等离子体诊断方法-第二章：折射

本文相关代码与介绍可在[PlasmaDiagnostic/Interferometer at main · DMCXE/PlasmaDiagnostic (github.com)]中找到

写在前面 基本用法

计算文件为`DataProcess.py`，存在两个主要功能：

SignalAnalsis 构成了一个数据处理模块，最大程度模拟了我想象中可以单纯凭借电路实现的功能。输入采样频率fs，目标中频fm， 诊断信号，对照信号，可返回相位差等

```
class SignalAnalsis:
    def __init__(self,fs,fm_target,signal_plasma,signal_ref):...
```

density_string_integral构成了相位信息至密度信息的换算模块

```
def density_string_integral(phi,f=650*1e9):
    '''
    计算弦密度积分
    '''
    e = 1.60217662e-19
    m_e = 9.10938356e-31
    c = 299792458
    epsilon_0 = 8.854187817e-12
    return phi*np.pi*c*epsilon_0*m_e*f/(e**2)
```

以Shot#232094中sig1为例：

```
from DataProcess import SignalAnalysis, density_string_integral
SA = SignalAnalysis(
    fs              = fs,
    fm_target       = fm_target,
    signal_plasma   = sig1,
    signal_ref      = ref
)
phi  = SA.phi
phi_fix = SA.phi #经过零点漂移矫正后的相位
ndl  = density_string_integral
```

目录

等离子体诊断方法-第二章：折射
    写在前面 基本用法
    目录
1 多道偏振干涉仪诊断系统的应用
    1.1 弦密度积分推导
    1.2 探测器信号的采集与处理

1.2.1 探测器采样信号的构成
1.2.2 相位的提取
1.2.2.1 处理流程
1.2.2.2 离散傅里叶变换
1.2.2.3 中频提取
1.2.2.4 离散傅里叶逆变换
1.2.2.5 过零追踪鉴相器
1.2.2.6 零漂补偿
1.2.3 测试集测试
1.3 实验数据的处理结果
Shot#232091
Shot#232092
Shot#232094
1.4 误差分析与遗留问题
2. Homodyne & Heterodyne
3. 推导柱对称中的散射

1 多道偏振干涉仪诊断系统的应用

1.1 弦密度积分推导

要在冷等离子体假设下的折射系数的Appleton-Hartree公式：

$$\mu^2 = 1 - \frac{X(1-X)}{1 - X - \frac{1}{2}Y^2\sin^2\theta \pm [(\frac{1}{2}Y^2\sin^2\theta)^2 + (1-X)^2Y^2\cos^2\theta]^{1/2}}$$

其中，$X \equiv \omega_{pe}^2/\omega^2, \quad Y \equiv \omega_{ce}/\omega, \quad \mu \equiv kc/\omega$

在托卡马克诊断时，往往存在背景磁场，且波矢 $\vec{k}$ 与磁场 B_0 相互垂直。对于寻常波入射，存在 $\vec{E}//\vec{B}_0$，此时$Y=0$, 这时，折射系数可以写为：

$$\mu^2 = 1 - X = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} = 1 - \frac{n_e}{n_c}$$

光束经过等离子体产生的相移变换表示为：

$$\phi_p = \int (k_{plasma} - k_0) dl$$

折射系数同样满足定义：

$$\mu \equiv \frac{kc}{\omega} = \frac{k}{k_0}$$

因此，相移可以进一步的化简为：

$$\begin{aligned}\phi_p = \int (k_{plasma} - k_0) dl &= -\int \frac{\omega}{c}(1-\mu) dl \\ &= -\frac{\omega}{c}\int (1 - (1 - \frac{n_e}{n_c})^{1/2}) dl\end{aligned}$$

考察$(1 - n_e/n_c)^{1/2}$，当等离子体中电子密度 n_e 远远小于截止密度 n_c 时，将此表达式应用泰勒展开有：

$$(1 - \frac{n_e}{n_c})^{1/2} = 1 - \frac{1}{2}\frac{n_e}{n_c} - \frac{1}{8}(\frac{n_e}{n_c})^2 + o(\dots)$$

截取到第二项，相移表达进一步简化为：

$$\phi_p=-\frac{\omega}{c}\int(1-(1-\frac{n_e}{n_c})^{1/2})dl=-\frac{\omega}{2n_c c}\int n_e dl$$

