Mértékelmélet

Órai videók:

- Első előadás
- Második előadás
- Harmadik előadás

I. Mérhető tér, mérhető leképezések, mérték

Ez a fejezet adja a teljes tárgy „nyelvét”: milyen halmazokat tekintünk mérhetőnek (σ-algebra), és hogyan értelmezünk rajtuk mértéket. A mérhető leképezések azért kulcsfontosságúak, mert integrálásnál és valószínűségszámításban állandóan ősképekkel dolgozunk. Az egyszerű függvények pedig a Lebesgue-integrál felépítésének alapkövei: ezekkel közelítjük a bonyolultabb mérhető függvényeket.

Alapfogalmak:

- X alaptér
- $\mathcal{P}(X)$: hatványhalmaz (powerset) - X halmaz minden részhalmazának rendszere
- $A \subset \mathcal{P}(X)$: halmazrendszer

Halmazrendszerek

- **Modulus**: ha $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \setminus B \in \mathcal{A}$
- **Félgyűrű**: ha $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{A}$
- **Algebra**: ha $A, B \in \mathcal{A}$ esetén $X \setminus A \in \mathcal{A}$
- **σ-algebra**: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-algebra, ha:
  - $\emptyset, X \in \mathcal{A}$
  - $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c := X \setminus A \in \mathcal{A}$
  - $A_i \in \mathcal{A},\ i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$
- **Generált σ-algebra**: Tetszőleges $\mathcal{U}$ rendszerhez $\exists$ egy legszűkebb σ-algebra ami tartalmazza $\mathcal{U}$-t, jelölés: $\sigma(\mathcal{U})$
- **Borel σ-algebra**: A legkisebb σ-algebra, ami tartalmaz minden nyílt halmazt. Legyen (X, τ) topologikus tér, ekkor $B(X) := \sigma(\tau)$

Halmazfüggvények

$\alpha : \mathcal{A} \mapsto \mathbb{R}$ halmazfüggvény, feltevések:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$ (tartalmazza az üreshalmazt)
- $\alpha \geq 0$ (nemnegatív)
- $\alpha(\emptyset) = 0$ (üreshalmaz mértéke 0)

Típusok:

- α **monoton**, ha: $A, B \in \mathcal{A}$ és $A \subset B$, akkor $\alpha(A) \leq \alpha(B)$
- α **additív**, ha: $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{A}$ halmazokra $\cup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{A}$ esetén $\alpha(\cup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha(A_k)$
- α **σ-additív**, ha: $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ halmazokra $\cup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ esetén $\alpha(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_k)$

Mérhető tér

$(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, ha $\mathcal{A} \in \mathcal{P}(X)$ σ-algebra. Ekkor $\mathcal{A}$ elemei mérhető halmazok.

Topologikus tér ((X, τ)) egy általánosított metrikus tér. A metrikus tér, egy olyan halmaz, amin értelmezett egy metrika (távolságfüggvény).

Mérhető leképezés

Adott $(X, \mathcal{M})$ és $(Y, \mathcal{N})$ mérhető terek, az $f : X \mapsto Y(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ mérhető leképezés. Ekkor $\{A \subset Y : f^{-1}(A) \in \mathcal{M}\}$ az halmazrendszer σ-algebra Y-on.

Generált alterekkel tulajdonság:

$U \subset \mathcal{P}(Y)$ és $\forall u \in U : f^{-1}(u) \in \mathcal{M}$

- $\forall u \in \sigma(U)$-ra is $\mapsto$ a generált altér is a σ-algebrában van
- elég a generált alteret nézni, hogy mérhető-e 1-1 helyen, nem kell a teljeset

Egyszerű függvények

Legyen $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér, ekkor az $f : x \mapsto \mathbb{R}$ leképezést egyszerű függvénynek nevezzük, ha mérhető és értékkészlete véges. Ha f, g egyszerű függvény, akkor $f + g$, $f \cdot g$, $max(f, g)$, $min(f, g)$ is egyszerű függvény, így mérhető is.

