Foundations of Deep Learning

Novian Habibie, Thomas Julian Nierhoff, Samuel Roth

Solutions of first exercise - Winter semester 2018/19

1 Jupyter notebooks

(d) Jupyter is already known.

2. Eigenvalue Decomposition given $A := \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$

a) Compute the eigenvalue decomposition $A = Q \Lambda Q^T$

I. Compute EValues: $\operatorname{Det}(A - \lambda E) = \operatorname{Det}\begin{pmatrix} 7-\lambda & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5-\lambda \end{pmatrix}$

$$= (7-\lambda)(5-\lambda) - (-\sqrt{3} \cdot -\sqrt{3})$$
$$= \lambda^2 - 12\lambda + 32 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{4, 8\}$$

II. Compute Eigenvectors:

For $\lambda = 8$ we get

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} (\cdot -1) \\ (\cdot -\sqrt{3}) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 3 & 3\cdot\sqrt{3} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-3\cdot \mathrm{I}) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \text{Eigenv} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{Normalize} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{4/3} \\ \frac{-1/\sqrt{3}}{\sqrt{4/3}} \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}} =: q_1$$

For $\lambda = 4$ we get:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -\sqrt{3} & 0 \\ -\sqrt{3} & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (\cdot -\sqrt{3}) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -\sqrt{3} & 0 \\ 3 & -\sqrt{3} & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (-\mathrm{I}) \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \text{Normalize} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1/\sqrt{4} \\ \sqrt{3}/\sqrt{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} =: q_2$$

$$\Rightarrow Q = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \quad \text{And } A = \frac{1}{4} Q \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} Q^T$$

b) Show that columns of Q are orthonormal:

$$Q \cdot Q^T = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & \frac{1}{2} \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \square$$

2.c) Show that $Q\Lambda^{-1}Q^T$ with $\Lambda^{-1} = \mathrm{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1})$

Proof: ~~[illegible]~~

It holds, that:

$$\underbrace{(Q\Lambda Q^T)}_{=A}(Q\Lambda^{-1}Q^T) = Q\Lambda \underbrace{Q^T Q}_{=E} \Lambda^{-1} Q^T$$

$$= Q \underbrace{\Lambda \Lambda^{-1}}_{=E} Q^T$$

$$= Q Q^T = E \Rightarrow Q\Lambda^{-1}Q^T = A^{-1} \quad \square$$

Aufgabe 3

a) $A = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 7 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 5 \end{bmatrix}$

$$\Big\downarrow \; R_2 \longrightarrow R_2 + \frac{\sqrt{3}}{7} R_1$$

$U = \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{8}{7} \end{bmatrix}$ $\qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{7} & 1 \end{bmatrix}$

Es gilt mit $A = LU$

$Ax = b$

$LUx = b$

$Ly = b \longrightarrow y$ (forward substitution)

$Ux = y$ (backward substitution)

$Ly = b: \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{7} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{14+\sqrt{3}}{7} \end{bmatrix}$

$Ux = y: \begin{bmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{8}{7} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{14+\sqrt{3}}{7} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1{,}0580 \\ 1{,}9665 \end{bmatrix}$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{4}{7}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\,\frac{14+\sqrt{3}}{8}\right) \\ \frac{14+\sqrt{3}}{8} \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4

a) $\|x_1\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_{1,i}| = 60$ $\qquad \|x_1\|_\infty = \max_{i=1..4} |x_{1,i}| = 31$

$\|x_2\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_{2,i}| = 94$ $\qquad \|x_2\|_\infty = \max_{i=1..4} |x_{2,i}| = 27$

$\|x_3\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_{3,i}| = 83$ $\qquad \|x_3\|_\infty = \max_{i=1..4} |x_{3,i}| = 30$

$\|x_4\|_1 = \sum_{i=1}^{4} |x_{4,i}| = 93$ $\qquad \|x_4\|_\infty = \max_{i=1..4} |x_{4,i}| = 28$

$\|x_1\|_2 = (24^2+3^2+2^2+31^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1550} \approx 39{,}37$

$\|x_2\|_2 = (27^2+20^2+26^2+21^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2246} \approx 47{,}39$

$\|x_3\|_2 = (30^2+21^2+27^2+5^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2095} \approx 45{,}77$

$\|x_4\|_2 = (26^2+28^2+25^2+14^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2281} \approx 47{,}76$

$\|x_1\|_8 = (24^8+3^8+2^8+31^8)^{\frac{1}{8}} \approx 31{,}47$

$\|x_2\|_8 = (27^8+20^8+26^8+21^8)^{\frac{1}{8}} \approx 29{,}38$

$\|x_3\|_8 = (30^8+21^8+27^8+5^8)^{\frac{1}{8}} \approx 31{,}53$

$\|x_4\|_8 = (26^8+28^8+25^8+14^8)^{\frac{1}{8}} \approx 30{,}46$

b) Die Plots wurden per Matlab-Skript erstellt.
Hierfür wurden zufällig Punkte $x \in [-1,1]^2$ gesampelt
und überprüft, ob deren p-Norm $(p \in \{1,2,8,\infty\}) \leq 1$ ist.
Anschließend wurde die konvexe Hülle um alle Punkte gebildet,
deren p-Norm ≤ 1 ist.

