矩阵的初等变化

联想线性方程组在消元过程中的变化，方程组的同解变换。

- **初等行变换**：
  1. 对换：对调两行
  2. 数乘：$k(k \neq 0)$乘以某一行的元素，$r_i \times k$
  3. 倍加：某行的k倍加到另一行，$r_i + kr_j$
- 改为列，为初等列变换。
- 等价关系：矩阵A经过有限次初等变换变成矩阵B，A和B等价（行等价，列等价，等价）
  1. 反身性 A~A
  2. 对称性 若A~B，则B~A
  3. 传递性 若A~B，B~C，则A~C
- 行阶梯矩阵：有限次初等行变化后，可画一条阶梯线，线下全为0，每行阶梯线后第一个元素非0。
- 行最简矩阵：有限次初等行变换后，非零行第一个非零元素为1，且非零元所在列其他元素为0.
- 📌 定理1：设A于B为$m \times n$ 的矩阵，那么
  1. $A \overset{r}{\sim} B$（行等价）的充要条件，存在m阶可逆矩阵P，$PA = B$
  2. $A \overset{c}{\sim} B$（列等价）的充要条件，存在n阶可逆矩阵Q，$AQ = B$
  3. $A \sim B$（等价）的充要条件，存在m阶可逆矩阵P和n阶可逆矩阵Q，$PAQ = B$
- 初等矩阵：单位阵E经过一次初等变换得到的矩阵。

1. 性质1：A为$m \times n$ 矩阵，初等行变换=左乘m阶初等矩阵，初等列变换=右乘n阶初等矩阵。
   - 对换：$E(i,j)$，$E(i,j)^{-1} = E(i,j)$
   - 数乘：$E(i(k))$，$E(i(k))^{-1} = E(i(\frac{1}{k}))$
   - 倍加：$E(ij(k))$，$E(ij(k))^{-1} = E(ij(-k))$
2. 性质2：方阵A可逆的充要条件是存在有限个初等矩阵$P_1, P_2 \ldots P_l$，使得$A = P_1P_2 \ldots P_l$

- 🎯：充分性：当$A=P_1P_2\dots P_l$，两侧分别右乘P_1^{-1}，P_2^{-1}……P_l^{-1}，得$P_l^{-1}\dots P_2^{-1}P_1^{-1}A=E$。A可逆。必要性：A可逆，A是满秩方阵，A可经过一系列初等变换变为标准型E，另$P_l^{-1}\dots P_2^{-1}P_1^{-1}A=E$，$A=P_1P_2\dots P_l$。

- 推论：方阵A可逆的充要条件是$A\overset{r}{\sim}E$。
- 可用增广矩阵求逆，求解。
  - 🎯：$A^{-1}A=E$，由性质2可知A^{-1}可看做有限个初等矩阵相乘，$A^{-1}E=A^{-1}$,A和E经过等于A^{-1}的有限个初等行变换。A变为E，E变为A^{-1}。即可用增广矩阵一同变换，求解过程相似，$AX=B$，A变为E，B变为$A^{-1}B$，即X。

矩阵的秩

- k阶子式：在$m\times n$矩阵A中，不改变次序，任取k行k列组成k阶行列式（$k\le m,n$)，为矩阵A的k阶子式。
- 矩阵的秩：矩阵$A_{m\times n}$中存在一个非零r阶子式D，r+1阶子式（如有）全为0，则r阶非零子式称为最高阶非零子式，数r称为矩阵的秩，记作R(A)。零矩阵的秩规定为0。
  - $0\le R（A）\le min\{m,n\}$。
  - $R(A^T)=R(A)$
  - 可逆矩阵=满秩矩阵，不可逆矩阵（奇异矩阵）=降秩矩阵
- 📌 定理2：若A~B，则$R(A)=R(B)$
  - 🎯：证明A~B经历一次初等变换。对换和数乘不改变对应子式的阶数。只需考虑倍加。根据$i+kj$是否在子式里分四种情况：1.i(+)j(+) 2.i(+)j(-) 3.i(-)j(+) 4.i(-)j(-)。都不影响子式的阶数。
- 推论：若可逆矩阵P、Q，使$PAQ=B$，则$R(A)=R(B)$。
- 常用的矩阵的秩的性质：
  1. $0\le R（A）\le min\{m,n\}$。
  2. $R(A^T)=R(A)$
  3. 若A~B，则$R(A)=R(B)$
  4. P、Q可逆，使$PAQ=B$，则$R(A)=R(B)$。
  5. $max\{R(A),R(B)\}\le R（A,B）\le R(A)+R(B)$，当B为列向量，$max\{R(A),R(B)\}\le R（A,b）\le R(A)+1$

