# 全排列

- n个不同元素所有排列组合，n个元素的排列组合有n！个逆序数
- ★：123 132 231 213 321 312

# 逆序数

- 对一个排列的每个元素计算前面逆序元素的总数，奇数奇排列，偶数偶排列
- ★：15423 1:0 5:0 4:1 2:2 3:2 1+2+2=5，逆序数为5
  - 🎯：可把逆序数看做排序算法比较法步数的计算，从第一位开始比较前面一位是否有更大的数，如果有就交换位置，这样每一个数在比较开始时前方的数都是正序的，逆序数即是交换的步数。★：2431——2341（1）——1234（3）

# 对换

- 📌 定理1：一个排列中任意两个序数对换，改变奇偶性
  - 🎯：相邻的两个数字交换一次，逆序数一定+1或-1，把不相邻两个数字交换想象为多次相邻数字两两交换，那么交换的数字除了相交的一次交换，还要经历与两数中间数字的交换，中间有n个数字，就要相邻交换 2n次，两两相邻交换次数为2n+1,所以改变奇偶性

# 行列式计算

- $D=\sum(-1)^{t}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\ldots a_{np_n}$
- $p_1\ p_2\ p_3\ \ldots\ldots p_n$ 是对n阶方阵的数字1-n序列的排列，t值为该排列的逆序数，D值为所有排列相加
- 对角阵和上下三角行列式：D=$(-1)^{t}\times$对角线上数值相乘
  - 🎯：其余项都含0，可从有唯一不为0的元素的行反推，无其他项不为0
- 📌 定理2： $D_1=\sum(-1)^{t}a_{p_11}a_{p_22}a_{p_33}\ldots a_{p_nn}=D$

- 🎯：t值实际为行列序标逆序列之和的值，通常将行或列序列一方为自然序列，逆序列为0。将D中列序标互换变为自然排列，每次互换行序标会同时变化，故而奇偶性不变

## 行列式性质

- 1. $D^T = D$ 转置后不变。
    - 🎯：我们可以把行列式计算中的每个项，看做在n*n列表中的画圈游戏，规则是每一行每一列有且仅有一个元素，转置前后的行列式有一一对应的项，$b_{np_n} = a_{p_n n}$ ，每项序列虽然行列调换，但总逆序数不变，故而每一项的值不变
- 2. 互换行列式的两行（列），行列式变号
    - 🎯：当交换类两行（列）的时候，每一项的逆序数都改变奇偶性（定理1），故而D中的$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \ldots a_{np_n}$每一项都改变符号，故而结果为-D
    - 推论：行列式两行完全相等，行列式为0。D=-D , D=0
- 3. 行列式某一行（列）* k，行列式值为k * D
    - 推论：行列式某行（列）中公因子可以提出来，记到行列式外。
    - 🎯：$(-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \ldots a_{np_n}$ 某行有公因数，根据乘法分配率可以提出k
- 4. 行列式两行（列）成比例，行列式为0
    - 🎯： 行列式两行成比例，提取公因数后，两行完全相等，D为0，k * D =0
- 5. 行列式某行（列）元素是两数之和，D=两个行列式之和
    - 🎯： D=$\sum (-1)^t a_{1p_1}$（$a_{2p_2} + a_{2^1 p_2^1}$）$a_{3p_3} \ldots a_{np_n}$ ，分解后D=$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} \ldots a_{np_n}$ +$\sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2^1 p_2^1} a_{3p_3} \ldots a_{np_n}$
- 6. 倍加：行列式某行（列）*k加到某行（列），D值不变

- 🎯：以第2行加k倍第3行为例，倍加后$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\dots a_{np_n}$ 变为$(-1)^t a_{1p_1}$（$a_{2p_2}+k\times a_{3p_3}$）$a_{3p_3}\dots a_{np_n}$，分解后为$(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}\dots a_{np_n}$ +0（两行成比例），D值不变。
- 数k * 第 j 行加到第 i 行 记作 $r_i + kr_j$

## 行列式按行列展开

- 余子式：将n阶行列式中$a_{ij}$ 第i行和第j列的元素删去后，留下的n-1阶行列式，称为(i, j)元$a_{ij}$ 的余子式，记作$M_{ij}$
- 代数余子式：$A_{ij}$ = （$-1$）$^{i+j}M_{ij}$
    - 🎯：余子式可以用n*n列表中的画圈游戏理解，不可再选与选中元素同行和同列的元素，所以要将选中元素的该行该列其余元素删除，也可以从D公式思考，相当于提取公因数$a_{ij}$，剩下的元素可以视作n-1阶组成行列式的计算。为何为$(-1)^{i+j}$，余子式内部有计算各自的逆序数（将序列转换为自然序列的步数）将这看做整体，加入$a_{ij}$后还需要与相邻行（列）两两互换几步变为自然排列，此时的奇偶性，正好与$(-1)^{i+j}$值相等
- 引理：一个n阶行列式，如果第i行，除了$a_{ij}$ 外都为零：D=$a_{ij}A_{ij}$
- 📌 定理3：行列式=任意一行（列）元素与其代数余子式的乘积
    - 🎯：引理和行列式加法分解可证，可将行列式分解多个选定行（列）仅有单个元素其余为0的行列式相加
    - 推论：行列式某一行（列）元素与另一行（列）元素对应的代数余子式相乘，D=0
    - 如果用一组数替换行列式的某行（列）后的行列式=这组数与其代数余子式之积的和
    - 🎯：相当于计算一个两行（列）相等的行列式
- 范德蒙德行列式：

$$[V(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ 1 & x_3 & x_3^2 & \cdots & x_3^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

    - 🎯：分别用每列减去前一列乘$x_1$，$x_2$，$x_3$ ……，行列式展开降阶，提取公因式后重复。（教科书上用行表示），用归纳法的方式

很容易证明，先证2阶，再设n-1阶，最后证n阶

# 克拉默法则

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

- 克拉默法则：如果线性方程组的系数行列式不为零，$D \neq 0$，则有唯一解：$x_n = \frac{D_n}{D}$
  🎯：第二章知识 $Ax=b$，双侧左乘A的逆矩阵，$x=A^{-1}b$，$x=\frac{1}{|A|}A^*b$，$x_i=\frac{1}{|A|}(b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+b_3A_{3i}+b_nA_{ni})$，一组数替换行列式的某行（列）后的行列式=这组数与其代数余子式之积的和。$D_i$ =b替换A第i列元素所得行列式
- 📌 定理4：如果线性方程组的系数行列式不为零，$D \neq 0$，则有且仅有唯一解
- 📌定理4‘：逆否定理 线性方程组无解或有两个不同的解，则系数行列式一定为0
- $b_1 \ldots b_n$全为0，为齐次线性方程组，不全为0，则为非齐次线性方程组。齐次线性方程组一定有0节，但不一定有非0解
- 📌定理5：齐次线性方程组的系数行列式$D \neq 0$，则齐次线性方程组一定没有非零解
- 📌定理5’：如果齐次线性方程组有非零解，则$D=0$
  🎯：齐次线性方程组$b_1 \ldots b_n$全为0，当$D \neq 0$，可用克拉默法则计算，$x_n$ 一定为0