Az egyszerű függvény előáll $f = \sum_{i=1}^{k} c_i \chi_{A_i}$-ból, ahol

- c_i a súlyozás
- χ_{A_i} indikátorfüggvény

Egyenletes konvergencia: Legyen $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ mérhető, ekkor megadható f_i egyszerű függvények sorozata úgy, hogy

- monoton nőnek
- $f_i \mapsto f$
- $\{x : f(x) < a\}$-n egyenletesen konvergens

Suprémum és infinimum:
$f_n : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ mérhető $\mapsto \sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \limsup f_n$ is mérhetők

- $\sup f_n$: a függvény legmagasabb értéke az adott pontban
- $\limsup f_n$: a legmagasabb érték, amit elér a függvény, ahogy halad ∞ felé

Infinimum hasonlóan, csak legkisebb értékkel.

Mérték

Legyen $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér, a $\mu : \mathcal{M} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ leképezést mértéknek nevezzük, ha

1. $\mu \geq 0$
2. $\mu(\emptyset) = 0$
3. $H_n \in \mathcal{M}, H_n \cap H_k = 0$ esetén $\mu(\cup_{i=1}^{\infty} H_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(H_i)$

The Bright Side of Mathematics vidik:

- σ-algebra
- Borel σ-algebra
- Mérhető terek
- Mértékek

II. Integrál, függvénysorozatok, függvénysorok és integráljaik

Itt épül fel a Lebesgue-integrál: először egyszerű függvényekre definiáljuk, majd monoton közelítéssel kiterjesztjük általános nemnegatív (majd előjeles) függvényekre. A vizsgán tipikusan a konvergenciatételek (monoton konvergencia, Fatou, dominált konvergencia) a legfontosabbak, mert ezek indokolják a határátmenetek és integrálás felcserélését. Ezek a tételek adják a Lebesgue-integrál „erejét” a Riemann-integrállal szemben.

Integrál

Adott $f \geq 0$ egyszerű függvény és $(X, \mathcal{M}, \mu)$ mértéktér, valamint $H \in \mathcal{M}$ mérhető halmaz. f értékei $c_1, ..., c_n$ és $A_k = \{x : f(x) = c_k\}$, vagyis A_k az a halmaz, ahol f felveszi a c_k értéket.

Ekkor f függvény H-n vett μ szerinti integrálja:

$\int_H f\, d\mu = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \mu(H \cap A_k)$

- Vagyis a halmazok mértéke súlyozva a függvényértékkel
- Ami nem más, mint a c_k magasságokkal az A_k hosszok szorozva $\mapsto$ terület

Megjegyzések:

Adott $0 \leq g \leq f$ mérhető függvények és $A \subset B$ halmazok, ekkor

- $\int_A g\, d\mu \leq \int_A f\, d\mu \leq \int_B g\, d\mu$
- $g \mid_A \equiv c$ (konstans) esetén $\int_A f\ d\mu = c \cdot \mu(A)$ (megj: $g \mid_A$ a g függvény megszorítva A pontra/környezetére)
- $\mu(A) = 0 \mapsto \int_A f\ d\mu = 0$, vagyis üres halmazon integrálva nullát kapunk
- $\int_A f\ d\mu = \int_B f \cdot \chi_A\ d\mu$, vagyis A-n vett integrál megegyezik a B-n vett f és az indikátorfüggvény szorzatának integráljával.
- $\int_A (f + c \cdot g)\ d\mu = \int_A f\ d\mu + c \cdot \int_A g\ d\mu$ integrálási azonosság
- $\varphi(H) = \int_H f\ d\mu$ az integrálás, mint halmazfüggvény mérték

Lebesque integrál

Legyen $f \geq 0$ mérhető, $H \in \mathcal{M}$ mérhető halmaz, ekkor:

$\int_H f\, d\mu = \sup \Big\{ \int_H g\, d\mu : 0 \leq g \leq f,\ g \text{ egyszerű} \Big\}.$

Megjegyzések:

- $f^+ = \max(f, 0), f^- = -\min(f, 0)$ adott, ha $\int_X f^+ d\mu$ vagy $\int_X f^- d\mu$ véges akkor f integrálható, illetve $\int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$ véges esetén f végesen integrálható.
- $\|f\|_{L^1} := \int_X |f|\, d\mu$ értelmes (ha véges)

Monoton konvergencia tétele

Legyen $0 \leq f_1 \leq ... \leq f_n$ m.m. monoton növekvő, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ pontonként konvergáló, mérhető függvénysorozat.

