

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ - 2

ТЕОРИЯ ГРАФОВ (PHYSTECH.INTERNATIONAL)

Задача 21 В норке живет семья из 24 мышей. Каждую ночь ровно четыре из них отправляются на склад за сыром. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждая мышка побывала на складе с каждой ровно по одному разу?

Задача 22 В общежитии живут 214 студентов. Каждый час ровно 4 из них отправляются на кухню перекусить. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждый из студентов столкнулся с каждым на кухне ровно по одному разу?

Задача 23 Дано дерево с $n \geq 2$ вершинами. В каждую вершину поставили по действительному числу x_1, x_2, \dots, x_n . Далее на каждом ребре записали произведение чисел в концевых вершинах. Сумма всех чисел на ребрах получилась равной S . Докажите, что имеет место следующее неравенство

$$\sqrt{n-1}(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) \geq 2S.$$

Задача 24 Докажите, что нельзя так раскрасить кубик с гранью в одну клетку в черный и белый цвета, чтобы его можно было прокатить по доске и он побывал на каждой клетке единожды и каждый раз соприкасающаяся с доской грань кубика и клетка, на которой он стоит, были одного цвета.

Задача 25 Множество клеток на клетчатой плоскости назовем ладейно связным, если из любой его клетки можно попасть в любую другую, двигаясь по клеткам этого множества ходом ладьи (ладье разрешается перелетать через поля, не принадлежащие нашему множеству). Докажите, что ладейно связанное множество из 100 клеток можно разбить на пары клеток, лежащих в одной строке или в одном столбце.

Задача 26 В некоторой группе из 12 человек среди каждых 9 найдутся 5 попарно знакомых. Докажите, что в этой группе найдутся 6 попарно знакомых.

Задача 27 В стране N городов. Между любыми двумя из них проложена либо автомобильная, либо железная дорога. Турист хочет объехать страну, побывав в каждом городе ровно один раз, и вернуться в город, с которого он начнет путешествие, и маршрут так, что ему придется поменять вид транспорта не более одного раза.