向量的内积和长度

- n维列向量x，y的内积：$[x,y]=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，$[x,y]=x^Ty$
- 内积的性质：
  1. 对称性：$[x,y]=[y,x]$
  2. 线性性：$[\lambda x,y]=\lambda[x,y]$
  3. 分配律：$[x+y,z]=[x,z]+[y,z]$
  4. 正定性：当x=0时，$[x,x]=0$；当$x\neq 0$ 时，$[x,x]>0$
- 施瓦茨不等式：$[x,y]^2\leq[x,x][y,y]$
- 长度：$||x||=\sqrt{[x,x]}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}$ ，$||x||=1$时，x为单位向量
- 向量长度的性质：
  1. 非负性：$||x||\geq 0$
  2. 齐次性：$||\lambda x||=|\lambda|||x||$
  3. 三角不等式：$||x+y||\leq||x||+||y||$
     - 🎯：以二维几何角度，可类比为三角形边的长度小于另外两条之和，用代数证明：$||x+y||^2=[x+y,x+y]=[x,x]+2[x,y]+[y,y]$，$(||x||+||y||)^2=[x,x]+[y,y]+2\sqrt{[x,x][y,y]}$ ，根据施瓦茨不等式：$[x,y]^2\leq[x,x][y,y]$ ，$[x,y]\leq\sqrt{[x,x][y,y]}$ ，所以 $||x+y||\leq||x||+||y||$
- 🎯：内积在解析几何中：$x\cdot y=|x||y|cos\theta$ ，即向量x的长度和y在向量x的投影长度的乘积（可反）。内积可以衡量两个向量的关联度，内积的大小与自身长度和向量夹角相关，概念可延伸至n维空间中。

正交性

- 正交向量组：一组两两正交的非零向量。$[x,y]=0$时，称向量x与y正交。
  - 🎯： $\theta=arccos\dfrac{[x,y]}{||x||||y||}$ ，可从解析几何数量积$x\cdot y=|x||y|cos\theta$ 引申，当$[x,y]=0$时，向量x，y正交。

- 📌 定理1：若n维向量a_1，$a_2,...,a_r$是一组两两正交的非零向量，则a_1，$a_2,...,a_r$一定线性无关。
  - 🎯：几何角度：把正交向量组看成r个自然基的延伸和旋转，不会改变自然基的秩，所以一定线性无关。代数证明：设有$\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_r a_r=0$，当左乘$a_i^T$时，其余项都为0，$\lambda_i a_i^T a_i=0$，得$\lambda_i=0$，向量组线性无关。
- 规范正交基：n维向量空间V的一组基两两正交，且都是单位向量。
- V中的规范正交基$e_1,e_2+...,e_r$ 可线性表示向量空间V中任一向量：
  - $a=\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2+\cdots+\lambda_r e_r$，为了求系数$\lambda_i$，可左乘$e_i^T$时，其余项都为0，$e_i^T a=\lambda_i e_i^T e_i=\lambda_i$，得$\lambda_i=e_i^T a=[a,e_i]$
  - 🎯：利用$\lambda_i=[a,e_i]$公式可以快速求出向量的坐标。
- 施密特正交化：对于一组向量空间中的基，固定第一个向量不变，每个新向量在已有的基础上消除已存在的正交基方向的投影，得到垂直于已有向量的新的基，最后将所有基单位化。可得到一组规范正交基。
  - 🎯：以α,β为例，β为基，消除α在β上的投影。将α分解为平行和垂直于β的两个向量α_1,α_2，α_2为新的基，$\alpha_2=\alpha-\alpha_1=\alpha-|\alpha|cos\theta\frac{\beta}{|\beta|}=\alpha-|\alpha|\frac{[\alpha,\beta]}{|\alpha||\beta|}\frac{\beta}{|\beta|}=\alpha-\frac{[\alpha,\beta]}{[\beta,\beta]}\beta$，所有新的基公式同理。
- 正交矩阵：如果n阶矩阵A满足：$A^TA=E$（即$A^{-1}=A^T$），称A为正交矩阵，正交阵。
  - 🎯：向量A用列向量表示，即$(A^TA)_{ij}=a_i^Ta_j$，$a_i^Ta_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & 当\ i=j\\ 0 & 当\ i\neq j\end{cases}$，可见正交阵一定是**规范正交基**。
- 正交矩阵的性质：
  1. 若A为正交阵，则$A^{-1}=A^T$也是正交阵，且$|A|=1(或-1)$
     - 🎯：$A^{-1}(A^{-1})^T=A^TA=E$
       $|A^T||A|=|E|,|A|^2=|E|=1,|A|=1或-1$
  2. 若A和B都是正交阵，则AB也是正交阵。
     - 🎯：$AB(AB)^T=ABB^TA^T=AEA^T=E$
- 正交变换：若P为正交矩阵，则线性变换$y=Px$为正交变换
  - $y=Px$为正交变换，$||y||=\sqrt{y^Ty}=\sqrt{x^TP^TPx}=\sqrt{x^Tx}=||x||$，说明向量经过正交变换后长度不变。