截止密度n_c表示为(即对应截止频率时等离子体的振荡频率)：

$$n_c=\frac{\varepsilon_0 m_e}{e^2}\omega^2=\frac{\varepsilon_0 m_e}{e^2}f^2[Hz]=\frac{\varepsilon_0 m_e c^2}{e^2}\lambda^{-2}[m]$$

移表达进一步简化为：

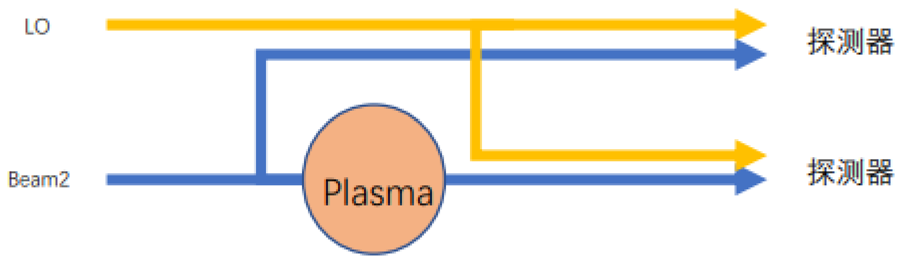
$$\phi_p=-\frac{\omega}{2n_c c}\int n_e dl=\frac{e^2}{\pi c\varepsilon_0 m_e}f^{-1}\int n_e dl$$

即得到了相位移与等离子体密度弦积分的关系。

1.2 探测器信号的采集与处理

1.2.1 探测器采样信号的构成

某干涉仪组成原理如下所示，是一个典型的外差干涉仪：



在经过等离子体诊断区域的Beam1信号E_1和LO信号E_2可以表示为：

$$\begin{aligned}E_1&=A_1\cos(\omega_1 t+\phi(t))\\E_2&=A_2\cos(\omega_2 t)\end{aligned}$$

未经过等离子体诊断区域的Beam1信号E_0和LO信号E_2可以表示为：

$$\begin{aligned}E_0&=A_0\cos(\omega_1 t)\\E_2&=A_2\cos(\omega_2 t)\end{aligned}$$

在探测器上分别进行混频，有

$$\begin{aligned}\text{signal\_plasma}=(E_1+E_2)^2&=A_1^2\cos^2(\omega_1 t+\phi)+A_2^2\cos^2(\omega_2 t)\\&+A_1A_2\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\phi]+A_1A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\phi]\\&=\frac{1}{2}(A_1^2+A_2^2)+\frac{1}{2}A_1^2\cos(2\omega_1 t+2\phi)+\frac{1}{2}A_2^2\cos(2\omega_2 t)\\&+A_1A_2\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\phi]+A_1A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\phi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{signal\_refer}=(E_0+E_2)^2&=A_0^2\cos^2(\omega_1 t)+A_2^2\cos^2(\omega_2 t)\\&+A_0A_2\cos[(\omega_1+\omega_2)t]+A_0A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t]\\&=\frac{1}{2}(A_1^2+A_2^2)+\frac{1}{2}A_1^2\cos(2\omega_1 t)+\frac{1}{2}A_2^2\cos(2\omega_2 t)\\&+A_1A_2\cos[(\omega_1+\omega_2)t]+A_1A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t]\end{aligned}$$

对于此两束信号，可取出中频角速度为$\omega_m=\omega_1-\omega_2$。在实际的诊断设备中，LO源与Beam源的频率可达到数百GHz，而两者的差频（中频）往往是数MHz，对探测器信号采样频率往往为数十MHz。

