函数是对未知数的映射，每个x只有一个对应的y。矩阵可看做对一组列向量的线性映射。

矩阵的加法

- 仅在同型矩阵间运算，矩阵中的元素两两相加$a_{ij}+b_{ij}$，符合交换律和结合律。
- $A+B=B+A$
- $(A+B)+C=A+(B+C)$
- 矩阵减法： -A为 A的负矩阵 $A+(-A)=0$， -B为 B的负矩阵 $A-B=A+(-B)$

矩阵的数乘

- $A=a_{ij}$ ，$\lambda A=A\lambda=\lambda a_{ij}$ ，每个元素都乘λ，符合交换律，结合律，分配律
- （$\lambda\mu)A=\lambda$（$\mu A)$
- $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$
- $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

矩阵的乘法

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3, \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=b_{11}t_1+b_{12}t_2, \\ x_2=b_{21}t_1+b_{22}t_2, \\ x_3=b_{31}t_1+b_{32}t_2, \end{cases}$$

带入后得

$$\begin{cases} y_1=(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})t_1+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})t_2, \\ y_2=(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31})t_1+(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32})t_2, \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

带入后得$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ =
$\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} \end{pmatrix}$

- 🎯：矩阵乘法，可以看做一种复合映射（对一组数）。与函数的复合映射相似，$y = f(x), x = \mu(t), y = f(\mu(t))$ 。 $C = AB$ ，A的列数必须等于B的行数，从上式看，A的列数是y对应的x的个数，B的行数是用t表示的x的个数，只有x一一对应，y才可以用t表示。
- 矩阵的乘法不满足交换律，但满足结合律和分配律。而当$AB = BA$时，称A和B是可交换的。
  - $(AB)C = A(BC)$
  - $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$
  - $A(B + C) = AB + AC$， $(B + C)A = BA + CA$
  - 单位阵（纯量阵λE） $EA = AE = A$ ，单位阵和纯量阵与任何同阶方阵是可交换的。
  - 矩阵的幂 $A^kA^l = A^{k+l}$ ， $(A^k)^l = A^{kl}$
  - $(A + B)^2 = A^2 + BA + AB + B^2, (A + B)(A - B) = A^2 + AB - BA -$

矩阵转置

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
- $(AB)^T = B^TA^T$
- 🎯：可由$C_{m\times n} = A_{m\times s}B_{s\times n}$， $C_{ij} = \sum_{k=1}^{s} a_{ik}b_{kj}$ 推导，也可用矩阵分块法将A划分为若干行向量，B为若干列向量，更易证明。

方阵的行列式

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $|\lambda A| = \lambda^n |A|$
- $|AB| = |A||B|$
- 伴随矩阵：行列式|A|的各个元素的代数余子式 $A^* = (A_{ij})^T$
- $AA^* = A^*A = |A|E$
- 🎯：第一章可知，D=任意一行与其代数余子式乘积之和，行列式某一行（列）元素与另一行（列）元素对应的代数余子式相乘，D=0，故而计算得对角线元素值为$|A|$，其余为0。

逆矩阵

- 对n阶矩阵A，如果有一个n阶矩阵B，使 $AB = BA = E$，矩阵A可逆，称B为A的逆矩阵。
- 矩阵A可逆，A的逆矩阵是唯一的。
- 🎯：设B和C都是A的逆矩阵，$B = BE = B(AC) = (BA)C = EC = C$
- 📌 定理1：若矩阵A可逆，则$|A| \neq 0$
- 📌 定理2：若$|A| \neq 0$，则矩阵A可逆，且$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
- 🎯： $AA^* = A^*A = |A|E$，$A\frac{1}{|A|}A^* = A^*\frac{1}{|A|}A = E$，$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
- 推论：若$AB = E,$ 则$B = A^{-1}$
- 奇异矩阵：$|A| = 0$，否则为非奇异矩阵。A可逆的充要条件是A为非奇异矩阵。
- 运算规律：
  - 若A可逆，则A^{-1}也可逆，（A^{-1}）$^{-1} = A$
  - 若A可逆，数$\lambda \neq 0$，则λA可逆，$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$
  - 🎯： $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$，$(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{|\lambda A|}(\lambda A)^*$ = $\frac{1}{\lambda^n|A|}\lambda^{n-1}A^*$ = $\frac{1}{\lambda}A^{-1}$
  - 若AB为同型矩阵，且均可逆，则$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
  - 🎯： $AB(AB)^{-1} = E$，双侧左乘A的逆，后左乘B的逆
  - 若A可逆，则A^T可逆，$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

    - 🎯： $A^T(A^{-1})^T=(A^{-1}A)^T$ =E，$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
- 特例：$A=P\Lambda P^{-1}$
    - $A^n=P\Lambda^n P^{-1}$
    - $\varphi(A)=a_0E+a_1A+\cdots+a_mA^m$
      $=Pa_0EP^{-1}+Pa_1\Lambda P^{-1}+\cdots+Pa_m\Lambda^m P^{-1}=P\varphi(\Lambda)P^{-1}$

矩阵分块法

- 一个矩阵可以根据若干横线纵线划分为多个小矩阵（子块），以子块为元素的矩阵为分块矩阵。
- 加法：矩阵A和B行列数相同，采用相同分块法，可相加，等于对应子块相加。
- 数乘： $\lambda A=\lambda * 各子块$
- 乘法：乘法与普通矩阵算法相似，把子块看做元素。矩阵A和矩阵B需满足，A的列数=B的行数，相乘的子块满足的A子块列数=B子块行数。
- 转置：子块看做元素转置后，每个子块再转置。
- 🎯：可以想象为一侧有图案的透明卡片，切割成数块（如4块），想将图片沿对角线翻转，应该先把分割的小图片按转置的顺序排好，再将小图片沿着各自对角线翻转。
- 分块对角矩阵：仅对角线上有子块，每个子块都是方阵。
    - $|A|=|A_1||A_2|\ldots|A_n|$
    - A的逆矩阵=对角线上的子块变为其逆矩阵。
    - 🎯：可用分块矩阵的乘法证明，A的逆矩阵对角线子块，要与A的对角线相同位置子块相乘，每一块的结果都为E。
- $A_{m\times n}$可看做m个行向量或n个列向量的分块矩阵。