方阵的特征值和特征向量

- $Ax=\lambda x$ ，对n阶矩阵A和n维非零向量x成立，数λ 为矩阵A的**特征值**，x为A的对应特征值λ **特征向量**
    - $Ax=\lambda x \rightarrow (A-\lambda E)x=0$，x为非零向量，向量方程成立的条件为$|A-\lambda E|=0$
- 特征值的性质：
    1. $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$
    2. $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n=|A|$
        - 🎯：计算$|A-\lambda E|=0$ 的解，$|A-\lambda E|$是关于λ的多项式，记作$f(\lambda)$ ，成为矩阵A的特征多项式。
          $f(\lambda)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\ldots(\lambda_n-\lambda)$。其中$\lambda^0$和$\lambda^{n-1}$ 项的系数分别是$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$
          和$(-1)^{n-1}(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)$，对应到行列式的计算公式，计算$\lambda^0$和$\lambda^{n-1}$的系数，可得上述结论。
        - 当A可逆的时候，$\dfrac{1}{\lambda}$是A^{-1}的特征值
            - 🎯：$Ax=\lambda x$ ，$A^{-1}Ax=A^{-1}\lambda x$,$A^{-1}x=\dfrac{1}{\lambda}x$
        - 若λ是A的特征值，则λ^k是A^k的特征值，$\varphi(\lambda)$是$\varphi(A)$ 的特征值。
            - 🎯： $A^2x=A\lambda x=\lambda Ax=\lambda^2x$，k阶同理。$\varphi(A)$同样用特征值基本公式可证。
- 📌 定理2：设$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m$是方阵A的m个特征值，$p_1,p_2\ldots,p_n$依次是与之对应的特征向量，如果$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_m$各不相等，则$p_1,p_2\ldots,p_n$线性无关。
    - 🎯：这是矩阵对角化的关键前提。可用归纳法和反证法证明。

相似矩阵

- 相似矩阵：A，B都是n阶矩阵，若有可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP=B$，则B是A的相似矩阵。对A进行$P^{-1}AP$运算称为对A进行相似变换，可逆矩阵P称为把A变成B 的相似变换矩阵。
- 📌 定理3：若n阶矩阵A与B相似，则A与B的特征多项式相同，从而A与B的特征值相同。

    - 🎯：相似变换不改变矩阵的秩，特征值，迹（对角线之和），行列式。
      $|B-\lambda E|=|P^{-1}AP-P^{-1}(\lambda E)P|=|P^{-1}(A-\lambda E)P|=|P^{-1}||A-\lambda E$
    - 推论 若n阶矩阵A与对角阵$\Lambda(diag=\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n)$相似，则$\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_n$ 是A的n个特征值。
        - 🎯：对角阵的特征值即是对角线上的值。
        - P的性质：$P=(p_1,p_2,...p_n)$ ，$P^{-1}AP=\Lambda$ ，得$AP=P\Lambda$ ，$A(p_1,p_2,...p_n)=(p_1,p_2,...p_n)\Lambda$,得$Ap_i=\lambda_i p_i$。相似变换矩阵P的所有列向量都是A的特征向量。这个性质可以用来求与矩阵相似的对角阵和相似变换矩阵。
- 📌 定理4：n阶矩阵A与对角阵相似（即A能对角化）的充要条件是A有n个线性无关的特征向量。
    - 🎯：只有当$P=(p_1,p_2,...p_n)$ 都线性无关时，P可逆。
    - 推论：如果n阶矩阵A的n个特征值互不相等，则A与对角阵相似。
        - 🎯：当A有特征值相等时，不一定有n个线性无关的特征向量，从而不能对角化。

