Chap. 1,2 — Mesures et incertitudes, exercices

Exercice 1 (Choix du bon nombre de chiffres significatifs)
Exprimer le résultat de ces calculs avec le bon nombre de chiffres significatifs. i) $153\,\mathrm{m} + 2{,}0\,\mathrm{cm}$; ii) $31{,}0\,\mathrm{kg} - 0{,}14\,\mathrm{kg}$; iii) $45\,\mathrm{m}/0{,}06\,\mathrm{s}$; iv) $78\,\mathrm{m} \times 2{,}0 \times 10^2\,\mathrm{m}$; v) $\log(1{,}5 \times 10^{-3})$; vi) Concentration en ions oxonium H_3O^+ d'une solution de $\mathrm{pH} = 4{,}85$.

Exercice 2 (Écriture correcte)
Un menuisier réalise la mesure de l'encadrement d'une porte $L = 210\,\mathrm{cm}$, assurément comprise (selon lui) entre 205 et 215 cm.

Réécrire ce résultat en faisant intervenir l'incertitude.

Exercice 3 (CHiffres significatifs)
Réécrire les mesures suivantes sous une forme correcte avec le nombre convenable de chiffres significatifs :

1. Hauteur $= 5{,}03 \pm 0{,}043\,20\,\mathrm{m}$
2. Temps $= 1{,}5432 \pm 1\,\mathrm{s}$
3. Charge $= -3{,}21 \times 10^{-19} \pm 2{,}67 \times 10^{-20}\,\mathrm{C}$
4. Longueur d'onde $= 0{,}000\,000\,563 \pm 0{,}000\,000\,07\,\mathrm{m}$
5. Moment $= 3{,}267 \times 10^3 \pm 42\,\mathrm{g \cdot cm \cdot s^{-1}}$

Exercice 4 (De l'importance de connaître les incertitudes)
Confronté à un problème semblable à celui résolu par Archimède, on souhaite déterminer si une couronne est effectivement constituée d'or à 18 carats ou simplement d'un alliage meilleur marché. Suivant Archimède, nous décidons d'en évaluer la densité ρ sachant que celles de l'or à 18 carats et de l'alliage suspecté sont : $\rho_{\mathrm{or}} = 15{,}5\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ et $\rho_{\mathrm{alliage}} = 13{,}8\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$. La mesure de la densité de la couronne permettrait de décider si la couronne est réellement en or par comparaison de ρ avec les densités ρ_{or} et ρ_{alliage}.

Deux experts de la mesure de densité sont appelés. Le premier, Georges, procédant à une rapide mesure de ρ, déclare que sa meilleure évaluation est $15\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ certainement située entre 13,5 et $16{,}5\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$. Le deuxième, Martha, s'accorde plus de temps avant de déclarer que sa meilleure évaluation est $13{,}9\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$ comprise dans un intervalle probable allant de 13,7 et $14{,}1\,\mathrm{g \cdot cm^{-3}}$.

1. Écrire les deux valeurs données par les experts en faisant intervenir l'incertitude.
2. L'une des deux valeurs est-elle fausse selon vous ?
3. L'une des deux valeurs est-elle plus précise que l'autre selon vous ?
4. Les deux valeurs sont-elles utilisables ?
5. La couronne est-elle en or ?

Exercice 5 (Justesse et fidélité d'un résultat)
En TP évalué, trois candidats font la même détermination de la concentration molaire c d'un acide. Ils proposent les valeurs suivantes :

Linh : $(24 \pm 3)\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}}$

Sarah : $12\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}}$

Romain : $19.935 \pm 4\ \mathrm{mmol \cdot L^{-1}}$

Le correcteur attend la valeur $c = (20 \pm 2)\,\mathrm{mmol \cdot L^{-1}}$. Critiquer le résultat de chacun des candidats.

Exercice 6 (Incertitude relative)

- La largeur d'une feuille de papier peut être mesurée au demi-millimètre près à l'aide d'une règle graduée : $L = (21{,}00 \pm 0{,}05)\,\mathrm{cm}$

- ✧ Le rayon équatorial de la planète Mars n'est connu qu'à cent mètres près : $R = (3396{,}2 \pm 0{,}1)$ km.

Laquelle de ces deux mesures est la plus précise ?

Exercice 7 (Choix du bon nombre de chiffres significatifs)
Une feuille est mesurée avec une règle graduée de 30 cm. Sa largeur est $l = 29{,}7$ cm ; pour connaître sa longueur, il faut utiliser la règle deux fois, ce qui n'autorise pas la même précision : une manipulation peu soigneuse donne $L = 42$ cm.

1. L'incertitude sur la mesure de L est-elle plus petite ou plus grande que celle sur l ? Dire pourquoi cela n'est pas surprenant.
2. Calculer et exprimer l'aire de la feuille.
3. Calculer et exprimer le périmètre de la feuille.

