

## Les théorèmes énergétiques

Doc. 8,1

## A Objectif

L'objectif de ce document est de rappeler l'utilité des théorèmes énergétiques pour résoudre les problèmes mécaniques à une dimension ou les problèmes mécaniques au cours desquels on s'intéresse essentiellement à deux moments du mouvement (un « état initial » et un « état final »).

## B Énergie cinétique d'un système ponctuel

**Remarque.** Un système mécanique est l'objet ou l'ensemble des objets auxquels on s'intéresse et dont on étudie le mouvement. Ce système est dit **ponctuel** lorsqu'on peut le réduire à un point. On ne s'intéresse alors plus du tout à sa structure interne.

L'intérêt d'un système ponctuel est qu'il possède une vitesse, contrairement aux solides dont deux points différents peuvent posséder des vitesses différentes.

L'énergie cinétique d'un système ponctuel est égale au produit de sa masse par le carré de sa vitesse :

$$E_C = \frac{1}{2} m v^2$$

avec  $m$  en kilogramme (kg) et  $v$  en mètre par seconde ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

**Attention.** La valeur de l'énergie cinétique dépend du référentiel par rapport auquel on étudie le mouvement.

**Q1.** Si on double la masse d'un point matériel, à vitesse constante, l'énergie cinétique est :

- multipliée par 2    multipliée par 4    inchangée    divisée par 2    divisée par 4

**Q2.** Si on double la vitesse d'un point matériel, à masse constante, l'énergie cinétique est :

- multipliée par 2     multipliée par 4     inchangée     divisée par 2     divisée par 4

**Q3.** L'énergie cinétique est une grandeur absolue, indépendante du référentiel utilisé pour décrire le mouvement :

- Vrai       Faux

**Q4.** Lors d'un accident, les dégâts provoqués par un poids lourd sont plus importants que ceux occasionnés par une voiture roulant à la même vitesse :

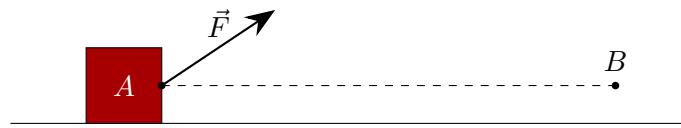
- Vrai       Faux

### C Qu'est-ce que le travail d'une force constante ?

## C.1 Travail d'une force constante

Une personne exerce une force  $\vec{F}$ , par l'intermédiaire d'un fil, afin de faire avancer la valise. Le point d'application de la force se déplace du point  $A$  au point  $B$ .

La valise, initialement immobile, est mise en mouvement : elle a reçu de l'énergie (cédée par la personne).

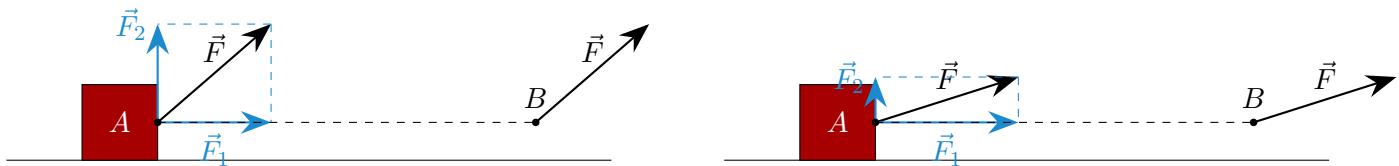


Le terme **travail** désigne *le transfert d'énergie reçu par un système lorsque le point d'application d'une force agissant sur celui-ci subit un déplacement.*

**Remarque.** Le travail est un **transfert ordonné d'énergie**.

## C.2 De quoi dépend le travail d'une force ?

On considère deux situations différentes :



Dans ces deux situations, *la valeur de la force  $\vec{F}$  exercée est identique*, l'inclinaison de la direction de cette force est, elle, différente.

**De quels paramètres le travail dépend-il ?**

**Q5.** Le travail dépend-il de la valeur de la force  $\vec{F}$  ?

- Oui       Non

**Q6.** Le travail dépend-il de la longueur du déplacement AB ?

- Oui       Non

**Q7.** Le travail dépend-il de l'inclinaison de la direction de la force  $\vec{F}$  par rapport à celle de la direction du déplacement  $\overrightarrow{AB}$  ?