由**Nyquist采样定理**：

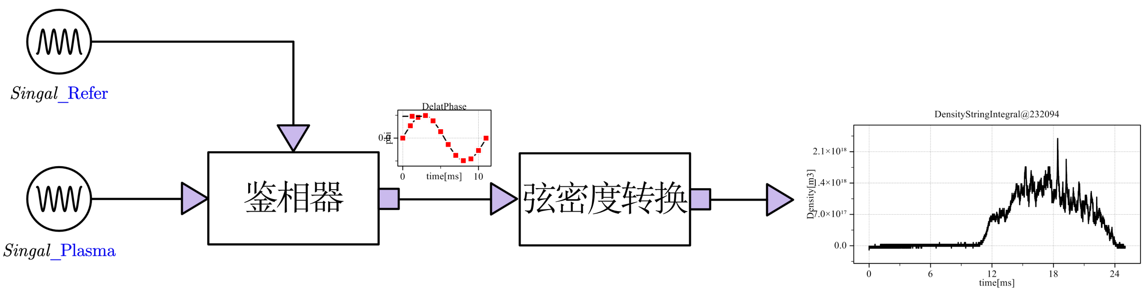
> 为了不失真地恢复模拟信号，采样频率应该不小于模拟信号频谱中最高频率的两倍。

因此在该混频信号中，可达到数百GHz的LO源与Beam源的频率在数十MHz的采样频率下，完全无法满足Nyquist定理，因而对应的信号全部失真。即原始混频信号中角速度为$\omega_1, \omega_2, \omega_1 + \omega_2$的的信号将失真，而信号差频（中频）对应的角速度分量$\omega_m = \omega_1 - \omega_2$由于只有数MHz，相对采样信号而言满足Nyquist定理，能够被不失真的被采集出来。

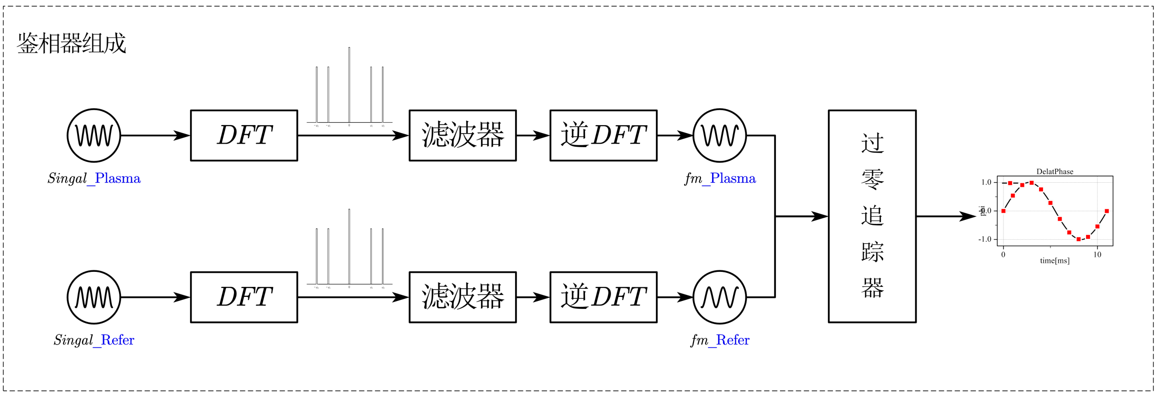
1.2.2 相位的提取

1.2.2.1 处理流程

整体流程为



鉴相器组成为



1.2.2.2 离散傅里叶变换

对于实信号$x(t)$的采样信号$x[n]$，通过离散傅里叶变换DFT可以变换为$X[t]$：

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j(2\pi/N)kn} \quad ,(0 \le k \le N-1)$$

对应的离散傅里叶逆变换为：

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j(2\pi/N)kn} \quad ,(0 \le n \le N-1)$$

需要注意的是：

1. 变换后序列$X[k]$是复数序列，前一半数据与后一半数据共轭对称
2. 变换后序列$X[k]$中k点的含义是：$f = kf_s/N$，即序列索引对应采样频率的$1/N$