Ekkor az integrál is konvergál: $\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$.

Ilyen tételek miatt sokszor jobb a Lebesque integrál a Riemann integrálnál.

Összeg integrálja

$\int_A (f+g) \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_A g \, d\mu$, ahol $f, g \geq 0$

Beppo-Levi Tétel

Ha $f_n \geq 0$ mérhető, akkor a függvények összegének integrálja megegyezik az integráljaik összegével.

$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n \; d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n \; d\mu$

Fatou-Lemma

a $f_n \geq 0$ mérhető, akkor:

$\int_A \liminf f_n \; d\mu \leq \liminf \int_A f_n \; d\mu$

Lebesque-dominált konvergencia tétel

f_n mérhető és $|f_n| \leq g, \quad g \in L^1(\mu)$, ekkor $f_n \to f$, valamint:

$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$

Ha a két fv m.m. megegyezik, akkor az integráljuk is. Ilyenkor g majorálja (dominálja) $| \; f_n \; |$-et, vagyis felettük helyezkedik el.

The Bright Side of Mathematics vidik:

- Lebesque integrál
- Riemann integrál vs. Lebesque integrál
- Monton konvergencia tétel
- Lebesque-dominált konvergencia

III. Mértékek kiterjesztése. Lebesque- és Lebesque-Stieljes mérték

Ennek a fejezetnek a lényege, hogy hogyan tudunk „jó” módon mértéket definiálni először egyszerű halmazcsaládon (pl. intervallumok, téglák), majd kiterjeszteni σ-algebrára. A külső mérték és a Carathéodory-kritérium a standard eszköz: ezzel kapjuk a Lebesgue-mértéket és a Lebesgue-mérhető halmazok σ-algebráját. A Lebesgue–Stieltjes mérték pedig megmutatja, hogyan kódol egy monoton függvény egy mértéket (és hogyan jelennek meg az „atomok”).

Külső mértékek

α külső mérték: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ halmazrendszeren, $\alpha(\emptyset) = 0$ és $\alpha \geq 0$, $\alpha : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ halmazokra $\alpha\big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(A_i)$, azaz σ-szubadditív.

Ekkor legyen:

$$\alpha(H) = \inf\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} \alpha(A_i) : H \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,\ A_i \in \mathcal{A}\Big\}$$

Külső mértékek kiterjesztése:

A külső mértékkel mérható halmazok egy σ-algebrát alkotnak, amennyiben teljesül a Caratheodory tétel. Legyen ez a $\mathcal{M}$ σ-algebra

Legyen α egy külső mérték $\mathcal{M}$-en, illetve legyen $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}$, ekkor a $\mu := \alpha\mid_{\mathcal{A}}$, azaz a külső mértéket megszorítva $\mathcal{A}$-ra megkapjuk a mértéket $\mathcal{A}$-n.

Legyen $\mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{P}(X)$ σ-algebra, ekkor: $(X, \mathcal{M}, \mu)$ teljes mértéktér.

Lebesque mérték

Intuíció: A Lebesque-mérték az „hossz / terület / térfogat” formális általánosítása úgy, hogy nagyon sok (nem csak „szép”) halmazra is értelmezhető legyen, és teljesüljön a σ-additivitás.

Konstrukció (Carathéodory-féle kiterjesztés):

1. **Félgyűrű / téglák (alapcsalád):** $\mathbb{R}^n$-ben tekintsük a félzárt téglákat

$$R = \prod_{j=1}^{n} (a_j, b_j], \qquad a_j < b_j.$$

Ezeken definiáljuk a „térfogat” előmértéket:

$$\alpha(R) := \prod_{j=1}^{n}(b_j - a_j).$$

2. **Külső mérték (Lebesque-külső mérték):** Tetszőleges $E \subset \mathbb{R}^n$ halmazra

$$\lambda_n^*(E) = \inf\Big\{\sum_{k=1}^{\infty}\alpha(R_k)\ :\ E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} R_k,\ R_k \text{ félzárt téglák}\Big\}.$$