Exercice 8 (Formules donnant l'incertitude)

1. **Extrait de « Antilles 2013 - Ex.3 »**
   Lors des questions précédentes, l'étude du mouvement d'un électron dans un champ électrique a permis de déterminer que le rapport e/m — valeur absolue de la charge électrique de l'électron sur sa masse — vaut $1{,}76 \times 10^{11}\ \mathrm{C \cdot kg^{-1}}$.
   On donne les valeur numériques suivantes pour le problème : $v_0 = (2{,}27 \pm 0{,}02) \times 10^7\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ (vitesse de l'électron lorsqu'il entre dans le champ), $E = (15{,}0 \pm 0{,}1)\ \mathrm{kV \cdot m^{-1}}$ (valeur du champ électrique), $L = (8{,}50 \pm 0{,}05)$ cm (largeur de la zone dans laquelle existe le champ électrique) et $h = (1{,}85 \pm 0{,}05)$ cm (hauteur de l'électron à sa sortie de la zone dans laquelle existe le champ électrique).
   L'incertitude du rapport e/m, notée $U(e/m)$, s'exprime par la formule suivante :
   $$U(e/m) = \frac{e}{m}\sqrt{\left(\frac{U(h)}{h}\right)^2 + \left(\frac{U(E)}{E}\right)^2 + 4\left(\frac{U(v_0)}{v_0}\right)^2 + 4\left(\frac{U(L)}{L}\right)^2}$$
   Calculer l'incertitude $U(e/m)$, puis exprimer le résultat du rapport e/m.
2. **Extrait de « Annales 0 no1 - Ex.3 »**
   Lors des questions précédentes, il a été montré que, dans le cadre non relativiste, l'expression de la vitesse v d'une galaxie a pour expression $v = c\,(\frac{\lambda'}{\lambda} - 1)$ (application de l'effet Doppler).
   (a) Pour la galaxie TGS153Z170, on a $\lambda' = 507$ nm et $\lambda = 486$ nm (c est la célérité de la lumière). Calculer la valeur v de la vitesse de la galaxie.
   (b) On donne la relation d'incertitude suivante pour la vitesse :
   $$U(v) = \sqrt{2}c\frac{U(\lambda)}{\lambda}$$
   avec $U(\lambda) = 1$ nm. Donner la valeur de la vitesse de la galaxie prenant en compte les différentes incertitudes.

Document 1. Incertitudes et série de mesures

Lorsqu'un même opérateur répète plusieurs fois le mesurage de la même grandeur dans les mêmes conditions expérimentales, il peut trouver des résultats différents. Il en est de même pour des opérateurs différents réalisant simultanément le mesurage de la même grandeur avec du matériel similaire. Dans de tels cas, on utilise des notions de statistiques (moyenne et écart type) pour analyser les résultats.

- ✧ Pour une série de n *mesures indépendantes* donnant des valeurs mesurées m_k, l'**écart type** de la série de mesures est :
  $$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(m_k - \bar{m})^2}{n-1}}$$
  où $\bar{m}$ est la **valeur moyenne** de la série de mesures.

- L'incertitude associée à la série de mesures a alors pour expression :

$$U(m) = k\frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

Elle dépend du *nombre n de mesures indépendantes réalisées*, de l'*écart type* de la série de mesures et d'un coefficient k appelé *facteur d'élargissement ou coefficient de student.*

- Le **facteur d'élargissement** k dépend du *nombre de mesures réalisées* et du *niveau de confiance choisi.* Sa valeur figure dans un tableau issu de la loi statistique dite « loi de Student ».

  Un extrait de ce tableau est donné ci-dessous pour un nombre de mesures compris entre 2 et 16, et pour des niveaux de confiance de 95 % et de 99 % :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$k_{95\%}$	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,23	2,20	2,18	2,16	2,15	2,13
$k_{99\%}$	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,17	3,11	3,06	3,01	2,98	2,95

Ce tableau montre que :

- *Pour un même nombre de mesures*, plus le niveau de confiance est grand et plus k (et donc l'élargissement) est grand.
- *Pour un même niveau de confiance*, plus le nombre n de mesures indépendantes est grand et plus k est petit.

Exercice 9 (Incertitudes et série de mesures)
La mesure Δt de la durée de chute d'un objet depuis une fenêtre a été répétée 16 fois avec un chronomètre de qualité. Les résultats obtenus, exprimés en seconde, sont les suivants :

1,38	1,45	1,41	1,45	1 43	1,41	1,46	1,39	1,43	1,48	1,38	1,44	1,40	1,42	1,39	1,44

Déterminer la durée de cette chute avec un niveau de confiance de 95%, puis avec un niveau de confiance de 99%.