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ et la force de frottement fluide $\vec{f}$
3. Référentiel d'étude = {terrestre, considéré galiléen}
4. Schéma :



5. Deuxième loi de Newton :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f}$$

avec $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement du système.

Comme la masse m du système est constante, $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}_G$ et

$$m\vec{a}_G = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f}$$

À ce stade, on effectue l'hypothèse suivante (généralement indiquée dans les exercices) : *la balle est un système de petit volume, beaucoup plus dense que l'air dans lequel elle se déplace.* On peut donc négliger l'interaction du système avec l'air.

$$m\vec{a}_G = \vec{P} = m\vec{g}$$

ou

$$\vec{a}_G = \vec{g} \tag{1}$$

L'accélération du système est colinéaire au champ de pesanteur. C'est une constante, le mouvement est *uniformément accéléré.*

Document 5.

Un système dont l'équation du mouvement est $\vec{a}_G = \vec{g}$ est dit en « chute libre dans le champ de pesanteur » (ici terrestre).

3.3 Obtention des équations horaires du mouvement

Document 6.

On appelle **équations horaires** les expressions des coordonnées d'un système en fonction du temps.

3.3.1 Projection de l'équation du mouvement

La relation (1) est vectorielle, on choisit un repère afin de la transformer en système d'équations scalaires. Comme le mouvement sera manifestement vertical — à une dimension donc — on choisit le repère cartésien $(O; \vec{k})$.

Dans ce repère, $\vec{g} = -g\vec{k}$ que l'on peut écrire : $\vec{g} \quad (-g)$ et $\vec{a}_G = a_z\vec{k}$ que l'on peut écrire : $\vec{a}_G \quad (a_z)$.

Note. L'inconnue a_z, comme toute composante d'un vecteur le long d'une axe, est une **grandeur algébrique** (positive, nulle ou négative, donc) ; son **signe** donne une indication du **sens** du vecteur $\vec{a}_G$ (comparativement à celui du vecteur $\vec{k}$), sa **valeur absolue** est égale à la **valeur** du vecteur $\vec{a}_G$.

En Terminale Spé. PC

Comment reconnaître ou indiquer qu'une grandeur est algébrique ? Généralement on indique en indice l'axe sur lequel a été réalisée la projection orthogonale — ici l'axe (Oz).

Finalement l'équation (1) s'écrit, une fois projetée,

$$a_z = -g \tag{2}$$

3.3.2 Détermination de la composante v_z de la vitesse le long de l'axe (Oz)

Puisque l'*accélération est le taux de variation instantanée de la vitesse*, $a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$ et

$$(2) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g \tag{3}$$

On cherche donc à déterminer l'expression de la fonction $v_z(t)$ à partir de celle de sa dérivée. Ce raisonnement s'appelle *intégration* en mathématique.

En Terminale Spé. PC

En cours de physique, il n'est pas nécessaire de savoir intégrer, il suffit d'essayer de répondre à la question suivante : *quelle fonction v_z de la variable t, une fois dérivée par rapport à t, est égale à la constante $-g$?*

$$(3) \Rightarrow v_z(t) = -gt + A$$

où A est une constante réelle, puisque $\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(-gt + A)}{\mathrm{d}t} = -g$.

Nous n'avons pas trouvé une fonction v_z mais une famille de fonctions, puisque A peut être n'importe quel réel. Afin de déterminer *la fonction solution du problème* il est nécessaire (et c'est suffisant) de connaître sa valeur à une date. On choisit généralement la date $t = 0$ et on appelle alors cette valeur la « *condition initiale* ».

$v_z(0) = -g \times 0 + A = v_0 \Leftrightarrow A = v_0$ car $\vec{v}_0 = v_0\vec{k}$ est la vitesse initiale du système.

Finalement

$$v_z(t) = -gt + v_0 \tag{4}$$

3.3.3 Détermination de la composante z de la position le long de l'axe (Oz)

Puisque la vitesse est le taux de variation instantanée de la position, $v_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ et

$$(4) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -gt + v_0 \tag{5}$$

Ici encore il est nécessaire de se poser la question : *quelle fonction z de la variable t, une fois dérivée par rapport à t, est égale à la constante $-gt + v_0$?*

$$(5) \Rightarrow z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + B$$

où B est une constante réelle, puisque $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}(-1/2\,gt^2 + v_0t + B)}{\mathrm{d}t} = -gt + v_0$.