   Vagyis E-t téglákkal lefedjük, összeadjuk a térfogataikat, és ezek infimumát vesszük.
3. **Lebesque-mérhetőség (Carathéodory-kritérium):** Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz Lebesque-mérhető, ha minden $A \subset \mathbb{R}^n$-re

$$\lambda_n^*(A) = \lambda_n^*(A \cap H) + \lambda_n^*(A \setminus H).$$

4. **Lebesque-mérték:** A Lebesque-mérték λ_n a λ_n^* megszorítása a Lebesque-mérhető halmazok σ -algebrájára:

$$\lambda_n := \lambda_n^*\big|_{\mathcal{L}}.$$

1D eset (hossz): $n = 1$-ben $\lambda_1 = \lambda$ és intervallumokra

$$\lambda((a,b)) = \lambda([a,b]) = \lambda((a,b]) = \lambda([a,b)) = b - a.$$

Fontos tulajdonságok (vizsgára):

- λ_n mérték: σ-additív, $\lambda_n(\emptyset) = 0$.
- **Transzláció invariáns:** $\lambda_n(E + x) = \lambda_n(E)$ minden mérhető E-re és $x \in \mathbb{R}^n$-re.
- **Teljes (complete):** ha $\lambda_n(N) = 0$ és $A \subset N$, akkor A is mérhető és $\lambda_n(A) = 0$.
- **σ-véges:** pl. $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty}[-k,k]^n$, és $\lambda_n([-k,k]^n) < \infty$.
- Minden Borel-halmaz Lebesque-mérhető (a Lebesque-σ-algebra tartalmazza a Borel-σ-algebrát).

Lebesque-mérhető halmazok

Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz **Lebesque-mérhető** (Carathéodory-értelemben), ha minden $A \subset \mathbb{R}^n$-re teljesül:

$$\lambda_n^*(A) = \lambda_n^*(A \cap H) + \lambda_n^*(A \setminus H).$$

Jelölés: a Lebesque-mérhető halmazok σ-algebrája legyen

$$\mathcal{L}^n := \{H \subset \mathbb{R}^n : H \text{ Lebesque-mérhető}\}.$$

Fontos tények:

- $\mathcal{L}^n$ valóban σ-algebra, és $\lambda_n := \lambda_n^*\big|_{\mathcal{L}^n}$ mérték rajta.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^n$ (minden Borel-halmaz Lebesque-mérhető).
- λ_n teljes: ha $\lambda_n(N) = 0$ és $A \subset N$, akkor $A \in \mathcal{L}^n$ és $\lambda_n(A) = 0$.

Lebesque-Stieljes mérték

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **monoton növekvő** (nemcsökkenő) és **jobbról folytonos**. Ekkor a félgyűrűn

$$\mathcal{I} := \{(a, b] : -\infty < a < b < \infty\}$$

adott

$$\mu_f((a, b]) := f(b) - f(a)$$

egy **előmértéket** (premeasure) ad.

Tétel (kiterjesztés): μ_f egyértelműen kiterjeszthető a $\sigma(\mathcal{I})$-re (ez a Borel-σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$), így kapunk egy Borel-mértéket, a (Lebesque–)Stieltjes-mértéket. A teljes mértéktér a szokásos módon a μ_f szerinti kompletten (nullhalmazok részhalmazainak hozzávételével) állítható elő.

Hasznos képletek / megjegyzések:

- Általában $\mu_f(\{a\}) = f(a) - f(a-)$, ahol $f(a-) := \lim_{x \uparrow a} f(x)$ (az „atom” nagysága).
- Ha f folytonos, akkor μ_f atommentes (nincsenek pozitív tömegű pontok).
- Példa: $f(x) = x$ esetén $\mu_f = \lambda$ (a Lebesque-mérték $\mathbb{R}$-en).

The Bright Side of Mathematics vidik:

- Lebesque mérték
- Lebesque-Stieljes mérték
- Külső mértékek 1.
- Külső mértékek 2.

- Külső mértékek 3.

IV. Riemann-, Riemann-Stieljes integrál, modern kontextusban. Mértéktartó leképezések

Ez a fejezet hidat épít a klasszikus integrálok (Riemann, Riemann–Stieltjes) és a mértékelméleti nézőpont között: ugyanazok a fogalmak más absztrakciós szinten jelennek meg. Vizsgán fontos érteni, hogy a Stieltjes-integrál természetes módon kapcsolódik a Stieltjes-mértékhez. A mértéktartó leképezések pedig azt formalizálják, mikor „nem változik” a mérték (és így az integrál) egy transzformáció alatt.

