向量组及其线性组合

- **n维向量**：n个有次序的数组成的数组。每个数都是向量的分量，第i个数称为向量的第i个分量。默认为列向量，行向量用a^T表示。
- **向量组**：若干个同维数的列向量（行向量）组成的集合。
- **线性组合**：给定向量组A：a_1，$a_2,...,a_m$，对任何一组实数k_1，$k_2,...,k_m$表达式$k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m$ 为向量A的一个线性组合，k_1，$k_2,...,k_m$称这个线性组合的系数。存在向量b= $k_1a_1+k_2a_2+\cdots+k_ma_m$，称向量b是向量组A的线性组合，能由向量组A线性表示。
- 📌 定理1：向量b能由向量组A：a_1，$a_2,...,a_m$线性表示的充要条件是矩阵A的秩$A=(a_1,a_2,...,a_m)$等于矩阵$B=(A,b)$的秩。(3.定理5)
- **向量组等价**：向量组B中所有向量可以由向量组A线性表示，则称向量组B能由向量组A线性表示，若向量组A和向量组B能互相线性表示，则称两个向量组等价。（行等价，列等价）
- 🎯：本章节让我们从向量组角度理解矩阵乘法，矩阵的秩，齐次和非齐次线性方程组

  - 第二章节的矩阵乘法：

    $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ $AB=C$

    $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ =

    $\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} \end{pmatrix}$

  将A看做列向量组成的分块矩阵

  $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$

  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$ =

  $\begin{pmatrix} a_1b_{11}+a_2b_{21}+a_3b_{31} & a_1b_{12}+a_2b_{22}+a_3b_{32} \end{pmatrix}$

C也视作列向量组成的分块矩阵，当B存在，C中每一个列向量都可由向量组A的线性表示，即向量组C可以被向量组A线性表示。B可以看做这一线性表示的系数矩阵。

- 矩阵的秩
  可看做向量张成空间的维数。
- 齐次线性方程组 非齐次线性方程组。
  Ax=0，可通过双边同时减一个列向量，再同时乘该向量系数的负倒数，每一个列向量是否可以被其他列向量线性表示。如果不能，说明线性无关，$R（A) = x列向量分量个数$
  Ax=b，列向量b被向量组A线性表示。

- 📌 定理2：向量组B能由向量组A线性表示的充要条件是 $R(A) = R(A, B)$（3.定理6）
  - 🎯：第三章定理6：矩阵方程$AX = B$有解的充要条件是 $R(A) = R(A, B)$
  - 推论：向量组A和向量组B等价的充要条件是 $R(A) = R（B） = R(A, B)$
  - 🎯：$R(A) = R(A, B)$,$R(B) = R(B, A)$, $R(A) = R（B） = R(A, B)$
- 📌 定理3：向量组B能由向量组A线性表示，$R(B) \leq R(A)$（3.定理7）
  - 🎯：$R(A) = R(A, B)$ ，$R(B) \leq R(A, B)$，$R(B) \leq R(A)$
- 🎯：本章的内容与第三章相对应，向量组和矩阵是一体两面，是几何语言和矩阵语言的对应。
  - 几何语言：向量组B能由向量组A线性表示
  - 矩阵语言：有矩阵K，使$B = AK$ 。方程$AX = B$有解。
  - 这些论述都可对应充要条件$R(A) = R(A, B)$，必要条件 $R(B) \leq R(A)$。

向量组的线性相关性

- **线性相关**：向量组A：$a_1, a_2 \ldots a_m$，如果存在不全为0的数$k_1, k_2 \ldots k_m$ ， 使得$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \ldots k_m a_m = 0$成向量组A是线性相关，否则线性无关。
- 📌 定理4：向量组A线性相关的充要条件是它所构成的矩阵秩小于向量个数m，向量组线性无关的充要条件是$R(A) = m$

- 🎯：线性相关从方程组角度理解，$Ak=0$，齐次线性方程组有非零解。$R(A)<m$。线性无关则只有零解，$R(A)=m$。从几何角度理解，向量组的某个向量可被表示其他向量表示。比如3个三维向量，一个向量可被其他两个向量表示，说明它们处在同一平面，此时三个三维向量不能表示一个三维空间，只能表示一个二维平面。如果两个向量都可被另一个向量表示，说明此时它们在同一直线上，不能表示一个二维平面，只能表示一个一维的直线。矩阵的秩就是向量张成空间的维数。
- 📌 定理5：
  - 1）若向量组A：$a_1,a_2\ldots a_m$线性相关，则向量组B：(A,b)线性相关。反之，若向量组B线性无关，则向量组A线性无关。
  - 2）m个n维向量的向量组，当维数n<向量个数m时，一定线性相关。n+1个n维向量一定线性相关。
    - 🎯：1）矩阵的秩：$R（A）\le\{m,n\}$，当$m>n$时，列一定不满秩。2）向量组：如果其中n个向量线性无关，即可张成n维空间，表示空间中所有向量，剩余的m-n个向量一定可被线性表示，即线性相关。
  - 3）设向量组A：$a_1,a_2\ldots a_m$线性无关，而向量组B：(A,b)线性相关，则向量b一定能由向量组A线性表示，且表示式唯一。
    - 🎯：非齐次线性方程组有解，且$R(A)=R(A,b)=m$，有唯一解。