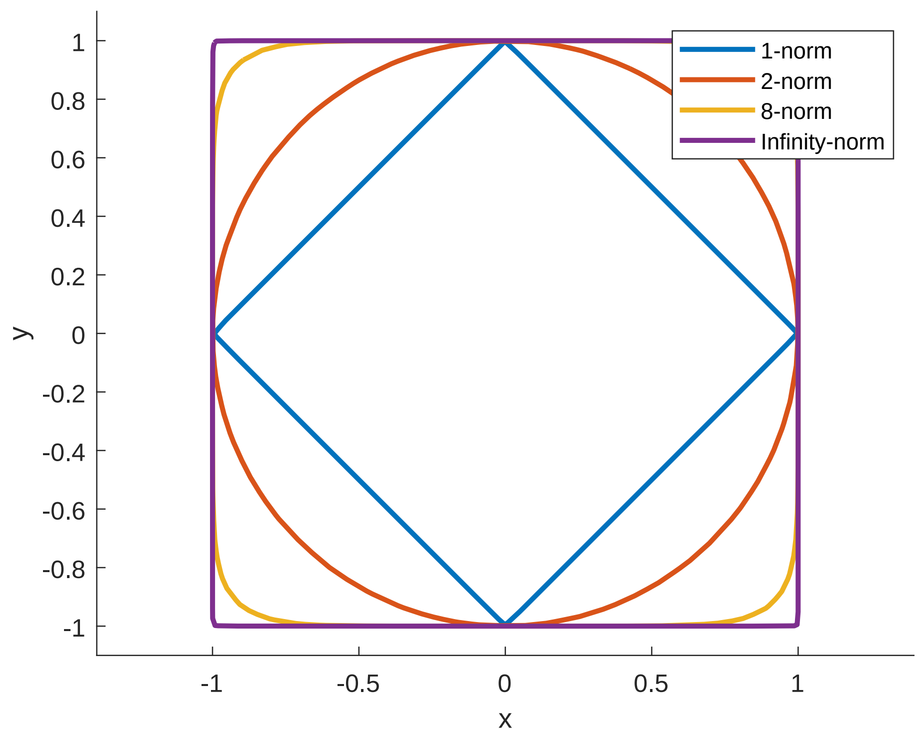
```
iMax = 1e5;

figure(1)
clf
hold on

for n = [1,2,8,Inf]
pList = [];
for i=1:iMax
p = 2*(rand(1,2)-0.5);
if norm(p,n) <= 1
pList(end+1,:) = p;
end
end

h = convhull(pList);
plot(pList(h,1), pList(h,2),'Linewidth',2)
end


xlim([-1.1 1.1])
ylim([-1.1 1.1])
xlabel('x')
ylabel('y')
legend('1-norm', '2-norm', '8-norm', 'Infinity-norm')
axis equal
```


1-norm
2-norm
8-norm
Infinity-norm
y
x
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-1
-0.5
0
0.5
1

5. Special orthogonal Matrices

a) Given $A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$

Compute $\det(A)$; $Tr(A)$

$$\det(A) = \frac{1}{2^2}\left(7\cdot 5 - \left(-\sqrt{3}\cdot -\sqrt{3}\right)\right) = \frac{1}{4}\cdot 32 = \frac{16}{2} = 8$$

$$Tr(A) = \frac{1}{2}(7+5) = 6$$

b) $Q(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ Compute $A' := QAQ^T$; $\det(A')$, $Tr(A')$

$$A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7\cos(\alpha) - \sqrt{3}\sin(\alpha) & \sqrt{3}\cos(\alpha) - 5\sin(\alpha) \\ 7\sin(\alpha) + \sqrt{3}\cos(\alpha) & \sqrt{3}\sin(\alpha) + 5\cos(\alpha) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\cancel{= \frac{1}{2}\left((7\cdot\cos(\alpha) - \sqrt{3}\cdot\sin(\alpha))\cdot\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cdot(\sqrt{3}\cos(\alpha) - 5\cdot\sin(\alpha)) \right.}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cdot(\cos(\alpha))^2 - 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)\cdot\sqrt{3} + 5 & 2\cdot(\cos(\alpha))^2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) \\ 2\cdot(\cos(\alpha))^2\cdot\sqrt{3} + 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) - \sqrt{3} & 2\cdot\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)\cdot\sqrt{3} + 2(\sin(\alpha))^2 + 5 \end{bmatrix}$$

$$\det(A') = \det(Q\cdot A\cdot Q^T) = \det(Q)\cdot\det(A)\cdot\underbrace{\det(Q^T)}_{=\det(Q)}$$

Using $\det(Q) = \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$ we get

$$\det(A') = 1\cdot 8\cdot 1 = 8$$

c) Using $Q\cdot Q^T = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q^T = Q^{-1}$$

and using $Tr(S^{-1}AS) = Tr(A)$ $\forall$ regular S we get $Tr(A') = Tr(A) = 6$ $\square$

5. c) What would be A' for $\alpha = \frac{\pi}{3}$?

$$A'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{5}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2\cdot\sqrt{3} & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

d) The computation part is a bit tedious and easy to screw up.

Took approx. 45 min.

Feedback

- Rechenübungen mit angenehmeren Zahlen stellen.
  Dividieren durch $\sqrt{3}$ ist nur nervig und bringt nichts fürs Verständnis
- Modalitäten der Abgabe besser kommunizieren
  - wie viele Zwischenschritte sollen dargestellt werden?
    (geht es nur darum, dass man zeigen soll dass man es selber gerechnet hat oder um was anderes?)
  - sind z.B. Plots mit Matlab-Skripten auch ok oder wird ein analytischer Lösungsweg verlangt?