- Oui       Non

## C.3 Expression du travail d'une force constante

Le travail  $W_{AB}$  d'une **force constante**  $\vec{F}$  dont le point d'application se déplace d'un point  $A$  à un point  $B$  est donné par la relation :

$$W_{AB} = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$  est le produit scalaire des vecteurs  $\vec{F}$  et  $\overrightarrow{AB}$ , donc :

$$W_{AB} = ||\vec{F}|| \cdot ||\overrightarrow{AB}|| \cdot \cos(\alpha)$$

où  $\alpha$  est l'angle que font les directions des vecteurs  $\vec{F}$  et  $\overrightarrow{AB}$ .

**Attention.** Il est crucial de souligner que cette définition exige que la force soit un **vecteur constant**. Dans le cas contraire, il est nécessaire de généraliser la définition.

**Remarque.** Le travail est un transfert d'énergie, c'est une grandeur scalaire qui s'exprime en joules (J).

**Q8.** Quelles sont les conditions dans lesquelles une force ne transfère aucune énergie à un système ?

**Remarque.**

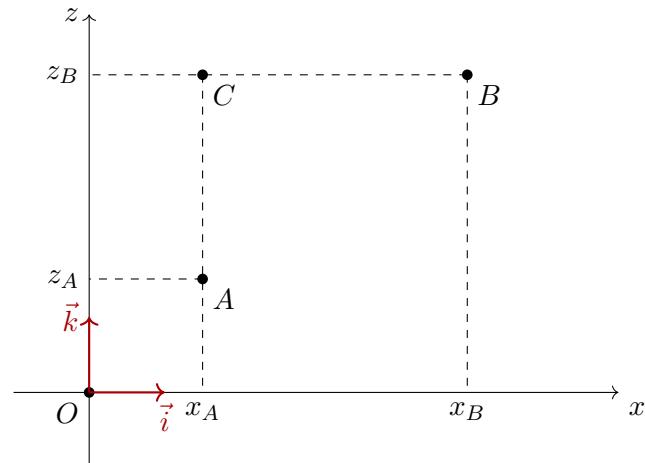
- Si  $W_{AB} > 0$ , le système reçoit effectivement de l'énergie de la part de la force : le travail est dit **moteur** ;
- Si  $W_{AB} < 0$ , le système perd de l'énergie : le travail est dit **résistant** ;
- Si  $W_{AB} = 0$ , aucune énergie n'est transférée au système.

## D Qu'est-ce qu'une force conservative ?

### D.1 Travail du poids

On déplace un objet ponctuel de masse  $m$  du point de l'espace  $A$  au point de l'espace  $B$ . L'objet interagit, entre autre, avec la Terre, interaction modélisée par le poids  $\vec{P}$ .

**Q9.** Dans un premier temps, on réalise le déplacement direct  $A \rightarrow B$ . Donner l'expression du travail  $W_{AB}(\vec{P})$  du poids  $\vec{P}$  lors de ce déplacement.



**Q10.** Dans un second temps, on réalise le déplacement  $A \rightarrow C \rightarrow B$ . Donner l'expression du travail  $W_{ACB}(\vec{P})$  du poids  $\vec{P}$  lors de ce déplacement.

**Q11.** Démontrer que  $W_{AB}(\vec{P}) = W_{ACB}(\vec{P})$ .

**Q12.** Déduire des questions précédentes que  $W_{AB}(\vec{P}) = W_{AC}(\vec{P})$ .

**Q13.** Quelle spécificité du travail du poids est soulignée par cette étude ?

**Q14.** Donner l'expression du travail du poids  $W_{AB}(\vec{P})$ , entre  $A$  et  $B$  en fonction des coordonnées.

**Q15.** Discuter du caractère moteur ou résistant du poids, en fonction du signe de  $z_B - z_A$ .

### D.2 Le poids, une force conservative

Lorsqu'un système ponctuel passe d'un point  $A$  à un point  $B$ , la valeur du travail du poids ne dépend pas du chemin suivi entre ces points : le poids est une **force conservative**.