Pour déterminer *la fonction z recherchée*, il est ici aussi nécessaire d'utiliser une *condition initiale* : $z(0) = -\dfrac{1}{2}g \times 0^2 + v_0 \times 0 + B = z_0 \Leftrightarrow B = z_0$.

Finalement

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0 \tag{6}$$

3.4 Utilisation des équations horaires

3.4.1 Détermination de l'altitude z_{max}

Lorsque la balle se trouve à sa position d'altitude maximale, *sa vitesse est nulle.* Donc

$$v_z(t_{\mathrm{max}}) = 0 = -gt_{\mathrm{max}} + v_0$$

soit

$$t_{\mathrm{max}} = \frac{v_0}{g}$$

et comme

$$z_{\mathrm{max}} = z(t_{\mathrm{max}}) = -\frac{1}{2}\,g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{g} + z_0$$

alors

$$z_{\mathrm{max}} = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} + z_0$$

3.4.2 Détermination de la valeur de la vitesse v_1 lorsque la balle repasse à l'altitude z_0

La balle repasse à l'altitude z_0 à la date t_1 telle que

$$z(t_1) = z_0 = -\frac{1}{2}gt_1^2 + v_0t_1 + z_0$$

Donc

$$0 = t_1\left(-\frac{1}{2}gt_1 + v_0\right)$$

L'équation précédente admet deux solutions : $t_1 = 0$ (bien évidemment ce n'est pas celle que l'on cherche) et $t_1 = \dfrac{2v_0}{g}$.

La composante de la vitesse à la date t_1 est :

$$\begin{aligned} v_z(t_1) &= -\ gt_1 + v_0 \\ &= -g\frac{2v_0}{g} + v_0 \\ &= -v_0 \end{aligned}$$

et sa valeur

$$v_1 = |v_z(t_1)| = v_0$$

La balle repasse à l'altitude z_0 avec sa vitesse initiale.

3.4.3 Détermination de la date d'arrivée au sol (altitude nulle) et de la vitesse du système à cette date

Si le centre d'inertie de la balle arrive au niveau du sol à la date t_2, alors

$$z(t_2) = 0 = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0t_2 + z_0$$

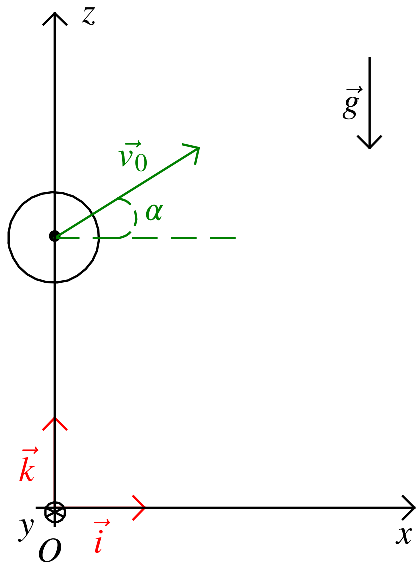
t_2 est donc la racine positive du polynôme du second degré.

Une fois cette date déterminée, la vitesse du système au niveau du sol s'obtient à partir de l'expression de v_z :

$$v_2 = |v_z(t_2)| = |-gt_2 + v_0|$$

4 Mouvement plan dans le champ de pesanteur uniforme

4.1 Situation étudiée

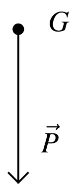


On lance une balle, de masse m, vers le haut et vers la droite, avec un angle α par rapport à l'axe (Ox), depuis l'altitude z_0 au dessus de l'origine choisie.
On cherche à déterminer :

1. La forme de la trajectoire.
2. L'altitude maximale z_{max} jusqu'à laquelle la balle va s'élever.
3. La portée du lancer, c'est à dire la distance parcourue horizontalement par la balle avant de toucher le sol.

4.2 Mise en équation

1. Système = {balle}
2. Étude des interactions :
   - Système – Terre modélisée par le poids $\vec{P}$
   - Système – Air modélisée par la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ et la force de frottement fluide $\vec{f}$.