    - 🎯：$R(A,B)$ 增广矩阵，$R(A)+R(B)$ 可看做分块对角矩阵。 矩阵A和B的最高阶非0子式一定是$R(A,B)$的子式。在(A,B)中让A和B分别作列变换成列阶梯矩阵，有a+b列非零列，$R(A,B)$一定小于等于a+b。
6. $R(A+B) \leq R(A)+R(B)$
    - 🎯： $R(A+B) \leq R(A+B,B)$，$R(A+B,B)=R(A,B)$（列等价），$R(A+B) \leq R(A,B)$，$R(A,B) \leq R(A)+R(B)$，得$R(A+B) \leq R(A)+R(B)$
7. $R(AB) \leq min\{R(A),R(B)\}$，见定理7
8. 若$A_{m\times n}B_{n\times l}=O$，则$R(A)+R(B) \leq n$ 。若A为列满秩（R(A)=矩阵的列数），B=O。
    - 🎯：$R(AB) \leq min\{R(A),R(B)\}$，$AB=O$，一定有A或B秩为0，如$R(A)=0$，$R(B) \leq min\{n,l\}$，$R(A)+R(B) \leq n$。若$R(A)=n$，$R(B)=0$ 。
    - 用第4章知识证明：记$B=(b_1,b_2,\ldots b_l)$，$A(b_1,b_2,\ldots b_l)=(0,0,\ldots 0)$ $Ab_i=0$ 。$R(B) \leq R_s$，$R(A)=n-R_S$，$R(A)+R(B) \leq n$

线性方程组的解

- 📌 定理3：n元线性方程组$Ax=b$
    1. 无解的充要条件，$R(A) < R(A,b)$
    2. 有唯一解的充要条件，$R(A)=R(A,b)=n$
    3. 有无限多解的充要条件，$R(A)=R(A,b) < n$
    🎯：1.当$R(A) < R(A,b)$，方程组将出现0=1，无解。2. $R(A)=R(A,b)=n$，可化为行最简式，每个未知数有一一对应的值，有唯一解。3.$R(A)=R(A,b) < n$，有$n-r$个自由未知数，有含有$n-r$个参数的通解。
- 定理3的拓展
  \- 📌 定理4：n元齐次线性方程组$Ax=0$有非零解的充要条件是$R(A) < n$
  \- 📌 定理5：线性方程组$Ax=b$有解的充要条件是$R(A)=R(A,b)$
  定理5推广到矩阵方程：
- 📌 定理6：矩阵方程$AX=B$有解的充要条件是$R(A)=R(A,B)$

- 🎯：将矩阵X和B分解为由列向量组成的分块矩阵，$AX=B$ 有解，说明$Ax_i=b_i$ 有解，由定理5得有解的充要条件是$R(A)=R(A,b)$，A化为行阶梯矩阵时，$R(A)=R(A,bi)$ ，故而$R(A)=R(A,B)$

- 📌 定理7：设$AB=C$，则R（C）$\leq min\{R(A),R(B)\}$
  - 🎯：1.证$R(C)\leq R(A)$：$AB=C$，定理6得，B有解的充要条件为，$R(A)=R(A,C)$，又因$R(C)\leq R(A,C)$，得$R(C)\leq R(A)$。2.证$R(C)\leq R(B)$：$AB=C$，$B^TA^T=C^T$ ，同1可得，$R(C^T)\leq R(B^T)$，$R(C)\leq R(B)$。