Une **force conservative** est une force dont le travail ne dépend pas du chemin suivi entre deux positions.

*Les forces représentant les interactions fondamentales sont toutes conservatrices.*

En fait, on peut remarquer que, *non seulement la valeur du travail du poids ne dépend pas du chemin suivi*, mais qu'*elle ne dépend que des différences d'altitudes des points*. Le poids est une force bien particulière !

### D.3 Modélisation des frottements

On modélise les frottements entre un système et un fluide par une force, notée  $\vec{f}_f$ , dont les caractéristiques sont :

**Direction.** Celle du mouvement, donc celle du vecteur vitesse  $\vec{v}$ .

**Sens.** Sens opposé au mouvement, donc sens opposé à celui du vecteur vitesse.

**Valeur.**  $f_f = k v^\alpha$  avec  $\alpha = 1$  ou  $2$  selon le système étudié et les conditions expérimentales.

La force de frottement fluide n'est constante que si le mouvement est rectiligne et uniforme. Dans tous les autres cas de figure, elle varie au cours du mouvement.

**Remarque.** L'expression vectorielle de la force de frottements fluides est :  $\vec{f}_f = -k v^{\alpha-1} \vec{v}$ .

On modélise les frottements entre un système et un solide par une force, notée  $\vec{f}$ , dont les caractéristiques sont :

**Direction.** La droite passant par le point d'intersection du système et du solide et parallèle à la surface (localement) du solide.

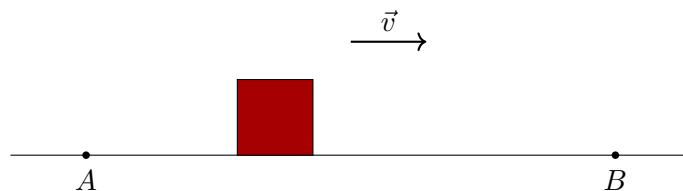
**Sens.** Sens opposé au mouvement.

**Valeur.**  $f$  peut être considérée constante lorsque le système glisse sur le solide.

### D.4 Travail de la réaction d'un support

Le curling est un sport d'équipe où les joueurs glissent des pierres en granit sur une piste de glace vers une cible circulaire appelée « maison », en ajustant leur trajectoire à l'aide de balais pour influencer leur vitesse et leur direction.

Malgré les efforts des joueurs, un palet de curling lancé sur une piste glacée horizontale finit toujours par s'arrêter à cause de l'action de la glace sur le palet.



**Q16.** Modéliser l'action de la glace sur le palet.

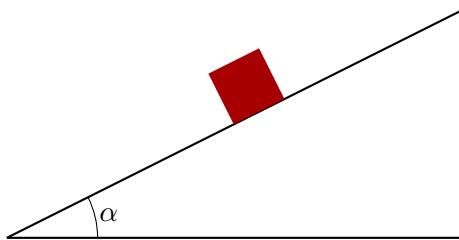
**Q17.** Déterminer l'expression générale du travail  $W_{AB}(\vec{R})$  de la force modélisant l'action de la glace sur le palet lorsque son point d'application se déplace d'un point  $A$  à un point  $B$ .

**Q18.** Discuter le caractère moteur ou résistant du travail  $W_{AB}(\vec{R})$  selon que les frottements peuvent ou pas être négligés.

- Le travail d'une force de frottement est toujours résistant.
- Les forces de frottement ne sont pas conservatives.

## D.5 Application

Dans le service de manutention d'une usine, un colis de masse  $m = 12 \text{ kg}$  est posé au sommet d'un toboggan rectiligne incliné d'un angle  $\alpha = 30^\circ$  par rapport à l'horizontale. *Le colis glisse à vitesse constante.*



**Q19.** Modéliser toutes les actions sur le colis.

**Q20.** Quelle relation existe entre le poids  $\vec{P}$  du colis et la force de réaction  $\vec{R}$  qui s'exerce sur lui ?

**Q21.** Donner les expressions des travaux effectués par ces deux forces au cours d'un déplacement AB du colis, en fonction de AB,  $g$ ,  $m$  et  $\alpha$ . Conclure.