向量的秩

- 📌 定理6：矩阵的秩等于它的列向量组的秩，也等于它的行向量组的秩
- 最大线性无关向量组：向量组A中可选出r个向量组成的向量组A_0线性无关，任意r+1个向量线性相关，称A_0是向量组A的最大线性无关向量组。r的个数即向量组A的秩。
  - 推论：向量组A_0是向量组A的一部分，且满足A_0线性无关，A中任意向量可由A_0线性表示，则向量组A_0是向量组A的最大无关组。

线性方程组的解的结构

- 解向量：向量方程$Ax=0(Ax=b)$，若$x_1=\xi_{11},x_2=\xi_{21},\dots x_n=\xi_{n1}$为向量方程的解，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}\xi_{11}\\\xi_{21}\\\vdots\\\xi_{n1}\end{bmatrix}$为方程的解向量。

齐次线性方程组

- 性质1：若$x=\xi_1,x=\xi_2$为向量方程$Ax=0$的解，$x=\xi_1+\xi_2$也是方程的解。
  - 🎯：$A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0+0=0$
- 性质2：若$x=\xi_1$ 为向量方程$Ax=0$的解，$x=k\xi_1$也是方程的解
  - 🎯：$A(k\xi_1)=k\times A\xi_1=k\times 0=0$
- 方程的所有解组成的集合集记作S，S的最大无关组S_0，S_0的任何线性组合都是方程的解。齐次线性方程组的解集的最大无关组成为该齐次线性方程组的基础解系。
  - $x=k_1\xi_1+k_2\xi_2+\dots k_{n-r}\xi_{n-r}$
- 📌 定理7：矩阵$A_{m\times n}$ 的秩$R(A)=r$ ，则n元齐次方程组 $Ax=0$的解集S的秩$R_s=n-r$ 。
  - $R(A)=n$时，只有零解，$R(A)<n$ 时，基础解集有n-r个向量，通解形式不唯一，向量方程任意n-r个线性无关的解都可以构成基础解集。
  - 🎯：齐次线性方程组通过系数矩阵化为行最简式解基础解集。
- 矩阵A和B列数相等，证$R(A)=R(B)$，只需证齐次方程组$Ax=0$，和$Bx=0$同解。
  - $Ax=0$，和$Bx=0$同解。$R(A)=R(B)=n-R_S$

非齐次线性方程组

- 性质3：设$x=\eta_1$和$x=\eta_2$都是 $Ax=b$方程组的解，那么$x=\eta_1-\eta_2$是对应的齐次线性方程组$Ax=0$的解。
  - 🎯：$A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0$
- 性质4：设$x=\eta$是方程组$Ax=b$的解，$x=\xi$是方程组$Ax=0$的解，则$x=\xi+\eta$ 仍是$Ax=b$的解。
  - 🎯：$A(\xi+\eta)=A\xi-A\eta=0+b=b$。

- 非齐次线性方程组的解： $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \ldots k_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$ (η^*方程组的任一解)
- 课后作业有证：$\eta, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$线性无关

向量空间

- **向量空间**：设V为n为向量的集合，如果集合V非空，且集合V对于向量的加法和乘法两种运算封闭，那么称集合V为向量空间。
  - 封闭：对V中向量进行乘法加法运算后还是属于V，若$a \in V, b \in V$，则$a + b \in V$。若$a \in V, \lambda \in R$，则$\lambda a \in V$
  - 🎯：如三维向量全体R^3， 二维向量R^2，一维向量R都是向量空间。
  - 齐次线性方程组的解集$S = \{x|Ax = 0\}$ 是向量空间
  - 非齐次线性方程组的解集$S = \{x|Ax = b\}$ 不是向量空间。加法乘法不封闭。
- **r维向量空间**：向量空间V中，有r个 向量∈ V，且满足这r个向量线性无关，V中任意向量可由这r个向量表示，则称为这r个向量组成的向量组是向量空间V的一个基，r是向量空间的维数，V是r维向量空间。
- 0维向量空间只有零向量。
- **坐标**：如果在向量空间V中取一个基$(a_1, a_2 \ldots a_r)$，那么V中任一向量x可惟一表示为：$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \ldots \lambda_r a_r$ 数组$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_r$ 是向量x在基$(a_1, a_2 \ldots a_r)$的坐标。
- **自然基**：$e_1, e_2, \ldots e_n$ ，n维向量空间R^n 中的单位坐标向量组。以自然基为基，向量x可表示为：$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$