   Hypothèse Le système est de petit volume et beaucoup plus dense que l'air. *L'interaction avec l'air est donc négligeable.*
3. Référentiel d'étude = {terrestre, considéré galiléen}
4. Schéma : 

5. Deuxième loi de Newton :
$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{P}$$
avec $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement du système.
Comme la masse m *du système est constante,* $\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}_G$ et
$$m\vec{a}_G = \vec{P} = m\vec{g}$$
ou
$$\vec{a}_G = \vec{g} \tag{7}$$

Encore une fois, *le système est en chute libre dans le champ de pesanteur terrestre.*

4.3 Obtention des équations horaires du mouvement

4.3.1 Projection de l'équation du mouvement

La relation (7) est vectorielle, on choisit un repère afin de la transformer en système d'équations scalaires. À priori le mouvement peut s'effectuer selon les trois dimensions de l'espace, on choisit donc le repère cartésien $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans ce repère, $\vec{g} = -g\vec{k}$ que l'on peut écrire : $\vec{g} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$ et $\vec{a}_G = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ que l'on peut écrire : $\vec{a}_G \quad \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$.

Finalement, l'équation (7) s'écrit une fois projetée :

$$a_x = 0 \tag{8}$$
$$a_y = 0 \tag{9}$$
$$a_z = -g \tag{10}$$

- Les relations (8) et (9) indiquent que selon les axes (Ox) et (Oy), *il n'y a pas de mouvement ou que ce mouvement est (rectiligne) uniforme.*
- La relation (10) indique que *le mouvement est uniformément accéléré selon l'axe* (Oz).

4.3.2 Détermination des composantes du vecteur vitesse

Puisque l'accélération est le taux de variation instantanée de la vitesse,

$$(8) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{11}$$
$$(9) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{12}$$
$$(10) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g \tag{13}$$

L'intégration de ces relations conduit aux familles de fonctions suivantes :

$$(11) \Rightarrow v_x(t) = A \tag{14}$$
$$(12) \Rightarrow v_y(t) = B \tag{15}$$
$$(13) \Rightarrow v_z(t) = -gt + C \tag{16}$$

Afin de déterminer les fonctions v_x, v_y et v_z *solutions du problème*, il est nécessaire (et suffisant) d'utiliser la *condition initiale sur la vitesse* :

$$\vec{v_0} \quad \begin{pmatrix} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = 0 \\ v_{0z} = v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} v_x(0) &= A = v_0 \cos\alpha \\ v_y(0) &= B = 0 \\ v_z(0) &= -g \times 0 + C = v_0 \sin\alpha \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos\alpha && (17)\\ v_y(t) &= 0 && (18)\\ v_z(t) &= -gt + v_0 \sin\alpha && (19) \end{aligned}$$

- La relation (17) nous indique que le mouvement est uniforme selon l'axe (Ox).
- La relation (18) nous indique qu'il n'y a aucun mouvement selon l'axe (Oy). *Le mouvement s'inscrit donc dans le plan* (xOz).

4.3.3 Détermination des coordonnées de la position

Puisque la vitesse est le taux de variation de la position,

$$\begin{aligned} (17) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= v_0 \cos\alpha && (20)\\ (18) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 0 && (21)\\ (19) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= -gt + v_0 \sin\alpha && (22) \end{aligned}$$

L'intégration de ces relations conduit aux familles de fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} (20) \Rightarrow x(t) &= v_0 \cos(\alpha)t + D && (23)\\ (21) \Rightarrow y(t) &= E && (24)\\ (22) \Rightarrow z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + F && (25) \end{aligned}$$

Afin de déterminer les fonctions x, y et z *solutions du problème*, il est nécessaire (et suffisant) d'utiliser la **condition initiale sur la position** :

$$\overrightarrow{OM_0} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} x(0) &= v_0 \cos(\alpha) \times 0 + D = 0\\ y(0) &= E = 0\\ z(0) &= -\frac{1}{2} g \times 0^2 + v_0 \sin(\alpha) \times 0 + F = z_0 \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos(\alpha)t && (26)\\ y(t) &= 0 && (27)\\ z(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + z_0 && (28) \end{aligned}$$