## E Comment faire varier l'énergie cinétique d'un système ?

### E.1 Qu'est-ce que le théorème de l'énergie cinétique ?

Dans un **référentiel galiléen**, la variation d'énergie cinétique d'un système ponctuel, entre deux positions de l'espace A et en B, est égale à la somme des travaux de toutes les forces qui s'appliquent sur ce système :

$$\Delta E_C = E_C(B) - E_C(A) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i)$$

- Si la résultante des forces effectue un **travail moteur**,  $\Delta E_C > 0$ , la **valeur** de la *vitesse du système augmente*.
- Si la résultante des forces effectue un **travail résistant**,  $\Delta E_C < 0$  la **valeur** de la *vitesse du système diminue*.
- Si la résultante des forces n'effectue **aucun travail**,  $\Delta E_C = 0$  la **valeur** de la *vitesse du système ne varie pas*.

### E.2 Applications du théorème de l'énergie cinétique

#### E.2.1 Chute d'un bloc rocheux

Un bloc rocheux (considéré ponctuel), de masse 50 kg, se détache, sans vitesse, d'une falaise à 30 m du sol.

- On prendra  $g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

**Q22.** Déterminer sa vitesse au niveau du sol. Préciser les hypothèses utilisées.

### E.2.2 Mouvement d'un bateau

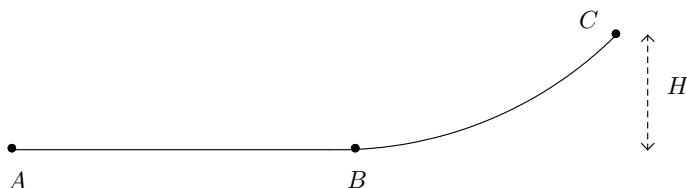
Un vaporetto (supposé ponctuel) est une petite embarcation à moteur qui sert à transporter des personnes sur le Grand Canal de Venise. Sa masse est égale à 30 t. Lancé à la vitesse de 9,3 km/h, il s'arrête sur une distance de 15 m lorsque le moteur est coupé.

**Q23.** Calculer la valeur de la résultante des forces, supposée constante, qui s'appliquent sur le vaporetto lors de la phase d'arrêt.

### E.2.3 Jeu de fête foraine

Un jeu de fête foraine consiste à pousser, le plus fort possible, un chariot (que l'on considérera ponctuel) se déplaçant sur des rails, afin qu'il atteigne une cible. Les rails possèdent une partie horizontale  $AB = l = 12 \text{ m}$ ; sur cette partie, un joueur exerce sur le chariot une force constante  $\vec{F}$ , d'intensité 120 N, parallèle et de même sens que le vecteur vitesse du chariot. La cible est située à l'altitude  $H = 2,4 \text{ m}$  par rapport au niveau AB.

Le chariot a une masse  $m = 5,0 \text{ kg}$ . On prendra  $g = 9,8 \text{ N} \cdot \text{kg}^{-1}$ .



**Q24.** Calculer l'énergie cinétique du chariot en  $B$ , si on néglige les frottements.

**Q25.** Le chariot peut-il atteindre la cible, si on maintient l'hypothèse de non frottements ?

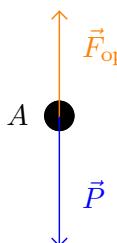
**Q26.** En réalité, le chariot monte jusqu'à la hauteur  $h' = 1,9 \text{ m}$ . Pourquoi n'atteint-il pas la cible ?

## F Qu'est-ce que l'énergie potentielle d'interaction ?

### F.1 Introduction

$B$  •

Un opérateur soulève à vitesse constante une balle dans le champ de pesanteur, du point  $A$  jusqu'au point  $B$ .



**27)** Donner la relation qui existe entre les forces  $\vec{P}$  et  $\vec{F}_{\text{op}}$ .

**28)** Déterminer l'expression du travail du poids  $\vec{P}$  pour le déplacement  $A \rightarrow B$ .

- 29)** Exprimer l'expression du travail de la force exercée par l'opérateur en fonction du travail du poids, pour le déplacement  $A \longrightarrow B$ .
- 30)** On appelle *variation de l'énergie potentielle de pesanteur d'un système* l'énergie fournie par l'opérateur au système. Donner l'expression de la variation d'énergie potentielle de pesanteur de la balle lors du déplacement  $A \longrightarrow B$ .