Riemann integrál

Legyen $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvény, valamint $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ egy felosztás $[a, b]$-n, ahol $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Ekkor az i-edik részintervallumon:

- $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
- $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
- $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

Ekkor a felül- és alulösszeg:

- $U(f, P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \cdot \Delta x_i$
- $L(f, P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \Delta x_i$

A f függvényt Riemann-integrálhatónak nevezzük, ha $\sup\{L(f, P) : P\}$ = $\inf\{U(f, P) : P\}$. Ekkor az integrál értéke:

$\int_a^b f(x)\, dx = \sup\{L(f, P) : P\} = \inf\{U(f, P) : P\}$

Riemann-Stieljes integrál

Legyen $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvények, valamint $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ egy felosztás $[a, b]$-n, ahol $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Ekkor az i-edik részintervallumon:

- $m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
- $M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$
- $\Delta g_i = g(x_i) - g(x_{i-1})$

Ekkor a felül- és alulösszeg:

- $U(f, g, P) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta g_i$
- $L(f, g, P) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta g_i$

A f függvényt Riemann–Stieltjes integrálhatónak nevezzük g szerint, ha $\sup\{L(f, g, P) : P\}$ = $\inf\{U(f, g, P) : P\}$. Ekkor az integrál értéke:

$\int_a^b f(x)\, dg(x) = \sup\{L(f, g, P) : P\} = \inf\{U(f, g, P) : P\}$

Mértéktartó leképezések

$(X, \mathcal{M}, \mu) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{N}, \nu)$ mértéktartó leképezés, ha:

$\forall B \in \mathcal{N} : f^{-1}(B) \in \mathcal{M}$ és $\mu(f^{-1}(B)) = \nu(B)$

Tulajdonságok:

- Legyen $h : Y \mapsto \mathbb{R}$, és $f : X \mapsto Y$ mértéktartó, ha $\int_x h\, d\mu = \int_y h\, d\nu$
- $(X, \mathcal{M}, \mu) \xrightarrow{f} (Y, \mathcal{N}, \nu)$ mértéktartó leképezés, ha $h : Y \mapsto \mathbb{R}$ mérhető, akkor $h \circ f : X \mapsto \mathbb{R}$ is mérhető és $\int_X h \circ f\, d\mu = \int_Y h\, d\nu$

V. Előjeles mértékek és variációik, felbontások

Az előjeles mértékekkel már nem csak „tömeget” mérünk, hanem pozitív és negatív hozzájárulások is lehetnek. A teljes variáció (|μ|) azért lényeges, mert ezzel lehet normálisan „nagyságot” rendelni egy előjeles mértékhez, és integrálási becsléseket ad. A Hahn- és Jordan-felbontás a vizsga szempontjából alap: minden előjeles mérték felbontható pozitív részek különbségeként, jól kontrollált módon.

Előjeles mérték

Legyen $(X, \mathcal{M})$ mérhető tér, az $\mu : \mathcal{M} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ leképezést előjeles mértéknek nevezzük, ha

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. μ σ-additív

Variációk

Teljes variáció:

$| \mu | (A) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} | \mu(A_i) || A = \cup_{i=1}^{n} A_i, A_i \cap A_j = \emptyset, A_i \in \mathcal{M}\}$

Pozitív variáció:

$\mu^+(A) = \sup\{\mu(B) \mid B \subset A, B \in \mathcal{M}\}$

Negatív variáció:

$\mu^-(A) = -\inf\{\mu(B) \mid B \subset A, B \in \mathcal{M}\}$

Jordan-felbontás

$\mu = \mu^+ - \mu^-$ és $| \mu |= \mu^+ + \mu^-$

Minden mérték előállítható két pozitív mérték különbségeként.