这也说明，如果需要通过离散傅里叶变换对频谱进行处理，最好在处理时同时考虑共轭频率部分对原始信号的贡献。

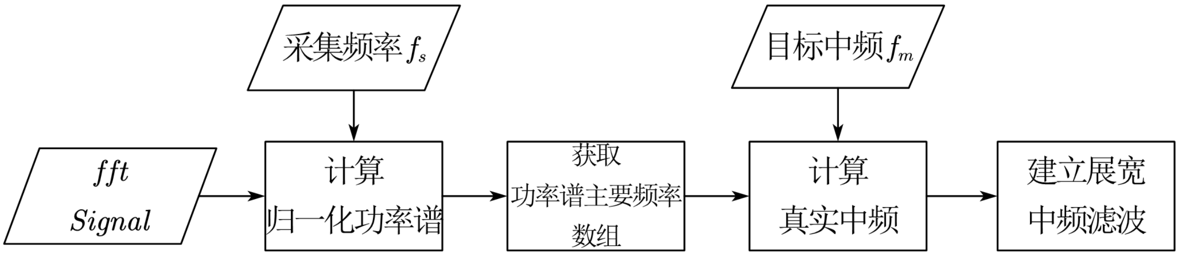
在python中，这一步可以通过使用`np.fft`包中的`fft()`函数进行快速傅里叶变换（FFT）

```
fft_signla = np.fft.fft(signal)
```

1.2.2.3 中频提取

对原始信号进行带通滤波，在中频f_m左右设置一个带通滤波器，提取中频f_m范围内的主要频率，过滤掉高频与基频范围内的噪音。

在对于本数据的处理中，由于受到多普勒效应等或源信号频率误差，会导致实际中频并不严格的处于2.125Mhz，由于缺乏对实际物理图像的了解，导致中频会产生一点的偏差，在充分的了解频移特性与范围前，尚且无法很好的确定带通滤波器的范围。在此采用了一种伪带通滤波：先找到真实的中频，再依据一定展宽提取。



在python中提供了多种便于计算处理DFT的工具：

根据`np.fft.fftfreq()`可以方便地获得每个索引对应的频率，由此即可计算归一化功率谱

```
def get_power_spectrum(fs,fft_signal):
        #通过fft获得结果以及频率分布
        frequencies = np.fft.fftfreq(len(fft_signal), 1/fs)
        #计算不同频率分量的功率谱密度
        power_spectrum = np.abs(fft_signal)**2
        #计算总功率
        total_power = np.sum(power_spectrum)
        #计算每个频率的占比
        power_percentages = (power_spectrum/total_power)*100
        #归一化
        power_percentages = power_percentages/np.max(power_percentages)
        return frequencies,power_percentages
```

在归一化功率谱中，先选出占有主要功率强度的频率，通过与目标中频距离确定真实的中频位置：

```
#确定主要功率强度
def get_main_frequencys():...
    return main_frequencies
#获得真实中频
def get_fm_real(fm_target,freq_main):...
    return fm_real
```

构建带通滤波器，获得中频分量

```
freq_range = range * fm_real
return filtered_fft
```

1.2.2.4 离散傅里叶逆变换

对于滤波后产生的频谱，进行离散傅里叶逆变换，即可获得中频信号

```
fm_signal = np.fft.ifft(filtered_fft)
```

1.2.2.5 过零追踪鉴相器

当对比信号和实际信号的中频被提取出来后，即可通过追踪在每个采样时间内正向通过零点的时间获得相位差。两信号正向过零的时间为：

$$
\omega_m t_R = 2\pi m_R + \frac{3}{2}\pi
$$
$$
\omega_m t_S + \phi_p = 2\pi m_S + \frac{3}{2}\pi
$$

相移可以表示为：

$$
\phi_p = \omega_m (t_R - t_S) + 2\pi (m_S - m_R)
$$

在粗略的认为相移不会超过2π的前提下，相移可以简写为

$$
\phi_p = \omega_m (t_R - t_S)
$$

正向过零点追踪能够被简写为：

```
def zero_detector(fs,signal):
    time_array = np.arange(0,self.time_tot,1/fs)
    #如果认为信号的相位差不会大于2pi，那么可以简化上述过程
    zero_crossing = np.where(np.diff(np.sign(signal))>0)[0]
    t = np.array([time_array[tt] for tt in zero_crossing])
    return t
```

追踪出零点，即可给出在每个采样时间对应的相位差：

```
def phase_detector(fs,fm,signal_plasma,signal_ref):
    t_p = self.zero_detector(fs,signal_plasma)
    t_r = self.zero_detector(fs,signal_ref)
    return (t_r-t_p)*2*np.pi*fm
```

