Parcours de graphes

Chapitre 15,3

1 Présentation des différents parcours

1.1 Parcours en largeur et en profondeur

Définition. *Le parcours d'un graphe consiste à visiter un à un tous ses sommets dans un certain ordre en passant par les arêtes (ou les arcs) depuis un sommet donné.*

De nombreux types de parcours sont possibles. Parmi eux, on distingue :

- *Le* ***parcours en largeur*** *(BFS en anglais pour breadth first search) : on explore en priorité tous les voisins du premier sommet, puis tous les voisins des voisins du premier sommet, etc.*

- *Le* ***parcours en profondeur*** *(DFS en anglais pour depth first search) : on explore en priorité les voisins du premier voisin du premier sommet, puis récursivement ses voisins respectifs.*

La notion de parcours peut s'appliquer à un graphe orienté ou non.

Les algorithmes de parcours de graphes servent dans la résolution d'un certain nombre de problèmes parmi lesquels :

- la détermination de la **connexité** et **forte connexité** d'un graphe ;

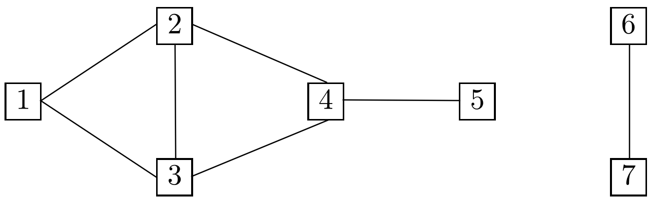
- l'existence d'un **circuit** ou d'un **cycle** (ce qu'on appelle **tri topologique**) ;

- le calcul des **plus courts chemins** (notamment l'**algorithme de Dijkstra**) ;

- etc.

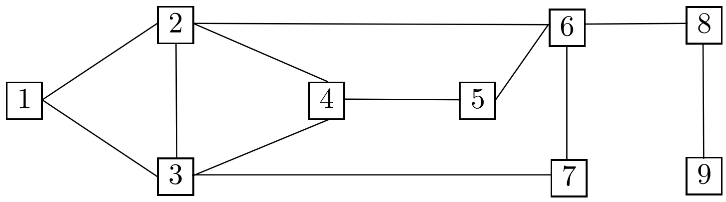
Exercice 1. Quelle particularité doit présenter un graphe (orienté ou non orienté) si on souhaite le parcourir ?

Exercice 2. On considère le graphe non orienté $G_0 = (V_0, E_0)$ suivant :



- G_0 admet-il un parcours ? Justifier la réponse.

Exercice 3. On considère le graphe non orienté $G_1 = (V_1, E_1)$ suivant :



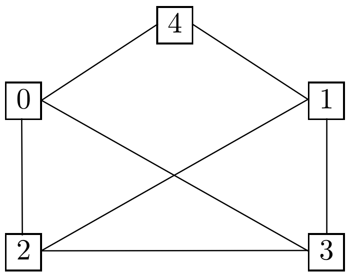
1. Pour chacun des parcours génériques de G_1 suivants, dire s'ils sont ou non des parcours en largeur : $(8, 6, 9, 2, 5, 7, 1, 4, 3)$, $(6, 8, 5, 7, 4, 2, 3, 1, 9)$, $(4, 2, 3, 5, 1, 7, 6, 8, 9)$, $(3, 1, 4, 2, 6, 5, 7, 8, 9)$.
   Justifier les réponses négatives.

2. Donner trois parcours en largeur de G_1, le premier partant du sommet 1, le deuxième du sommet 9 et le dernier du sommet 5.

3. Pour chacun des parcours génériques de G_1 suivants, dire s'ils sont ou non des parcours en profondeur : $(5, 6, 8, 9, 7, 3, 1, 2, 4)$, $(8, 6, 9, 7, 5, 2, 4, 3, 1)$, $(4, 2, 1, 5, 3, 7, 6, 8, 9)$, $(4, 2, 6, 8, 9, 5, 7, 3, 1)$.
   Justifier les réponses négatives.

4. Donner trois parcours en profondeur de G_1, le premier partant du sommet 1, le deuxième du sommet 9 et le dernier du sommet 5.

Exercice 4. On considère le graphe non orienté $G_2 = (V_2, E_2)$ suivant :

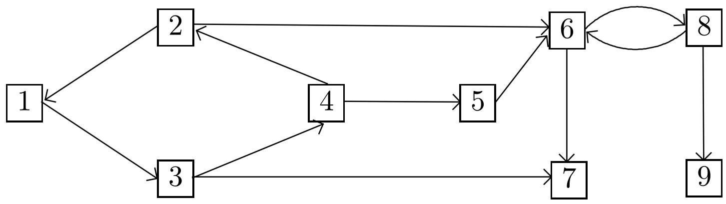


1. Pourquoi peut-on parcourir ce graphe ?

2. Donner le parcours en largeur de sommet de base 0 en prenant les sommets par ordre croissant de leur étiquette.

3. Donner le parcours en profondeur de sommet de base 0, en prenant les sommets par ordre croissant de leur étiquette.

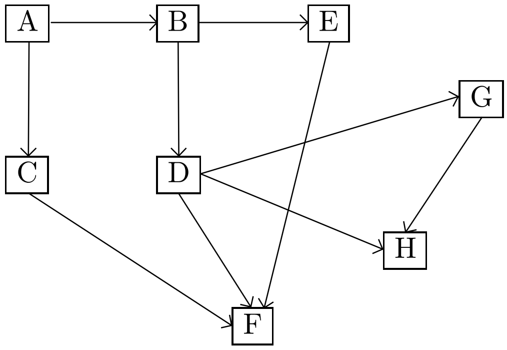
Exercice 5. On considère le graphe orienté $G_3 = (V_3, A_3)$ suivant :