## F.2 Énergie potentielle d'interaction

On peut attribuer à un système une **énergie potentielle d'interaction**  $E_P$ , associée à une interaction modélisable par une force conservative  $\vec{F}^c$ .

La **variation**  $\Delta E_P$  de l'énergie potentielle  $E_P$  lors du déplacement du système d'un point A à un point B, est égale au travail qu'effectuerait un opérateur compensant exactement la force conservative  $\vec{F}^c$ , soit :

$$\begin{aligned}\Delta E_P &= E_P(B) - E_P(A) \\ &= W_{AB}(\vec{F}_{\text{op}}) \\ &= -W_{AB}(\vec{F}^c)\end{aligned}$$

**Remarque.** Seules les variations d'énergie potentielle ont un sens physique.

## G Qu'est-ce que le théorème de l'énergie mécanique ?

### G.1 Comment établir l'expression de l'énergie mécanique et celle du théorème de l'énergie mécanique ?

Si on note  $\vec{F}$  la résultante des forces qui s'appliquent sur un système ponctuel,  $\vec{F}_c$  la résultante des forces conservatives qui s'appliquent sur le système ponctuel et  $\vec{F}_{\text{nc}}$  la résultante des forces non conservatives qui s'appliquent sur le système ponctuel, le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$\begin{aligned}\Delta E_C &= E_C(B) - E_C(A) \\ &= W_{AB}(\vec{F}) \\ &= W_{AB}(\vec{F}_c) + W_{AB}(\vec{F}_{\text{nc}})\end{aligned}\tag{1}$$

Une reformulation de (1) donne, si on prend en compte le résultat de la section F.2 :

$$\begin{aligned}\Delta E_C - W_{AB}(\vec{F}_c) &= W_{AB}(\vec{F}_{\text{nc}}) \\ \Delta E_C + \Delta E_P &= W_{AB}(\vec{F}_{\text{nc}})\end{aligned}$$

**Remarque.**  $\Delta E_P$  représente ici la somme de toutes les énergies potentielles d'interaction.

L'**énergie mécanique** d'un système est une forme d'énergie que l'on peut calculer grâce à l'expression :

$$\Delta E_M = \Delta E_C + \Delta E_P$$

Dans un **référentiel galiléen**, la variation de l'énergie mécanique d'un système, entre deux positions  $A$  et  $B$ , est égale à *la somme des travaux de toutes les forces non conservatives* qui s'appliquent sur ce système :

$$\Delta E_M = \Delta E_C + \Delta E_P = W_{AB}(\vec{F}_{nc})$$

## G.2 Qu'est-ce qu'un système conservatif ?

Un système est dit **conservatif** si, lors de son évolution,  $\Delta E_M = 0$ . *Un système est donc conservatif s'il n'est soumis qu'à des interactions modélisées par des forces conservatives ou si les forces non conservatives auxquelles il est soumis ne travaillent pas.*

*L'énergie mécanique d'un système conservatif se conserve au cours du mouvement, sa variation est nulle.*

**Remarque.** L'énergie mécanique d'un système non conservatif diminue.

# H Applications du théorème de l'énergie mécanique

## H.1 Chute libre d'une pierre

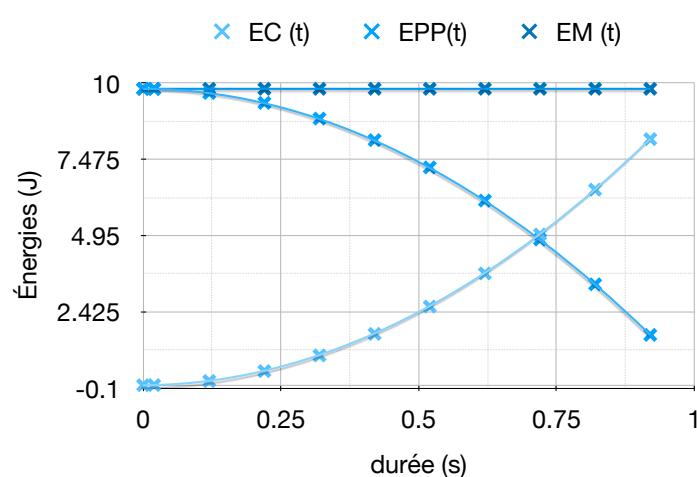
On laisse tomber une pierre de masse  $m$  depuis l'altitude  $h$ , sans vitesse initiale.