Hahn-felbontás

Legyen $(X, \mathcal{M}, \mu)$ előjeles mértéktér, ekkor létezik $P, N \in \mathcal{M}$ olyan, hogy

- $P \cup N = X,\ P \cap N = \emptyset$
- $\forall A \in \mathcal{M}, A \subset P \mapsto \mu(A) \geq 0$
- $\forall A \in \mathcal{M}, A \subset N \mapsto \mu(A) \leq 0$

VI. Abszolút folytonos és szinguláris mértékek, Lebesque-felbontás, Radon-Nikodym tétel, mértékek differenciálása

Ez a fejezet a „sűrűség” fogalmát teszi precízzé: a Radon–Nikodym tétel megmondja, mikor írható egy mérték egy másikhoz képest integrálható függvénnyel (deriválttal). A Lebesgue-felbontás pedig azt mondja ki, hogy egy mérték egy abszolút folytonos és egy szinguláris részből áll össze, és ez a felbontás egyértelmű. A mértékek differenciálása (alsó/felső derivált) a lokális arányokból nyeri vissza a sűrűséget.

Abszolút folytonos és szinguláris mértékek

Abszolút folytonos mérték:

α mérték abszolút folytonos β mértékhez képest, ha

$\forall A \in \mathcal{M}, \beta(A) = 0 \mapsto \alpha(A) = 0$. Jelölése: $\alpha \ll \beta$

- A halmazok amik 0-ák β-ra, azok α-ra is 0-ák
- Jele: $\alpha \ll \beta$

Szinguláris mérték:

α és β mérték szingulárisak egymáshoz képest, ha van $X = A \cup B$ diszjunkt halmazok és $\alpha(B) = \beta(A) = 0$. Jelölése: $\alpha \perp \beta$. A csak az α-nak, B csak a β-nak a hordozója.

Lebesque-felbontási tétel

Adott egy ν akár előjeles és egy μ hagyományos mérték, mindkettő σ-additív. Ekkor létezik olyan α és β mérték, hogy

- $\nu = \alpha + \beta$ egyértelmű felbontás, ahol
  - $\alpha \ll \mu$ (absz. folytonos)
  - $\beta \perp \mu$ (szinguláris)

Radon-Nikodym tétel

Adott ν előjeles és μ hagyományos mérték, mindkettő σ-véges, továbbá $\nu \ll \mu$. Ekkor létezik olyan $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvény, hogy:

$\nu(A) = \int_A f \, d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{M}$

Radon-Nikodym derivált:

Az f függvényt a ν mérték μ mérték szerinti Radon-Nikodym deriváltjának nevezzük, ha:

- Ha van egy abszolút folytonos mértékünk egy másik mértékhez képest, akkor létezik egy olyan függvény, ami az első mértéket a második mérték integráljaként adja vissza.
- f egy sűrűségfüggvénynek is megfelel

f = $\frac{d\nu}{d\mu}$

Adott $\alpha \ll \beta$ mértékek és $h \in L^1(\beta)$ és $f = \frac{d\alpha}{d\beta}$, akkor:

$\int_H h \, d\alpha = \int_X h \cdot f \, d\beta = \int_H h \frac{d\alpha}{d\beta} \, d\beta$

Előjeles mérték szerinti integrálás:

Adott $\nu \ll \tau$ előjeles mérték, $h \in L^1(\tau)$ és $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvény, akkor:

$\int_H h\ d\nu = \int_H h \cdot f\ d\tau = \int_H h \frac{d\nu}{d\tau}\ d\tau$

Totális variáció:

$\mid \nu \mid (A) = \int_A \mid \frac{d\nu}{d\tau} \mid\ d\tau$

Legyen $\nu(A)$ előjeles és μ σ-véges mértékek, $\nu \ll \mu$, ha $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ úgy, hogy $\mu(A) < \delta \implies \mid \nu(A) \mid < \epsilon$

Alsó és felső derivált:

- Alsó derivált: $\underline{D}_\mu \nu(x) = \liminf_{r \mapsto 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))}$
- Felső derivált: $\overline{D}_\mu \nu(x) = \limsup_{r \mapsto 0} \frac{\nu(B(x,r))}{\mu(B(x,r))}$

Összefüggés:

- $\underline{D}_\mu \nu(x) \leq \overline{D}_\mu \nu(x)$
- Ha $\underline{D}_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x)$, akkor a közös értéket μ-szer majdnem minden x-re $\frac{d\nu}{d\mu}(x)$-nek nevezzük.