1. Le parcours $(2, 1, 6, 3, 7, 8, 4, 9, 5)$ est-il un parcours en largeur de G_3 ? Même question pour le parcours $(2, 1, 4, 6, 3, 5, 7, 8, 9)$.

2. Pour chaque racine de G_3 donner un parcours en largeur de G_3.
3. Le parcours $(2, 1, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 7)$ est-il un parcours en profondeur de G_3 ?
4. Pour chaque racine de G_3 donner un parcours en profondeur de G_3.

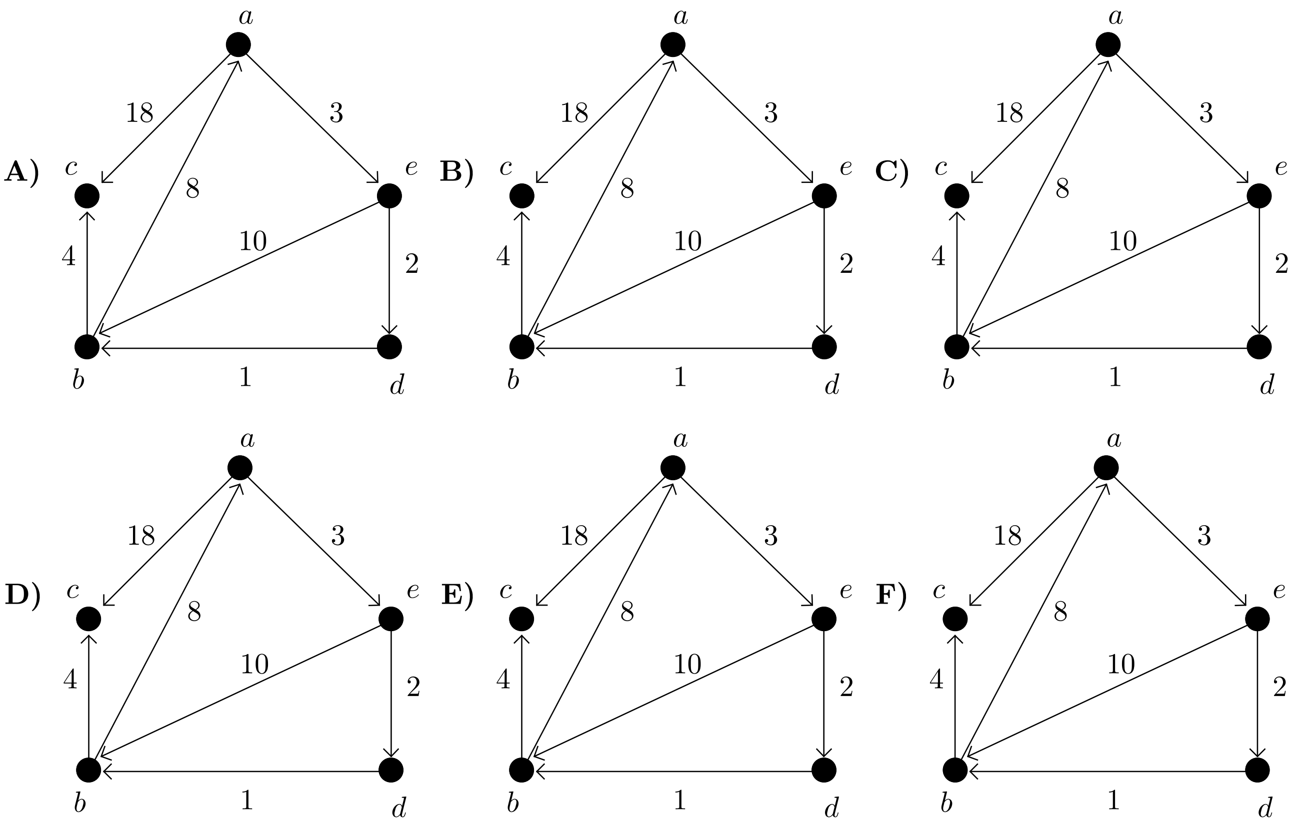
Exercice 6. Soit le graphe orienté $G_4 = (V_4, E_4)$ suivant :



1. Donner un parcours en largeur de G_4 de base le sommet A.
2. Donner un parcours en profondeur de G_4 depuis le sommet A.

1.2 Algorithme de Dijkstra

1.2.1 Illustration du fonctionnement de l'algorithme



On cherche à déterminer les plus courts chemins vers les différents sommets à partir du sommet a.