4.4 Utilisation des équations horaires

4.4.1 Détermination de la trajectoire de la balle

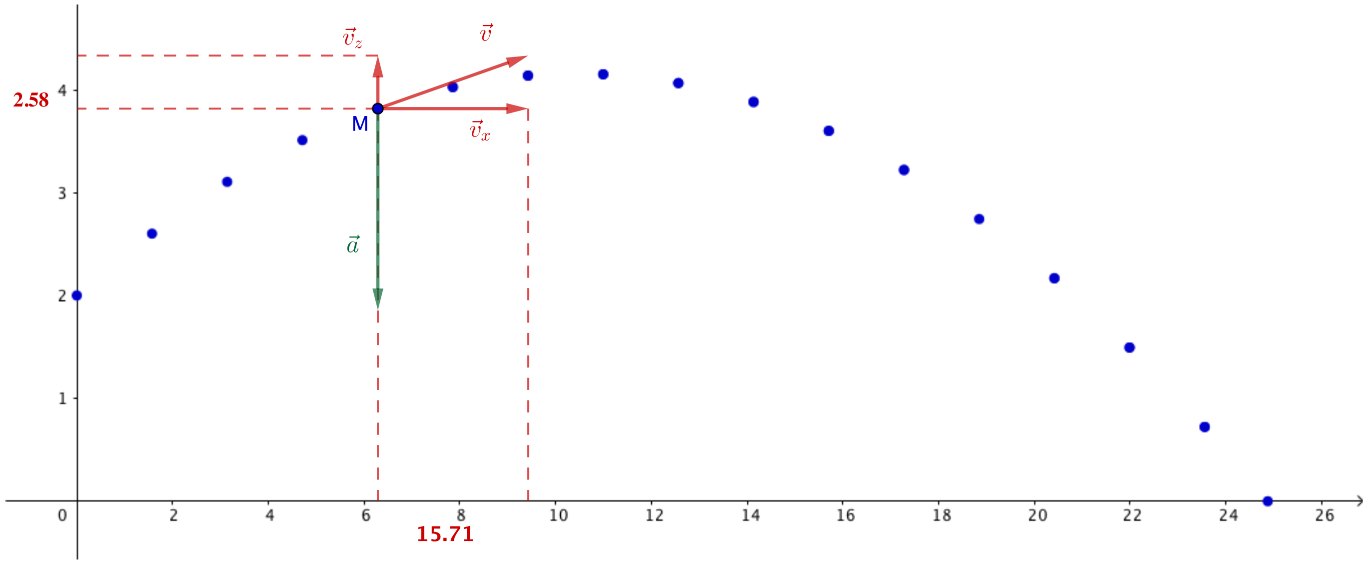
La détermination de la trajectoire nécessite d'établir la relation qui existe entre les *coordonnées d'espace*. Il faut donc éliminer le temps dans les relations (26) et (28).

$$(26) \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

En substituant le temps t dans la relation (28), on obtient

$$\begin{aligned} z &= -\frac{1}{2}\, g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}\right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \frac{x}{v_0 \cos\alpha} + z_0 \\ &= -\frac{1}{2}\, g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}\right)^2 + \tan(\alpha) x + z_0 \end{aligned} \tag{29}$$

Le mouvement de la balle est *parabolique*.



4.4.2 Détermination de la position de la flèche

Note. La flèche est le point de la trajectoire de coordonnées $(x_F, z_{\max})$.

Le raisonnement est identique à celui mis en œuvre dans la section 3.4.1 ; la balle se trouve à sa position d'altitude maximale lorsque *la composante verticale de sa vitesse est nulle*. Donc

$$v_z(t_F) = 0 = -g t_F + v_0 \sin\alpha$$

soit

$$t_F = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

et comme

$$z_{\max} = z(t_F) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g} + z_0$$

alors

$$z_{\max} = \frac{1}{2} \frac{(v_0 \sin\alpha)^2}{g} + z_0$$

De même,

$$x_F = x(t_F) = v_0 \cos\alpha \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$$

ou

$$x_F = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{2g}$$

4.4.3 Détermination de la portée

La portée est la distance x_p à parcourir selon l'axe (Ox) afin que l'altitude soit nulle. Deux raisonnements sont possibles :

À partir de la trajectoire x_p est la racine positive de l'équation

$$0 = -\frac{1}{2}\, g \left(\frac{x_p}{v_0 \cos(\alpha)}\right)^2 + \tan(\alpha) x_p + z_0$$

À partir des équations horaires Comme toujours à partir des équations horaires, il est nécessaire de déterminer la date à laquelle l'évènement étudié a lieu.

1. Soit t_p la date à laquelle le système touche le sol. t_p est la racine positive de l'équation

$$0 = -\frac{1}{2}\, g t_p^2 + v_0 \sin(\alpha) t_p + z_0$$

2. On peut alors déterminer x_p puisque

$$x_p = x(t_p) = v_0 \cos(\alpha) t_p$$