1.2.2.6 零漂补偿

由于诊断系统在空间中具有不对称性，信号采集器自身也可能存在温度部分不均等问题，导致诊断系统整体产生零点漂移，表现为在系统中为进行放电时，仍然能够测出相位差。因此需要对零点漂移进行修正。这里非常简单的考虑将相位差整体平移消除直流分量。

```
 def phase_zero_fix(self,phi):
        #对相位做零漂补偿
        phi_0 = phi[:int(0.1*len(phi))]
        phi_average = np.sum(phi_0)/len(phi_0)
        return phi - phi_average
```

1.2.3 测试集测试

为了确定上述算法的可用性，这里通过一个示例：对于模拟数据

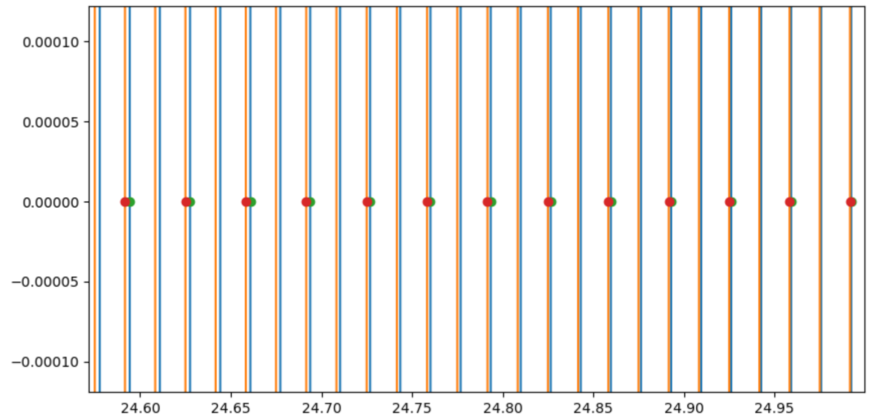
$$f(t) = \cos(2\pi \cdot 10 \cdot t + \sin(t)) + \cos(2\pi \cdot 30 \cdot t + sin(t)) + \cos(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + noise(t)$$

对应参考频率信号为：

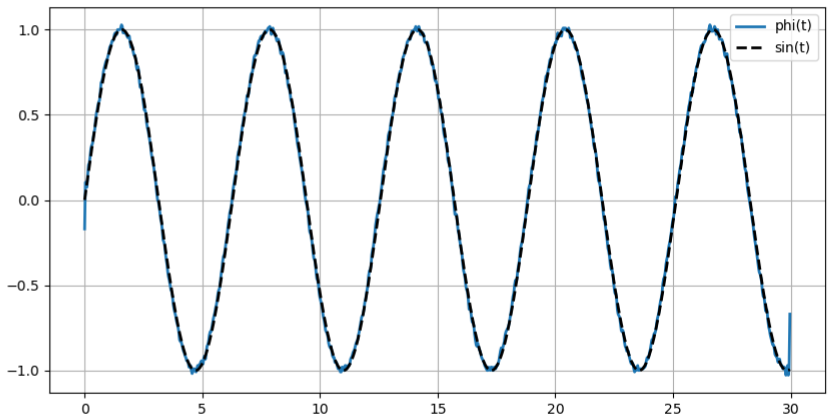
$$f(t) = \cos(2\pi \cdot 30 \cdot t)$$

采样频率为20Khz, 信号持续时间30秒，目标中频频率为30Hz。

经过上述流程，可以提取出中频信号与过零点：



并可以正确的提取出中频信号的相位差sin(t)：



验证了算法的正确性。

1.3 实验数据的处理结果

实验数据共有三组，分别为Shot#232091、Shot#232092和Shot#232094，每个数据文件中包含的信号种类如下图示

诊断内容	信号名	采样率	单位
参考道信号	ref	60MHz	mv
第1道信号	sig1	60MHz	mv
第2道信号	sig2	60MHz	mv
第3道信号	sig3	60MHz	mv
等离子体电流_时间	t_ip1	250KHz	ms
等离子体电流	ip1	250KHz	A

数据处理时，首先指定文件(以sig1为例）：

```
import scipy.io as sio
shot = '232094'
data = sio.loadmat(shot+'.mat')
Ip =data['ip1'].reshape(1,-1)[0]
t_Ip = data['t_ip1'].reshape(1,-1)[0]
sig1 = data['sig1'].reshape(1,-1)[0]
```