Legyen ν lokálisan véges, előjeles Borel-mérték és van egy $\nu = \int f\ d\mu$ felbontása, ahol $f \in L^1(\mu)$, akkor μ-szer majdnem minden x-re:

$\underline{D}_\mu \nu(x) = \overline{D}_\mu \nu(x) = f(x)$

- μ majdnem minden x-re létezik a derivált és az egyenlő $f(x)$-el
- $D_\mu \nu(x) = f(x)$ visszaadja a Radon-Nikodym deriváltat

The Bright Side of Mathematics vidik:

- Radon-Nikodym tétel és Lebesque felbontás

VII. Korlátos változású, absz folyt. és szinguláris függvények, felbontásuk, differenciálásuk

Itt a mértékekről visszafordulunk függvényekhez: egy korlátos változású (BV) függvényhez természetesen társul Lebesgue–Stieltjes mérték, és a tulajdonságok mértékelméletileg jól kezelhetők. A vizsgán tipikusan a BV → „monoton különbsége", illetve az abszolút folytonos/szinguláris felbontás és a majdnem mindenütt vett deriválhatóság a kulcs. Intuíció: az abszolút folytonos rész „integrálható deriváltból” jön, a szinguláris rész pedig nullmértékű halmazon koncentrálódik.

Korlátos változású függvények

Adott $f : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény, ekkor az f korlátos változású, ha létezik olyan $M \geq 0$, hogy minden felosztásra $I = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$, ahol $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ teljesül:

$\tau_f(I) = \sup\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| : n \geq 1, x_0 < x_1 < ... < x_n \in I\} \leq \infty$

Azaz feldarabolva az I intervallumot, a függvényértékek különbségeinek összege felülről korlátos, vagyis supremuma véges.

$f : I \mapsto \mathbb{R}$ akkor és csak akkor korlátos változású, ha $f = f_1 - f_2$, ahol f_1, f_2 véges, monoton növekvő függvények.

Abszolút folytonos függvények

Egy $f : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény abszolút folytonos, ha bármely diszjunkt intervallum családra, melynek összhossza (Lebesque mértéke) kisebb, mint egy adott δ érték, a függvényértékek különbségeinek összege kisebb, mint egy adott ϵ érték.

$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ úgy, hogy bármely diszjunkt intervallum családra $\{(a_i, b_i)\}$, ahol $\sum(b_i - a_i) < \delta$, teljesül: $\sum |f(b_i) - f(a_i)| < \epsilon$

- $|b_i - a_i| = \lambda(I_i)$, ahol λ a Lebesque-mérték
- $|f(b_i) - f(a_i)| = \mu_f(I_i)$, ahol μ_f a f-hez tartozó Lebesque–Stieltjes mérték

Tétel: Korlátos változású függvény Lebesque–Stieltjes mértéke majdnem minden pontban differenciálható, és a derivált integrálja visszaadja a függvényt.

Szinguláris függvények

Egy $f : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény szinguláris, ha korlátos változású és létezik olyan $N \subset I$ halmaz, melynek Lebesque mértéke 0, és f csak ezen a halmazon változik.

Korlátos változású függvények

Legyen $f : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény, ekkor léteznek olyan $f_1, ..., f_n : I \mapsto \mathbb{R}$ korlátos változású függvények, hogy:

- $f = \sum_{i=1}^{n} f_i$

- f korlátos változású $\iff$ minden f_i korlátos változású
- Tagonként lehet deriválni m.m. x-en, és az eredmény a teljes függvény deriváltja lesz m.m. x-en

Luzin tulajdonságú függvények

Olyan halmazfüggvények, amik minden nullmértékű halmazt nullmértékű halmazra képeznek.

$\lambda(A) = 0 \implies \lambda(f(A)) = 0$

Abszolút folytonos függvények 2.

Ha létezik f mérhető függvény és f' véges minden $x \in H$-en, akkor:

- f' mérhető
- $\lambda(f(H)) = \int_H |f'| \, d\lambda$, azaz a mértéke felülről becsülhető a derivált abszolútértékének integráljával H-n
- $\lambda(f(H)) < \int_H |f''| \, d\lambda$, ha f'' létezik és véges minden $x \in H$-en, vagyis a függvény mértéke kisebb lesz, mint a második derivált abszolútértékének integrálja H-n

f függvény pontosan akkor lesz abszolút folytonos, ha van egy g függvény, amire igaz, hogy f megváltozása g integráljával egyenlő minden intervallumon.

