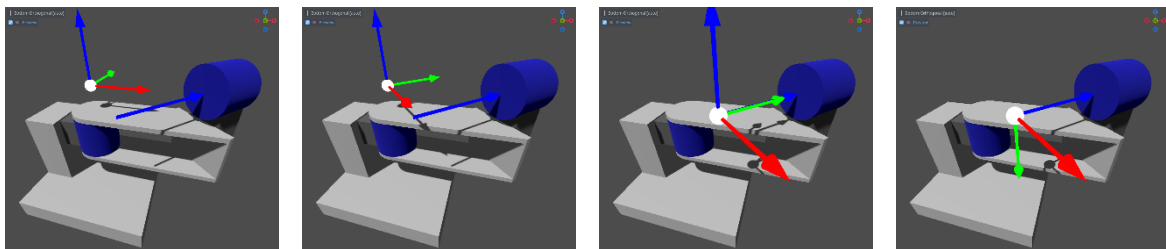


Koordinaten- und Winkeltransformationen in der Robotik

Denavit-Hartenberg Konvention

...Konvention zur Auswahl und Überführung von Ortskoordinatensystemen (OKS), welche mit den Achsgelenken zwischen zwei Segmenten einer kinematischen Kette verbunden sind.¹ Transformation zwischen zwei aufeinanderfolgenden Achsen:

$$T_n^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \cos \theta_n & -\sin \theta_n & 0 & 0 \\ \sin \theta_n & \cos \theta_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & r_n \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_n & -\sin \alpha_n & 0 \\ 0 & \sin \alpha_n & \cos \alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



→ $(d_n, \theta_n, r_n, \alpha_n)$...Denavit-Hartenberg Parameter

Quaternionen

...nicht-kommutatives Zahlensystem, welches die komplexen Zahlen um zwei weitere imaginäre Einheiten erweitert, wobei diese den Zusammenhang $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ aufweisen.²

$$q \in \mathbb{H}; q = q_0 + q_1 \mathbf{i} + q_2 \mathbf{j} + q_3 \mathbf{k} = q_0 + \mathbf{q}$$

Multiplikation: $q \cdot p = q_0 p_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + q_0 \mathbf{p} + p_0 \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}$

Einheitsquaternion $q = \cos \frac{\theta}{2} + \mathbf{u} \sin \frac{\theta}{2}$ rotiert einen Vektor v um die Achse \mathbf{u} und um den Winkel θ durch die Operation: $L_q(v) = qvq^*$

Verkettung von Rotationen: $L_p(L_q(v)) = p(qvq^*)p^* = (pq)v(pq)^* = L_{pq}(v)$

Duale Quaternionen

...Erweiterung der Quaternionen um die duale Einheit ε mit $\varepsilon^2 = 0$.

Einheitsdualquaternion stellt sowohl Rotation als auch Translation im Raum dar, was einer Schraubenbewegung entspricht.³

$$\hat{q} = a + \frac{\varepsilon}{2} (t_0 \mathbf{i} + t_1 \mathbf{j} + t_2 \mathbf{k}) a = \cos \frac{\hat{\theta}}{2} + \hat{\mathbf{s}} \sin \frac{\hat{\theta}}{2}$$

¹ Denavit, J., and Hartenberg, R. S. (June 4, 2021). "A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices." *ASME. J. Appl. Mech.* June 1955; 22(2): 215–221. <https://doi.org/10.1115/1.4011045>

² <https://graphics.stanford.edu/courses/cs348a-17-winter/Papers/quaternion.pdf>

³ Kavan, Ladislav & Collins, Steven & Zara, Jiri & O'Sullivan, Carol. (2007). Skinning with dual quaternions. *I3D*. 39-46. 10.1145/1230100.1230107.