- 本章将向量和向量空间的概念抽象化，使概念推广应用。

线性空间

- 线性空间：定义与向量空间相似。非空集合V中，对任意$\alpha,\beta\in V$ ，数乘$(\lambda,\mu\in R)$ 和加法封闭，有唯一的一个元素γ 与之相对，并且满足下列八条运算规律。
- 运算规律：
  1. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
  2. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
  3. 任何$\alpha\in V,$都有$\alpha+0=\alpha$
  4. 任何$\alpha\in V$,都有$\beta\in V$，$\beta=-\alpha$，使$\alpha+\beta=0$
  5. $1\alpha=\alpha$
  6. $\lambda(\mu\alpha)=(\lambda\mu)\alpha$
  7. $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha$
  8. $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta$
- 凡是满足上述规律的加法乘法运算，称为线性运算，定义了线性运算的集合，就是线性空间。
- 🎯：线性空间是向量空间的抽象化推广，线性空间中的基不拘泥于向量，可应用于更多的数学对象，如多项式。线性空间只需满足：1，非空集合V（线性空间），一个数域P（数乘）2.加法数乘封闭，八条运算规律。例4,5重新定义加法和乘法的运算规则，同样可以验证是否为线性空间。
- 线性空间的性质：
  1. 零元素是唯一的
  2. 任意元素的负元素是唯一的
  3. $0\alpha=0;-1\alpha=-\alpha;\lambda0=0$
  4. 如果$\lambda\alpha=0$，则$\lambda=0$，或$\alpha=0$

维数、基与坐标

- 线性空间V中，如果存在n个元素$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ ，满足$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性无关，V中任一元素可由$\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ 线性表示。

    - 基：$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 称为线性空间V中的一个基.
    - 维数：n成为线性空间V的维数。
    - n维线性空间：维数为n的线性空间
    - 坐标：对任一元素α，有且仅有一组有序数$x_1,x_2,...,x_n$使 $\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots+x_n\alpha_n$,$x_1,x_2,...,x_n$成为该元素在 $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ 这个基下的坐标。记作$\alpha=(x_1,x_2,...,x_n)^T$
    - 🎯：拓展到多项式的线性空间中，维数为最高次数+1。
- 同构：设V和U两个线性空间，他们的元素之间有意义对应关系，且这个对应关系保持线性组合的对应，则成为线性空间V和U同构。
    - 任何n维线性空间都与R^n同构，即维数相等的线性空间同构。

基变换和坐标变化

- 基变换公式：$\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$和$\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$是线性空间中的两个基，$(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)P$
- 📌 定理1：坐标变换公式：设向量 α∈V在旧基 ϵ下的坐标为 $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)^\top$，在新基 ϵ′下的坐标为 $X'=(x'_1,x'_2,\ldots,x'_n)^\top$。则有如下坐标变换关系$X=PX'$或$X'=P^{-1}X$ ，P是**过渡矩阵**。
    - 🎯：线性空间的基线性无关，P可逆。证：$AX=\alpha=BX'=APX',X=PX'$

线性变换

- 映射：A、B为非空集合，$\forall a\in A$，按一定规则，B中有一确定元素β与之对应。称为从集合A到集合B的映射。$\beta=T(\alpha)$或$\beta=T\alpha$ 。
    - α是在映射T下的源，是α在映射T下的像。
    - A是映射T的源集，B是映射T的像集。
- **线性变换**：T是从V_n到U_m的映射，$\alpha_i\in V$，判断是否为线性变换的核心是满足两个条件：
  1.保持加法运算：$T(\alpha_1+\alpha_2)=T(\alpha_1)+T(\alpha_2)$
  2.保持数乘运算：$T(\lambda\alpha)=\lambda T(\alpha)$
    - 🎯：合并运算：$T(\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2)=\lambda_1T(\alpha_1)+\lambda_2T(\alpha_2)$
- 基本性质：
  1. $T0=0,T(-\alpha)=-T\alpha$

2. 若$\beta = k_1\alpha + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$则
   $T\beta = k_1T\alpha + k_2T\alpha_2 + \cdots + k_mT\alpha_m$
3. 若$\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$线性相关，则$T\alpha_1, T\alpha_1, \ldots, T\alpha_m$也线性相关。
   - 逆命题不成立。若$\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$线性无关，$T\alpha_1, T\alpha_1, \ldots, T\alpha_m$不一定线性无关。
4. 线性变换T的像集$T(V_n)$也是一个线性空间，称为线性变换T的像空间
   - 🎯：证像集加法和数乘运算封闭，另$\beta_1, \beta_2 \in T(V_n)$，有$\alpha_1, \alpha_2 \in V_n$，使得；$T\alpha_1 = \beta_1, T\alpha_2 = \beta_2$ ，加法封闭：$\beta_1 + \beta_2 = T\alpha_1 + T\alpha_2 = T(\alpha_1 + \alpha_2) \in T(V_n)$，数乘封闭：$k\beta_1 = \lambda T\alpha_1 = T(\lambda\alpha_1) \in T(V_n)$
5. 线性变换的核：被T映射到零向量的原向量集合，$S_T = \{\alpha | \alpha \in V, T\alpha = 0\}$。这个空间天然线性运算封闭。易证加法和数乘封闭。

线性变换的矩阵表达式

- **线性变换的矩阵表达式**：在线性空间V_n 中取一个基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，这个基在线性变换T下的像：$T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A$ ，A称线性变换T在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的矩阵。
  - $T(\alpha_i) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(a_{1i}，a_{2i}, \ldots, a_{ni})^T$
  - 🎯：通过基在线性变换T下的像，可确定唯一矩阵A，同样，矩阵A也可以确定唯一线性变换T。记V_n中任一元素$\alpha = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i$ ，$T(\alpha) = T(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i T(a_i)$
    $= (T(a_1), T(a_2), \ldots, T(a_n))(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)A(x_1, x_2,$
- x是基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$的坐标，$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$，$T(x) = Ax$
- 📌 定理2：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$和$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$是线性空间$V_n$的两个基，从基$\alpha_i$到$\beta_i$的过渡矩阵为P，$V_n$中线性变换在两个基下的矩阵依次为A和B，$B = P^{-1}AP$ ，此时过渡矩阵P是相似变换矩阵。
  - 🎯：同一线性变换在不同基下求得的矩阵是相似变换矩阵。证：已知：$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)P$ ，$T(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)A,$
    $T(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)B$ 。得：

$T(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)=T[(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)P]=[T(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)]P$
$=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)AP=(\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)P^{-1}AP$,$\beta_1,\beta_2,...,\beta_n$线性无关，$B=P^{-1}AP$

- 线性变换的秩：线性变换T的像空间$T(V_n)$的维数，称为线性变换T的秩。
  - 若A是T的矩阵，T的秩为R(A)
  - 若T的秩为r，则T的核S_T的维数为$n-r$