指定采集频率、目标中频

```
fs          = 60    *1e6
fm_target = 2.125*1e6
```

将数据输入鉴相器

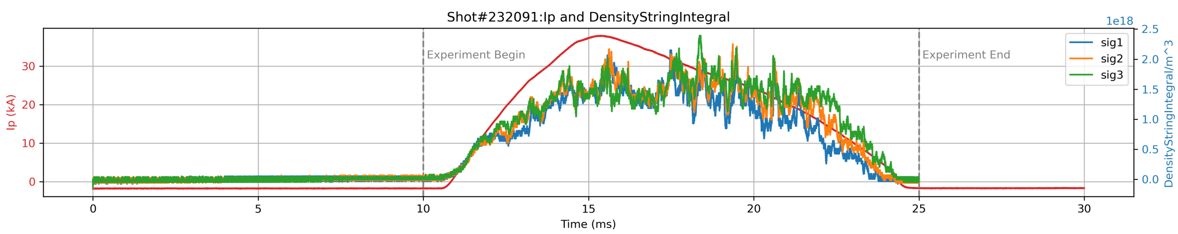
```
SA = SignalAnalysis(
    fs              = fs,
    fm_target       = fm_target,
    signal_plasma   = sig1,
    signal_ref      = ref
)
```

将数据输入弦密度积分计算器

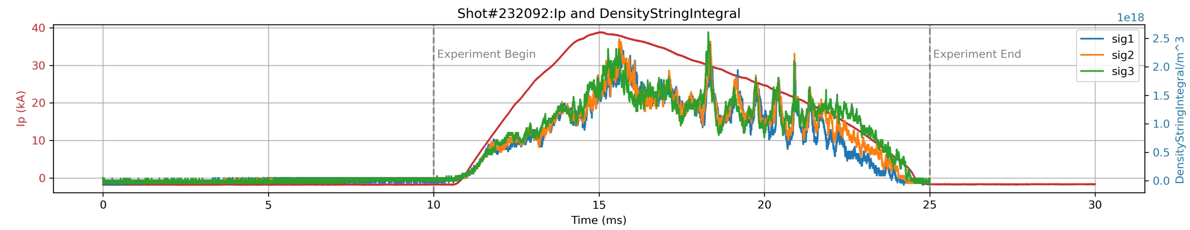
```
phi  = SA.phi_fix                     #获取零点漂移修正后的相位差数据
dsi  = density_string_integral(phi)   #计算出弦密度积分
```

最后，能够得出Shot#232091、Shot#232091和Shot#232091的计算数据

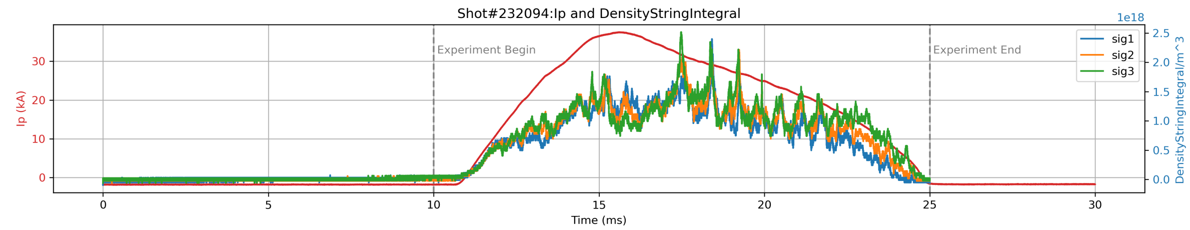
Shot#232091



Shot#232092



Shot#232094



1.4 误差分析与遗留问题

1. 在消除零点漂移的时候，采用的方法过于简单，不能产生很好的效果
2. 实际上，注意到三炮数据在电流下降段，会出现多个密度峰值，在这些峰值处，实际对应的相位差大于 2π ,实际上无法使用之前我们假设的相位差小于 2π 的计算假设。但是如果归到$[0, 2\pi]$中，这些峰值又会变成瞬时的第密度甚至零密度。如何解释这些数据需要进一步讨论。
3. 本文数据处理的前提是：尽量模仿能够在FPGA或片上系统实现的信号处理方式。存在一些更先进的算法，例如Hilbert变换、EMD经验模态分解、小波变换等，具有很大的分析上述数据与解释的空间和准确性。为了更好的处理这些数据、获得更丰富的物理结果，希望能够在未来的工作中进一步发展。