$f(y) - f(x) = \int\limits_{[x,y]} g(t) \, d\lambda(t), \; \forall x \leq y \in I$

Ez akkor is érvényes, ha f deriválható és $f' = g$ majdnem minden pontban. Abszolút folytonosság $\iff$ deriválhatóság majdnem minden pontban és a függvény visszaállítása a derivált integráljával.

Lipschitz-folytonos függvények

Legyen $f : I \mapsto \mathbb{R}$ függvény, akkor Lipschitz-folytonos, ha létezik olyan $K > 0$ konstans, hogy minden $x, y \in I$-re:

$|f(x) - f(y)| \leq K \cdot |x - y|$, ahol K a Lipschitz-állandó.

Ha korlátos változású a függvény, akkor felbontható abszolút folytonos és szinguláris részre.

VIII. Mértékek szorzata

Ez a fejezet azt magyarázza meg, hogyan építünk mértéket szorzattéren úgy, hogy a „téglákon” a természetes szorzatképlet adódjon. A konstrukció csúcspontja a Fubini-tétel: megfelelő feltételek mellett a többszörös integrál felbontható iterált integrálokra, és a sorrend felcserélhető. Vizsgán fontos, hogy lásd a feltételeket (pl. L^1-integrálhatóság) és a következményt (mérhetőség + egyenlőségek).

Intuíció:

Legyen két mérhető térünk $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{N}, \nu)$. Ekkor a két tér szorzata egy új mérhető teret hoz létre, ahol a halmazok a két eredeti tér halmazainak szorzataként értelmezhetők. A mértékek szorzata pedig egy új mértéket definiál ezen a szorzat téren, amely a két eredeti mérték kombinációját tükrözi.

Legyen a két mérhető tér szorzata pl. egy mérhető tégla, ekkor $\mathcal{T} = \{A \times B\}$, ahol $A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{N}$. Ekkor a szorzatmérték a következőképpen definiálható:

$$\alpha(\mathcal{T}) = \alpha(A \times B) = \mu(A) \cdot \nu(B)$$

Tétel: α σ-additív $\mathcal{T}$-re.

Ha vesszük $\mathcal{T}$ véges unióját, akkor:

- A modulus lesz
- α kiterjeszthető lesz A-ra
- $\alpha \implies \varphi$ külső mérték lesz

Szorzatmérték

Legyen két mérhető térünk $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{N}, \nu)$. Ekkor a szorzatmérték egy új mértéket definiál a szorzat téren $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$, ha:

- $Z = X \times Y$
- φ az α kiterjesztése az A modulusról, megszorítva $\mathcal{S}$-re.
- $\mathcal{S}$ a φ-mérhető σ-algebra

Fubini-tétel

Adott $(X, \mathcal{M}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{N}, \nu)$ és az általuk alkotott szorzatmértékes tér $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$ esetén, ha $f \in L^1(\varphi)$ (pl. $\int_Z |f| \, d\varphi < \infty$), akkor:

$g(x) = \int_Y f(x, y) \, d\nu(y)$ m.m. mérhető és $g \in L^1(\mu)$, továbbá:

$\int_Z f(x,y)\ d\varphi(x,y) = \int_X g(x)\ d\mu(x)$

Véges sok tér szorzata

Adott $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$ mérhető terek esetén, ahol $i = 1, 2, \ldots, n$, a szorzatmértékes tér $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$ a következőképpen definiálható:

- $Z = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$
- k-szoros téglákhoz α, ezek kiterjesztése φ-re $\mathcal{S}$-en
- $\mathcal{S}$ a φ-mérhető σ-algebra

Tetszőleges sok tér szorzata

Tetszőlegesen sok mértéktér esetén legyen majdnem minden tag mértéke 1, azaz $(X_i, \mathcal{M}_i, \mu_i)$, ahol $i \in I$ és $\mu_i(X_i) = 1$ minden kivétellel. Ekkor a szorzatmértékes tér $(Z, \mathcal{S}, \varphi)$ a következőképpen definiálható:

- $Z = \prod_{i \in I} X_i$
- k-szoros téglákhoz α, ezek kiterjesztése φ-re $\mathcal{S}$-en
- $\mathcal{S}$ a φ-mérhető σ-algebra

The Bright Side of Mathematics vidik:

- Mértékek szorzata
- Fubini-tétel