对称矩阵的对角化

- 📌 定理5：对称阵的特征值是实数。
- 📌 定理6：设λ_1,λ_2是对称阵A的两个特征值，p_1,p_2是对应的特征向量，若$\lambda_1\neq\lambda_2$ ，则p_1,p_2正交。
    - 🎯：证 $p_1^Tp_2=0$或$p_2^Tp_1=0$ 。有$\lambda_1p_1=Ap_1,\lambda_2p_2=Ap_2,A=A^T$ ，$(Ap_1)^T=\lambda_1p^T=p_1^TA$，
      $\lambda_1p_1^Tp_2=p_1^TAp_2=\lambda_2p_1^Tp_2,因\lambda_1\neq\lambda_2,p_1^Tp_2=0$
- 📌 定理7：设A为n阶对称阵，必有正交阵P，使$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$ ，其中Λ是以A的n个特征值为对角元的对角阵。
    - 推论：设A为n阶对称阵，λ 是A的特征方程的k重根，则矩阵$(A-\lambda E)$的秩为n-k，从而对应特征值λ有k个线性无关的特征向量。
- 实对称矩阵正交对角化步骤：
    1. 求出A的全部特征值及其重数
    2. 求特征向量并单位化，将重特征值的特征向量正交化（特征值不同的已正交）

3. 排列单位特征向量，得到正交阵P，对角阵$\Lambda=P^{-1}AP=P^TAP$。

二次型及其标准型

- 二次型：含有n个变量$x_1,x_2,...,x_n$的二次齐次函数。
- 标准型：只含平方项的二次型。
- 规范型：二次项系数只有1，-1,0的标准型。
- 二次型可记作：$f=x^TAx$ ，其中$a_{ji}=a_{ij}$，$2a_{ij}x_ix_j=a_{ij}x_ix_j+a_{ji}x_jx_i$，$f=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$
    - 🎯：A是对称阵，对角线上的值对应的是x平方的系数。二次型和对称阵一一对应。对称阵A为二次型f的矩阵，二次型f为对称阵A的二次型。对称阵A的秩为二次型f的秩。
- 合同：n阶矩阵A、B，有可逆矩阵C，是$B=C^TAC$，则称矩阵A和B合同。
- 合同对角化：对于对称阵A，寻找可逆矩阵C，使C^TAC为对角阵，成对角阵A合同对角化。
    - 🎯：根据定理7，设A为n阶对称阵，必有正交阵P，使$P^{-1}AP=P^TAP=\Lambda$。
- 定理8：任一二次型f，总有正交变换$x=Py$，使f化为标准型。
    - 推论：任一n元二次型$f(x)=x^TAx$,总有可逆变换$x=Cz$，使$f(Cz)$为规范型。
    - 🎯：$x=Py,f(x)=f(Py)=y^TP^TAPy$ ，P^TAP是对角阵，可将二次型化为标准型。$C=PK$，P^TAP为对角阵，K也为对角阵，$K^T(P^TAP)K$为对角线上只有1，-1,0的对角阵。
    $$K=diag\{k_1,k_2,...,k_n\}\ ,\quad k_i=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|\lambda_i|}} & (\lambda_i\neq 0)\\ nbsp;1 & \lambda_i=0)\end{cases}$$
- 配方法化二次型为标准型：拉格朗日配方法：目标是将二次型化为多个平方项的组成,，换元后可变为标准型。
    - 有平方项时：对平方项配对，两两配对不成立时，可构筑三元平方。
    - 无平方项时：构造平方项。如设$x_1=y_1-y_2,x_2=y_1+y_2,x_1x_2=y_1^2-y_2^2$

正定二次型

- 定理9（惯性定理）： 设二次型$f=x^TAx$ ，它的秩为r，与两个可逆变换 $x=Cy,x=Pz$，使得……k中正数的个数与λ中正数的个数相等。其中标准型中正系数的个数为二次型的正惯性指数，负系数的个数为负惯性指数。
- 正定二次型：设二次型$f(x)=x^TAx$ ，对任何$x\neq 0$，都有$f(x)>0$ ，称f为正定二次型。若都有$f(x)<0$ ，称f为负定二次型。
- 定理10：n元二次型$f=x^TAx$为正定的充要条件是，它的标准型的n个系数全为正，即它的规范型的n个系数全为1，它的正惯性指数为n。
    - 推论：对称阵A为正定的充要条件是A的特征值全为正。
- 定理11（赫尔维茨定理）：对称阵A为正定的充要条件是：A的各阶主子式为正，对称阵为负定的充要条件是：奇数阶主子式为负，而偶数阶主子式为正。