2. Homodyne & Heterodyne

无论是零差干涉仪还是外差干涉仪，两臂信号混合之后均会产生两臂频率相加项和两臂频率相减相，主要关心频率相减项$\omega_m = \omega_1 - \omega_2$.

$$\begin{aligned}\text{signal\_plasma} = (E_1+E_2)^2 &= A_1^2\cos^2(\omega_1 t+\phi) + A_2^2\cos^2(\omega_2 t) \\ &+ A_1A_2\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\phi] + A_1A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\phi] \\ &= \frac{1}{2}(A_1^2+A_2^2) + \frac{1}{2}A_1^2\cos(2\omega_1 t+2\phi) + \frac{1}{2}A_2^2\cos(2\omega_2 t) \\ &+ A_1A_2\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\phi] + A_1A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\phi]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{signal\_refer} = (E_0+E_2)^2 &= A_0^2\cos^2(\omega_1 t) + A_2^2\cos^2(\omega_2 t) \\ &+ A_0A_2\cos[(\omega_1+\omega_2)t] + A_0A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t] \\ &= \frac{1}{2}(A_1^2+A_2^2) + \frac{1}{2}A_1^2\cos(2\omega_1 t) + \frac{1}{2}A_2^2\cos(2\omega_2 t) \\ &+ A_1A_2\cos[(\omega_1+\omega_2)t] + A_1A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t]\end{aligned}$$

零差探测（Homodyne Detection）

当$\omega_m \ll \omega_1, \omega_2$时，即$\omega_m = 0$, 对应的探测技术即为零差探测技术。

经过等离子体的诊断信号对应有表达式：

$$\text{signal\_plasma} = (E_1+E_2)^2 = \frac{1}{2}(A_1^2+A_2^2) + \frac{1}{2}A_1^2\cos(2\omega_1 t+2\phi) + \frac{1}{2}A_2^2\cos(2\omega_2 t) + A_1A_2\cos[(\omega_1+\omega_2)t+\phi] + A_1A_2\cos(\phi)$$

该信号的强度I主要贡献项为:

$$I_{plasma} \propto \frac{1}{2}(A_1^2+2A_1A_2\cos(\phi)+A_2^2)$$

对于对比信号

$$\text{signal\_refer} = (E_0+E_2)^2 = \frac{1}{2}(A_1^2+A_2^2) + \frac{1}{2}A_1^2\cos(2\omega_1 t) + \frac{1}{2}A_2^2\cos(2\omega_2 t) + A_1A_2\cos[(\omega_1+\omega_2)t] + A_1A_2\cos(0)$$

该信号的强度I主要贡献项为:

$$I_{refer} \propto \frac{1}{2}(A_1^2+2A_1A_2+A_2^2) = \frac{1}{2}(A_1+A_2)^2$$

主要能够通过接受信号的强度判断出判断出相位变换。但是由于强度项具有平方特征，因此只能得到相位变化的绝对值，无法通过强度判断相位是正向变换还是反向变换，也就无法直接判断出等离子体弦密度积分是增长还是下降。

外差探测（Heterodyne Detection）

当$\omega_m \neq 0$, 对应的探测技术即为外差探测技术。当ω_1, ω_2远远大于采样频率，而ω_m相比于ω_1, ω_2较小，且相对于采样频率而言能够满足Nyquist采样定理（采样频率大于f_m两倍），此时就能够将混杂在信号中频率为f_m的分量采集出来。即得到:

