

Летняя Олимпиадная школа МФТИ 2 смена, 15 – 27 июля 2018

Лемма Холла Нилов Ф.К.

Задача 1. Докажите лемму Холла по индукции, рассмотрев следующие две возможности:

- а) существует множество из r юношей, для которых совокупное число знакомых им девушек в точности равно r;
 - б) для любых r юношей совокупное число знакомых им девушек не меньше r+1.
- Задача 2. В каждой строке и каждом столбце шахматной доски стоит ровно по 3 ладьи. Докажите, что можно выбрать 8 не бьющих друг друга ладей.
- Задача 3. Из шахматной доски вырезали 7 клеток. Докажите, что на оставшиеся клетки можно поставить 8 не бьющих друг друга ладей.
- **Задача 4.** Все вершины двудольного графа имеют степень k. Докажите, что а) в этом графе есть совершенное паросочетание;
- б) Докажите, что ребра этого графа можно раскрасить в k цветов правильным образом (то есть так, чтобы никакие два одноцветных ребра не имели общей вершины).
- Задача 5. Пусть в таблице $n \times n$ записаны неотрицательные числа и сумма чисел в каждой строке и каждом столбце равна 1. Докажите, что можно выбрать n клеток таблицы, никакие 2 из которых не стоят в одном и том же столбце и одной и той же строке, и при этом в каждой из этих клеток записанное число положительно.
- Задача 6. Табло состоит из 2018 лампочек. Двое играют в игру. Ход игрока состоит в том, что он изменяет состояние одной лампочки (т.е. включает или выключает ее). При этом нельзя повторять позицию, которая уже встречалась на табло. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?
- Задача 7. Лемма Холла для арабских стран. Среди n юношей и нескольких девушек некоторые юноши знакомы с некоторыми девушками. Каждый юноша хочет жениться на m знакомых девушках (девушка может быть замужем только за одним юношей). Докажите, что они могут это делать тогда только тогда, когда для любого набора из k юношей количество знакомых им в совокупности девушек не меньше km.