Dans les conditions de l'expérience, on peut négliger les frottements du système avec l'air.

**Q31.** Déterminer la vitesse de la masse lorsqu'elle arrive au sol (origine des altitudes).

## H.2 Liens entre les différentes formes d'énergie

### H.2.1 Conversion de l'énergie potentielle de pesanteur en énergie cinétique lors d'une chute libre



**Figure 1.** Conversion entre l'énergie potentielle de pesanteur et l'énergie cinétique d'un système en chute libre.

### H.2.2 Conversion entre les différentes formes d'énergie dans le cas des oscillations d'un pendule

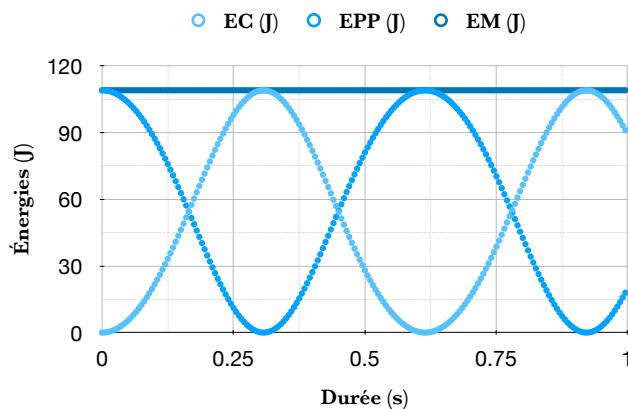


Figure 2. Oscillations non amorties.

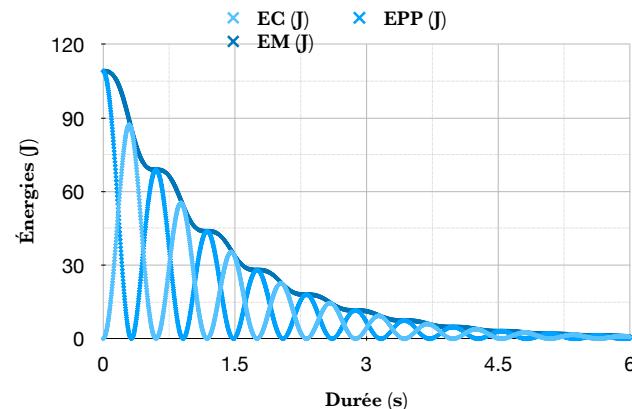


Figure 3. Oscillations amorties.

## I Bilan

### I.1 Théorème de l'énergie cinétique

Je sais...

- Donner l'expression de l'énergie cinétique d'un système modélisé par un point matériel.
- Définir la notion de travail d'une force.
- Déterminer l'expression du travail d'une force constante.
- Expliquer ce qu'est une force conservative.
- Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

Je suis capable...

- D'utiliser l'expression de l'énergie cinétique d'un système modélisé par un point matériel.
- D'utiliser l'expression du travail de n'importe quelle force constante lors du déplacement d'un système ponctuel.
- D'exploiter le théorème de l'énergie cinétique.

### I.2 Théorème de l'énergie mécanique

Je sais...

- Définir une force conservative, une force non conservative.
- Expliquer ce qu'est une énergie potentielle d'interaction.
- Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur.
- La définition de l'énergie mécanique.
- Énoncer les conditions dans lesquelles l'énergie mécanique se conserve ou pas.

Je suis capable...

- D'identifier des situations de conservation et de non conservation de l'énergie mécanique.
- D'exploiter la conservation de l'énergie mécanique dans des cas simples : chute libre en l'absence de frottement, oscillations d'un pendule en l'absence de frottement, etc.
- Utiliser la variation de l'énergie mécanique pour déterminer le travail des forces non conservatrices.