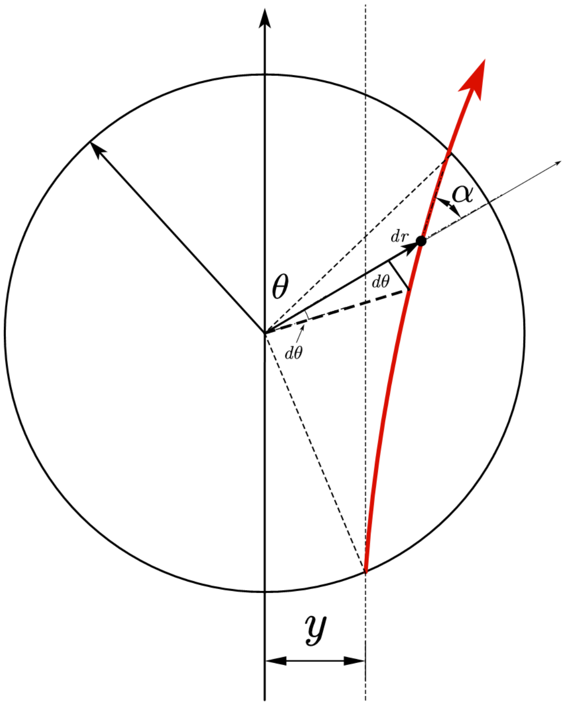
$$\text{signal\_plasma} = A_1A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t+\phi]$$
$$\text{signal\_referen} = A_1A_2\cos[(\omega_1-\omega_2)t]$$

此时可以通过比较两个信号相位的相位差直接获得相位变化，且能够反应相位的相对变化，可以分辨出相位信号是正向的还是逆向的。即能够判断出等离子体弦密度积分是增长还是下降的。同时，外差探测不需要严格的保证两个源频率相同，只需要保证源本身输出频率是稳定的。同样的，如果只考虑相对相位的变化，通过合理的布置可以使其具有抗环境干扰能力，起到类似于差分补偿电路的作用。

3. 推导柱对称中的散射

#存在大量问题，还需要进一步修改

> Consider a beam propagating along a chord of a refractive cylinder at a distance y from the axis. Suppose the cylinder has a refractive index N(r), where r is the radius. Obtain a general equation for the angular deviation of the beam θ due to refraction when $\theta r \ll y$ so that the chord can be approximated as straight. In the case where $\omega \gg \omega_p$ and $n = n_o(1-r^2/a^2)$, calculate the value of y at which 0 is greatest and prove that this maximum 0 is n_0/n_c



光线在介质中传播常见的方程形式为：

$$\nabla n=\frac{d}{ds}(n\frac{dr}{ds})$$

以圆柱圆截面圆心为原点建立极坐标系，由圆的的几何特性易得，射线方向与法线的夹角始终等于射线方向与径向方向的夹角。由射线折射的斯涅尔定律：

$$n_1\sin(\theta_1)=n_2\sin(\theta_2)$$

在球对称坐标系中，根据传播方程可以推出矢积关系：

$$r\times\frac{dr}{d\eta}=const$$

其中， η 为路径L的弧长S ，该方程说明了光线始终在这个平面内传播，标量形式满足：

$$N(r)\cdot r\cdot\sin(\alpha)=const$$

其中，α 为射线方向与径向的夹角。在光线入射边界处，$N(R)=1$, $R\sin(\alpha)=y$ ，则常数即为

$$N(r)\cdot r\cdot\sin(\alpha)=y$$

根据光线运动的几何关系，可以得到

$$(\frac{r\cdot d\theta}{dr})^2=\tan^2(\alpha)$$

与折射定律联立，可以得到

$$(\frac{r\cdot d\theta}{dr})^2=\frac{1}{N^2(r)\cdot r^2/y^2-1}$$

对偏转角进行积分, 其中 r_0 是射线上距离原点最近的

$$\theta(y)=\pi-2\int_{r_0}^{\infty}\left|\frac{d\theta}{dr}\right|dr=\pi-2\int_{r_0}^{\infty}(N^2(r)r^4y^{-2}-r^2)^{-1/2}dr$$

折射率与等离子体密度直接具有关系式：

$$N(r)=(1-\frac{n_e}{n_c})^{1/2}$$

当$n_e=n_0(1-r^2/a^2)$时，有

$$N(r)=\frac{r}{a}$$

因此$\theta(y)$的表达式进一步写为

$$\theta(y)=\sin^{-1}\frac{V_0\left[(\frac{y}{a})^2-(\frac{y}{a})^4\right]^{1/2}}{\left[V_0(\frac{y}{a})^2+(\frac{1-V_0}{2})^2\right]^{1/2}}$$

其中，$V_0=n_0/n_c$。对上式求解，可以得到对于θ最大的值为V_0